Nhà giáo ưu tú - Th.S **LÊ HOÀNH PHÒ**

10 *trọng điểm*
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN 10

★ Dành cho học sinh lớp 10 chương trình chuẩn và nâng cao
★ Ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài
★ Biên soạn theo nội dung và cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT

ĐHQG HÀ NỘI **NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 10, lớp 11, lớp 12 có tư liệu đọc thêm để nâng cao trình độ, các bạn học sinh giỏi tự học bổ sung thêm kiến thức kỹ năng, các bạn học sinh chuyên Toán tự nghiên cứu thêm các chuyên đề, nhà sách ***KHANG VIỆT*** *hợp tác biên soạn bộ sách 10 TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN gồm 3 cuốn:*

- ***10 TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 10***
- ***10 TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 11***
- ***10 TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 12***

Cuốn 10 TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 10 này có 21 chuyên đề với nội dung là Tóm tắt kiến thức trọng tâm của Toán phổ thông và Toán chuyên, phần các bài Toán chọn lọc có khoảng 900 bài với nhiều dạng loại và mức độ từ cơ bản đến phức tạp, bài tập tự luyện khoảng 250 bài, có hướng dẫn hay đáp số.

Cuối sách có 3 chuyên đề nâng cao: ĐA THỨC, PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN và TOÁN SUY LUẬN.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên tập song cũng không tránh khỏi những khiếm khuyết sai sót, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc để lần in sau hoàn thiện hơn.

Tác giả

LÊ HOÀNH PHÒ

Nhà sách Khang Việt xin trân trọng giới thiệu tới Quý độc giả và xin lắng nghe mọi ý kiến đóng góp, để cuốn sách ngày càng hay hơn, bổ ích hơn. Thư xin gửi về:

Cty TNHH Một Thành Viên – Dịch Vụ Văn Hóa Khang Việt
71, Đinh Tiên Hoàng, P. Đakao, Quận 1, TP. HCM
Tel: (08) 39115694 – 39111969 – 39111968 – 39105797 – Fax: (08) 39110880
Hoặc Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

Chuyên đề 1: PHẢN ỨNG VÀ QUY NẠP

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương pháp phản chứng

Dạng $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$.

– Giả sử tồn tại $x_o \in X$ sao cho $P(x_o)$ đúng và $Q(x_o)$ sai, tức là giả sử điều kiện chứng minh là một mệnh đề sai. Dùng suy luận và kiến thức toán học để đi đến mâu thuẫn.

Hay để chứng minh $A \Rightarrow B$, ta giả sử B sai, từ đó suy dần đến A sai: trái giả thiết. Như vậy ta dùng mệnh đề phản đảo: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Cũng như vậy, để chứng minh một khẳng định P, ta có thể giả sử P sai rồi suy ra điều vô lý hoặc mâu thuẫn.

Chú ý: Dạng số nguyên m và k:

1) m chẵn (chia hết cho 2) : $m = 2k$
   m lẻ (không chia hết cho 2) : $m = 2k + 1$
2) m chia hết cho 3 : $m = 3k$
   m không chia hết cho 3 : $m = 3k$ hoặc $m = 3k + 2$, gộp lại thành $m = 3k \pm 1$.
3) Tổng quát: m chia hết cho n là $m = kn$ còn m không chia hết cho n là $m = kn + r$ với số dư $r = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Phương pháp quy nạp

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của n, ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh A(n) là một mệnh đề đúng khi $n = 1$.

Bước 2: Với k là một số nguyên dương tuỳ ý, từ giả thiết A(n) là một mệnh đề đúng khi $n = k$, chứng minh A(n) cũng là một mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

Chú ý: Nếu A(n) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq n_o$ thì ta kiểm chứng A(n) đúng khi $n = n_o$, còn ở phần sau, với giả thiết quy nạp là A(n) đúng khi $n = k \geq n_o$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. 1: Chứng minh: Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $x + y + xy = -1 \Rightarrow x + y + xy + 1 = 0$.

$\Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ hoặc $y + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$ hoặc $y = -1$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

Bài toán 1. 2: Cho số tự nhiên n. Chứng minh:

a) Nếu n^2 chẵn thì n chẵn.

b) Nếu n^2 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

a) Với số tự nhiên n. Giả sử n lẻ.

$\Rightarrow n = 2k + 1, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$

$\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2$ lẻ: trái giả thiết.

Vậy nếu n^2 chẵn thì n chẵn.

b) Cho n^2 chia hết cho 5. Giả sử n không chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 1, k \in \mathbf{N}$ thì

$n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$ không chia hết cho 5: mâu thuẫn

Nếu $n = 5k \pm 2, k \in \mathbf{N}$ thì

$n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$ không chia hết cho 5.: mâu thuẫn

Vậy nếu n^2 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5.

Bài toán 1. 3:

Cho hai phương trình: $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$, có $ac \geq 2(b + d)$.

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có $\Delta_1 = a^2 - 4b$.

Phương trình $x^2 + cx + d = 0$ có $\Delta_2 = c^2 - 4d$.

Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm $\Rightarrow \Delta_1 < 0$ và $\Delta_2 < 0$

Ta có: $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + c^2 - 4(b + d)$

$\geq a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 \geq 0$: mâu thuẫn

Vậy có ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Bài toán 1. 4: Chứng minh có ít nhất một trong ba phương trình

$ax^2 + 2bx + c = 0;\ bx^2 + 2cx + a = 0;\ cx^2 + 2ax + b = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Xét abc = 0, chẳng hạn a = 0 thì

Phương trình $bx^2 + 2cx + a = 0 \Leftrightarrow bx^2 + 2cx = 0$ có nghiệm x =0.

Xét $abc \neq 0$, thì ba phương trình đều là bậc hai. Giả sử cả 3 phương trình đều vô nghiệm nên:

$$\Delta_1' = b^2 - ac < 0; \Delta_2' = c^2 - ba < 0, \Delta_3' = a^2 - cb < 0$$

nên $\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' < 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca < 0$

Hay $\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] < 0$: vô lý.

Vậy có ít nhất một trong ba phương trình có nghiệm.

Bài toán 1. 5:

Chứng minh: Với 3 số x, y, z bất kỳ thì có ít nhất một bất đẳng thức sai:

$$|x| < |y - z|,\ |y| < |z - x|,\ |z| < |x - y|.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử đồng thời có 3 bất đẳng thức: $|x| < |y - z|,\ |y| < |z - x|,\ |z| < |x - y|$

Suy ra $x^2 < (y-z)^2 \Rightarrow (y-z)^2 - x^2 > 0 \Rightarrow (y-z+x)(y-z-x) > 0$

Tương tự có $(z-x+y)(z-x-y) > 0$ và $(x-y+z)(x-y-z) > 0$

Nên tích số

$(y-z+x)(y-z-x)(z-x+y)(z-x-y)(x-y+z)(x-y-z) > 0$

Hay $-(y-z+x)^2(z-x+y)^2(x-y+z^2 > 0$: vô lý: đpcm

Bài toán 1. 6:

Có tồn tại không 3 số a, b, c dương thoả mãn đồng thời 3 bất đẳng thức:

$$4a(1-b) > 1;\ 4b(1-c) > 1;\ 4c(1-a) > 1.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử cả 3 bất đẳng thức đều đúng với a, b, c dương:

$$4a(1-b) > 1;\ 4b(1-c) > 1;\ 4c(1-a) > 1$$

Suy ra $0 < a,b,c < 1$ và $64a(1-a).b(1-b).c(1-c) > 1$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$a(1-a) \le \frac{1}{4}; b(1-b) \le \frac{1}{4}; c(1-c) \le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\ a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le \frac{1}{64}$$

Hay $64a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le 1$: vô lý: đpcm

Bài toán 1.7: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ là tam thức bậc hai với hệ số nguyên. Chứng minh rằng: nếu f(x) có nghiệm hữu tỉ thì một trong ba hệ số a, b, c là chẵn.

Hướng dẫn giải

Giả sử a, b, c đều lẻ thì $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$, $c = 2n + 1$.

Theo giả thiết phương trình có nghiệm hữu tỉ nên

$\Delta = b^2 - 4ac$ là số chính phương lẻ $\Rightarrow \Delta = (2t + 1)^2 = b^2 - 4ac$.

Do đó: $(2k + 1)^2 - (2t + 1)^2 = 4(2m + 1)(2n + 1)$

$\Rightarrow 4k(k + 1) - 4t(t + 1) = 4(2m + 1)(2n + 1)$: vô lí vì vế trái là số chia hết cho 8 còn vế phải lại không chia hết cho 8 (đpcm).

Bài toán 1. 8: Chứng minh: Nếu hai số nguyên dương a, b có tổng bình phương chia hết cho 3, thì cả hai số đó đều chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Giả sử a hoặc b không chia hết cho 3.

– Xét a và b không chia hết cho 3: $a = 3k \pm 1$, $b = 3m \pm 1$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (3k \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2$

$= 9k^2 \pm 6k + 9m^2 \pm 6m + 2 = 3k' + 2.$

– Xét một số chia hết cho 3 còn một số không chia hết cho 3, chẳng hạn $a = 3k$, $b = 3m \pm 1$.

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 9k^2 + (3m \pm 1)^2 = 9k^2 + 9m^2 \pm 6m + 1 = 3m' + 1.$

Các trường hợp đều suy ra $a^2 + b^2$ không chia hết cho 3: trái giả thiết.

Bài toán 1. 9: Chứng minh: Nếu tích 2 số nguyên chia hết cho 11 thì có ít nhất 1 số chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

Cho 2 số nguyên m và n có tích mn chia hết cho 11.

Giả sử m và n không chia hết cho 11 thì:

$m = 11k + r$ với k nguyên và $r = 1,2,..., 10$

và $n = 11t + s$ với t nguyên và $s = 1,2,..., 10$.

Do đó $mn = (11k +r)(11t +s) = 11(11kt + ks + tr) +rs$.

Vì $r,s = 1,2,...,10$ nên rs không chia hết cho 11

Suy ra $mn = 11(11kt + ks + tr) +rs$ không chia hết cho 11: vô lý.

Bài toán 1. 10: Chứng minh:

a) $\sqrt{7}$ là số vô tỉ

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

c) $\sqrt[3]{5}$ là số vô tỉ.

Hướng dẫn giải

a) Trước hết ta chứng minh mệnh đề:

$\forall n \in \mathbf{N}$, n^2 chia hết cho 7 thì n chia hết cho 7.

Giả sử n không chia hết cho 7 $\Rightarrow n = 7k +r$, $k \in \mathbf{N}$, $r = 1,2,..,6$.

$\Rightarrow n^2 = (7k +r)^2 = 49k^2 + 14rk + r^2 = 7k' + r^2$

$\Rightarrow n^2$ không chia hết cho 7: trái giả thiết

Áp dụng: Giả sử $\sqrt{7}$ là số hữu tỉ.

$\Rightarrow \sqrt{7} = \frac{n}{m}$ với n, m nguyên dương, phân số $\frac{n}{m}$ tối giản

$\Rightarrow n^2 = 7m^2$ (1)

Do đó n^2 chia hết cho 7. Theo kết quả trên thì n chia hết cho 7

$\Rightarrow n = 7k$, nguyên dương. Thế vào (1): $49k^2 = 7m^2 \Rightarrow m^2 = 7k^2$.

Do đó m^2 chia hết cho 7 suy ra m chia hết cho 7 nên $\frac{n}{m}$ không tối giản: vô lý.

Vậy $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.

b) Giả sử $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số hữu tỉ $\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} = p$ là số hữu tỉ.

$\Rightarrow 2+3 +2\sqrt{6} = p^2 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5}{2}$ là số hữu tỉ.

Tương tự, trước hết ta chứng minh mệnh đề:

$\forall n \in \mathbf{N}$, n^2 chia hết cho 6 thì n chia hết cho 6.

Sau đó áp dụng tiếp như câu a).

c) Trước hết ta chứng minh mệnh đề:

$\forall n \in \mathbf{N}$, n^3 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5.

Áp dụng: Giả sử $\sqrt[3]{5}$ là số hữu tỉ.

$\Rightarrow \sqrt[3]{5} = \frac{n}{m}$ với n, m nguyên dương, phân số $\frac{n}{m}$ tối giản

$\Rightarrow n^3 = 5m^3$ (1).Do đó n^3 chia hết cho 5.

Theo kết quả trên thì n chia hết cho 5 $\Rightarrow$ n = 5k, k nguyên dương.

Thế vào (1): $125k^3 = 5m^3 \Rightarrow m^3 = 25k^3$.

Do đó m^3 chia hết cho 5 suy ra m chia hết cho 5 nên $\frac{n}{m}$ không tối giản: vô lý.

Vậy $\sqrt[3]{5}$ là số vô tỉ.

Bài toán 1. 11:

a) Cho p là số nguyên tố. Chứng minh $\sqrt{p}$ là số vô tỉ.

b) Chứng minh: Nếu số nguyên dương n không phải là một số chính phương thì $\sqrt{n}$ là một số vô tỉ.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $\sqrt{p}$ là số hữu tỉ, $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ với (a, b) = 1.

Khi đó $a^2 = pb^2$ nên p | a^2. Do p là số nguyên tố nên suy ra p| a. Đặt a = pm, ta có:

$p^2m^2 = pb^2 \Rightarrow b^2 = pm^2 \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b$

Vậy p là ước số chung của a và b. Điều này mâu thuẫn với giả thiết (a, b) = 1.

b) Trước hết, chú ý rằng nếu một số là số chính phương thì trong dạng phân tích số đó thành thừa số nguyên tố, các số mũ của mỗi luỹ thừa đều là số tự nhiên chẵn.

Do đó nếu n không phải là số chính phương, thì trong dạng phân tích số n thành thừa số nguyên tố có ít nhất một thừa số với số mũ lẻ.

Giả sử $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}^*$). Thế thì $nq^2 = p^2$ (1).

Vế phải của (1) là một số chính phương, còn vế trái của (1) không thể là một số chính phương, vì có ít nhất một thừa số nguyên tố của dạng phân tích với số mũ lẻ. Vậy $\sqrt{n} \notin \mathbf{Q}$.

Bài toán 1. 12: Chứng minh:

a) Có vô hạn số hữu tỉ

b) Trong cách viết thập phân của số $\sqrt{11}$ thì có ít nhất một chữ số xuất hiện vô hạn lần.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử có hữu hạn số hữu tỉ, ta có thể sắp xếp k số hữu tỉ này thành dãy tăng dần $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

Xét số $x_k + 1 = \frac{m}{n} + 1 = \frac{m+n}{n}$ với m nguyên, n nguyên khác 0 thì $x_k + 1 > x_k$ và là số hữu tỉ: vô lý.

b) Giả sử trong cách viết thập phân của số $\sqrt{11}$ mà mọi chữ số đều xuất hiện hữu hạn lần.

Như vậy sau dấu phẩy có hữu hạn chữ số

$\sqrt{11} = 3,a_1a_2...a_k = \dfrac{\overline{3a_1a_2...a_k}}{10^k}$ nên $\sqrt{11}$ là số hữu tỉ: vô lý.

Bài toán 1. 13:

a) Chứng minh có vô số số nguyên tố dạng: $4k + 3$ ($k \in \mathbf{N}^*$)

b) Chứng minh có vô hạn số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử trái lại, chỉ có hữu hạn số nguyên tố dạng $4k + 3$ là $p_1, p_2, ..., p_n$. Đặt $q = 4p_1p_2...p_n+3$. Vì q chia 4 dư 3 và q không chia hết cho 3 nên q phải có ít nhất một ước nguyên tố dạng $p = 4k + 3$. Do đó tồn tại i để $p = p_i$.

Vậy $4p_1p_2...p_n$ chia hết cho p. Mà q chia hết cho p nên suy ra 3 chia hết cho p. Vậy $p = p_i = 3$. Mâu thuẫn.

b) Giả sử có hữu hạn số nguyên tố, ta có thể sắp xếp n số nguyên tố này thành dãy tăng dần $1 < p_1 < p_2 < ... < p_n$.

Xét số $p = p_1p_2...p_n + 1$ thì $p > p_i$, $i = 1, 2, ... n$ do đó p không phải là nguyên tố nên p là bội số của số nguyên tố p_k nào đó.

Mà $1 = p – p_1p_2...p_k$ nên 1 là bội của $p_k \Rightarrow p_k = 1$: vô lý.

Bài toán 1. 14:

Cho 100 số tự nhiên $a_1, a_2,..., a_{100}$ thoả mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{100}}} = 19.$$

Chứng minh rằng trong 100 số tự nhiên đó, tồn tại hai số bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử trong 100 số tự nhiên đã cho không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$a_1 < a_2 < ... < a_{100} \Rightarrow a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 2,...,\ a_n \geq 100$$

suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{a_{100}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{100}}$.

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{2}{2\sqrt{k}} < \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$

nên: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$

$< 2\left[\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + ... + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\right]$

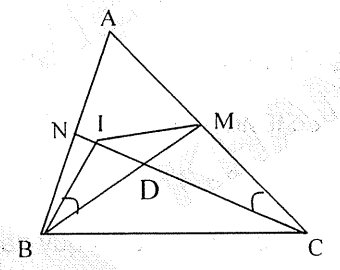
$= 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{1}\right) = 2\sqrt{n} - 2$

Do đó $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{100}}} \le \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}}$

$< 2\sqrt{100}-1=19$:trái với giả thiết.

Bài toán 1. 15: Chứng minh: Nếu 2 phân giác BM = CN của tam giác ABC thì tam giác cân.

Hướng dẫn giải



Ta chứng minh góc B = C. Giả sử $B \neq C$, chẳng hạn B > C nên tồn tại điểm I thuộc đoạn ND để góc $I\hat{B}M = I\hat{C}M$

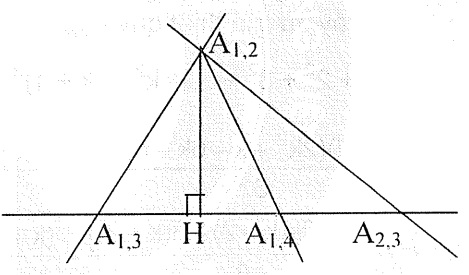
Từ đó tứ giác BIMC nội tiếp được trong đường tròn. Vì góc $\widehat{IBM} = \widehat{ICM}$

$\Rightarrow$ góc $\widehat{IBC} > \widehat{BCM}$

$\Rightarrow$ dây CI > BM $\Rightarrow$ CN > BM: vô lý.

Bài toán 1. 16: Chứng minh: Nếu n đường thẳng đôi một cắt nhau nhưng không cùng đi qua một điểm thì tồn tại ít nhất một điểm là giao của hai và chỉ hai trong số n đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải



Gọi $a_1, a_2, ..., a_n$ là n đường thẳng đã cho. Ký hiệu giao của hai đường thẳng a_i, a_j là $A_{i,j}$.

Xét các khoảng cách từ mỗi điểm $A_{i,j}$ tới đường thẳng a_k không đi qua nó. Vì số các khoảng cách đó là hữu hạn nên phải tìm được 3 đường thẳng (chẳng hạn a_1, a_2, a_3) sao cho khoảng cách từ điểm $A_{1,2}$ tới đường thẳng a_3 là ngắn nhất (hoặc một trong những khoảng cách ngắn nhất).

Ta chứng minh rằng không còn một đường thẳng thứ ba nào (khác a_1, a_2) lại đi qua điểm $A_{1,2}$. Trước hết ta nhận thấy rằng nếu gọi H là chân đường vuông góc hạ từ $A_{1,2}$ tới a_3 thì H phải thuộc đoạn thẳng nối $A_{1,3}$ và $A_{2,3}$.

Thật vậy nếu H nằm ngoài đoạn thẳng đó và $A_{2,3}$ gần H hơn $A_{1,3}$ thì rõ ràng khoảng cách từ $A_{2,3}$ tới A_1 còn nhỏ hơn $A_{1,2}H$. Bây giờ giả sử rằng qua $A_{1,2}$ còn có đường thẳng a_4. Khi đó a_4 phải cắt a_3 tại một điểm $A_{3,4}$, điểm này phải nằm trên một trong hai tia có gốc H của đường thẳng a_3. Giả sử nó nằm trên tia chứa điểm $A_{2,3}$ thì rõ ràng khoảng cách từ $A_{2,3}$ tới a_2 nhỏ hơn $A_{1,2}H$. Vô lý !.

Bài toán 1. 17: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n:

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp

Khi n = 1 thì VT = 1, VP = $\frac{1.2}{2}$ = 1: đẳng thức đúng.

Giả sử đẳng thức đúng khi n = k ≥ 1: $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Ta chứng minh đẳng thức đúng khi n = k + 1:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương.

b) Khi n = 1 thì VT = 1, VP = $\frac{1.2.3}{6}$ = 1: đúng.

Giả sử đẳng thức đúng khi n = k ≥ 1. Ta chứng minh đẳng thức khi n = k + 1.
Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2.$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2k(k+2)+3(k+2)\right]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$: đpcm

Bài toán 1. 18: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có:

a) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (1)

b) $1^2 + 3^2 + ... + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ (2)

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 1, ta có: $1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. Do đó, (1) đúng khi n = 1.

Giả sử (1) đúng khi n = k, k ∈ $\mathbb{N}^*$.
Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi n = k + 1.
Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k + 1)^3$$

$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$: đpcm.

b) Khi n = 1, ta có $1^2 = 1 = \frac{1(4.1^2-1)}{3}$. Do đó (2) đúng khi n = 1.

Giả sử (2) đúng khi n = k, k ∈ $\mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh (2) cũng đúng khi n = k + 1.

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$1^2 + 3^2 + ... + (2k-1)^2 + [2(k+1) - 1]^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 3}{3} = \frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3} = \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3}$$

Vậy (2) đúng với mọi n ∈ $\mathbb{N}^*$.

Bài toán 1. 19:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

a) $1\,2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (1)

b) $\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + ... + \frac{n+2}{n(n+1).2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1).2^n}$ (2)

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 1 thì VT = VP = 2: đúng.

Giả sử (1) đúng khi n = k, k ∈ $\mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh (1) đúng khi n = k + 1.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$: đpcm.

b) Khi n = 1 thì VT = $\frac{3}{4}$ = VP: đúng.

Giả sử (2) đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh (2) đúng khi n = k + 1. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp:

$$\frac{3}{1.2.2} + ... + \frac{k+2}{k(k+1)2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2)2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2)2^{k+1}} = 1 - \frac{2(k+2)-(k+3)}{(k+1)(k+2)2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+2)2^{k+1}}$$: đpcm.

Bài toán 1. 20:

Chứng minh công thức Nhị thức với tổ hợp n chập k: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì $(1+x)^1 = C_1^0 + C_1^1 . x = 1 + x$: đúng.

Giả sử khẳng định (1) đúng với n nguyên dương. Ta chứng minh (1) đúng với n + 1. Thật vậy:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^{k+1}$$

Ta có: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k . x^k$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} . x^k + x^{n+1}$

Thay vào đẳng thức trên ta được:

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1} \right) x^k + x^{n+1}$$

$$= C_{n+1}^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^k + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k \text{ :đpcm}$$

Bài toán 1. 21:

Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì:

a) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

b) n(n + 1) (n + 2) (n + 3) chia hết cho 24.

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 1 thì $1^3 + 2.1 = 3 \vdots 3$: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi n = k, k nguyên dương tức là $k^3 + 2k \vdots 3$.

Ta chứng minh mệnh đề đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2.$$

$$= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \vdots 3$$

Vì $k^3 + 2k \vdots 3$ và $3(k^2 + k + 1) \vdots 3$ nên suya ra đpcm.

b) Khi n = 1 thì 1.2.3.4 = 24 chia hết cho 24: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi n = k, k nguyên dương. Ta chứng minh mệnh đề đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

(k + 1) (k + 2) (k + 3) (k + 4)

= k(k + 1) (k + 2) (k + 3) + 4(k + 1) (k + 2) (k + 3).

Theo giả thiết quy nạp thì k(k + 1) (k + 2) (k + 3) ⋮ 24 và vì k + 1, k + 2, k + 3 là 3 số nguyên dương liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2 và có 1 số chia hết cho 3 nên:

(k + 1) (k + 2) (k + 3) ⋮ 6 do đó 4(k + 1) (k + 2) (k + 3) ⋮ 24.

Do đó mệnh đề đúng khi n = k + 1 ⇒ đpcm.

Bài toán 1. 22:

Chứng minh tích n số nguyên dương liên tiếp chia hết cho n!.

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì tích một số là chính nó thì chia hết cho 1: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi n = k, k nguyên dương. Ta chứng minh mệnh đề đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

Đặt $u_i = (i + 1)(i + 2) \ldots (i + k)(i + k + 1)$, $i \in \mathbf{N}$

thì $u_{i+1} = (i + 2)(i + 3) \ldots (i + k + 2)$

$\Rightarrow u_{i+1} - u_i = (i + 2)(i+ 3) \ldots (i + k + 1)[(i + k + 2 - i - 1]$.

$= (i + 2)(i + 3)\ldots (i + k + 1)(k + 1)$

Theo giả thiết quy nạp với k số thì

$(i + 2)(i + 3) \ldots (i + k + 1) \vdots k!$

$\Rightarrow u_{i+1} - u_i \vdots k!(k + 1) \Rightarrow u_{i+1} - u_i \vdots (k + 1)!$

Và ta có $u_o = 1.2\ldots k(k + 1) = (k + 1)!$ nên

$u_i = (u_i - u_{i-1}) + (u_{i-1} - u_{i-2}) + \ldots + (u_1 - u_o) + u_o$ chia hết cho $(k + 1)!$: đpcm.

Bài toán 1. 23: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n:

a) Dãy $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

b) Dãy $u_n = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh $u_n \vdots 5$ (1) bằng phương pháp quy nạp.

Khi n = 1 ta có: $u_1 = 7.2^{2-2} + 3^{2-1} = 7 + 3 = 10$: đúng.

Giả sử (1) đúng khi n = k, $k \in \mathbf{N}^*$, ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi n = k + 1. Thật vậy,

$u_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1}$.

$= 4.7.2^{2k-2} + 9.3^{2k-1} = 4(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5.3^{2k-1} = 4.u_k + 5.3^{2k-1}$.

Vì $u_k \vdots 5$ (theo giả thiết quy nạp) nên $u_{k+1} \vdots 5$ (đpcm).

b) Khi n = 1 thì $u_1 = 6^2 + 3^3 + 3 = 66 \vdots 11$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh mệnh đề đúng khi n = k+1. Thật vậy:

$u_{k+1} = 6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = 36.6^{2k} + 3.3^{k+2} + 3.3^k$

$= 36(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) - 33(^{3k+2} + 3^k)$

$= 36u_k - 33(3^{k+2} + 3^k) \vdots 11$ (đúng).

Bài toán 1. 24:

Cho $a = \frac{27 + \sqrt{673}}{2}$; $b = \frac{27 - \sqrt{673}}{2}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có $S_n = a^n + b^n$ là một số nguyên không chia hết cho 715.

Hướng dẫn giải

Ta có $ab = \frac{27 + \sqrt{673}}{2}.\frac{27 - \sqrt{673}}{2} = 14$, $S_1 = a + b = 27$,

$S_2 = (a + b)^2 - 2ab = 701$

$S_3 = (a + b)(a^2 + b^2) - ab(a + b) = 18549$.

Vậy mệnh đề đúng khi n = 1,2,3. Giả sử S_n đúng với mọi số nguyên $n \geq 3$.

Ta có: $S_{n+1} = (a + b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$

$= 27S_n - 14S_{n-1} = 715.S_{n-1} - 378.S_{n-2}$.

Theo giả thiết S_{n-1}, S_{n-2} là số nguyên không chia hết cho 715. Vì 378 và 715 nguyên tố cùng nhau, do đó $378.S_{n-2}$ cũng không chia hết cho 715. Do đó S_{n+1} là số nguyên không chia hết cho 715.

Bài toán 1. 25: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương:

a) $2^n > 2n + 1$ với $n \geq 3$. b) $2^n \geq n^2$ với $n \geq 4$.

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 3, ta có: $2^n = 8$ và $2n + 1 = 7$: đúng.

Giả sử BĐT đúng khi n = k, $k \in \mathbf{N}^*$ và $k \geq 3$, tức là: $2^n > 2k + 1$. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi n = k + 1, tức là: $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có:

$2^{k+1} = 2.2^k > 2(2k + 1) = 4k + 2 = 2k + 3 + (k - 1)$

$> 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$: đpcm.

b) Khi n = 4 thì BĐT: $16 \geq 16$.Do đó BĐT đúng khi n = 4.

Giả sử BĐT đúng khi n = k, $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 4$. Ta sẽ chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$2^{k+1} = 2.2^k > 2.k^2 = k^2 + 2k + 1 + k^2 - 2k - 1$

$= (k + 1)^2 + k(k - 2) - 1 > (k + 1)^2$: đpcm.

Bài toán 1. 26: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ b) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1} > 1$.

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 1, ta có BĐT $1 < 2\sqrt{1}$:đúng.

Giả sử BĐT đúng khi n = k, $k \in \mathbf{N}^*$, ta sẽ chứng minh BĐT cũng đúng khi n = k + 1. Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Ta chứng minh : $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \Leftrightarrow 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) > \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow \sqrt{k+1} > \sqrt{k}$: đúng.

b) Khi n = 1 thì BĐT: $\frac{13}{12} > 1$: đúng.

Giả sử BĐT đúng khi n = k, $k \in \mathbf{N}^*$: $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1} > 1$.

Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} > 1$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$VT = \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}\right)+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{3k+2}-\frac{2}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} = 1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > 1.$$

Bài toán 1. 27:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n:

a) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ với số thực $x > -1$.

b) $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$ với số thực $|x| \leq 1$.

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 1: BĐT: $(1 + x)^1 \geq 1 + x$: đúng.

Giả sử BĐT đúng khi $n = k$, $k \in \mathbf{N}^*$, ta sẽ chứng minh BĐT cũng đúng khi $n = k + 1$. Thật vậy, từ giả thiết $x > -1$ và giả thiết quy nạp, ta có:

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx)$$

$$= 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x: \text{đpcm.}$$

b) Khi n = 1: BĐT $2 \leq 2$: Đúng.

Giả sử BĐT đúng khi n = k, k nguyên dương:

$$(1 + x)^k + (1 - x)^k \leq 2^k \qquad (1)$$

Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

$(1) \Rightarrow ((1 + x) + (1 - x))((1 + x)^k + (1 - x)^k) \leq 2.2^k$.

$\Rightarrow (1 + x)^{k+1} + (1 - x)^{k+1} + (1 - x)(1 + x)^k + (1 + x)(1 - x)^k \leq 2^{k+1}$.

Vì $|x| \leq 1$ nên $1 + x \geq 0$, $1 - x \geq 0$, do đó:

$(1 + x)^{k+1} + (1 - x)^{k+1} \leq 2^{k+1}$: đpcm.

Bài toán 1. 28:

Cho $a + b > 0$. Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2} \qquad (1).$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1: $(1) \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+b}{2}$: đúng

Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k+b^k}{2}$ (2)

Ta chứng minh (1) đúng khi n = k + 1. Thật vậy, vì $a + b > 0$.

nên $(2) \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^k\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a^k+b^k}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}.$$

Ta chứng minh: $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

$\Leftrightarrow ab^k + a^kb \le a^{k+1} + b^{k+1}$ (3)

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b$.

Vì $a + b > 0$ nên $a > -b$, do đó $a \ge |b|$

$\Rightarrow a^m \ge |b|^m \ge b^m$ với mọi m nguyên dương.

Ta có (3) $\Leftrightarrow a^2(a - b) + b^k(b - a) \ge 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^k - b^k) \ge 0$: đúng.

Bài toán 1. 29: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \ge 3$, ta có:

$$n^{n+1} > (n + 1)^n.$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 3 thì BĐT: 81 > 64: đúng.

Giả sử BĐT đúng khi $n = k$, $k \in \mathbf{N}^*$, $k \ge 3$: $k^{k+1} > (k + 1)^k$.

Ta sẽ chứng minh BĐT đúng khi $n = k + 1$: $(k + 1)^{k+2} > (k + 2)^{k+1}$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$k^{k+1} > (k + 1)^k \Rightarrow (k + 1)^{k+2} . k^{k+1} > (k + 1)^{k+2} . (k + 1)^k$

Do đó: $(k + 1)^{k+2} > \frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}} = \left(\frac{(k+1)^2}{k}\right)^{k+1}$,

$= \left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(k+2+\frac{1}{k}\right)^{k+1} > (k + 2)^{k+1}$: đpcm.

Bài toán 1. 30: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

$$\frac{3}{5}.\frac{7}{9}\cdots\frac{4n-1}{4n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1: (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{5} < 1$: đúng. Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương:

$$\frac{3}{5}.\frac{7}{9}\cdots\frac{4k-1}{4k+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (2)$$

Ta chứng minh (1) đúng khi n = k + 1.

$$\frac{3}{5}.\frac{7}{9}\cdots\frac{4k-1}{4k+1}.\frac{4k+3}{4k+5} < \frac{1}{\sqrt{k+2}}$$

Thật vậy, từ (2) $\Rightarrow \frac{3}{5}.\frac{7}{9}\cdots\frac{4k-1}{4k+1}.\frac{4k+3}{4k+5} < \frac{1}{\sqrt{k+1}}.\frac{4k+3}{4k+5}$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{k+1}}.\frac{4k+3}{4k+5} < \frac{1}{\sqrt{k+2}} \le (4k+3)\sqrt{k+2} < (4k+5)\sqrt{k+1}$

$\Leftrightarrow (4k + 3)^2 (k + 2) < (4k + 5)^2 (k + 1)$

$\Leftrightarrow (16k^2 + 24k + 9) (k + 2) < (16k^2 + 40k + 25) (k + 1)$.

$\Leftrightarrow 18 < 25$: đúng.

Bài toán 1. 31: Cho $x \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ thoả mãn $x > 0$, $x \neq 1$, $n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{2x^n}{1+x^{n+1}} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}.\frac{x^n-1}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

$\frac{2x^n}{1+x^{n+1}} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow 2^n x^n \leq (1+x)^{n-1}(1+x^{n+1})$

Ta có: $1 + x \geq 2\sqrt{x} \Rightarrow (1+x)^{n-1} \geq 2^{n-1}x^{\frac{n-1}{2}}$

Và $1 + x^{n+1} \geq 2.x^{\frac{n+1}{2}} \Rightarrow$ (đpcm)

Và $\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}.\frac{x^n-1}{x-1} \Leftrightarrow n(1+x)^{n-1} \leq 2^{n-1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$

Khi n = 1: đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng đến n:

$n(1+x)^{n-1}(1+x) \leq 2^{n-1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)(1+x)$

$\Leftrightarrow (n+1)(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} + (1+x)^n$

$\leq 2^{n-1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)(1+x) + (1+x)^n$

Ta chứng minh:

$2^{n-1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)(1+x) + (1+x)^n \leq 2^n(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1)$

$\Leftrightarrow 2^{n-1}(x^n + 2x^{n-1} + 2x^{n-2} + \ldots + 2(x+1) + (1+x)^n$

$\leq 2^n(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1)$

$\Leftrightarrow (1+x)^n \leq 2^{n-1}x^n = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq \frac{(x+1)^n}{x^n+1}$

Ta chứng minh bằng quy nạp. Khẳng định này để suy ra đpcm.

Bài toán 1. 32: Cho n số dương $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ với $n \geq 3$.

Chứng minh: $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i}$.

Hướng dẫn giải

Gọi P(n) là bất đẳng thức cần chứng minh. Với n = 3, ta có:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{x_{i+1}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}{x_1x_2x_3} \geq 0$$

Vậy P(3) đúng.

Giả sử P(n) đúng. Xét n + 1 số dương $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1}$

Vì P(n) đúng nên $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i}$

Vì P(3) đúng nên với ba số dương $0 < x_1 \leq x_n \leq x_{n+1}$, ta có

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} \geq \frac{x_n}{x_1} + \frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_1}{x_{n+1}}$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_{i+1}}{x_i}$. Vậy P(n + 1) đúng.

Bài toán 1. 33:

Cho n số dương $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ có tích: $x_1.x_2.x_3...x_n = 1$.

Chứng minh tổng $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geq n$.

Suy ra bất đẳng thức AM–GM tổng quát.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp theo số số dương $n \geq 1$.

Khi n = 1 thì $x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$: đúng.

Giả sử khẳng định trên đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh khẳng định đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

Xét k + 1 số dương $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ có tích $x_1.x_2...x_{k-1}x_k.x_{k+1} = 1$.

Giả sử cả k + 1 số $x_i > 1 \Rightarrow$ tích $x_1x_2 ... x_{k+1} > 1$: vô lý

Giả sử cả k + 1 số $x_i < 1 \Rightarrow$ tích $x_1x_2...x_{k+1} < 1$: vô lý.

Do đó tồn tại số $x_u \leq 1$ và $x_v \geq 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $u_k \leq 1$ và $u_{k+1} \geq 1$.

Ta có $x_1x_2 ... x_{k-1} (x_k. x_{k+1}) = 1$. Áp dụng giả thiết quy nạp với k số thì tổng:

$x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_kx_{k+1} \geq k$.

$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + x_k + x_{k+1} - x_kx_{k+1}$

$\geq k + 1 + (x_k - 1) + x_{k+1}(1 - x_k)$.

$= k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) \geq k + 1$: đpcm.

Ta chứng minh BĐT AM–GM tổng quát với n số $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \qquad (2)$$

Nếu có số $a_i = 0$ thì (2) đúng.Xét cả n số $a_i > 0$.

Đặt $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$ thì $x_i > 0$ thì tích: $x_1x_2 ... x_n = \frac{a_1a_2...a_n}{\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)^n} = 1$

Áp dụng kết quả trên thì tổng: $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

$$\Rightarrow \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} \geq n$$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n.\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1. 34:

Cho 2n số tuỳ ý: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$.Chứng minh:

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì BĐT: $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$: đúng.

Khi n = 2 thì BĐT: $\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}$

$\Leftrightarrow (a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2 \le a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}$

$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 \le \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}$

Nếu VT < 0 thì BĐT đúng, còn nếu VT ≥ 0 thì BĐT

$\Leftrightarrow (a_1a_2 + b_1b_2)^2 \le (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$

$\Leftrightarrow 2a_1a_2b_1b_2 \le a_1^2+b_2^2+a_2^2+b_1^2 \Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \ge 0$: đúng

Giả sử BĐT đúng khi n = k, k nguyên dương. Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1. Thật vậy.

$$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1})^2+(b_1+b_2+...+b_k+b_{k+1})^2}$$

$$= \sqrt{((a_1+a_2+...+a_k)+a_{k+1})^2+((b_1+b_2+...+b_k)+b_{k+1})^2}$$

$$\le \sqrt{(a_1+a_2+...+a_k)^2+(b_1+b_2+...+b_k)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$$

$$\le \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_k^2+b_k^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$$: đpcm

Vậy BĐT đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 1. 35:

a) Tính tổng $S_n = 1.2 + 2.3 + ... + n(n + 1)$.

b) Tính tổng $T_n = 1^2 + 3^2 + ... + (2n - 1)^2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $S_n = 1(1 + 1) + 2(2 + 1) + ... + n(n + 1)$

$= (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + (1 + 2 + ... + n)$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

b) Ta có: $T_n = (2.1 - 1)^2 + (2.2 - 1)^2 + ... + (2n - 1)^2$.

$= 4(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 4(1 + 2 + ... + n) + n$

$$= 4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - n(2n+1) = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Bài toán 1. 36: Cho các số nguyên $0 \le k \le n$. Tính tổng:

$T_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^k.C_n^k$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh qui nạp theo k: $T_k = (-1)^k . C_{n-1}^k$

Khi k = 0 : $C_n^0 = (-1)^0.C_{n-1}^0 = 1$ đúng

Giả sử công thức đúng đến k. Ta chứng minh đúng đến k + 1, thật vậy:

$$T_{k+1} = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k.C_n^k + (-1)^{k+1}.C_n^{k+1}$$

$$= (-1)^k.C_{n-1}^k + (-1)^{k+1}.C_n^{k+1} = (-1)^{k+1}.\left(C_n^{k+1} - C_{n-1}^k\right) = (-1)^{k+1}.C_{n-1}^{k+1}$$

Vậy $T_k = (-1)^k . C_{n-1}^k$.

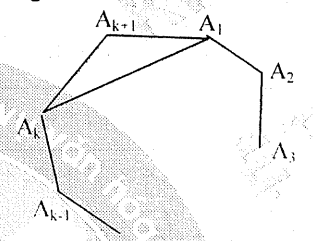
Bài toán 1. 37: Chứng minh tổng các góc trong của một n – giác lồi bằng $(n - 2)180^o$ với mọi số nguyên dương $n \geq 3$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Khi n = 3 thì mệnh đề: tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^o: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng đến khi n = k, tức là tổng các góc trong của một k – giác lồi bằng $(k - 2)180^o$. Ta chứng minh mệnh đề đúng khi n = k + 1. Xét (k + 1) – giác lồi $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$. Nối A_1A_k. Ta được tổng các góc trong của (k + 1) – giác lồi bằng tổng các góc trong của $A_1A_2 \ldots A_k$ cộng với tổng các góc trong của tam giác $A_1A_kA_{k+1}$.



Do đó tổng các góc là: $(k - 2)180^o + 180^o = (k - 1).180^o$ nên mệnh đề cũng đúng khi n = k + 1.

Vậy mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$.

Bài toán 1. 38:

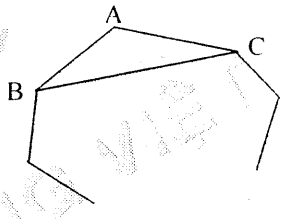
Chứng minh rằng mọi đa giác lồi n + 2 cạnh có thể chia thành n tam giác, n nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Khi n = 1. Mệnh đề trở thành: Đa giác 3 cạnh có thể chia thành một tam giác: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi n = k, k nguyên dương. Ta chứng minh mệnh đề đúng khi n = k + 1, tức là có thể chia (k + 3) – giác lồi thành k + 1 tam giác.

Thật vậy gọi A là một đỉnh nào đó. Nối 2 đỉnh kề nó giả sử B, C. Do đó ta đã chia (k + 3) – giác lồi thành một tam giác ABC và (k + 2) – giác lồi có cạnh là BC.



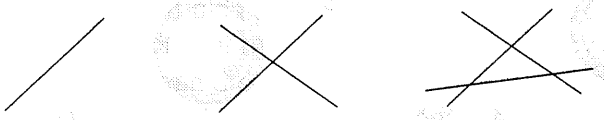
Theo giả thiết quy nạp, (k + 2) – giác lồi đó có thể chia thành k tam giác. Do đó (k + 3) – giác lồi đã được chia thành k + 1 tam giác: đpcm.

Vậy mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 1. 39:

Trong mặt phẳng cho n đường thẳng mà không có 2 đường nào song song và không có 3 đường nào đồng quy. Các đường thẳng này chia mặt phẳng làm bao nhiêu phần?.

Hướng dẫn giải



Khi n = 1 thì một đường thẳng chia mặt phẳng làm $u_1 = 2$ phần
Khi n = 2 thì 2 đường thẳng chia mặt phẳng làm $u_2 = 4$ phần
Khi n = 3 thì 3 đường thẳng chia mặt phẳng làm $u_3 = 7$ phần.
Để ý quy luật $u_1 = 1 + 2$, $u_2 = 1 + (1 + 2)$, $u_3 = 1 + (1+2+3)$.
Bằng quy nạp ta chứng minh 2 số phần là:

$$u_n = 1 + (1+2+\dots n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bài toán 1. 40: Chia một tập tài liệu thành n phần cho n người, $n \geq 4$. Chứng minh chỉ cần $2n - 4$ lần gọi điện thoại giữa 2 thành viên là đủ để mọi thành viên đều nắm đủ toàn bộ nội dung tài liệu.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp với số nguyên dương $n \geq 4$.
Khi n = 4, với 4 thành viên A, B, C, D. Bốn cuộc gọi trao đổi nội dung giữa A và B, C và D rồi sau đó A và C, B và D là 4 thành viên nắm đủ 4 phần tài liệu.
Giả sử khẳng định đúng khi n = k, k nguyên, $k \geq 4$.
Ta chứng minh khẳng định đúng khi n = k + 1. Thật vậy:
Với k + 1 thành viên, xét k thành viên đầu thì theo giả thiết quy nạp, với $2k - 4$ cuộc gọi là biết thông tin của k phần tài liệu. Tuy nhiên trước khi thực hiện $2k - 4$ cuộc gọi đó, ta cho thành viên thứ k + 1 gọi đến 1 thành viên. Như vậy k thành viên đã nắm đủ k + 1 phần tài liệu, cuối cùng một thành viên trong số đó gọi lại cho thành viên thứ k + 1. Số cuộc gọi là:

$1 + (2k - 4) + 1 = 2k - 2 = 2(k + 1) - 4$: đpcm.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 1. 1: Chứng minh :

a) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ là số vô tỉ

b) $\sqrt[3]{15}$ là số vô tỉ.

Hướng dẫn

a) Giả sử $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ là số hữu tỉ p rồi bình phương, đưa về chứng minh $\sqrt{21}$ là số vô tỉ.

b) Giả sử $\sqrt[3]{15}$ là số hữu tỉ p rồi lập phương, đưa về chứng minh $\sqrt{15}$ là số vô tỉ.

Bài tập 1. 2: Chứng minh:

a) Nếu tích 2 số nguyên chia hết cho 13 thì có ít nhất 1 số chia hết cho 13.

b) Nếu tổng bình phương 2 số nguyên dương chia hết cho 17 thì cả 2 số đó chia hết cho 17.

Hướng dẫn

a) Giả sử cả 2 số nguyên a và b không chia hết cho 13 thì a = 13k + r và b = 13t + s với r, s = 1,2,3,,...,12. Suy ra tích ab không chia hết cho 13 .

b) Giả sử có ít nhất một số nguyên dương a hay b không chia hết cho 17. Xét 2 trường hợp : a và b không chia hết cho 17; môt số chia hết cho 17 và một số không chia hết cho 17.

Bài tập 1. 3: Chứng minh điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 5 là n^2+1 và n^2-1 đều không chia hết cho 5.

Hướng dẫn

Xét 4 trường hợp n = 5k ±1, 5k ± 2.

Tính n^2+1 và n^2-1 để suy ra chúng đều không chia hết cho 5.

Bài tập 1. 4: Cho 25 số nguyên dương a_i thoả

$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{25}}}=9$ .Chứng minh có ít nhất hai số bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Dùng phản chứng.

Giả sử cả 25 số nguyên dương a_i đều khác nhau. Ta có thể xếp thứ tự từ nhỏ đến lớn.

Dùng đánh giá $\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\le 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$.

Bài tập 1. 5: Cho 3 số a, b, c dương. Chứng minh có ít nhất 1 bất đẳng thức sai $a(2-b)>1;\ b(2-c)>1;\ c(2-a)>1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử cả 3 bất đẳng thức đều đúng rồi dùng bất đẳng thức AM–GM:

$a(2-a)\le 1;\ b(2-b)\le 1;\ c(2-c)\le 1$.

Bài tập 1. 6:

a) Chứng minh điều kiện cần và đủ để 1 tứ giác ngoại tiếp được 1 đường tròn là tổng 2 cặp cạnh đối bằng nhau.

b) Cho 6 đoạn thẳng có độ dài từ 10cm đến 75cm. Chứng minh có ít nhất 3 đoạn thẳng là 3 cạnh của một tam giác.

Hướng dẫn giải

a) Dùng phản chứng và tính chất đoạn tiếp tuyến bằng nhau.

b) Dùng phản chứng và quan hệ 3 cạnh trong tam giác.

Bài tập 1. 7: Chứng minh với mọi số n nguyên dương:

a) $2^2+4^2+...+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

b) $1^4+2^4+3^4+...+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Hướng dẫn giải

a) Dùng quy nạp thông thường

b) Dùng quy nạp thông thường

Bài tập 1. 8: Chứng minh với mọi số n nguyên dương:

a) $\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4.3^n}$

b) $\frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+...+\frac{n^2}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

Hướng dẫn giải

a) Dùng quy nạp thông thường

b) Dùng quy nạp thông thường

Bài tập 1. 9: Chứng minh với mọi số n nguyên dương:

a) $u_n=4^n+15n-1 \vdots 9$ b) $u_n=11^{n+1}+12^{2n-1} \vdots 133$

Hướng dẫn giải

a) Dùng quy nạp và phân tích $4^{n+1} = 4^n.\ 4$

b) Dùng quy nạp và phân tích $11^{n+1} = 11^n.\ 11$, $12^{2n+1} = 12^{2n-1}.144$.

Bài tập 1. 10: Chứng minh $(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) > 1-a_1-a_2-...-a_n$ với n số $a_1,a_2,...,a_n$ thuộc khoảng (0;1).

Hướng dẫn giải

Dùng quy nạp và phân tích n + 1 số ra n số.

Bài tập 1. 11: Chứng minh với mọi số n nguyên dương:

a) $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}....\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}<n$

Hướng dẫn giải

a) Dùng quy nạp và biến đổi tương đương

b) Dùng quy nạp và biến đổi tương đương

Bài tập 1. 12:

a) Tính tổng $T=3^3+5^3+7^3+...+(2n+3)^3$

b) Tính số đường chéo 1 đa giác lồi n đỉnh, $n \geq 4$.

Hướng dẫn giải

a) Khai triển lập phương và dùng các tổng

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) Kết quả $\frac{n(n-3)}{2}$ và chứng minh quy nạp .

Chuyên đề 2: ÁNH XẠ VÀ HÀM SỐ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Ánh xạ

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử y của Y. Phần tử y tương ứng của x gọi là ảnh của x qua ánh xạ f, kí hiệu y = f(x), x gọi là nghịch ảnh của y:

$$f: X \to Y: \quad x \mapsto y = f(x)$$

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều cho hai ảnh khác nhau của Y:

$$\forall a,b \in X : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Hay $\forall a,b \in X : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là toàn ánh nếu mỗi phần tử y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh x của X:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$$

Hay $Y = f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$.

– Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là song ánh nếu f vừa đơn ánh và toàn ánh, tức là nếu mỗi phần tử y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh duy nhất x của X.

Hai tập hữu hạn có cùng số phần tử khi tồn tại một song ánh giữa chúng. Còn 2 tập vô hạn mà có song ánh giữa chúng thì gọi là cùng lực lượng hay cùng bản số.

Ánh xạ ngược, Ánh xạ tích (hợp)

– Nếu một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là song ánh thì tồn tại ánh xạ ngược từ tập Y đến tập X, ký hiệu f^{-1}:

$$f^{-1}: Y \to X: \quad y \mapsto x = f^{-1}(y).$$

– Cho một ánh xạ f từ tập X đến tập Y và một ánh xạ g từ tập Y đến tập T thì có ánh xạ tích từ tập X đến tập T, ký hiệu $g \circ f$:

$$g \circ f: X \to T: x \mapsto z = g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Hàm số

Hàm số f là một ánh xạ từ tập $D \subset \mathbf{R}$ đến tập **R.**

$$f: D \to \mathbf{R}: x \mapsto y = f(x).$$ Tập D gọi là tập xác định.

Hàm số hợp, hàm số ngược được xây dựng tương tự

Tính chất của hàm số

– Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$ và gọi là hàm số lẻ nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung l àm trục đối xứng, hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.

– Cho hàm số f xác định trên K (khoảng, nửa khoảng, đoạn).

f đồng biến (tăng) trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

f nghịch biến (giảm) trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Kết quả: Nếu f(x) tăng hoặc giảm trên **R** thì phương trình f(x) = 0 có tối đa một nghiệm, nếu có nghiệm x_o thì đó là nghiệm duy nhất.

– Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số thực L > 0: $\forall x \in D$ thì $x \pm L \in D$ và $f(x \pm L) = f(x)$.

Số L dương bé nhất nếu có trong các số L thỏa mãn điều kiện trên gọi là chu kỳ của hàm số f.

Phép suy đồ thị

Từ đồ thị (C): y = f(x) suy ra đồ thị của hàm số:

y = – f(x): bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành

$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$: bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành, còn phần phía dưới trục hoành thì lấy đối xứng qua trục hoành.

y = f(–x): bằng cách lấy đối xứng qua trục tung

y = f(|x|): bằng cách giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục tung, và lấy đối xứng phần đó qua trục tung (do hàm số chẵn).

y = – f(–x) bằng cách lấy đối xứng qua gốc.

y = f(x) + b, y = f(x + a) , y = f(x + a) + b bằng các phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ.

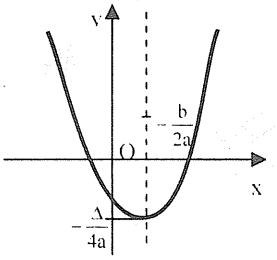
Hàm số bậc nhất

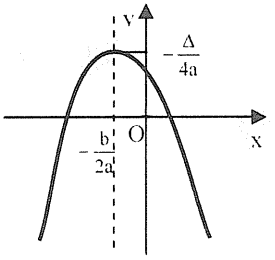
y = ax + b, ($a \neq 0$) tập xác định D = **R**, hệ số góc a = tan(Ox, d).

Hàm số đồng biến khi a > 0 và nghịch biến khi a <0.

Hàm số bậc hai

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) tập xác định D = **R**. Đồ thị là một đường parabol có đỉnh $I(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$, có trục đối xứng d: $x = -\frac{b}{2a}$, bề lõm hướng lên trên nếu a > 0, hướng xuống dưới nếu a < 0.





x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Điểm đặc biệt của các đồ thị có tham số

– Điểm $M(x_o; y_o)$ gọi là điểm cố định của họ $y = f(x, m)$ khi mọi đồ thị đều đi qua : $y_o = f(x_o, m)$, $\forall m$. Ta biến đổi về dạng:

$$A.m+B = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } A.m^2 + Bm + C = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

– Điểm $M(x_o; y_o)$ là điểm mà các đồ thị của họ $y = f(x, m)$ không đi qua:

$y_o \neq f(x_o, m)$, $\forall m$. Ta biến đổi về dạng:

$$Am + B \neq 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } Am^2 + Bm + C \neq 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, B = 0, C \neq 0 \\ A \neq 0, \Delta < 0 \end{cases}$$

Quỹ tích các điểm:

Tìm tọa độ x và y rồi khử tham số, giới hạn quỹ tích bằng cách chuyển điều kiện nếu có của tham số về điều kiện của x hay y.

Bài toán tương giao và tiếp tuyến

– Phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$. Nếu phương trình hoành độ giao điểm là phương trình bậc hai thì $\Delta < 0$: không có điểm chung; $\Delta = 0$: tiếp xúc nhau; $\Delta > 0$: cắt nhau tại hai điểm

– Lập phương trình tiếp tuyến với (C): $y = f(x)$ tại điểm $A(x_A; y_A) \in (C)$ hoặc đi qua điểm $A(x_A; y_A)$, hệ số góc k có dạng:

$y - y_A = k(x - x_A) \Rightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm với (C). Cho điều kiện tiếp xúc: $\Delta = 0$ để tìm ra k.

Phương trình hàm

– Dùng phép thế, đổi biến
– Tính giá trị đặc biệt f(0), f(1),...
– Dùng tính chất đơn ánh, toàn ánh, song ánh, tuần hoàn,...
– Đánh giá, dự đoán hàm số, quy nạp,...

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 2.1: Kiểm chứng tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh của các tương ứng sau từ **Z** đến **Z**:

a) $f(n) = n + 3$ b) $f(n) = n^2 - 4$

c) $f(n) = n^3 + 2n$ d) $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$

Hướng dẫn giải

Theo định nghĩa thì các tương ứng f đều là ánh xạ từ **Z** đến **Z**.

a) Đơn ánh vì với mọi $m,n \in \mathbf{Z}$: $f(m) = f(n) \Rightarrow m + 3 = n + 3 \Rightarrow m = n$

Toàn ánh vì với mọi $m \in \mathbf{Z}$, tồn tại $n = m - 3 \in \mathbf{Z}$:

$f(n) = f(m - 3) = m - 3 + 3 = m$. Vậy f song ánh.

b) Không đơn ánh vì f(–2) = f(2) = 0.

Không toàn ánh vì không tồn tại $n \in \mathbf{Z}$ để $f(n) = 1 \Leftrightarrow n^2 = 5$.

Vậy f không song ánh.

c) Đơn ánh. Không toàn ánh vì không tồn tại $n \in \mathbf{Z}$ để

$f(n) = 5 \Leftrightarrow n(n^2 + 2) = 5$. Vậy f không song ánh.

d) Không đơn ánh vì f(4) = f(5) = 2. Toàn ánh vì với mỗi số nguyên n, ta có f(2n) = n. Vậy f không song ánh.

Bài toán 2.2:

Kiểm chứng tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh của các ánh xạ sau:

a) $y = f(x) = x^2 + 4x - 7$ từ $\mathbf{R}$ đến $\mathbf{R}$

b) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ từ $\mathbf{R} \setminus \{3\}$đến $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Hướng dẫn giải

a) f không đơn ánh vì f(0) = f(–4) = –7.

f không toàn ánh vì khi $f(x) = -15 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 8 = 0$ vô nghiệm

Vậy f không song ánh.

b) Với $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, mọi $y \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$: $y = \dfrac{2x+1}{x-3} \Leftrightarrow 2x + 1 = y(x-3)$

$\Leftrightarrow 1 + 3y = x(y-2) \Leftrightarrow x = \dfrac{1+3y}{y-2}$: duy nhất.

Vậy f song ánh.

Bài toán 2.3: Cho g là ánh xạ từ tập A đến tập B và f là ánh xạ từ tập B đến tập C.

a) Chứng minh rằng nếu cả f và g là đơn ánh thì ánh xạ hợp $f \circ g$ cũng là đơn ánh.

b) Chứng minh rằng nếu cả f và g là toàn ánh thì ánh xạ hợp $f \circ g$ cũng là toàn ánh.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(a')$ với $a, a' \in A \Rightarrow f[g(a)] = f[g(a')]$

$\Rightarrow g(a) = g(a')$ vì f đơn ánh

$\Rightarrow a = a'$ vì g đơn ánh. Vậy $f \circ g$ là đơn ánh .

b) Với mọi $c \in C$. Do $f: B \to C$ là toàn ánh nên tồn tại $b \in B$ để

f(b) = c, và vì: $g: A \to B$ là toàn ánh nên tồn tại $a \in A$ để g(a) = b.

Vậy $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = c$. Vậy $f \circ g$ là toàn ánh.

Bài toán 2.4:

Cho g là ánh xạ từ tập A đến tập B và f là ánh xạ từ tập B đến tập C

a) Chứng minh rằng nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g là đơn ánh.

b) Nếu $f \circ g$ và f đều là toàn ánh thì g có toàn ánh không?

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $g(a) = g(a')$ với $a, a' \in A \Rightarrow f(g(a)) = (fg(a'))$

$\Rightarrow (f \circ g)(a) = (f \circ g)(a')$

$\Rightarrow a = a'$ vì $f \circ g$ là đơn ánh. Do đó g là đơn ánh.

b) Không nhất thiết g phải toàn ánh.

Chọn $A = \{a\}$, $B = \{b; b'\}$, $C = \{c\}$.

Xét $g: A \to B$ cho bởi $g(a) = b$

và $f: B \to C$ cho bởi $f(b) = c$ và $f(b') = c$.

Khi đó $f \circ g: A \to C$ cho bởi $(f \circ g)(a) = f[g(a)] = f(b) = c$

Ta có $f \circ g$ và f là toàn ánh nhưng g không là toàn ánh.

Bài toán 2.5: Cho g là song ánh từ tập A đến tập B và f là song ánh từ tập B đến tập C. Giả sử f^{-1}, g^{-1} tương ứng là ánh xạ ngược của f và g. Chứng minh rằng $f \circ g$ là song ánh từ A đến C và $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f \circ g$ là song ánh. Giả sử $(f \circ g)(a) = c$ với $a \in A, c \in C$.

Ta cần chứng minh $(g^{-1} \circ f^{-1})(c) = a$ hay $g^{-1}(f^{-1}(c)) = a$

Thật vậy, đặt $b = g(a)$, $b \in B \Leftrightarrow g^{-1}(b) = a$

Vì $(f \circ g)(a) = c$ nên $f(b) = c \Leftrightarrow f^{-1}(c) = b$

Vậy: $g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1}(b) = a$: đpcm.

Bài toán 2.6:

Hãy lập một song ánh từ đoạn [0;1] đến khoảng (0;1).

Hướng dẫn giải

Xét ánh xạ f từ đoạn [0;1] đến khoảng (0;1):

$$f(0) = \frac{1}{2}; f(1) = \frac{1}{3}; f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+2}; f(x) = x \ (n \geq 2, n \in N, x \neq \frac{1}{n})$$

Ta kiểm chứng f là một đơn ánh và toàn ánh nên f song ánh.

Bài toán 2.7: Cho trước số nguyên dương $n > 3$. Gọi X là tập hợp tất cả các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm có tổng bằng n. Gọi Y là tập hợp các dãy nhị phân có n + 2 kí tự, trong đó có n kí tự 1 và 2 kí tự 0. Hãy thiết lập một song ánh từ X đến Y, suy ra số phần tử của X.

Hướng dẫn giải

Với mỗi bộ ba $(a, b, c) \in X$ được tương ứng với một dãy nhị phân có n + 2 kí tự, trong đó có n kí tự 1 và 2 kí tự 0, do đó là một phần tử của Y. Gọi f là phép tương ứng đó, thì f là một ánh xạ từ X đến Y, hơn nữa f là đơn ánh.

Với mỗi dãy n + 2 kí tự với n kí tự 1 và 2 kí tự 0, khi ta đếm từ trái sang phải có a số 1, số 0, b số 1, số 0 và c số 1 thì dãy đó sẽ ứng với bộ (a, b, c) thỏa mãn a + b + c = n nên f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Ta có mỗi dãy nhị phân có n + 2 kí tự, trong đó có n kí tự 1 và 2 kí tự 0, tương ứng với cách chọn 2 vị trí trong n + 2 vị trí để ghi số 0.

Do đó số phần tử $|Y| = C_{n+2}^2$. Vậy $|X| = |Y| = C_{n+2}^2$.

Bài toán 2.8: Cho trước số nguyên dương n và số nguyên dương r thỏa mãn $r < n - r + 1$. Giả sử $S = \{1, 2, ..., n\}$. Gọi X là tập hợp tất cả các tập con A của S có r phần tử và A không chứa hai số nguyên liên tiếp. Gọi Y là tập hợp các tập con có r phần tử của tập $\{1, 2, ..., n - r + 1\}$.

Thiết lập một song ánh từ X đến Y, suy ra số phần tử của X.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A \in X$, $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ với $a_1 < a_2 < ... < a_r$

Đặt $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 1$, ..., $b_i = a_i + i - 1$,..., $b_r = a_r + r - 1$

Vì $a_{i+1} - a_i \geq 2$ nên $b_1 < b_2 < ... < b_r \leq n - r + 1$

Tập $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ là một tập con có r phần tử của tập $\{1, 2, ..., n - r + 1\}$, do đó là một phần tử của Y.

Gọi f là phép đặt tương ứng tập $A \in X$ với tập $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\} \in Y$. Khi đó f là một đơn ánh. Giả sử $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\} \in Y$.

Đặt $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 + 1$, ..., $a_i = b_i + i - 1$, $a_r = b_r + r - 1$

Ta có: $a_{i+1} - a_i = b_{i+1} - b_i + 1 \geq 2$, do đó $A \in X$ và $f(A) = B$ nên f là toàn ánh.

Vậy f song ánh từ X vào Y nên số phần tử của X bằng số các tập con có r phần tử của tập $\{1, 2, ..., n - r + 1\}$.

Vậy số phần tử của X là C^r_{n-r+1}.

Bài toán 2.9: Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + 3\sqrt{\dfrac{2-x}{x-4}}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ (x-2)(x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \neq 2;3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x \neq 2;3 \end{cases}$

Vậy: $D = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ \dfrac{2-x}{x-4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ 2 \leq x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$

Vậy: $D = [3; 4)$.

Bài toán 2.10: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{123}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} - \sqrt[3]{x^2 - 7}} - \sqrt[3]{2x - 3}$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1| + |3-2x| + x - 2}}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} \neq \sqrt[3]{x^2 - 7} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq x^2 - 7$

$\Leftrightarrow 9 \neq 3x \Leftrightarrow x \neq 3$. Vậy D = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

b) Hàm số xác định khi: $|x-1| + |3-2x| + x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow |x-1| - (x-1) + |3-2x| - (3-2x) > 0$

Vì đẳng thức xảy ra chỉ khi: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

Vậy tập xác định là D = $(-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

Bài toán 2.11: Tìm tập xác định của hàm số theo tham số:

a) $y = \frac{3x-2}{x^2 - 2mx + m^2 + 4m}$ b) $y = \sqrt{(a+2)x - 3a + 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Mẫu thức có $\Delta' = m^2 - m^2 - 4m = -4m$

Nếu m > 0 thì $\Delta' < 0$ nên D = $\mathbb{R}$

Nếu m = 0 thì $\Delta' = 0$, nghiệm kép x = 0 nên D = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nếu m < 0 thì $\Delta' > 0$, nghiệm $x = m \pm 2\sqrt{-m}$ nên D = $\mathbb{R} \setminus \{m \pm 2\sqrt{-m}\}$

b) Điều kiện $(a+2)x - 3a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a+2)x \geq 3a - 1$

Nếu a = – 2 thì $0.x \geq -7$ (đúng) nên D = $\mathbb{R}$

Nếu a > – 2 thì $a + 2 > 0$ do đó $x \geq \frac{3a-1}{a+2}$ nên D = $[\frac{3a-1}{a+2}; +\infty)$

Nếu a < – 2 thì $a + 2 < 0$ do đó $x \leq \frac{3a-1}{a+2}$ nên D = $(-\infty; \frac{3a-1}{a+2}]$.

Bài toán 2.12: Tìm tập giá trị của các hàm số :

a) $y = \frac{x^2+3}{x^2-x+2}$ b) $y = x + \frac{1}{x}$ c) $y = x - \frac{1}{x}$

Hướng dẫn giải

a) D = $\mathbb{R}$. Ta chuyển hàm số về phương trình

$x^2 + 3 = y(x^2 - x + 2) \Leftrightarrow (y-1)x^2 - yx + 2y - 3 = 0$

Xét $y = 1 \Rightarrow x = -1$.

Xét $y \neq 1$. Vì phương trình bậc hai có nghiệm x nên:

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - (y-1)(2y-3) \geq 0 \Leftrightarrow -7y^2 + 20y - 22 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{6}{7} \leq y \leq 2$. Vậy tập giá trị f(D) = $[\frac{6}{7}; 2]$.

b) D = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $|y| = |x + \frac{1}{x}| = |x| + |\frac{1}{x}| \geq 2$.

Vậy tập giá trị là f(D) = $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

c) D = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta chuyển hàm số về phương trình

$yx = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - yx - 1 = 0$. $\Delta = y^2 + 4 > 0$, $\forall y$ nên phương trình bậc hai luôn có nghiệm x với mọi y. Vậy tập giá trị là f(D) = $\mathbb{R}$.

Bài toán 2.13: Tìm tập giá trị của các hàm số :

a) $y = x^2 + \sqrt{x-3}$.

b) $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)}$.

Hướng dẫn giải

a) D = [3; +∞). Với $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$, $\sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow y \geq 9$

Vậy tập giá trị f(D) = [9; +∞)

b) D=[–3; 6]. Ta có $y \geq 0$, $y^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \geq 9$

và $y^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9 + (3 + x + 6 - x) = 18$

$\Rightarrow 3 \leq y \leq 3\sqrt{2}$. Vậy tập giá trị là f(D) = [3; $3\sqrt{2}$].

Bài toán 2.14: Xét sự biến thiên của các hàm số:

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ b) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

a) D = [0; 1) ∪ (1; +∞). Lập tỉ số

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x_2}-2}\right) : (x_1 - x_2)$$

$$= \frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_1}-1)(\sqrt{x_2}-1)(x_1-x_2)} = \frac{-1}{(\sqrt{x_1}-1)(\sqrt{x_2}-1)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}$$

Trên mỗi khoảng (0; 1), (1; +∞) thì $\sqrt{x_1}-1$ và $\sqrt{x_2}-1$ cùng dấu nên tỉ số âm. Vậy f nghịch biến trên từng khoảng xác định (0; 1), (1; +∞). BBT:

x	0	1	+∞
f(x)	–1 ↘	–∞ || +∞	↘ 0

b) D = (–∞; 0) ∪ (0; +∞)

Ta có: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \left(\dfrac{1}{x_2^2} - \dfrac{1}{x_1^2}\right).(x_2 - x_1) = -\dfrac{x_2+x_2}{x_1^2.x_2^2}$

Trên khoảng (–∞; 0) thì tỉ số dương do đó hàm số đồng biến.

Trên khoảng (0; –∞) thì tỉ số âm do đó hàm số nghịch biến.

Bài toán 2.15: Xét sự biến thiên của các hàm số:

a) $y = f(x) = x^3 - 3x$ b) $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Hướng dẫn giải

a) TXĐ D = R. Với $x_1 < x_2$, ta có:

Tỉ số $K = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3$

Khi $x_1 < x_2 < -1$, tỉ số $K > 0$ nên đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Khi $-1 < x_1 < x_2 < 1$, tỉ số $K < 0$ nên nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Khi $1 < x_1 < x_2$, tỉ số $K > 0$ nên đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

b) TXĐ D = **R**. Với $x_1 < x_2$, ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} = \frac{x_2\sqrt{x_1^2+1} - x_1\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_2^2+1}.\sqrt{x_1^2+1}}$$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{\sqrt{x_2^2+1}.\sqrt{x_1^2+1}\left(x_2\sqrt{x_1^2+1} + x_1\sqrt{x_2^2+1}\right)}$$

Bằng cách xét các trường hợp $0 \le x_1 < x_2$, $x_1 < x_2 \le 0$, $x_1 \le 0 \le x_2$, thì tỉ số : $K = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ nên hàm số đồng biến trên D = **R**.

Bài toán 2.16: Với giá trị nào của m thì hàm số

a) $f(x) = (m-1)x + m^2 - 3$, đồng biến trên **R**

b) $f(x) = -x^2 + x(m-1)x + 2$ nghịch biến trên $(1; 2)$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện hàm đồng biến trên **R** là $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

b) Trên khoảng $(-\infty; \dfrac{m-1}{2})$ thì hàm số đồng biến còn trên khoảng $(\dfrac{m-1}{2}; +\infty)$ thì là hàm nghịch biến.

Điều kiện nghịch biến trên $(1; 2)$ là $\dfrac{m-1}{2} \le 1 \Leftrightarrow m \le 3$.

Bài toán 2.17: Xét tính chất chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = f(x) = |2x + 1| - |2x - 1|$ b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x-5}$.

Hướng dẫn giải

a) D = **R**: $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Ta có:

$f(-x) = |2x + 1| - |-2x-1| = |2x-1| - |2x+1| = -f(x)$. Vậy f lẻ.

b) D = **R**: $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \sqrt[3]{-x+5} - \sqrt[3]{-x-5} = -\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{x+5} = f(x)$. Vậy f chẵn.

Bài toán 2.18: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = f(x) = 4x + 2\sqrt{1+x}$

b) $y = f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \le 2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $1 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Do đó $2 \in D$ nhưng $-2 \notin D$. Vậy f không có tính chẵn, lẻ.

b) $D = \mathbb{R}$: $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Ta có:

$$f(-x) = \begin{cases} -(-x^3) - 6 & \text{khi } -x \leq -2 \\ |-x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ (-x^3) - 6 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} = f(x)$$

Vậy f là hàm số chẵn

Bài toán 2.19: Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng ta có thể biểu diễn f(x) thành tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Hướng dẫn giải

Giả sử $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ với $g_1(x)$ là hàm chẵn và $g_2(x)$ là hàm lẻ thì:

$$f(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = g_1(x) - g_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Nên $g_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, và $g_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

Thử lại: $g_1(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g_1(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g_1(x)$ là hàm chẵn và

$g_2(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -g_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g_2(x)$ là hàm lẻ: đpcm.

Bài toán 2.20:

Cho $a \neq 0$ và hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn với mọi x:

$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$. Chứng minh f là hàm tuần hoàn.

Hướng dẫn giải

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$, vì $f(x + a) \geq \frac{1}{2}$ nên: $f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$

$\Leftrightarrow f(x + a) - \frac{1}{2} = \sqrt{f(x) - f^2(x)} \Leftrightarrow [f(x + a) - \frac{1}{2}]^2 = f(x) - (f(x))^2$

$\Rightarrow f^2(x + a) - f(x + a) = f(x) - f^2(x) - \frac{1}{4}$

Do đó: $f(x + 2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a) - f^2(x + a)}$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f^2(x) - f(x) + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x) - \frac{1}{2})^2} = f(x).$$

Vậy hàm f là hàm tuần hoàn.

Bài toán 2.21: Hàm số f(x) xác định trên D được gọi là hàm phản tuần hoàn nếu tồn tại $T > 0$ sao cho: $x \in D \Leftrightarrow x + T \in D$ và $f(x + T) = -f(x)$.

Chứng minh nếu f(x) là một hàm phản tuần hoàn thì nó tuần hoàn.

Hướng dẫn giải

Gọi f là hàm phản tuần hoàn nên tồn tại T > 0 sao cho:

$$\begin{cases}\forall x, x \in D \Leftrightarrow x+T \in D \\ f(x+T) = -f(x), \forall x \in D\end{cases}$$

Suy ra : $\begin{cases}\forall x, x \in D \Leftrightarrow x+T \in D \Leftrightarrow x+2T \in D \\ f(x+2T) = -f(x+T) = f(x), \forall x \in D\end{cases}$

Vậy f là hàm tuần hoàn.

Bài toán 2.22: Tìm chu kì của hàm số y = f(ax + b), a ≠ 0, khi biết chu kì của hàm số y = f(x) là T.

Hướng dẫn giải

Đặt $T' = \left|\frac{T}{a}\right|$, ta có: f(a(x + T') + b) = f(ax + b + aT')

= f(ax + b ± T) = f(ax + b), ∀x ∈ **R**

Ta chứng minh $T' = \left|\frac{T}{a}\right| > 0$ là chu kì của hàm số đó. Thật vậy, giả sử có $0 < T'' < T'$ sao cho f(a(x ± T'') + b) = f(ax + b), ∀x ∈ **R**

Khi đó f(ax + b ± aT'') = f(ax + b), ∀x ∈ **R**

⇒ f(X ± aT'') = f(X), ∀X ∈ **R** ⇒ |aT''| > T

⇒ |aT''| > |aT'₂| ⇒ |T''| > |T'| ⇒ T'' > T': mâu thuẫn.

Bài toán 2.23: Cho hàm số f(x) = 2x – 3 và g(x) = x^2 + 5x – 1. Hãy xác định các hàm số hợp f ∘ g, g ∘ f, f ∘ f.

Hướng dẫn giải

Ta có f ∘ g (x) = f[g(x)] = f(x^2 + 5x – 1)

= 2(x^2 + 5x – 1) – 3 = 2x^2 + 10x – 5.

g ∘ f (x) = g[f(x)] = g(2x – 3) = (2x – 3)^2 + 5(2x – 3) – 1

= 4x^2 – 2x – 7.

f ∘ f (x) = f[f(x)] = f(2x – 3) = 2(2x – 3) – 3 = 4x – 9.

Bài toán 2.24: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Hãy xác định các hàm số hợp

$f_2(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f(f(f(x)))$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$.

Hướng dẫn giải

$$f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=\frac{f(f(x))}{\sqrt{1+f(f(x))^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

Tổng quát $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

Bài toán 2.25: Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là một song ánh từ **R** vào (–1, 1). Tìm hàm ngược của f(x).

Hướng dẫn giải

TXĐ D = **R**. Với $y\in(-1;1)$. Ta có $\dfrac{y^2}{1-y^2}\geq 0$ nên

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2(x^2+1)=x^2\\xy\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{y^2}{1-y^2}\\xy\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Do đó, cho trước mỗi $y\in(-1;1)$ ta luôn tìm được duy nhất

$x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Vậy f là song ánh và có hàm ngược là $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bài toán 2.26:

Tìm hàm số ngược của hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x \text{ khi } x<0\\x^2 \text{ khi } 0\leq x\leq 4\\x^3 \text{ khi } x>4\end{cases}$

Hướng dẫn giải

TXĐ D = **R**. Với $y\in\mathbf{R}\setminus(16;64]$

$$y=f(x)=\begin{cases}x \text{ khi } x<0\\x^2 \text{ khi } 0\leq x\leq 4\\x^3 \text{ khi } x>4\end{cases}\Leftrightarrow x=\begin{cases}y \text{ khi } y<0\\\sqrt{y} \text{ khi } 0\leq y\leq 16\\\sqrt[3]{y} \text{ khi } y>64\end{cases}$$

Do đó mỗi $y\in\mathbf{R}\setminus(16;64]$ ta luôn tìm được duy nhất $x\in\mathbf{R}$.

Vậy f là song ánh và có hàm ngược là $f^{-1}(x)=\begin{cases}x \text{ khi } x<0\\\sqrt{x} \text{ khi } 0\leq x\leq 16\\\sqrt[3]{x} \text{ khi } x>64\end{cases}$.

Bài toán 2.27: Ta được đồ thị của hàm số nào khi tịnh tiến đồ thị:

a) (H): $y = f(x) = \frac{2}{x}$ lên trên 1 đơn vị sau đó tịnh tiến sang trái 3 đơn vị.

b) (P): $y = f(x) = 3x^2$ xuống dưới 2 đơn vị rồi sang trái 5 đơn vị.

Hướng dẫn giải

a) Ta được đồ thị của hàm số: $y = f(x + 3) + 1 = -\frac{2}{x+3} + 1 = \frac{x+1}{x+3}$

b) Ta được đồ thị của hàm số:

$$y = f(x + 5) - 2 = 3(x + 5)^2 - 2 = 3x^2 + 10x + 73.$$

Bài toán 2.28: Tìm phép tịnh tiến biến đồ thị

a)(d): $y = f(x) = 7x - 2$ thành (d'): $y = 7x + 3$

b) (H): $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ thành (H'): $y = \frac{5x+2}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

a) (d'): $y = 7x + 3 = (7x - 2) + 5 = f(x) + 5$

Vậy phép tịnh tiến lên trên 5 đơn vị thì biến (d) thành (d')

Cách 2: (d'): $y = 7x + 3 = 7x + 5 - 2 = 7(x + \frac{5}{7}) - 2 = f(x + \frac{5}{7})$

Vậy phép tịnh tiến sang trái $\frac{5}{7}$ đơn vị biến (d) thành (d').

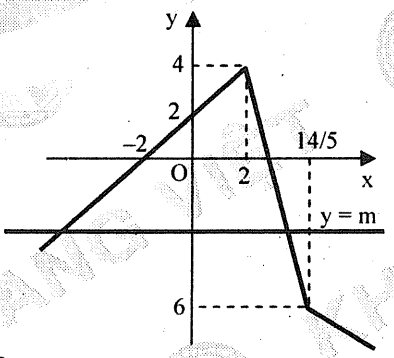
b) (H'): $y = \frac{2x+5}{x-1} + 3 = \frac{2(x+2)+1}{(x+2)-3} + 3 = f(x + 2) + 3$. Vậy phép tịnh tiến sang trái 2 đơn vị rồi lên trên 3 đơn vị biến (H) thành (H').

Bài toán 2.29: Vẽ đồ thị $y = |2x - 8| - |3x - 6|$. Suy ra m để phương trình: $|2x - 8| - |3x - 6| = m$ có nghiệm, có nghiệm âm, có 2 nghiệm cùng dấu.

Hướng dẫn giải

D = **R**

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{khi } x < 2 \\ -5x + 14 & \text{khi } 2 \le x \le 4 \\ -x - 2 & \text{khi } x > 4 \end{cases}$$



Đồ thị là đường gấp khúc.

Dựa vào đồ thị thì phương trình f(x) = m

– có nghiệm khi $m \le \max f(x) \Leftrightarrow m \le 4$

– có nghiệm âm khi $m < 0$.

– m có 2 nghiệm cùng dấu khi $2 < m < 4$.

Bài toán 2.30: Tìm tham số để hai đường thẳng:

a) Δ_1: $y = \frac{3-m}{2}x + 2m - 3$, Δ_2: $y = -(m + 2)x + \frac{1-2m}{3}$ song song:

b) d: $(2m-8)x + (m+2)y + m + 1 = 0$, d': $(8+2m)x + (m-2)y + 3m + 1 = 0$ vuông góc.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện 2 đường thẳng song song

$$\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-m}{2} = -(m+2) \\ 2m-3 \neq \dfrac{1-2m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -7 \\ m \neq \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = -7$$

b) Xét $m = -2$ thì d: $x = \dfrac{-1}{12}$ và d': $y = x - \dfrac{5}{4}$: không vuông góc

Xét $m = 2$ thì d: $y = x - \dfrac{3}{4}$ và d': $x = -\dfrac{7}{12}$: không vuông góc

Xét $m \neq \pm 2$ thì d: $y = -\dfrac{2m-8}{m+2}x - \dfrac{m+1}{m+2}$ và d': $y = -\dfrac{8+2m}{m-2}x - \dfrac{3m+1}{m-2}$

Điều kiện vuông góc: $aa' = -1 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{2m+8}{m+2}\right)\left(-\dfrac{8+2m}{m-2}\right) = -1$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 64 + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{68}{5} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2\sqrt{85}}{5}$ (chọn).

Bài toán 2.31: Xác định parabol (P): $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Đi qua A(0; –1), B(1; –1), C(–1; 1).

b) Đạt giá trị nhỏ nhất $\dfrac{3}{4}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$ và nhận giá trị $y = 1$ tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết: $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a+b+c = -1 \\ a-b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

Vậy (P): $y = x^2 - x - 1$.

b) Theo giả thiết: $\begin{cases} a > 0, -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \\ f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{3}{4} \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, a+b = 0 \\ \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c = \dfrac{3}{4} \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Vậy (P): $y = x^2 - x + 1$.

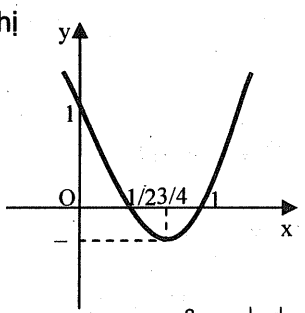
Bài toán 2.32: Cho (P): $y = 2x^2 - 3x + 1$. Vẽ đồ thị (P). Suy ra m để phương trình $2x^2 - 3|x| + 1 = m$ vô nghiệm; có 2 nghiệm; có 3 nghiệm; có 4 nghiệm.

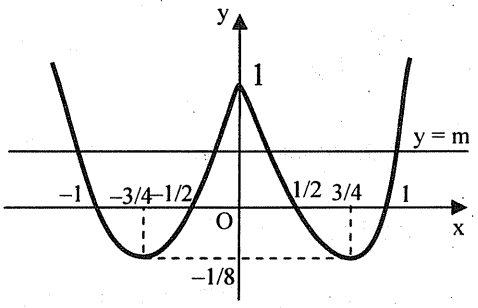
Hướng dẫn giải

Đỉnh $I(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8})$, trục đối xứng d: $x = \frac{3}{4}$, $a = 2 > 0$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $y = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$

Đồ thị





Ta có: $y = f(x) = 2x^2 - 3|x| + 1$ là hàm số chẵn, vì $f(-x) = f(x)$ nên đồ thị đối xứng nhau qua trục tung. Xét $x \geq 0$, thì $y = 2x^2 - 3x + 1$ nên đồ thị $y = f(x)$ lấy phần của parabol (P): $y = 2x^2 - 3x + 1$ ứng với $x \geq 0$ sau đó lấy đối xứng phần đó qua trục tung.

Số nghiệm của phương trình $2x^2 - 3|x| + 1 = m$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$:

Phương trình vô nghiệm nếu $m < -\frac{1}{8}$, có 2 nghiệm nếu $m = -\frac{1}{8}$ hoặc $m > 1$,

có 3 nghiệm nếu $m = 1$, có 4 nghiệm nếu $-\frac{1}{8} < m < 1$.

Bài toán 2.33:

Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số $y = |x^2 + \sqrt{2}x|$.

Hướng dẫn giải

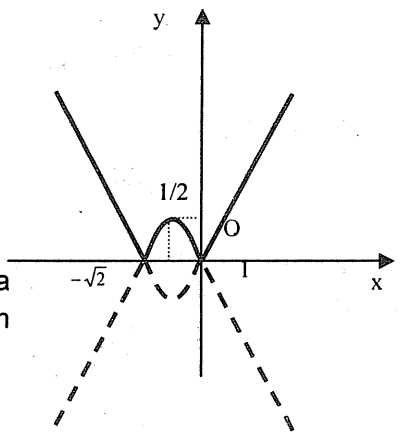
Trước hết ta vẽ (P): $y = x^2 + \sqrt{2}x$, D = **R**

Đỉnh $I(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2})$.

Trục đối xứng với d: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $y = \begin{cases} x^2 + \sqrt{2}x & \text{khi } x^2 + \sqrt{2}x \geq 0 \\ -(x^2 + \sqrt{2}x) & \text{khi } x^2 + \sqrt{2}x < 0 \end{cases}$

Vẽ parabol $y = x^2 + \sqrt{2}x$ và lấy đối xứng qua trục hoành. Sau đó chỉ việc xoá đi phần nằm ở phía dưới trục hoành của cả hai parabol đó.



Từ đồ thị ta có BBT:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\infty$
y	$+\infty$	↘	↗	↘	↗ $+\infty$
		0	$-\frac{1}{2}$	0	

Bài toán 2.34:

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = f(x) = \frac{4}{x}$

b) $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$.

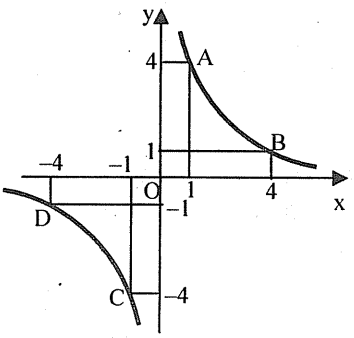
Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(-x) = \frac{4}{-x} = -f(x)$

Hàm số lẻ nên đồ thị đối xứng qua gốc O.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	0 ↘	$+\infty$	↘ 0
	$-\infty$		

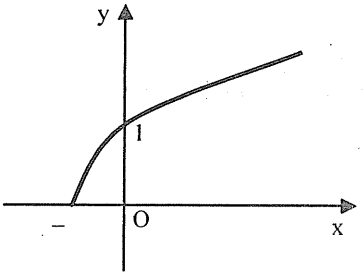


Một số điểm của đồ thị: A(1; 4), B(4; 1), C(–1; –4), D(–4; –1).

b) $D = [-\frac{1}{2}; +\infty)$

BBT:

x	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	0 ↗	$+\infty$



Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$, $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Bài toán 2.35

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

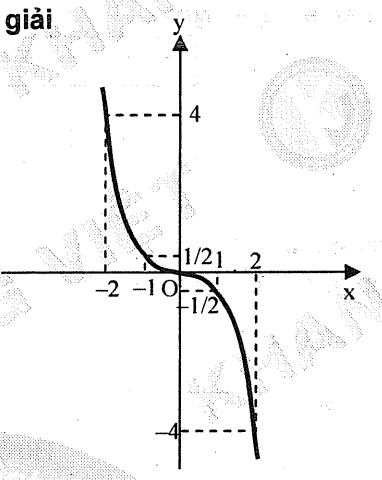
b) $y = f(x) = \frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|}$.

Hướng dẫn giải

a) D = **R**.

BBT:

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

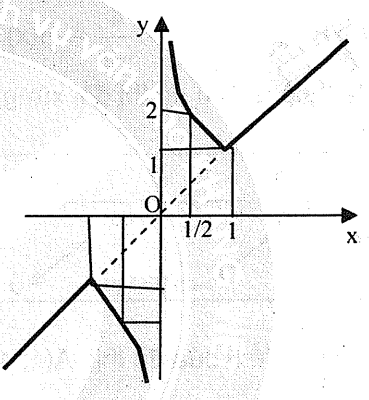


Vì hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng, đồ thị đi qua gốc toạ độ và các điểm $(1; -\frac{1}{2})$, $(2; -4)$.

b) Điều kiện: $|x+1| \neq |x-1| \Leftrightarrow x \neq 0$

Ta có $y = f(x) = \begin{cases} x, \text{ khi } x < -1 \\ \frac{1}{x} \text{ khi } -1 \le x \le 1 \\ x \text{ khi } x > 1 \end{cases}$

và f(–x) = –f(x) nên f lẻ do đó đồ thị đối xứng nhau qua gốc O.



BBT:

x	$-\infty$		–1		0		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	–1	↘	‖	↗	1	↗	$+\infty$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$, $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$.

Bài toán 2.36:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

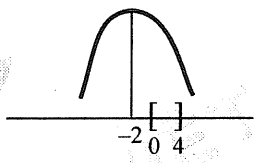
a) $y = x^2 - 4\sqrt{16 - x^2} - 13$ b) $y = x(x + 1)(x – 2)(x – 3)$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $–4 \le x \le 4$. Đặt $t = \sqrt{16 - x^2}$, $0 \le t \le 4$

$y = f(t) = –t^2 – 4t + 3$ có $a = –1 < 0$

nên bề lõm hướng xuống.



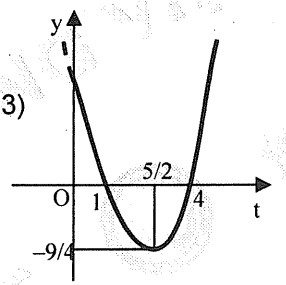
Hoành độ đỉnh $t_I = -\frac{b}{2a} = –2 \notin [0; 4]$

Vậy miny = f(4) = –29.

b) $y = [x(x – 2)].[(x + 1)(x – 3)] = (x^2 – 2x)(x^2 – 2x – 3)$

Đặt $t = x^2 – 2x + 1 = (x – 1)^2 > 0$ thì:

$y = f(t) = (t – 1).(t – 4) = t^2 – 5t + 4$, $t \ge 0$



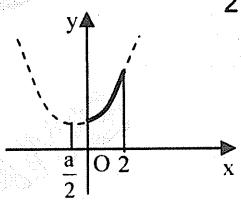
Vậy $\text{miny} = \min f(t) = f(\frac{5}{2}) = -\frac{9}{4}$.

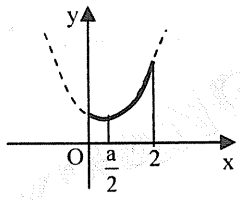
Bài toán 2.37: Tìm tất cả các giá trị của a sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$ trên đoạn [0; 2] là bằng 3.

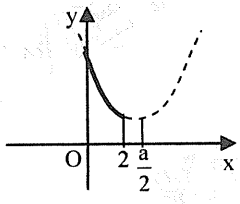
Hướng dẫn giải

Parabol có hệ số theo x^2 là 4 > 0 nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = \frac{a}{2}$. Ta xét 3 trường hợp:







– Nếu $\frac{a}{2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$ thì f đồng biến trên [0; 2]

$\min f(x) = f(0) \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}$. Chọn $a = 1 - \sqrt{2}$.

– Nếu $0 \le \frac{a}{2} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le a \le 4$ thì

$\min f(x) = f(\frac{a}{2}) = 2a + 2 = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} < 0$: loại

– Nếu $\frac{a}{2} > 2 \Leftrightarrow a > 4$ thì f nghịch biến trên [0; 2]

$\min f(x) = f(2) \Leftrightarrow a^2 - 10a + 15 = 0 \Leftrightarrow a = 5 \pm \sqrt{10}$. Chọn $a = 5 + \sqrt{10}$

Vậy $a = 1 - \sqrt{2}$, $a = 5 + \sqrt{10}$.

Bài toán 2.38:

a) Tìm điểm cố định của các đường thẳng $y = (m + 1)x - 3m + 1$.

b) Tìm điểm mà họ không đi qua (P): $y = mx^2 + 2(m - 2)x - 3m + 1$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định: $y_o = (m + 1)x_o - 3m + 1, \forall m$

$\Leftrightarrow (x_o - 3)m + (x_o + 1 - y_o) = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - 3 = 0 \\ x_o + 1 - y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 3 \\ y_o = 4 \end{cases}$$

Vậy các đường thẳng luôn luôn qua điểm cố định M(3; 4)

b) Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm mà họ đồ thị không đi qua với mọi m:

$y_o \ne mx_o^2 + 2(m - 2)x_o - 3m + 1, \forall m$

$\Leftrightarrow (x_o^2 + 2x_o - 3)m - 4x_o - y_o + 1 \ne 0, \forall m.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 + 2x_o - 3 = 0 \\ -4x_o - y_o + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o \ne -3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_o = -3 \\ y_o \ne 13 \end{cases}$$

Vậy tập điểm là 2 đường thẳng x =1,x = –3 bỏ 2 điểm cố định là (1; –3) và (–3; 13).

Bài toán 2.39: Tìm m để đường thẳng d: $y = x - 1$ cắt parabol (P): $y = x^2 + mx + 1$ tại hai điểm P, Q mà đoạn PQ = 3.

Hướng dẫn giải

PTHĐGĐ: $x^2 + mx + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 2 = 0$

Điều kiện cắt tại 2 điểm P, Q: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 7 > 0$

Ta có $PQ = 3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - 1 - x_1 + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = 9 \Leftrightarrow 2(S^2 - 4P) = 9$

$\Leftrightarrow (1-m)^2 - 8 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (m-1)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow m = 1 \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (chọn).

Bài toán 2.40: Lập phương trình tiếp tuyến với (P): $y = x^2 + x - 1$

a) Song song với d: $y = -3x + 2$ b) Đi qua B(–1; –5).

Hướng dẫn giải

a) Tiếp tuyến song song với d là $y = -3x + b$, $b \neq 2$

PTHĐGĐ: $x^2 + x - 1 = -3x + b \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 - b = 0$

Điều kiện tiếp xúc: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -5$ (chọn).

Vậy tiếp tuyến d: $y = -3x - 5$.

b) Đường thẳng d đi qua B(–1; –5) có hệ số góc k:

$y + 5 = k(x + 1) \Leftrightarrow y = kx + k - 5$

PTHĐGĐ: $x^2 + x - 1 = kx + k - 5 \Leftrightarrow x^2 + (1-k)x + 4 - k = 0$

Điều kiện tiếp xúc $\Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k - 15 = 0 \Leftrightarrow k = 3$ hoặc $k = -5$

Từ đó có hai tiếp tuyến d_1: $y = 3x - 2$ và d_2: $y = -5x - 10$.

Bài toán 2.41:

a) Chứng minh các parabol $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1$ với $m \neq 0$ luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định.

b) Chứng minh các đường thẳng $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ luôn luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Hướng dẫn giải

a) Gọi d: $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc, khi đó PTHĐGĐ luôn có nghiệm kép.

$mx^2 - (4m-1)x + 4m - 1 = ax + b \Leftrightarrow mx^2 - (4m - 1 - a)x + (4m - 1 - b) = 0$

Ta có: $\Delta = 0, \forall m \neq 0 \Leftrightarrow (4m - 1 - a)^2 - 4m(4m - 1 - b) = 0, \forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow [2(a-1) + (1+b)]m + (a-1)^2 = 0, \forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1) + (1+b) = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$. Vậy d: $y = x - 1$.

b) Phương trình đường thẳng: $m^2 - 2(x+2)m - 2 + y = 0$

$\Delta' = (x+2)^2 + 2 - y = x^2 + 4x + 6 - y$.

Xét $\Delta' = 0$ thì $y = x^2 + 4x + 6$ rồi chứng minh tiếp xúc.

Bài toán 2.42: Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn AB với A, B là hai giao điểm của đường thẳng (d): $y = 2x + m$ với (P): $y = x^2 + x - 6$.

Hướng dẫn giải

PTHĐGĐ: $x^2 + x - 6 = 2x + m$ hay $x^2 - x - 6 - m = 0$

Điều kiện $\Delta = 4m + 25 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{25}{4}$.

Trung điểm của đoạn thẳng AB là I: $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \\ y = 1 + m \end{cases}$

Vì điều kiện $m > -\frac{25}{4}$ nên $y > -\frac{19}{5}$. Vậy tập hợp là phần đường thẳng: $x = \frac{1}{2}$, giới hạn $y > -\frac{19}{5}$.

Bài toán 2.43: Cho parabol (P): $y = 2x^2 + 2(m - 3)x + 3m$.

a) Tìm tập hợp các đỉnh của (P).

b) Mỗi m thì hàm số có GTNN g(m) theo m, tìm GTLN của các g(m).

Hướng dẫn giải

a) Đỉnh I có toạ độ $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3 - m}{2}$, $y = f(-\frac{b}{2a})$

Khử m bằng cách rút $3 - m = 2x$ được $m = 3 - 2m$ thế vào phương trình (P) ta có: $y = 2x^2 + 2(3 - 2x - 3)x + 3(3 - 2x) = -2x^2 - 6x + 9$

Vậy tập hợp các đỉnh I là parabol: $y = -2x^2 - 6x + 9$.

b) $a = 2 > 0$ nên GTNN $y = f(-\frac{b}{2a}) = f(\frac{3 - m}{2}) = g(m)$

$= 2(\frac{3 - m}{2})^2 + 2(m - 3)(\frac{3 - m}{2}) + 3m = \frac{-1}{2}(m^2 - 12m + 9)$

$= \frac{27}{2} - \frac{1}{2}(m - 6)^2 \le \frac{27}{2}$. Vậy GTLN $g(m) = \frac{27}{2}$ khi $m = 6$, $x = \frac{-3}{2}$.

Bài toán 2.44: Cho parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Tìm quỹ tích những điểm $M(x_o; y_o)$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến (P) mà hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ; đúng một tiếp tuyến đến (P).

Hướng dẫn giải

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d đi qua $M(x_o; y_o)$, phương trình của d là:

$$y - y_o = k(x - x_o) \Leftrightarrow y = kx + y_o - kx_o$$

PTHĐGĐ: $ax^2 + bx + c = kx + y_o - kx_o$

$\Leftrightarrow ax^2 + (-k + b)x + kx_o + c - y_o = 0$

Điều kiện tiếp xúc là phương trình có nghiệm kép $\Delta = 0$

$\Leftrightarrow (b - k)^2 - 4a(kx_o + c - y_o) = 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 2bk + b^2 - 4ax_o k - 4ac + 4ay_o = 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 2(b + 2ax_o)k + (b^2 - 4ac + 4ay_o) = 0$ (*)

– Điều kiện qua $M(x_o; y_o)$ kẻ được hai tiếp tuyến đến (P) mà hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt mà tích hai nghiệm đó bằng –1

$P = -1 \Leftrightarrow b^2 - 4ac + 4ay_o = -1$

$\Leftrightarrow y_o = -\dfrac{b^2 - 4ac + 1}{4a}$

Vậy quỹ tích điểm $M(x_o; y_o)$ là đường thẳng $y = -\dfrac{b^2 - 4ac + 1}{4a}$.

– Điều kiện qua $M(x_o; y_o)$ kẻ được 1 tiếp tuyến đến (P) khi (*) có nghiệm kép

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (b - 2ax_o)^2 - (b^2 - 4ac + 4ay_o) = 0$

$\Leftrightarrow y_o = ax_o^2 + bx_o + c$

Vậy quỹ tích chính là các điểm của (P).

Bài toán 2.45:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn $|f(x)| \le 1, \forall x \in \{-1; 0; 1\}$.

Chứng minh: $|f(x)| \le \dfrac{5}{4}, \forall x \in [1; 1]$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(f(1) + f(1)) - f(0) \\ b = \dfrac{1}{2}(f(1) - f(-1)) - f(0) \\ c = f(0) \end{cases}$

và $|f(-1)| \le 1, |f(0)| \le 1, |f(1)| \le 1$.

Do đó: $f(x) = \dfrac{1}{2}f(1) \cdot (x^2 + x) + \dfrac{1}{2}f(-1) \cdot (x^2 - x) + f(0) \cdot (1 - x^2)$

Nên $|f(x)| \le \dfrac{1}{2}|f(1)| \cdot |x^2 + x| + \dfrac{1}{2}|f(-1)| \cdot |x^2 - x| + |f(0)| \cdot |1 - x^2|$

$\le \dfrac{1}{2}|x^2 + x| + \dfrac{1}{2}|x^2 - x| + |1 - x^2|$

$= \begin{cases} 1 + x - x^2 & \text{khi } -1 \le x < 0 \\ 1 - x - x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$= 1 + |x| - x^2 = \dfrac{5}{4} - (|x| - \dfrac{1}{2})^2 \le \dfrac{5}{4}$.

Bài toán 2.46: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thoả mãn điều kiện: $|f(x)| \le 1$ khi $|x| \le 1$. Chứng minh nếu $|x| \le 1$ thì: $|3ax^2 + 2bx + c| \le 9$ và không thể thay số 9 bởi một số nhỏ hơn.

Hướng dẫn giải

Đặt $A = f(-1) = -a + b - c + d$, $B = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d$,

$C = f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d$, $D = f(1) = a + b + c + d$

nên: $a = -\frac{2}{3}A + \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}C + \frac{2}{3}D$; $b = \frac{2}{3}A - \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}C + \frac{2}{3}D$,

$c = \frac{1}{6}A - \frac{4}{3}B + \frac{4}{3}C - \frac{1}{6}D$; $d = -\frac{2}{6}A + \frac{2}{3}B + \frac{2}{3}C - \frac{1}{6}D$.

Do đó $3ax^2 + 2bx + c = -\frac{1}{6}A(12x^2 - 8x - 1) + \frac{4}{3}B(3x^2 - x - 1)$

$-\frac{4}{3}C(3x^2 + x - 1) + \frac{1}{6}D(12x^2 + 8x - 1)$

Vì: $|A|, |B|, |C|, |D| \le 1$ nên:

$|3ax^2 + 2bx + c| \le \frac{1}{6}|12x^2 - 8x - 1| + \frac{4}{3}|3x^2 - x - 1|$

$+ \frac{4}{3}|3x^2 + x - 1| + \frac{1}{6}|12x^2 + 8x - 1|$

Áp dụng: $|a + b| + |a - b| = 2\max(|a|; |b|)$ thì

$|12x^2 - 8x - 1| + |12x^2 + 8x - 1| = 2\max(|12x^2 - 1|; 8x|) \le 2.11 = 22$

$|3x^2 + x - 1| + |3x^2 - x - 1| = 2\max(|3x^2 - 1|; |x|) \le 2.2 = 4.$

Do đó: $|3ax^2 + 2bx + c| \le \frac{22}{6} + \frac{19}{3} = 9.$

Hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x$ thoả mãn điều kiện của bài toán và ta có: $|3ax^2 + 2bx + c| = |12x^2 - 3|$ trên đoạn $[-1,1]$ biểu thức này có giá trị lớn nhất bằng 9 khi $x = \pm 1$ vì vậy không thể thay số 9 bởi một số nhỏ hơn (đpcm).

Bài toán 2.47:

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thoả mãn

i) $f(f(n)) = n + 2$,

ii) $f(f(n + 1) + 1) = n + 4$,

iii) $f(0) = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh f là một đơn ánh:

nếu $f(m) = f(n) \Rightarrow f(f(m)) = f(f(n))$

$\Rightarrow m + 2 = n + 2 \Rightarrow m = n$ nên f đơn ánh.

Từ i) ta có f(f(n + 2)) = n + 4 = f(f(n + 1) + 1)

Do f đơn ánh nên f(n + 2) = f(n + 1) + 1

Từ đó f(n) = f(0) + n = n + 1 . Thử lại đúng.

Vậy: f(n) = n + 1, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Bài toán 2.48:

Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sao cho:

f(f(m) + f(n)) = m + n, với mọi m, n thuộc **N**.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh f là một đơn ánh. Thật vậy, giả sử f(n) = f(p) thì:

m + n = f(f(m) + f(n)) = f(f(m) + f(p)) = m + p $\Rightarrow$ n = p.

Thay m = x + 1, n = x – 1 và m = x, n = x vào, ta có:

f(f(x + 1) + f(x – 1) = 2x = f(f(x) + f(x))

$\Rightarrow$ f(x + 1) + f(x – 1) = 2f(x) (vì f là đơn ánh)

Đặt f(0) = a, f(1) = b thì từ (2), dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được rằng f(x) = a + (b – a)x với mọi x. Do đó với mọi m, n thuộc **Z**:

a + (b – a)[a + (b – a)m + a + (b – a)n] = m + n

Suy ra a = 0 và $(b - a)^2 = 1$.

Do đó f(m) = m, $\forall m \in \mathbf{Z}$ hoặc f(m) = –m, $\forall m \in \mathbf{Z}$. Thử lại đúng.

Bài toán 2.49:

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ thoả mãn điều kiện

i) f tăng thực sự

ii) f(2mf(n)) = 2nf(m) với mọi m, n $\in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Giả sử f(1) > 1 thì 2 < 2f(1) $\Rightarrow$ f(2) < f(2f(1))= 2f(1) $\Rightarrow$ 2f(2) < 4 f(1).

Từ đó f(2f(2)) < f(4f(1)) $\Rightarrow$ 4f(1) < 2f(2), vô lí.

Mà f(1) $\geq$ 1 nên f(1) = 1

Thay n = 1 có f(2m) = 2f(m) và thay m = 1 có

f(2f(n)) = 2n $\Rightarrow$ 2f(f(n)) = 2n $\Rightarrow$ f(f(n)) = n với mọi n $\in \mathbf{N}^*$

Giả sử có f(n) > n thì f(f(n)) > f(n) hay n > f(n): vô lí.

Tương tự, giả sử có f(n) < n thì f(f(n)) < f(n) hay n < f(n): vô lí.

Do đó f(n) = n với mọi $\in \mathbf{N}^*$. Thử lại đúng.

Vậy: f(n) = n với mọi $\in \mathbf{N}^*$.

Bài toán 2.50:

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

với mọi x, y $\in$ **Z** và x + y chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Với mọi n, ta có $f(n) = f\left(\frac{0+3n}{3}\right) = \frac{f(0)+f(3n)}{2}$

Suy ra $2f(n) = f(0) + f(3n)$

Và $f(n) = f\left(\frac{n+2n}{3}\right) = \frac{f(n)+f(2n)}{2} \Rightarrow f(n) = f(2n)$

Mà $f(2n) = f\left(\frac{3n+3n}{3}\right) = \frac{f(3n)+f(3n)}{2} = f(3n)$

nên $f(n) = f(2n) = f(3n)$ do đó

$2f(n) = f(0) + f(3n) \Rightarrow f(n) = f(0)$.

Suy ra f là hàm hằng: $f(x) = C$. Thử lại đúng.

Vậy $f(x) = C$ tùy ý.

Bài toán 2.51:

a) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ thoả mãn điều kiện:

$$f(m + f(n)) = f(m) - n, \forall m, n \in \mathbf{Z}.$$

b) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ thoả mãn điều kiện

$$f(m + f(n)) = f(m) + n, \forall m, n \in \mathbf{Z}.$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có f là đơn ánh

Thay $m = n = 0$, ta có $f(f(0)) = f(0)$, suy ra $f(0) = 0$

Thay $m = 0$ ta có $f(f(n)) = -n$ với mọi n nguyên

Lại thay m bởi f(m) ta có:

$f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) - n = -m - n = f(f(m + n)$

Do f là đơn ánh nên ta phải có:

$f(m + n) = f(m) + f(n)$ với mọi m, n nguyên

Từ đó $f(n) = an$ với $a = f(1)$.

Thay $f(n) = nf(1)$ vào hệ thức ban đầu thấy không thỏa mãn

Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Lập luận tương tự câu a) ta được $f(n) = an$ (a nguyên tùy ý)

Từ đó tìm được $a = 1$ hoặc $a = -1$.

nên $f(n) = n$, $f(n) = -n$. Thử lại đúng.

Vậy: $f(n) = n$, $f(n) = -n$ với mọi $n \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 2.52:

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ thoả :

$$\forall x \in \mathbf{Z} : 3f(x) - 2f[f(x)] = x.$$

Hướng dẫn giải

Rõ ràng $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{Z}$ thoả bài toán.

Xét hàm số f thoả đề bài. Đặt $g(x) = f(x) - x$, thì $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$.

Ta có: $3f(x) - 2f[f(x)] = x$

$\Leftrightarrow 2(f[f(x)] - f(x)) = f(x) - x, \forall x \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 2g[f(x)] = g(x), \forall x \in \mathbf{Z}.$

Do đó, với mọi $x \in \mathbf{Z}$, ta có:

$g(x) = 2g[f(x)] = 2^2 g[ff(x)]] = 2^3 g[fff(x)]]] = ... = 2^n g[fff...]]]] = ...$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbf{Z}$ và $\forall n \in \mathbf{Z}$ thì $g(x) \vdots 2^n$. Do đó $g(x) = 0, \forall x \in \mathbf{Z}$.

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 2.53:

Xác định tất cả các hàm f từ **Q** đến **Q** sao cho

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y thuộc **Q**.

Hướng dẫn giải

– Cho $x = y = 0$ thì $f(0) = 2f(0)$ nên $f(0) = 0$.

– Ta chứng minh quy nạp rằng $f(kx) = kf(x)$ với mọi k thuộc **N** và x thuộc **Q**.

Khi $n = 1$ thì $f(x) = 1f(x)$: đúng.

Giả sử điều này đúng với k, thay $y = kx$ thì:

$f(x + kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x) = (k+1) f(x)$: đpcm.

– Thay $y = -x$ thì $f(0) = f(x) + f(-x)$

nên $f(-x) = -f(x)$ với mọi x thuộc **Q**.

Do đó $f(kx) = kf(x)$ với mọi k thuộc **Z** và x thuộc **Q**.

– Thay $x = \frac{1}{k}$ thì $f(1) = f(k.\frac{1}{k}) = kf(\frac{1}{k})$

Suy ra $f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} f(1)$ với mọi k thuộc **Z**.

– Ta có với mọi m,n thuộc **Z** thì $f(\frac{m}{n}) = f(m.\frac{1}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n} f(1)$

Do đó $f(x) = cx$, $c = f(1)$với mọi x thuộc **Q**.

Thử lại đúng. Vậy $f(x) = cx$ với mọi x thuộc **Q**.

Bài toán 2.54:

Tìm hàm $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và

$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1, \forall x, y \in \mathbf{Q}$

Hướng dẫn giải

Cho $y = 1$ ta có $f(x) = f(x)f(1) - f(x + 1) + 1 \Rightarrow f(x + 1) = f(x) + 1$

Từ đó với mọi $x \in \mathbf{Q}$ và $n \in \mathbf{N}$ ta có $f(x + n) = f(x) + n$

nên $f(n) = n + 1$. Thay $x = \frac{1}{n}$, $y = n$, ta có:

$$2 = f(1) = f\left(\frac{1}{n}.n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) f(n) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$$= (n + 1) f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1$$

Do đó $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$

và $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m.\frac{1}{n}\right) = f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(m+\frac{1}{n}\right) + 1$

hay $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$. Do đó f(x) = x + 1, với mọi $x \in \mathbf{Q}$. Thử lại đúng. Vậy: f(x) = x + 1, $\forall x \in \mathbf{Q}$.

Bài toán 2.55:

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ thoả mãn

$f\left(x+\frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$, với mọi x, $y \in \mathbf{Q}^+$

Hướng dẫn giải

Cho x = y thì: f(x + 1) = f(x) + 2x + 1 với mọi $x \in \mathbf{Q}^+$

Cho x = 1, thì:

$$f(y+1) = f(1) + \frac{f(y)}{f(1)} + 2y \Rightarrow f(x+1) = f(1) + \frac{f(x)}{f(1)} + 2x$$

Do đó $f(x) + 1 = f(1) + \frac{f(x)}{f(1)} \Rightarrow (f(x) - f(1))(f(1) - 1) = 0$

Vì hàm số f(x) = f(1), $\forall x \in \mathbf{Q}^+$ không thỏa mãn nên f(1) = 1.

Với n là số tự nhiên và n > 1, ta có:

$$f(n) = f(n) - f(n-1) + f(n-1) - f(n-2) + \ldots + f(2) - f(1) + f(1)$$
$$= (2n-1) + (2n-3) + \ldots + 3 + f(1) = n^2.$$

Mà f(x + m) = f(x + m – 1) + 2(x + m) – 1.

Lần lượt thay m = 1, 2, ..., n rồi cộng tất cả các đẳng thức đó ta được:

$f(x + n) = f(x) + 2xn + n^2$ nên với m, $n \in \mathbf{N}^*$, ta có:

$$f\left(m+\frac{n}{m}\right) = f(m) + \frac{f(n)}{f(m)} + 2n = m^2 + \frac{n^2}{m^2} + 2n$$

Với $f\left(m+\frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right) + 2n + m^2$

Suy ra $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n^2}{m^2}$ nên $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{Q}^+$ Thử lại đúng.

Vậy $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{Q}^+$

Bài toán 2.56:

Tìm hàm số f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ biết rằng:

a) $f(x) - xf(-x) = x + 1$

b) $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ (1)

Hướng dẫn giải

a) Thay x bởi –x ta được: $f(-x)+xf(x)=-x+1$

Khử f(–x) thì $f(x)=\frac{-x^2+2x+1}{x^2+1}$. Thử lại đúng.

b) Thay x bởi $\frac{1}{1-x}$ trong phương trình cho, ta được:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)=\frac{1}{1-x}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}\quad(2)$$

Thay tiếp x bởi $\frac{1}{1-x}$ ta được: $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x-1}{x}$ (3)

Lấy (1) + (3) – (2) thì $f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$. Thử lại đúng.

Bài toán 2.57:

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện:

$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)\ \forall x, y\in\mathbf{R}$

Hướng dẫn giải

Cho x = y = 1 ta có $2f(1)=2(f(1))^2\Rightarrow f(1)=0$ hoặc f(1) = 1

Xét trường hợp f(1) = 0

Cho y = 1 ta có $f(x)=0, \forall x\in\mathbf{R}$ (thoả mãn)

Xét trường hợp f(1) = 1

Cho y = 1 ta được $x+f(x)=(x+1)f(x)\Rightarrow x(f(x)-1)=0$

Từ đó nếu $x\neq 0$ thì f(x) = 1

nên $f(x)=\begin{cases}1 \text{ khi } x\neq 0\\ a \text{ khi } x=0\end{cases}$: thử lại đúng.

Bài toán 2.58:

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện:

$f(x^3-y)+2y(3f^2(x)+y^2)=f(y+f(x)),\ \forall x, y\in\mathbf{R}$

Hướng dẫn giải

Với mọi $x\in\mathbf{R}$ ta chọn $y=\frac{x^3-f(x)}{2}$

thì $2y=x^3+f(x)$ và $x^3-y=y+f(x)$

Khi đó phương trình hàm ban đầu trở thành

$f(y+f(x))+(x^3-f(x))(3f^2(x)+y^2)=f(y+f(x)),\ \forall x\in\mathbf{R}$

$(x^3-f(x))(3f^2(x)+y^2)=0,\ \forall x\in\mathbf{R}$

$\Rightarrow x^3-f(x)=0$ hay $3f^2(x)+y^2=0,\ \forall x\in\mathbf{R}$

$\Rightarrow$ $f(x) = x^3$ hay $y = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow$ $f(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Thử lại đúng.

Vậy: $f(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Bài toán 2.59:

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn

$f(x + y) \geq f(x)\, f(y) \geq 2020^{x+y}$ với mọi số thực x, y .

Hướng dẫn giải

Ta có : $f(x + y) \geq f(x)f(y) \geq 2020^{x+y}$

Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(0) \geq f^2(0) \geq 1$. Từ đó suy ra $f(0) = 1$.

Cho $y = -x \Rightarrow 1 = f(0) \geq f(x)\, f(-x) \geq 1$.

Suy ra: $f(x)f(-x) = 1$ với mọi x thuộc $\mathbf{R}$.

Cho $y = 0 \Rightarrow f(x) \geq 2020^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$

nên $f(-x) \geq 2020^{-x}$ do đó $f(x) \leq 2020^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$

Vậy $f(x) = 2020^x$ với mọi x thuộc $\mathbf{R}$. Thử lại đúng.

Bài toán 2.60:

Tìm tất cả các hàm số f và g thỏa mãn:

a) $\begin{cases} f(x+1) + xg(x+1) = 2x \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{x+2}{2} \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right) + g(x+5) = x + 4 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Thay $x + 1$ bởi x trong phương trình đầu và thay $\dfrac{x+1}{x-1}$ bởi x trong phương trình thứ hai thì được

$$\begin{cases} f(x) + (x-1)g(x) = 2(x-1) \\ f(x) + g(x) = \dfrac{2}{x-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x) = -2$; $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$. Thử lại đúng.

b) Trong phương trình thứ hai, thay x bởi $2x + 10$ thì hệ

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{x+2}{2} \\ f(x+6) + g(2x+15) = 2x + 14 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g(2x + 15) = \dfrac{-3x - 26}{2}$ và $f(x + 6) = \dfrac{7x + 54}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{7x + 12}{2}$ và $g(x) = \dfrac{-3x - 7}{4}$. Thử lại đúng.

Bài toán 2.61: Cho hàm $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ thỏa mãn: $f(1) = 1$ và

$f(n+3) \le f(n) + 3$; $f(n+2012) \ge f(n) + 2012$ với mọi $n \in \mathbf{Z}$.

Tính f(2013).

Hướng dẫn giải

Ta có $f(n+3) \le f(n) + 3$ với mọi n nguyên nên

$f(n+2013) = f[(n+670.3) + 3] \le f(n + 670.3) + 3 \le \ldots$

$\le f(n) + 2013$

Và ta có $f(n+2013) \ge f(n) + 2012$ với mọi n nguyên nên

$f(n+2013) = f[(n+1) + 2012] \ge f(n+1) + 2012$.

Do đó $f(n+1) + 2012 \le f(n) + 2013$ với mọi n nguyên.

$\Rightarrow$ $f(n+1) \le f(n) + 1$ với mọi n nguyên.

Suy ra

$f(n+2012) \le f(n+2011) + 1 \le \ldots \le f(n) + 2012$ với mọi n nguyên.

Mà theo giả thiết $f(n+2012) \ge f(n) + 2012$ với mọi n nguyên.

Nên có $f(n+2012) = f(n) + 2012$ với mọi n nguyên.

Cho n = 1 thì có f(2013) = f(1) +2012 = 2013.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 2.1: Cho 3 ánh xạ f, g, h. Chứng minh nếu $g \circ f$ song ánh và $h \circ g$ song ánh thì cả 3 ánh xạ f, g, h đều song ánh.

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa song ánh và dựa theo các bài toán 2.3, 2.4

Bài tập 2.2: Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \sqrt{x^2 - 4} + \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ b) $y = \dfrac{4x^2 - 1}{\sqrt{4 - x|x|}}$

Hướng dẫn

a) Đặt điều kiện xác định đầy đủ. Kết quả $D = (-3; -2] \cup [2; 3)$.

b) Xét $x \ge 0$, $x < 0$. Kết quả $D = (-\infty; 2)$.

Bài tập 2.3: Xét sự biến thiên của hàm số: a) $y = \dfrac{3x - 2}{x - 5}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 1}$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định $D = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Kết quả nghịch biến trên $(-\infty; 5)$, $(5; +\infty)$

b) Tập xác định D = $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Kết quả đồng biến trên $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$

Bài tập 2.4: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = f(x) = \dfrac{x|x|}{\sqrt{x^2 - 4}}$ b) $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{\sqrt[3]{x^3 - x}}$

Hướng dẫn

a) Tập xác định D = $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Kết quả hàm số lẻ.

b) So sánh f(–2) và f(2).

Kết quả hàm số không có tính chẵn lẻ.

Bài tập 2.5: Vẽ đồ thị hàm số $y = 3|x - 1| - |2x + 2|$. Lập bảng biến thiên và tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

Hướng dẫn

Chia miền xét dấu, $x < -1$; $-1 \le x \le 1$ và $x > 1$.

Kết quả GTNN $y = -4$ tại $x = 1$.

Bài tập 2.6: Các đỉnh của ΔABC có toạ độ A(6; –6), B(2; –3), C(8; 5). Tìm chân phân giác trong BD và lập phương trình đường thẳng BD.

Hướng dẫn

Điểm D chia đoạn AC theo tỉ $k = -\dfrac{AC}{AB}$

Kết quả $D(\dfrac{20}{3}; -\dfrac{7}{3})$ BD: $y = \dfrac{1}{7}x - \dfrac{23}{7}$

Bài tập 2.7: Lập phương trình tiếp tuyến với (P): $y = x^2 - 3x + 2$ tạo với tia Ox một góc bằng 45°; vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$.

Hướng dẫn

Đường thẳng d tạo với tia Ox một góc bằng 45° có dạng $y = x + b$

Đường thẳng d' vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$ có dạng $y = 3x + m$.

Kết quả $y = x - 2$, $y = 3x - 7$.

Bài tập 2.8: Chứng minh d: $y = x$ luôn cắt (P): $y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ tại 2 điểm A, B phân biệt và khoảng cách AB không đổi. Tìm quỹ tích của trung điểm I của đoạn AB.

Hướng dẫn

Lập phương trình hoành độ giao điểm và dùng Viet.

Xác định tọa độ trung điểm I rồi khử tham số m.

Kết quả AB = $2\sqrt{2}$, đường thẳng $y = x$.

Bài tập 2.9: Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$. Chứng minh rằng tồn tại hàm số $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn

Dự đoán hàm bậc nhất rồi tìm bằng cách đồng nhất hệ số.

Kết quả $f(x) = \sqrt{a}.x + \dfrac{b}{\sqrt{a}+1}$

Bài tập 2.10: Tìm tất cả các hàm số f trên R: $f(xy) = \dfrac{f(x)+f(y)}{x+y}$

Hướng dẫn

Cho y = x thì có $f(x^2) = f(x)$ với mọi x.

Kết quả $f(x) = 0$

Bài tập 2.11: Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ sao cho $f(0) \neq 0$,

$f(1) = \dfrac{5}{2}$ và $f(x) \,.\, f(y) = f(x + y) + f(x – y)$ với mọi số nguyên x, y.

Hướng dẫn

Dự đoán $f(1) = \dfrac{5}{2} = 2 + 2^{-1}$, $f(2) = 2 + 2^{-2}$.

Kết quả $f(n) = 2^n + 2^{-n}$

Bài tập 2.12: Tìm các số a, b, c thoả mãn:

$|a| + |b| + |c|$ lớn nhất và $|ax^2 + bx + c| \leq 10$ với $\forall x \in [-1; 1]$.

Hướng dẫn

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(f(1) + f(1)) - f(0) \\ b = \dfrac{1}{2}(f(1) - f(-1)) - f(0) \\ c = f(0) \end{cases}$$

Kết quả (20; 0; –10) và (–20; 0; 10)

Chuyên đề 3: TẬP HỢP VÀ PHÉP ĐIỂM

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Tập hợp

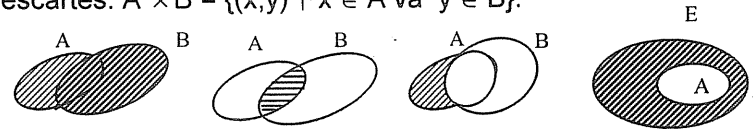
- Tập hợp là khái niệm cơ bản của toán học. Thông thường tập hợp gồm các phần tử cùng chung một hay vài tính chất nào đó.
- Biểu đồ Ven: Minh họa trực quan một tập hợp bởi một đường khép kín, không tự cắt.
- Hai cách cho tập hợp: liệt kê các phần tử của tập hợp, hoặc chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.
- Tập rỗng $\varnothing$ là tập hợp không chứa phần tử nào.
- Tập con: Tập A là tập con của tập B nếu mọi phần tử của tập A đều thuộc tập B. Ký hiệu $A \subset B$.
  Nếu tập A có n phần tử thì có 2^n tập con của tập A.
- Tập bằng nhau: Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau nếu mọi phần tử của tập A đều thuộc tập B và ngược lại. Ký hiệu A = B.

Các tập số:

$\mathbb{N}$: Tập hợp tất cả các số tự nhiên {0, 1, 2, ... }.
$\mathbb{N}^*$: Tập hợp các số nguyên dương.
$\mathbb{Z}$: Tập hợp tất cả các các số nguyên.
$\mathbb{Q}$: Tập hợp tất cả các các số hữu tỉ.
$\mathbb{R}$: Tập hợp tất cả các các số thực.
Khoảng $(a ; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
Đoạn $[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.
Nửa khoảng $[a ; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$.
Nửa khoảng $(a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.
Khoảng $(a ; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.
Khoảng $(-\infty ; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.
Nửa khoảng $[a ; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$.
Nửa khoảng $(-\infty ; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$.

Phép toán về tập hợp

- Phép hợp: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.
- Phép giao: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.
- Phép hiệu: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
- Phần bù của A trong E:
  Nếu $A \subset E$ thì $C_E A = \{x \mid x \in E \text{ và } x \notin A\}$
- Tích Descartes: $A \times B = \{(x;y) \mid x \in A \text{ và } y \in B\}$.



Hai quy tắc đếm

Quy tắc cộng: Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo một trong 2 phương án A hoặc B. Phương án A có thể thực hiện theo n cách, phương án B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo n + m cách. Mở rộng cho n phương án.

Quy tắc nhân: Giả sử một công việc nào đó bao gồm 2 công đoạn A và B. Công đoạn A có thể thực hiện theo n cách, công đoạn B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo n . m cách. Mở rộng cho n công đoạn.

Giai thừa: $1! = 1$, $2! = 1.2$, $3! = 1.2.3$, $n! = 1.2.3...(n-1)n$

Qui ước $0! = 1$.

Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

Cho tập hợp A có n phần tử, $n \geq 1$.

– Một hoán vị của n phần tử của A là một bộ sắp thứ tự n phần tử này, mỗi phần tử có mặt đúng 1 lần.

Số hoán vị n phần tử: $P_n = n!$

– Một chỉnh hợp n chập k phần tử của tập A là một bộ sắp thứ tự k phần tử từ n phần tử của A.

Số chỉnh hợp n chập k: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$.

– Một tổ hợp n chập k phần tử của tập A là một tập hợp con của A có k phần tử.

Số tổ hợp n chập k (số tập con k phần tử) :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Chú ý:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

2) Chọn lựa cách liệt kê, bù trừ, xen vị trí, chia lặp đều (số hoán vị),...và xem xét yêu cầu bài toán có thứ tự không? phân biệt không? có số 0 đầu?

3) Số phần tử của hợp các tập hợp hữu hạn:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Đặc biệt, khi $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap A| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

Tổng quát với n tập $A_1,..., A_n$ là n tập hợp hữu hạn ($n \geq 2$) thì:

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < k \leq n}^{n} |A_i \cap A_k| + \sum_{1 \leq i < k < \ell \leq n}^{n} |A_i \cap A_k \cap A_\ell| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n| .$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. 1:

Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 75x - 77 = 0\}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta giải phương trình: $(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 0$ hoặc $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0$ hoặc $x = 2)$ hoặc $(x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = 2)$

Vậy $A = \{0 ; 2 ; -\frac{1}{2}\}$.

b) Với $3 < n^2 < 30$ và $n \in \mathbb{N}^*$ nên chọn $n = 2 ; 3 ; 4 ; 5$.

Vậy $B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

c) Phương trình: $2x^2 - 75x - 77 = 0$ có hai nghiệm $x = -1$ và $x = \frac{77}{2}$.

Chọn $x \in \mathbb{Z}$ là $x = -1$ .Vậy $C = \{-1\}$.

Bài toán 3. 2:

Viết mỗi tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng:

a) $A = \{1 ; 4 ; 7 ; 10 ; ...\}$

b) $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$

c) $C = \left\{\frac{2}{3};\frac{3}{8};\frac{4}{15};\frac{5}{24};\frac{6}{35}\right\}$

d) $D = \{1 ; -2 ; 7\}$.

Hướng dẫn giải

a) $A = \{x \mid x = 3n + 1 , n \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid x$ là ước của $36\}$

c) $C = \left\{\frac{n}{n^2 - 1} \middle| n \in N, 2 \le n \le 6\right\}$

d) Ta có thể xem $1 ; -2 ; 7$ là nghiệm của phương trình

$(x - 1)(x + 2)(x - 7) = 0$ nên $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2)(x - 7) = 0\}$.

Bài toán 3. 3:

Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ và các tập hợp con

$A = \{1;2;3;4\}$, $B = \{2;4;6;8\}$.

Xác định C_EA , C_EB , $C_E(A \cup B)$, $C_EA \cap C_EB$.

Hướng dẫn giải

$C_EA = E \setminus A = \{5;6;7;8;9\}$; $C_EB = E \setminus B = \{1;3;5;7;9\}$

$A \cup B = \{1;2;3;4;6;8\}; C_E(A \cup B) = E \setminus A \cup B = \{5;7;9\}$

$C_E A \cap C_E B = \{5;7;9\}$

Bài toán 3. 4:

Tìm tất cả các tập hợp con của tập:

a) A = {a ; b} b) B = {1;2;3} c) C = {∅} d) D = {a;b;c;d}

Hướng dẫn giải:

a) Có 4 tập con: ∅ , {a} , {b} và {a ; b}.

b) Có 8 tập con: ∅ , {1} , {2}, {3} , {1;2}, {2;3} , {1;3} và {1;2;3}.

c) Có 2 tập con: ∅ và {∅}.

d) Có 16 tập con: ∅, {a}, {b}, {c}, {d}, {a;b}, {a;c}, {a;d} , {b;c}, {b;d}, {c;d}, {a;b;c}, {a;b;d}, {a;c;d}, {b;c;d} và D.

Bài toán 3. 5:

Tập hợp A gồm n phần tử (n > 3). Có bao nhiêu tập con khác nhau của A gồm:

a) 1 phần tử; n – 1 phần tử b) 2 phần tử

c) 3 phần tử d) k phần tử

Hướng dẫn giải

a) Có n phần tử nên có n cách chọn ra 1 phần tử.

Vậy có n tập con của A có 1 phần tử

Số cách chọn (n – 1) phần tử của A cũng bằng số cách 1 phần tử (còn lại) của A nên có n tập con của A có (n–1) phần tử.

b) Xét tập con có 2 phần tử $M = \{x ; y\} \subset A$

Phần tử x thuộc A có n cách chọn

Phần tử $y \neq x$ thuộc A có n – 1 cách chọn

Do đó có n(n – 1) cách chọn 2 phần tử x , y phân biệt theo thứ tự, nhưng vì các phần tử của tập hợp không kể thứ tự, {x; y} và {y ; x} là như nhau . Do đó cứ 2 cách chọn thì được 1 tập con, nên thực sự có $\frac{n(n-1)}{2}$ tập con của A có 2 phần tử.

c) Xét tập con có 3 phần tử $K = \{x ; y ; z\} \subset A$

Phần tử x thuộc A có n cách chọn

Phần tử $y \neq x$ thuộc A có n – 1 cách chọn

Phần tử $z \neq x, y$ thuộc A có n – 2 cách chọn

Do đó có n(n – 1)(n – 2) cách chọn 3 phần tử x , y ,z phân biệt theo thứ tự, nhưng vì các phần tử của tập hợp không kể thứ tự, do đó cứ 1.2.3 = 3! = 6 cách chọn (x,y,z) , (x,z,y) , (y,x,z) , (y,z,x) , (z,x,y) , (z,y,x) thì chỉ tính 1 tập con nên thực sự có $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ tập con của A có 3 phần tử.

d) Xét tập con có k phần tử $H = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k\} \subset A$

Phần tử x_1 thuộc A có n cách chọn,

Phần tử $x_2 \neq x_1$ thuộc A có n – 1 cách chọn,

Phần tử $x_3 \neq x_1, x_2$ thuộc A có n – 2 cách chọn,...

Phần tử $x_k \neq x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ thuộc A có n – k+1 cách chọn.

Do đó có n(n – 1)(n – 2)...(n– k+1) cách chọn k phần tử x_1 ; x_2 ;...;x_k phân biệt theo thứ tự, nhưng vì các phần tử của tập hợp không kể thứ tự, do đó cứ 1.2.3...k = k! cách chọn thì chỉ tính 1 tập con nên thực sự có $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$ tập con của A có k phần tử.

Đây chính là số tổ hợp n chập k: $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$.

Bài toán 3. 6:

Cho tập hữu hạn A có n phần tử. Chứng minh A có 2^n tập con.

Hướng dẫn giải:

Đặt $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và xét tập con $B \subset A$.

Tập con B có thể chứa x_1 hoặc không chứa x_1 : 2 cách chọn.

Tương tự các phần tử $x_2, x_3, \ldots, x_n$ đều có 2 cách chọn có thuộc tập con B hay không.

Do đó số các tập của A bằng số cách chọn lựa trên: $2.2...2 = 2^n$.

Kết quả: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Bài toán 3. 7:

Mệnh đề sau đúng, sai ?

a) Với ba tập A, B, C tùy ý, nếu $A \cup B = A \cup C$ thì B = C.

b) Với ba tập A, B, C tùy ý, nếu $A \setminus B = C$ thì $A = B \cup C$.

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề sai:

Chọn A = {1;2}, B = {1;3}, C = {3} thì:

$A \cup B = A \cup C = \{1;2;3\}$: đúng còn B = C: sai.

b) Mệnh đề sai:

Chọn A = {m;n}, B = {m;p}, C = {n} thì:

$A \setminus B = C = \{n\}$: đúng còn $A = B \cup C = \{m;n;p\}$: sai.

Bài toán 3. 8:

Với hai tập A, B tùy ý. Chứng minh rằng:

a) Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$ b) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. Do đó $A \cap B \subset A$.

Ta có $x \in A \Rightarrow x \in A$ và $x \in B$ (do giả thiết $A \subset B$)

$\Rightarrow x \in A \cap B$. Do đó $A \subset A \cap B$.

Vậy $A \cap B = A$.

b) Ta chứng minh: $A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

Vì $A = A \setminus B$ nên từ $x \in A$ suy ra $x \in A \setminus B$, nghĩa là $x \in A$ và $x \notin B$. Vậy hai tập A và B không có phần tử chung, hay $A \cap B = \varnothing$.

Ngược lại, ta chứng minh: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \setminus B = A$.

Vì $A \cap B = \varnothing$ nên với mọi phần tử $x \in A$ ta có $x \notin B$, nghĩa là $x \in A \setminus B$.

Do đó $A \subset A \setminus B$ (1)

Mặt khác nếu $x \in A \setminus B$ thì $x \in A$ (và $x \notin B$)

Do đó $A \setminus B \subset A$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $A \setminus B = A$

Vậy ta đã chứng minh được : $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

Bài toán 3. 9:

Với ba tập A, B, C tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

c) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $A \cap (B \cup C) = \{ x \mid x \in A$ và $x \in B \cup C \}$

$= \{ x \mid x \in A$ và ($x \in B$ hoặc $x \in C$ }

$= \{ x \mid (x \in A$ và $x \in B)$ hoặc $(x \in A$ và $x \in C \}$

$= \{ x \mid (x \in A \cap B)$ hoặc $(x \in A \cap C \}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) Giả sử $x \in A \cap (B \setminus C) \Rightarrow x \in A$ và $x \in (B \setminus C)$ nên:

$x \in A$ và $x \in B$ và $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ và $x \notin C \Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$

Do đó: $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus C$ (1)

Ngược lại, giả sử $x \in (A \cap B) \setminus C \Rightarrow x \in A \cap B$ và $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ và $x \in B$ và $x \notin C \Rightarrow x \in A$ và $x \in (B \setminus C)$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \setminus C)$. Do đó $(A \cap B) \setminus C \subset A \cap (B \setminus C)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

c) Từ định nghĩa ta có $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Do đó $(A \setminus B) \setminus C = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup) \overline{C}$

$= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C)$

$= A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$ (vì $A \cap \overline{C} \cap \overline{C} = \varnothing$)

Vậy $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Bài toán 3. 10:

Cho tập hợp A. Có thể nói gì về tập hợp B nếu:

a) $A \cap B = B$ b) $A \cap B = A$ c) $A \cup B = A$

d) $A \cup B = B$ e) $A \setminus B = \varnothing$ g) $A \setminus B = A$.

Hướng dẫn giải

Dựa vào định nghĩa ta có:

a) $B \subset A$ b) $A \subset B$ c) $B \subset A$

d) $A \subset B$ e) $A \subset B$ g) $A \cap B = \varnothing$.

Bài toán 3. 11:

Cho hai tập A, B. Hiệu đối xứng của A và B, kí hiệu là $A \Delta B$, là tập hợp các phần tử thuộc A hoặc B nhưng không thuộc cả A và B.

a) Chứng minh nếu $A \Delta B = A$ thì $B = \varnothing$.

b) Chứng minh nếu $A \Delta C = B \Delta C$ thì $A = B$.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $x \in B$.

Nếu $x \in A$ thì $x \in A \Delta B$ (do $A = A \Delta B$). Điều này mâu thuẫn vì x thuộc cả A và B nên do định nghĩa $x \notin A \Delta B$.

Nếu $x \notin A$. Vì $x \in B$ nên $x \in A \Delta B = A$: mâu thuẫn. Vậy $B = \varnothing$.

b) Giả sử $A \neq B$. Khi đó tồn tại phần tử của tập này nhưng không là phần tử của tập kia. Chẳng hạn tồn tại phần tử $x \in A$ và $x \notin B$.

Nếu $x \in C$ thì $x \in B \Delta C$ và $x \notin A \Delta C$: mâu thuẫn.

Nếu $x \notin C$ thì $x \in A \Delta C$ và $x \notin B \Delta C$: mâu thuẫn. Vậy $A = B$.

Bài toán 3. 12:

Cho f là một hàm số từ X đến Y, A, B là hai tập con của X.

a) Chứng minh: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) Chứng minh: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ và nếu f là đơn ánh thì:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $y \in f(A \cup B)$ thì tồn tại $x \in A \cup B$ sao cho $f(x) = y$.

Nếu $x \in A$ thì $y \in f(A)$, do đó $y \in f(A) \cup f(B)$

Nếu $x \in B$ thì $y \in f(BA)$, do đó $y \in f(A) \cup f(B)$

Ngược lại, giả sử $y \in f(A) \cup f(B)$. Nếu $y \in f(A)$ thì tồn tại $x \in A \subset A \cup B$ để $f(x) = y$ nên $y \in f(A \cup B)$. Nếu $y \in f(B)$ thì tồn tại $x \in B \subset A \cup B$ để $f(x) = y$ nên $y \in f(A \cup B)$.

b) Giả sử $y \in f(A \cap B)$ thì tồn tại $x \in A \cap B$ sao cho $f(x) = y$.

Vì $x \in A$ nên $y \in f(A)$, vì $x \in B$ nên $y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.

Nếu f là đơn ánh ta chỉ cần chứng minh bao hàm thức:

$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Giả sử $y \in f(A) \cap f(B)$. Khi đó $y \in f(A)$ và $y \in f(B)$. Do đó tồn tại $a \in A$, $b \in B$ để $y = f(a)$ và $y = f(b)$. Vì f là đơn ánh nên $a = b$.

Vậy $a \in A \cap B$, suy ra $y \in f(A \cap B)$.

Bài toán 3. 13:

a) Cho $A = \{0;1;2\}$, $B = \{0;1;2;3;4\}$. Xác định tập C để $A \cup C = B$.

b) Tìm tất cả các tập hợp X sao cho: $\{1;2\} \subset X \subset \{1;2;3;4;5\}$.

Hướng dẫn giải

a) Để $A \cup C = B$ thì C là một trong các tập hợp sau: {3;4} , {2;3;4} , {1;2;3;4} và B

b) Tập hợp X phải chứa các phần tử 1 ; 2 ngoài ra có thể chứa thêm một số phần tử còn lại là 3 ; 4 ; 5 , tức là X là hợp của 2 tập A = {1;2} và tập B, với B là tập con của tập {3;4;5}.

Vậy các tập X cần tìm là: {1;2} , {1;2;3} , {1;2;4} , {1;2;5} , {1;2;3;4} , {1;2;3;5}, {1;2;4;5}, {1;2;3;4;5}.

Bài toán 3. 14:

Cho $X = \{x \in \mathbf{N}, \mid 2 < x < 12\}$. Xác định A, $B \subset X$ sao cho:

$$\begin{cases} A \cap B = \{6;8;11\} & (1) \\ A \cup \{5;6;7\} = \{3;5;6;7;8;10;11\} & (2) \\ \{4;5;6;7;8;9;10;11\} = B \cup \{6;10\} & (3) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Từ (1) và (2) suy ra: $\{3;6;8;10;11\} \subset A$

Từ (1) và (3) suy ra: $\{4;5;6;7;8;9;11\} \subset B$

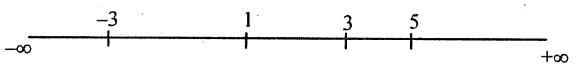
Vậy A = {3;6;8;10;11}; B = {4;5;6;7;8;9;11} .

Bài toán 3. 15:

Cho A = (–3 ; 5] , B = [1 ; +∞) , C = (–∞ ; 3] và D = (3 ; +∞).

Xác định: $A \cap B$, $C \cap D$, $A \setminus B$, $B \cup C$, $C_R A$, $C_R D$.

Hướng dẫn giải



$A \cap B = [1 ; 5]$, $C \cap D = \varnothing$, $A \setminus B = (-3 ; 1)$, $B \cup C = \mathbf{R}$

$C_R A = (-\infty ; -3] \cup (5 ; +\infty)$, $C_R D = (-\infty ; 3]$

Bài toán 3. 16:

Cho hai nửa khoảng A = (–∞ ; m) và B = [5 ; +∞). Biện luận theo m để xác định $A \cap B$, $A \cup B$.

Hướng dẫn giải

Nếu m = 5 thì $A \cap B = \{5\}$, $A \cup B = \mathbf{R}$.

Nếu m < 5 thì $A \cap B = \varnothing$; $A \cup B = (-\infty ; m] \cup [5 ; +\infty)$

Nếu m > 5 thì $A \cap B = [5 ; m]$, $A \cup B = \mathbf{R}$.

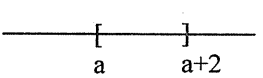
Bài toán 3. 17:

a) Cho hai đoạn A = [a ; a + 2] , B = [b ; b + 1]. Các số a, b thoả điều kiện gì để $A \cap B \neq \varnothing$.

b) Cho hai khoảng A = (m ; m + 1) và B = (3 ; 5). Tìm m để $A \cup B$ là một khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

Hướng dẫn giải

a) Ta xét trường hợp $A \cap B = \varnothing$.



Điều kiện để $A \cap B = \varnothing$ là $a + 2 < b$ hoặc $b + 1 < a$, tức là $a < b - 2$ hoặc $a > b + 1$.

Từ đó suy ra điều kiện để $A \cap B \neq \varnothing$ là

$$a \geq b - 2 \text{ và } a \leq b + 1 \Leftrightarrow b - 2 \leq a \leq b + 1.$$

b) Để ý $5 - 3 = 2$ và $(m + 1) - m = 1$. Xét các trường hợp:

Nếu $m \leq 2$ thì $m < m + 1 \leq 3 < 5$: $A \cup B$ không là một khoảng.

Nếu $2 < m \leq 3$ thì $2 < m \leq 3 < m+1 < 5$: $A \cup B = (m; 5)$.

Nếu $3 < m \leq 4$ thì $3 < m < m + 1 \leq 5$: $A \cup B = (3 ; 5)$.

Nếu $4 < m < 5$ thì $3 < m < 5 < m + 1$: $A \cup B = (3 ; m + 1)$.

Nếu $5 \leq m$ thì $3 < 5 \leq m < m + 1$: $A \cup B$ không là một khoảng.

Vậy nếu $2 < m < 5$ thì $A \cup B$ là một khoảng.

Bài toán 3. 18:

Trong hình học, một tập điểm F được gọi là lồi, nếu với mọi cặp điểm M, N của F, đoạn thẳng MN được chứa trong F.

a) Chứng tỏ rằng giao của những tập hợp lồi, là một tập lồi.

b) Hợp của hai tập lồi phải chăng là một tập lồi?

Hướng dẫn giải

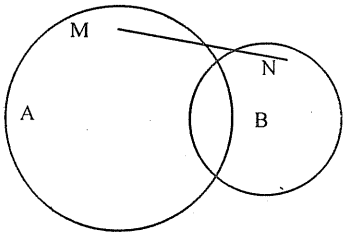
a) Cho A và B là hai tập lồi. Lấy hai điểm M, N bất kỳ thuộc $A \cap B \Rightarrow M, N \in A$ và $M, N \in B$

$\Rightarrow$ đoạn MN chứa trong 2 tập lồi A và B

$\Rightarrow$ đoạn MN chứa trong tập $A \cap B$ .Vậy $A \cap B$ là tập lồi.

b) Hợp của hai tập lồi có thể không phải là một tập hợp lồi.

Chẳng hạn nếu A và B là 2 tập điểm của 2 hình tròn như hình vẽ. Rõ ràng A và B là 2 tập lồi, nhưng với $M \in A$, $N \in B$ đoạn thẳng MN không được chứa trong tập $A \cup B$



Bài toán 3. 19:

Các tập sau có bao nhiêu phần tử?

a) A là tập hợp các số chẵn có hai chữ số.

b) B là tập hợp các số lẻ có 3 chữ số.

c) C là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 500 và là bội của 3.

Hướng dẫn giải

a) Mỗi số tự nhiên chẵn có dạng $2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Theo giả thiết ta có $10 \leq 2k < 100$.

Suy ra $A = \{2k \mid 5 \leq k < 50, k \in \mathbb{N}\}$.

Vậy A có 45 phần tử.

b) Ta có: B = {101 ; 103 ; ... ; 999}, các phần tử của B hơn kém 2 đơn vị nên số phần tử $\frac{999 - 101}{2} + 1 = 500$ (số).

c) Mỗi số nguyên dương là bội của 3 có dạng 3k ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta phải có $0 < 3k < 500$, suy ra $A = \{3k \mid 0 < 3k < 167, k \in \mathbb{N}\}$.
Vậy C có 166 phần tử.

Bài toán 3. 20:

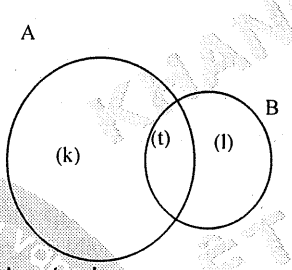
Ký hiệu số phần tử n của một tập hợp hữu hạn A là $|A| = n$. Chứng minh:

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap A| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

Hướng dẫn giải

a) Ta dùng biểu đồ Ven và ghi số phần tử trong dấu ngoặc:



$|A \setminus B| = k$, $|B \setminus A| = l$, $|A \cap B| = t$

Vì các tập $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ đôi một không có phần tử nào chung nên:

$|A| = k + t$, $|B| = l + t$

Do đó $|A| + |B| - |A \cap B| = k + t + l + t - t = k + t + l$

Rõ ràng $|A \cup B| = k + t + l$ nên có đpcm

Khi $A \cap B = \varnothing \Rightarrow t = 0 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

b) Chứng minh tương tự .

Kết quả: $|A \setminus B| \le |A|$, $|A \cap B| \le |A|$, $|A| \le |A \cup B|$

$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$, $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

Bài toán 3. 21:

a) Có bao nhiêu ước nguyên dương khác nhau của tích 2000.2001?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 10 000 được tạo ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2000 = 2^4.5^3$ và $2001 = 3.23.29$

Do đó: $2000.2001 = 2^4.3.5^3.23.29$

nên theo quy tắc nhân thì có: 5.2.4.2.2 = 160 ước nguyên dương

Tổng quát số: $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Với k số nguyên tố phân biệt thì có: $(\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 2) ... (\alpha_k + 1)$ ước nguyên dương.

b) Số tự nhiên a < 10000 nên có tối đa 4 chữ số

Xét a có 1 chữ số: $a \in \{1,2,3,4\}$ nên có 4 số

Xét a có 2 chữ số: $a_1 \neq 0$ nên có 4.5 = 20 số

Xét a có 3 chữ số: tương tự thì có 4.5.5 = 100 số

Xét a có 4 chữ số: tương tự thì có 4.5.5.5 = 500 số

Lưu ý rằng các chữ số chọn không nhất thiết phân biệt.

Vậy tổng cộng có: 4 + 20 + 100 + 500 = 624 số

Bài toán 3. 22:

Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu

a) Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

b) Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

Hướng dẫn giải:

a) Gọi số lẻ đang xét gồm 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$ trong đó

$d \in \{1, 3, 5\}$; $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lập số đó theo quy trình: Chọn d rồi đến a rồi đến b rồi đến c. Ta có 3 cách chọn d lẻ. Khi d đã chọn thì a còn 5 – 1 = 4 cách chọn.

Lưu ý tập $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Khi d, a đã chọn thì có 6 – 2 = 4 cách chọn b và khi d, a, b đã chọn thì c có 3 cách chọn.

Vậy số số lẻ cần tìm là 3.4.4.3 = 144.

b) Gọi các số có 4 chữ số khác nhau được lập từ 5 số đã cho là $\overline{abcd}$.

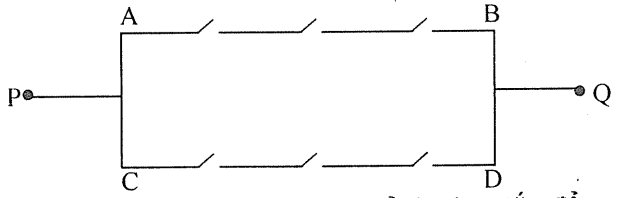
Ta lập số theo quy trình chọn các số theo thứ tự: a, b, c, d. Có 5 cách chọn a. Khi a đã chọn thì có 5 cách chọn b. Khi a, b đã chọn thì có 6 – 2 = 4 cách chọn c và khi a, b, c đã chọn thì có 3 cách chọn d.

Do đó có 5.5.4.3 = 300 số như vậy.

Vậy số số chẵn là 300 – 144 = 156.

Bài toán 3. 23:

Xét sơ đồ mạng điện có 6 công tắc khác nhau, trong đó mỗi công tắc có 2 trạng thái đóng và mở.



Hỏi có bao nhiêu cách đóng – mở 6 công tắc để mạng điện thông mạch từ P đến Q?

Hướng dẫn giải:

Mỗi cách đóng – mở 6 công tắc của mạng điện được gọi là một trạng thái của mạng điện. Theo quy tắc nhân, mạng điện có $2^6 = 64$ trạng thái.

Trước hết, ta tìm có bao nhiêu trạng thái không thông mạch tức là không có dòng điện đi qua. Mạch gồm hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$.

Trạng thái không thông mạch xảy ra khi và chỉ khi cả hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch.

Vì nhánh $A \to B$ có 8 trạng thái trong đó chỉ có duy nhất một trạng thái thông mạch, còn lại có 7 trạng thái không thông mạch. Tương tự ở nhánh $C \to D$ có 7 trạng thái không thông mạch.

Theo quy tắc nhân, ta có 7.7 = 49 trạng thái mà cả $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch.

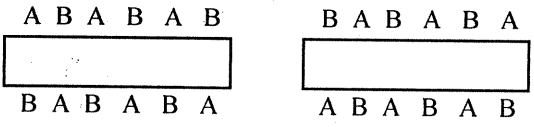
Vậy mạng điện có 64 – 49 = 15 trạng thái thông mạch từ P tới Q.

Bài toán 3. 24:

Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau. Có bao nhiêu cách xếp n học sinh lớp A và n học sinh lớp B mà 2 học sinh đối diện nhau khác lớp và hai học sinh liên tiếp cũng khác lớp.

Hướng dẫn giải

Có 2 cách xếp 2 nhóm học sinh lớp A, lớp B



Trong nhóm học sinh lớp A có n! cách xếp n học sinh vào n chỗ và nhóm học sinh lớp B cũng có n! cách như vậy.

Theo quy tắc nhân thì có: 2.n!n! cách xếp.

Bài toán 3. 25:

Cho tam giác ABC. Xét tập hợp đường thẳng gồm 4 đường thẳng song song với AB, 5 đường thẳng song song với BC và 6 đường thẳng song song với CA. Hỏi các đường thẳng này tạo được bao nhiêu hình thang không là hình bình hành ?

Hướng dẫn giải:

Mỗi hình thang được tạo từ 2 đường thẳng song song với 1 cạnh của ΔABC và 2 đường thẳng lần lượt song song với 2 cạnh còn lại của tam giác. Có 3 trường hợp:

Hình thang được tạo từ 2 đường thẳng song song với AB, 1 đường thẳng song song với BC và 1 đường thẳng song song với CA, có $C_4^2.C_5^1.C_6^1 = \frac{4.3}{2}.5.6$ hình thang.

Tương tự với 2 trường hợp còn lại. Do đó số hình thang là

$C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 6.5.6 + 10.4.6 + 15.4.5 = 720.$

Bài toán 3. 26:

Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

a) Có bao nhiêu tập con của A chứa 1 và không chứa 8.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A và không bắt đầu bởi 125.

Hướng dẫn giải:

a) Xét tập B = A\{1; 8} thì B có 6 phần tử nên có $2^6 = 64$ tập con.

Số tập con cần tìm chính là số tập con của B sau khi thêm phần tử là chữ số 1. Vậy có 64 tập con thoả đề bài.

b) Đặt $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, a_5 chẵn, $a_i \in A$ và đôi 1 khác nhau.

Vì $a_5 \in \{2,4,6,8\}$ nên có 4 cách chọn. Do A không chứa số 0 nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có 7.6.5.4 = 840 cách.

Do đó có 4 x 840 = 3 360 số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A.

Ta loại đi các số bắt đầu bởi 125 là các số a = $\overline{125a_4a_5}$ với a_4, a_5 thuộc {2,3,6,7,8} phân biệt và a_5 là số chẵn nên có 3.4 = 12 cách.

Vậy còn lại 3 360 – 12 = 3 348 số theo yêu cầu.

Bài toán 3. 27:

Trong tập S = {1,2,...,280} có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7?

Hướng dẫn giải

Ta kí hiệu các tập sau

$A_1 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 2\}$, $A_2 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 3\}$,

$A_3 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 5\}$, $A_4 = \{k \in S \mid k \text{ chia hết cho } 7\}$.

Bài toán yêu cầu tìm $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Ta có:

$|A_1| = \frac{280}{2} = 140$; $|A_2| = \left[\frac{280}{3}\right] = 93$

$|A_3| = \frac{280}{5} = 56$; $|A_4| = \frac{280}{7} = 40$

$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{280}{6}\right] = 46$; $|A_1 \cap A_3| = \frac{280}{10} = 28$

$|A_1 \cap A_4| = \frac{280}{14} = 20$; $|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{15}\right] = 18$

$|A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{21}\right] = 13$; $|A_3 \cap A_4| = \frac{280}{35} = 8$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{30}\right] = 9$; $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \frac{280}{42} = 6$;

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \frac{280}{70} = 4$; $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{105}\right] = 2$

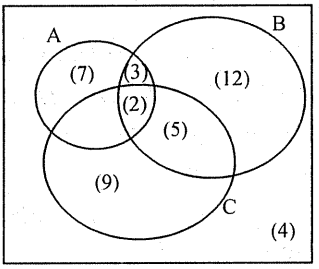
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{210}\right] = 1$

Thay vào công thức tổng quát ta tìm được: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 216$.

Bài toán 3. 28:

Lớp chuyên Toán có 13 học sinh chơi đá bóng, 22 học sinh bơi lội và 17 chơi cờ vua, trong số đó có 5 học sinh chơi đá bóng và bơi lội, 7 học sinh bơi lội và chơi cờ vua, 3 học sinh chơi cờ vua và đá bóng, đặc biệt có 4 học sinh đang đi giao lưu ở nước ngoài. Vậy lớp có bao nhiêu học sinh?

Hướng dẫn giải



Ta dùng biểu đồ Ven với 3 tập A, B, C lần lượt là 3 tập với học sinh chơi đá bóng, bơi lội, cờ vua. Ghi số phần tử trong dấu ngoặc của các tập không giao nhau từ trong ra ngoài.

Từ đó số học sinh của lớp là:

$$7 + 3 + 2 + 1 + 12 + 5 + 9 + 4 = 43.$$

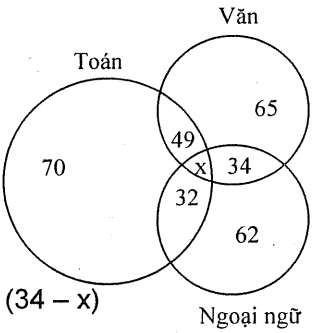
Bài toán 3. 29:

Để thành lập các đội tuyển học sinh giỏi khối 9, nhà trường tổ chức thi chọn các môn Toán, Văn và Ngoại ngữ trên tổng số 111 học sinh. Kết quả có: 70 học sinh giỏi Toán, 65 học sinh giỏi Văn và 62 học sinh giỏi Ngoại ngữ. Trong đó, có 49 học sinh giỏi cả 2 môn Văn và Toán, 32 học sinh giỏi cả 2 môn Toán và Ngoại ngữ, 34 học sinh giỏi cả 2 môn Văn và Ngoại ngữ.

Hãy xác định số học sinh giỏi cả ba môn Văn, Toán và Ngoại ngữ. Biết rằng có 6 học sinh không đạt yêu cầu của ba môn.

Hướng dẫn giải

Gọi x là số học sinh giỏi cả 3 môn Văn, Toán, Ngoại ngữ (x nguyên dương), dựa vào biểu đồ ta có:



Số học sinh chỉ giỏi một môn Toán là:

$70 - 49 - (32 - x) = x - 11$

Số học sinh chỉ giỏi một môn Văn là:

$65 - 49 - (34 - x) = x - 18$

Số học sinh chỉ giỏi một môn Ngoại ngữ là:

$62 - 34 - (32 - x) = x - 4$

Vì có 6 học sinh không đạt yêu cầu nên:

$111 - 6 = x - 11 + x - 18 + x - 4 + 49 + (32 - x) + (34 - x)$

$\Leftrightarrow 82 + x = 105 \Leftrightarrow x = 23$

Vậy có 23 học sinh giỏi cả 3 môn.

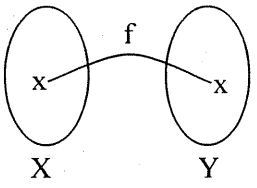
Bài toán 3. 30:

Cho tập X có n phần tử và tập Y có m phần tử. Có bao nhiêu:

a) Ánh xạ f từ X vào Y. b) Đơn ánh f từ X vào Y.

c) Toàn ánh f từ X vào Y.

Hướng dẫn giải:



a) Mỗi phần tử của X có đúng m cách chọn phần tử tương ứng trong Y. Mà X có n phần tử. Do đó số ánh xạ f từ X vào Y là số cách chọn m phần tử của lần lượt n phần tử: m.m...m (n lần) = m^n cách.

b) Để f là 1 đơn ánh thì 2 phần tử khác nhau của X lấy tương ứng 2 phần tử khác nhau của Y nên ta phải có $n \geq m$.

Khi đó số đơn ánh f từ X vàc Y là là số cách chọn lần lượt các phần tử m phân biệt nhau : $n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$.

c) Rõ ràng khi n = m thì toàn ánh f từ X vào Y là đơn ánh nên f là song ánh. Vậy số song ánh là số cách chọn lần lượt các phần tử phân biệt nhau của n phần tử : n.(n–1)(n–2)...2.1 = n!.

Chú ý : Với $n \geq m$ thì số toàn ánh từ X vào Y là: $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k.C_m^k.(m-k)^n$.

Bài toán 3. 31:

Phương trình x + y + z = 50 có bao nhiêu bộ nghiệm

a) (x,y,z) nguyên dương. b) (x,y,z) tự nhiên.

Hướng dẫn giải

a) Liệt kê 50 số 1 liên tiếp thì có 49 dấu khoảng cách

1–1–1–1–..... –1–1

Mỗi bộ nghiệm (x,y,z) nguyên dương tương ứng (song ánh) với mỗi cách chọn 2 dấu cách từ 49 khoảng cách để có các giá trị của x, y, z là số chữ số 1.

Vậy số bộ nghiệm là C_{49}^2.

b) Đặt X = x + 1, Y = y +1, Z = z +1, vì (x, y, z) tự nhiên nên (X, Y, Z) nguyên dương.

Phương trình x + y + z = 50 $\Leftrightarrow$ X +Y + Z = 53.

Giải tương tự thì có kết quả C_{52}^2 bộ nghiệm (x,y,z) tự nhiên.

Cách khác : Mỗi bộ nghiệm (x,y,z) tự nhiên tương ứng (song ánh) với dãy nhị phân 52 số gồm 50 số 1 và 2 số 0 : x số 1, số 0, y số 1, số 0 và z số 1 mà x + y + z = 50.

Vì có C_{52}^2 dãy nhị phân như thế nên đó là số bộ nghiệm cần tìm.

Bài toán 3. 32:

Cho tập S = {1, 2, ..., 2n}. Một tập con A của S được gọi là *tập cân* nếu trong tập đó, số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau. Xác định số *tập cân* của S.

Hướng dẫn giải

Gọi X là tập hợp tất cả các *tập cân* của S và Y là họ tất cả các tập con của S có đúng n phần tử. Ta thiết lập một song ánh từ X đến Y. Gọi L = {1, 3, ..., 2n–1}.

Giả sử $A \in X$ là *tập cân*. Gọi A_1 và A_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của A thì $|A_1| = |A_2|$ và

$$|A_1 \cup (L \setminus A_2)| = |A_1| + |L| - |A_2| = |L| = n$$

nên tập $A_1 \cup (L \setminus A_2)$ là một phần tử của Y.

Gọi f là phép đặt tương ứng tập $A \in X$ với tập $A_1 \cup (L \setminus A_2) \in Y$.

Ta có f là đơn ánh.

Giả sử $M \in Y$. Gọi M_1 và M_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của M. Đặt $A_1 = M_1$; $A_2 = L \setminus M_2$ và $A = A_1 \cup A_2$. Khi đó A là *tập cân* vì: $|A_1| = |M_1|$,

$|A_2| = |L| - |M_2| = n - |M_2| = |M| - |M_2| = |M_1|$.

Vậy $A \in X$ và f xác định bởi $f(A) = A_1 \cup (L \setminus A_2)$ nên f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Vì có một song ánh từ X vào Y nên số *tập con* của S bằng số các tập con có n phần tử của S. Vậy S có C_{2n}^{n} *tập con*.

Bài toán 3. 33:

Một tổ bộ môn của một trường có 10 giáo viên nam và 15 giáo viên nữ. Có bao nhiêu cách thành lập một hội đồng gồm 6 uỷ viên của tổ bộ môn, trong đó số uỷ viên nam ít hơn số uỷ viên nữ?

Hướng dẫn giải

Có 6 người, số nam ít hơn số nữ có các trường hợp:

- 0 nam, 6 nữ: có C_{15}^{6} cách
- 1 nam, 5 nữ: có $C_{10}^{1}.C_{15}^{5}$ cách
- 2 nam, 4 nữ: có $C_{10}^{2}.C_{15}^{4}$ cách

Vậy có : $C_{15}^{6} + C_{10}^{1}.C_{15}^{5} + C_{10}^{2}.C_{15}^{4} = 96460$ cách.

Bài toán 3. 34:

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Hướng dẫn giải

Có $C_3^1C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tình thứ nhất thì có $C_2^1C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_1^1C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thoả mãn yêu cầu bài toán, theo quy tắc nhân là:

$C_3^1C_{12}^4 . C_2^1C_8^4 . C_1^1C_4^4 = 207\,900$ cách.

Bài toán 3. 35:

Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi 1 khác nhau gồm 5 sách Văn học, 4 sách Âm nhạc và 3 sách Hội hoạ. Thầy lấy 6 cuốn sách tặng đều cho 6 học sinh. Có bao nhiêu cách tặng mà sau khi tặng xong thì mỗi loại sách còn ít nhất 1 cuốn.

Hướng dẫn giải

Để ý tổng 2 loại sách nào cũng lớn hơn 6 nên sau khi cho 6 cuốn thì không thể hết tới 2 loại sách.Số cách chọn 6 sách từ 12 sách khác nhau cho 6 học sinh khác nhau là $A_{12}^{6} = 665280$

Ta loại đi các trường hợp:

- Tặng hết sách Văn học : $A_6^5.A_7^1 = 5040$
- Tặng hết sách Âm nhạc : $A_6^4.A_8^2 = 20160$
- Tặng hết sách Hội hoạ : $A_6^3.A_9^3 = 60480$

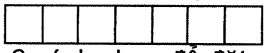
Vậy số cách tặng cần tìm là:

$665280 - (5040 + 20160 + 60480) = 579600$.

Bài toán 3. 36:

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, trong đó số 1 có mặt đúng 3 lần và các số khác đúng 1 lần.

Hướng dẫn giải



Vì ô số đầu khác 0 nên có 6 cách chọn để đặt số 0.

Còn 6 ô chọn 3 ô để đặt 3 số 1 thì có C_6^3 cách.

Cuối cùng còn 3 ô trống chọn đặt cho 3 chữ số 2, 3, 4 còn lại thì có 3! cách.

Vậy có $6.C_6^3.3! = 720$ số

Cách 2: Ta ghi hình thức 0, 1a, 1b, 1c, 2, 3, 4 và đếm số rồi chia cho hoán vị 3 chữ số như nhau.

Bài toán 3. 37:

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần.

Hướng dẫn giải

Số số tự nhiên có 4 chữ số là: $9.10.10.10 = 9\,000$

Ta loại đi các số mà có 1 chữ số lặp lại đúng 3 lần

- Xét chữ số 0 lặp lại đúng 3 lần.

Vì số $\overline{abcd}$, $a \neq 0$ nên phải có dạng $\overline{a000}$ do đó có 9 số.

- Xét chữ số khác 0 lặp lại đúng 3 lần là a.

Dạng $\overline{xaaa}$ có 8 số vì $x \neq 0$, $x \neq a$

Dạng $\overline{axaa}, \overline{aaxa}, \overline{aaax}$ đều có 9 số

Mà có 9 số a khác 0 nên có $(8 + 9.3)9 + 9 = 324$ số

Vậy còn lại: $9\,000 - 324 = 8\,676$ số.

Bài toán 3. 38:

Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số khác nhau và lớn hơn 500 000.

Hướng dẫn giải

Đặt $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ với $a_i \in \{0,1,2,...,9\}$, $a_i \geq 5$, $a_6 \in \{1,3,5,7,9\}$, a_i phân biệt.

Xét a_1 lẻ thì có 3 cách chọn, a_6 lẻ, $a_6 \neq a_1$ có 4 cách chọn.

Và có A_8^4 cách chọn 4 số còn lại.Do đó có $3.4.A_8^4 = 20\,160$ số

Xét a_1 chẵn thì có 2 cách chọn, a_6 lẻ có 5 cách chọn.

Do đó có $2.5.A_8^4 = 16\,800$ số

Vậy tổng cộng có: 20 160 + 16 800 = 36 960 số

Bài toán 3. 39:

Từ 6 chữ số 1,3,4,5,7,8 lập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Tính tổng tất cả các số đó.

Hướng dẫn giải

Nếu hàng đơn vị bằng 1 thì có A_5^4 cách lập.

Tương tự a_5 = 3,4,5,7,8 thì cũng có A_5^4 cách lập.

Do đó tổng các chữ số ở hàng đơn vị là:

$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8).A_5^4 = 28.A_5^4 = 3360$

Tương tự cho hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn và hàng vạn thì ta có tổng tất cả các số:

$T = (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)3360 = 11111.3360 = 3732960$

Tổng quát: Với n chữ số a,b,c,..., ℓ từ 1 đến 9 phân biệt tạo ra các số cho k chữ số khác nhau thì tổng các hoán vị là:

$$T = (n-1)!(a + b + c + ... + \ell)\frac{10^k - \ell}{9}.$$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 3. 1:

Cho A = {1,2,3,4,5}.Viết tất cả các tập con của A có ít nhất 3 phần tử.

Hướng dẫn

Liệt kê các tập con của A có 3 phần tử; 4 phần tử và 5 phần tử.

Kết quả có16 tập.

Bài tập 3. 2:

Cho $A = \{x \in \mathbf{Z} / |x| < 3\}$ và $B = \{t \in \mathbf{N} / (t^2 - 1)(t-3) = 0\}$.

Xác định $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_Z A$.

Hướng dẫn

Chú ý tập xác định thì A = { –2;–1;0;1;2} và B = { 1; 3}.

Bài tập 3. 3:

Cho A = [1;5) và B = {1; 2; 3; 4; 5}

a) Xác định $A \cup B$, $A \cap B$.

b) Xác định $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathbf{R} \setminus A$ và $\mathbf{R} \setminus B$.

Hướng dẫn

a) Kết quả $A \cup B = [1;5]$, $A \cap B = \{1; 2; 3; 4\}$.

b) $A \setminus B = (1;5)$, $B \setminus A = \{5\}$, $\mathbf{R} \setminus A = (-\infty;1) \cup [5; +\infty)$ và $\mathbf{R} \setminus B = (-\infty; +\infty) \setminus \{1;2;3;4;5\}$.

Bài tập 3. 4:

Tìm điều kiện m để:

a) $[3; 10] \setminus (-\infty; m) = \varphi$. b) $[-1; 6] \setminus (m; m+3) \neq \varphi$

Hướng dẫn

a) Kết quả $m > 10$

b) Kết quả mọi m.

Bài tập 3. 5:

Cho $A = \{x \in \mathbf{R} / |x+4| \leq 6\}$ và $B = [m-7; m+7]$.

Tìm m để: a) $A \cup B$ là 1 đoạn b) $A \cap B$ chỉ có 1 phần tử

Hướng dẫn

a) Nhận xét $A = [-10; 2]$ có độ dài 12 và $B = [m-7; m+7]$ có độ dài 14 để chia các trường hợp của tham số m.

b) Kết quả $m = -17$ hoặc $m = 9$.

Bài tập 3. 6:

Chứng minh với mọi tập A,B,C :

a) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

c) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

d) $A \cap B = A \cap C$ và $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow B = C$

Hướng dẫn giải

a) Dùng định nghĩa và phép toán giao, hiệu.

b) Dùng định nghĩa và phép toán giao, hiệu.

c) Phần đảo là hiển nhiên còn phần thuận thì chứng minh $A \subset B, B \subset A$.

d) Phần đảo là hiển nhiên còn phần thuận thì chứng minh $B \subset C, C \subset B$.

Bài tập 3. 7: Có bao nhiêu số hạng của tổng

a) $A = 2 + 4 + 6 + \ldots + 1018$

b) $B = 3 + 8 + 13 + 18 + \ldots + 2021$

Hướng dẫn

Chú ý khoảng cách đều nhau nên số số hạng bằng $\frac{u_n - u_1}{d}$.

Bài tập 3. 8:

Có bao nhiêu

a) cách chia 5 món quà khác nhau cho 3 người mà ai cũng có quà.

b) cách chia 5 món quà khác nhau cho 3 người.

Hướng dẫn

a) Xét trường hợp $5 = 1 + 1 + 3$ và $1 + 2 + 2$. Kết quả 150

b) Xét trường hợp $5 = 1 + 1 + 3; 1 + 2 + 2; 0 + 0 + 5; 0 + 1 + 4; 0 + 2 + 3$.

Bài tập 3. 9:

a) Cho n đường thẳng song song cắt m đường thẳng song song. Mặt phẳng được phân chia bao nhiêu hình bình hành?

b) Có bao nhiêu đường chéo trong một đa giác có n đỉnh

Hướng dẫn

a) Hình bình hành tạo bởi 2 cặp đường thẳng cắt nhau.

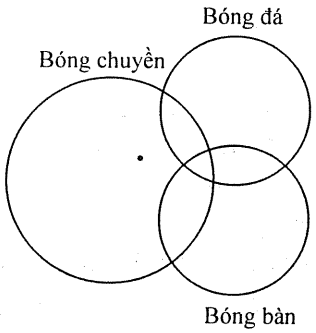
Kết quả $C_n^2.C_m^2$

b) Kết quả $C_n^2 - n$

Bài tập 3. 10: Lớp 10T có 45 học sinh gồm 20 học sinh chơi bóng chuyền, 18 chơi bóng đá, 10 chơi bóng bàn trong đó có 2 học sinh chơi cả 3 loại, 5 học sinh chơi bóng chuyền và bóng đá, 4 học sinh chơi bóng chuyền và bóng bàn, 3 học sinh chơi bóng bàn và bóng đá. Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ chơi một môn?

Hướng dẫn

Biểu diễn biểu đồ Ven ba tập hợp trò chơi rồi ghi số phần tử từ trong ra ngoài.



Bài tập 3. 11: Có 3 loại bánh rán, bánh kem, bánh xốp khác nhau.

a) Nếu 6 người vào ăn 6 cái bánh thì có bao nhiêu cách lựa chọn?

b) Nếu 6 người vào ăn 6 cái bánh mà phải có bánh kem thì có bao nhiêu cách lựa chọn?

Hướng dẫn giải

a) Kết quả 28.

b) Xét số bánh kem k = 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Bài tập 3. 12: Phương trình x + y + z + t = 345 có bao nhiêu bộ nghiệm

a) (x,y,z,t) nguyên dương.

b) (x,y,z,t) tự nhiên.

Hướng dẫn giải

a) Kết quả C_{343}^3

b) Đặt X = x + 1, Y = y + 1, Z = z + 1, T = t + 1 thì X, Y, Z, T nguyên dương và X +Y +Z +T = 348. Kết quả C_{348}^3

Chuyên đề 4: PHƯƠNG TRÌNH

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

– Định lý Viet: nếu phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } P = x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Đảo lại nếu hai số x_1, x_2 có tổng $x_1 + x_2 = S$ và tích $x_1x_2 = P$ thì chúng là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$ ($S^2 - 4P \geq 0$).

Phân tích: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu: $P < 0$, có hai nghiệm dương: $\Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S > 0$, có hai nghiệm âm: $\Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S < 0$.

Phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

– Dùng hằng đẳng thức, biến đổi thành tích số

– Dùng máy tính cá nhân để tìm nghiệm $x = x_o$ rồi chia đa thức vế trái cho $(x - x_o)$ hoặc dùng sơ đồ Hooc – ne

	a	b	c	d
$x = x_o$	a	$b' = ax_o + b$	$c' = b'x_o + c$	$d' = c'x_o + d = 0$

Do đó $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_o)(ax^2 + b'x + c')$.

– Tổng quát: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

Chia 2 vế cho $a \neq 0$ đưa về phương trình: $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

Đặt $x = y - \frac{B}{3}$ đưa tiếp về phương trình: $y^3 - py = q$

Có 2 hướng để giải phương trình: $y^3 - py = q$ (1)

Hướng 1:

Đặt $y = u + v$ và chọn $u.v = \frac{p}{3}$ thì $u^3 + v^3 = q$ và $u^3.v^3 = \frac{p^3}{27}$

Vậy u^3, v^3 là nghiệm phương trình: $Z^2 - qZ + \frac{p^3}{27} = 0$.

Nếu $\Delta < 0$ sau này ta dùng số phức để chuyển tiếp phức ra thực.

Hướng 2:

– Nếu $p = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow y^3 = q \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{q}$

– Nếu $p > 0$. Đặt $y = 2\sqrt{\frac{p}{3}}t$: $(1) \Leftrightarrow 4t^3 - 3t = m$ (2), $m = \frac{3\sqrt{3q}}{2p\sqrt{p}}$.

Xét $|m| \leq 1$, đặt $m = \cos\alpha$ thì (2) có 3 nghiệm:

$t_1 = \cos\frac{\alpha}{3}$, $t_2 = \cos\frac{\alpha+2\pi}{3}$, $t_3 = \cos\frac{\alpha-2\pi}{3}$

Xét $|m| > 1$, đặt $m = \frac{1}{2}(d^3 + \frac{1}{d^3})$ thì : $d^3 = m \pm \sqrt{m^2-1}$.

Phương trình (2) có 1 nghiệm:

$$t = \frac{1}{2}(d + \frac{1}{d}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}$$

– Nếu $p < 0$. Đặt $y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.t$:(1) $\Leftrightarrow 4t^3 + 3t = m$ (3)

Ta đặt tiếp $m = \frac{1}{2}(k^3 - \frac{1}{k^3}) \Rightarrow k^3 = m \pm \sqrt{m^2+1}$

Phương trình (3) có 1 nghiệm

$$t = \frac{1}{2}(k - \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2+1}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{m^2+1}})$$

Ta gọi các phương trình bậc 3: $4x^3 + 3x - m = 0$, $4x^3 - 3x - m = 0$ là các dạng phương trình bậc 3 chuẩn tắc. Ý nghĩa cơ bản là mọi phương trình bậc 3 đều đưa về được dạng chuẩn tắc đó.

Chú ý thêm khi $|m| \geq 1$.

$$4x^3 + 3x - m = (x - \alpha)(4x^2 + 4\alpha x + 4\alpha^2 + 3)$$

với $\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2+1}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{m^2+1}}\right)$, $\Delta' = -12(\alpha^2+1) < 0$

và $4x^3 - 3x - m = (x - \beta)(4x^2 + 4\beta x + 4\beta^2 - 3)$

với $\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}\right)$, $\Delta' = 12(1-\beta^2) < 0$.

Phương trình bậc bốn

– Dạng $ax^4 + bx^2 + x = 0$, $a \neq 0$. Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$

– Dạng $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + c') = d$. Đặt $t = x^2 + bx$

– Dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, $a + b = c + d$

Đặt $t = x^2 + (a+b)x = x^2 + (c + d)x$

– Dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$. Đặt $x = t - \frac{a+b}{2}$

– Dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $ad^2 = eb^2 \neq 0$

Chia 2 vế cho $x^2 \neq 0$ rồi đặt $t = x + \frac{e}{ax}$.

Phương trình quy hồi (đối xứng hệ số) bậc n:

$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + ... + Cx^2 + Bx + A = 0$, $A \neq 0$

Nếu n chẵn, n = 2m thì chia 2 vế cho $x^m \neq 0$ và đặt ẩn phụ

$t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2$.

Nếu n lẻ thì có nghiệm x = – 1 rồi phân tích thành tích (x+1) và một thừa phương trình quy hồi bậc chẵn.

Với dạng mở rộng thì đặt $t = x - \frac{1}{x}$, $t = x + \frac{m}{x}$,...

Phương trình bậc n

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$.

Đưa về phương trình bậc thấp bằng cách phân tích đa thức về trái thành thừa số, đặt ẩn phụ,...

Nghiệm hữu tỉ nếu có thì có dạng $x = \frac{p}{q}$ với $p | a_n$ và $q | a_0$. Thế trực tiếp hoặc dùng sơ đồ Hoócne để thử nghiệm.

Định lý Viete: Nếu phương trình bậc n có n nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ (phân biệt hay trùng nhau) thì:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1} . x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0} .....$$

và $x_1x_2 ... x_n = (-1)^n . \frac{a_n}{a_0}$.

Chú ý:

1) Nếu tổng các hệ số a + b + c +... = 0 thì có nghiệm x = 1, nếu tổng đan dấu các hệ số a – b + c – d + ...= 0 thì có nghiệm x = –1.
2) Có thể đổi biến về phương trình theo ẩn là tham số, đặt ẩn phụ rồi chuyển về hệ phương trình, phép thế lượng giác, dùng bất đẳng thức để đánh giá 2 vế,...

Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp giải: dùng định nghĩa, chia miền xét dấu, đặt điều kiện rồi bình phương, bất đẳng thức,...

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$|B| = B \Leftrightarrow B \geq 0$, $|B| = -B \Leftrightarrow B \leq 0$

$|A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \geq 0$

$|A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \leq 0$.

Phương trình chứa căn thức

Phương pháp giải: đặt điều kiện và bình phương, lập phương, đặt ẩn phụ kèm điều kiện, chuyển thành hệ phương trình, nhân lượng liên hiệp, thêm bớt, nhân chia đại lượng, biến đổi về phương trình tích số, dùng tính chất hàm số, bất đẳng thức, lượng giác hóa, tọa độ vectơ...

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Điều kiện về nghiệm của phương trình

Cho hàm số $y = f(x)$ trên D, f đạt giá trị lớn nhất M, nhỏ nhất m.

Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq k \leq M$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 4.1:

Giải các phương trình:

a) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ b) $2x^3 - 6x^2 + 6x - 9 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ hoặc $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = \pm 3$.

b) Ta có: $2x^3 - 6x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 7$

$\Leftrightarrow 2(x - 1)^3 = 7 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{\frac{7}{2}} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2}}$.

Bài toán 4.2:

Giải các phương trình:

a) $8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0$ b) $(8x^3 + 1)^3 = 162x - 27$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$

Xét $|x| \leq 1$, đặt $x = \cos 3t$ thì $\cos 3t = \cos\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 3t = \pm\frac{5\pi}{18} + k2\pi$ với k nguyên.

Từ đó phương trình bậc 3 có 3 nghiệm

$$x_1 = \cos\frac{5\pi}{18},\ x_2 = \cos\frac{17\pi}{18},\ x_3 = \cos\frac{29\pi}{18}.$$

b) Đặt u = 2x, phương trình:

$$(u^3 + 1)^3 = 27(3u - 1) \Leftrightarrow u^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3u - 1}$$

Lại đặt $v = \sqrt[3]{3u - 1} \Leftrightarrow v^3 + 1 = 3u$

Ta có hệ: $\begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ v^3 + 1 = 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ u^3 - v^3 = 3(v - u) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ (u - v)(u^2 + vu + v^2 + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ u - v = 0 \end{cases}$$

Do đó $u^3 + 1 = 3u$ hay $8x^3 - 6x + 1 = 0$

Xét $x \in [-1; 1]$ nên đặt $x = \cos t$

PT: $2(4\cos^3 t - 3\cos t) = -1 \Leftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$, $(k \in \mathbf{Z})$

Từ đó có 3 giá trị của x và cũng chính là 3 nghiệm của phương trình bậc 3:

$$x = \cos\frac{2\pi}{9},\ x = \cos\frac{8\pi}{9},\ x = \cos\frac{14\pi}{9}.$$

Bài toán 4.3:

Giải các phương trình:

a) $x^3 + 9x + 6 = 0$ b) $8x^3 + 24x^2 + 6x - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = t - \frac{3}{t}$, phương trình:

$$t^3 - \frac{9t}{t} + \frac{27}{t} - \frac{27}{t^3} + 9t - \frac{27}{t} + 6 = 0 \Leftrightarrow t^6 + 6t^3 - 27 = 0;\ t \neq 0$$

$\Leftrightarrow t^3 = -9$ hoặc $t^3 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ hoặc $x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$.

Vậy nghiệm $x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$.

b) Phương trình: $x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$

Đặt $x = y - 1$, ta được: $y^3 - \frac{9}{4}y + \frac{9}{8} = 0$

Đặt $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$, ta được: $4z^3 - 3z = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$

Từ đó ta có 3 nghiệm: $z_1 = \cos\frac{5\pi}{18}$, $z_2 = \cos\frac{17\pi}{18}$, $z_3 = \cos\frac{29\pi}{18}$

Quay trở lại biến x ta được 3 nghiệm :

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{18};\ x_2 = 1 + \sqrt{3}\cos\frac{17\pi}{18};\ x_3 = 1 + \sqrt{3}\cos\frac{29\pi}{18}.$$

Bài toán 4.4:

Gọi $a < b < c$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Chứng minh rằng: $a^2 - c = b^2 - a = c^2 - b = 2$.

Hướng dẫn giải

Xét $|x| \le 2$, đặt $x = 2\cos\varphi$, thì phương trình:

$$8\cos^3 t - 6\cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Từ đó, ta tìm được ba nghiệm của phương trình bậc 3 là

$$a = 2\cos\frac{8\pi}{9},\ b = 2\cos\frac{14\pi}{9},\ c = 2\cos\frac{2\pi}{9}.$$

Nên: $a^2 - c = 4\cos^2\frac{8\pi}{9} - 2\cos\frac{2\pi}{9} = 2(1+\cos\frac{16\pi}{9}) - 2\cos\frac{2\pi}{9} = 2$

Chứng minh tương tự $b^2 - a = c^2 - b = 2$.

Bài toán 4.5:

Giải các phương trình:

a) $(x-1)(x+5)(x-3)(x+7) = -63$

b) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) = -63$

Đặt $t = x^2 + 4x - 13$ thì phương trình tương đương:

$$(t+8)(t-8) = -63 \Leftrightarrow t^2 - 64 = -63 \Leftrightarrow t^2 = 1$$

Khi $t = 1$ thì $x^2 + 4x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 3\sqrt{2}$

Khi $t = -1$ thì $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ hoặc $x = 2$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $-2 \pm 3\sqrt{2}; -6; 2$

b) Đặt $t = x + 4$ phương trình trở thành

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16 \Leftrightarrow (t^2 - 2t + 1)^2 + (t^2 + 2t + 1)^2 = 16$$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 14 = 0$ (1). Đặt $y = t^2$ điều kiện $y \ge 0$.

Phương trình $2y^2 + 12y - 14 = 0 \Leftrightarrow y = -7$ hoặc $y = 1$

Chọn $y = 1$ thì $t = \pm 1$ suy ra $x = -5$ hoặc $x = -3$

Bài toán 4.6:

Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $x^4 - 32x + 48 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: PT $\Leftrightarrow (x^4 + 2x^3 + x^2) + 4(x^2 + x) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 5 = 0$

Đặt $t = x^2 + x$ thì phương trình trên trở thành:

$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -5$

Do đó $\left[\begin{array}{l} x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) $x^4 - 32x + 48 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + 16x^2 + 64) - (16x^2 + 32x + 16) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 8)^2 - (4x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 12)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bài toán 4.7:

Giải các phương trình:

a) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ b) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình không có nghiệm x = 0.

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$, ta có $x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2$ thì PT: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1; t_2 = 2$.

Chọn $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

b) Vì x = 0 không là nghiệm của phương trình .

Chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ ta được $2(x^2 + \frac{25}{x^2}) - 21(x + \frac{5}{x}) + 74 = 0$

Đặt $t = x + \frac{5}{x}$, $|t| \geq 2\sqrt{5}$ thì phương trình trở thành:

$2t^2 - 21t + 54 = 0 \Leftrightarrow t = 6, t = \frac{9}{2}$ (chọn)

Khi t = 6 ta có PT: $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc x = 5

Khi $t = \frac{9}{2}$ ta có PT: $2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \frac{5}{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là 1; 5; 2; $\frac{5}{2}$.

Bài toán 4.8:

Giải các phương trình:

a) $(x + 4)(x + 6)(x - 2)(x - 12) = 25x^2$

b) $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình $(x^2 + 10x + 24)(x^2 - 14x + 24) = 25x^2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 24 + 12x)(x^2 - 2x + 24 - 12x) = 25x^2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 24)^2 - (12x)^2 = 25x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 24)^2 - (13x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 11x + 24)(x^2 - 15x + 24) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 + 11x + 24 = 0 \\ x^2 - 15x + 24 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -3 \text{ hay } x = -8 \\ x = \dfrac{15 \pm \sqrt{129}}{2} \end{bmatrix}$$

b) Ta có $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{1}{12}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{1}{36}\right)\left(x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{1}{24}\right) = \frac{5}{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2 - 5x + \frac{1}{3}\right)\left(12x^2 - 5x + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

Đặt $t = 12x^2 - 5x$, phương trình trở thành

$$\left(t + \frac{1}{3}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{6} = 0 \Leftrightarrow t^2 + \frac{5}{6}t - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = \dfrac{1}{2} \\ t = -\dfrac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Do đó: $\begin{bmatrix} 12x^2 - 5x - \dfrac{1}{2} = 0 \\ 12x^2 - 5x + \dfrac{4}{3} = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{12} \end{bmatrix}$

Bài toán 4.9:

Giải các phương trình

a) $(x^2 + 1)^3 + (1 - 3x)^3 = (x^2 - 3x + 2)^3$

b) $x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0$.

Giải

a) Sử dụng hằng đẳng thức $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$

PT: $(x^2 + 1)^3 + (1 - 3x)^3 = ((x^2 + 1) + (1 - 3x))^3$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + 1)(1 - 3x)[(x^2 + 1) + (1 - 3x)] = 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + 1)(1 - 3x)(x^2 - 3x + 1) = 0$

Từ đó, có tập nghiệm $S = \{\frac{1}{3}; 1; 2\}$.

b) Xét $|x| \le 2\sqrt{3}$, đặt $x = 2\sqrt{3}\cos t$ thì phương trình:

$$288\sqrt{3}\cos^5 t - 360\sqrt{3}\cos^3 t + 90\sqrt{3}\cos t - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 5t = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5t = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi .$$

Từ đây suy ra phương trình bậc 5 có 5 nghiệm là:

$$x = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}\right) \text{ với } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Bài toán 4.10:

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nằm trong [0 , 1] :

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

Giải:

Đặt $x = \sin t$, với $0 < t < \frac{\pi}{2}$ thì phương trình trở thành

$$8\sin t.\cos 2t(8\sin^4 t - 8\sin^2 t + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t[8\sin^2 t(\sin^2 t - 1) + 1] = 1$$

$$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t(1 - 2\sin^2 2t) = 1$$

$$\Leftrightarrow 8\sin t\cos 2t.\cos 4t = 1 \Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t.\cos 4t.\cos t = \cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t = \cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \text{ hay } t = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} .$$

Từ điều kiện $0 < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra có bốn nghiệm thích hợp là

$$x = \sin\frac{\pi}{18};\ x = \sin\frac{5\pi}{18};\ x = \sin\frac{\pi}{14} \text{ và } x = \frac{5\pi}{14}.$$

Bài toán 4.11:

Giải phương trình sau:

a) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 1$

b) $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \neq 1$.

PT: $\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}=1$

Đặt $t=\frac{x^2}{x-1}$ thì PT: $t^2-t-1=0\Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{2}$.

Khi $t=\frac{x^2}{x-1}=1+\sqrt{2}$ thì $x^2-(1+\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}=0$: VN

Khi $t=\frac{x^2}{x-1}=1-\sqrt{2}$ thì $x^2-(1-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Cách khác: Đặt $y=\frac{x}{x-1}\Leftrightarrow x=xy-y\Leftrightarrow x+y+xy=0$

Ta đưa về hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y+xy=0\end{cases}$

b) Điều kiện $x\neq 1$.

PT: $\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^3-3\left(x+\frac{x}{x-1}\right)\left(x.\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x^{2^3}}{x-1}-2=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3-3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{3x^{2^3}}{x-1}-2=0$

Đặt $t=\frac{x^{2^3}}{x-1}$ thì PT: $t^3-3t^2+3t-2=0\Leftrightarrow(t-1)^3=1\Leftrightarrow t=2$.

Do đó $\frac{x^{2^3}}{x-1}=2\Leftrightarrow x^2-2x+2=0$: vô nghiệm.

Bài toán 4.12:

Giải các phương trình:

a) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{19x}{12}$

b) $\frac{x+1}{x^2+2x}+\frac{x+6}{x^2+12x+35}=\frac{x+2}{x^2+4x+3}+\frac{x+5}{x^2+10x+24}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x\neq 0$ và $x\neq\pm 1$. PT:

$$(x^2+1)(x^2-1)+x^2=\frac{19x^2(x^2-1)}{12}\Leftrightarrow 7x^4-31x^2+12=0$$

Đặt $x^2 = t \geq 0$. Ta có phương trình: $7t^2 - 31t + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 4 \\ t = \frac{3}{7} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 = 4 \\ x^2 = \frac{3}{7} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{7}} \end{bmatrix} \text{ (thỏa)}$$

b) Điều kiện: $x \neq -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0$.

PT: $\frac{2x+2}{x(x+2)} + \frac{2x+12}{(x+5(x+7)} = \frac{2x+4}{(x+1)(x+3)} + \frac{2x+10}{(x+4)(x+6)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7}\right) + \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right)$$

Xét $x = -\frac{7}{2}$ thì VT = VP =0 nên $x = -\frac{7}{2}$ là nghiệm .

Xét $x \neq -\frac{7}{2}$ thì phương trình tương đương

$$\frac{1}{x^2+7x} + \frac{1}{x^2+7x+10} = \frac{1}{x^2+7x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12}$$

Đặt $z = x^2 + 7x + 6$ thì có:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z-6} + \frac{1}{z+4} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+6} \Leftrightarrow z^2 + 6z + 18 = 0 \text{ (VN)}$$

Vậy : $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

Bài toán 4.13:

Giải các phương trình:

a) $|x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$ b) $|x^2 - x - 12| = 3x - 12$.

Hướng dẫn giải

a) PT$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = x^2 + 6x + 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 + 5x - 4 = x^2 + 6x + 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ hay } x \geq 4 \\ 11x = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 < x < 4 \\ 2x^2 + x + 9 = 0 \ (\Delta < 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ hay } x \geq 4 \\ x = -\frac{1}{11} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{11}.$$

b) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-12 \geq 0 \\ (x^2-x-12)^2 = (3x-12)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x^2-x-2)^2 - (3x-12)^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2+2x-24)(x^2-4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Bài toán 4.14:

Giải các phương trình:

a) $|5x+2| + |3x-4| = 4x+5$ b) $(x^2+3x)^2 - 5|x^2+3x-1| - 1 = 0.$

Hướng dẫn giải

a) Với $x < -\frac{2}{5}$, PT: $-5x-2-3x+4 = 4x+5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ (loại)

Với $-\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{4}{3}$, PT: $5x+2-3x+4 = 4x+5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (chọn)

Với $x \geq \frac{4}{3}$, PT: $5x+2+3x-4 = 4x+5 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$ (chọn)

Vậy tập nghiệm $S = \{\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\}$.

b) Đặt $t = x^2+3x$ thì PT: $t^2 - 5|t-1| - 1 = 0$

Xét $t \geq 1$ thì PT $\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 4$

Do đó $x^2+3x-1 = 0$ hoặc $x^2+3x-4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = -4$

Xét $t < 1$ thì PT $\Leftrightarrow t^2 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -6$

Chọn $t = -6$ nên có $x^2+3x+6 = 0$ ($\Delta < 0$)

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = 1$, $x = -4$, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Bài toán 4.15:

Giải các phương trình:

a) $|x^2-1| = 1 - |x|$ b) $|x-6|^6 + |x-7|^7 = 1$

Hướng dẫn giải

a) Vì $VT \geq 0 \Rightarrow VP = 1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1$ nên:

PT $\Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 - |x| \Leftrightarrow x^2 - |x| = 0 \Leftrightarrow |x|(|x|-1) = 0$

$\Leftrightarrow |x| = 0$ hoặc $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$ (chọn)

b) Xét $x = 6$ thì PT nghiệm đúng. Xét $x = 7$ thì PT nghiệm đúng.

Xét $x > 7$ thì $|x-6| > 1 \Rightarrow VT > 1$ nên PT không thỏa mãn.

Xét $x < 6$ thì $|x-7| > 1 \Rightarrow VT > 1$ nên PT không thỏa mãn.

Xét $6 < x < 7$ thì $|x-6| < 1$, $|x-7| < 1$ nên

VT < x – 6 + 7 –x = 1: nên PT không thỏa mãn.

Vậy nghiệm x = 6, x =7.

Bài toán 4.16:

Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 3x - 4| = 7 - x$

b) $|x^2 - 4| - |x^2 - 5x + 4| = |5x - 8|$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $A = x^2 - 4x + 3$; $B = -x^2 + 3x + 4$ thì phương trình :

$$|A| + |B| = A + B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ hay } x \geq 3 \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

b) Đặt $A = x^2 - 4$; $B = x^2 - 5x + 4$ thì phương trình :

$$|A| - |B| = A - B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B \geq 0 \\ A \leq B \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x \geq x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 4x \leq x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 8, x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ 5x \leq 8, x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{5}, x \leq 1 \text{ hay } x \geq 4 \\ x \leq \frac{8}{5}, 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 1 \leq x \leq \frac{8}{5} \end{cases}.$$

Bài toán 4.17:

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{4x^2 + 101x + 64} = 2(x + 10)$ b) $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{3x - 2} - \sqrt{2x - 3}$

Hướng dẫn giải

a) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 10 \geq 0 \\ 4x^2 + 101x + 64 = 4(x + 10)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -10 \\ x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16$

b) ĐK: $5x - 1 \geq 0, 3x - 2 \geq 0, 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

PT $\Leftrightarrow \sqrt{5x - 1} + \sqrt{2x - 3} = \sqrt{3x - 2}$

$\Leftrightarrow 5x - 1 + 2x - 3 + 2\sqrt{(5x - 1)(2x - 3)} = 3x - 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(5x - 1)(2x - 3)} = 1 - 2x < 0$: phương trình vô nghiệm.

Bài toán 4.18:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$

b) $\sqrt{x^2+2x}=-2x^2-4x+3$

Hướng dẫn giải

a) Với $x \geq -7$, đặt $t=\sqrt{x+7}$, $t \geq 0$ nên

$PT \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^2-t-6}=4 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-t-6}=3-t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6=9-6t+t^2 \\ 3-t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t=15 \\ t\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t=3$$

Do đó: $\sqrt{x+7}=3 \Leftrightarrow x+7=9 \Leftrightarrow x=2$.

b) Đặt $y=\sqrt{x^2+2x}$, $y \geq 0$ thì PT: $y=-2y^2+3$

$\Leftrightarrow 2y^2+y-3=0 \Leftrightarrow y=1$ hoặc $y=-3$

Chọn $y=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x}=1 \Leftrightarrow x^2+2x=1$

$\Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \pm\sqrt{2}$.

Bài toán 4.19:

Giải các phương trình:

a) $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$

b) $\sqrt{1+x}-\sqrt{8-x}+\sqrt{(1+x)(8-x)}=3$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $-1 \leq x \leq 24$.

$PT \Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=2(x-24)$

$\Leftrightarrow 48-2x+2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}$

$\Leftrightarrow \left[(x+3)+\sqrt{-x^2-8x+48}\right]^2=9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+3)+\sqrt{-x^2-8x+48}=3 \\ (x+3)+\sqrt{-x^2-8x+48}=-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-8x+48}=-x \\ \sqrt{-x^2-8x+48}=-6-x \end{array}\right.$$

Từ đó giải được 2 nghiệm $x=-2-\sqrt{28}, x=-5-\sqrt{31}$

b) Điều kiện $-1 \le x \le 8$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}$, $t \ge 0 \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(1+x)(8-x)}$

PT: $t + \frac{t^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = -5$ hoặc $t = 3$

Chọn nghiệm $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} = 3$.

$\Leftrightarrow 1 + x + 8 - x + 2\sqrt{(1+x)(8-x)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = 0$

Vậy nghiệm $x = -1$, $x = 8$.

Bài toán 4.20:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$

b) $729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \sqrt{3x^2+5x+8}$, $t \ge 0$ thì $t^2 = 3x^2 + 5x + 8$

PT : $t - \sqrt{t^2-7} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-7} = t - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \ge 0 \\ t^2 - 7 = (t-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 1 \\ 2t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$.

Do đó $\sqrt{3x^2+5x+8} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\frac{8}{3}$.

b) ĐK: $|x| < 1$. Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$, $0 \le t \le 1$. PT:

$729(1-t^2)^2 + 8t = 36$

$\Leftrightarrow [27^2(1-t^2)^2 - 36(1-t^2) + \frac{4}{9}] - (36t^2 - 8t + \frac{4}{9}) = 0$

$\Leftrightarrow [27(1-t^2) - \frac{2}{3}]^2 - (6t - \frac{2}{3})^2 = 0$

$\Leftrightarrow [27(1-t^2) - 6t][27(1-t^2) + 6t - \frac{4}{3}] = 0$

$\Leftrightarrow 27(1-t^2) - 6t = 0$ hoặc $27(1-t^2) + 6t - \frac{4}{3} = 0$.

Từ đó giải ra nghiệm: $x = \pm\frac{1}{9}\sqrt{2\sqrt{82} - 2}$.

Bài toán 4.21:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2-9} = 10$

b) $x^2 - 2x + 7 + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+\sqrt{1+8x}}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK : $x - 1 \geq 0$, $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Ta có hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-9}$ đồng biến khi $x \geq 3$
nên phương trình $f(x) = 10$ có tối đa 1 nghiệm mà $f(5) = 10$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

b) PT $\Leftrightarrow (x+3)^2 + \sqrt{x+3} = (1+\sqrt{1+8x})^2 + \sqrt{1+\sqrt{1+8x}}$

Ta có hàm số $f(t) = t^2 + \sqrt{t}$ đồng biến khi $t \geq 0$ nên

PT: $f(x+3) = f(1+\sqrt{1+8x}) \Leftrightarrow x + 3 = 1 + \sqrt{1+8x}$

$\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{1+8x} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0, x \geq -2$

Chọn 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.

Bài toán 4.22:

Giải các phương trình:

a) $2x^2 + 4x = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$ b) $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

Hướng dẫn giải

a) PT: $2(x+1)^2 - 2 = \sqrt{\dfrac{x+1+2}{2}}$

Đặt $y = x + 1$, ta được phương trình $2y^2 - 2 = \sqrt{\dfrac{y+2}{2}}$

Đặt tiếp $z = \sqrt{\dfrac{y+2}{2}} \geq 0$ thì có hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2 - 2 = z \\ 2z^2 - 2 = y \end{cases}$

nên $(y - z)(2y + 2z + 1) = 0 \Leftrightarrow y = z$ hoặc $2y + 2z + 1 = 0$

Xét $y = z$, thì $2y^2 - y - 2 = 0$.

Chọn $y = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ suy ra $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Xét $2y + 2z + 1 = 0$, thì $4y^2 + 2y - 3 = 0$.

Chọn $y = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{4}$ suy ra $x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}$

Vậy hai nghiệm là: $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$, $x = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}$.

b) Điều kiện $x \geq -2$. PT: $2(x^2 - 3x + 1) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$

Đặt $\sqrt{x+2} = a \geq 0$; $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = b > 0$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = x^2 - 3x + 2$. PT trở thành: $2(b^2 - a^2) = 3ab$

$\Leftrightarrow 2b^2 - 3ab - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow (a + 2b)(b - 2a) = 0 \Leftrightarrow b = 2a$..

Do đó $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2\sqrt{x + 2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x + 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $3 \pm \sqrt{13}$.

Bài toán 4.23:

Giải các phương trình:

a) $7x^2 - 10x + 14 = 5\sqrt{x^4 + 4}$ b) $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x + 5} = 1 - 3x$

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R}$.

PT $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - 5\sqrt{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} + 6(x^2 - 2x + 2) = 0$

Đặt $a = \sqrt{x^2 + 2x + 2}, b = \sqrt{x^2 - 2x + 2}, a > 0, b > 0$

PT: $a^2 - 5ab + 6b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 2b)(a - 3b) = 0 \Leftrightarrow a = 2b$ hay $a = 3b$

Ta có $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ hay $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0$ hay $8x^2 - 20x + 16 = 0$.

Giải ra được 2 nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$

b) PT $\Leftrightarrow (x + 1)^3 = 3\sqrt[3]{3x + 5} + 2$

Đặt $y + 1 = \sqrt[3]{3x + 5}$ thì có hệ : $\begin{cases} (x + 1)^3 = 3y + 5 \\ (y + 1)^3 = 3x + 5 \end{cases}$

Suy ra $(x + 1)^3 - (y + 1)^3 = 3(y - x)$

$\Leftrightarrow (x - y)\left[(x + 1)^2 + (x + 1)(y + 1) + (y + 1)^2 + 3\right] = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

Do đó $(x + 1)^3 = 3x + 5 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$.

Giải ra được 2 nghiệm $x = 1$, $x = -2$.

Bài toán 4.24:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2$ b) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: PT $\Leftrightarrow x \geq 2$ và $4 - 3\sqrt{10 - 3x} = (x - 2)^2$

$\Leftrightarrow x \geq 2$ và $3\sqrt{10 - 3x} = 4x - x^2$

$\Leftrightarrow x \geq 2, 4x - x^2 \geq 0$ và $9(10 - 3x) = (4x - x^2)^2$

$\Leftrightarrow x \geq 2, 0 \leq x \leq 4$ và $x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 90 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$ và $x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 90 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$ và $(x - 3)(x^3 - 5x^2 + x + 30) = 0$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$ và $(x - 3)(x + 2)(x^2 - 7x + 15) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$.

b) ĐK: $x - 1 \geq 0$, $x^2 - 1 \geq 0$, $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x \geq 4$

Khi $x = 1$ thì PT: $0 = 0$ đúng

Khi $x \geq 4$ thì PT : $\sqrt{x-1}\left(1+\sqrt{x+1}\right) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x+1} = \sqrt{x-4} \Leftrightarrow 2 + x + 2\sqrt{x+1} = x - 4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = -6$: vô nghiệm.Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 4.25:

Giải các phương trình:

a) $(4x - 1)\sqrt{x^2 - 1} = 2x^2 + 2x + 1$ b) $(x + 1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 1}, y \geq 1 \Rightarrow x^2 = y^2 - 1$

PT $\Leftrightarrow (4x - 1)y = 2(y^2 - 1) + 2x + 1 \Leftrightarrow 2y^2 - (4x - 1)y + (2x - 1) = 0$

$\Delta = (4x - 3)^2$ nên có 2 nghiệm $y = \frac{1}{2}$ (loại) , $y = 2x - 1$.

Do đó $\sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 = (2x - 1)^2 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{4}{3} \text{ hay } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

b) D = **R**. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 3}, t \geq \sqrt{2}$

PT $\Leftrightarrow (x + 1)t = t^2 + 2x - 3 + 1 \Leftrightarrow t^2 - (x + 1)t + 2(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = x - 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2$ hoặc $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x - 1$

Từ đó giải ra nghiệm $x = 1 - \sqrt{2}$ và $x = 1 + \sqrt{2}$.

Bài toán 4.26:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

b) $\sqrt{3x + 1} + 2\sqrt[3]{19x + 8} = 2x^2 + x + 5$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $-\frac{1}{3} \le x \le 6$.

$PT \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x}+(3x^2-14x-5)=0$

$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)\right)=0$

Vì $-\frac{1}{3} \le x \le 6$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+(3x+1)>0$

Do đó phương trình tương đương $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ (chọn).

b) Điều kiện $x \ge -\frac{1}{3}$. PT

$\left(\sqrt{3x+1}-(x+1)\right)+2\left(\sqrt[3]{19x+8}-(x+2)\right)-2(x^2-x)=0$

$\Leftrightarrow (x-x^2)\left[\frac{1}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{2x+14}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\sqrt[3]{(19x+8)^2}}+2\right]=0$

$\Leftrightarrow x-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

Bài toán 4.27:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$. b) $x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $2 \le x \le 4$. Ta có $VP = x^2-6x+11=(x-3)^2+2 \ge 2$

$VT^2=2+2\sqrt{(x-2)(4-x)} \le 2+(x-2)+(4-x)=4 \Rightarrow VT \le 2$,

nên dấu bằng đồng thời xảy ra: $\begin{cases} x-3=0 \\ x-2=4-x \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.

b) Điều kiện $x \ge -1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho vế phải

$$8\sqrt[4]{4x+4}=4\sqrt[4]{4.4.4.(x+1)} \le 4+4+4+(x+1)$$

Nên ta được $8\sqrt[4]{4x+4} \le x+13$, do đó từ phương trình cho thì được

$$x^3-3x^2-8x+40 \le x+13 \Leftrightarrow x^3-3x^2-9x+27 \le 0$$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^2-6x+9) \le 0 \Leftrightarrow (x+3)^2(x-3)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=3$.

Thử lại đúng nên phương trình có nghiệm $x=3$.

Bài toán 4.28:

Giải các phương trình:

a) $3\sqrt[3]{6-x}-2\sqrt{6+x}=2$

b) $\sqrt[3]{7x-1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện : $x \geq -6$. Đặt $u=\sqrt[3]{6-x}$; $v=\sqrt{6+x}$, $v \geq 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} 3u-2v=2 & (1) \\ u^3+v^2=12 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra : $v=\dfrac{3u-2}{9}$ Thế vào (2) ta được phương trình:

$4u^3 + 9u^2 - 12u - 44 = 0 \Leftrightarrow (u-2)(4u^2+17u+22)=0$

$\Leftrightarrow u = 2$ (vì $4u^2 + 17u + 22 > 0$, $\forall u$)

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{6-x} = 2 \Leftrightarrow 6 - x = 8 \Leftrightarrow x = -2$ (chọn)

Cách khác: Vế trái là hàm f(x) nghịch biến , f(–2) = 2 nên x = –2 là nghiệm duy nhất.

b) Đặt $y=\sqrt[3]{7x+1}$; $-z=\sqrt[3]{x^2-x-8}$; $t=\sqrt[3]{x^2-8x-1}$

thì $y + z + t = 2$, $y^3 + z^3 + t^3 = 8$

PT: $(y+z+t)^3-(y^3+z^3+t^3)=3(y+z)(z+t)(t+y)$

$(y + z)(z + t)(t + y) = 0 \Leftrightarrow y = -z$ hoặc $z = -t$ hoặc $t = -y$

Xét $\sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \Leftrightarrow 7x + 1 = x^2 - x - 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hay $x = 9$

Xét $\sqrt[3]{x^2-8x-1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \Leftrightarrow x^2 - 8x - 1 = x^2 - x - 8 \Leftrightarrow x = 1$

Xét $\sqrt[3]{7x+1} = -\sqrt[3]{x^2-8x-1} \Leftrightarrow 7x + 1 = -(x^2 - 8x - 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$

Thử lại đúng nên: S = {–1; 0; 1; 9}.

Bài toán 4.29:

Giải các phương trình:

a) $x^3 + 2 = 5\sqrt[3]{5x-2}$ b) $x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5\sqrt[3]{2x-9}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $y=\sqrt[3]{5x-2}$ .Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 5y-2 \\ y^3 = 5x-2 \end{cases}$

Trừ vế theo vế suy ra: $(x-y)(x^2+y^2+xy+5)=0$

Vì $x^2 + y^2 + xy + 2 = \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 5 > 0$ $\forall x$; y

Nên $x = y$, do đó: $x^3 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x-1) = 0$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $x = 2$ và $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

b) PT $\Leftrightarrow (x-5)^3 = -3x + 5(5 + \sqrt[3]{2x-9}) - 9$

Đặt $y = 5 + \sqrt[3]{2x-9}$ thì được hệ $\begin{cases}(x-5)^3 = -3x + 5y - 9\\(y-5)^3 = 2x - 9\end{cases}$

Do đó $(x-5)^3 - (y-5)^3 = -5x + 5y$

$\Leftrightarrow (x-y)[(x-5)^2 + (x-5)(y-5) + (y-5)^2 + 5] = 0 \Leftrightarrow x = y.$

Do đó $(x-5)^3 = 2x - 9 \Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 73x - 116 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 4.30:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x^2+15} = 3\sqrt[3]{x} - 2 + \sqrt{x^2+8}$

b) $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2+2}$.

Hướng dẫn giải

a) Viết phương trình dưới dạng: $\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} + 2 = 3\sqrt[3]{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x^2+8}} + 2 = 3\sqrt[3]{x} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} - \frac{7}{\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x^2+8}} = 2 \qquad (2)$$

Nếu x là nghiệm thì từ (1) thì $x > 0$ (do vế trái luôn dương). Khi đó vế trái là một hàm giảm nên phương trình (2) có không quá một nghiệm. Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) PT $\Leftrightarrow 2x^3 - 3x + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 1 + \sqrt[3]{x^2+2}$

Xét hàm số: $f(t) = t + \sqrt[3]{t+1}$ trên $\mathbb{R}$ thì f(t) đồng biến nên:

PT: $f(2x^3 - 3x) = f(x^2+1) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x = x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ hay } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 4.31:

Giải phương trình sau

a) $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$ b) $x = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $|x| \le 1$, đặt $x = \cos a$ với $a \in [0, \pi]$.

Khi đó: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sin a$

Phương trình trở thành $\sin a = \cos 3a$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos 3a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \\ a = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Với $a = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$ chọn $k = 0, -1$:

$$k = 0 \Rightarrow a = \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow a = \frac{5\pi}{8} \Rightarrow x = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Với $a = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ chọn $k = 1 \Rightarrow a = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy 3 nghiệm: $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; x = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Điều kiện $-2 \le x \le 2$ nên đặt $x = 2\cos t$, $0 \le t \le \pi$

Khi đó $\sqrt{2+x} = \cos\frac{t}{2}$, $\sqrt{2+2-\sqrt{2+x}} = 2\sin\frac{t}{4} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}\right)$

PT: $\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{8}\right) \Leftrightarrow t = \cos\frac{2\pi}{9}$.

Vậy nghiệm $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}$.

Bài toán 4.32:

Giải các phương trình:

a) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(1+x)^3}\right) = 2 + \sqrt{1-x^2}$

b) $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $|x| \le 1$. Đặt $x = \cos a$, $a \in [0, \pi]$

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{1+\sin a}\left[\sqrt{(1-\cos a)^3} - \sqrt{(1+\cos a)^3}\right] = 2 + \sin a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2}\left[\sqrt{\left(2\sin^2\frac{a}{2}\right)^3} - \sqrt{\left(2\cos^2\frac{a}{2}\right)^3}\right] = 2 + \sin a$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)2\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{a}{2} - \cos^3\frac{a}{2}\right) = 2 + \sin a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin^2\frac{a}{2} - \cos^2\frac{a}{2}\right)2\sqrt{2}\left(1 + \sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\right) = 2 + \sin a$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos a(2 + \sin a) = 2 + \sin a \Leftrightarrow \cos a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy nghiệm $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Điều kiện : $|x| \le 1$ nên đặt $x = \cos u$, $u \in [0, \pi]$.

Phương trình trở thành $\cos^3 u + \sin^3 u = \sqrt{2}\sin u \cos u$ (1)

Đặt $t = \sin u + \cos u$, $|t| \le \sqrt{2}$.

(1) $\Leftrightarrow (\sin u + \cos u)(1 - \sin u \cos u) = \sqrt{2}\sin u \cos u$

$\Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0$

Chọn $t = \sqrt{2}$ và $t = -\sqrt{2}$ nên: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}$.

Bài toán 4.33:

Giải các phương trình

a) $64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1 - x^2}$

b) $(64x^3 - 112x^2 + 56x - 7)^2 = 4(1 - x)$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $|x| \le 1$ nên đặt $x = \cos t$, với $0 \le t \le \pi$

Ta có $x = 0$ không phải là nghiệm

và $\cos 7t = 64\cos^7 t - 112\cos^5 t + 56\cos^3 t - 7\cos t$

PT: $64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7 = 2\sin t$

$\Leftrightarrow (64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7)\cos t = \sin 2t$

$\Leftrightarrow \cos 7t = \sin 2t$

Chọn nghiệm $t = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{9\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}$

Từ đó phương trình cho có 6 nghiệm x là

$$\cos\frac{\pi}{18}, \cos\frac{5\pi}{18}, \cos\frac{13\pi}{18}, \cos\frac{17\pi}{18}, \cos\frac{3\pi}{10}, \cos\frac{7\pi}{10}.$$

b) $(64x^3 - 112x^2 + 56x - 7)^2 = 4(1-x)$ nên $x \le 1$.

Nếu $x \le 0$ thì đặt $x = -y$ thì $y > 0$, phương trình

$$(64y^3 + 112y^2 + 56y + 7)^2 = 4(1+y)$$

Xét $y > 1$ thì VT > VP : vô nghiệm

Xét $0 < y \le 1$ thì $VT > 49 > 8 \ge VP$: vô nghiệm

Nếu $x = 0$ thì không phải là nghiệm

Nếu $0 < x \le 1$ thì đặt $x = \cos^2 t$, với $0 \le t < \frac{\pi}{2}$

Phương trình trở thành

$$(64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7)^2 = 4\sin^2 t.$$

$$\Leftrightarrow (64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7)^2 \cos^2 t = \sin^2 2t$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 7t = \sin^2 2t \Leftrightarrow \cos 14t = -\cos 4t$$

Chọn nghiệm $t = \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}$

Do đó phương trình cho có 6 nghiệm x là

$$\cos^2\frac{\pi}{18}, \cos^2\frac{\pi}{6}, \cos^2\frac{5\pi}{18}, \cos^2\frac{7\pi}{18}, \cos^2\frac{\pi}{10}, \cos^2\frac{3\pi}{10}.$$

Bài toán 4.34:

Cho phương trình bậc n: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Chứng minh rằng các nghiệm x nếu có thì: $|x| \le 1 + \max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right)$

Gọi $A = \max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Với nghiệm x mà $|x| \le 1$ là hiển nhiên $|x| \le 1 + A$, còn với nghiệm $|x| > 1$ thì:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -1 = \frac{a_1}{a_0}.\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0}.\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}.\frac{1}{x^n}$$

$$\Rightarrow 1 \le A\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x^2|}+\ldots+\frac{1}{|x^n|}\right)=\frac{A}{|x|}.\frac{1-\frac{1}{|x^n|}}{1-\frac{1}{|x|}} \le \frac{A}{|x|}.\frac{1}{1-\frac{1}{|x|}}$$

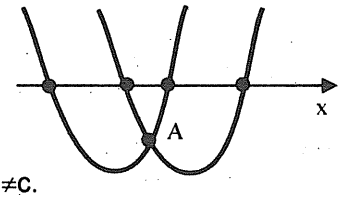
$$\Rightarrow 1 \le \frac{A}{|x|-1} \Rightarrow A \ge |x|-1 \Rightarrow |x| \le 1+A : \text{đpcm.}$$

Bài toán 4.35:

Cho hai phương trình: $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$ có 4 nghiệm xen kẽ nhau. Chứng minh rằng: $(d - b)^2 + (a - c)(ad - bc) < 0$.

Hướng dẫn giải

Vì hai parabol đều có bề lõm quay lên trên và hệ số của x^2 bằng nhau. Nên hai phương trình có nghiệm xen kẽ khi và chỉ khi giao điểm A của hai parabol ở dưới trục hoành.



Ta có $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d \Rightarrow x_A = \frac{d-b}{a-c}$; $a \neq c$.

Nên $y_A = \left(\frac{d-b}{a-c}\right)^2 + a\frac{d-b}{a-c} + b = \frac{(d-b)^2+(a-c)(ad-bc)}{(a-c)^2}$

Vì $y_A < 0 \Rightarrow (d - b)^2 + (a - c)(ad - bc) < 0$.

Bài toán 4.36:

a) Giải và biện luận : $2x^3 - (3 - 2m)x^2 - 2mx - m^2 + 1 = 0$.

b) Giải và biện luận: $x^4 - 2x^3 + x - a^2 - a = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta viết lại PT theo ẩn m: $m^2 - 2(x^2 - x)m + (3x^2 - 2x^3 - 1) = 0$

$\Delta' = (x^2 - x)^2 - (3x^2 - 2x^3 - 1) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} m = x^2 - x - (x^2 - 1) = 1 - x \\ m = x^2 - x + (x^2 - 1) = 2x^2 - x - 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - m \\ 2x^2 - x - (m + 1) = 0 \quad (\Delta = 8m + 9) \end{array}\right.$

Nếu $m < -\frac{9}{8}$, phương trình có nghiệm $x = 1 - m$.

Nếu $m = -\frac{9}{8}$, PT có nghiệm kép $x = \frac{1}{4}$ và nghiệm $x = 1 - m$.

Nếu $m > -\frac{9}{8}$ PT có 3 nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{8m+9}}{4}$ và $x = 1 - m$.

b) Ta có PT $\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x = a^2 + a$

$\Leftrightarrow (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x - x^2) = a^2 + a \Leftrightarrow (x^2 - x)^2 + (x - x^2) = a^2 + a$

Đặt $y = x - x^2$, phương trình trở thành $y^2 + y = a^2 + a$

$$\Leftrightarrow y^2 - a^2 + y - a = 0 \Leftrightarrow (y - a)(y + a + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = a \\ y = -a - 1 \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{ll} x^2 - x + a = 0 & (\Delta_1 = 1 - 4a) \\ x^2 - x - a - 1 = 0 & (\Delta_2 = 4a + 5) \end{array}\right.$

Kết quả

Nếu $a < -\frac{5}{4}$ thì $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$

Nếu $a = -\frac{5}{4}$ thì $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$

Nếu $-\frac{5}{4} < a < \frac{1}{4}$ thì $x = \frac{1 \pm \sqrt{4a + 5}}{2}$ và $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$

Nếu $a = \frac{1}{4}$ thì $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$

Nếu $a > \frac{1}{4}$ thì $x = \frac{1 \pm \sqrt{4a + 5}}{2}$.

Bài toán 4.37:

Định m để phương trình sau có nghiệm

a) $(x - 1)(x + 5)(x - 3)(x + 7) = m$ b) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = m$.

Hướng dẫn giải

a) $(x - 1)(x + 5)(x - 3)(x + 7) = m \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 13)(x^2 + 4x - 21) = m$

Đặt $t = x^2 + 4x - 13 = (x + 2)^2 - 17 \geq -17$

Phương trình trở thành $(t + 8)(t - 8) = m \Leftrightarrow t^2 = m + 64 \geq 0$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \geq -64$.

b) Đặt $t = x + 4$. PT $\Leftrightarrow (t - 1)^4 + (t + 1)^4 = m$

$\Leftrightarrow (t^2 - 2t + 1)^2 + (t^2 + 2t + 1)^2 = m \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 - m = 0$

Đặt $y = t^2$; $y \geq 0$ thì PT $\Leftrightarrow 2y^2 + 12y + 2 - m = 0$ (*).

Phương trình cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm không âm. Nhưng do $S = -6 < 0$ nên phương trình (*) có nghiệm không âm khi và chỉ khi $P = 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Bài toán 4.38:

Tìm tham số để phương trình

a) $x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$.

b) $x^4 - 8x^3 + 19x^2 + ax + 2 = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4, thoả mãn: $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Tìm a và giải phương trình.

Hướng dẫn giải

a) Vì phương trình trùng phương nên $x_4 = -x_1$; $x_3 = -x_2$. Do đó điều kiện ở giả thiết trở thành $x_4 = 3x_3$.

Bài toán trở thành tìm m để phương trình:

$t^2 - 2(m+2)t + m^2 + 8 = 0$ có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$ mà $t_2 = 9t_1$

$\Leftrightarrow 10t_1 = t_1 + t_2 = 2(m+4) \Rightarrow t_1 = \dfrac{m+4}{5}$

Thế t_1 vào ta được: $\dfrac{8(2m^2 - 9m + 7)}{25} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 9m + 7 = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = \dfrac{7}{2}$. Thử lại, cả hai giá trị đều thoả mãn.

b) Theo Viet: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 4$

Mà: $19 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$= x_1x_2 + x_3x_4 + x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4)$

$= x_1x_2 + x_3x_4 + 16$ nên: $x_1x_2 + x_3x_4 = 3$

Mặt khác: $(x_1x_2)(x_3x_4) = x_1x_2x_3x_4 = 2$

Suy ra $\begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ x_3x_4 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1x_2 = 2 \\ x_3x_4 = 1 \end{cases}$

Nếu $x_1x_2 = 1$ thì theo Viet:

$a = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

$= x_3 + x_4 + 2(x_1 + x_2) = 4 + 2.4 = 12$ nên $a = -12$.

Do đó nghiệm $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Nếu $x_3x_4 = 1$ làm tương tự, hoán đổi vai trò của x_1, x_2 với x_3, x_4.

Bài toán 4.39:

Tìm tham số để phương trình:

a) $x + 3(m - 3x^2)^2 = m$ có nghiệm

b) $(x-1)^2 = 2|x - k|$ có bốn nghiệm phân biệt

c) $|2x^2 + x - 3| = 5a - 2 - 12x - 2x^2$ có nghiệm duy nhất

Hướng dẫn giải

a) Đặt $y = m - 3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + y = m$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} x + 3y^2 = m \\ y + 3x^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x^2 = m \\ x - y - 3(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x^2 = m \\ (x-y)(1 - 3x - 3y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x^2 + x - m = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = \dfrac{1-3x}{3} \\ 9x^2 - 3x + 1 - 3m = 0 \end{cases}$$

Do đó điều kiện có nghiệm x là

$$\begin{bmatrix}\Delta_1 = 1+12m \ge 0\\ \Delta_2 = 108m-27 \ge 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}m \ge -\frac{1}{12}\\ m \ge \frac{1}{4}\end{bmatrix} \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{12}.$$

b) $(x-1)^2 = 2|x-k| \Leftrightarrow (x-1)^4 - 4(x-k)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+1-2k)(x^2-4x+1+2k) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x^2 = 2k-1 & (1)\\ x^2-4x+1+2k=0 & (2)\end{bmatrix}$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2k-1}$ nếu $k > \frac{1}{2}$

Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{3-2k}$ nếu $k < \frac{3}{2}$

Các nghiệm này khác nhau nếu $k \neq 1$. Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$, $k \neq 1$.

c) PT $\Leftrightarrow |2x^2+x-3| + 2x^2 + 12x + 2 = 5a$

Đặt $y = |2x^2+x-3| + 2x^2 + 12x + 2$

$$= \begin{cases}4x^2+13x-1 \text{ khi } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; -\infty)\\ 11x+5 \text{ khi } x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]\end{cases}$$

Đồ thị của hàm số y gồm một đoạn thẳng ở giữa và 2 nhánh của parabol:

$y = 4x^2 + 13x - 1$ có đỉnh $S\left(-\frac{13}{8}; -\frac{185}{16}\right)$.

Vì $-\frac{13}{8} < -\frac{3}{2}$ nên phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$5a = -\frac{185}{16} \Leftrightarrow a = -\frac{37}{16}.$$

Bài toán 4.40:

a) Biện luận số nghiệm của phương trình:

$$(x-1)|x-5| = m$$

b) Giải và biện luận phương trình:

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{2a}.$$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm $y = (x-1)|x-5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{khi } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{khi } x < 5 \end{cases}$

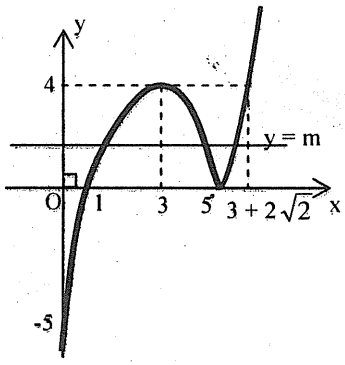
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = m$

Dựa vào đồ thị ta có :

Nếu $m < 0$ hoặc $m > 4$: 1 nghiệm

Nếu $m = 0$ hoặc $m = 4$: 2 nghiệm

Nếu $0 < m < 4$: 3 nghiệm



b) Nếu $a < 0$: vô nghiệm.

Nếu $a = 0$, ta có nghiệm $x = 0$.

Nếu $a > 0$, điều kiện $x \geq a$

$PT \Leftrightarrow 2a + 2\sqrt{x^2 - a^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a - x$

Vì $x \geq a \Rightarrow a - x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} \leq 0 \Rightarrow x = a$

Vậy khi $a < 0$: $S = \varnothing$, khi $a \geq 0$: $S = \{a\}$.

Bài toán 4.41:

Tìm tham số để phương trình có nghiệm:

a) $2x - 4 = 3\sqrt{x - m}$

b) $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$

c) $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = a$.

Giải

a) Với $x \geq m$, đặt $t = \sqrt{x - m}$, $t \geq 0$ thì $t^2 = x - m$

$PT \Leftrightarrow 2(t^2 + m) - 4 = 3t \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 2m - 4 = 0, t \geq 0$

Vì $S = \frac{3}{2} > 0$ nên khi $\Delta = 41 - 16m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{41}{16}$ thì PT có ít nhất một nghiệm dương. Vậy giá trị cần tìm $m \leq \frac{41}{16}$.

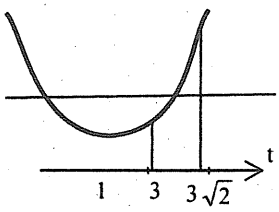
b) Điều kiện $-3 \leq x \leq 6$. Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \geq 0$,

thì $9 \leq t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9 + (3 + x + 6 - x) = 18$

$\Rightarrow 3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $t^2 - 2t - 9 = -2m$ có nghiệm $t \in [3 ; 3\sqrt{2}]$

$f(t) = t^2 - 2t + - 9 = 0$



Vì a >0 và đỉnh $t_I = 1 < 3 < 3\sqrt{2}$ nên điều kiện cần tìm:

$$f(3) \le -2m \le f(3\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{2}-9}{2} \le m \le 3.$$

c) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{1+x} \\ v = \sqrt[3]{1-x} \end{cases}$. Hệ : $\begin{cases} u+v=a \\ u^3+v^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ a^3-3a.uv=2 \end{cases}$

Nếu a = 0 : Hệ vô nghiệm. Nếu $a \neq 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=a \\ uv=\dfrac{a^3-2}{3a} \end{cases}$

Do đó u, v là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - aX + \dfrac{a^3-2}{3a} = 0$

Điều kiện có nghiệm : $a \neq 0$ và $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{8-a^3}{3a} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < a \le 2.$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 4.1: Cho phương trình $x^2 + (m-4)x + m^2 - 3m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Chứng minh: $1 \le \dfrac{mx_1^2}{1-x_1} + \dfrac{mx_2^2}{1-x_2} + 8 \le \dfrac{121}{9}$.

Hướng dẫn

Dùng định lý Viet thì có $\dfrac{mx_1^2}{1-x_1} + \dfrac{mx_2^2}{1-x_2} + 8 = (m-3)^2$

Bài tập 4.2: Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x + 1 = 0$. Chứng minh rằng biểu thức $x_1^{2n} + x_2^{2n}$ có thể biểu diễn ở dạng tổng bình phương của ba số nguyên liên tiếp với mọi n nguyên dương

Hướng dẫn

Đặt $\begin{cases} x_1^n = (2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3} \\ x_2^n = (2+\sqrt{3}) = a_n + b_n\sqrt{3} \end{cases}$ $(a_n, b_n \in Z)$

Thì $x_1^{2n} + x_2^{2n} = (2b_n - 1)^2 + (2b_n)^2 + (2b_n + 1)^2$.

Bài tập 4.3: Giải các phương trình:

a) $|x-9|^9 + |x-10|^{10} = 1$ b) $||x-2| - x| = 2$

Hướng dẫn

a) Xét x = 9, x =10, x <9, x >10 và 9 <x<10.

Kết quả x = 9 hoặc x = 10

b) Kết quả x = 0 hoặc $x \ge 2$.

Bài tập 4.4: Giải phương trình:

a) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 78(x + \frac{1}{x})$

b) $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$

Hướng dẫn

a) Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Kết quả $\frac{\pm 9 \pm \sqrt{77}}{2}$

b) Để ý $(3x^2 - 2x - 1)^3 = [(x^2 + 3x - 4) + (2x^2 - 5x + 3)]^3$

Kết quả $1; -4; \frac{3}{2}; -\frac{1}{3}$

Bài tập 4.5: Giải các phương trình:

a) $8x^3 - 6x - 1 = 0$

b) $(x^2 - 2x + 2)^4 - 20x^2(x^2 - 2x + 2)^2 + 64x^4 = 0$

Hướng dẫn

a) Kết quả $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}, x_2 = \cos\frac{5\pi}{9}, x_3 = \cos\frac{7\pi}{9}$

b) Xem là phương trình bậc 2 theo $t = x^2 - 2x + 2$.

Bài tập 4.6: Giải các phương trình:

a) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$ b) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 2$

Hướng dẫn

a) Đặt $y = \sqrt[3]{2x - 1}$ .Kết quả $x = 1$ hoặc $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) Đặt 2 ẩn phụ. Kết quả $x = 0$.

Bài tập 4.7: Giải các phương trình:

a) $x.\sqrt[3]{35 - x^3}(x + \sqrt[3]{35 - x^3}) = 30$ b) $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

Hướng dẫn

a) Đặt 2 ẩn phụ. Kết quả 2, 3

b) Đặt điều kiện rồi bình phương 2 vế.Kết quả $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Bài tập 4.8: Giải các phương trình:

a) $x^2 + \frac{4x^2}{(x - 2)^2} = 12$ b) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$

Hướng dẫn

a) Dùng hằng đẳng thức tổng bình phương. Kết quả $x = -1 \pm \sqrt{5}$

b) Chia 2 vế cho x^2. Kết quả vô nghiệm.

Bài tập 4.9: Tìm tham số để phương trình:

a) $x^2 + (x+1)^2 = \dfrac{m}{x^2 + x + 1}$ có nghiệm.

b) $x^4 + ax^3 + x^2 + ax + 1 = 0$ có không ít hơn 2 nghiệm âm phân biệt.

Hướng dẫn

a) Đặt $t = x^2 + x + 1$. Kết quả $m \geq \dfrac{3}{8}$

b) Chia 2 vế cho x^2. Kết quả $a > \dfrac{3}{2}$

Bài tập 4.10: Tìm tham số để phương trình

a) $\dfrac{(m^2 - 3m + 3)x - m}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$ có nghiệm

b) $x^4 - 10x^3 - 2(a-11)x^2 + 2(5a+6)x + 2a + a^2 = 0$ vô nghiệm:

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x>1$. Phương trình $(m^2 - 3m + 3)x - m = x - 1$.

Kết quả $m = 1$ hoặc $2 < m < 3$

b) Kết quả $a < -9$.

Bài tập 4.11: Biết phương trình $x^3 - ax^2 + bx - 1 = 0$ có 3 nghiệm dương. Chứng minh rằng: $2a^2(a+1) \geq 9(3b-1)$.

Hướng dẫn

Dùng Viette và bất đẳng thức AM–GM.

Bài tập 4.12: Cho PT: $x^3 - 2002x^2 + 2001bx - 2000a = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của a sao cho tồn tại b để phương trình có 3 nghiệm trên đoạn $[-2002, 2002]$

Hướng dẫn

Kết quả max $a = \dfrac{(2002)^3}{54000}$

Chuyên đề 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Phương pháp chung: Phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đồ thị và dùng định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b ;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b ; D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ trở thành: $\begin{cases} D.x = D_x \\ D.y = D_y \end{cases}$.

Biện luận:

Nếu $D \neq 0$: Hệ có một nghiệm duy nhất $(\frac{D_x}{D} ; \frac{D_y}{D})$.

Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm.

Nếu $D = D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm.

Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

Phương pháp giải: Khử dần các ẩn bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số,....

Hệ có một phương trình bậc nhất

Từ phương trình bậc nhất của hệ, ta chọn rút một ẩn theo ẩn còn lại, thế vào phương trình kia rồi giải phương trình một ẩn.

Hệ đối xứng loại I $\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$,

trong đó F_1 và F_2 là các biểu thức đối xứng đối với x và y.

Phương pháp giải: Đặt $x + y = S$ và $xy = P$ rồi biến đổi về hệ phương trình theo S và P. Giải hệ phương trình đó ta tìm được các nghiệm (S ; P) , chọn các nghiệm thoả mãn điều kiện $S^2 \geq 4P$. Từ đó giải ra nghiệm (x ; y).

Hệ đối xứng loại II $\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(y,x) = 0 \end{cases}$

Phương pháp giải: trừ hai phương trình đưa về phương trình tích số:

$(x - y).A(x, y) = 0.$

Chú ý:

1) Hệ đối xứng loại I và loại II ở trên, nếu $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm của hệ thì (y_o , x_o) cũng là nghiệm.
2) Với một số hệ dạng tích và hiệu (xy và x – y), ta có thể đặt X = x , Y = –y để đưa về hệ đối xứng theo X, Y.

Hệ đẳng cấp (thuần nhất):

Dạng $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d & (1) \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' & (2) \end{cases}$

Cách 1: Công đại số để tạo hệ số tự do ở vế phải bằng 0 rồi biến đổi thành tích số, có thể lập biệt thức Δ để tính ẩn này theo ẩn kia.

Cách 2: Khử một ẩn bậc hai rồi rút thế đưa về phương trình trùng phương.

Cách 3: Xét x = 0, xét $x \neq 0$, đặt y = kx, đưa về giải theo ẩn k. Hoặc ngược lại , xét y = 0, xét $y \neq 0$, và đặt x = ky.

Tổng quát, với hệ đẳng cấp bậc cao, ta thường chọn cách 3 để giải.

Chú ý:

1) Với các hệ khác, ta có thể xem xét đặc điểm riêng biệt của hệ như các dạng tích số, nhân chia các đại lượng thích hợp, biến đổi hằng đẳng thức, nâng giảm bậc đẳng cấp, đưa về $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, dạng tích tổng, nghịch đảo, vòng tròn, đánh giá 2 vế, lượng giác hóa, tọa độ vectơ,...
2) Với hệ có nghiệm duy nhất (x ;y;..), giải điều kiện cần bằng cách thử đổi dấu một số ẩn, đổi chỗ các ẩn để tìm ra nghiệm thứ hai (–x; y;...); (x; –y;...); (y; x;...) ; ... từ đó đồng nhất các nghiệm để tìm ra giá trị tham số.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 5.1:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 12 \\ \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-z}{3} = \dfrac{z-2}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y - z - t = 8 \\ 2x - 2y + z + 2t = -8 \\ x + 3y - 2z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 3t = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-z}{3} = \dfrac{z-2}{2} = t \Rightarrow x = 1 + 5t , y = 2 + 3t , z = 2 + 2t.$

Thế vào phương trình đầu thì được t = 1 nên nghiệm là (6 ; 5 ; 4).

b) Từ phương trình đầu, ta có: t = 3x + y – z –8

Thế vào 3 phương trình sau, giải được (x ; y ; z) = (1 ; 2 ; 0)

Do đó t = –3. Vậy hệ có nghiệm (x ; y ; z ; t) = (1 ; 2 ; 0 ; –3)

Bài toán 5.2:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 & (1) \\ x^2 + 3y^2 - xy + 2x - 5y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x+y)^2 - xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Từ (1) $\Rightarrow x = 4 - 2y$, thế vào (2):

$(4-2y)^2 + 3y^2 - (4-2y)y + 2(4-2y) - 5y = 0$

$\Leftrightarrow 9y^2 - 29y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = \frac{20}{9}$.

Với $y = 1 \Rightarrow x = 2$; $y = \frac{20}{9} \Rightarrow x = -\frac{4}{9}$.

Vậy hệ có hai nghiệm là : (2 ; 1) và $(-\frac{4}{9} ; \frac{20}{9})$.

b) Hệ tương đương: $\begin{cases} 2(x+y)^2 - xy = 1 & (1) \\ xy(x+y) = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (2): Xét $x = 0$ thì (1): $2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Xét $y = 0$ thì (1): $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Xét $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$ thì (1): $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy: $S = \{(1;-1),(-1;1),(0;\frac{1}{\sqrt{2}}),(0;-\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}};0),(-\frac{1}{\sqrt{2}};0)\}$.

Bài toán 5.3:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $S = x + y$, $P = xy$.

Hệ : $\begin{cases} S^2 - 2P + S = 8 \\ P + S = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 3S - 18 = 0 \end{cases}$

Ta có $S = 3$, $P = 2$ hoặc $S = -6$, $P = 11$.

Vì điều kiện $S^2 \geq 4P$ nên chọn $S = 3$, $P = 2$.

Do đó x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0$

$\Leftrightarrow X = 1$ hoặc $X = 2$. Vậy $S = \{(1 ; 2) , (2 ; 1)\}$.

b) Đặt $X = -x$, $Y = y$, ta có hệ:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + X + Y = 2 \\ -XY - X - Y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 + X + Y = 2 \\ XY + X + Y = 1 \end{cases}$$

Đặt $S = X + Y$, $P = XY$, hệ: $\begin{cases} S^2 - 2P + S = 2 \\ P + S = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 1 - S \\ S^2 + 3S - 4 = 0 \end{cases}$

Do đó $S = 1$; $P = 0$ hoặc $S = -4$, $P = 5$ (loại)

Từ đó có hai nghiệm $(x ; y)$ bằng $(0 ; 1)$ và $(-1 ; 0)$.

Bài toán 5.4:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 7 \\ x(x + 1)y(y + 1) = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + x^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $X = x(x + 1)$; $Y = y(y + 1)$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} X + Y = 7 \\ XY = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} X = 4 \\ Y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \\ y^2 + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 8 nghiệm là:

$$(-1 \pm \sqrt{13} ; -1 \pm \sqrt{17}) ; (-1 \pm \sqrt{17} ; -1 \pm \sqrt{13}) .$$

b) Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Hệ: $\begin{cases} S^4 - 4PS^2 + 3P^2 = 481 \\ S^2 - P = 37 \end{cases}$

Suy ra $S^2 = P + 37$, giải ra: $\begin{cases} P = 12 \\ S = 7 \end{cases}$ hay $\begin{cases} P = 12 \\ S = -7 \end{cases}$

Nên x; y là hai nghiệm của các phương trình:

$X^2 - 7X + 12 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 3$ hoặc $X_2 = 4$

$X^2 + 7X + 12 = 0 \Leftrightarrow X_1 = -3$ hoặc $X_2 = -4$

Vậy hệ có 4 nghiệm là: $(3 ; 4)$; $(4 ; 3)$; $(-3 ; -4)$; $(-4 ; -3)$.

Bài toán 5.5:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x - 3y = 4\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ y - 3x = 4\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện x, y ≠ 0. Hệ tương đương:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ y^2 - 3xy = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ x^2 - y^2 + 4(x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ (x - y)(x + y + 4) = 0 \end{cases}$$

Xét x = y thì $2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc x = –2. Chọn x = y = –2

Xét x + y + 4 = 0 ⇒ y = –4 – x thì $x^2 + 3x(4 + x) = -4(4 + x)$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow (2x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -2$

Vậy hệ có nghiệm (–2 ; –2).

b) Ta có: $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ \left(x^3 - y^3\right) + 5(x - y) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ (x - y)(x^2 - xy + y^2 + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ (x - y)\left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 5\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 - 11x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 11) = 0 \end{cases}$$

Do đó hệ có 4 nghiệm: (0 ; 0) , $(-\sqrt{11}; -\sqrt{11})$, $(\sqrt{11}; \sqrt{11})$

Bài toán 5.6:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 22 \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x - y)^2 + y^2 = 25 \\ (x + y)^2 + x^2 = 26 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hệ tương đương: $\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 22 & (1) \\ (x - 2y)(x - 3y) = 0 & (2) \end{cases}$

Xét x = 2y thì (1): $8y^2 + 2y^2 + y^2 = 22 \Leftrightarrow y^2 = 2$

Do đó hệ có 2 nghiệm $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Xét x = 3y thì (1): $18y^2 + 3y^2 + y^2 = 22 \Leftrightarrow y^2 = 1$

Do đó hệ có 2 nghiệm (–3 ; –1) , (3 ; 1). Vậy hệ có 4 nghiệm trên.

b) Xét x = 0 thì $\begin{cases} 2y^2 = 25 \\ y^2 = 26 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Xét x ≠ 0, đặt y = kx. Chia vế theo vế suy ra:

$$27k^2 - 102k - 24 = 0 \Leftrightarrow k = 4 \text{ hoặc } k = -\frac{2}{9}.$$

Từ đó, giải ra 4 nghiệm:

$$(1\,;4)\,;(-1\,;-4)\,;\left(\frac{9}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{9}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Bài toán 5.7:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=97 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8(x^3+y^3)+x^3y^3=-64 \\ 2(x+y)+xy=-4 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $S = x + y$, $P = xy$ thì $S = 5$ và

$97 = (x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = (S - 2P)^2 - 2P^2$ nên:

$P^2 - 50P + 164 = 0 \Leftrightarrow P = 6$ hoặc $P = 44$. Chọn $P = 6$.

nên $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$, ta được hai nghiệm (2 ; 3) và (3 ; 2).

b) Hệ có thể viết: $\begin{cases} (x^3+8)(y^3+8)=0 \\ (x+2)(y+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm: $\begin{cases} x=-2 \\ y=t \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=t \\ y=-2 \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

Bài toán 5.8:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+xy=2 \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta nâng lên bậc 5 cho phương trình thứ 2:

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=(x^2+y^2)\left(x^3+y^3\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ (x^2y^2)(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=1 \\ (x+y)x^2y^2=0 \end{cases}$$

Xét $x = 0$ thì $y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$. Xét $y = 0$ thì $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$.

Xét $x + y = 0$ thì $0 = 1$ (loại)

Vậy phương trình có 2 nghiệm (1 ; 0) và (0 ; 1).

b) Hệ : $\begin{cases} x^2+xy=2 \\ 2x^2-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-y^2=1 \\ x^2+xy=2(2x^2-y^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-y^2=1 \\ 3x^2-xy-2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-y^2=1 \\ (x-y)(3x+2y)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ y^2 = -9 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ có 2 nghiệm : (–1 ; 1) và (1 ; 1).

Bài toán 5.9:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x - y) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: x , y, x – y ≠ 0. Hệ: $\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7 \\ (x - y)xy = 2 \end{cases}$

Do đó $\frac{x^2 + xy + y^2}{xy} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} = \frac{7}{2}$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì có : $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ hoặc $t = \frac{1}{2}$

Do đó: $\begin{cases} x = 2y \\ y^3 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y = 2 \\ x^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

b) Xét x = 0 thì y = 0, xét y = 0 thì x = 0

Xét xy ≠ 0 thì hệ $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x & (1) \\ \frac{2y(x^2 - y^2)}{x(x^2 + y^2)} = \frac{3x}{10y} & (2) \end{cases}$

Đặt x = ty, ta có:(2) $\Leftrightarrow \frac{2y(t^2y^2 - y^2)}{ty(t^2y^2 + y^2)} = \frac{3ty}{10y} \Leftrightarrow \frac{2(t^2 - 1)}{t(t^2 + 1)} = \frac{3t}{10}$

$\Leftrightarrow 3t^4 - 17t^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$ hoặc $t = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}$

Thế lần lượt x = 2y , x = –2y , $x = \frac{\sqrt{15}}{3}y$, $x = -\frac{\sqrt{15}}{3}y$, ta giải được 5 nghiệm là: (0 ; 0) , (2 ; 1) , (–2 ; –1) , $\left(\sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}}; \frac{3\sqrt{15}}{4}\right), \left(-\sqrt{\frac{5\sqrt{15}}{4}}; -\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$.

Bài toán 5.10:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(2 - 8y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^3 + y^2x + 3x - 6y = 0 \quad (1) \\ x^2 + xy = 3 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hệ: $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ 8x^3 - 16y^3 = 24(x^2 - 4y^2) - 32(2 - 8y) \end{cases}$

Trừ vế theo vế thì có $(x-2)^4 = (y-4)^4$ nên

Xét $x - 2 = y - 4 \Leftrightarrow x = y - 2$ thế vào được

$$y^3 - 3y^2 + 4y + 28 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(y^2 - 5y + 14) = 0 \Leftrightarrow y + 2 = 0$$

Từ đó có nghiệm $(-4;-2)$.

Xét $x - 2 = 4 - y \Leftrightarrow x = 6 - y$ thế vào được

$$y^3 - 9y^2 + 36y - 44 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2 - 7y + 22) = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0$$

Từ đó có nghiệm $(4; 2)$. Vậy hệ có 2 nghiệm $(-4;-2)$ và $(4;2)$.

b) Ta có $x \neq 0$, $(2) \Leftrightarrow y = \dfrac{3 - x^2}{x}$ và $x + y = \dfrac{3}{x}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^2(x + y) - 6(x + y) + 9x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9 - 6x^2 + x^4}{x^2} - 6\right).\frac{3}{x} + 9x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 12x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Suy ra $y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Vậy hệ có nghiệm: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài toán 5.11:

Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 40 \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \quad (1) \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = \dfrac{x}{y}$, $b = xy$, $(a, b \neq 0) \Rightarrow ab = x^2 > 0$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} a^2b + b = 40 \\ \dfrac{b}{a^2} + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(a^2 + 1) = 40 \\ \dfrac{b(a^2 + 1)}{a^2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(a^2 + 1) = 40 \\ a^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a = \pm 2 \end{cases}$$

Chọn a = 2, b = 8, ta tìm được hai cặp nghiệm x, y tương ứng là (x, y) = (4, 2), (–4, –2).

b) (1) nhân y và cộng (2) nhân x, ta có:

$$2xy + \frac{(3x - y)y - (x + 3y)x}{x^2 + y^2} = 3y \Leftrightarrow 2xy - 1 = 3y$$

Từ đó suy ra $x = \frac{3y + 1}{2y}$ nên :

$$y\left[\left(\frac{3y+1}{2y}\right)^2 + y^2\right] - \left(\frac{3y+1}{2y}\right) - 3y = 0 \Leftrightarrow 4y^4 - 3y^2 - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Hệ có hai nghiệm (2; 1) và (1; –1).

Bài toán 5.12:

Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 2 \\ z + zx + x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1 \\ \frac{xz}{x+z} = 2 \\ \frac{yz}{y+z} = 3 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hệ tương đương $\begin{cases} x + xy + y + 1 = 2 \\ y + yz + z + 1 = 3 \\ z + zx + x + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 3 \\ (z+1)(x+1) = 4 \end{cases}$

nên: $((x + 1)(y + 1)(z + 1))^2 = 24 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1)(z + 1) = \pm 2\sqrt{6}$

Do đó: $\begin{cases} z + 1 = -\sqrt{6} \\ x + 1 = -\frac{2}{3}\sqrt{6} \\ y + 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z + 1 = \sqrt{6} \\ x + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{6} \\ y + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{2}{3}\sqrt{6} \\ y = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ z = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{6} \\ y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ z = -1 + \sqrt{6} \end{cases}$

b) Điều kiện x, y, z đều khác 0, khi đó:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1 \\ \dfrac{xz}{x+z}=2 \\ \dfrac{yz}{y+z}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Suy ra: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{12}$ nên $\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{12}-1=-\dfrac{1}{12} \Rightarrow z=-12$

Tương tự, ta có: $y=\dfrac{12}{5}$, $x=\dfrac{12}{7}$. Vậy hệ có nghiệm $\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{12}{5};-12\right)$.

Bài toán 5.13:

Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 & (1) \\ y^2+yz+z^2=28 & (2) \\ z^2+zx+x^2=21 & (3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3+x(y-z)^2=2 \\ y^3+y(z-x)^2=30 \\ z^3+z(x-y)^2=16 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Trừ (1) và (2), ta có:

$x^2-z^2+xy-yz=-21 \Leftrightarrow (x-z)(x+y+z)=-21$

Trừ (2) cho (3), ta có:

$y^2-x^2+yz-zx=7 \Leftrightarrow (y-x)(x+y+z)=7$

Suy ra $(x-z+3y-3x)(x+y+z)=0$

$\Rightarrow 2x-3y+z=0 \Rightarrow z=3y-2x$

Thay $z=3y-2x$ vào phương trình (3) ta có:

$(3y-2x)^2+(3y-2x)x+x^2=21 \Leftrightarrow x^2-3xy+3y^2=7$

Và (1) suy ra $2y^2-4xy=0 \Leftrightarrow y(y-2x)=0 \Leftrightarrow y=0, y=2x$

Nếu $y=0$, suy ra $x=\pm\sqrt{7}$, $z=\mp 2\sqrt{7}$.

Từ đó ta được các nghiệm: $(x;y;z)=(-\sqrt{7};0;2\sqrt{7}), (\sqrt{7};0,-2\sqrt{7})$

Nếu $y=2x$, suy ra $x^2=1$, từ đó $x=\pm 1$, $y=\pm 2$.

Thay $(x;y)=(1;2), (-1;-2)$ vào các phương trình ta được z tương ứng bằng 4 và –4. Nghiệm của hệ là:

$(x;y;z)=(-\sqrt{7};0;2\sqrt{7}), (\sqrt{7};0;-2\sqrt{7}), (1;2;4), (-1;-2;-4)$

b) Ta có thể viết các phương trình của hệ dưới dạng

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2-2yz)=2 \\ y(x^2+y^2+z^2-2zx)=30 \\ z(x^2+y^2+z^2-2xy)=16 \end{cases}$$

Ta có: $30 + 2 - 2.16 = 0$ nên $(x + y - 2z)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

Vì (0; 0; 0) không phải là nghiệm của hệ nên:

$$x + y - 2z = 0 \Rightarrow y = 2z - x$$

Do đó $\begin{cases} x^3 + x(z-x)^2 = 2 \\ z^3 + z(2x-2z)^2 = 16 \end{cases}$ nên $(2x - z)(8x^2 - 6xz + 5z^2) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2x$ (do $8x^2 - 6xz + 5z^2 = 5x^2 + 3(x - z)^2 + 2z^2 \geq 0$)

nên $2x^3 = 2$, suy ra $x = 1$. Từ đó $z = 2$, $y = 3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = (1; 3; 2)$.

Bài toán 5.14:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + xy + y = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (2) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 & (3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 = y + 1 & (1) \\ y^2 = z + 1 & (2) \\ z^2 = x + 1 & (3) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Từ phương trình thứ (2) suy ra:

$x^2 \leq 1$, $y^2 \leq 1$, $z^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$

Lấy (2) trừ cho (3) ta có: $x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) = 0$

Vì $1 - x \geq 0$, $1 - y \geq 0$, $1 - z \geq 0$, do đó

$x^2(1 - x) = y^2(1 - y) = z^2(1 - z) = 0$

Từ đó 3 nghiệm của hệ là: (1 ; 0 ; 0) ; (0 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 1).

b) Từ (1), (2), (3) suy ra $x, y, z \geq -1$

Nếu $x > 0$, từ (3) suy ra $z^2 > 1 \Rightarrow z > 1$ (do $z \geq -1$), như vậy $z > 0$ và từ (2) suy ra $y > 0$. Vậy nếu $x > 0$ thì $y > 0$, $z > 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$, từ (2) và (3) ta được $z + 1 \geq x + 1 \Rightarrow z \geq x \Rightarrow z = x$.

Từ (1), (3) ta được $y + 1 \geq x + 1 \Rightarrow y \geq x \Rightarrow x = y$

Vậy $x = y = z$. Thay vào (1) ta có $x^2 - x - 1 = 0$.

Suy ra $x = y = z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì từ (1) suy ra $-1 \leq y \leq 0$, và từ (2) suy ra $-1 \leq z \leq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Nếu $x \leq y \leq z$ thì $x^2 \geq y^2 \geq z^2$, từ đây và từ hệ phương trình suy ra $y \geq z \geq x$. Do đó $y = z$ nên $x = y$. Tương tự, trường hợp $x \leq z \leq y$, ta cũng suy ra $x = y = z$. Thay vào hệ, ta tính được

$x = y = z = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy nghiệm $(x, y, z) = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài toán 5.15:

Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2 = 50 & (1) \\ x^2-y^2+z^2-t^2 = -24 & (2) \\ xz = yt & (3) \\ x-y+z+t = 0 & (4) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Nếu: xyz = 0 thì được nghiệm (x; 0; 0), (0; y; 0), (0; 0; z)

Nếu: $xyz \neq 0$. Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$

Hệ: $\begin{cases} \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)^2 = 3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2 = 4+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2} \\ \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2 = 5+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)^2 = 3+a+a^2 \\ (c+a)^2 = 4+b+b^2 \\ (a+b)^2 = 5+c+c^2 \end{cases}$

Cộng từng vế các phương trình, rút gọn ta được:

$$(a+b+c)^2 - (a+b+c) - 12 = 0$$

$\Leftrightarrow a+b+c = 4$ hay $a+b+c = -3$.

Từ đó có 2 nghiệm: $\begin{cases} x = \frac{9}{13} \\ y = \frac{3}{4} \\ z = \frac{9}{11} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -\frac{5}{16} \\ y = -1 \\ z = -\frac{5}{4} \end{cases}$

b) Cộng (1) và (2) ta có $x^2+z^2 = 13$

Trừ (1) và (2) ta có $y^2+t^2 = 37$

Từ (4) suy ra $x+z = y-t \Rightarrow x^2+z^2+2xz = y^2+t^2-2yt$

$$\Rightarrow xz+yt = 12$$

Mà xz = yt nên xz = yt = 6

$\Rightarrow (x+z)^2 = x^2+z^2+2xz = 25 \Rightarrow x+z = \pm 5$

Tương tự $(y-t)^2 = y^2+t^2-2yt = 25 \Rightarrow y-t = \pm 5$

Kết hợp với điều kiện x + z = y – t, ta tìm được 8 bộ nghiệm là:

(x; y; z; t) = (2; –1; 3; –6), (2; 6; 3; 1); (3; –1; 2; –6)(3; 6; 2; 1),

(–2; 1; –3; 6), (–2; –6; –3; –1); (–3; 1; –2; 6), (–3; –6; –2; –1) .

Thử lại đúng.

Bài toán 5.16:

Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = (z-1)^2 \\ z = (t-1)^2 \\ t = (x-1)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-1)^4.(y-2)^2.z^3.t^6 = 1024 \\ 4x^2 + z^3 + 16y + t^6 = 8x + 76 \\ x \ge 1;\ y \ge 2;\ z \ge 0,\ t \ge 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Do hệ phương trình không đổi qua phép hoán vị vòng quanh nên có thể giả sử x = min(x, y, z). Từ hệ ta suy ra z, y, z, t ≥ 0.

Nếu x > 1 thì x, y, z, t > 1.

$y \ge x \Rightarrow (z-1)^2 \ge (y-1)^2,\ z \ge y \Rightarrow (t-1)^2 \ge (z-1)^2$

$t \ge 2 \Rightarrow (x-1)^2 \ge (t-1)^2 \Rightarrow x \ge t$ nên x = y = z = t.

Do đó: $x = (x-1)^2$ ta được nghiệm $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Nếu $1 \ge x \ge 0$ thì $0 \ge x - 1 \ge -1 \Rightarrow 1 \ge (x-1)^2 \Rightarrow 1 \ge t \ge 0$

$\Rightarrow 0 \ge t - 1 \ge -1 \Rightarrow 1 \ge (t-1)^2 \Rightarrow 1 \ge z \ge 0$

$\Rightarrow 0 \ge z - 1 \ge -1 \Rightarrow 1 \ge (z-1)(2 \Rightarrow 1 \ge y \ge 0$

Do đó $1 \ge x, y, z, t \ge 0$

$z \ge x \Rightarrow (t-1)^2 \ge (y-1)^2 \Rightarrow y \ge t \Rightarrow (z-1)^2 \ge (x-1)^2$

$\Rightarrow x \ge z \Rightarrow (y-1)^2 \ge (t-1)^2 \Rightarrow t \ge y \Rightarrow x - z,\ y = t$

nên $\begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases}$. Giải ra nghiệm x = 1, y = 0, $x = y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy: $x = y = z = t = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x = y = z = t = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

x = z = 0, y = t = 1; x = z = 1, y = t = 0.

b) Đặt x – 1 = u; y – 2 = v. Hệ thành $\begin{cases} u^4v^2z^3t^6 = 1024 & (1) \\ 4u^2 + 16v + z^3 + t^6 = 48 & (2) \\ u \ge 0;\ v \ge 0;\ z \ge 0;\ t \ge 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 2u^2 . 2u^2 . 8v . 8v . z^3 . t^6 = 2^{18}$ (3)

Theo bất đẳng thức AM–GM:

Vế trái của $(3) \le \left(\dfrac{4u^2 + 16v + z^3 + t^6}{6}\right)^6 = \left(\dfrac{48}{6}\right)^6 = 8^6 = 2^{18}$

Theo (3), dấu "=" phải xảy ra và dẫn tới $2u^2 = 8v = z^3 = t^6 = t_0$

Từ (2): $2t_0 + 2t_0 + t_0 + t_0 = 48 \Rightarrow t_0 = 8$

$\Rightarrow u = 2, v = 1, z = 2, t = \sqrt{2}$. Vậy $x = 3, y = 3, z = 2, t = \sqrt{2}$.

Bài toán 5.17:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3(1+3y) = 8 \\ x(y^3 - 1) = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Do $x \neq 0$ nên hệ: $\begin{cases} \dfrac{8}{x^3} - 3y = 1 \\ y^3 - 3\dfrac{2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 3y = 1 \\ y^3 - 3t = 1 \end{cases} \left(t = \dfrac{2}{x}\right)$

suy ra $(t - y)(t^2 + ty + y^2 + 3) = 0$ nên $t = y$ do đó $y^3 - 3y = 1$ (1)

Xét $-2 \leq y \leq 2$, đặt $t = 2\cos a$

(1): $8\cos^3 a - 6\cos a = 1$ hay $\cos 3a = \dfrac{1}{2}$

Từ đó giải và chọn 3 nghiệm a là $\dfrac{\pi}{9}; \dfrac{5\pi}{9}; \dfrac{7\pi}{9}$

Vì (1) là phương trình bậc 3 nên có đúng 3 nghiệm y là

$$2\cos\frac{\pi}{9}; 2\cos\frac{5\pi}{9}; 2\cos\frac{7\pi}{9}$$ suy ra 3 nghiệm (x,y) cuả hệ.

b) Từ hệ phương trình suy ra $x, y, z \neq \pm 1$. Hệ tương đương:

$$\begin{cases} 2x = (1 - x^2)y \\ 2y = (1 - y^2)z \\ 2z = (1 - z^2)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}$$

Đặt $x = \tan t$ thì $y = \tan 2t$; $z = \tan 4t$; $x = \tan 8t$.

Ta được phương trình $\tan 8t = \tan t \Leftrightarrow t = \dfrac{k\pi}{7}$. Với $k = 0,1,..,6$

các nghiệm t này thích hợp nên suy ra các nghiệm x, y, z.

Bài toán 5.18:

Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 3(x+\frac{1}{x}) = 4(y+\frac{1}{y}) = 5(z+\frac{1}{z}) \\ xy+yz+zx = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2 = -y(x+z) \\ x^2+x+y = -2yz \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz = 2x+4z+2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hệ tương đương $\begin{cases} \dfrac{x}{3(x^2+1)} = \dfrac{y}{4(y^2+1)} = \dfrac{1}{5(z^2+1)} \\ xy+yz+zx = 1 \end{cases}$

Nếu (x,y,z) là nghiệm thì x, y, z cùng dấu và (–x,–y,–z) cũng là nghiệm. Xét x,y,z > 0, đặt $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$, $z = \tan\frac{C}{2}$, $0^\circ < A, B, C < 180^\circ$ thì:

$$xy + yz + zx = 1 \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B+C}{2} \Rightarrow A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{x}{3(x^2+1)} = \frac{y}{4(y^2+1)} = \frac{1}{5(z^2+1)} \Rightarrow \frac{\sin A}{3} = \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin C}{5}$$

Xét ΔABC có cạnh a,b,c thì: $\frac{a^2}{3^2} = \frac{b^2}{4^2} = \frac{c^2}{5^2}$ nên:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \text{vuông tại C} \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1)$.

b) Hệ: $\begin{cases} x(x+y)+y(y+z) = 0 \\ x(x+1)+y(2z+1) = 0 \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2 = (x+1)^2+(2z+1)^2 \end{cases}$

Xét $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x + y; y + z)$, $\vec{w} = (x + 1; 2z + 1)$

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 0 \\ \vec{u}.\vec{w} = 0 \\ 4\left|\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{w}\right|^2 \end{cases}$

Xét $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

Xét $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{w}, \vec{v}$ cùng khác $\vec{0}$ hoặc cùng bằng $\vec{0}$

Nếu $\vec{w} = \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 2z+1=0 \\ x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \\ z=x=-y \end{cases}$ (VN)

Nếu $\vec{w}, \vec{v}$ cùng khác $\vec{0} \Rightarrow \vec{w}, \vec{v}$ hai vectơ cùng phương

Với $\vec{w} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2x+2y \\ 2z+1=-2y-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$

Với $\vec{w} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-2x-2y \\ 2z+1=-2z-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-1-3x}{2} \\ z=\frac{3x}{4} \end{cases}$

Do đó: $5x^2 = 2(3x+1)^2 - 7x + 21x^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x + 2 = 0$ (VN)

Vậy nghiệm $\left(0; 0; -\frac{1}{2}\right), \left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Bài toán 5.19:

Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} |y+1| = x-1 \\ y = 3x-12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x+y| + x + 1 = 0 \quad (1) \\ 2|x| + |y| = 2x + 2 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\begin{cases} |y+1| = x-1 \\ y = 3x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y+1| = x-1 \\ 3x-y=12 \end{cases}$

Nếu $y \geq -1$: Hệ: $\begin{cases} y+1=x-1 \\ 3x-y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3>-1 \end{cases}$

Nếu $y < -1$: Hệ: $\begin{cases} -y-1=x-1 \\ 3x-y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 3x-y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3<-1 \end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm (5 ; 3) và (3; –3).

b) Từ (1) $\Rightarrow x + 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq -1$.

(2) $\Rightarrow 2x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ do đó $x = -1$.

Thế x = –1 vào hệ $\begin{cases}|-1+y|=0\\2+|y|=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\|y|=-2\end{cases}$: vô nghiệm.

Vậy hệ cho vô nghiệm.

Bài toán 5.20: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}|x+y|=9\\|x|+|y|=9\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+2xy-3y^2=0 & (1)\\x\,|x|+y\,|y|=-2 & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Từ hệ suy ra $|x| + |y| = |x + y|$ nên $xy \geq 0$

Xét $x \geq 0, y \geq 0$ thì hệ phương trình: $x + y = 9$, do đó hệ có vô số nghiệm $x = t$, $y = 9 – t$ với $0 \leq t \leq 9$.

Xét $x \leq 0, y \leq 0$ thì hệ tương đương $x + y = –9$, do đó hệ có vô số nghiệm $x = t$, $y = –9 – t$ với $–9 \leq t \leq 0$.

b) Xét $y = 0$ từ (1) $\Rightarrow x = 0$ không thỏa (2)

Xét $y \neq 0$, đặt $x = ky$. Ta có hệ $\begin{cases}y^2(k^2+2k-3)=0 & (3)\\y\,|y|(k\,|k|+1)=-2 & (4)\end{cases}$

Vì $y \neq 0$ nên từ (3) $\Rightarrow k^2 + 2k – 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1$ hoặc $k = –3$

Khi $k = 1$ từ (4) $\Rightarrow y\,|y| = – 1 \Leftrightarrow y = –1 \Rightarrow x = –1$

Khi $k = 3$ từ (4) $\Rightarrow y\,|y| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy hệ có hai nghiệm : $(–1 ; –1)$; $(-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2})$.

Cách khác: (1) $\Leftrightarrow$ $(x – y)(x + 3y) = 0$.

Bài toán 5.21:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}x^2+y^2-xy=13\\x+y-\sqrt{xy}=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\x^2+y^2=128\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\begin{cases}u=x+y\\v=\sqrt{xy}\end{cases}$ $(v \geq 0)$, ta được hệ phương trình:

$\begin{cases}u^2-3v^2=13\\u-v=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u-v=3\\u^2-9u+20=0\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $u = 5, v = 2$ hoặc $u = 4, v = 1$

Do đó: $\begin{cases} x+y=5 \\ \sqrt{xy}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{xy}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=1 \end{cases}$

Từ đó, hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là:

$$(4;1)\ ;\ (1;4)\ ;\ (2-\sqrt{3}\ ;2+\sqrt{3})\ ;\ (2+\sqrt{3}\ ;\ 2-\sqrt{3})\ .$$

b) Điều kiện : $x+y \geq 0$, $x-y \geq 0$.Đặt $u = \sqrt{x+y}, v = \sqrt{x-y}$ với u, v > 0. Hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ u^4+v^4=256 \end{cases}$$

Ta có: $256 = u^4 + v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 = (4^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2$

$\Rightarrow uv(uv-32)=0$

Xét uv = 0 thì u = 0 , v = 4 hoặc u = 4 , v = 0

nên x = 8 , y = –8 hoặc x = 8 , y = 8

Xét uv = 32 thì u , v là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 4X + 32 = 0\ (\Delta < 0)$$

Vậy hệ có 2 nghiệm là: (8 ; –8) và (8 ; 8).

Bài toán 5.22:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{2-y}=\sqrt{3} \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{2-x}=\sqrt{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y}=xy^3+2x^2y \\ \sqrt{x+9}+\sqrt{y+9}=6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $-1 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$. Trừ vế theo vế:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+\sqrt{2-y}-\sqrt{2-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{x-y}{\sqrt{2-y}+\sqrt{2-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{2-y}+\sqrt{2-x}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y.$

Thế vào phương trình đầu $\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{(x+1)(2-x)}=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2-x)}=0.$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$. Do đó $y=-1$ hoặc $y=2$ (chọn)

Vậy hệ có 2 nghiệm (–1 ; –1) , (2 ; 2) .

b) Điều kiện: $x \geq 0$, $y \geq 0$.Do đó $\sqrt{x+9}+\sqrt{y+9} \geq 3+3=6$ nên từ phương trình sau thì x = y = 0. Thế vào phương trình đầu 0 = 0 : đúng

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (0 ; 0).

Bài toán 5.23:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+\sqrt{y^2-x^2}=12-y \quad (1) \\ x.\sqrt{y^2-x^2}=12 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \geq 0$, $y \geq 0$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ x+y+2\sqrt{xy}=16 \end{cases}$

Do đó $\sqrt{2(x^2+y^2)}=x+y \Rightarrow 2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy$

$\Rightarrow x^2-2xy+y^2=0 \Rightarrow (x-y)^2=0 \Rightarrow x=y$

nên $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \Rightarrow 2\sqrt{x}=4 \Rightarrow x=4$ nên $y=4$ (thoả)

Vậy hệ có nghiệm: (4 ; 4).

b) Điều kiện $y^2 \geq x^2$, $x > 0$

Từ (1) $\Rightarrow x^2+y^2-x^2+2x\sqrt{y^2-x^2}=144-24y+y^2$

$\Rightarrow 2x\sqrt{y^2-x^2}=144-24y$

và từ (2) thì được : $12=144-24y \Rightarrow y=5$

Do đó (2): $x\sqrt{25-x^2}=12 \Leftrightarrow x^2(25-x^2)=144$

$\Leftrightarrow x^4-25x^2+144=0 \Leftrightarrow x^2=9$ hoặc $x^2=16$

Từ điều kiện thì chọn được 2 nghiệm: (3 ; 5) và (4 ; 5).

Bài toán 5.24:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y}=\sqrt[3]{x+y} \quad (1) \\ \sqrt{x-y}=\sqrt[3]{x-y-12} \quad (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x+y)=3\left(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x+y \geq 0$, $x-y \geq 12$.

Từ phương trình sau ta có: $(x-y)^3=(x-y-12)^2$

$\Rightarrow (x-y)^3-(x-y)^2+24(x-y)-144=0$

$\Rightarrow (x-y)[(x-y)^2+3(x-y)+36]=0$

vì $(x-y)^2+3(x-y)+36>0$; $\forall x$, $\forall y$ nên $x-y=4$ (loại)

Vậy hệ vô nghiệm.

b) Đặt $u=\sqrt[3]{x}$, $v=\sqrt[3]{y}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(u^3+v^3)=3(u^2v+uv^2 \\ u+v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left[(u+v)^3-3uv(u+v)\right]=3uv(u+v) \\ u+v=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9uv(u+v)=2(u+v)^3 \\ u+v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=6 \\ u.v=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=64 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x=64 \\ y=8 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (8 ; 64) , (64 ; 8).

Bài toán 5.25:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x(x^2+y^2)=y^4(y^2+1) \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{2x-1}-y(1+2\sqrt{2x-1})=-8 \\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $4x + 5 \geq 0$.

Ta có $x(x^2+y^2)=y^4(y^2+1) \Leftrightarrow x^3-y^6+y^2(x-y^2)=0$

$$\Leftrightarrow (x-y^2)(x^2+y^4+xy^2+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y^2)\left[(x+\frac{1}{3}y^2)^2+\frac{3}{4}y^4+y^2\right]=0 \Leftrightarrow x=y^2 \text{ hay } x=y=0$$

Với x = y = 0: loại.

Với $x = y^2$ thì phương trình sau: $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6$

Vì vế trái là hàm đồng biến nên có nghiệm duy nhất x =1.

Vậy hệ có 2 nghiệm (1, 1) và (1, –1).

b) Điều kiện $2x - 1 \geq 0$. Đặt $t=\sqrt{2x-1}$, $t \geq 0$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} t-y(1+2t)=-8 \\ y^2+yt+t^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-y)-2ty=-8 \\ (t-y)^2+3ty=12 \end{cases}$

Suy ra $2(t-y)^2+3(t-y)=0 \Leftrightarrow t-y=0$ hay $t-y=\frac{-3}{2}$

Với t = y thì có $t = y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

Với $y = t + \frac{3}{2}$ thì có $4t^2 + 6t – 13 = 0$, chọn $t=\frac{-3+\sqrt{61}}{4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=\frac{-3+\sqrt{61}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{43-3\sqrt{61}}{16}.$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(\frac{5}{2};2)$ và $(\frac{43-3\sqrt{61}}{16};\frac{3+\sqrt{61}}{4})$.

Bài toán 5.26:

Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=4 \\ \left(3+\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện x, y $\in [0, \frac{1}{2}]$. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}+\frac{2}{\sqrt{1+2x^2}\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{4}{1+2xy}$$

Ta có x, y $\in [0, \frac{1}{2}]$ nên

$$\frac{2}{\sqrt{1+2x^2}.\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{1+2xy}\Leftrightarrow\sqrt{1+2x^2}.\sqrt{1+2y^2}\ge 1+2xy.$$

$\Leftrightarrow (1+2x^2)(1+2y^2) \ge (1+2xy)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$: đúng

và $\dfrac{1}{1+2x^2}+\dfrac{1}{1+2y^2}\le\dfrac{2}{1+2xy}\Leftrightarrow\dfrac{(1-4xy)(x-y)^2}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)}\ge 0$: đúng

Do đó dấu = xảy ra nên x = y, ta có phương trình

$$9\sqrt{x(1-2x)}=1\Leftrightarrow 162x^2-81x+1=0$$

Từ đó hệ có 2 nghiệm $\left(\dfrac{81\pm\sqrt{5913}}{324};\dfrac{81\pm\sqrt{5913}}{324}\right)$.

b) Điều kiện: x > 0, y > 0. Hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}=\dfrac{5}{y+42x} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}=3 \end{cases}$$ nên $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{15}{y+42x}$

$\Leftrightarrow (y-2x).(y+42x) = 15xy \Leftrightarrow y^2-84x^2+25xy=0$

$\Leftrightarrow (y-3x)(y+28x) = 0$

Do $y + 28x > 0 \Rightarrow y = 3x$.

Thế vào thì hệ có nghiệm là: $\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{27};\frac{5+2\sqrt{6}}{9}\right)$

Bài toán 5.27:

Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}(a^3-1)x+(a^2-1)y=a-1\\(a^3+1)x+(a^2+1)y=a+1\end{cases}$ b) $\begin{cases}7x+y=\frac{a^3}{x^2}\\7y+x=\frac{a^3}{y^2}\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta lập các định thức:

$$D=\begin{vmatrix}a^3-1 & a^2-1\\a^3+1 & a^2+1\end{vmatrix}=2a^3-2a^2=2a^2(a-1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}a-1 & a^2-1\\a+1 & a^2+1\end{vmatrix}=2a-2a^2=-2a(a-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}a^3-1 & a-1\\a^3+1 & a+1\end{vmatrix}=2a^3-2a=2a(a^2-1)$$

Biện luận:

Nếu $a\neq 0$ và $a\neq 1$: Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\frac{1}{a};\frac{a+1}{a}\right)$

Nếu $a=0$: Hệ trở thành $\begin{cases}-x-y=-1\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow x+y=1$

Hệ có vô số nghiệm: $x=t$, $y=1-t$, với t tuỳ ý.

Nếu $a=1$: Hệ trở thành $\begin{cases}0x+0y=0\\2x+2y=2\end{cases}\Leftrightarrow x+y=1$

Hệ có vô số nghiệm $x=t$; $y=1-t$, với t tuỳ ý.

b) Điều kiện: x , $y\neq 0$. Hệ tương đương:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x^3+x^2y-a^3=0\\7y^3+xy^2-a^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^3+x^2y-a^3=0\\7(x^3-y^3)+xy(x-y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x^3+x^2y-a^3=0\\(x-y)(7x^2+7y^2+8xy)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^3+x^2y-a^3=0\\(x-y)[4(x+y)^2+3x^2+3y^2]=0\end{cases}$$

Xét $a=0$ thì $x=y=0$ (loại): Hệ vô nghiệm.

Xét $a \neq 0$ thì hệ $\begin{cases} x = y \\ 8x^3 = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn).

Bài toán 5.28:

Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2 & (1) \\ x + y + 2z = 4(a^2 + 1) & (2) \\ z^2 - xy = a^2 & (3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - yz = a & (1) \\ y^2 - zx = b & (2) \\ z^2 - xy = c & (3) \end{cases}$ a,b,c>0 phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Thay $a^2 = z^2 - xy$ từ (3) vào (1) ta được

$(x + y)^2 = 4z^2 \Leftrightarrow x + y = \pm 2z$

Nếu $x + y = -2z$ thì kết hợp với (2) có $0 = 4(a^2 + 1)$, vô lí

Với $x + y = 2z$, từ (2) ta được $4z = 4(a^2 + 1) \Leftrightarrow z = a^2 + 1$

Từ (3) ta có: $xy = z^2 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = a^4 + a^2 + 1$

Như vậy x và y là nghiệm của phương trình bậc hai

$X^2 - 2(a^2 + 1)X + a^4 + a^2 + 1 = 0$

Suy ra $(x, y) = (a^2 + a + 1, a^2 - a + 1), (a^2 - a + 1, a^2 + a + 1)$

Vậy nghiệm của hệ là:

$(x, y, z) = (a^2 + a + 1, a^2 - a + 1, a^2 + 1), (a^2 - a + 1, a^2 + a + 1, a^2 + 1)$

b) Lấy (1) – (2) ta được:

$(x - y)(x + y) + z(x - y) = a - b \Leftrightarrow (x - y)(x + y + z) = a - b$

Tương tự: $(y - z)(x + y + z) = b - c$, $(z - x)(x + y + z) = c - a$

Vì a, b, c phân biệt nên $x + y + z \neq 0$ và $y \neq z$

Ta có $[(b - c)(x - y) + (b - a)(y - z)](x + y + z) = 0$

Nên $(b - c)(x - y) + (b - a)(y - z) = 0$ hay $(b - c)x = (a - c)y + (b - a)z$

Và ta có $cy^2 - czx - bz^2 + byx = 0$

$\Leftrightarrow (b - c)(cy^2 - bz^2) + (by - cz)(b - c)x = 0$

$\Leftrightarrow (y - z)[(b^2 - ac)z + (ab - c^2)y] = 0$

Suy ra $(b^2 - ac)z + (ab - c^2)y = 0$.

nên: $z = (c^2 - ab)t$, $y = (b^2 - ac)t$ với t nào đó

Do đó $x = (a^2 - bc)t \Rightarrow a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)t^2 = a$

Suy ra $t = \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$. Vậy hệ có nghiệm:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}; \frac{b^2-ca}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}; \frac{c^2-ab}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}\right)$$

Bài toán 5.29:

a) Tìm các cặp số nguyên (a;b) để hệ $\begin{cases} ax+y=2 \\ 6x+by=4 \end{cases}$ vô nghiệm

b)Tìm m để hệ $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m \end{cases}$ có nghiệm

Hướng dẫn giải

a) $D = ab - 6$, $D_x = 2(b-2)$, $D_y = 4(a-3)$.

Với a, b nguyên, nếu hệ phương trình vô nghiệm thì

$D = ab - 6 = 0 \Leftrightarrow ab = 6$. Các cặp số nguyên (a ; b) thỏa mãn điều kiện này là (1 ; 6) , (–1 ; –6) , (6 ; 1) , (–6 ; 1) , (2 ; 3) , (–2 ; –3) , (3 ; 2) , (–3 ; –2).

Thử lại chỉ có cặp (a ; b) = (3 ; 2) là không thỏa mãn điều kiện của bài toán (hệ phương trình có vô số nghiệm). Vậy có bảy cặp còn lại thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

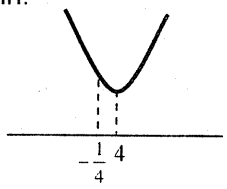
b) Đặt $\begin{cases} u = x^2+x \\ v = y^2+y \end{cases}$. Vì $t^2 + t = -\frac{1}{4} + (t+\frac{1}{2})^2 \geq -\frac{1}{4}$ nên $u, v \geq -\frac{1}{4}$

Trong điều kiện đó thì hệ tương đương: $\begin{cases} u+v=8 \\ uv=m \end{cases}$

Do đó u , v là các nghiệm của phương trình:

$X^2 - 8X + m = 0$ với $X \geq -\frac{1}{4}$

Ta có: $X^2 - 8X = -m$.



Xét parabol $Y = F(X) = X^2 - 8X$, $X \geq -\frac{1}{4}$

Điều kiện đường thẳng $Y = -m$ cắt (P) tại điểm có hoành độ $X \geq -\frac{1}{4}$ là:

$$f(4) \leq -m \leq f(-\frac{1}{4}) \Leftrightarrow -\frac{33}{16} \leq m \leq 16 .$$

Bài toán 5.30:

Tìm các giá trị của a để hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}$ có đúng hai nghiệm.

b) $\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2y + xy^2 = 3a - 8 \end{cases}$ có nghiệm

Hướng dẫn giải

a) Giả sử hệ có nghiệm là $(x_0 ; y_0)$

$\Rightarrow$ các cặp $(-x_0 ; -y_0)$, $(y_0 ; x_0)$, $(-y_0 ; -x_0)$ cũng là nghiệm, cặp $(x_0 ; y_0) \neq (-x_0 ; -y_0)$ vì nếu ngược lại thì $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ mà $(0 ; 0)$ không phải là nghiệm của hệ. Vậy hệ có hai nghiệm thì hai nghiệm là $(x_0 ; y_0)$ và $(-x_0 ; -y_0)$

$\Rightarrow (x_0 ; y_0) \equiv (y_0 ; x_0)$ và $(-x_0 ; -y_0) \equiv (-y_0 ; -x_0)$. Điều đó xảy ra khi $x_0 = y_0$.

Lúc đó hệ trở thành: $\begin{cases} 2x_0^2 = 2(1+a) \\ 4x_0^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 0.$

Đảo lại, với $a = 0$ thì hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = \pm 2 \end{cases}$

Hệ chỉ có hai nghiệm $(1 ; 1)$ và $(-1 ; -1)$: thoả mãn.Vậy $a = 0$.

b) Ta có $\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2y + xy^2 = 3a - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = a \\ xy(x+y) = 3a - 8 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ $(S^2 \geq 4P)$, ta được $\begin{cases} S + P = a \\ PS = 3a - 8 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ có nghiệm S, P thoả mãn điều kiện $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow$ Phương trình $X^2 - aX + 3a - 8 = 0$ có nghiệm X_1, X_2 thoả mãn $X_1^2 - 4X_2 \geq 0$ hoặc $X_2^2 - 4X_1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4(3a-8) \geq 0 \\ X_2^2 - 4X_1 + X_1^2 - 4X_2 \geq 0 \vee (X_2^2 - 4X_1)(X_1^2 - 4X_2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 4 \vee a \geq 8 \\ a^2 - 10a + 16 \geq 0 \vee 4a^3 - 45a^2 + 96a + 64 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \geq 8 \\ a \leq \dfrac{13 + 3\sqrt{33}}{8} \end{bmatrix}$$

Bài toán 5.31:

Tìm các giá trị của a để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax & (1) \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ thì $(y; x; z)$ cũng là nghiệm của hệ, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì $x = y$

Do đó $2x^2 = z$ và $2x + z = a$ nên $2x^2 + 2x - a = 0$

$\Rightarrow \Delta = 1 + 2a = 0$, suy ra $a = -\frac{1}{2}$

Đảo lại, với $a = -\frac{1}{2}$ thì có được hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Rút $y = -(x + z + \frac{1}{2})$ thế vào phương trình đầu ta được phương trình bậc 2 theo x: $2x^2 + (2z + 1)x + z^2 + \frac{1}{4} = 0$

$\Delta = (2z + 1)^2 - 8(z^2 + \frac{1}{4}) = -(2z - 1)^2 \le 0$

Suy ra $z = \frac{1}{2}$ và $x = y = -\frac{1}{2}$: có nghiệm duy nhất. Vậy $a = -\frac{1}{2}$.

b) Nếu (x ; y) là một nghiệm của hệ thì (y ; x) cũng là nghiệm. Do đó hệ có một nghiệm duy nhất điều kiện cần là x = y.

Thế vào (1) : $x^3 - 5x^2 + ax = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + a) = 0$ (3)

Hệ có một nghiệm duy nhất điều kiện cần là phương trình(3) hoặc vô nghiệm hoặc chỉ có một nghiệm x = 0.Do (3) không thể có một nghiệm duy nhất x = 0 nên ta phải có $\Delta = 25 - a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{25}{4}$.

Điều kiện đủ: Nếu $a > \frac{25}{4}$, trừ (1) và (2), ta có:

$(x - y)(x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + a) = 0 \Leftrightarrow x = y$, vì:

$x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + a = x^2 + (y - 3)x + y^2 - 3y + a$

$= \left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{3(y-1)^2 + 13}{4} + \left(a - \frac{25}{4}\right) > 0$

Theo chứng minh trên thì khi x = y và $a > \frac{25}{4}$ thì hệ có một nghiệm duy nhất là (0 ; 0). Vậy $a > \frac{25}{4}$.

Bài toán 5.32:

Tìm m để hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0 & (1) \\ mx + (2-m)y + m = 0 & (2) \end{cases}$ có 2 nghiệm $(x_1; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ mà $T = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có (1) là phương trình đường tròn (C) tâm I(2 ; –4), R = 5 và (2) là phương trình đường thẳng Δ.

Các nghiệm của hệ là toạ độ giao điểm A, B của đường thẳng và đường tròn. Ta có: $T = AB^2$ mà dây $AB \le 2R = 10$.

Vậy T lớn nhất khi Δ đi qua tâm I:

$$2m + (2 - m)(-4) + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{7}.$$

Bài toán 5.33:

Tìm a để hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ có nghiệm

b) $\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$ có đúng 4 nghiệm.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện x, y ≥ 0. Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, (u, v ≥ 0)

Hệ $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = m \end{cases}$

Điều kiện hệ có nghiệm là phương trình $X^2 - SX + P = 0$

$\Leftrightarrow X^2 - X + m = 0$ có 2 nghiệm không âm:

$$\Delta \ge 0, S \ge 0, P \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{4}.$$

b) Đặt $u = \sqrt{|x-1|}$, $v = \sqrt{7|y|}$, với u, v ≥ 0. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = -4a \end{cases}$

Để ý, nếu hệ có nghiệm (u, v) với u, v dương thì hệ có 4 cặp nghiệm (x, y), do đó hệ có đúng 4 nghiệm (x, y) thì u = 0, v = 1 hoặc u = 1, v = 0 hoặc

$u = v = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$ hoặc $a = -\frac{1}{32}$

Thử lại đúng. Vậy giá trị cần tìm là $a = -\frac{1}{4}$ hoặc $a = -\frac{1}{32}$.

Bài toán 5.34:

Tìm m để hệ phương trình sau có một nghiệm duy nhất.

a) $\begin{cases} x^2 - 2^{|x|} + |x| - y = m & (1) \\ x^2 = 1 - y^2 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{6-y} = m \\ \sqrt{1+y} + \sqrt{6-x} = m \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Nếu (x, y) là một nghiệm thì (–x; y) cũng là nghiệm. Nên điều kiện cần để hệ có một nghiệm duy nhất là $x = -x \Rightarrow x = 0$.

Khi $x = 0$ thì (2) $\Rightarrow y = \pm 1$ nên (1) $\Rightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$.

Thử lại, nếu $m = 2$ hệ trở thành $\begin{cases} x^2 + y + 2 = 2^{|x|} + |x| \\ x^2 = 1 - y^2 \end{cases}$

Hệ có 2 nghiệm (0; 1) và (1; 0): loại

Nếu $m = 0$ hệ trở thành $\begin{cases} x^2 + y = 2^{|x|} + |x| \\ x^2 = 1 - y^2 \end{cases}$

Ta có $-1 \le x; y \le 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le |x| \\ y \le 1 \le 2^{|x|} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y \le 2^{|x|} + |x|$

Do đó các đẳng thức xảy ra tức là: $x = 0, y = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 0$.

b) Điều kiện $-1 \le x \le 6, -1 \le y \le 6$.

Mà (x; y) là một nghiệm thì (y; x) cũng là nghiệm, do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y$, phương trình đầu trở thành:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{6-x} = m \qquad (*)$$

Nếu x là nghiệm của (*) thì $5 - x$ cũng là nghiệm, do đó để phương trình (*) có nghiệm duy nhất thì: $x = 5 - x \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow m = \sqrt{14}$

Thử lại khi $m = \sqrt{14}$ thì phương trình: $\sqrt{1+x} + \sqrt{6-x} = \sqrt{14}$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{2}$. Vậy $m = \sqrt{14}$.

Bài toán 5.35:

Cho ba số thực x, y, z thoả mãn $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $1 \le x \le \frac{7}{3}; 1 \le y \le \frac{7}{3}; 1 \le z \le \frac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có x, y, z thoả mãn : $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 8 \end{cases}$

nên $\begin{cases} y + z = 5 - x \\ yz = 8 - x(y + z) = 8 - x(5 - x) = x^2 - 5x + 8 \end{cases}$

Do đó y và z là 2 nghiệm của phương trình:

$$X^2 - (5 - x)X + (x^2 - 5x + 8) = 0 \text{ nên } \Delta \geq 0$$

$\Rightarrow \Delta = (5 - x)^2 - 4(x^2 - 5x + 8) = -3x^2 + 10x - 7 \geq 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Chứng minh tương tự ta có: $1 \leq y \leq \frac{7}{3}; 1 \leq z \leq \frac{7}{3}$.

Bài toán 5.36:

Cho ba số thực x, y, z thoả mãn: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $-8 \leq xy + yz + zx \leq 8$

Hướng dẫn giải

Ta có: $48 = (x^2 + y^2 + xy)(y^2 + z^2 + yz)$

$$= \left[\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.x\right)^2\right]\left[\left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.z\right)^2\right]$$

$$\geq \left[\left(\frac{x}{2} + y\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.z\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}.x\right).\left(y + \frac{z}{2}\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}xz + \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{\sqrt{3}}{4}xz\right)^2 = \frac{3}{4}(xy + yz + zx)^2$$

Do đó $\frac{3}{4}(xy + yz + zx)^2 \leq 48 \Rightarrow (xy + yz + zx)^2 \leq 64 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 5.37: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 4y} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 4y} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ y = 2x + 1 hay y = x + 1

Xét: y = 2x + 1. Thế vào (2) ta có :

$$f(x) = \sqrt{4x + 1} + \sqrt{9x + 4} = 3 - 4x = g(x) \quad (x \geq -\frac{1}{4})$$

$\Leftrightarrow$ x = 0 (vì f đồng biến, g nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Vậy x = 0 và y = 1.

Xét: y =x + 1. Thế vào (2) ta có :

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3 \quad (x\geq -\frac{1}{3})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3(x-1)x+2x+3$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+\left[\sqrt{5x+4}-(x+2)\right]=3(x-1)x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+(x+1)}+\frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4}+(x+2)}=3(x^2-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \text{ hay } \frac{-1}{\sqrt{3x+1}+(x+1)}+\frac{-1}{\sqrt{5x+4}+(x+2)}=3 \text{ (VN)}$$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1; x = 1 \Rightarrow y = 2$

Vậy nghiệm của hệ là (x; y) = (0; 1) hay (x; y) = (1; 2).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 5.1: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x+y=16 \\ y+z=18 \\ z+x=22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} cx+az=b \\ bz+cy=a \\ ay+bx=c \end{cases}$, $abc\neq 0$

Hướng dẫn

a) Cộng vế theo vế. Kết quả (10;6;12)

b) Kết quả $(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})$

Bài tập 5.2: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x+y+xy=\frac{7}{2} \\ x^2y+xy^2=\frac{5}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=61 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Dùng S = x + y và P = xy. Kết quả $\left(\frac{1}{2};2\right)$ và $\left(2;\frac{1}{2}\right)$

b) Dùng S = x + y và P = xy. Kết quả (–4 ; 5) và (5 ; –4)

Bài tập 5.3: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+x-y=4 \\ x(x-y+1)+y(y-1)=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2-8xy+4y^2=0 \\ 5x^2-7xy-6y^2=0 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Đặt t = – y. Kết quả $(\sqrt{2};\sqrt{2}),(-\sqrt{2};-\sqrt{2}),(1;2),(-2;-1)$

b) Kết quả (2t;t) với t tùy ý.

Bài tập 5.4: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^4+y^6=1 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Rút x = y + 2 rồi thế vap PT sau. Kết quả (2; 0)

b) Dùng S = x + y và P = xy. Kết quả (0; 1) và (1; 0)

Bài tập 5.5: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3=5x+y \\ y^3=5y+x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2+b^2 \\ x^3+y^3=a^3+b^3 \end{cases}$ với a,b,x,y>0

Hướng dẫn

a) Trừ vế theo vế. Kết quả $(\pm\sqrt{6};\mp\sqrt{6})$

b) Kết quả (a, b) hay (b, a).

Bài tập 5.6: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x+y=2\sqrt{yz} \\ y+z=2\sqrt{zx} \\ z+x=2\sqrt{xy} \\ x^2+y^2+z^2=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2 \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Cộng vế theo vế của 3 phương trình đầu. Kết quả x = y = z = 2

b) Kết quả $\left(\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21};\dfrac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$

Bài tập 5.7: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{15}{8} \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{5}{12} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-\dfrac{1}{y}=1 \\ y-\dfrac{1}{z}=1 \\ z-\dfrac{1}{x}=1 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Nghịch đảo cả 3 phương trình. Kết quả $\left(\dfrac{5}{8};-\dfrac{15}{4};\dfrac{5}{4}\right)$

b) Kết quả $(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})$

Bài tập 5.8: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x = y^3 + y + 1 \\ y = z^3 + z + 1 \\ z = x^3 + x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 = 9z^2 - 27z + 27 \\ y^3 = 9x^2 - 27x + 27 \\ z^3 = 9y^2 - 27y + 27 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Hệ vòng tròn và hàm $f(t) = t^3 + t + 1$ đồng biến. Kết quả (–1; –1; –1)

b) Hệ vòng tròn và xét x lớn nhất. Kết quả (3; 3; 3)

Bài tập 5.9: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2} \\ xy + yz + zx = -\frac{3}{4} \\ xyz = \frac{1}{8} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 13 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91 & (2) \\ y^2 = xz & (3) \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Kết quả $\left\{\cos\frac{\pi}{9};\cos\frac{5\pi}{9};\cos\frac{7\pi}{9}\right\}$

b) Đưa về phương trình tích tổng x+z và xz. Kết quả (1; 3; 9), (9; 3; 1)

Bài tập 5.10: Tìm tham số để hệ:

a) $\begin{cases} x - y = a(1 + xy) & (1) \\ 2 + x + y + xy = 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

b) $\begin{cases} x^2 - mxy + y^2 = m^2 - 3m + 2 & (1) \\ x^2 + 2xy + my^2 = m^2 - 4m + 3 & (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Hướng dẫn

a) Đặt m = xy rồi tính x, y theo a và m. Kết quả $|a| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}, a \neq -1$

b) Kết quả m = 1

Bài tập 5.11: Tìm tham số để hệ:

a) $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0 \end{cases}$ có nghiệm b) $\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = m \end{cases}$ vô nghiệm

Hướng dẫn

a) Cộng vế theo vế. Kết quả a + b + c = 0

b) Dùng Viet. Kết quả $m > -14 + 10\sqrt{2}$

Bài tập 5.12: Tìm điều kiện để hệ:

a) $\begin{cases} xyz = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ xyz^2 + z = b \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

b) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = a \\ x + y = 3a \end{cases}$ có nghiệm

Hướng dẫn

a) Nếu (x;y;z) là nghiệm thì (–x;–y;z) cũng là nghiệm, do đó phương trình có nghiệm duy nhất nên x = y = 0.

Kết quả : a =0, b =2 hoặc a = 0, b = –2

b) Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{y+2}$. Kết quả $\frac{3+\sqrt{21}}{2} \le a \le 3 + \sqrt{15}$.

Chuyên đề 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$:

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
f(x)	trái dấu a	0	cùng dấu a

Bất phương trình $ax + b > 0$

Nếu $a > 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$. Nếu $a < 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$

Nếu $a = 0$, $b \leq 0$ thì vô nghiệm.

Nếu $a = 0$, $b > 0$ thì có nghiệm là mọi x.

Dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$

Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) > 0$, $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2$

$af(x) < 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$ và $af(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

Định lý đảo về dấu tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Nếu tồn tại số α sao cho $a.f(\alpha) < 0$ thì phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 < \alpha < x_2$.

Nếu tồn tại 2 số α và β sao cho $f(\alpha).f(\beta) < 0$ thì phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt.

Nếu $a.f(\alpha) \leq 0$ hoặc $f(\alpha).f(\beta) \leq 0$ thì phương trình bậc hai có nghiệm.

So sánh nghiệm: $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$

$$x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} < \alpha \end{cases}; \quad \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases}$$

Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp giải: dùng định nghĩa, chia miền xét dấu, đặt điều kiện rồi bình phương, bất đẳng thức,...

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0, f(x) \leq -g(x) \text{ hay } f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ g(x) > 0, f^2(x) \geq g^2(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

Bất phương trình chứa căn thức

Phương pháp giải: xét dấu 2 vế, đặt điều kiện rồi bình phương, chuyển vế bình phương, đặt ẩn phụ kèm điều kiện, nhân lượng liên hiệp, biến đổi về phương trình tích số, dùng tính chất hàm số,...

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Điều kiện về nghiệm của bất phương trình

$\forall x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x \in D} f(x)$

$\forall x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x \in D} f(x)$

$\exists x \in D, m \geq f(x) \Leftrightarrow m \geq \min\limits_{x \in D} f(x)$

$\exists x \in D, m \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq \max\limits_{x \in D} f(x)$.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by + c > 0$

– Vẽ đường thẳng d: $ax + by + c = 0$ đi qua 2 điểm.

– Xét điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ không thuộc d. Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng không kể bờ d, chứa điểm M_0 làm miền nghiệm. Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng không kể bờ d, không chứa điểm M_0 làm miền nghiệm.

Với bất phương trình $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c \geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng lấy cả bờ d.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Áp dụng vào bài toán tối ưu: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng $F = ax + by$, trong đó x, y nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho. Miền nghiệm nhận được thường là một đa giác và cực trị đạt được tại các đỉnh.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 6. 1:

Giải các bất phương trình:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$ b) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0$.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) - (x+2) > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1) > 0$

Lập bảng xét dấu vế trái, ta có tập nghiệm $S = (-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

b)Xét $x \le 0$ thì BPT nghiệm đúng.

Xét $x \ge 1$ thì BPT: $x^5(x-1) + x^3(x-1) + x(x-1) > 0$: nghiệm đúng

Xét $0 < x < 1$ thì BPT: $x^6 + x^4(1-x) + x^2(1-x) + (1-x) > 0$: nghiệm đúng.

Vậy tập nghiệm $S = \mathbf{R}$.

Bài toán 6. 2:

Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{x+2}{3x+1} \le \dfrac{x-2}{2x-1}$ b) $\dfrac{1}{x^2-5x+4} < \dfrac{1}{x^2-7x+10}$

Hướng dẫn giải

a) BPT $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2x-1} - \dfrac{x+2}{3x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-8)}{(3x+1)(2x-1)} \ge 0$

Lập bảng xét dấu thì: $S = \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left[0; \dfrac{1}{2}\right) \cup [8; +\infty)$.

b) ĐK: $x^2-5x+4 \ne 0, x^2-7x+10 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1, x \ne 4, x \ne 2, x \ne 5$.

BPT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-5x+4} - \dfrac{1}{x^2-7x+10} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+6}{(x^2-5x+4)(x^2-7x+10)} < 0$

Lập bảng xét dấu thì: $S = (1; 2) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$.

Bài toán 6. 3:

Giải các bất phương trình:

a) $(x-1)(x-3) \le \dfrac{18}{x^2-4x-4}$ b) $\dfrac{6x}{2x^2-5x+3} - \dfrac{x}{2x^2+5x+3} \ge 0$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x^2 - 4x - 4 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 2 \pm 2\sqrt{2}$.

BPT $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le \dfrac{18}{x^2-4x-4}$. Đặt $x^2 - 4x - 4 = t$ $(t \ne 0)$.

BPT $\Leftrightarrow t + 7 \ge \dfrac{18}{t} \Leftrightarrow \dfrac{t^2+7t-18}{t} \le 0 \Leftrightarrow$ $t \le -9$ hoặc $0 < t \le 2$.

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 \le 9$ hoặc $0 < x^2 - 4x - 4 \le 2$.

Từ đó giải ra được: $S = [2 - \sqrt{10}\,;\, 2 - 2\sqrt{2}\,] \cup (2 + 2\sqrt{2}\,;\, 2 + \sqrt{10}\,]$.

b) Nếu x = 0 thì BPT được thoả. Nếu $x \neq 0$ chia tử và mẫu cho x.

Đặt $t = 2x + \frac{3}{x}$ thì BPT: $\frac{6}{t-5} - \frac{1}{t+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5t+35}{t^2-25} \geq 0$

Lập bảng xét dấu thì được nghiệm: $-7 < t < -5$ hoặc $t > 5$.

$\Leftrightarrow -7 \leq \frac{2x^2+7}{x} < -5$ hoặc $\frac{2x^2+7}{x} > 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2+5x+3}{x} < 0 \\ \frac{2x^2+5x+3}{x} < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \frac{2x^2-5x+3}{x} > 0$$

Từ đó có tập nghiệm: $S = [-3; -\frac{3}{2}) \cup (-1; -\frac{1}{2}] \cup [0; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

Bài toán 6. 4:

Giải các hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 & (1) \\ (x-1)(3x^2+7x+4) \geq 0 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 & (1) \\ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{x} & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Lập bảng xét dấu thì (2) $\Leftrightarrow -\frac{4}{3} < x < -1$ hoặc $x > 1$.

Kết hợp thì được tập nghiệm $S = [-\frac{4}{3}; -1] \cup (1; 3)$.

b) (1) $\Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$.

(2) $\Leftrightarrow \frac{x(x+2) + x(x+1) - x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x(x+1)(x+2)} \geq 0$

BXD:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2	+		+	0	−		−		−	0	+		
x(x+1)	+		+		+	0	−	0	+		+		
x+2	−	0	+	0	+		+		+		+		
VT	−	‖	+	0	−	‖	−	‖	−	0	+		

Do đó (2) $\Leftrightarrow -2 < x \leq -\sqrt{2}$ hoặc $-1 < x < 0$ hoặc $x \geq \sqrt{2}$.

Kết hợp thì được tập nghiệm $S = (2; +\infty)$.

Bài toán 6. 5:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \geq 6 \end{cases}$.

Tìm nghiệm(x, y, z, t) sao cho P = zx đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$; $z = 3\cos\beta$, $t = 3\sin\beta$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ thì

$xt + yz \geq 6 \Leftrightarrow 6(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \geq 6$

$$6\sin(\alpha + \beta) \geq 6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Nên $P = xz = 6\cos\alpha\cos\beta = 3[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = 3\cos(\alpha - \beta)$

đạt giá trị lớn nhất khi $\cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$.

Suy ra $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$; $z = t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy maxP = 3, khi $x = y = \sqrt{2}$, $z = t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 6. 6:

Giải các bất phương trình:

a) $|x^2 - 5x + 4| \leq x^2 + 6x + 5$ b) $x + 5 > |x^2 + 4x - 12|$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu $x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 4$:

BPT $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq x^2 + 6x + 5 \Leftrightarrow 11x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{11}$.

Chọn nghiệm $-\frac{1}{11} < x < 1$ hoặc $x > 1$.

Nếu $x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$:

BPT $\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 \leq x^2 + 6x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 9 \geq 0$: đúng

Vậy tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{11}; +\infty\right)$.

b) $\begin{cases} x + 5 > 0 \\ (x+5)^2 > (x^2 + 4x - 12)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ (x+5)^2 - (x^2 + 4x - 12)^2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ (x^2 + 5x - 7)(x^2 + 3x - 17) < 0 \end{cases}$

Lập bảng xét dấu thì: $S = \left(\frac{-5 - \sqrt{53}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{77}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{53}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{77}}{2}\right)$

Bài toán 6. 7:

Giải các bất phương trình:

a) $|x^3 - 8| \geq 2 - x$ b) $\dfrac{x^2 + x + 1}{|2x-1| - x - 2} \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) BPT $\Leftrightarrow |(x-2)(x^2 + 2x + 4)| \geq 2 - x$

$\Leftrightarrow |x-2|(x^2 + 2x + 4) \geq 2 - x$ vì $x^2 + 2x + 4 > 0, \forall x$

Nếu $x \geq 2$ thì VT $\geq 0 \geq$ VP : đúng

Nếu $x < 2$ thì $(2 - x)(x^2 + 2x + 4) \geq 2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 0$: đúng $\forall x$.

Vậy tập nghiệm là **R**.

b) Vì $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x nên bất phương trình tương đương

$$|2x-1| - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x \geq 1; 2x - 1 - x - 2 > 0 \\ 2x < 1; 1 - 2x - x - 2 > 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x \geq 1, x > 3 \\ 2x < 1, 3x < -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 3 \\ x < -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}. \text{Vậy } S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty).$$

Bài toán 6. 8:

Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x - 1$ b) $\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} > 1$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện : $x^2 - 5x - 14 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ hoặc $x \geq 7$

Khi $x \leq -2$ thì $2x - 1 < 0$ nên BPT nghiệm đúng

Khi $x \geq 7$ thì $2x - 1 > 0$ nên BPT tương đương

$x^2 - 5x - 14 \geq (2x - 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + x + 15 \leq 0$: vô nghiệm

Vậy tập nghiệm là $(-\infty ; -2]$.

b) BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x - 10} < 2x - 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ 2x\text{-}4 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (2x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hay } x > 5 \\ x > 2 \\ 3x^2 - 13x + 26 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Bài toán 6. 9:

Giải các bất phương trình:

a) $6\sqrt{(x\text{-}3)(x\text{-}32)} \leq x^2 - 34x + 48$ b) $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} \leq \sqrt{2x+7}$

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $(x-2)(x-3) \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{(x-2)(x-3)}$, $t \geq 0$

BPT $\Leftrightarrow 6t \leq t^2 - 16 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 16 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -2$ hoặc $t \geq 8$

Chọn $t \geq 8$ nên có $x^2 - 34x + 64 \geq 64$

$\Leftrightarrow x^2 - 34x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ hoặc $x \geq 34$ (chọn).

b) Điều kiện : $x \geq 6$. BPT tương đương:

$$\sqrt{7x+1} \leq \sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18}$$

$$\Leftrightarrow 7x + 1 \leq 2x + 7 + 3x - 18 + 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}$$

$$\Leftrightarrow x + 6 \leq \sqrt{6x^2 - 15x - 126} \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 \leq 6x^2 - 15x - 126$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 27x - 162 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{18}{5} \text{ hoặc } x \geq 9.$$ Chọn nghiệm $x \geq 9$.

Bài toán 6. 10:

Giải các bất phương trình:

a) $(x-2)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 4$

b) $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} \leq \sqrt{x^2+4x-5}$

Hướng dẫn giải

a) BPT $\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x^2+4} \leq (x-2)(x+2)$

– Xét $x = 2$ thì BPT : $0 \leq 0$ đúng.

– Xét $x > 2$ thì BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \leq x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 4 \leq x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Chọn $x > 2$.

– Xét $x < 2$ thì BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \geq x + 2$

Khi $x \leq -2$ thì $x + 2 < 0$: BPT nghiệm đúng.

Khi $-2 < x < 2$ thì BPT $\Leftrightarrow x^2 + 4 \geq (x+2)^2$

$\Leftrightarrow 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Chọn $-2 < x \leq 0$.

Vậy tập nghiệm là $(-\infty ; 0] \cup [2 ; +\infty)$.

b) Điều kiện : $x \leq -5$ hoặc $x \geq 1$

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(-x-3)} \leq \sqrt{(x-1)(x+5)}$

Nếu $x > 1$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{x+5}$

$\Leftrightarrow 2x + 5 + 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq x + 5$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq -x < 0$: vô nghiệm

Nếu $x = 1$: BPT được nghiệm đúng

Nếu $x \leq -5$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(-x-2)} + \sqrt{(1-x)(x+3)} \leq \sqrt{(1-x)(-x-5)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-3} \leq \sqrt{-x-5}$.

$\Leftrightarrow -2x-5+2\sqrt{(x+2)(x+3)} \le -x-5.$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \le x < 0$: vô nghiệm.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

Bài toán 6. 11:

Giải các bất phương trình:

a) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2} > x-2$ b) $2\sqrt{2}\left(\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}\right) < \sqrt{x^2+18x-7}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \ge 1$.

BPT $\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2})(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}) > (x-2)(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})$

$\Leftrightarrow 4(x-1)-(x+2) > (x-2)(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})$

$\Leftrightarrow 3(x-2) > (x-2)(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2})$

Nếu x = 2 thì 0 > 0 : loại.

Nếu $1 \le x < 2$: BPT $\Leftrightarrow 3 < 2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow 9 < 4(x-1)+x+2+4\sqrt{(x-1)(x+2)}$

$\Leftrightarrow 11-5x < 4\sqrt{x^2+x-2}$

$\Leftrightarrow 121-110x+25x^2 < 16x^2+16x-32$

$\Leftrightarrow x^2-14x+17 < 0 \Leftrightarrow 7-4\sqrt{2} < x < 7+4\sqrt{2}$.

Chọn nghiệm $7-4\sqrt{2} < x < 2$.

Nếu x > 2 thì BPT $\Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}$

Vì x > 2 nên VT $> 2\sqrt{1}+\sqrt{3} > 3$: vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình $7-4\sqrt{2} < x < 2$.

b) Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}$. BPT: $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4} < \sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}$

Đặt $u = \sqrt{x-\frac{1}{2}}$, $u \ge 0$ và $v = \frac{x+1}{4}$, $v \ge 0$

BPT: $u+v < \sqrt{2u^2+2v^2} \Leftrightarrow (u+v)^2 < 2u^2+2v^2$

$\Leftrightarrow (u-v)^2 > 0 \Leftrightarrow u \ne v \Leftrightarrow x^2-14x+9 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 7 \pm \sqrt{13}$

Vậy nghiệm: $x \ge \frac{1}{2}$, $x \ne 7 \pm \sqrt{13}$.

Bài toán 6. 12:

Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3} \le \sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

b) $x^2 + 6x + 11 \geq 3(x+1)\sqrt{2x+5}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \geq 2$

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1 \leq 0 \quad \text{vì} \quad \sqrt{x-2}-\sqrt{x+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình.

b) ĐK: $x \geq -\frac{5}{2}$, BPT đã cho trở thành :

$$(x+1)^2 - 3(x+1)\sqrt{2x+5} + 2(\sqrt{2x+5})^2 \geq 0 \quad (1)$$

Khi $x = -\frac{5}{2}$ thì $(1) \Leftrightarrow \left(-\frac{5}{2}+1\right)^2 \geq 0$: đúng.

Do đó $x = -\frac{5}{2}$ là nghiệm bất phương trình.

Khi $x \neq -\frac{5}{2}$ thì $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}}\right)^2 - 3\left(\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}}\right) + 2 \geq 0$

Do đó: $\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}} \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq \sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{2} < x < -1 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x \leq 2$

Hoặc $\frac{x+1}{\sqrt{2x+5}} \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq \sqrt{2x+5} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ 2 \leq x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 \leq x$

Vậy nghiệm BPT: $x \geq \frac{5}{2}$.

Bài toán 6. 12:

Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x} \geq 2-x^2$.

b) $x-3+\sqrt{15-x} \geq \sqrt{2(x^2-7x+24)}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Ta có $2 - x^2 \leq 2$.

và $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x} = 1.\sqrt{1-2x}+1.\sqrt{1+2x} \leq \sqrt{(1+1)(1-2x+1+2x)} = \sqrt{4} = 2$

nên dấu bằng đồng thời xảy ra x = 0 và $\sqrt{1-2x} = \sqrt{1+2x}$,

do đó x= 0. Thử lại đúng. Vậy phương trình có nghiệm x = 0.

b) Điều kiện $x \le 15$.

Ta có $x-3+\sqrt{15-x} = 1.(x-3)+1.\sqrt{15-x}$

$$\le \sqrt{(1+1)\left[(x-3)^2+(15-x)\right]} = \sqrt{2(x^2-7x+24)}$$

nên dấu bằng xảy ra : $x-3 = \sqrt{15-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \ge 0 \\ (x-3)^2 = 15-x \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$

Thử lại đúng. Vậy phương trình có nghiệm x = 6.

Bài toán 6. 13:

Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \ge 1$ b) $x^5 + x^3 > \sqrt{1-3x} - 4$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \ge 0$.

Ta có $1-\sqrt{2(x^2-x+1)} = 1-\sqrt{x^2+(x-1)^2+1} < 0$ nên BPT:

$$x-\sqrt{x} \le 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)} \le 1-x+\sqrt{x}$$

Mà $1-x+\sqrt{x} = 1(1-x)+1.\sqrt{x} \le \sqrt{(1+1)\left[(1-x)^2+(\sqrt{x})^2\right]}$

$$= \sqrt{2(x^2-x+1)}$$

Do đó dấu bằng xảy ra nên $1-x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0, x > 0 \\ (1-x)^2 = x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1 \\ x^2-3x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

b) Ta có BPT: $x^5 + x^3 > \sqrt{1-3x} - 4 \Leftrightarrow x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 > 0$

Xét $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$, với $x \le \frac{1}{3}$ thì f đồng biến trên

$(-\infty; \frac{1}{3}]$, mà f(–1) = 0 do đó, BPT: $f(x) > f(-1) \Leftrightarrow x < -1$ (chọn).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S= $(-\infty; -1)$.

Bài toán 6. 14:

Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \le x$

b) $\left|4(\sqrt{(1-x^2)^3} - x^3) + 3(x - \sqrt{1-x^2})\right| \le \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ nên đặt $x = \cos 2t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

BPT: $\sqrt{1+\cos 2t} - \sqrt{1-\cos 2t} \le \cos 2t$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|\cos t| - \sqrt{2}\,|\sin t| \le \cos^2 t - \sin^2 t$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos t - \sin t) \le (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)$

$\Leftrightarrow \cos(t + \frac{\pi}{4})(\cos(t - \frac{\pi}{4}) - 1) \ge 0 \Leftrightarrow \cos(t + \frac{\pi}{4}) \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \le 2t \le \pi \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $-1 \le x \le 0$.

b) Điều kiện xác định $-1 \le x \le 1$ nên đặt $x = \sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$VT = \left|4(\sqrt{(1-x^2)^3} - x^3) + 3(x - \sqrt{1-x^2})\right|$$

$$= \left|4(\sqrt{(1-\sin^2 t)^3} - \sin^3 t) + 3(\sin t - \sqrt{1-\sin^2 t})\right|$$

$$= \left|4(\sqrt{\cos^6 t} - \sin^3 t) + 3(\sin t - \sqrt{\cos^2 t})\right|$$

$$= \left|4(\cos^3 t - \sin^3 t) + 3(\sin t - \sin^3 t)\right|$$

$$= \left|(4\cos^3 t - 3\cos t) + 3(\sin t - \sin^2 t)\right|$$

$$= \left|\cos 3t + \sin 3t\right| = \left|\sqrt{2}\sin(3t + \frac{\pi}{4})\right| \le \sqrt{2} = VP$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $-1 \le x \le 1$.

Bài toán 6. 15:

Giải hệ : $\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \ge 2x^2 + \sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $xy - x^2y^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le xy \le 1$ nên $\sqrt{xy - x^2y^2} \le \frac{1}{2}$

Do đó: $\sqrt{xy - x^2y^2} = y^6 + y^3 + 2x^2 \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \ge 4xy^3 + 2y^3 + y^6 + 2x^2$

Mà $4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \geq 2x^2 + \sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Rightarrow 8xy^3 + 2y^3 + 1 \geq 4xy^3 + 2y^3 + y^6 + 4x^2 + \sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 4xy^3 + 1 \geq y^6 + 4x^2 + \sqrt{1+(2x-y)^2}$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+(2x-y)^2} \geq y^6 + 4x^2 - 4xy^3 = (y^3 - 2x)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{1+(2x-y)^2} = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)^2 = 0 \\ y^3 = 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \text{ hay } y = \pm 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm : $(-\frac{1}{2}; -1)$.

Bài toán 6. 16:

Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $(x + 1)k + x < 3x + 4$ b) $mx^2 - (m + 1)x + 2 \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) $(x + 1)k + x < 3x + 4 \Leftrightarrow kx + k < 2x + 4 \Leftrightarrow (k - 2)x < 4 - k$

Nếu $k = 2$ thì $0x < 2$ (đúng): $S = \mathbb{R}$

Nếu $k > 2$ thì $x < \frac{4-k}{k-2}$: $S = (-\infty ; \frac{4-k}{k-2})$

Nếu $m < 2$ thì $x > \frac{4-k}{k-2}$: $S = (\frac{4-k}{k-2} ; +\infty)$

b) – Xét $m = 0$: bất phương trình: $-x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

– Xét $m \neq 0$: Ta có $\Delta = (m + 1)^2 - 8m = m^2 - 6m + 1$

Tam thức $m^2 - 6m + 1$ có hai nghiệm: $m_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $m_2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Nếu $m < 0$ thì $\Delta > 0 \Rightarrow$ tam thức có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{m+1-\sqrt{m^2-6m+1}}{2m} , x_2 = \frac{m+1-\sqrt{m^2-6m+1}}{2m} \text{ và } x_2 < x_1$$

Do đó nghiệm của bất phương trình là $x_2 \leq x \leq x_1$.

Nếu $0 < m < 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 3 + 2\sqrt{2}$ thì $\Delta > 0$ và có $x_1 < x_2$ nên nghiệm của bất phương trình là $x \leq x_1$ hoặc $x \geq x_2$.

Nếu $3 - 2\sqrt{2} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{2}$ thì $a > 0$, $\Delta \leq 0$ nên bất phương trình có nghiệm với mọi x.

Bài toán 6. 17:

Tìm m trong mỗi trường hợp:

a) $(m + 2)x + 5 - 2m > 0$, $\forall x \in [1 ; 3]$

b) $mx - 3 - x + 4m \geq 0$, $\forall x > 2$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $y = f(x) = (m + 2)x + 5 - 2m$ thì y có đồ thị là đường thẳng d.

Điều kiện $f(x) > 0$, $\forall x \in [1 ; 3]$ là:

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 + 5 - 2m > 0 \\ 3m + 6 + 5 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m > -11 \end{cases}$$ .Vậy $-11 < m < 7$.

b) Viết lại: $(m - 1)x + 4m - 3 \geq 0$, $\forall x > 2$

Đặt $y = f(x) = (m - 1)x + 4m - 3$ có hệ số góc $a = m - 1$.

Xét $m = 1$ thì $y = 1 \geq 0$, $\forall x > 2$: đúng

Xét $m \neq 1$ thì $f(x) \geq 0$, $\forall x > 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ f(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2m - 2 + 4m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \geq \dfrac{5}{6} \end{cases}$$ .Vậy : $m \geq 1$.

Bài toán 6. 18:

Tìm tham số để:

a) $-2 \leq \dfrac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7$, $\forall x$ (1) b) $\left|\dfrac{x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 4}\right| \leq 2$ $\forall x$ (2)

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2x^2 - 3x + 2 > 0$, $\forall x$ (vì $\Delta = 9 - 16 < 0$, $a = 2 > 0$) nên:

(1) $\Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 2 \leq x^2 + 5x + a < 7(2x^2 - 3x + 2)$, $\forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + a + 2 \geq 0, \forall x \\ 13x^2 - 26x - a + 14 > 0, \forall x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0, \Delta'_1 \leq 0 \\ a_2 > 0, \Delta'_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3(a + 2) \leq 0 \\ 169 - 13(-a + 14) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \geq -5 \\ 13a < 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\dfrac{5}{3} \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq a < 1$$

b) Để thoả được bài toán, trước hết ta phải có: $x^2 - mx + 4 \neq 0$, $\forall x$.

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4$.

Lúc đó: (2) $\Leftrightarrow x^2 + x + 4 \leq 2(x^2 - mx + 4)$, $\forall x$

$\Leftrightarrow x^2 - (2m + 1)x + 4 \geq 0$, $\forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị m cần tìm: $-\dfrac{5}{2} \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

Bài toán 6.19:

Giải và biện luận bất phương trình: $m|x + 5| < |x + 1|$.

Hướng dẫn giải

Nếu m = 0 thì BPT : $0 < |x + 1| \Leftrightarrow x \neq -1$: S = **R** \ {–1}

Nếu m < 0 thì BPT luôn có nghiệm đúng với mọi x : S = **R**

Nếu m > 0 thì BPT $\Leftrightarrow m^2(x + 5)^2 < (x + 1)^2$

$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 + 2(5m^2 - 1)x + 25m^2 - 1 < 0$

Khi m = 1 thì BPT : $8x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -3$: S = $(-\infty ; -3)$

Khi $m \neq 1$ thì TTB2 có 2 nghiệm $x = \frac{5m-1}{m-1}$, $x = \frac{5m+1}{m+1}$ nên với 0 < m < 1

thì $S = \left(-\infty;\frac{5m-1}{m-1}\right) \cup \left(\frac{5m+1}{m+1};+\infty\right)$, còn với m > 1 thì $S = \left(\frac{5m+1}{m+1};\frac{5m-1}{m-1}\right)$.

Bài toán 6. 20:

Tìm m để bất phương trình:

a) $x^2 + |x + m| < 2$ có nghiệm

b) $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0$ có nghiệm với mọi x.

Hướng dẫn giải

a) $|x + m| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 < x + m < 2 - x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - m - 2 < 0 \\ x^2 + x + m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > x^2 - x - 2 \\ m < -x^2 + x + 2 \end{cases}$$

Đặt $f(x) = x^2 - x - 2$ thì f(x) đạt GTNN tại đỉnh $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ và

$g(x) = -x^2 + x + 2$ thì g(x) đạt GTLN tại đỉnh $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$

Điều kiện có nghiệm: $\min f(x) < m < \max g(x) \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < m < \frac{9}{4}$.

b) Đặt $t = |x - m| \geq 0$ ta đưa về bài toán tìm m để:

$t^2 + 2t + 2 - m^2 > 0$ thoả với mọi $t \geq 0$

Cho t = 0 thì $2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 2 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$

Đảo lại , khi $|m| < \sqrt{2} \Rightarrow 2 - m^2 > 0$

mà $t \geq 0 \Rightarrow t^2 + 2t \geq 0$ nên $t^2 + 2t + 2 - m^2 > 0$, $\forall t \geq 0$

Vậy giá trị cần tìm : $|m| < \sqrt{2}$.

Bài toán 6. 21:

Tìm m để bất phương trình:

a) $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$ được nghiệm đúng $\forall x \in [1; 2]$.

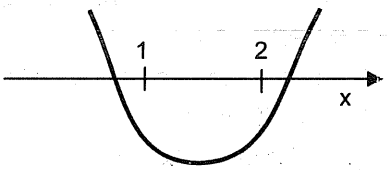
b) $x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 > 0$ nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1 - m^2$ là hàm bậc hai có a = 1 > 0 nên bề lõm hướng lên, do đó:

$f(x) \le 0, \forall x \in [1; 2]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 \le 0 \\ 1 - m^2 \le 0 \end{cases}$



$\Leftrightarrow m^2 \ge 1 \Leftrightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge 1$.

b) BPT $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3m + 2) > 0$

Tam thức bậc hai có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 3m - 2$

Xét $3m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ thì $f(x) = (x - 1)^2 > 0, \forall x \ne 1$: thỏa mãn.

Xét $3m - 2 > 1 \Leftrightarrow m > 1$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $x > 3m - 2$.

Điều kiện: $3m - 2 < 2 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$. Kết hợp thì $1 < m < \frac{4}{3}$.

Xét $3m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 1$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3m - 2$ hoặc $x > 1$.

Điều kiện: $3m - 2 > -2 \Leftrightarrow m > 0$.Kết hợp thì $0 < m < 1$.

Vậy điều kiện cần tìm là $0 < m < \frac{4}{3}$.

Bài toán 6. 22:

Xác định m để :

a) $(m - 1)x^2 + 2x + m + 1 > 0$ với mọi $x > 0$.

b) $x^2 + (3 - m)x - 2m + 3 > 0$ với mọi $x \le -4$.

Hướng dẫn giải

a) – Xét $m = 1$: $f(x) = 2x + 2 > 0, \forall x > -1$: chọn

– Xét $m < 1$: TTB2 có $\Delta' = 1 - (m - 1)(m + 1) = 2 - m^2$

Nếu $\Delta' \le 0$ thì $f(x) \le 0, \forall x$: loại

Nếu $\Delta' > 0$ thì $f(x) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$: loại

– Xét $m > 1$: Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 > 2$. Chọn $m > \sqrt{2}$: thỏa mãn.

Nếu $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m^2 \le 2$. Chọn $1 < m \le \sqrt{2}$.

Điều kiện $x_1 \le x_2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P \ge 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{m-1} \ge 0 \\ \frac{-2}{m-1} < 0 \end{cases}$: Đúng vì $m > 1$

Vậy giá trị cần tìm là $m \ge 1$.

b) $\Delta = m^2 + 2m - 3$.

Xét $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$ thì: $f(x) > 0, \forall x$: thỏa mãn..

Xét $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \le -3$ hoặc $m \ge 1$.

Điều kiện $-4 \le x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \Delta \ge 0, af(-4) \ge 0, \frac{S}{2} \ge -4$

Giải ra được kết quả $m \ge -\frac{7}{2}$.

Bài toán 6. 23:

Xác định tham số m để:

a) $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) \geq m, \forall x$ (*)

b) $mx^4 + 2mx^3 - 4x^2 - 2mx + m > 0, \forall x$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) = x(x + 6)(x + 2)(x + 4)$

$= (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8)$

Đặt $t = x^2 + 6x + 4$ thì $t = (x + 3)^2 - 5 \geq -5$

(*) $\Leftrightarrow (t - 4)(t + 4) \geq m, \forall t \geq -5 \Leftrightarrow m \leq t^2 - 16, \forall t \geq -5.$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{t\geq -5}(t^2 - 16) \Leftrightarrow m \leq -16.$

b) Xét $x = 0$ thì $m > 0$. Xét $x \neq 0$, cho 2 vế cho $x^2 > 0$

$$mx^2 + 2mx - 4 - \frac{2m}{x} + \frac{m}{x^2} > 0 \Leftrightarrow m\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2m\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 > 0$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ thì $x^2 - tx - 1 = 0$.

Vì phương trình này có $\Delta = t^2 + 4 > 0, \forall t$ nên $t \in \mathbf{R}$.

Bài toán trở thành tìm m để: $m(t^2 + 2) + 2mt - 4 > 0, \forall t$

$$\Leftrightarrow mt^2 + 2mt + 2m - 4 > 0, \forall t \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - m(2m - 4) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m^2 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 0 \text{ hay } m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$$

Bài toán 6. 24:

Giải biện luận hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \quad (1) \\ (2 - m)x > 3 - m \quad (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + (a + 1)x + a \leq 0 \\ x^2 + (2a + 4)x + 8a \leq 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 4$.

Xét $m = 2$ thì (2) $\Leftrightarrow 0x > 1$: vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Xét $m \neq 2$, ta so sánh $\frac{m - 3}{m - 2}$ với -3 và 4 bằng cách xét dấu các hiệu:

$$E = \frac{m - 3}{m - 2} + 3 = \frac{4m - 9}{m - 2}, \quad F = \frac{m - 3}{m - 2} - 4 = \frac{5 - 3m}{m - 2}$$

$E > 0 \Leftrightarrow m < 2$ hoặc $m > \frac{9}{4}$, $E < 0 \Leftrightarrow 2 < m < \frac{9}{4}$

$F > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} < m < 2$; $F < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{3}$ hoặc $m > 2$.

Từ đó có các trường hợp:

Nếu $m \le \frac{5}{3}$: (2) $\Leftrightarrow x < \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $\frac{m-3}{m-2} < x < 4$

Nếu $\frac{5}{3} < m < 2$: (2) $\Leftrightarrow x < \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $-3 < x < 4$

Nếu $2 < m < \frac{9}{4}$: (2) $\Leftrightarrow x > \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $-3 < x < 4$

Nếu $m \ge \frac{9}{4}$: (2) $\Leftrightarrow x < \frac{m-3}{m-2}$. Hệ có nghiệm $\frac{m-3}{m-2} < x < 4$

b) Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x+a) \le 0\\(x+4)(x+2a) \le 0\end{cases}$

So sánh các nghiệm $-1, -a, -4, -2a$, ta xét các trường hợp sau:

Nếu $a \le 0$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}-1 \le x \le -a\\-4 \le x \le -2a\end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le a$

Nếu $0 < a \le \frac{1}{2}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}-1 \le x \le -a\\-4 \le x \le -2a\end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le -2a$

Nếu $\frac{1}{2} < a \le 1$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}-1 \le x \le -a\\-4 \le x \le -2a\end{cases}$: vô nghiệm.

Nếu $1 < a \le 2$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}-a \le x \le -1\\-4 \le x \le -2a\end{cases}$: vô nghiệm.

Nếu $2 < a \le 4$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}-a \le x \le -1\\-2a \le x \le -2a\end{cases}$: vô nghiệm.

Nếu $a > 4$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}-a \le x \le -1\\-2a \le x \le -4\end{cases} \Leftrightarrow -a \le x \le -4$

Vậy: Khi $a \le 0$: $S = [-1; -a]$. Khi $0 < a \le \frac{1}{2}$: $S = [-1; -2a]$

Khi $\frac{1}{2} < a \le 4$: $S = \varnothing$. Khi $a > 4$: $S = [-a; -4]$.

Bài toán 6. 25:

Tìm các tham số để hệ:

a) $\begin{cases}4x+1 < 7x-2 & (1)\\x^2-2ax+1 \le 0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm

b) $\begin{cases}x^2+2x+(m+1) \le 0\\x^2-4x-6(m+1) < 0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

a) (1) $\Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$. Giải (2): $\Delta' = a^2 - 1$.

– Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Với a = 1, nghiệm của BPT là x = 1 nên hệ vô nghiệm.

Với a = –1, nghiệm của BPT là x = –1 nên hệ vô nghiệm.

– Nếu $\Delta' < 0$ hay $-1 < a < 1$ thì bất phương trình (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

– Nếu $\Delta' > 0$ hay $a < -1$ hoặc $a > 1$ thì tam thức ở vế trái của (2) có hai nghiệm phân biệt: x_1, x_2 nên (2) $\Leftrightarrow x_1 \le x \le x_2$ (giả sử $x_1 < x_2$).

Theo định lí Viet, ta có $x_1x_2 = 1$ và $x_1 + x_2 = 2a$.

Khi $a < -1$ thì cả hai nghiệm x_1 và x_2 đều âm nên hệ vô nghiệm.

Khi $a > 1$ thì hai nghiệm x_1 và x_2 đều dương, vì $x_1x_2 = 1$ và $x_1 \neq x_2$ nên $x_1 < 1 < x_2$. Do đó, hệ có nghiệm.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $a > 1$.

b) Để ý bất phương trình đầu có tập nghiệm là ∅ hoặc {–1} hoặc $[x_1, x_2]$, còn bất phương trình sau có tập nghiệm là ∅ hoặc (x_3, x_4). Do đó để hai bất phương trình có nghiệm duy nhất thì bất phương trình đầu phải có nghiệm duy nhất: $\Delta_1 = 0 \Rightarrow 1 - (m - 1) = 0 \Rightarrow m = 0$.

Thử lại khi m = 0 thì hệ:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \le 0 \\ x^2 - 4x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \le 0 \\ x^2 - 4x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 4x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi m = 0.

Bài toán 6. 26:

Tìm tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} 20x^2 - 16xy + 8y^2 - 12x \ge 0 & (1) \\ -28x^2 - 16xy - 8y^2 + 36x + 16y - 13 \ge \dfrac{1-3m}{5+3m} & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Giả sử hệ bất phương trình đã cho có nghiệm. Nhân hai vế của bất phương trình (2) cho 3 và cộng vào bất phương trình (1)

Ta có: $-64x^2 - 64xy - 16y^2 + 96x + 48y - 39 \ge \dfrac{-9m+3}{3m+5}$

$$\Rightarrow -4(4x + 2y - 3)^2 > \frac{18}{3m+5} \Rightarrow 3m + 5 < 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{5}$$

Đảo lại, giả sử $m < -\dfrac{3}{5}$, ta có $\dfrac{1-3m}{3m+5} = -1 + \dfrac{6}{3m+5} < -1$

Để chứng minh hệ bất phương trình đã cho có nghiệm ta có thể chứng minh hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 20x^2 - 16xy + 8y^2 - 12x = 0 & (3) \\ -28x^2 - 16xy - 8y^2 + 36x + 16y - 13 = -1 & (4) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (4) cho 3 rồi cộng vào (3) ta có:

$-4(4x + 2y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3-4x}{2}$

Do đó: $20x^2 - 8(3 - 4x)x + 2(3 - 4x)^2 - 12x = 0$

$\Leftrightarrow 84x^2 - 84x + 18 = 0 \Leftrightarrow 14x^2 - 14x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = .\dfrac{7 \pm \sqrt{7}}{14}$ có nghiệm

Vậy hệ BPT đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m < -\dfrac{3}{5}$.

Bài toán 6. 27:

Tìm m để bất phương trình:

a) $2x + m > \sqrt{5-x}$ có nghiệm

b) $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + (2x^2 - 5x + 3)$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; 3\right]$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \sqrt{5-x}$ với $x \le 5$, $t \ge 0$ thì $t^2 = 5 - x$

BPT: $2(5 - t^2) + m > t \Leftrightarrow m > 2t^2 + t - 10$ (*)

$f(t) = 2t^2 + t - 10$ có $a = 2 > 0$, hoành độ đỉnh $t = -\dfrac{1}{4} < 0$

Điều kiện BPT cho có nghiệm là BPT (*) có nghiệm $t \ge 0$:

$m > \min\limits_{t \ge 0} f(t) \Leftrightarrow m > f(0) \Leftrightarrow m > -10.$

b) Điều kiện : $-\dfrac{1}{2} \le x \le 3$.Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ $(t \ge 0)$

$\Leftrightarrow t^2 = 3 + 5x - 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x = 3 - t^2$.

Ta có: $t.\sqrt{2} = \sqrt{(1+2x)(6-2x)} \le \dfrac{(1+2x)+(6-2x)}{2} = \dfrac{7}{2}$

nên $0 \le t \le \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ .BPT $\Leftrightarrow t > m + 3 - t^2 + 3 \Leftrightarrow m < t^2 + t - 6$

$f(t) = t^2 + t - 6$ có $a = 1 > 0$, hoành độ đỉnh $t = -\dfrac{1}{2} < 0$

Điều kiện BPT cho có nghiệm với mọi $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; 3\right]$ là $m < f(t)$, $\forall t \in \left[0; \dfrac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

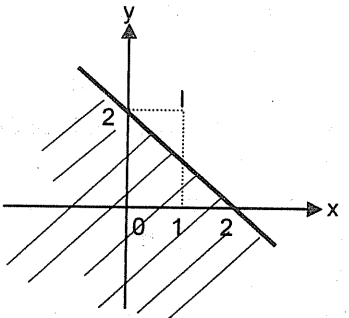
$\Leftrightarrow m < \min f(t) = f(0) \Leftrightarrow m < -6.$

Bài toán 6. 28:

Tìm điều kiện có nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y \le 2 & (1) \\ x+y+\sqrt{2x(y-1)+a} = 2 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Ta có (1) có nghiệm (x;y) là toạ độ các điểm thuộc nửa mặt phẳng giới hạn bởi d: x + y – 2 = 0, lấy phần chứa gốc O.



Và (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2x(y-1)+a} = 2-x-y$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x-y \ge 0 \\ 2x(y-1)+a = (2-x-y)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 2 \\ x^2+y^2-2x-4y-a+4=0 \quad (3) \end{cases}$

Ta có (3) là phương trình đường tròn tâm I(1; 2), bán kính

$R = \sqrt{a+1}$, $a > -1$

Điều kiện hệ có nghiệm khi đường tròn có điểm chung với d:

$$d(I;d) \le R \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{a+1} \Leftrightarrow 1 \le 2(a+1) \Leftrightarrow a \ge -\frac{1}{2}.$$

Bài toán 6. 29:

Xác định miền nghiệm của bất phương trình hai ẩn:

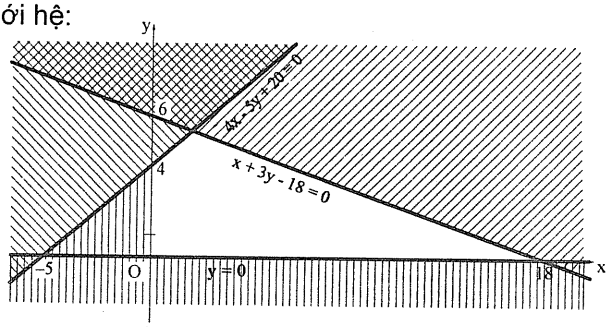
a) $\begin{cases} 4x-5y+20>0 \\ y>0 \\ -y+5 > \dfrac{x-3}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y \ge 9 \\ x \ge y-3 \\ 2y \ge 8-x \\ y \le 6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hệ đã cho tương đương với hệ:

$\begin{cases} 4x-5y+20>0 \\ y>0 \\ x+3y-18<0 \end{cases}$



Vẽ đường thẳng:

4x – 5y + 20 = 0

Thế x = y = 0 thì:

4x – 5y + 20 = 20 > 0.

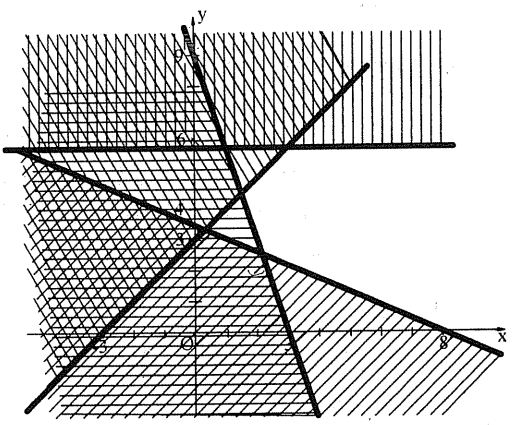
Vẽ đường thẳng y = 0 (trục hoành).Thế x = 0 , y = 4 thì y = 4 > 0

Vẽ đường thẳng x +3y–18 = 0.Thế x = y = 0 thì x + 3y – 18 = –18 < 0.

Miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch (không kể biên) trên hình.

b) Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3x+y-9\ge 0 \\ x-y+3\ge 0 \\ x+2y-8\ge 0 \\ y-6\le 0 \end{cases}$$



Vẽ lần lượt 4 đường thẳng
$3x + y - 9 = 0$, $x - y + 3 = 0$,
$x + 2y - 8 = 0$ và $y - 6 = 0$.
Gạch bỏ các nửa mặt phẳng không thoả mãn.
Miền nghiệm là miền không bị gạch bỏ trên mặt phẳng.

Bài toán 6. 30:

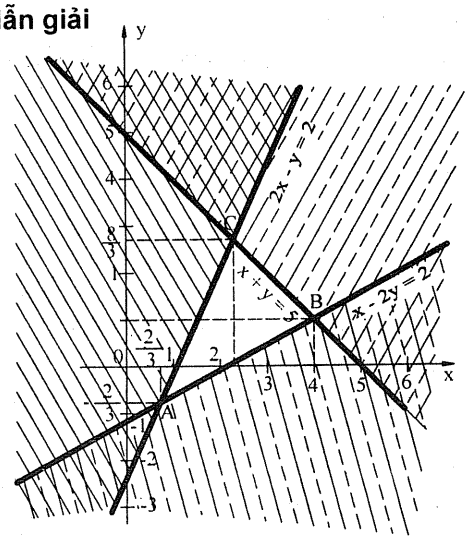
Trong miền nghiệm (S) là tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 2x-y\ge 2 \\ x-2y\le 2 \\ x+y\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

. Tìm GTLN của $f(x ; y) = 3x – 12y + 7$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-2\ge 0 \\ x-2y-2\le 0 \\ x+y-5\le 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$$



Vẽ 4 đường thẳng:
$2x – y – 2 = 0$, $x – 2y – 2 = 0$,
$x + y – 5 = 0$ và $x = 0$.
Gạch bỏ các nửa mặt phẳng không thoả mãn.
Miền nghiệm (S) là miền tam giác ABC (kể cả biên) với $A\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $B(4 ; 1)$, $C\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Ta có $f\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right) = 17$; $f(4 ; 1) = 7$; $f\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right) = -18$

So sánh thì $\max f(x;y) = 17$ đạt được tại A.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 6. 1: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \le -1$ b) $\frac{(x-1)(x^3-1)}{x^2+(1+2\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}} \le 0$

Hướng dẫn

a) Chuyển vế rồi xét dấu. Kết quả S = $(-\infty, -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$

b) Kết quả S = $(-1-\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \cup \{1\}$.

Bài tập 6. 2: Giải các bất phương trình:

a) $x^2+(x+1)^2 \le \frac{15}{x^2+x+1}$ b) $\frac{(x+1)^3-1}{(x-1)^3+1} > 1$

Hướng dẫn

a) Kết quả $-2 \le x \le 1$

b) Chuyển vế rồi xét dấu. Kết quả $x > 0$.

Bài tập 6. 3: Giải bất phương trình :

a) $\left|4(\sqrt{(1-x^2)^3}-x^3)+3(x-\sqrt{1-x^2})\right| \le \sqrt{2}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{(1-x)^3}\right] < 2\sqrt{2}+\sqrt{2-2x^2}$

Hướng dẫn

a) Đặt x = sint. Kết quả $-1 \le x \le 1$

b) Đặt x = sint. Kết quả $-1 \le x \le 1$

Bài tập 6. 4: Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{x^4-2x^2+1}+x \ge 1$

b) $\sqrt{9x^2+16}(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}) > 12x-8$

Hướng dẫn

a) $\sqrt{x^4-2x^2+1}+x \ge 1 \Leftrightarrow |x^2-1|+x-1 \ge 0$

Kết quả $x \le -2, x \ge 0$

b) Kết quả $\left[-2;\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{3};2\right]$

Bài tập 6. 5: Giải hệ:

a) $\begin{cases} y-|x^2-x| \ge 1 \\ |y-2|+|x+1| \le 1, x, y \in Z \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{xy}+\sqrt{1-y} \le \sqrt{y} \\ 2\sqrt{xy-y}-\sqrt{y} = -1 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Vì x, y nguyên và $|y-2| + |x+1| \le 1$ nên $|x+1| = 0$ hay 1.

Kết quả (0;0).(1;1),(1;2),(1;3)

b) Kết quả (1;1)

Bài tập 6. 6: Tìm điều kiện để hệ có nghiệm:

a) $\begin{cases} ax^2+bx+c>0 \\ bx^2+cx+a>0 \\ cx^2+ax+b>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x^2+2xy-y^2\geq 3 \\ 2x^2+2xy+y^2\leq a \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Cộng 3 bất phương trình vế theo vế. Kết quả a + b + c >0

b) Kết quả a ≥ 1

Bài tập 6. 7: Định tham số m để:

a) $(x+2)(x+4)(x^2+6x+10)\geq m, \forall x\in R$.

b) $x^4+mx^3+x^2+mx+1>0, \forall x$

Hướng dẫn

a) Đặt t = (x+2)(x+4) = ^{x2} + 6x +8. Kết quả m ≤ -1

b) Kết quả | m | $\leq \frac{3}{2}$

Bài tập 6. 8: Tìm m để bất phương trình:

a) $(m-2)x^2-2(m-1)x+m-1\leq 0, \forall x$

b) $\frac{4x^2-6x+5}{x^2+(m+1)x+2m+7}>0, \forall x$

Hướng dẫn giải

a) Xét m=2 và m $\neq$ 2. Kết quả m ≤ 1

b) Kết quả $-3 < m < 9$

Bài tập 6. 9: Với những giá trị nào của tham số thì bất phương trình:

a) $(2m^2+m-6)x^2+(2m-3)x-1>0$ vô nghiệm

b) $\frac{x}{1+|x|}\geq ax^2+x$ có nghiệm với mọi x.

Hướng dẫn

a) Xét $2m^2$ + m –6 =0 và khác 0.

Kết quả $-\frac{5}{6}\leq m\leq \frac{3}{2}$.

b) Kết quả $-\frac{13}{4}< a < 3$

Bài tập 6. 10: Cho 2003 số dương $x_1, x_2, ..., x_{2003}$ thoả mãn

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le x_2 - x_1 \\ x_2^2 + x_3^2 \le x_3 - x_2 \\ .... \\ .x_{2001}^2 + x_{2002}^2 \le x_{2002} - x_{2001} \\ x_{2002}^2 + x_{2003}^2 \le x_{2003} - x_{2002} \end{cases}$$

Chứng minh trong 2003 số đó có hai số x, y sao cho: $|x-y| < \frac{1}{2.10^3}$.

Hướng dẫn

Từ giải thiết thì $\begin{cases} 0 \le x_2 - x_1 \\ 0 \le x_3 - x_2 \\ .... \\ .0 \le x_{2012} - x_{2011} \\ 0 \le x_{2013} - x_{2012} \end{cases}$

Nên xếp thứ tự thành dãy $x_1 \le x_2, \le ... \le x_{2013}$.

Bài tập 6. 11: Tìm a để tập nghiệm của hệ bất phương trình:

$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \le y \\ y \le 2a + 4 - 3x \end{cases}$ chứa đoạn [–2; –1]

Hướng dẫn giải

Kết quả $-\frac{7}{2} \le a \le 1$

Bài tập 6. 12: Trên (S) là tập hợp các điểm (x ; y) thoả mãn hệ:

$\begin{cases} 3x + y \ge 9 \\ x + 2y \ge 8 \\ x + 6y \ge 2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$ .Tìm GTNN của F = 2x + 3y – 5.

Hướng dẫn giải

Vẽ miền nghiệm đa giác rồi tìm các đỉnh biên.Kết quả min F = 8. $\overline{MA}$

Chuyên đề 7: VECTƠ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Vectơ và phép toán

- Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- Quy tắc về hiệu : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$
- Hình bình hành ABCD: $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}, \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$
- Điểm I là trung điểm đoạn AB $\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với M tuỳ ý.
- Điểm M được gọi là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

  Với mọi điểm O thì có: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.
- Phân tích theo 2 vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương:

  $\vec{c} = m.\vec{a} + n.\vec{b}$, m và n duy nhất
- Tâm tỉ cự của hệ n điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ kèm n hệ số $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ có tổng $k_1 + k_2 + ... + k_n \neq 0$ là điểm duy nhất I thoả mãn

  $$k_1.\vec{IA_1} + k_2.\vec{IA_2} + ... + k_n.\vec{IA_n} = \vec{0}.$$

  Khi các hệ số $k_i = 1$ thì I gọi là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$.
- Điều kiện thẳng hàng: A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
- Điều kiện song song: Hai đường thẳng AB và MN song song khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$ và điểm A không thuộc đường thẳng MN.
- Điểm M thuộc đường thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}, x + y = 1$.
- Điểm M thuộc đoạn thẳng AB

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thì:

  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Dấu = khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

  $|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Dấu = khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.

Yếu tố tam giác

- Điểm G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

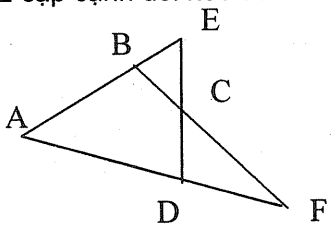
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với M bất kỳ.
- Điểm M nằm trên cạnh BC của tam giác ABC thì:

  $$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$$

- Điểm M thuộc miền trong tam giác ABC
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.
- Tam giác ABC có trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O thì:
  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
- Tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I thì:
  $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
- Tam giác ABC ba đường đối trung (đường thẳng đối xứng của trung tuyến qua phân giác trong tương ứng) đồng quy tại một điểm L, gọi là điểm Lemoin thỏa mãn $a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.
- Hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Có thể thay đổi thứ tự đỉnh của 2 tam giác.

Trục tọa độ

- Hai điểm A(a), B(b) trên trục Δ có gốc O: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a$
- Tỉ số đơn của 3 điểm A,B,C trên trục Δ : $(ABC) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$
- Tỉ số kép của 4 điểm A,B,C, D trên trục Δ : $(ABCD) = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} : \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$
- Hàng điểm điều hòa A,B,C,D : $(ABCD) = -1$
- Hệ thức tọa độ A(a), B(b), C(c), D(d):
  $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$
- Hệ thức Descartes: $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$
- Hệ thức Newton: Với I là trung điểm AB
  $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$
- Hệ thức Maclaurin: Với J là trung điểm CD
  $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$
- Chùm điều hòa: Bốn đường thẳng đồng quy hoặc đội một song song lập thành một chùm điều hòa khi chúng đi qua bốn điểm của một hàng điểm điều hòa.
- Tư giác toàn phần: Tứ giác lồi và thêm 2 cặp cạnh đối kéo dài cắt nhau. Tứ giác toàn phần có 3 đường chéo AC, BD, EF và mỗi đường chéo bị 2 đường chéo còn lại chia điều hòa



2. CÁC BÀI TOÁN

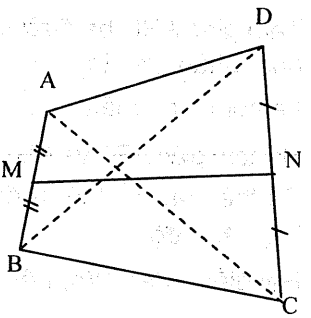
Bài toán 7. 1:

Cho bốn điểm tùy ý A, B, C, D. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ với M, N là trung điểm AB và BD.

Hướng dẫn giải:



a) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

Vì M, N là trung điểm AB và BD nên

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Bài toán 7. 2:

Cho sáu điểm tùy ý A, B, C, D, E và F. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$

b) Khi ABCDEF lục giác đều và M là một điểm bất kỳ thì:

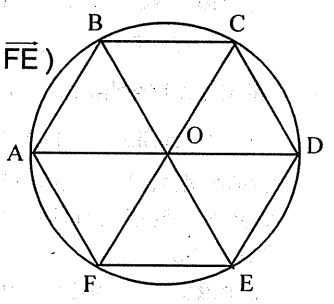
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$

nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Ta có



$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FE})$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FE})$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO})$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$

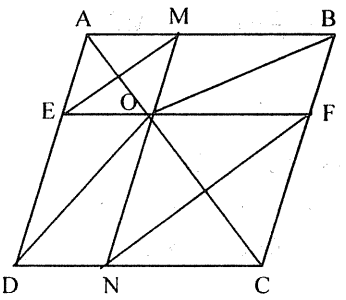
$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

Bài toán 7. 3:

Cho hình bình hành ABCD. Qua O là một điểm bất kỳ trên đường chéo AC, kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N, cắt AD và BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$.

Hướng dẫn giải:



a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: đúng.

b) Tứ giác AMOE và tứ giác OFCN là hình bình hành nên

$\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC}$

$= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FO}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC})$

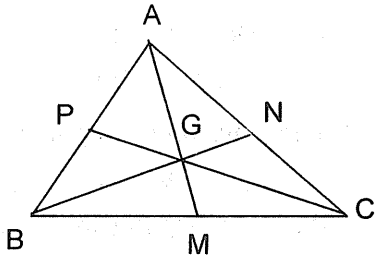
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Bài toán 7. 4:

Cho tam giác ABC có 3 trung tuyến AM, BN, CP.

Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải:



Vì M, N, P là trung điểm 3 cạnh nên:

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} =$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$

Cách khác: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì:

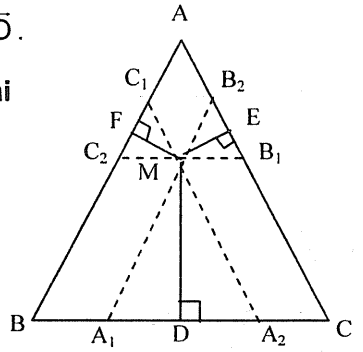
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

Bài toán 7. 5:

Cho tam giác đều ABC tâm O. Gọi M là một điểm tuỳ ý bên trong tam giác ABC và D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh BA, CA, AB.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Hướng dẫn giải



Qua M dựng các đoạn A_1B_2 // AB, B_1C_2 // BC, C_1A_2 // CA thì các tam giác MA_1A_2; MB_1B_2, MC_1C_2 là những tam giác đều và D, E, F là trung điểm của A_1A_2, B_2B_2, C_1C_2.

Ta có: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$

$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MA}_2) + (\overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MB}_2) + (\overrightarrow{MC}_1 + \overrightarrow{MC}_2)]$

$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MC}_2) + (\overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MA}_2) + (\overrightarrow{MC}_1 + \overrightarrow{MB}_2)]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Bài toán 7. 6:

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn tâm O.

Chứng minh $\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải:

Ta xét 2 trường hợp n chẵn và n lẻ.

– Nếu n chẵn thì n = 2m nên A_1A_{m+1}, A_2A_{m+2},...A_mA_{2m} là các đường kính nhận tâm O làm trung điểm nên $\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n$

$= (\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_{m+1}) + (\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_{m+2}) + ... + (\overrightarrow{OA}_m + \overrightarrow{OA}_{2m}) = \vec{0}$

– Nếu n lẻ thì n = 2m + 1, ta chứng minh

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n$ có 2 giá khác nhau.

Thật vậy, xét đường thẳng OA_1 thì các cặp vectơ $\overrightarrow{OA}_2$ và $\overrightarrow{OA}_{2m+1}$, $\overrightarrow{OA}_3$ và $\overrightarrow{OA}_{2m}$, ..., $\overrightarrow{OA}_m$ và $\overrightarrow{OA}_{m+1}$ đối xứng nhau qua đường thẳng OA_1 nên ghép theo các tổng này thì vectơ $\vec{u}$ có giá là đường thẳng OA_1.

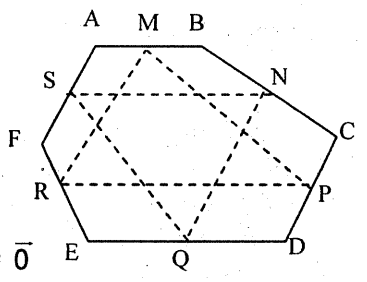
Tương tự xét đường thẳng OA_2 thì các cặp vectơ $\overrightarrow{OA}_3$ và $\overrightarrow{OA}_1$, $\overrightarrow{OA}_4$ và $\overrightarrow{OA}_{2m+1}$... đối xứng nhau qua đường thẳng OA_2 nên vectơ $\vec{u}$ có giá là đường thẳng OA_2.

Vậy vectơ $\vec{u}$ có 2 giá khác nhau nên $\vec{u} = \vec{0}$.

Bài toán 7. 7:

Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

Nên $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}$

Do đó hai tam giác MPR và NQS cùng trọng tâm.

Bài toán 7. 8:

Cho điểm G là trọng tâm tứ giác ABCD và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC.

a) Chứng minh rằng G là điểm chung của các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD'. Điểm G chia các đoạn thẳng đó theo các tỉ số nào?

b) Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tứ giác A'B'C'D'.

Hướng dẫn giải:

a) Vì G là trọng tâm tứ giác ABCD nên :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Mà A' là trọng tâm tam giác BCD nên: $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA'}$

Do đó: $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'}$ nên G, A và A' thẳng hàng.

Tương tự: $\overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC} = -3\overrightarrow{GC'}$, $\overrightarrow{GD} = -3\overrightarrow{GD'}$

Nên G, B, B' thẳng hàng, G, C, C' thẳng hàng và G, D, D' cũng thẳng hàng.

Vậy G là điểm chung của bốn đoạn AA', BB', CC' và DD'

Điểm G chia các đoạn AA', BB', CC' và DD' theo tỉ số k = –3.

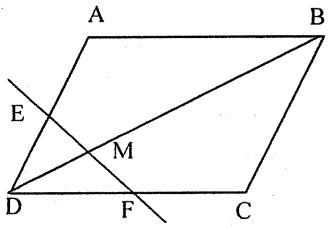
b) Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -3(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'}) = \vec{0}$

Vậy G cũng là trọng tâm tứ giác A'B'C'D'.

Bài toán 7. 9:

Một đường thẳng cắt các cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành ABCD lần lượt tại các điểm E, F và M, mà $\overrightarrow{DE} = m.\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n.\overrightarrow{DC}$ (m, n > 0). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n.

Hướng dẫn giải:



Đặt $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM}$

Thì $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$

nên: $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DE}$

$= x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - m\overrightarrow{DA} = (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$

và $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA} + (x-n)\overrightarrow{DC}$

Ta có: $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x-m)\overrightarrow{DA} + x.\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x-n)\overrightarrow{DC}$

Do $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên: $\begin{cases} x - m = xy \\ x = y(x-m) = xy - yn \end{cases}$

Hướng dẫn giải ra được: $y = -\dfrac{m}{n}$ và $x = \dfrac{m.n}{m+n}$. Vậy: $\overrightarrow{DM} = \dfrac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$.

Bài toán 7. 10:

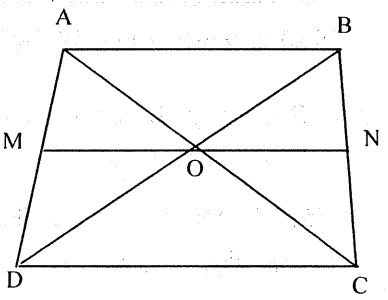
Cho hình thang ABCD, đáy AB = a, CD = b, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Qua O vẽ đường thẳng song song với đáy hình thang, đường thẳng này cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự tại M và N.

Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = \dfrac{b.\overrightarrow{AB} + a.\overrightarrow{DC}}{a+b}$.

Hướng dẫn giải:

Do MN // AB // CD nên:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{DC}=\frac{a}{b}$$



Do đó $\overrightarrow{MA}=-\frac{a}{b}\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NB}=-\frac{a}{b}\overrightarrow{NC}$,

nên: $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{a}{b}\overrightarrow{OD}}{1+\frac{a}{b}}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OB}+\frac{a}{b}\overrightarrow{OC}}{1+\frac{a}{b}}$

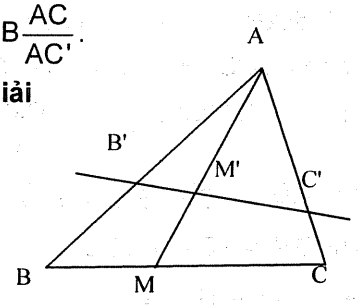
Vậy: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\frac{a}{b}\overrightarrow{DC}}{1+\frac{a}{b}}=\frac{b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{DC}}{a+b}$.

Bài toán 7. 11:

Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M. Đường thẳng Δ cắt các đoạn AB, AC, AM lần lượt tại B',C', M'.

Chứng minh rằng: $BC.\frac{AM}{AM'}=MC.\frac{AB}{AB'}+MB\frac{AC}{AC'}$.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \frac{AM}{AM'}.\overrightarrow{AM'}=\frac{MC}{BC}.\frac{AB}{AB'}\overrightarrow{AB}+\frac{MB}{BC}.\frac{AC}{AC'}\overrightarrow{AC'}$

Vì M', B', C' thẳng hàng nên

$$\frac{AM}{AM'}=\frac{MC}{BC}.\frac{AB}{AB'}+\frac{MB}{BC}.\frac{AC}{AC'}\Rightarrow BC.\frac{AM}{AM'}=MC.\frac{AB}{AB'}+MB.\frac{AC}{AC'}.$$

Bài toán 7. 12:

Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh BC = a, CA = b, AB = c và trọng tâm G.

Chứng minh nếu : $a.\overrightarrow{GA}+b.\overrightarrow{GB}+c.\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ .Theo giả thiết:

$\vec{0}=a.\overrightarrow{GA}+b.\overrightarrow{GB}+c.\overrightarrow{GC}=-a.\overrightarrow{GB}-a.\overrightarrow{GC}+b.\overrightarrow{GB}+c.\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow (b-a)\overrightarrow{GB}+(c-a)\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow (b-a)\overrightarrow{GB}=(a-c)\overrightarrow{GC}$

$\Rightarrow b-a=0$ và $a-c=0$ (vì $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GC}$ không cùng phương)

Vậy: a = b = c nên ABC là tam giác đều.

Bài toán 7. 13:

Cho tam giác ABC có 3 đường phân giác AA', BB', CC' . Chứng minh nếu $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ thì tam giác ABC đều.

Hướng dẫnn giải

Giả sử $\overrightarrow{AC'}=m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'}=n\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'}=p\overrightarrow{CA}$ thì

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}\Rightarrow m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}+p\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}+p(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\vec{0}\Rightarrow(m-p)\overrightarrow{AB}+(n-p)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

Vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ không cùng phương nên m– p = n– p =0 do đó m = n = p.

Các điểm C', A', B' chia AB, BC, CA theo cùng một tỉ số k nên AA', BB', CC' đồng quy và $k^3 = -1$ do đó k = –1.

Vậy C', A', B' là các trung điểm các cạnh nên tam giác ABC đều.

Bài toán 7. 14:

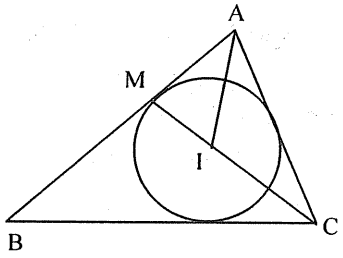
Cho tam giác ABC với các cạnh AB = c, BC = a, CA = b.

a) Gọi CM là đường phân giác trong của góc C. Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{CM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Hướng dẫn giải



a) Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{AM}{BM}=\frac{CA}{CB}=\frac{b}{a}\text{ suy ra }\overrightarrow{MA}=-\frac{b}{a}\overrightarrow{MB}$$

Do đó $\overrightarrow{CM}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a}\overrightarrow{CB}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$.

b) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM. Bởi vậy theo câu a) ta có thể biểu thị vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{AC}{AC+AM}\overrightarrow{AB}+\frac{AM}{AC+AM}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{b}{a+b+c}(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA})+\frac{c}{a+b+c}(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA})$$

Suy ra: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Cách khác: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IC}=\frac{-a}{c}\overrightarrow{IA}+\frac{-b}{c}\overrightarrow{IB}$.

Qua đỉnh C , vẽ 2 đường thẳng song song với 2 phân giác AI, BI tạo thành hình bình hành CA'IB'. Sử dụng quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ và dùng tính chất đường phân giác để suy ra kết quả.

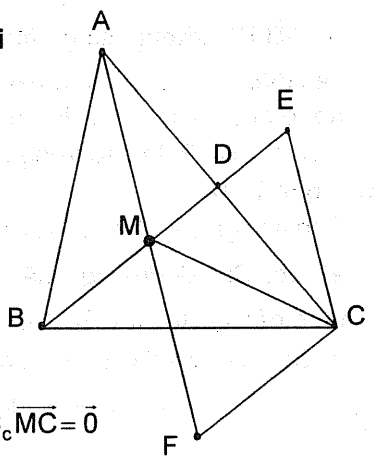
Bài toán 7. 15:

Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Với mỗi điểm M, đặt $S_a = S_{BMC}$, $S_b = S_{AMC}$, $S_c = S_{AMB}$. Chứng minh:

a) $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nếu M nằm trong tam giác ABC

b) $-S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nếu M nằm ngoài tam giác ABC và trong gócBAC

Hướng dẫn giải



a) Xét M nằm trong tam giác ABC.

Vẽ CF//BM, F∈ AM CE//AM, E ∈ BM.

$$\frac{MF}{MA} = \frac{DC}{DA} = \frac{S_{BMC}}{S_{BMA}} = \frac{S_a}{S_c} \Rightarrow \overrightarrow{MF} = -\frac{S_a}{S_c}\overrightarrow{MA}.$$

Tương tự $\overrightarrow{ME} = -\frac{S_b}{S_c}\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME} = -\frac{S_a}{S_c}\overrightarrow{MA} - \frac{S_b}{S_c}\overrightarrow{MB}$$

$$S_c\overrightarrow{MC} = -S_a\overrightarrow{MA} - S_b\overrightarrow{MB} \Rightarrow S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

b) Chứng minh tương tự.

Bài toán 7. 16:

Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC nằm trong tam giác AMN.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, đặt $\frac{AM}{AB} = \alpha ; \frac{AN}{AC} = \beta$ ($0<\alpha, \beta<1$) thì

$$\frac{BM}{BA} = 1-\alpha ; \quad \frac{CN}{CA} = 1-\beta$$

và $\alpha\beta = \frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABN}}.\frac{S_{ABN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$.

Vì các cặp vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN}$ cùng hướng nên

$$\begin{cases}(\alpha-1)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \\ (\beta-1)\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\alpha-1}{\alpha}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} \\ \frac{\beta-1}{\beta}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{\beta}\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GC}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{\beta-1}{\beta}\right)\overrightarrow{GA}+\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{GM}+\frac{1}{\beta}\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Mà $(1-\alpha)(1-\beta)>0 \Rightarrow 1-\alpha-\beta+\alpha\beta>0$

$\Rightarrow 2\alpha\beta-\alpha-\beta+\alpha\beta>0 \Rightarrow 3\alpha\beta>\alpha+\beta$

$$\Rightarrow 3>\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\Rightarrow 1+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1-\frac{1}{\beta}\right)>0\Rightarrow 1+\frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{\beta-1}{\beta}>0$$

Do đó 3 hệ số $1+\frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{\beta-1}{\beta}>0\ \frac{1}{\alpha}>0;\frac{1}{\beta}>0$ nên G nằm trong tam giác AMN.

Bài toán 7. 17:

Cho tứ giác ABCD và các điểm M, N, P, Q; các số m, n, p, q $\neq$ 0 thỏa mãn:

$$m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{ND}+n\overrightarrow{NC}=p\overrightarrow{PA}+q\overrightarrow{PD}=p\overrightarrow{QB}+q\overrightarrow{QC}=\vec{0}.$$

Chứng minh nếu MN và PQ giao nhau tại I thì:

$$p\overrightarrow{IM}+q\overrightarrow{IN}=m\overrightarrow{IP}+n\overrightarrow{IQ}=\vec{0}.$$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, M, P theo thứ tự là tâm tỉ cự của hệ các điểm {A, B}; {A, D} với các hệ số tương ứng lần lượt là {m, n}; {p, q} do đó m + n $\neq$ 0 , p +q $\neq$ 0. Suy ra mp + np + nq + mq = (m + n)(p + q) $\neq$ 0.

Gọi K là tâm tỉ cự của hệ các điểm {A, B, C, D} với các hệ số tương ứng là {mp, np, nq, mq}. Ta có:

$$mp\overrightarrow{KA}+np\overrightarrow{KB}+nq\overrightarrow{KC}+mq\overrightarrow{KD}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow p\left(m\overrightarrow{KA}+n\overrightarrow{KB}\right)+q\left(n\overrightarrow{KC}+m\overrightarrow{KD}\right)=\vec{0}$$

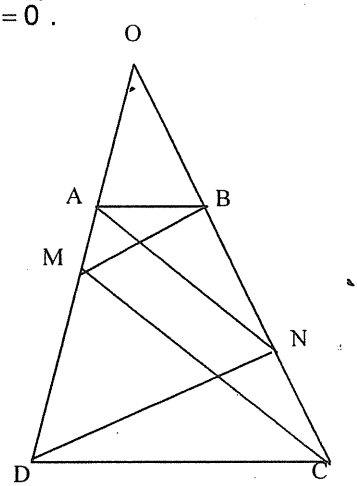
$$\Rightarrow p(m+n)\overrightarrow{KM}+q(m+n)\overrightarrow{KN}=\vec{0}\Rightarrow p\overrightarrow{KM}+q\overrightarrow{KN}=\vec{0}$$

nên K thuộc MN.Tương tự $m\overrightarrow{KA}+n\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$ và K thuộc PQ.

Suy ra: I trùng K và do đó $p\overrightarrow{IM}+q\overrightarrow{IN}=m\overrightarrow{IP}+n\overrightarrow{IQ}=\vec{0}$.

Bài toán 7. 18:

Cho hình thang ABCD với các cạnh đáy là AB và CD (các cạnh bên không song song). Chứng minh rằng nếu cho trước một điểm M nằm giữa hai điểm A, D thì có một điểm N nằm trên cạnh BC sao cho AN // MC và DN // MB.



Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.

Đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{OD}=k\vec{a}$, khi đó $\overrightarrow{OC}=k\vec{b}$ (vì AB//DC). Giả sử $\overrightarrow{OM}=m\vec{a}$.

Ta xác định điểm N trên BC sao cho AN // CM. Ta chứng minh rằng DN // BM.

Vì N nằm trên BC nên $\overrightarrow{ON} = n\vec{b}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = n\vec{b} - \vec{a}$

Mặt khác $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = m\vec{a} - k\vec{b}$

Vì $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CM}$ cùng phương nên $\frac{n}{-k} = \frac{-1}{m}$ hay $n = \frac{k}{m}$.

Vậy $\overrightarrow{ON} = \frac{k}{m}\vec{b}$. Từ đó $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OD} = \frac{k}{m}\vec{b} - k\vec{a}$.

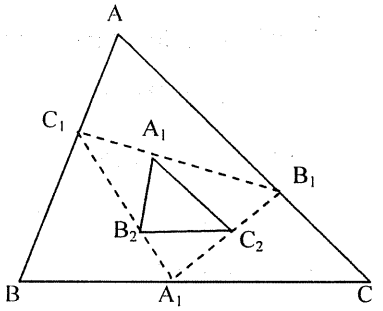
Mà $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = m\vec{a} - \vec{b} = -\frac{m}{k}\left(\frac{k}{m}\vec{b} - k\vec{a}\right) = -\frac{m}{k}\overrightarrow{DN}$

Vậy $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ cùng phương và B không thuộc đường thẳng DN nên DN // BM.

Bài toán 7. 19:

Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy các điểm tương ứng C_1, A_1, B_1 sao cho: $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \frac{1}{k}$. Trên các cạnh A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm tương ứng C_2, A_2, B_2 sao cho: $A_1C_2 : C_2B_1 = B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = k$. Chứng minh rằng: A_2C_2 // AC; C_2B_2 // CB; B_2A_2 // BA.

Hướng dẫn giải:



Lấy điểm O bất kì làm gốc, đặt:

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{c_1}$

$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{c_2}$

Theo giả thiết, ta có (do k > 0):

$$\overrightarrow{c_1} = \frac{\vec{b} + k\vec{a}}{1+k}, \overrightarrow{a_1} = \frac{\vec{c} + k\vec{b}}{1+k}, \overrightarrow{b_1} = \frac{\vec{b} + k\vec{a}}{1+k}$$

$$\overrightarrow{a_2} = \frac{\overrightarrow{b_1} + k\overrightarrow{c_1}}{1+k}, \overrightarrow{b_2} = \frac{\overrightarrow{c_1} + k\overrightarrow{a_1}}{1+k}, \overrightarrow{c_2} = \frac{\overrightarrow{a_1} + k\overrightarrow{b_1}}{1+k}$$

Do đó: $\overrightarrow{A_2C_2} = \overrightarrow{c_2} - \overrightarrow{a_2} = \frac{1}{k+1}\left[\left(\overrightarrow{a_1} + k\overrightarrow{b_1}\right) - \left(\overrightarrow{b_1} + k\overrightarrow{c_1}\right)\right]$

$$= \frac{1}{k+1}\left[\overrightarrow{a_1} + (k-1)\overrightarrow{b_1} - k\overrightarrow{c_1}\right]$$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}\left[\vec{c} + k\vec{b} + (k-1)\vec{a} + k(k-1)\vec{c} - k\vec{b} - k^2\vec{a}\right]$$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}\left[(k^2-k+1)\vec{c} - (k^2-k+1)\vec{a}\right] = \frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}(\vec{c}-\vec{a})$$

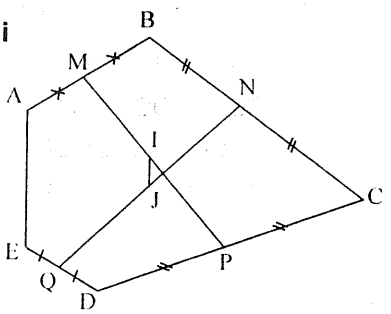
$$= \frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}\vec{AC}. \text{ Vì } k^2 - k + 1 > 0 \text{ nên } A_2C_2 \text{ // } AC$$

Chứng minh tương tự ta được: C_2B_2 // CB; B_2A_2 // BA.

Bài toán 7. 20:

Cho ngũ giác ABCDE. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ. Chứng minh rằng IJ // AE và $IJ = \frac{1}{4}AE$.

Hướng dẫn giải



Ta có: $2\vec{IJ} = \vec{IQ} + \vec{IN}$

$= \vec{IM} + \vec{MQ} + \vec{IP} + \vec{PN}$

$= \vec{MQ} + \vec{PN}$

$= \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{BD}) + \frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{AE}$

Do đó $\vec{IJ} = \frac{1}{4}\vec{AE}$. Vậy IJ // AE và $IJ = \frac{1}{4}AE$.

Bài toán 7. 21:

Cho tam giác ABC với các trung tuyến AM, BN, CP và tam giác A'B'C' với các trung tuyến A'M', B'N', C'P'. Chứng minh nếu $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ theo thứ tự cùng phương với $\vec{A'M'}, \vec{B'N'}, \vec{C'P'}$ thì $\vec{B'C'}, \vec{C'A'}, \vec{A'B'}$ theo thứ tự cùng phương với $\vec{AM}, \vec{BN}, \vec{CP}$.

Hướng dẫn giải

Gọi G' là trọng tâm tam giác A'B'C'. Vì $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ theo thứ tự cùng phương với $\vec{A'M'}, \vec{B'N'}, \vec{C'P'}$ nên ta có:

$\vec{BC} = k\vec{A'M'}, \vec{CA} = t\vec{B'N'}, \vec{AB} = m\vec{C'P'}$ $(k, t, m \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow k\vec{A'M'} + t\vec{B'N'} + m\vec{C'P'} = \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}k\vec{A'G'} + \frac{3}{2}t\vec{B'G'} + \frac{3}{2}\vec{C'G'} = \vec{0} \Rightarrow k\vec{A'G'} + t\vec{B'G'} + \vec{C'G'} = \vec{0}$

Mà G' trọng tâm tam giác A'B'C' nên $\vec{A'G'} + \vec{B'G'} + \vec{C'G'} = \vec{0}$

Vì $\vec{A'G'}, \vec{B'G'}, \vec{C'G'}$ đôi một không cùng phương nên $\frac{k}{1} = \frac{t}{1} = \frac{m}{1} \Rightarrow k = t = m.$

Suy ra:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{C'P'}+k\overrightarrow{N'B'}\right)=\frac{1}{2}.k.\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{G'B'}\right)=\frac{3k}{4}\overrightarrow{C'B'}$$

Do đó $\overrightarrow{AM}$ // $\overrightarrow{B'C'}$. Tương tự: $\overrightarrow{BN}$ // $\overrightarrow{C'A'}$; $\overrightarrow{CP}$ // $\overrightarrow{A'B'}$.

Bài toán 7. 22:

Cho hình vuông ABCD cạnh b. Tính

$|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}|$ và $|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}|$.

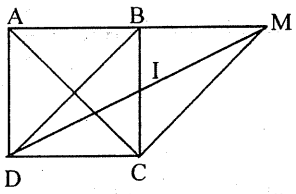
Hướng dẫn giải:

Ta có: $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}$

Nên : $|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CA}|=b\sqrt{2}$

Và $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ nên:

$|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}|=DB=b\sqrt{2}$



Vẽ hình bình thành CDBM thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.

$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}$ nên $|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}|=DM=2DI$

Mà $DI^2=b^2+(\frac{b}{2})^2=\frac{5}{4}b^2$ nên $|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}|=b\sqrt{5}$.

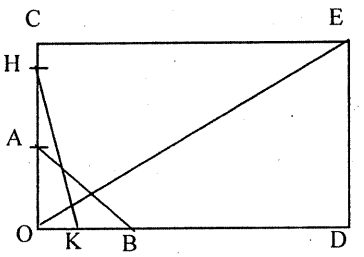
Bài toán 7. 23:

Cho tam giác vuông cân OAB với OA = OB = a. Dựng và tính độ dài các vectơ: $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}$; $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

Hướng dẫn giải

Vẽ điểm C, D sao cho $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OB}$, vẽ hình bình hành CODE thì: $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$

$|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}|=OE=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$



Vẽ điểm H, K sao cho:

$\overrightarrow{OH}=\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OK}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$

Thì: $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{KH}$

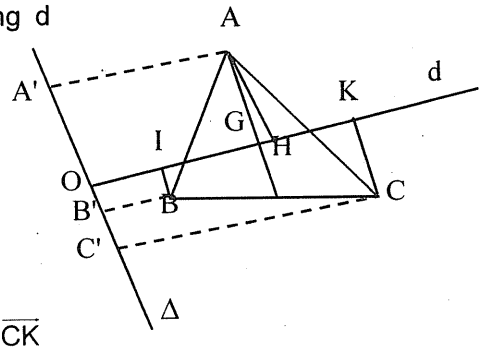
$$\left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right|=KH=\sqrt{(\frac{11}{4}a)^2+(\frac{3}{7}a)^2}=\frac{\sqrt{6073}}{28}a.$$

Bài toán 7. 24:

Đường thẳng (d) qua trọng tâm G của ΔABC. Gọi H, I, K là hình chiếu của A, B, C trên d. Chứng minh trong 3 đoạn AH, BI, CK có 1 số bằng tổng 2 số kia.

Hướng dẫn giải

Gọi (Δ) là 1 đường thẳng vuông góc d tại O. Xét phép chiếu theo phương d lên Δ :



$A \to A', B \to B', C \to C',$

$G, H, I, K \to O$

Do $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{C'O} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

G nằm trong ΔABC nên $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{CK}$ không thể cùng hướng, chẳng hạn:

$$\overrightarrow{AH} = -(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CK}) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AH}\right| = \left|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CK}\right| = \left|\overrightarrow{BI}\right| + \left|\overrightarrow{CK}\right|$$

$\Rightarrow$ AH = BI + CK (đpcm)

Bài toán 7. 25:

Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của O qua các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh trực tâm H của tam giác ABC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

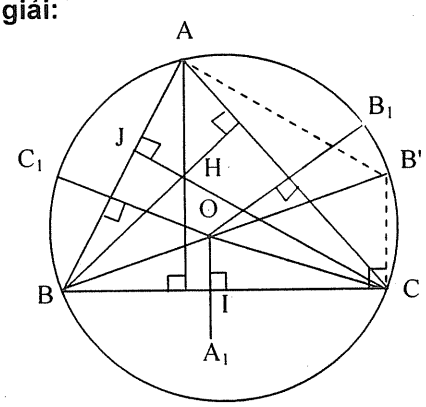
Hướng dẫn giải:

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O.

Ta có AHCB' là hình bình hành nên:

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$. Và do OI là đường trung bình của ΔBCB' nên:

$\overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1}$ suy ra: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA_1}$.



Do đó: $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AH}$.

Vì vậy AC_1HB_1 là hình bình hành và do $AH \perp C_1B_1$ nên nó là hình thoi suy ra AH là trung trực của C_1B_1

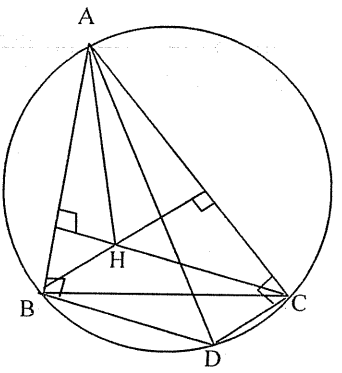
Tương tự ta chứng minh được BH, CH lần lượt là trung trực của A_1C_1, B_1A_1. Điều đó chứng tỏ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Bài toán 7. 26:

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác. Chứng minh $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

Suy ra ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

Vì AD là đường kính của đường tròn tâm O nên $BD \perp AB$, $DC \perp AC$.

Do đó CH // BD và BH // DC.

Vậy tứ giác HCDB là hình bình hành.

Do đó: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$

và: $\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO}$

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Bài toán 7. 27:

Cho 3 dây cung song song AA', BB', CC' của đường tròn (O). Chứng minh ba trực tâm của tam giác ABC', BCA', CAB' thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi H, I, K là trực tâm của Δ ABC', BCA', CAB' thì

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI}$,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK}$

$\Rightarrow \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{C'C}$

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C}$

Vì 3 dây AA', BB', CC' song song nên $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ cùng phương do đó $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HK}$ cùng phương, suy ra H, I, K thẳng hàng.

Bài toán 7. 28:

Cho hai tam giác ABC, $A_1B_1C_1$. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác A_1BC, B_1CA, C_1AB,và gọi G, G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm của tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng G, G_1, G_2 thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{G_2A_2} + \overrightarrow{G_2B_2} + \overrightarrow{G_2C_2} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{G_2A_2} + 3\overrightarrow{G_2B_2} + 3\overrightarrow{G_2C_2} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{G_2A_1} + \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_2C}\right) + \left(\overrightarrow{G_2B_1} + \overrightarrow{G_2C} + \overrightarrow{G_2A}\right) + \left(\overrightarrow{G_2C_1} + \overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B}\right) = \vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{G_2A_1} + \overrightarrow{G_2B_1} + \overrightarrow{G_2C_1}\right) + 2\left(\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_2C}\right) = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{G_2G_1} + 6\overrightarrow{G_2G} = \vec{0} \Rightarrow$ G, G_1, G_2 thẳng hàng.

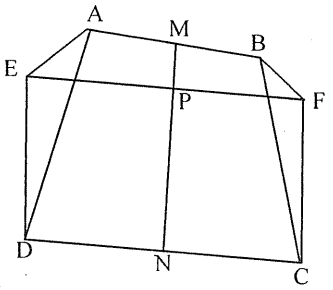
Bài toán 7. 29:

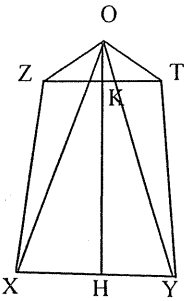
Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Về phía ngoài tứ giác, ta dựng các tam giác bằng nhau ADE, BCF. Chứng minh rằng 3 trung điểm của các đoạn AB, CD, EF cùng thuộc một đường thẳng.

Hướng dẫn giải

Lấy điểm O bất kì. Dựng các điểm X, Y, Z, T sao cho

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{BF}$





Ta có: OX = AD = BC = OY; OZ = AE = BF = OT.

Do đó các tam giác OXY, OZT cùng cân tại O. Gọi H, K là trung điểm của XY, ZT thì: $\widehat{HOX} = \widehat{HOY}$; $\widehat{KOZ} = \widehat{KOT}$.

Mà: $\widehat{ZOX} = \widehat{EAD} = \widehat{FBC} = \widehat{TOY}$ nên: $\widehat{HOX} = \widehat{HOY}$; $\widehat{KOX} = \widehat{KOY}$.

Suy ra tia OH và tia OK cùng thuộc một đường thẳng.

Gọi M, N, P là trung điểm của AB, CD, EF

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}\right) = \overrightarrow{OH}$

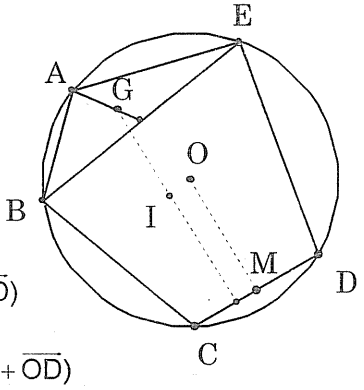
$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OT}\right) = \overrightarrow{OK}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}$ // $\overrightarrow{MP}$ hay M, N, P thẳng hàng: đpcm.

Bài toán 7. 30:

Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp. Qua mỗi trọng tâm của 3 điểm dựng đường thẳng vuông góc với đường thẳng qua 2 điểm còn lại. Chứng tỏ 10 đường thẳng đó đồng quy.

Hướng dẫn giải



Gọi G là trọng tâm Δ ABE, M là trung điểm CD và (d) là đường thẳng qua G vuông góc với CD thì (d) cùng phương với OM. Lấy N tuỳ ý trên (d) thì:

$\overrightarrow{GN} = 2t\overrightarrow{OM} = t(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + t(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

Chọn $t = -\frac{1}{3}$ thì $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$\Rightarrow N \equiv I : \overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

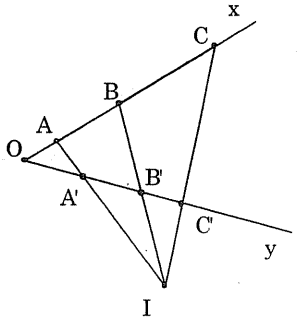
Tương tự, các đường thẳng kiểu (d) đều qua I, do đó chúng đồng quy tại I.

Bài toán 7. 31:

Cho góc xOy, trên Ox lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho OA: AB: BC = 1: 2: 3, trên Oy lấy lần lượt các điểm A',B',C' sao cho OA': A'B': B'C' = 3: 3: 2. Chứng minh AA', BB', CC' đồng quy.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{OC}=\vec{a}, \overrightarrow{OC'}=\vec{b}, \overrightarrow{OA}=\frac{1}{6}\vec{a}$



$\Rightarrow \overrightarrow{OA'}=\frac{3}{8}\vec{b}, \overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{OB'}=\frac{3}{4}\vec{b}$

$OA:AB \neq OA':A'B' \Rightarrow AA' \cap BB' = I$

nên tồn tại số x, y để $\overrightarrow{OI}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OA'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=y\overrightarrow{OB}+(1-y)\overrightarrow{OB'}$

$\Rightarrow \frac{x}{6}\vec{a}+\frac{3(1-x)}{8}\vec{b}=\frac{y}{2}\vec{a}+(1-y)\frac{3}{4}\vec{b}.$

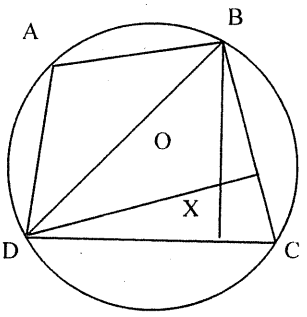
Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên đồng nhất thì có x = –3, y = –1 nên

$\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OC'} \Rightarrow \overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OC'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OC}) \Rightarrow \overrightarrow{C'I}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$ suy ra C, C, I thẳng hàng do đó AA', BB', CC' đồng quy.

Bài toán 7. 32:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

Hướng dẫn giải



Gọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD, ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=4\overrightarrow{OG}$

Tương tự, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OY}=4\overrightarrow{OG}$

Suy ra: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OY}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX} \Rightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{XY}$

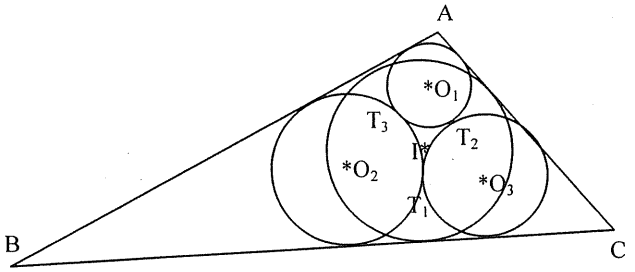
$\Rightarrow$ ABXY là hình bình hành. Do đó AX và BY cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn. Tương tự AX và CZ cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7. 33:

Cho tam giác ABC và các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nằm trong tam giác, đôi một tiếp xúc ngoài với nhau, theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc BÂC, CBA, AĈB. Gọi T_1, T_2, T_3 theo thứ tự là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2). Chứng minh rằng: AT_1, BT_2, CT_3 đồng quy.

Hướng dẫn giải

Giả sử R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính của (O_1), (O_2), (O_3)



Gọi (I, r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Vì r lớn hơn R_1, R_2, R_3 nên $-\frac{1}{r}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\neq 0$

Gọi K là tâm tỉ cự của hệ điểm {I, O_1, O_2, O_3} với các hệ số tương ứng

$$\left(-\frac{1}{r},\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2},\frac{1}{R_3}\right):\ -\frac{1}{r}\overrightarrow{KI}+\frac{1}{R_1}\overrightarrow{KO_1}+\frac{1}{R_2}\overrightarrow{KO_2}+\frac{1}{R_3}\overrightarrow{KO_3}=\vec{0}.$$

Ta có: $\begin{cases}-AO_1\overrightarrow{AI}+AI\overrightarrow{AO_1}=\vec{0}\\ T_1O_3\overrightarrow{T_1O_2}+T_1O_2\overrightarrow{T_1O_3}=\vec{0}\end{cases}$ và $\frac{AO_1}{R_1}=\frac{AI}{r}$

Nên $\begin{cases}-R_1\overrightarrow{AI}+r\overrightarrow{AO_1}=\vec{0}\\ R_3\overrightarrow{T_1O_2}+R_2\overrightarrow{T_1O_3}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{r}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{R_1}\overrightarrow{AO_1}=\vec{0}\\ \frac{1}{R_2}\overrightarrow{T_1O_2}+\frac{1}{R_3}\overrightarrow{T_1O_3}=\vec{0}\end{cases}$

Do đó $\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{R_1}\right)\overrightarrow{KA}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\overrightarrow{KT_1}=\vec{0}\Rightarrow K\in AT_1$

Tương tự $K\in BT_2, CT_3$ nên AT_1, BT_2, CT_3 đồng quy.

Bài toán 7. 34:

Gọi I là tâm tỉ cự của hệ $\{A_1, A_2 \ldots A_n\}$ ứng với các hệ số $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ và $\sum_{i\neq j}\alpha_i\neq 0,\ \forall j=1,2,\ldots,n$. Gọi I_j là điểm sao cho $\sum_{i\neq j}\alpha_i\overrightarrow{I_jA_i}=\vec{0}$ $(1\le j\le n)$. Chứng minh các đường thẳng A_iI_i (i = 1,2,...,n) đồng quy tại I.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{IA_i}=\vec{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{II_j}+\overrightarrow{I_jA_i})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overrightarrow{II_j}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{I_jA_i}=\vec{0}\Leftrightarrow(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overrightarrow{II_j}+\sum_{i\neq j}\alpha_i\overrightarrow{I_jA_i}+\alpha_j\overrightarrow{I_jA_j}=\vec{0}$$

mà $\sum_{i\neq j}\alpha_i\overrightarrow{I_jA_i}=0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overrightarrow{II_j}=-\alpha_j\overrightarrow{I_jA_j}$

Suy ra I_j, A_j, I thẳng hàng (đpcm)

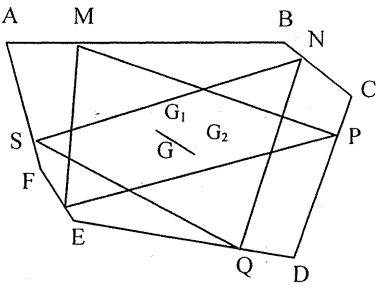
Bài toán 7. 35:

Cho lục giác ABCDEF. Các điểm M, N, P, Q, R,S theo thứ tự thay đổi trên các cạnh AB,BC, CD, DE, EF, FA sao cho: $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CD}=\frac{DQ}{DE}=\frac{ER}{EF}=\frac{FS}{FA}$.

Chứng minh hai trọng tâm của hai tam giác MPR, NQS luôn đối xứng với nhau qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CD}=\frac{DQ}{DE}=\frac{ER}{EF}=\frac{FS}{FA}=k$



Gọi O là trọng tâm của lục giác ABCDEF

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

Gọi G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác MPR, NQS.

Ta có: $3\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}$

$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}\right)+\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ER}\right)$

$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{ER}\right)=-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}\right)+k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)$

$=-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}\right)+k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+k\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)+k\left(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}\right)$

$=-\left[(1-k)\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}\right]-\left[(1-k)\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{OE}\right]-\left[(1-k)\overrightarrow{OF}+k\overrightarrow{OA}\right]$

$=-\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OS}\right)=-3\overrightarrow{OG_2}$ .Suy ra: $\overrightarrow{OG_1}=-\overrightarrow{OG_2}$: đpcm.

Bài toán 7. 36:

Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng θ. Chứng minh rằng với cách chọn Δ khác nhau, đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác Δ và trung điểm đoạn thẳng θ luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi A, B, C là ba đỉnh của tam giác Δ và DE là đoạn thẳng θ. Gọi G là trọng tâm tam giác Δ và M là trung điểm của DE thì với điểm I tuỳ ý, ta có: $\overrightarrow{IA}$ + $\overrightarrow{IB}$ + $\overrightarrow{IC}$ + $\overrightarrow{ID}$ + $\overrightarrow{IE}$ = $3\overrightarrow{IG}$ + $2\overrightarrow{IM}$.

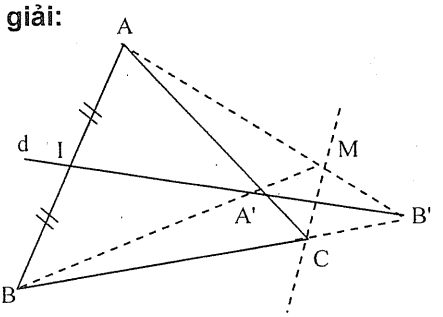
Bởi vậy nếu chọn I là trọng tâm của hệ điểm A, B, C, D, E tức là trọng tâm của hệ năm điểm đã cho thì I là điểm cố định và $3\overrightarrow{IG}$ + $2\overrightarrow{IM}$ = $\vec{0}$. Do $\overrightarrow{IG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IM}$

nên I, G, M thẳng hàng. Vậy GM luôn luôn đi qua điểm I cố định, chia đoạn thẳng GM theo tỉ số $-\frac{2}{3}$.

Bài toán 7. 37:

Cho tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua I, lần lượt cắt hai đường thẳng CA và CB tại A' và B'. Chứng minh rằng giao điểm M của AB' và A'B nằm trên một đường thẳng cố định

Hướng dẫn giải:



Đặt $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$, $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$

Xét tam giác ABB' với ba đường AC, BM và B'I đồng quy tại A'.

Vì $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ nên theo định lí Cê–va, ta có: $(-1)mn = -1$ hay $mn = 1$.

Từ $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$ ta suy ra:

$m\overrightarrow{MB'} = mn\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}$.

Vậy ta có $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$ và $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB'}$, điều này chứng tỏ rằng $\frac{CB}{CB'} = \frac{MA}{MA'}$

nên CM // AB.

Vậy điểm M luôn nằm trên đường thẳng cố định đi qua C và song song với AB.

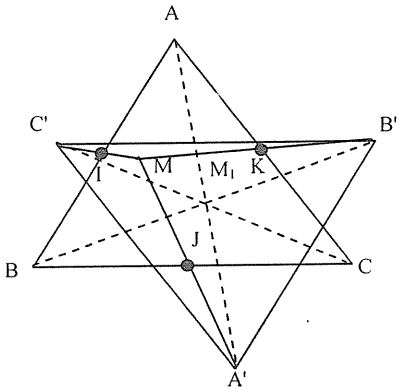
Bài toán 7. 38:

Cho tam giác ABC và điểm M tuỳ ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA. Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua trung điểm I, K, J của các cạnh BA, CA, AB. Chứng minh:

a) Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm M_1

b) Đường thẳng MM_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M di động.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{KJ}$ và $\overrightarrow{B'A'} = 2\overrightarrow{KJ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$

Vậy ABA'B' là hình bình hành, nên AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng.

Tương tự, BB' và CC' cũng cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng. Vậy ba đoạn thẳng AA', BB', CC' giao nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng.

b) Ta có: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'}$

và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MM_1}$.

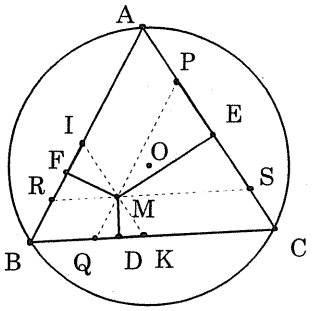
Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MG}$ (G là trọng tâm ΔABC) hay $\overrightarrow{MM_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$ nên M, M_1, G thẳng hàng.

Vậy đường thẳng MM_1 luôn đi qua điểm G cố định khi M di động.

Bài toán 7. 39:

M nằm trong tam giác đều ABC, hình chiếu M lên BC, CA, AB là D,E,F. Gọi G là trọng tâm của Δ DEF. Chứng tỏ MG qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải



Qua M vẽ các đoạn thẳng PQ,RS, IK lần lượt song song với AB, BC, CA như hình vẽ. Các Δ MQK, MPS, MIR là tam giác đều nên D, E, F lần lượt là trung điểm của QK, SP, IR.

Gọi O là trọng tâm Δ ABC, ta có:

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MR})$$

$$=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR})+(\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MK})+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MP})]$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA})=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

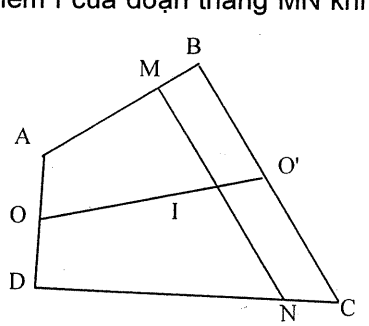
G là trọng tâm Δ DEF nên $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF})=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$

$\Rightarrow$ M, G, O thẳng hàng, tức là MG qua điểm cố định O

Bài toán 7. 40:

Cho tứ giác ABCD. Với số k tuỳ ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Hướng dẫn giải



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có: $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

Vì O và I là trung điểm của AD và MN nên:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}$$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO'.

Bài toán 7. 41:

Cho tam giác ABC và ba vectơ cố định $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Với mỗi số thực t, ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}$, $\overrightarrow{BB'} = t\vec{v}$, $\overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm tập hợp trọng tâm G' của tam giác A'B'C' khi t thay đổi.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì:

$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CC'}$

$= \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = t\vec{u}+t\vec{v}+t\vec{w} = t(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$

Đặt $\vec{\alpha} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ thì vectơ $\vec{\alpha}$ xác định và $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}t\vec{\alpha}$

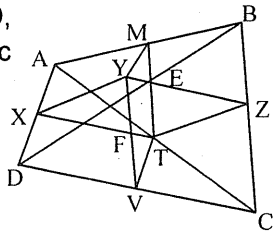
Suy ra nếu $\vec{\alpha} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G, còn nếu $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ thì tập hợp các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{\alpha}$.

Bài toán 7. 42:

Cho tứ giác ABCD không phải là hình thang. Các điểm M, N, P, Q theo thứ tự thay đổi trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho MNPQ là hình bình hành. Tìm tập hợp giao điểm I của MP, NQ.

Hướng dẫn giải

Gọi X, Y, Z, T, U, V là trung điểm của AD, BD, BC, AC, AB, DC, ta có XYZT và UYVT là các hình bình hành.



Vì MNPQ là hình bình hành nên

I = MP ∩ NQ ⇔ I là trung điểm của MP và NQ

⇔ I thuộc miền hình bình hành XYZT và UYVT

Vậy I thuộc miền hình bình hành EYTF.

Bài toán 7. 43:

Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm M thuộc BC sao cho $|5\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$\left|5\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right|.$$

Hướng dẫn giải

a) Gọi I là tâm tỉ cự của {A, B, C} ứng với hệ số 5, –7, –1 :

$5\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = (5-7-1)\overrightarrow{MI} = -3\overrightarrow{MI}$

Do đó $|5\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}| = 3MI$

Vậy giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu cuả I lên BC.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{MB}+3(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$ nên

$$\left|5\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow 3MI = |\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}|$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}|\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}|$$

Vậy tập điểm là đường tròn $(I, \frac{1}{3}|\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}|)$

Bài toán 7. 44:

Cho tứ giác ABCD. M, N chia AD, BC theo tỉ số $k < 0$.

a) Tìm tập hợp trung điểm I của MN khi k thay đổi

b) Chứng minh $MN \le \max(AB, CD)$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = h$ thì $\overrightarrow{AM} = h\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = h\overrightarrow{BC}$

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}}{2} = \frac{h(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})}{2} = h\overrightarrow{OO'}$ do đó O, I, O' thẳng hàng. Vì $k < 0$, nên M vạch khoảng AD, suy ra tập hợp của I là khoảng OO'.

b) M, N chia AD, BC theo tỉ số k

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - k(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})}{1-k}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}}{1-k}$$

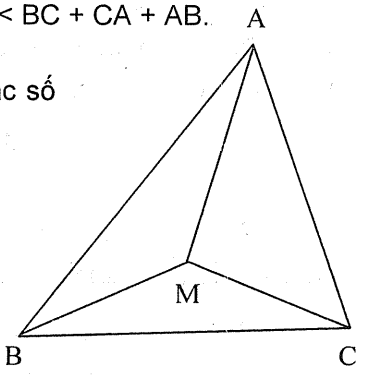
Đặt $m = \max(AB, DC) \Rightarrow AB \le m, DC \le m$. Do $k < 0$ nên

$$MN = \left|\frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}}{1-k}\right| \le \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|(-k)\overrightarrow{DC}\right|}{1-k} = \frac{AB - kDC}{1-k} \le \frac{m - km}{1-k} = m.$$

Bài toán 7. 45:

Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Chứng minh:

MA + MB + MC + min{MA, MB, MC} < BC + CA + AB.



Hướng dẫn giải

Vì M nằm trong tam giác ABC nên tồn tại các số dương α, β, γ sao cho:

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Suy ra: $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ nên $AM < \beta AB + \gamma AC$

Tương tự: $BM < \gamma BC + \alpha BA$;

$CM < \alpha CA + \beta CB$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\alpha \le \beta \le \gamma$

Suy ra: $(\beta - \gamma)(AB - AC) < \alpha.BC$ (chú ý: $|AB - AC| < BC$)

$\Rightarrow \beta AB + \gamma AC < \alpha BC + \beta CA + \gamma AB$.

Nên $AM < \alpha BC + \beta CA + \gamma AB$

Do đó: $\min\{MA, MB, MC\} < \alpha BC + \beta CA + \gamma AB$

Vì $\alpha + \beta + \gamma = 1$ nên:

MA + MB + MC + min{MA, MB, MC} < BC + CA + AB.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 7. 1: Cho 4 điểm A,B,C,D. Chứng minh rằng

a) nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ trung điểm của 2 đoạn AD và BC trùng nhau.

Hướng dẫn

a) Chèn các điểm theo quy tắc cộng

b) Gọi I là trung điểm AD.

Bài tập 7. 2: Cho n điểm trên mặt phẳng, một người đặt tên là $A_1, A_2, ..., A_n$ và người khác đặt tên là $B_1, B_2, ..., B_n$.

Chứng minh $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + ... + \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

Lấy điểm gốc O bất kỳ thì có $\overrightarrow{A_kB_k} = \overrightarrow{OB_k} - \overrightarrow{OA_k}$.

Bài tập 7. 3: Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn

Dùng hệ thức $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$.

Bài tập 7. 4: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh MN và AC song song.

Hướng dẫn

Biểu diễn theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{MN} = 2\ \overrightarrow{AC}$

Bài tập 7. 5: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho AK = $\frac{1}{3}$AC. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

Chứng minh $3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI}$ do đó B, I, K thẳng hàng.

Bài tập 7. 6 Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a)Nếu J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A thì

$$-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

b)Nếu H là trực tâm thì $\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

c) Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp thì

$$\sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

Hướng dẫn

a) Dùng phân tích vectơ

b) Dùng phân tích vectơ

c) Dùng phân tích vectơ

Bài tập 7. 7: M thay đổi và nằm trong đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_n$ tâm O. Gọi M_i là hình chiếu của M lên đường thẳng A_iA_{i+1} ($A_{n+1} := A_1$) và G là trọng tâm của hệ $M_1, M_2 \ldots M_n$. Chứng minh MG qua điểm cố định.

Hướng dẫn

Chứng minh 2 vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG}$ cùng phương.

Kết quả qua tâm O.

Bài tập 7. 8: Tứ giác ABCD khác hình thang nội tiếp trong (O). Chứng minh bốn đường thẳng

a) qua trung điểm mỗi cạnh và vuông góc cạnh đối thì đồng quy tại I, và thẳng hàng với O, trọng tâm G của tứ giác.

b) nối mỗi đỉnh với trực tâm của tam giác tạo bởi 3 đỉnh còn lại đồng quy tại I.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{AD} = 0$

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh $\overrightarrow{DH} = 2\overrightarrow{DI}$

Bài tập 7. 9: Cho ΔABC. Gọi G, I là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh : $\max\left\{\frac{m_a}{h_a}, \frac{m_b}{h_b}, \frac{m_c}{h_c}\right\} > \frac{GI}{2r}$.

Hướng dẫn

Dùng bình phương vô hướng và các hệ thức trong tam giác.

Bài tập 7. 10: Lấy M, N, P thay đổi, lần lượt trên cạnh AB, BC, CA thỏa mãn AM:BN:CP = 1:2:3. Tìm tập hợp trọng tâm tam giác MNP.

Hướng dẫn

Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là 3 vec tơ đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ và G, G' là 2 trọng tâm tam giác ABC, MNP thì $3\overrightarrow{GG'} = t(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$

Kết quả đường thẳng hay đặc biệt là điểm G.

Bài tập 7. 11:

Cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Chứng minh :

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{b} + \vec{c}| + |\vec{a} + \vec{c}|$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn

Kí hiệu gọn cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là a, b, c.

Xét: $H = (|a|+|b|+|c|)^2 - |a+b+c|^2$

$= 2(|a||b| - a.b + |b||c| - b.c + |a||c| - c.a)$ (2)

với $2|a||b| - a.b = (|a|+|b|)^2 - (|a+b|)^2$

$= (|a|+|b|+|a+b|)(|a|+|b|-|a+b|)$

Thế vào (2)

$\Rightarrow H = \sum_{a\neq b\neq c} (|a|+|b|+|a+b|)(|a|+|b|-|a+b|)$ (3)

Mặt khác : $|a| + |b| \geq |a+b| \Rightarrow |a| + |b| - |a+b| \geq 0$ (4)

$|a| + |b| + |a+b| = |a|+|b|+|a+b+c-c| \leq |a|+|b|+|a+b+c|+|c|$ (5)

Nên (3) $\Rightarrow H \leq \sum_{a\neq b\neq c} (|a+b+c|+|a|+|b|+|c|)(|a|+|b|-|a+b|)$

$= (|a+b+c|+|a|+|b|+|c|) \sum_{a\neq b\neq c} (|a|+|b|-|a+b|) =$

$(|a+b+c|+|a|+|b|+|c|)[2(|a|+|b|+|c|)-|a+b|-|b+c|-|c+a|]$ (6)

$H = (|a|+|b|+|c|)^2 - |a+b+c|^2$

$=(|a|+|b|+|c|-|a+b+c|)(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|)$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow |a|+|b|+|c|-|a+b+c|$

$\leq 2(|a|+|b|+|c|)-|a+b|+|b+c|+|c+a|)$

$\Rightarrow |a+b|+|b+c|+|c+a| \leq |a|+|b|+|c|+|a+b+c|$

Nếu a, b, c $\neq 0$ dấu bằng xảy ra khi dấu bằng xảy ra ở (4), (5)

$\Rightarrow \begin{cases} a \uparrow\uparrow b \uparrow\uparrow c \\ a+b+c \uparrow\uparrow -c,-b,-a \end{cases} \Leftrightarrow a, b, c \uparrow\downarrow a+b+c$

Nếu trong a, b, c có 1 vectơ 0 thì đẳng thức xảy ra.

Bài tập 7. 12: Trên các cạnh ΔABC, dựng về phía ngoài các tam giác đồng dạng ABC_1, BCA_1, CAB_1. Chứng minh

a) ΔABC và $A_1B_1C_1$ có chung trọng tâm

b) $AA_1 < BB_1 + CC_1$

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0} \Rightarrow -\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} \Rightarrow AA_1 = |\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}|$.

Chuyên đề 8: TÍCH VÔ HƯỚNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Tích vô hướng c

– Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

– Với tam giác ABC: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

– Bình phương vô hướng: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

– Góc: $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$, $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}}{AB.MN}$

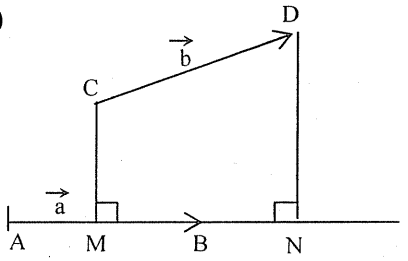
– Điều kiện vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

$AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

– Công thức chiếu:

$\vec{a}.\vec{b} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \vec{a}.\vec{b}'$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}$.



Định lý con nhím

Cho đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$. Gọi $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}$ là n vectơ đơn vị lần lượt vuông góc với cạnh A_1A_2, $A_2A_3,\ldots$, A_nA_1 và hướng ra ngoài thì:

$$A_1A_2.\overrightarrow{e_1} + A_2A_3.\overrightarrow{e_2} + \ldots + A_nA_1.\overrightarrow{e_n} = \vec{0}.$$

Tập điểm và cực trị

– Cho đoạn AB, tập hợp các điểm M thoả mãn:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$ là đường thẳng vuông góc với AB tại A.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ là đường tròn đường kính AB.

– Cho điểm I và một số k, tập hợp các điểm M thoả mãn $MI^2 = k$

Nếu $k < 0$ thì tập điểm là rỗng. Nếu $k = 0$ thì tập điểm là điểm I.

Nếu $k > 0$ thì $MI = \sqrt{k}$, tập điểm là đường tròn tâm I, $R = \sqrt{k}$.

– Cho I là điểm cố định, M thay đổi tùy ý thì MI^2 bé nhất khi $M \equiv I$

– Cho I là điểm cố định, M thay đổi trên đường thẳng d thì MI bé nhất khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Chú ý:

– Đánh giá $AB.CD \geq \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

– Một số bất đẳng thức được đánh giá từ các bình phương vô hướng đặc biệt: $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 \geq 0$, $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})^2 \geq 0$, ...

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 8. 1:

Tam giác ABC có AB = 6, AC = 8, BC = 11.

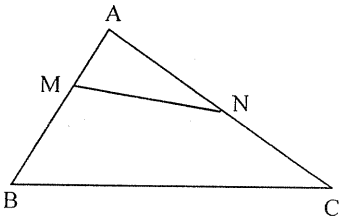
a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và cosA.

b) Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = 2 và gọi N là trung điểm của cạnh AC. Tính đoạn MN.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 6^2 - 11^2) = -\frac{21}{2}$.

và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.AC.\cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{7}{32}$.



b) Ta có $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM})^2$

$= AN^2 + AM^2 - 2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM}$

$= 16 + 4 + \frac{7}{2} = \frac{47}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{47}{2}}$.

Bài toán 8. 2:

Cho hình thang ABCD vuông tại A, B có các đáy AD = a, BC = 3a và cạnh AB = 2a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

b) Hạ II', JJ' vuông góc với AC. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}$ và độ dài I'J'.

Hướng dẫn giải

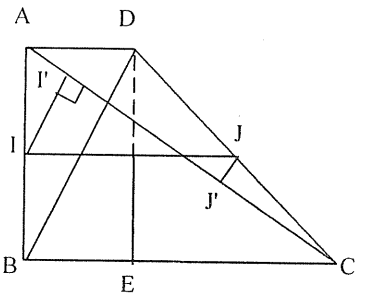
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -4a^2$

Hạ DE ⊥ BC thì

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} = 3a^2$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = -a^2$



b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}.\left(\frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}.13a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 6a^2$

Mà: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{I'J'} = AC.I'J' = \sqrt{13}a.I'J'$. Suy ra $I'J' = \frac{6}{\sqrt{13}}a$.

Bài toán 8. 3: Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Tính độ dài đoạn thẳng AM và đặc biệt khi $k = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, suy ra: $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

Do đó: $AM^2 = (1-k)^2\overrightarrow{AB}^2 + k^2\overrightarrow{AC}^2 + 2k(1-k)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= (1-k)^2c^2 + k^2b^2 + 2k(1-k)\frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$

$= (1-k)c^2 + kb^2 - k(1-k)a^2$

Khi $k = \frac{1}{2}$ thì M là trung điểm của cạnh BC, ta có công thức trung tuyến:

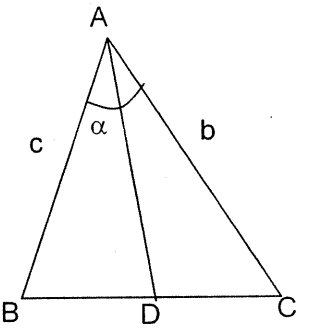
$AM^2 = \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Bài toán 8. 4:

Tam giác ABC có các cạnh AC = b, AB = c, $B\hat{A}C = \alpha$ và AD là phân giác của góc BAC (D thuộc cạnh BC).

a) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AD}$ qua hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

b) Tính độ dài đoạn AD.



Hướng dẫn giải

a) Theo tính chất của đường phân giác trong

$\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$ hay D chia đoạn BC theo tỉ

$k = -\frac{c}{b}$ nên dẫn đến $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$

b) $AD^2 = \frac{1}{(b+c)^2}(b^2.AB^2 + c^2.AC^2 + 2bc.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$

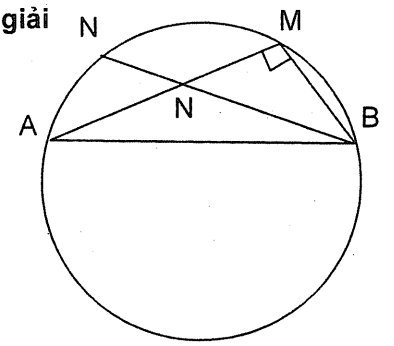
$= \frac{1}{(b+c)^2}(2b^2c^2 + 2b^2c^2.\cos\alpha)$. Vậy $AD = \frac{bc}{b+c}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$.

Bài toán 8. 5:

Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN.

Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = 4R^2$

Hướng dẫn giải



Vì $\overrightarrow{AM}$ là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI.

nên: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}$

Tương tự: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$

Do đó: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$

$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2$.

Bài toán 8. 6:

Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, EF. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$ với mọi M.

b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$.

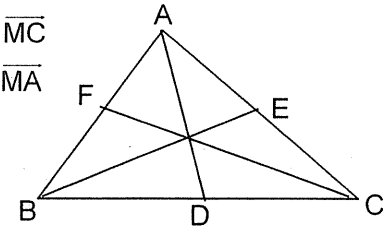
Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

Cộng vế theo vế thì có đpcm.



b) Vì AD, BE, CF là các đường trung tuyến nên:

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}$

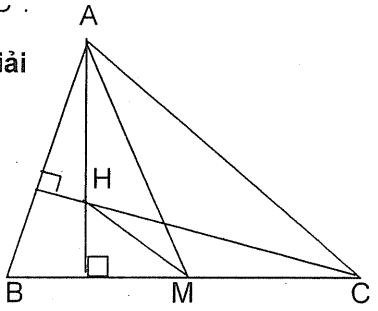
$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})]$

$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}] = 0.$

Bài toán 8. 7:

Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

Hướng dẫn giải



Ta có $4.\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{HM} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC}$

$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}^2 = BC^2 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 8. 8:

Cho tam giác ABC có cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Trên cạnh AB lấy điểm M. Chứng minh:

$c^2.CM^2 = a^2.AM^2 + b^2.BM^2 + (a^2+b^2-c^2).AM.BM.$

Hướng dẫn giải

Đặt AM = kMB, vì M thuộc cạnh AB nên $\overrightarrow{MA} = -k\overrightarrow{MB}$

Do đó $\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{CB}}{1+k} = \frac{BM.\overrightarrow{CA}+AM.\overrightarrow{CB}}{AM+BM}$

Hay $c.\overrightarrow{CM} = BM.\overrightarrow{CA} + AM.\overrightarrow{CB}$ nên

$c^2.CM^2 = BM^2.CA^2 + AM^2.CB^2 + 2BM.AM.\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$= b^2.BM^2 + a^2AM^2 + 2AM.BM.\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$

$= a^2.AM^2 + b^2BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2).AM.BN.$

Bài toán 8. 9:

Cho ba điểm A, B,C thẳng hàng và điểm M. Chứng minh rằng:

$$MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0 ..$$

Hướng dẫn giải

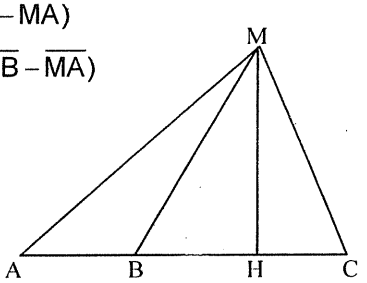
Xét hai trường hợp

• Khi M thuộc đường thẳng chứa A, B, C ta có:

$\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= \overline{MA}^2.(\overline{MC} - \overline{MB}) + \overline{MB}^2(\overline{MA} - \overline{MC}) + \overline{MC}^2(\overline{MB} - \overline{MA})$

$+(\overline{MC} - \overline{MB})(\overline{MA} - \overline{MC})(\overline{MB} - \overline{MA})$



$= \overline{MA}^2.\overline{MC} - \overline{MA}^2.\overline{MB} + \overline{MB}^2.\overline{MA} - \overline{MB}^2.\overline{MC}$

$+ \overline{MC}^2.\overline{MB} - \overline{MA}^2.\overline{MA} - \overline{MA}^2.\overline{MC} + \overline{MA}^2.\overline{MB}$

$- \overline{MB}^2.\overline{MA} + \overline{MB}^2.\overline{MC} - \overline{MC}^2.\overline{MB} + \overline{MC}^2.\overline{MA}$

$+ \overline{MA}.\overline{MB}.\overline{MC} - \overline{MA}.\overline{MB}.\overline{MC} = 0.$

• Khi M không thuộc đường thẳng chứa A, B, C

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng chứa A, B, C ta có:

$\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= \left(MH^2 + HA^2\right)\overline{BC} + \left(MH^2 + HB^2\right)\overline{CA} + \left(MH^2 + HC^2\right)\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= MH^2\left(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}\right) + (\overline{AH}^2.\overline{BC} + \overline{BH}^2.\overline{CA} + \overline{CH}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB})$

$= 0 + 0 = 0.$

Bài toán 8. 10:

Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với mọi M:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Hướng dẫn giải

Vì G là trọng tâm nên $9MG^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$

$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + (MA^2 + MB^2 - AB^2) + (MB^2 + MC^2 - BC^2) + (MC^2 + MA^2 - CA^2)$

$= 3(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) \Rightarrow$ đpcm.

Kết quả: $MA^2+MB^2+MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Bài toán 8. 11:

Gọi G là tâm tỉ cự của n điểm $A_1, A_2, ... A_n$ với n số thực $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ sao cho: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq \vec{0}$. Chứng minh với mọi M:

a) $\alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA^2 = \alpha MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + ... + \alpha_n GA_n^2$

b) $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + ... + \alpha_n GA_n^2 = \frac{1}{\alpha}(\alpha_1\alpha_2 A_1A_2^2 + \alpha_1\alpha_3 A_1A_3^2 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n A_{n-1}A_n^2)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\alpha_i MA_i^2 = \alpha_i\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\right)^2 = \alpha_i MG^2 + \alpha_i GA_i^2 + 2\alpha_i \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i}$

với i = 1,2,...,n . Cộng lại n hệ thức thì có đpcm.

b) Bình phương vô hướng đẳng thức

$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = \alpha\overrightarrow{MG}$

và dùng $2\overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{MA_j} = MA_i^2 + MA_j^2 - A_iA_j^2$ thì được:

$\alpha(\alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2)$

$-(\alpha_1\alpha_2 A_1A_2^2 + \alpha_1\alpha_3 A_1A_3^2 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n A_{n-1}A_n^2) = \alpha^2 MG^2$

$\Rightarrow \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2$

$= \alpha MG^2 + \frac{1}{\alpha}(\alpha_1\alpha_2 A_1A_2^2 + \alpha_1\alpha_3 A_1A_3^2 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n A_{n-1}A_n^2)$

Và từ câu a) suy ra đpcm.

Bài toán 8. 12:

Cho n–giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp trong đường tròn (O,R) và điểm M thuộc (O). Chứng minh $\sum_{i=1}^{n}\cos\widehat{MOA_i} = 0$ và $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = 2nR^2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ nên

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA_i} = OM.OA_i\cos\widehat{MOA_i} = R^2\cos\widehat{MOA_i}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\cos\widehat{MOA_i} = \frac{1}{R^2}\overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}) = 0$

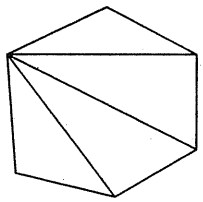
và $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2 = n.MO^2 + 2.\overrightarrow{MO}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} + \sum_{i=1}^{n} OA_i^2$

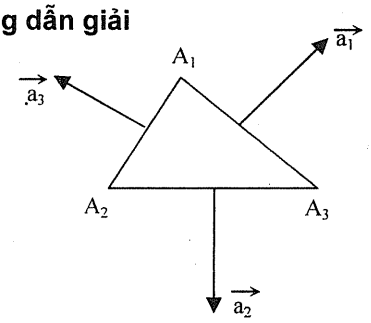
$= n.R^2 + nR^2 = 2nR^2$.

Bài toán 8. 13:

Cho đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$. Gọi $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_n}$ là n vectơ đơn vị lần lượt vuông góc với cạnh A_1A_2, $A_2A_3,\ldots$, A_nA_1 và hướng ra ngoài. Chứng minh: $A_1A_2.\overrightarrow{e_1} + A_2A_3.\overrightarrow{e_2} + \ldots + A_nA_1.\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải





Vì khi phân chia đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$ thành các tam giác liên tiếp từ 1 đỉnh thì có đúng một cạnh chung và 2 vectơ đơn vị tương ứng đối nhau nên ta chỉ cần chứng minh cho tam giác $A_1A_2A_3$.

Gọi $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ lần lượt là 3 vectơ đơn vị lần lượt vuông góc với cạnh A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1.

Đặt $\overrightarrow{a_1} = A_1A_2.\overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{a_2} = A_2A_3.\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{a_3} = A_3A_1.\overrightarrow{e_3}$

thì: $\left|\overrightarrow{a_1}\right| = A_1A_2$, $\left|\overrightarrow{a_2}\right| = A_2A_3$, $\left|\overrightarrow{a_3}\right| = A_3A_1$

Ta chứng minh: $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ có 2 giá khác nhau, thật vậy:

$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}).\overrightarrow{A_1A_2} = (\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}).\overrightarrow{A_1A_2}$

$= (\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3})(\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_2A_3}) = \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{a_3}.\overrightarrow{A_2A_3}$

$= \left|\overrightarrow{a_2}\right|.A_1A_3.\cos(\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{A_2A_3}) - \left|\overrightarrow{a_3}\right|A_2A_3.\cos(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{A_2A_3}) = 0$

Do đó vectơ $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ vuông góc với đường thẳng A_1A_2.

Chứng minh tương tự, ta có vectơ $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ vuông góc với đường thẳng A_2A_3. Hơn nữa A_1A_2, A_2A_3 không cùng phương nên $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ có 2 giá khác nhau. Vậy $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$.

Cách khác: dùng tâm đường tròn nội tiếp I với 3 tiếp điểm trên 3 cạnh tam giác và hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Bài toán 8. 14:

Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b.

Đặt $\vec{u} = (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA})\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB})\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh:

a) $\vec{u} = -abc\left(\cos B\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \cos C\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \cos A\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)$

b) ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

a) $\vec{u} = ca.\cos(180^\circ - B)\overrightarrow{CA} + ab.\cos(180^\circ - C)\overrightarrow{AB} + bc.\cos(180^\circ - A)\overrightarrow{BC}$

$= -ca.\cos B.\overrightarrow{CA} - ab.\cos C.\overrightarrow{AB} - bc.\cos A.\overrightarrow{BC}$

$= -abc\left(\cos B\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \cos C\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \cos A\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)$

b) Nếu tam giác ABC đều thì a = b = c, cosA = cosB = cosC, từ đó suy ra $\vec{u} = a^2.\cos A(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$. Đảo lại, nhân vô hướng vectơ $\vec{u} = \vec{0}$ lần lượt với $\frac{\overrightarrow{CA}}{b}$ ta có: $\vec{u}\,\frac{\overrightarrow{CA}}{b} = 0$

Suy ra $\cos B - 2\cos C.\cos A = 0 \Rightarrow \cos B = 2\cos C.\cos A$

Tương tự ta có: $\cos C - 2\cos A.\cos B = 0$, $\cos A - 2\cos B.\cos C = 0$

Do đó: $\cos C - 4\cos^2 A.\cos C = 0$

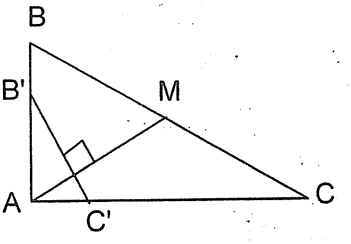
Xét cosC = 0 thì cosB = 0, $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$, vô lí, nên $\cos C \neq 0$, do đó $\cos^2 A = \frac{1}{4}$ hay $\cos A = \pm\frac{1}{2}$. Vậy $\hat{A} = 60^\circ$ hoặc $\hat{A} = 120^\circ$.

Tương tự góc C bằng 60° hoặc bằng 120°. Vì tổng ba góc của tam giác bằng 180°, nên chỉ có thể có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$. Vậy ABC là tam giác đều.

Bài toán 8. 15:

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho AB.AB' = AC.AC'. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM ⊥ B'C'

Hướng dẫn giải



Ta có: $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}$

$= 0 - AB.AB' + AC.AC' - 0$

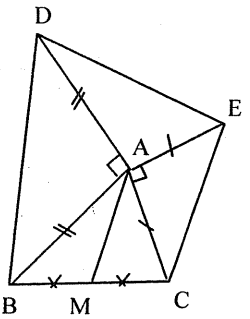
$= 0$

Vậy AM ⊥ B'C'.

Bài toán 8. 16:

Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.

Hướng dẫn giải



Ta có: $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

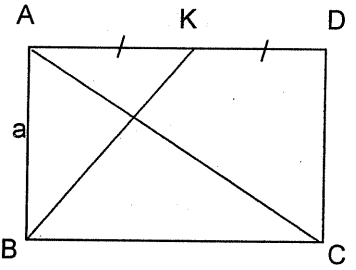
$= AB.AE.\cos(90^o + A) - AC.AD.\cos(90^o + A) = 0$

Vậy AM vuông góc với DE.

Bài toán 8. 17:

Cho hình chữ nhật ABCD có AB = a và AD = $a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh rằng BK vuông góc với AC.

Hướng dẫn giải



Ta có: AB = a, AC = BD = $\sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

Và $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Nên $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

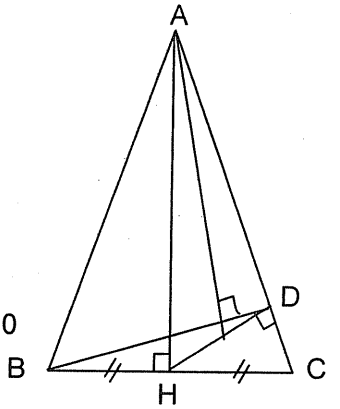
$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$

$= -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0$. Vậy BK $\perp$ AC.

Bài toán 8. 18:

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của cạnh BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh AC, M là trung điểm của đoạn HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BD.

Hướng dẫn giải



Ta có: $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD})$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}$

$= 0 + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH} + 0$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}).\overrightarrow{BH}$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BH}$

$= \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AC} = 0$

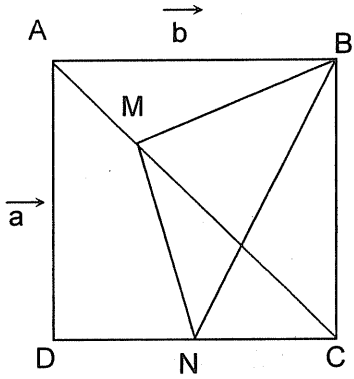
Vậy AM vuông góc với BD.

Bài toán 8. 19:

Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho AM = $\frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó:



$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$

Do đó: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b})$

Ta có: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{1}{16}(-3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a}.\vec{b}) = \frac{1}{16}(-3\vec{a}^2 + 3\vec{a}^2 + 0) = 0$

Và $\overrightarrow{MB}^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a}.\vec{b}) = \frac{5}{8}\vec{a}^2$

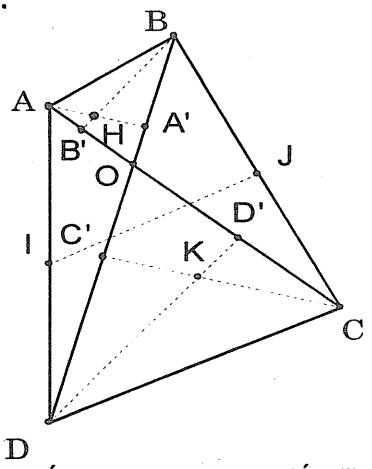
$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a}.\vec{b}) = \frac{5}{8}\vec{a}^2 = \overrightarrow{MB}^2$

Vậy tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M.

Bài toán 8. 20:

Tứ giác ABCD có 2 chéo AC cắt BD ở O. Gọi H, K là trực tâm tam giác AOB và COD và I, J là trung điểm AD, BC. Chứng minh HK ⊥ IJ.

Hướng dẫn giải:



Gọi BB', AA' là đường cao của tam giác ABO và CC', DD' là đường cao của tam giác CDO.

Vì B' D' là hình chiếu của HK, BD lên AC, và A'C' là hình chiếu của HK và AC lên BD) nên:

$\overrightarrow{HK}.2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$

$= \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D'}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'C'}\overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\overrightarrow{BD} = 0$

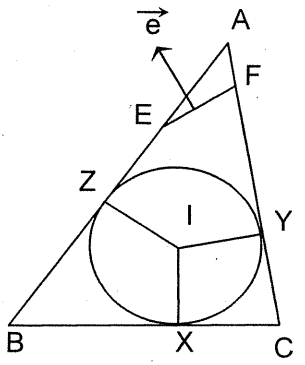
Suy ra: HK ⊥ IJ.

Bài toán 8. 21:

Cho tam giác ABC không đều, BC là cạnh nhỏ nhất. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z. Gọi G là trọng

tâm tam giác XYZ. Trên các tia BA,CA theo thứ tự lấy các điểm E, F sao cho BE = CF = BC. Chứng minh IG ⊥ EF.

Hướng dẫn giải



Không mất tính tổng quát, giả sử bán kính đường tròn (I) bằng 1.

Dựng vectơ đơn vị $\vec{e}$ vuông góc với EF.

Áp dụng định lí con nhím cho tứ giác EBCF, ta có:

$EB\vec{I}\vec{Z} + BC\vec{I}\vec{X} + CE\vec{I}\vec{Y} + EF\vec{e} = \vec{0}$

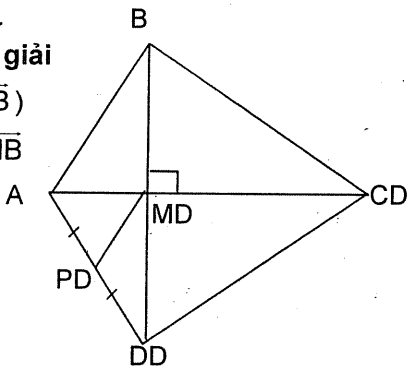
$\Rightarrow 3BC\vec{I}\vec{G} + EF\vec{e} = \vec{0} \Rightarrow \vec{IG} = \frac{EF}{3BC}\vec{e} \Rightarrow \vec{IG} \,/\!/\, \vec{e}$.

Vậy IG ⊥ EF.

Bài toán 8. 22:

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M. Gọi P là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\vec{MA}.\vec{MC} = \vec{MB}.\vec{MD}$.

Hướng dẫn giải



Ta có: $2\vec{MP}.\vec{BC} = (\vec{MA} + \vec{MD}).(\vec{MC} - \vec{MB})$

$= \vec{MA}.\vec{MC} - \vec{MA}.\vec{MB} + \vec{MD}.\vec{MC} - \vec{MD}.\vec{MB}$

$= \vec{MA}.\vec{MC} - \vec{MD}.\vec{MB}$

Do đó MP ⊥ BC $\Leftrightarrow \vec{MP}.\vec{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MC} = \vec{MD}.\vec{MB}$.

Bài toán 8. 23:

Cho tứ giác ABCD. Chứng minh

$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $AB^2+CD^2 = \vec{AB}^2+\vec{CD}^2 = (\vec{AD}+\vec{DB})^2 + (\vec{CB}+\vec{BD})^2$

$= AD^2 + 2DB^2 + BC^2 + 2\vec{AD}.\vec{DB} + 2\vec{CB}.\vec{BD}$

$= BC^2 + AD^2 + 2\vec{DB}(\vec{DB} + \vec{AD} - \vec{CB})$

$= BC^2 + AD^2 + 2\vec{DB}(\vec{AB} + \vec{BC})$

$= BC^2 + AD^2 + 2\vec{CA}.\vec{BD}$

Do đó AC ⊥ BD $\Leftrightarrow \vec{CA}.\vec{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Bài toán 8. 24:

Cho tam giác ABC và M là một điểm tùy ý. Gọi N là điểm thỏa mãn: $\vec{MN} = MA^2\vec{BC} + MB^2\vec{CA} + MC^2\vec{AB}$.

a) Xác định M để N trùng với M

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh nếu M ≠ O thì tam giác OMN vuông tại M.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = MA^2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + MB^2\overrightarrow{CA} + MC^2\overrightarrow{AB}$

$= (MC^2 - MA^2)\ \overrightarrow{AB} + (MA^2 - MB^2)\ \overrightarrow{AC}$

Do đó: N trùng với M $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow MC^2 - MA^2 = MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow MA = MB = MC.$

Vậy N trùng với M khi và chỉ khi M là tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) $MA^2.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2.\overrightarrow{BC}$

$= OA^2.\overrightarrow{BC} + OM^2.\overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{BC}$

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = -2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM}).\overrightarrow{CA} - 2(\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{AB}$

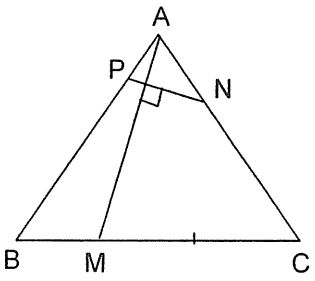
$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MO} = -2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{BC}\overrightarrow{MO} - 2(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM}).\overrightarrow{CA}\overrightarrow{MO} - 2(\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{AB}\overrightarrow{MO}$

Đưa về trái theo gốc O thì $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MO} = 0$ nên MN ⊥ MO $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 8. 25:

Cho tam giác đều ABC cạnh 3a. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho BM = a, CN = 2a, AP = x. Tìm x để AM vuông góc PN.

Hướng dẫn giải



Chọn cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ .Ta có:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}$

Điều kiện AM ⊥ PN $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN} = 0$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b})(\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{c} + 2\vec{b})(a\vec{c} - x\vec{b}) = 0$

$\Leftrightarrow a.\vec{c}^{\,2} + (2a - x)\vec{b}.\vec{c} - 2x.\vec{b}^{\,2} = 0$

$\Leftrightarrow a.9a^2 + (2a - x).a.a.\cos 60^o - 2x.9a^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2(9a + a - \frac{x}{2} - 2x) = 0 \Leftrightarrow 10a - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{5}.$

Bài toán 8. 26:

Cho tam giác ABC và điểm M sao cho:

$AM^2 - BC^2 = BM^2 - CA^2 = CM^2 - AB^2.$

a) Gọi G_a, G_b, G_c lần lượt là trọng tâm các tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng các đường thẳng AG_a, BG_b, CG_c đồng quy tại một điểm và xác định điểm đó.

b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng AG_a, BG_b và CG_c có độ dài bằng nhau và bằng $\frac{4}{3}$ đường kính đường tròn Ơle của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) Gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của cạnh BC, CA, AB.

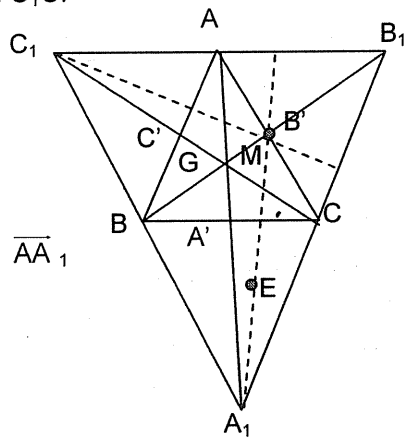
Ta có: $AM^2 - BC^2 = BM^2 - AC^2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = CB^2 - CA^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.2\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AB}.2\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{C'M} + \overrightarrow{C'C}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C_1M} = 0$ với C' là trung điểm của C_1C.

Do đó M nằm trên đường vuông góc hạ từ C_1 xuống cạnh AB. Tương tự thì M thuộc các đường thẳng góc hạ từ B_1, A_1 xuống các cạnh AC, CB tương ứng. Suy ra M là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$..



Ta có: $3\overrightarrow{AG}_A = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA}_1$

Mà G là trọng tâm chung của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ nên nếu gọi I là điểm trên MG sao cho $\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IG}$, do đó I là điểm hoàn toàn xác định và:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AG}}{1+3} \text{ nên } 4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA}_1 = 3\overrightarrow{AG}_A$$

Do đó đường thẳng AG_A đi qua điểm I xác định. Tương tự ta chứng minh được BG_B, CG_C cũng đi qua điểm I.

b) Theo trên ta có: $3\overrightarrow{AG}_A = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA}_1 = 2\overrightarrow{AE}$ (E là trung điểm MA_1). Mà AE chính là đường kính của đường tròn Ơle trong $\Delta A_1B_1C_1$. Vậy AG_A bằng $\frac{2}{3}$ đường kính của đường tròn Ơle trong $\Delta A_1B_1C_1$, hay AG_A bằng $\frac{4}{3}$ đường kính của đường tròn Ơle trong ΔABC. Chứng minh tương tự đối với BG_B, CG_C đều bằng AG_A.

Bài toán 8. 27:

Cho hai điểm A, B cố định và một số k. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = k$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB, ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$

$= MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Do đó: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} + k.$

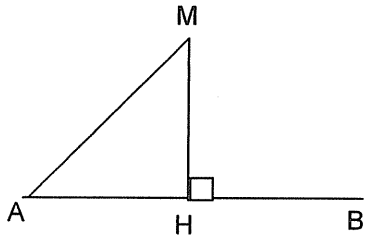
Nếu $\frac{AB^2}{4} + k > 0$ thì tập điểm là đường tròn $(I, \sqrt{\frac{AB^2}{4}+k})$.

Nếu $\frac{AB^2}{4} + k = 0$ thì tập điểm là {I}

Nếu $\frac{AB^2}{4} + k < 0$ thì tập điểm là rỗng.

b) Hạ MH vuông góc với AB thì

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}$



Do đó: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB} = k$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}(\overrightarrow{AB})^2 = -k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{-k}{AB^2}.\overrightarrow{AB}$ nên điểm H cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H.

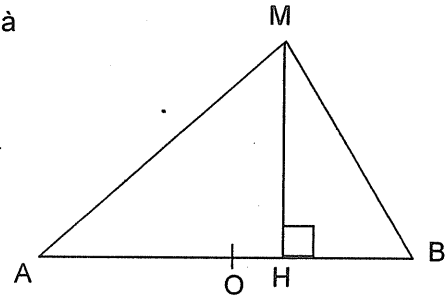
Bài toán 8. 29:

Cho 2 điểm A, B cố định và số k. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $MA^2 - MB^2 = k$ b) $MA = k.MB$, $k>0$, $k \neq 1$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là trung điểm của AB và H là hình chiếu của M lên AB.



$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$

$= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$

$= 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{BA}$

Do đó $MA^2 - MB^2 = k$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{BA} = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = k$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH}(\overrightarrow{AB})^2 = k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{k}{2AB^2}\overrightarrow{AB}$ nên điểm H cố định.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H xác định ở trên.

b) Trên đường thẳng AB là 2 điểm E, F sao cho $\overrightarrow{EA} = -k\overrightarrow{EB}$, .. $= k\overrightarrow{FB}$ .Ta có:

$MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ME} + k\overrightarrow{EB})(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA} - k\overrightarrow{MF} - k\overrightarrow{FB}) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + k)\overrightarrow{ME}.(1 - k)\overrightarrow{MF} = 0 \Leftrightarrow (1 - k^2)\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$ (do $k > 0, k \neq 1$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MF}$

Vậy tập hợp các điểm là đường tròn đường kính EF.

Bài toán 8. 30:

Cho n điểm $A_1, A_2, ... A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ với $k_1 + k_2 + ... + k_n = k, k \neq 0$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$ trong đó m là một số không đổi.

Hướng dẫn giải

Gọi G là tâm tỉ cự của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ với $k_1 + k_2 + ... + k_n = k, k \neq 0$.

Với mọi điểm M ta có: $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$

$\Leftrightarrow k_1(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GM})^2 + k_2(\overrightarrow{GA_2} - \overrightarrow{GM})^2 + ... + k_n(\overrightarrow{GA_n} - \overrightarrow{GM})^2 = m$

$\Leftrightarrow k_1GA_1^2 + k_2GA_2^2 + ... + k_nGA_n^2 + kGM^2 - 2\overrightarrow{GM}(k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n}) = m$

$\Leftrightarrow k_1GA_1^2 + k_2GA_2^2 + ... + k_nGA_n^2 + kGM^2 = m$

$\Leftrightarrow s + kGM^2 = m \Leftrightarrow GM^2 = \dfrac{m-s}{k}$.

Với $k_1GA_1^2 + k_2GA_2^2 + ... + k_nGA_n^2 = s$. Biện luận:

– Nếu $\dfrac{m-s}{k} > 0$ thì tập hợp là đường tròn $(G, \sqrt{\dfrac{m-s}{k}})$

– Nếu $m - s = 0$ thì tập hợp các điểm M là một điểm G.

– Nếu $\dfrac{m-s}{k} < 0$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng.

Bài toán 8. 31:

Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ với $k_1 + k_2 + ... + k_n = 0$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$ trong đó m là một số không đổi.

Hướng dẫn giải

Khi $k_1+k_2+...+k_n = 0$ thì hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ không có tâm tỉ cự.

Xét tất cả các hệ số $k_i = 0$, nếu $m = 0$ thì tập điểm là cả mặt phẳng còn nếu $m \neq 0$ thì tập điểm là rỗng.

Nếu có một hệ số khác 0, chẳng hạn $k_1 \neq 0$ ta có

$k_2 + k_3 + ... + k_n = -k_1 \neq 0$.. Gọi G' là tâm tỉ cự của hệ điểm $A_2, A_3, ..., A_n$ và n–1 số $k_2, k_3, ..., k_n$. Bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm M sao $k_1MA_1^2 - k_1MG'^2 = m \Leftrightarrow MA_1^2 - MG'^2 = k'$ như bài toán trên.

Cách khác: vectơ $\vec{u} = k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n}$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm O nên chọn một điểm O cố định làm gốc.

Bài toán 8. 32:

Cho tam giác ABC. Tìm tập điểm điểm M thỏa mãn:

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = k$ cho trước.

b) $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$ cho trước.

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CA}. - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$ (với D: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$)

Gọi H là hình chiếu của M trên AD. Ta có, điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \dfrac{k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}$: H cố định.

Vậy tập điểm là đường thẳng vuông góc với AD tại điểm H đó.

b) Ta có: $2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})^2$

$= MB^2 + MC^2 - BC^2$ nên $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = \dfrac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2}$

Tương tự cho $2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM}$, $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ thì có:

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \dfrac{3}{2}MB^2 - \dfrac{1}{2}MC^2 - \dfrac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2$ Nên

$\dfrac{3}{2}MB^2 - \dfrac{1}{2}MC^2 - \dfrac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2 = k$

$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$ (1)

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác ABC và G là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ thì

(1) $\Leftrightarrow 2MG^2 - \dfrac{3}{2}BC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = k + \dfrac{5}{4}a^2 - b^2 + c^2$. Biện luận:

Nếu $k < -\dfrac{5}{4}a^2 + b^2 - c^2$ thì tập điểm là tập rỗng

Nếu $k_2 = -\dfrac{5}{4}a^2 + b^2 - c^2$ thì tập điểm chỉ gồm một điểm G

Nếu $k_2 > \dfrac{5}{4}a^2 + b^2 - c^2$ thì tập điểm là đường tròn $(G, \sqrt{k + \dfrac{5}{4}a^2 - b^2 + c^2})$.

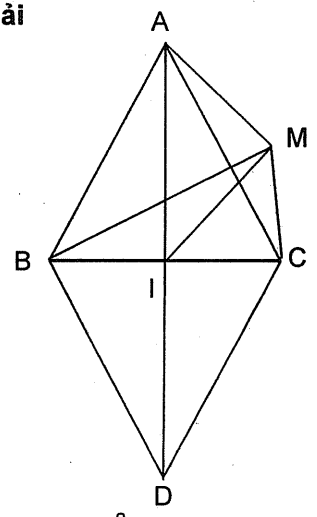
Bài toán 8. 33:

Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với điểm A qua BC và M là một điểm thay đổi.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b) Tìm tập điểm điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}.=k$.

Hướng dẫn giải



a) Vì AD và BC có trung điểm I chung nên

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})$

$= \overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IB}^2=MI^2-\dfrac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}^2=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}$

$=-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)$

$=-\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2=-MI^2+\dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{a^2}{2}$ không đổi.

b) $\overrightarrow{BM}.+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=k \Leftrightarrow AM^2+\dfrac{a^2}{2}=k \Leftrightarrow AM^2=k-\dfrac{a^2}{2}$

Nếu $k<\dfrac{a^2}{2}$ thì tập điểm là tập rỗng

Nếu $k=\dfrac{a^2}{2}$ thì tập điểm chỉ gồm một điểm A.

Nếu $k>\dfrac{a^2}{2}$ thì tập điểm là đường tròn tâm A, bán kính $\sqrt{k-\dfrac{a^2}{2}}$.

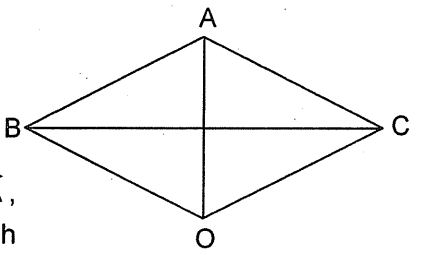
Bài toán 8. 34:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Chứng minh: $AB^2 + AC^2 – BC^2 \geq R^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)^2 \geq 0$.

Khai triển vế trái và sử dụng $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=OB^2+OC^2-BC^2$ cùng các đẳng thức tương tự, ta được đpcm.



Dấu bằng chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}$, nghĩa là khi OBAC là hình thoi có các cạnh bằng đường chéo OA và do đó ABC là tam giác cân tại A với $\hat{A} = 120^o$.

Bài toán 8. 35:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Chứng minh: $AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - CD^2 - DB^2 > -4R^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)^2 \geq 0$ nên

$$OB^2+OC^2+OD^2+OA^2+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$$
$$+2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA}\geq 0$$

và sử dụng $2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=OB^2+OC^2-BC^2 \Rightarrow$ đpcm.

Ta cần chứng minh dấu bằng không thể xảy ra. Gọi G, H là trọng tâm, trực tâm tam giác BCD, giả sử $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ thì

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$ suy ra A ≡ H. Điều này vô lí vì trực tâm H chỉ thuộc (O) khi tam giác BCD vuông mà lúc đó H lại chính là đỉnh của góc vuông nên H ≠ A.

Bài toán 8. 36:

Cho tam giác ABC có cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh với mọi điểm M thì: $a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \geq abc$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB} + c.\overrightarrow{MC})^2 \geq 0$

$\Rightarrow a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 + 2ab.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$+ 2bc.\overrightarrow{MB}..\overrightarrow{MC} + 2ca.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} \geq 0$

$\Rightarrow a^2MA^2 + b^2.MB^2 + c^2.MC^2 + ab(MA^2 + MB^2 - AB^2)$

$+ bc(MB^2 + MC^2 - BC^2) + ca(MC^2 + MA^2 - CA^2) \geq 0$

$\Rightarrow a(a+b+c)MA^2 + b(a+b+c)MB^2 + c(a+b+c)MC^2 \geq abc^2 + bca^2 + cab^2$

$\Rightarrow (a+b+c)(aMA^2 + bMB^2 + cMC^2) \geq abc(a+b+c)$

$\Rightarrow aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \geq abc$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài toán 8. 37:

Cho tam giác ABC trọng tâm G. Chứng minh với mọi M, ta có:

$MA^2+MB^2+MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC \geq GA^2 + GB^2+GC^2$

Hướng dẫn giải:

Ta có : MA.GA + MB.GA + MC.GC

$\geq \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GA}$

$=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})\overrightarrow{GB}+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})\overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$

Theo bất đẳng thức AM–GM :

$2(MA.GA + MB.GB + MC.GC)$

$\le MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Nên $MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MA.GA + MB.GB + MC.GC)$

$\ge (MA.GA + MB.GB + MC.GC) - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$

Suy ra : $\sum_{A,B,C} MA^2 - \sum_{A,B,C} MA.GA \ge 0 \Rightarrow \sum_{A,B,C} MA^2 \ge \sum_{A,B,C} MA.GA$.

Bài toán 8. 38:

Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh: $AC^2 + BD^2 \le AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$

Hướng dẫn giải

BĐT $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) \le 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{AB} \le 2AB.CO \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} \le AB.CD$: đúng

Dấu đẳng thức xảy ra khi AB//CD.

Bài toán 8. 39:

Cho tam giác ABC. Chứng minh với mọi x, y, z $\in$ **R**:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$

b) $2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B + 2xy\cos 2C \le -(x^2 + y^2 + z^2)$

c) $2xy\sin\frac{C}{2} + 2yz\sin\frac{A}{2} + 2zx\sin\frac{C}{2} \le x^2 + y^2 + z^2$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ là 3 vectơ đơn vị, đặt:

$\gamma = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$; $\alpha = (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$; $\beta = (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1})$

Ta có $(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3})^2 \ge 0$

$\Rightarrow x^2\overrightarrow{e_1}^2 + y^2\overrightarrow{e_2}^2 + z^2\overrightarrow{e_3}^2 + 2(xy\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + yz\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} + zx\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3}) \ge 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy\cos\gamma + yz\cos\alpha + zx\cos\beta \ge 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge -2xy\cos\gamma - 2yz\cos\alpha - 2zx\cos\beta$ (*)

a) Chọn 3 vectơ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ trên 3 cạnh như hình vẽ, ta có :

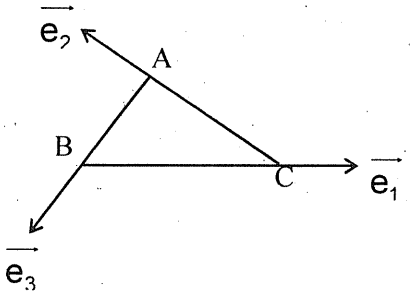
$\cos\gamma = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$,

và $\cos\alpha = -\cos A$; $\cos\beta = -\cos B$

Áp dụng hệ thức (*) thì có

$x^2 + y^2 + z^2$

$\ge 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$



b) Chọn $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ cùng hướng với 3 bán kính OA,OB,OC trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp thì: $\cos\gamma = \cos 2C$, $\cos\alpha = \cos 2A$, $\cos\beta = \cos 2B$

Áp dụng hệ thức (*) thì có

$$-(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy\cos 2A + 2yz\cos 2B + 2zx\cos 2C$$

c) Hướng dẫn giải như câu b), chọn $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ cùng hướng với 3 bán kính IA, IB, IC trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp.

Bài toán 8. 40:

Cho tam giác ABC có cạnh BC = a, CA = b, AB = c điểm M tuỳ ý, tìm giá trị bé nhất của: $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2)$,

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(MB^2 + MC^2 - BC^2)$, $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(MC^2 + MA^2 - CA^2)$

Cộng lại thì $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Nên $f(M) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

$\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy f(M) bé nhất khi $M \equiv G$.

Bài toán 8. 41:

Cho tam giác ABC và một đường thẳng Δ, d là một đường thẳng thay đổi luôn song song với Δ. Gọi d_1, d_2, d_3 là các khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng d. Xác định d để $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cố định đường thẳng Δ' vuông góc với Δ.

Hạ AA', BB', CC', GG' $\perp \Delta'$.

Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

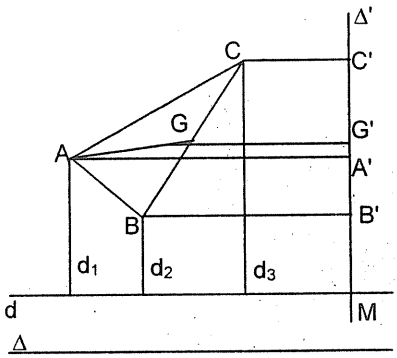
$\Rightarrow \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$

Gọi M là giao điểm của d với Δ', ta có

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2$

$= 3MG'^2 + G'A'^2 + G'B'^2 + G'C'^2$

$\geq G'A'^2 + G'B'^2 + G'C'^2$



Suy ra $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ nhỏ nhất khi M ≡ G', tức là khi d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài toán 8. 42: Tìm các góc ΔABC trong mỗi trường hợp, biết :

a) $\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B = \frac{5}{2}$

b) $(\sqrt{5}+1)(\cos 2A + \cos 2B) - (3+\sqrt{5})\cos 2C = 4 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là tâm đường tròn (ABC)

Từ $(\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \leq \frac{5}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Mà $\sin 2A\ \overrightarrow{OA} + \sin 2B\overrightarrow{OB} + \sin 2C\ \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ không cùng phương nên: $\begin{cases} \sin 2A = \frac{1}{2} \\ \sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2C = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 75^\circ \\ B = 30^\circ \\ C = 75^\circ \end{cases}$

b) Từ $\left[(\sqrt{5}+1)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - 2\overrightarrow{OC}\right]^2 \geq 0$, suy ra

$(\sqrt{5}+1)(\cos 2A + \cos 2B) - (3+\sqrt{5})\cos 2C \leq 4 + \sqrt{5}$

Để ý $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (\sqrt{5}+1)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}+1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\cos 36^\circ(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \sin 72^\circ(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \sin 36^\circ\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

nên có:

$\begin{cases} \sin 2A = \sin 2B = \sin 72^\circ \\ \sin 2C = -\sin 36^\circ = \sin 216^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B = 36^\circ \\ C = 108^\circ \end{cases}$

Bài toán 8. 43:

Cho tam giác ABC. Chứng minh $m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$, suy ra điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là: $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, M là một điểm tuỳ ý

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$ nên

$$(m_a + m_b + m_c)^2 = \frac{9}{4}(GA + GB + GC)^2 \le \frac{9}{4}.3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

$$\le \frac{27}{4}(MA^2 + MB^2 + MC^2)$$ đúng với mọi điểm M.

Thay M bởi tâm O của đường tròn ngoại tiếp, ta được:

$(m_a + m_b + m_c)^2 \le \frac{27}{4}.3R^2 = \frac{81}{4}R^2$ hay $m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$.

Vậy nếu ABC là tam giác đều thì có $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$. Ngược lại, giả sử tam giác ABC thoả mãn điều kiện cho. Thay điểm M bằng tâm O của đường tròn ngoại tiếp ABC, ta có:

$3R^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3OG^2$. Suy ra:

$$\frac{81}{4}R^2 = 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{81}{4}OG^2 \ge (m_a + m_b + m_c)^2 + \frac{81}{4}OG^2$$

Do đó: $\frac{81}{4}R^2 \ge \frac{81}{4}R^2 + \frac{81}{4}OG^2$. Suy ra $OG^2 = 0$ hay $O \equiv G$.

Vậy ABC là tam giác đều.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 8. 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Tính: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa tích vô hướng.

Kết quả $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -3a^2, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$

Bài tập 8. 2: Cho tam giác ABC, AB =c, BC= a, CA = b. Tính đoạn phân giác trong AD.

Hướng dẫn

Dùng bình phương vô hướng.

Kết quả $AD^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(b+c-a)$

Bài tập 8. 3: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ khác $\vec{0}$. Trong trường hợp nào đẳng thức sau đây đúng: $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$?

Hướng dẫn

Kết quả $\vec{a} = k\vec{c}$.

Bài tập 8. 4: Chứng minh tổng bình phương các khoảng cách từ các đỉnh của tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O,R) đến đường thẳng d bất kì qua O không đổi.

Hướng dẫn

Dùng bình phương vô hướng. Kết quả $\frac{3R^2}{2}$

Bài tập 8. 5: Hình chữ nhật ABCD tâm O. Chứng minh với mọi điểm M thì:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$ b) $MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

Hướng dẫn

a) chèn O là trung điểm 2 chéo

b) dùng kết quả câu a)

Bài tập 8. 6: Gọi O và O' lần lượt là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2,...,A_m\}$ và hệ điểm $\{B_1,B_2,...,B_n\}$. Chứng minh:

a) $MO^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} MA_i^2 - \frac{1}{m^2}\sum_{i<j}^{m} A_iA_j^2, \forall M$

b) $OO'^2 = \frac{1}{mn}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} A_pB_q^2\right) - \frac{1}{m}\sum_{i<j}^{m} A_iA_j^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{s<t}^{n} B_sB_t^2$

Hướng dẫn

a) Sử dụng tâm tỉ cự và bình phương vô hướng

b) Áp dụng câu a)

Bài tập 8. 7: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh:

a) Nếu $\forall$ M: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ thì ABCD là hình chữ nhật.

b) Nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$ thì ABCD là hình bình hành.

Hướng dẫn

a) cho M lần lượt trùng bốn đỉnh thì có hệ phương trình

b) biến đổi về 2 vectơ trên 2 cạnh đối bằng nhau

Bài tập 8. 8: Cho hình chữ nhật ABCD. Hạ BH vuông góc với đường chéo AC, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AH và CD. Chứng minh đường thẳng MB vuông góc với đường thẳng MN.

Hướng dẫn

Biểu diễn theo cơ sở $\vec{a} = \overrightarrow{AB}; \vec{b} = \overrightarrow{AD}$

Bài tập 8. 9: Cho tam giác ABC và số k. Tìm tập các điểm M sao cho:

a) $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$. b) $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = k$.

Hướng dẫn

a) Dùng tâm tỉ cự I của A, B và C, $MI^2 = \frac{1}{10}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2)$.

b) Dùng tâm tỉ cự I của A và B: $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Bài tập 8. 10: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tìm tập hợp những điểm M trong mỗi trường hợp:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 5a^2$ b) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$

Hướng dẫn

a) Dùng trung điểm 2 cạnh AB,CD.

b) Dùng tâm tỉ cự

Bài tập 8. 11: Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R) và điểm M bất kỳ.

a) Chứng minh điều kiện cần và đủ để M nằm trên đường tròn (O) là:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2.$$

b) Cho M chuyển động trên (O; R), tìm vị trí của M để $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2$ lớn nhất, nhỏ nhất. Tính các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn

a) Chèn tâm O

b) $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$ .Kết quả $\pm 2R^2\sqrt{21}$.

Bài tập 8. 12: Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3}$ với điểm M tùy ý trong mp (ABC).

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$

b) Chứng minh $a.m_a \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$

Chuyên đề 9: HỆ THỨC LƯỢNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Hệ thức trong tam giác

– Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH:

$$BA^2 = BH.BC,\ AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$$AH^2 = HB.HC,\ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

– Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$a = 2R\sin A \text{ hay } \sin A = \frac{a}{2R}$$

– Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A,$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

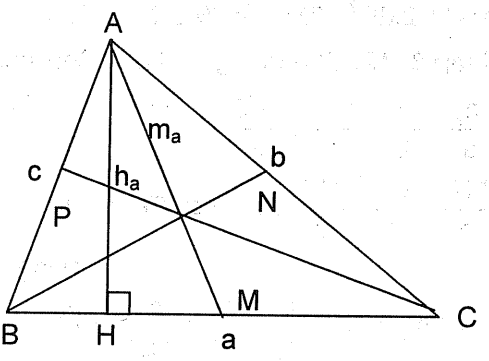
$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0$, A tù $\Leftrightarrow \cos A < 0$.

– Trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$m_a = AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Chiếu: $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MH}$



– Phân giác trong

$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c};\ l_B = \frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c + a};$$

$$l_C = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$

– Diện tích:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ca.\sin B$$

$$S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$$

$$S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$$

Hệ thức về góc của tam giác ABC bất kỳ

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \text{ (không vuông)}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

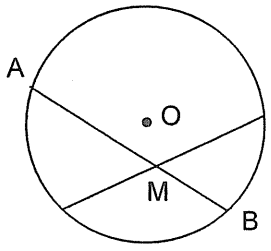
$$\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$$

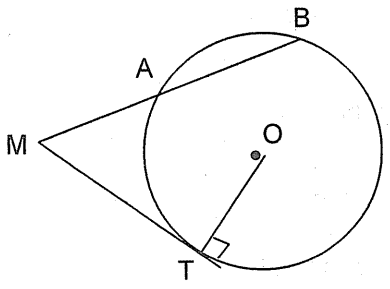
$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Qua điểm M vẽ cát tuyến MAB bất kỳ với đường tròn (O; R) thì :

$$\mathbb{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$$





Nếu qua M vẽ hai cát tuyến hoặc hai dây AB, CD thì:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$$

Nếu M nằm ngoài (O; R), vẽ tiếp tuyến MT thì:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB = MT^2.$$

Định lý Casey: M là một điểm tùy ý, H là hình chiếu vuông góc của M trên trục đẳng phương d của hai đường tròn (O_1), (O_2) thì:

$$\mathbb{P}_{M/(O1)} - \mathbb{P}_{M/(O2)} = 2\overrightarrow{O_1O_2}.\overrightarrow{HM}.$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 9.1:

Cho tam giác ABC, biết

a) a = 7, b = 8, c = 6. Tính S và h_a.

b) b = 7, c = 5 và cosA = $\frac{3}{5}$. Tính S và R, r.

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng công thức Hêrông với p = $\frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2}$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{21}{2}.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{9}{2}} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

Vì $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}.7.h_a \Rightarrow h_a = \frac{3\sqrt{15}}{2}$.

b) $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ (vì sinA > 0)

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5} = 14.$$

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

$$S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2.S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Theo định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{5+7+4\sqrt{2}} = \frac{14}{12+4\sqrt{2}} = \frac{7}{6+2\sqrt{2}}.$$

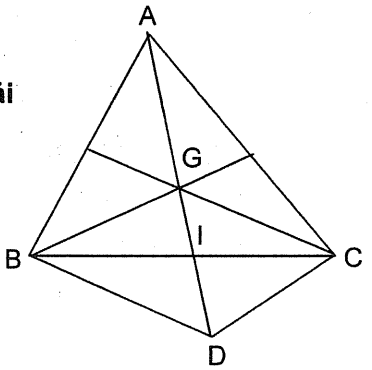
Bài toán 9.2:

Cho tam giác ABC có đô dài ba trung tuyến bằng 15; 18; 27.

a) Tính diện tích của tam giác.

b) Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Hướng dẫn giải



a) Gọi I là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$S_{ABC} = 3S_{GBC}$$

Lấy D là điểm đối xứng với G qua I ta được hình bình hành BGCD, do đó:

$S_{GBC} = S_{BGD} = \frac{1}{2} S_{BGCD}$ nên $S_{ABC} = 3S_{BGD}$

Tam giác BGD có độ dài ba cạnh bằng 10, 12, 18 nên:

$S_{BGD} = \sqrt{20.10.8.2} = 40\sqrt{2}$ .Vậy S = $120\sqrt{2}$.

b) Giả sử $m_a = 15$, $m_b = 18$, $m_c = 27$. Ta có:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}, c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}, a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 1704$$

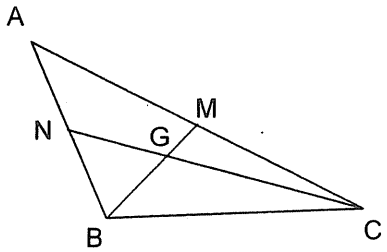
Mà: $b^2 - a^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 - m_b^2) = -132$, $b^2 - c^2 = \frac{4}{3}(m_c^2 - m_b^2) = 54$

Từ đó ta tính được $b = 8\sqrt{11}$; $a = 2\sqrt{209}$; $c = 2\sqrt{41}$.

Bài toán 9.3:

Cho tam giác ABC có các trung tuyến BM và CN, trọng tâm G. Biết BM = $\frac{3}{2}$, CN = 3 và BGC = 120^o, tính độ dài các cạnh tam giác.

Hướng dẫn giải



Ta có: BG = 1, CG = 2

$BC^2 = BG^2 + CG^2 - 2BG.CG.\cos BGC$

$= BG^2 + CG^2 + BG.CG = 7$

$\Rightarrow BC = \sqrt{7}$

Đặt AB = x, AC = y (x > 0, y > 0), ta có:

$$\begin{cases} BC^2 + BA^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2} \\ CA^2 + CB^2 = 2CN^2 + \frac{AB^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = -5 \\ 2y^2 - x^2 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{13} \end{cases}$$

Vậy $BC = \sqrt{7}$; $CA = \sqrt{13}$; AB = 2.

Bài toán 9.4:

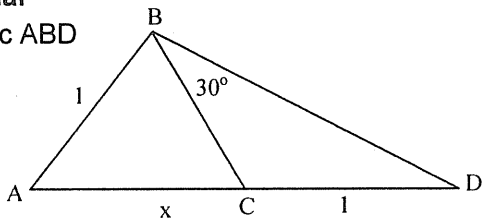
Cho tam giác ABC vuông tại B, AB = 1. Kéo dài AC về phía C một đoạn CD = AB. Biết CBD = 30^0 , tính AC.

Giải

Đặt AC = x, x >0 ta có trong tam giác ABD

$$\frac{AB}{\sin D} = \frac{AD}{\sin ABD} \Rightarrow \frac{1}{\sin D} = \frac{2(x+1)}{\sqrt{3}}$$

Và trong tam giác BCD



$$\frac{BC}{\sin D}=\frac{CD}{\sin CBD}\Rightarrow\frac{BC^2}{\sin^2 D}=\frac{CD^2}{\sin^2 CBD}\Rightarrow\frac{x^2-1}{\sin^2 D}=4$$

Suy ra: $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{1}{x^2-1}\Leftrightarrow x^4+2x^3-2x-4=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^3-2)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$. Vậy $AC=\sqrt[3]{2}$.

Bài toán 9.5:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$ b) $a = r(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})$

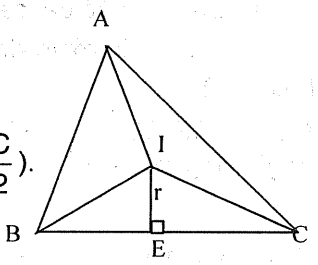
c) $r_a = p\tan\frac{A}{2}$ d) $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Theo định lí côsin:

$$b.\cos C + c.\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a.$$

b) Xét hai tam giác vuông IEB, IEC



$$BE = r\cot\frac{B}{2}, CE = r\cot\frac{C}{2}$$

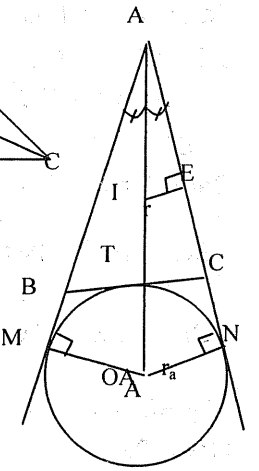
Do đó $a = BE + EC = r(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})$.

c) Ta có: $AM = AN = p$, $ON = r_a$

Suy ra: $r_a = p\tan\frac{A}{2}$

d) Tương tự: $AE = p - a$, $IE = r$

nên: $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$.



Bài toán 9.6:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$

b) $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Hướng dẫn giải

a) $VT = \frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}}{\sin^2 C}$

$$= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2\sin^2 C} = \frac{-2\sin(B+A)\sin(B-A)}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin C.\sin(A-B)}{\sin^2 C} = VP.$$

b) Ta có $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

Tương tự $\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$ và $\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9.7:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $\frac{\cos\frac{A}{2}}{\ell_A} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\ell_B} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\ell_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

b) $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$.

Hướng dẫn giải

a) $\ell_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Rightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\ell_A} = \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Tương tự thì có đpcm.

b) Ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ nên đề bài tương đương

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}$

$$= 2R\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = VP.$$

Bài toán 9.8:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $r + r_a + r_b - r = 4R\cos C$

b) $\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{h_a}{2r_a + h_a}$

c) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

Hướng dẫn giải

a) $VT = (p-c)\tan\frac{C}{2} + p\tan\frac{A}{2} + p\tan\frac{B}{2} - p\tan\frac{C}{2}$

$= -c.\tan\frac{C}{2} + p(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2})$

$= -2R\sin C\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} + 2R\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$

$= 2R(-2\sin^2\frac{C}{2}) + 2R.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$

$= 4R(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}) = 4R\cos C = VP$.

b) Ta có $h_a=\frac{2S}{a}$; $r=\frac{2S}{p}$; $2r_a=\frac{2S}{p-a}$ nên

$$\frac{h_a-2r}{h_a} = \frac{h_a}{2r_a+h_a} = \frac{p-a}{p} = \frac{b+c-a}{b+c+a}$$

$$= \frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin B+\sin C+\sin A} = \frac{\sin B+\sin C-\sin(B+C)}{\sin B+\sin C+\sin(B+C)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)}{2\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{-C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

c) Ta có $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$

Suy ra: $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ $(\text{do } \cos\frac{A}{2}>0)$

Tương tự $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

Suy ra $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ $(\text{do } \sin\frac{A}{2}>0) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9.9:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $bc.\cot\frac{A}{2}+ca.\cot\frac{B}{2}+ab.\cot\frac{C}{2}=4Rp^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{p}\right)$.

b) $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $VP = 4Rp^2(\frac{p-a}{ap}+\frac{p-b}{bp}+\frac{p-c}{cp})$

$$= 4R\frac{p(p-a)}{a}+4R\frac{p(p-b)}{b}+4R\frac{p(p-c)}{c}$$

và $4R\frac{p(p-a)}{a}=bc\frac{R}{abc}(a+b+c)(b+c-a)$

$$= bc\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin B+\sin C-\sin A)}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$= bc\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{16\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=bc.\cot\frac{A}{2}$$

Từ đó suy ra đpcm .

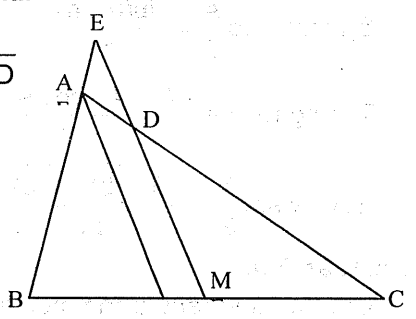
b) Ta có: $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$; $m_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$; $m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$

Suy ra : $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Bài toán 9.10:

Cho tam giác ABC có M là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng qua M và song song với phân giác trong góc A cắt AC, AB tại D, E. Kí hiệu r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc B, C của tam giác ABC. Chứng minh $MD.ME = r_b . r_c$.

Hướng dẫn giải



Trong tam giác MDC: $\frac{MC}{\sin MDC} = \frac{MD}{\sin MCD}$

$\Rightarrow MD = \frac{a\sin C}{2\sin\frac{A}{2}} = \frac{c\sin A}{2\sin\frac{A}{2}} = c\cos\frac{A}{2}$

Tương tự $ME = b\cos\frac{A}{2}$ nên:

$MD \cdot ME = bc.\cos^2\frac{A}{2} = bc.\frac{p(p-a)}{bc} = p(p-a)$

Mặt khác: $r_b r_c = p\tan\frac{B}{2}.p\tan\frac{C}{2} = p^2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

$= p^2\frac{p-a}{p} = p(p-a)$. Do đó: $MD.ME = r_b r_c$.

Bài toán 9.11:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

b) $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$.

c) $S = \frac{4}{3}\sqrt{p'(p'-m_a)(p'-m_b)(p'-m_c)}$ với $p' = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) $VP = \frac{1}{4}8R^2(\sin^2 A\sin B\cos B + \sin^2 B\sin A\cos A)$

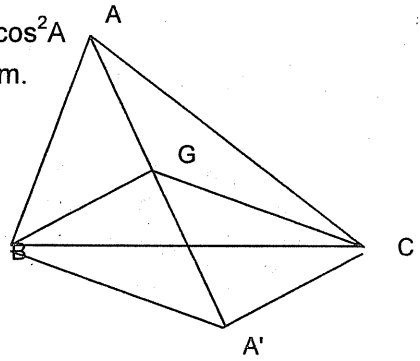
$= 2R^2\sin A\sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A)$

$= \frac{1}{2}ab\sin(A + B) = \frac{1}{2}ab\sin C = S = VT$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2 = b^2c^2 - b^2c^2\cos^2 A$

$= b^2c^2(1 - \cos^2 A) = b^2c^2\sin^2 A = 4S^2 \Rightarrow$ đpcm.

c) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trọng tâm A. Tam giác BA'G có các cạnh là $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$ và có diện tích bằng $\frac{S}{3}$ nên tam giác với các cạnh là m_a,



m_b, m_c có diện tích bằng $\left(\frac{3}{2}\right)^2 . \frac{S}{3} = \frac{3}{4}S$,

Nên: $\frac{3}{4}S = \sqrt{p'(p'-m_a)(p'-m_b)(p'-m_c)}$ là đpcm.

Bài toán 9.12:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Hướng dẫn giải

a) $S = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} . \frac{a+b+c}{2p} = \frac{1}{r}$

b) Ta có: $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{2S}{h_a} = \frac{S}{r} - \frac{S}{r_a} = \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c}$

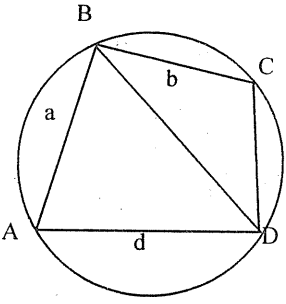
$\Leftrightarrow a = p - (p - a) = (p - b) + (p - c)$: hiển nhiên.

Bài toán 9.13:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp được và có các cạnh a, b, c, d.

Chứng minh: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, p là nửa chu vi tứ giác.

Hướng dẫn giải



Ta có: $S = S_{ABD} + S_{CDB} = \frac{1}{2}adsinA + \frac{1}{2}bcsinC$

hay $2S = (ad + bc)sinA$ nên $sinA = \frac{2S}{ad+bc}$

và: $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad.cosA$,

$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bccosC = b^2 + c^2 + 2bccosA$.

Suy ra: $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad + bc)cosA$ nên $cosA = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}$

Vì $cos^2A + sin^2A = 1$ nên $16S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad + bc)^2$

Do đó $16S^2 = [2(ad + bc)]^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$

$= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)$

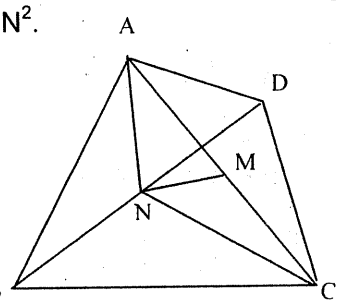
$= [(a + d)^2 - (b - c)^2].[(b + c)^2 - (a - d)^2]$

$= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d)$

$= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9.14:

Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm 2 chéo AC, BD. Chứng minh: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.



Hướng dẫn giải

Trong tam giác ABD, CBD ta có:

$$AB^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{BD^2}{2}$$

$$CB^2 + CD^2 = 2CN^2 + \frac{BD^2}{2}$$

Nên: $AB^2 + BC^2 + CD^2 = 2(AN^2 + CN^2) + BD^2$

$$= 2(2MN^2 + \frac{AC^2}{2}) + BD^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Bài toán 9.15:

Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là trung điểm của BC:

a) Đặt $AMB = \varphi$. Chứng minh: $\cot C - \cot B = 2\cot\varphi$

b) Đặt $BGC = \alpha$. Chứng minh: $\cot\alpha = \dfrac{5bc\cos A - 2(b^2 + c^2)}{3bc\sin A}$

Hướng dẫn giải

a) $\cot\phi = \dfrac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{4S_{ABM}} = \dfrac{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - c^2}{2S} = \dfrac{b^2 - c^2}{4S}$

nên: $\cot C - \cot B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} = \dfrac{b^2 - c^2}{2S} = 2\cot\phi$.

b) $\dfrac{5bc\cos A - 2(b^2 + c^2)}{3bc\sin A} = \dfrac{5\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} - 2(b^2 + c^2)}{6S} = \dfrac{b^2 + c^2 - 5a^2}{12S}$

nên: $\cot\alpha = \dfrac{GB^2 + GC^2 - BC^2}{4S_{BCG}} = \dfrac{\frac{4}{9}\left(\frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}\right) - a^2}{\frac{4}{3}S}$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{12S} = \frac{5bc\cos A - 2(b^2 + c^2)}{3bc\sin A}.$$

Bài toán 9.16: Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) Nếu $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ thì $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

b) Nếu $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$ thì $2\cot A = \cot B + \cot C$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $c = \frac{1}{2}(a + b) \Leftrightarrow 2\sin C = \sin A + \sin B$

$\Leftrightarrow 2\sin(A + B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A-B}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$: đúng.

b) Ta có: $2\cot A = \cot B + \cot C$

$\Leftrightarrow 2.\frac{b^2+c^2-a^2}{abc}R = \frac{a^2+c^2-b^2}{abc}R + \frac{a^2+b^2-c^2}{abc}R \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2.$

Từ giả thiết suy ra $c^2m_c^2 = b^2m_b^2$, $b^2 - c^2 \neq 0$, do đó:

$$c^2\left(\frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = b^2\left(\frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right)$$

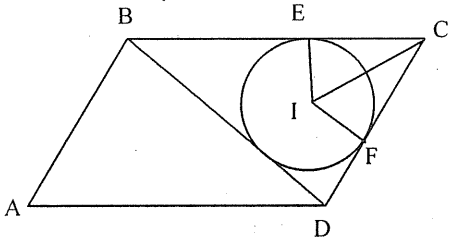
$\Rightarrow 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - c^4 = 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - b^4$

$\Rightarrow b^4 - c^4 = 2a^2(b^2 - c^2) \Rightarrow b^2 + c^2 = 2a^2 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9.17:

Cho hình bình hành ABCD có chu vi bằng 26, góc $ABC = 120^\circ$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác BCD bằng $\sqrt{3}$. Tính các cạnh của hình bình hành.

Giải



Đặt AB = CD = x;BC = AD = y.

Theo giả thiết x + y = 13

Xét tam giác BCD

Ta có: $BCD = 60^\circ$.

Gọi E, F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với BC, CD, ta có:

$CE = EF = \sqrt{3}\cot 30^\circ = 3$

$\Rightarrow BC + CD - BD = 6 \Rightarrow BD = 7.$

Mà $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos BCD \Rightarrow x^2 + y^2 - xy = 49.$

Giải hệ $\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 - xy = 49 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy: AB = CD = 8; BC = DA = 5 hoặc ngược lại.

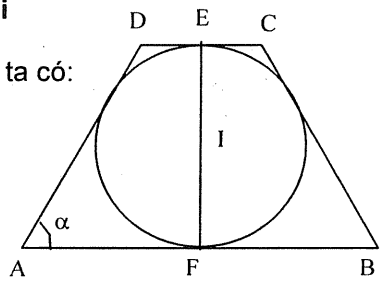
Bài toán 9.18:

Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn AB ngoại tiếp một đường tròn bán kính r, nội tiếp đường tròn bán kính R.

a) Đặt BAD = α. Tính các cạnh đáy và đường chéo theo r, α.

b) Biết $\frac{R}{r}=\frac{2}{3}\sqrt{7}$, tính góc BAD.

Hướng dẫn giải



a) Ta có AD = BC = $\frac{2r}{\sin\alpha}$. Đặt AB = x, CD = y, ta có:

$x - y = 4r\cot\alpha$ và $x + y = \frac{4r}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow x = 2r\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $y = 2r\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Do đó $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD$

$$= 4r^2\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \frac{4r^2}{\sin^2\alpha} - 8r^2\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cos\alpha$$

$$= 4r^2\frac{2-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4r^2\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right).$$ Vậy:

$AB = 2r\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $CD = 2r\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $BD = CA = 2r\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}}$

b) Do $BD = 2R\sin\alpha = 2r\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}$ nên $\frac{R}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{7}$

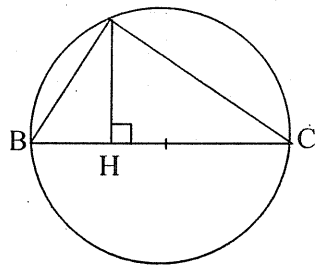
suy ra $\frac{2}{3}\sqrt{7}\sin\alpha = \sqrt{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}} \Leftrightarrow 28\sin^4\alpha - 9\sin^2\alpha - 9 = 0$

Giải ra ta được $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (do $\sin\alpha > 0$) $\Rightarrow \alpha = BAD = 60^\circ$.

Bài toán 9.19:

Tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b, đường cao AH. Tìm phương tích của điểm H đối với các đường tròn có đường kính lần lượt là AB, AC và BC.

Hướng dẫn giải



Gọi (C_1), (C_2), (C_3) lần lượt là đường tròn với đường kính AB, AC, BC.

Vì H nằm trên (C_1) và (C_2) nên:

$P_{H/(C_1)} = P_{H/(C_1)} = 0$.

$$P_{H/(C_1)} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = -HB.HC = -HA^2 = -\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Bài toán 9.20:

Tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O; R) với I là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Đặt AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x, BD = y và góc AID = α. Từ C vẽ đường thẳng song song với BD, đường thẳng này cắt (O) ở E. Chứng minh: xy = ac + bd. Suy ra x, y theo a, b, c, d.

Hướng dẫn giải

a) Do CE // BD nên: BC = DE; BE = CD; ABE = α

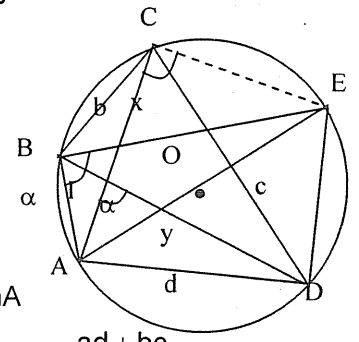
ADE = $180^o - \alpha$ và $S_{BCD} = S_{BED}$

Vì vậy: $S_{ABCD} = S_{ABED} = S_{ABE} + S_{ADE}$

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}xy\sin\alpha$, $S_{ABE} = \frac{1}{2}ac\sin\alpha$, $S_{ADE} = \frac{1}{2}db\sin\alpha$

Nên : $\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\alpha + \frac{1}{2}bd\sin\alpha \Rightarrow xy = ac + bd.$

b) Ta có: $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{BAD} + S_{BDC}$



nên $\frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin(180^o - B)$

$= \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin(180^o - A)$

Suy ra: (ab + cd)sinB = (ad + bc)sinA

Mặt khác: x = AC = 2RsinB; y = BD = 2RsinA

Nên $\frac{x}{y} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$ do đo: $xy.\frac{x}{y} = (ac+bd)\frac{ad+bc}{ab+cd}$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

Và $y = \frac{ab+cd}{ad+bc}.x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$.

Bài toán 9.21:

Cho 2 đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A, B

a) Chứng minh đường thẳng AB cắt tiếp tuyến chung TT' tại trung điểm I của TT'.

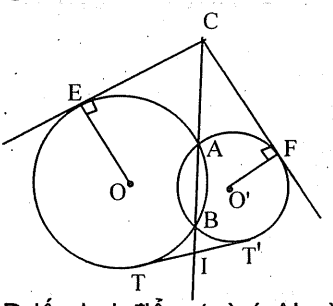
b) Trên đường thẳng AB, lấy điểm C ở ngoài đường tròn, vẽ 2 tiếp tuyến CE, CF với 2 đường tròn. Chứng minh CE = CF.

Hướng dẫn giải

a) $P_{I/(O)} = IT^2 = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

$P_{I/(O')} = IT'^2 = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow IT^2 = IT'^2 \Rightarrow IT = IT'$



b) Tương tự:

$P_{C/(O)} = CE^2 = CA.CB$

Và $P_{C(O)} = CF^2 = CA.CB \Rightarrow CE = CF$.

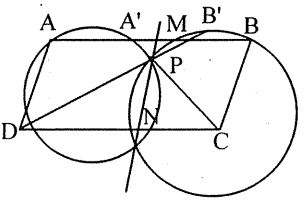
Bài toán 9.22:

Trên cạnh AB của hình bình hành ABCD lấy hai điểm tuỳ ý A' và B'. Các đường thẳng CA' và DB' cắt nhau ở P. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua P và song song với BC là trục đẳng phương của các đường tròn ngoại tiếp tam giác PAA' và tam giác PBB'.

Hướng dẫn giải

Giả sử trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp PAA' và PBB' cắt AB và DC lần lượt tại M và N.

Ta có MA'.MA = MB'.MB



Vì AD//DC $\Rightarrow \dfrac{MA'}{NC} = \dfrac{MB'}{ND}$

$\Rightarrow$ MA'.ND = MB'.NC

Do đó : $\dfrac{MA}{ND} = \dfrac{MB}{NC} = \dfrac{MA + MB}{ND + NC} = 1$

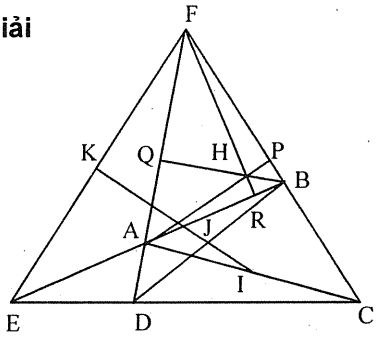
Vậy MA = ND, MB = NC, suy ra MN//BC.

Bài toán 9.23:

Cho tứ giác lồi ABCD có E và F là giao điểm của AB với CD và AD với BC. Chứng minh các đường tròn đường kính AC, BD và EF có trục đẳng phương chung.

Hướng dẫn giải

Gọi (I), (J), (K) là các đường tròn đường kính AC, BD, EF. Gọi H là trực tâm và AP, BQ, FR là các đường cao trong tam giác FAB.



Ta có: $P_{H/(I)} = \overline{HA}.\overline{HP}$

$P_{H/(J)} = \overline{HB}.\overline{HQ}$

$P_{H/(K)} = \overline{HF}.\overline{HR}$

mà $\overline{HA}.\overline{HP} = \overline{HB}.\overline{HQ} = \overline{HF}.\overline{HR}$ nên điểm H có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn (I), (J), (K).Tương tự H' có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn (I), (J), (K).

Vậy các đường tròn (I), (J), (K) có trục đẳng phương chung là đường thẳng HH'.

Bài toán 9.24:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường trung tuyến CC_1 cắt (O) tại điểm thứ hai D. Chứng minh $CA^2 + CB^2 = 2CC_1.CD$.

Hướng dẫn giải

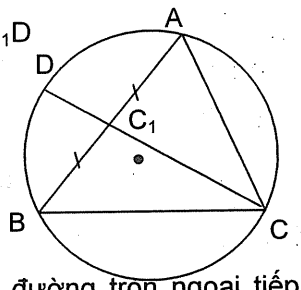
Ta có: $C_1C.C_1D = C_1A.C_1B = \dfrac{AB^2}{4}$

Mà $CC_1^2 = \dfrac{CA^2+CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{CA^2+CB^2}{2} - C_1C.C_1D$

$\Rightarrow \dfrac{CA^2+CB^2}{2} = CC_1^2 + C_1C.C_1D$

$= C_1C(C_1C + C_1D) = C_1C.CD$

$\Rightarrow CA^2 + CB^2 = 2CC_1.CD.$



Bài toán 9.25:

Cho tam giác ABC có B > C và O, I, O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh:

$$\tan IOO_1 = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi J là trung điểm của IO_1 thì J là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A) của đường (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó $OJ \perp BC$ và OJ = R

còn $BJ = CJ = IJ = 2R\sin\dfrac{A}{2}$

Ta có $\cot IOO_2 = \dfrac{OI^2 + OO_1^2 - IO_1^2}{4S_{IOO_1}}$

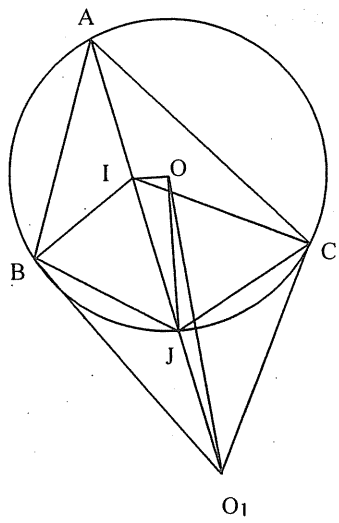
mà $OI^2 + OO_1^2 - IO_1^2 = 2OJ^2 + \dfrac{IO_1^2}{2} - IO_1^2$

$= 2OJ^2 - 2IJ^2 = 2R^2\left(1 - 4\sin^2\dfrac{A}{2}\right)$

$S_{IOO_1} = 2S_{IJO} = IJ.OJ.\sin IJO$

Vì $IJO = \dfrac{B-C}{2}$ (do $OJ \perp BC$ và B > C)

nên: $S_{IOO_1} = 2R^2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$. Do đó :



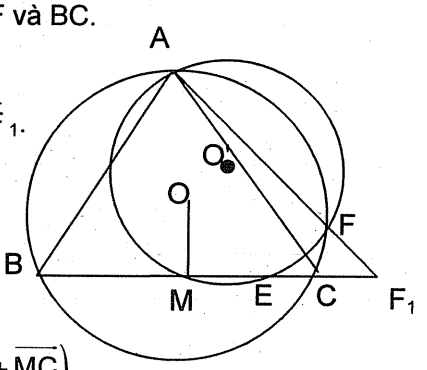
$$\cot IOO_1 = \frac{2R^2\left(1 - 4\sin^2\dfrac{A}{2}\right)}{8R^2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}} = \frac{2\cos A - 1}{2(\sin B - \sin C)} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài toán 9.26:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (O') thay đổi, đi qua A và trung điểm M của BC cắt BC tại điểm thứ hai E, và cắt (O) tại điểm thứ hai F. Gọi F_1 là giao điểm của AF và BC.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1E} = \overrightarrow{F_1B}.\overrightarrow{F_1C}$

b) Chứng minh rằng $MB^2 = MC^2 = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF_1}$.



Giải

a) Đối với đường tròn (O), (O') ta có:

$\overrightarrow{F_1B}.\overrightarrow{F_1C} = \overrightarrow{F_1A}.\overrightarrow{F_1F}$, $\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1E} = \overrightarrow{F_1A}.\overrightarrow{F_1F}$

Suy ra : $\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1E} = \overrightarrow{F_1B}.\overrightarrow{F_1C}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1E} = \overrightarrow{F_1B}.\overrightarrow{F_1C} = \left(\overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{MC}\right)$

$= \left(\overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{F_1M} - \overrightarrow{MB}\right) = F_1M^2 - MB^2$

$\Rightarrow MB^2 = F_1M^2 - \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_1E} = \overrightarrow{F_1M}(\overrightarrow{F_1M} - \overrightarrow{F_1E}) = \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{EM}$

Vậy $MB^2 = MC^2 = \overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{ME}$.

Bài toán 9.27:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm O bán kính R có B, C cố định còn A thay đổi. Gọi H là trực tâm tam giác và K là giao điểm của AH với BC.

a) Chứng minh $HO^2 - 2\overline{HA}.\overline{HK}$ không đổi

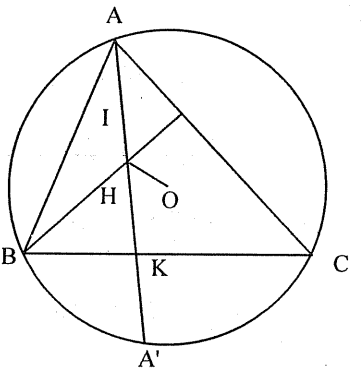
b) Chứng minh H là trung điểm AK $\Leftrightarrow AK^2 + 2OH^2 = 2R^2$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi A' là giao điểm của AH với đường tròn (O) thì K là trung điểm của HA'. Do đó ta có:

$\mathcal{P}_{H/(O)} = OH^2 - R^2 = \overline{HA}.\overline{HA'} = 2\overline{HA}.\overline{HK}$

Suy ra $HO^2 - 2\overline{HA}.\overline{HA'} = R^2$ không đổi



b) Gọi I là trung điểm của AK, ta có:

$\overline{HA}.\overline{HK} = (\overline{HI} + \overline{IA})(\overline{HI} + \overline{IK})$

$= (\overline{HI} + \overline{IA})(\overline{HI} - \overline{IA}) = HI^2 - IA^2 = HI^2 - \dfrac{AK^2}{4}$

Nên $4HI^2 - AK^2 = 4\overline{HA}.\overline{HK} = 2OH^2 - 2R^2$

$\Rightarrow AK^2 + 2OH^2 = 2R^2 + 4HI^2$

Do đó: H là trung điểm của AK $\Leftrightarrow AK^2 + 2OH^2 = 2R^2$.

Bài toán 9.28:

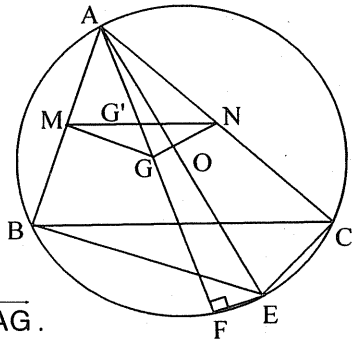
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có G là trọng tâm. Gọi F là giao điểm của AG với (O) và M, N là trung điểm của AB, AC.

a) Chứng minh $3\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AG} = AB^2 + AC^2$.

b) Chứng minh A, G, M, N cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi : $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi E là điểm đối xứng của A qua tâm O và I là trung điểm của BC, ta có:



$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = AB^2$ và $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = AC^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AI} = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG} = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AG} = AB^2 + AC^2$ (do $EF \perp AG$)

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác AMN, $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

$$3\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AG'} = \frac{3}{2}AG^2 = \frac{3}{2}\frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{9} = \frac{AB^2 + AC^2}{3} - \frac{BC^2}{6}$$

Theo câu a) ta có: A, M, N, G cùng thuộc một đường tròn

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AG'} = AM^2 + AN^2 \Leftrightarrow \frac{AB^2 + AC^2}{3} - \frac{BC^2}{6} = \frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2 + AC^2}{3} - \frac{BC^2}{6} = \frac{AB^2 + AC^2}{4} \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 2BC^2.$$

Bài toán 9.29:

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O và một điểm M sao cho các góc AMB, BMC, CMA đều bằng 120°. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt đường tròn (O) lần lượt tại A', B' và C'.

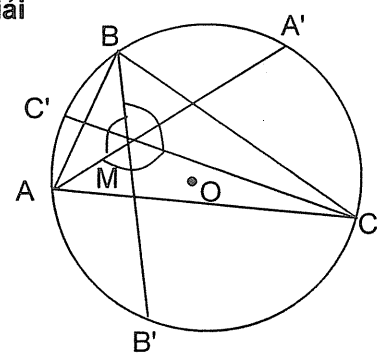
Chứng minh rằng: MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'

Hướng dẫn giải

Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho:

$$\overrightarrow{MA_1} = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}; \overrightarrow{MB_1} = \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} \text{ và } \overrightarrow{MC_1} = \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$$

Khi đó cả ba vectơ trên đều có độ dài bằng 1, mà góc giữa hai vectơ bất kì trong chúng đều bằng 120° nên M là tâm của tam giác đều $A_1B_1C_1$.



Ta có: $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = MA(MA - MA')$

Suy ra: $2\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}.\overrightarrow{MO} = MA - MA'$

Hay: $2\overrightarrow{MA}_1.\overrightarrow{MO} = MA - MA'$

Tương tự: $2\overrightarrow{MB}_1.\overrightarrow{MO} = MB - MB'$, $2\overrightarrow{MC}_1.\overrightarrow{MO} = MC - MC'$

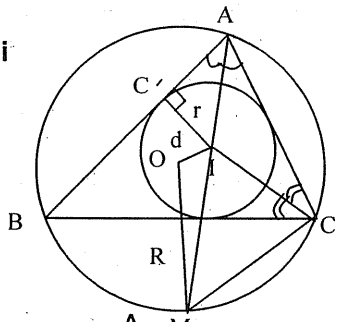
nên $MA + MC - MA' - MB' - MC = 2(\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MC}_1).\overrightarrow{MO} = 0$

Vậy $MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'$.

Bài toán 9.30:

Tam giác ABC có (O, R) và (I, r) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. Chứng minh công thức Ơle: $d^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$, suy ra trong mọi tam giác ta luôn có $R \geq 2r$.

Hướng dẫn giải



Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC.

Đặt OM = R, IC' = r và OI = d, ta có:

$IA.IM = R^2 - d^2$

Tam giác MIC có: $MIC = MCI = \frac{A+C}{2}$

Suy ra MI = MC, và do $MC = 2R\sin\frac{A}{2}$ nên $MI = 2R\sin\frac{A}{2}$

và $IA = \frac{IC'}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ nên: $2Rr = R^2 - d^2$, hay là $d^2 = R^2 - 2Rr$

Do $0 \leq d^2 = R(R - 2r) \Rightarrow R \geq 2r$.

Bài toán 9.31:

Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) có tâm $O_1 \neq O_2$ và M là một điểm tùy ý. H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Chứng minh: $\mathbf{P}_{M/(O1)} - \mathbf{P}_{M/(O2)} = 2\overrightarrow{O_1O_2}.\overrightarrow{HM}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của O_1O_2, M', H' là hình chiếu của M, H trên O_1O_2. Vì $H \in d$ nên $P_{H/(O1)} - P_{H/(O2)}$

Suy ra $P_{M/(O1)} - P_{M/(O2)}$

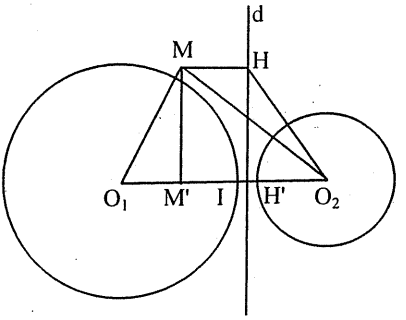
$= P_{M/(O1)} - P_{H/(O1)} - (P_{M/(O2)} - P_{H/(O2)})$

$= MO_1^2 - HO_1^2 - (MO_2^2 - HO_2^2)$

$= MO_1^2 - MO_2^2 - (HO_1^2 - HO_2^2)$

$= 2\overrightarrow{O_1O_2}.\overrightarrow{IM'} - 2\overrightarrow{O_1O_2}.\overrightarrow{IH'}$

$= 2\overrightarrow{O_1O_2}.\overrightarrow{H'M'} = 2\overrightarrow{O_1O_2}.\overrightarrow{HM}$

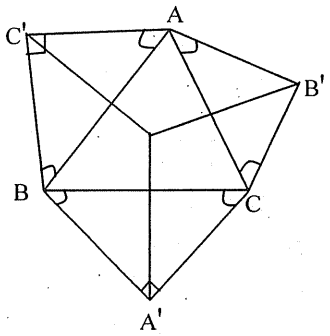


Bài toán 9.32:

Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a, b, c và diện tích S. Trên ba cạnh và về phía ngoài của tam giác đó dựng các tam giác vuông cân A'BC, B'AC, C'AB (A', B', C' lần lượt là đỉnh). Chứng minh rằng:

$$A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S.$$

Hướng dẫn giải



Ta có: $AB' = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, $AC' = \frac{c\sqrt{2}}{2}$

$B'\hat{A}C' = \hat{A} + 90^o$

Trong tam giác AB'C' ta có:

$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB'.AC'.\cos B'\hat{A}C'$

$$= \frac{b^2 + c^2}{2} + bc\sin A = \frac{b^2 + c^2}{2} + 2S$$

Tương tự: $C'A'^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + 2S$, $A'B'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + 2S$.

Từ đó suy ra $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$.

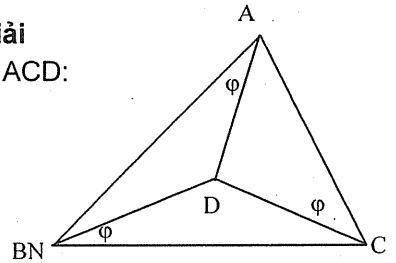
Bài toán 9.33:

Cho điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $D\hat{A}B = DBC = DCA = \varphi$. Chứng minh rằng:

a) $\sin^3\varphi = \sin(A - \varphi).\sin(B - \varphi).\sin(C - \varphi)$

b) $\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$.

Hướng dẫn giải



a) Theo định lí sin, trong tam giác ABD, BCD, ACD:

$$\frac{BD}{\sin\phi} = \frac{AD}{\sin(B - \phi)}$$

$$\frac{CD}{\sin\phi} = \frac{BD}{\sin(C - \phi)}; \frac{AD}{\sin\phi} = \frac{CD}{\sin(A - \phi)}$$

Nên: $\frac{AD.BD.CD}{\sin^3\phi} = \frac{AD.BD.CD}{\sin(A - \phi).\sin(B - \phi).\sin(C - \phi)} \Rightarrow$ đpcm.

b) Áp dụng định lí côsin vào tam giác DAB, ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\varphi$ mà: $\frac{1}{2}AB.AD.\sin\varphi = S_{ABD}$

Suy ra: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 4S_{DAB}.\cot\varphi$. Tương tự:

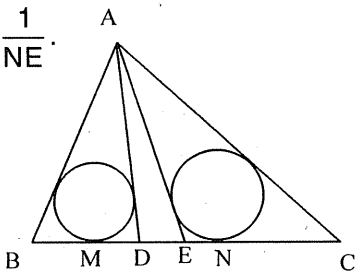
$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 4S_{DBC}.\cot\varphi$, $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 4S_{DCA}.\cot\varphi$

Nên $\cot\varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9.34:

Gọi D, E là các điểm trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho BÂD = CÂE = α.

Gọi M, N lần lượt là 2 tiếp điểm của BC với 2 đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACE. Chứng minh $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{1}{NC}+\frac{1}{NE}$.



Hướng dẫn giải

Ta cần chứng minh:

$$\frac{MB+MD}{MB.MD}=\frac{NC+NE}{NC.NE}$$

$\Leftrightarrow$ BD.NE.NC = CE.MB.MD

Áp dụng định lí sin cho ΔABD, ΔACE, ΔABE và ΔADE ta có

$$\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin D},\frac{CE}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin E}\Rightarrow\frac{BD.BE}{CD.CE}=\frac{c^2}{b^2}$$

Trong ΔABD ta có: 2MB + AD = c + BD, 2MD + AD = BD – c

Ta có $\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin B}\Rightarrow$ BD.sinB = AD.sinα

Tương tự, CE.sinC = AE.sinα nên: b.BD.AE = c.CE.AD

Và $\cos\alpha=\frac{c^2+AD^2-BD^2}{c.AD}=\frac{b^2+AE^2-CE^2}{b.AE}$

Mà $BD^2 - c^2$ = (BD + c)(BD – c) = (2MB + AD)(2MD + AD)

= 4MB.MD + 2AD.BD + AD^2

nên: $\frac{2MB.MD+AD.BD}{c.AD}=\frac{2NC.NE+AE.CE}{b.AE}$

$$b\left(\frac{2MB.MD}{AD}+BD\right)=c\left(\frac{2NC.NE}{AE}+CE\right)$$

hay $\frac{bMB.MD}{AD}=c.\frac{NC.NE}{AE}$

b.MB.MD.AE = c.NC.NE.AD

hay $\frac{bMB.MD.BE}{c}=\frac{c.NC.NE.CD}{b}$

$\Rightarrow$ MB.MD.BE = $\frac{BD.BE}{CD.CE}$.NC.NE.CD $\Rightarrow$ đpcm .

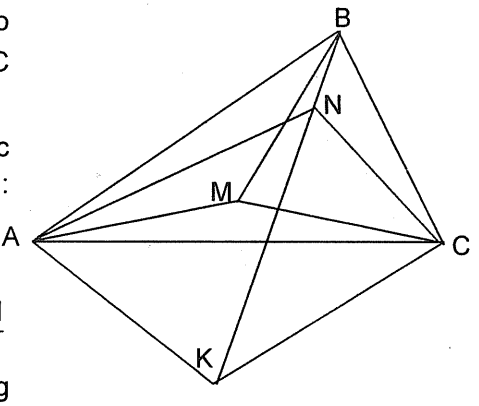
Bài toán 9.35:

Gọi M và N là các điểm bên trong tam giác ABC sao cho

MÂB = NÂC và MBA = NBC.

Chứng minh rằng: $\frac{AM.AN}{AB.AC}+\frac{BM.BN}{BA.BC}+\frac{CM.CN}{CA.CB}=1$.

Hướng dẫn giải



Gọi K là điểm trên tia BN sao cho $BCK = BMA$, K ở ngoài tam giác ABC vì $BMA = ACB$.

Do $MBA = CBK$, ta có hai tam giác ABM và KBC đồng dạng nên: $\frac{AB}{BK} = \frac{BK}{BC} = \frac{AM}{CK}$

Khi đó, vì $ABK = MBC$ và $\frac{AB}{KB} = \frac{BM}{BC}$ nên 2 tam giác ABK và MBC đồng dạng. Do đó: $\frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BC} = \frac{AK}{CM}$

Ta có CKN = MÂB = NÂC nên các điểm A, N, C và K cùng ở trên một đường tròn. Theo định lí Ptolémé

$$AC.NK = AN.CK + CN.AK \Rightarrow AC(BK - BN) = AN.CK + CN.AK$$

$$\Rightarrow AC\left(\frac{AB.BC}{BM} - BN\right) = \frac{AN.AM.BC}{BM} + \frac{CN.AB.CM}{BM} \Rightarrow \text{đpcm}$$

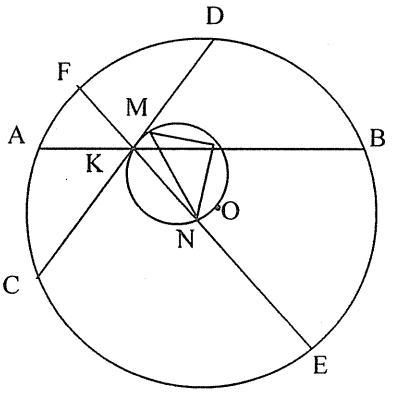
Bài toán 9.36:

Trong một đường tròn cho 3 dây cung AB, CD và EF đồng quy tại K, đôi một tạo với nhau một góc 60^0. Chứng minh: KA + KD + KE = KB + KC + KF.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của đường tròn và đặt KA = a, KB = b, KC = c, KD = d, KE = e, KF = f.

Đường tròn đường kính KO cắt các dây cung AB, CD, EF tại các trung điểm L, M, N của chúng. Vì góc giữa các dây cung là 60^0 nên tam giác LMN đều nên LM = LN = MN.



Trong tam giác LMK:

$LM^2 = LK^2 + MK^2 - 2LK \cdot MK.\cos 60^0$

Mà: $LK = AL - AK = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$

$MK = KD - MD = d - \frac{c+d}{2} = \frac{d-c}{2}$

nên: $4LM^2 = (b-a)^2 + (c-d)^2 + (b-a)(c-d)$

Tương tự: $4MN^2 = (a-d)^2 + (e-f)^2 - (c-d)(e-f)$

Vì LM = MN nên:

$$(b-a)^2 + (c-d)^2 + (b-a)(c-d) = (c-d)^2 + (e-f)^2 - (c-d)(e-f)$$

$\Rightarrow (b-a)(b-a+c-d) = (e-f)(e-f-c+d)$

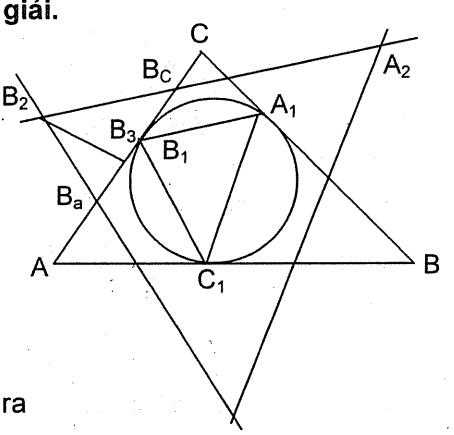
$\Rightarrow \dfrac{b-a}{e-f} = \dfrac{e-f-c+d}{b-a+c-d} \Rightarrow e-f = b-a+c-d \Rightarrow$đpcm.

Bài toán 9.37:

Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp có tâm O và bán kính R. Đường tròn nội tiếp có bán kính r và tiếp xúc với AB, BC, CA tương ứng tại các điểm C_1, A_1 và B_1.Các đường thẳng nối trung điểm các cặp đoạn thẳng AB_1 và AC_1, BA_1 và BC_1, CA_1 và CB_1 gặp nhau tại các điểm C_2, A_2 và B_2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ cũng có tâm O và bán kính bằng $R + \dfrac{r}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Trước tiên ta chứng minh rằng hình chiếu B_3 của B_2 lên AC là trung điểm của AC. Gọi B_a và B_c lần lượt là trung điểm AB_1 và CB_1.



Ta có: $\dfrac{B_aB_3}{B_2B_3} = \tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}$,

$\dfrac{B_cB_3}{B_2B_3} = \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c}$

nên: $\dfrac{B_aB_3}{B_cB_3} = \dfrac{p-c}{p-a}$. Từ $B_aB_c = \dfrac{b}{2}$ ta suy ra

$B_aB_3 = \dfrac{p-c}{2} = CB_c$ và $B_cB_3 = \dfrac{p-a}{2} = AB_a$ nên $AB_3 = CB_3$

Do đó: $B_2O = B_2B_3 + B_3O = \dfrac{(p-c)(p-a)}{2r} + R\cos B$

Ta có: $\dfrac{(p-c)(p-a)}{2r} + R\cos B = R + \dfrac{r}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{S}{2(p-b)} - \dfrac{S}{2p} = R(1-\cos B) \Leftrightarrow \dfrac{r}{p-b} = -\dfrac{4R}{b}\sin^2\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{B}{2}}{\sin B}$: Đúng $\Rightarrow$ đpcm

Bài toán 9.38:

Cho tam giác ABC có góc $A = 60^0$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, F là điểm trên AB sao cho IF // AC. Điểm P nằm trên cạnh BC sao cho 3BP = BC. Chứng minh $BEF = \dfrac{1}{2}B$.

Hướng dẫn giải

Giả sử BC = 3, do đó BP = 1.Đặt: $B = \frac{\pi}{3} + 2\alpha$, $C = \frac{\pi}{3} - 2\alpha$

Ta có: $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, nên:

$$r = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\frac{a}{2\sin A} = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{3}(\cos 2\alpha - \frac{1}{2})$$

Gọi M là hình chiếu của F trên AC, ta có FM = r

$$AF = \frac{r}{\sin A} = 2\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

Lúc đó, $BF = c - AF = \frac{3.2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) - 2\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right)$

$= \cos 2\alpha - \sqrt{3}\sin 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha$

$= 2^2\cos\alpha.\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

Dùng định lí cosin và sin cho tam giác BFP thì tính được:

$$FP^2 = 2^2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \Rightarrow FP = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$$

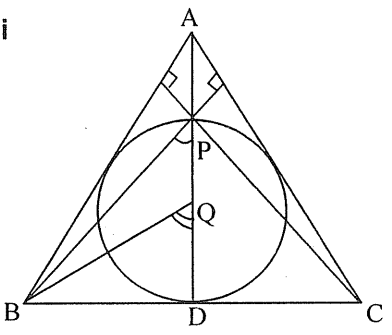
Và $\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right)} = \frac{1}{\sin BFP}$. Vậy $\sin BFP = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \sin\frac{B}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9.39:

Một tam giác ABC cân tại A, có các đường cao cắt nhau tại một điểm P trên đường tròn nội tiếp của tam giác đó. Hãy tính sin của góc ở đỉnh của tam giác.

Hướng dẫn giải

Gọi Q là tâm đường tròn nội tiếp, AD là phân giác trong.



Ta có: $BPC = 180^0 - A$ và BQC

$= 180^0 - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 90^0 + \frac{A}{2}$

$BPD = \frac{BPC}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$ và $BQD = 45^0 + \frac{A}{4}$

Trong tam giác vuông BPD và BQD

Ta có: $\tan BPD = \frac{BD}{PD}$, $\tan BQD = \frac{BD}{QD} = 2.\frac{BD}{PD}$,

nên: $\tan BQD = 2\tan BPD$ hay: $\tan(45^0 + \frac{A}{4}) = 2.\tan(90^0 - \frac{A}{2})$

Đặt: $x = \frac{A}{4}$, ta có: $\tan(45^0 + x) = 2.\tan(90^0 - 2x) = 2.\cot 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \frac{2(1-\tan^2 x)}{2.\tan x} \Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x.\cos x}$$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos x = \cos^2 x - 2\sin x.\cos x + \sin^2 x$

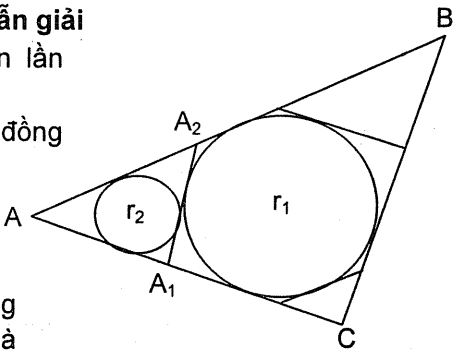
$\Leftrightarrow 3\sin x.\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{2}{3}$

Do đó: $\sin\frac{A}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{80}}{9}$.

Bài toán 9.40:

Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c. Ta lần lượt vẽ các tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp của tam giác này song song với 3 cạnh tam giác. Mỗi tiếp tuyến hợp với hai cạnh kia của tam giác để tạo thành một tam giác mới, như thế ta được 3 tam giác mới tạo thành. Lại vẽ 3 đường tròn nội tiếp ở 3 tam giác mới đó. Hãy tính tổng diện tích 4 hình tròn nội tiếp nói trên.

Hướng dẫn giải



Gọi các bán kính của 4 đường tròn lần lượt là r_1, r_2, r_3, r_4.

Ba tam giác mới có đường cao h_i đồng dạng với tam giác ABC nên: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_a}$; $\frac{r_3}{r_1} = \frac{h_3}{h_b}$; $\frac{r_4}{r_1} = \frac{h_4}{h_c}$

Khoảng cách của các đường song song (chẳng hạn như A_1A_2 và BC) là $2r_1$, nên: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_a - 2r_1}{h_a} = 1 - \frac{2r_1}{h_a}$

Vậy $r_2 = r_1 - \frac{2r_1^2}{h_a} = \frac{S}{p} - \frac{2a.S^2}{p^2.2S} = \frac{S(p-a)}{p^2}$

Tương tự: $r_3 = \frac{S(p-b)}{p^2}$; $r_4 = \frac{S(p-c)}{p^2}$.

Ta có: $T = S_1 + S_2 + S_3 = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2\right)$

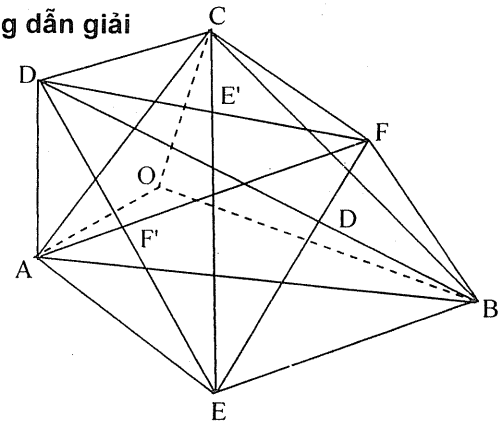
$$= \pi\left[\frac{S^2}{p^2} + \frac{S^2(p-a)^2}{p^4} + \frac{S^2(p-b)^2}{p^4} + \frac{S^2(p-c)^2}{p^4}\right]$$

$$= \frac{\pi(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)^3}$$

Bài toán 9.41:

Gọi ABC là một tam giác nhọn. Cho DAC, EAB và FBC là các tam giác cân ở bên ngoài của ABC, với DA = DC, EA = EB, và FB = FC sao cho: ADC = 2BÂC, BEA = 2ABC, CFB = 2ACB. Gọi D' là giao điểm của các đường thẳng DB và EF, E' là giao điểm của EC và DF, và gọi F' là giao điểm của FA và DE. Tính tổng: $T = \frac{DB}{DD'} + \frac{EC}{EE'} + \frac{FA}{FF'}$.

Hướng dẫn giải



Ta chứng minh đa giác DAEBFC là lồi và :

ADC + BEA + CFB

= 2(BÂC + ABC + ABC)

= 2π

Gọi ω_1, ω_2, ω_3 là các đường tròn lần lượt có tâm tại D, E, F và bán kính DA, EB, FC thì 3 đường tròn này đồng quy tại O, O là điểm đối xứng của C qua DF.

Tương tự, O cũng là điểm đối xứng của A qua DE và đối xứng của B qua EF. Ta có:

$$\frac{DB}{DD'} = \frac{DD'+D'B}{DD'} = 1 + \frac{D'B}{DD'} = 1 + \frac{S(EBF)}{S(DEF)} = 1 + \frac{S(OEF)}{S(DEF)}$$

Tương tự $\frac{EC}{EE'} = 1 + \frac{S(ODF)}{S(DEF)}$ và $\frac{FA}{FF'} = 1 + \frac{S(ODE)}{S(DEF)} \Rightarrow T = 4.$

Bài toán 9.42:

Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) Nếu $a^3 = b^3 + c^3$ thì tam giác có 3 góc nhọn.

b) Nếu $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + c^4 = 0$ thì có góc 60^o hoặc 120^o.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a^3 = b^3 + c^3 \Rightarrow a > b, c \Rightarrow$ góc A > B, C

Ta chứng minh góc A nhọn là đủ. Thật vậy :

$a^3 = b^3 + c^3 = b.b^2 + c.c^2 < a.b^2 + a.c^2 = a(b^2 + c^2)$

$\Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow$ A nhọn $\Rightarrow$ đpcm.

b) Xem đẳng thức cho là phương trình bậc 2 theo $t = c^2$

$\Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + a^2b^2 + c^4) = a^2b^2$

Do đó $c^2 = a^2 + b^2 \pm ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2abcosC = a^2 + b^2 \pm 2ab$

$\Rightarrow cosC = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^o$ hay 120^o.

Bài toán 9.43:

Xét dạng tam giác ABC trong mỗi trường hợp:

a) $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ b) $r = r_a - r_b - r_c$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} - 1 = \frac{2a+c}{2a-c} - 1$

$\Leftrightarrow 2ac.\cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

b) Ta có: $r = r_a - r_b - r_c \Leftrightarrow \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p} = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p+c}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c)$

$\Leftrightarrow pa = p(b + c) - bc \Leftrightarrow bc = \frac{b+c+a}{2}(b + c - a)$

$\Leftrightarrow 2bc = (b + c)^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Vậy tam giác ABC vuông ở A.

Bài toán 9.44:

Xét dạng tam giác ABC trong mỗi trường hợp:

a) $\hat{A} = 60^o$, $a = 10$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $\begin{cases} \frac{a^3 + c^3 - b^2}{a+c-b} = b^2 \\ \sin A.\sin C = \frac{3}{4} \end{cases}$.

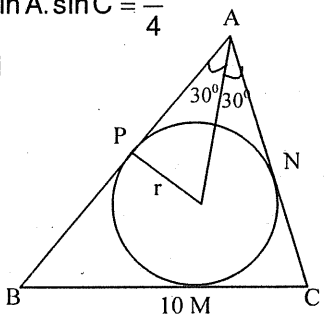
Hướng dẫn giải

a) Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA và AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có $AP = AN = r.\cot 30^o = 5$

$BP + NC = BM + MC = a = 10$

nên: $(b - AN) + (c - AP) = 10$



hay b + c = 20

Theo định lí côsin:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^o$ hay $a^2 = (b + c)^2 - 2bc - bc$

Suy ra $bc = \frac{(b+c)^2 - a^2}{3} = \frac{20^2 - 10^2}{3} = 100$ nên b, c là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 100 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép b = c = 10 nên ABC là tam giác đều.

b) Ta có: $\frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \Rightarrow a^3 + c^2 - b^3 = (a + c)b^2 - b^3$

$\Rightarrow a^3 + c^3 = (a + c)b^2 \Rightarrow a^2 - c + c^2 = b^2$

$\Rightarrow a^2 - ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^o.$

Do đó $\sin A.\sin C = \frac{3}{4} = \sin^2 B \Rightarrow \frac{a}{2R}.\frac{c}{2R} = \left(\frac{b}{2R}\right)^2$

$\Rightarrow ac = b^2 \Rightarrow ac = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - ac$

$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$ nên tam giác đều.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 9.1: Trên hai cạnh BC và AC của tam giác ABC lấy D và E sao cho $B\hat{A}D = 50^0$, $A\hat{B}E = 30^0$. Biết rằng $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 50^0$. Tính số đo của góc BED.

Hướng dẫn

Gọi O là giao điểm AD và BE. Dùng định hàm số sin cho các tam giác OBP, OBA, OAE. Kết quả $B\hat{E}D = 40^0$.

Bài tập 9.2: Cho ABC là một tam giác, Ω là đường tròn nội tiếp của nó và Ω_a, Ω_b, Ω_c là ba đường tròn trực giao với Ω lần lượt đi qua (B, C) (A, C) và (A, B). Các đường tròn Ω_a và Ω_b lại cắt nhau ở C; thực hiện tương tự ta được các điểm B' và A'. Chứng minh rằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' bằng bán kính của Ω.

Hướng dẫn

Đường tròn trực giao nên có hệ thức $IJ^2 = r^2 + R^2$

Bài tập 9.3: Cho D là điểm nằm bên trong tam giác nhọn ABC sao cho:

$A\hat{D}B = A\hat{C}B + 90^0$ và AC.BD = AD.BC

a) Tính tỉ số $\frac{AB.CD}{AC.BD}$

b) Chứng minh rằng hai tiếp tuyến tại điểm C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và BCD vuông góc nhau.

Hướng dẫn

a) Kết quả $\frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$

b) 2 đường tròn trực giao.

Bài tập 9.4: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Một đường thẳng d qua điểm O lần lượt tạo với các đường thẳng OA, OB, OC các góc α, β, δ $(0 \le \alpha, \beta, \delta \le \frac{\pi}{2})$. Chứng minh giá trị của biểu thức: $T = \sin 4A.\sin^2\alpha + \sin 4B.\sin^2\beta + \sin 4C.\sin^2\delta$ là không đổi khi đường thẳng d quay quanh điểm O.

Hướng dẫn

Giá trị của biểu thức: $T = \sin 4A.\sin^2\alpha + \sin 4B.\sin^2\beta + \sin 4C.\sin^2\delta$ là không đổi.

Bài tập 9.5: Gọi P_1, P_2, P_3, P_4 là 4 điểm nằm trên một đường tròn. Gọi các tâm đường tròn nội tiếp I_1 của tam giác $P_2P_3P_4$, I_2 của tam giác $P_1P_3P_4$, I_3 của tam giác $P_1P_2P_4$, I_4 của tam giác $P_1P_2P_3$. Chứng minh rằng I_1, I_2, I_3, I_4 là các đỉnh của một hình chữ nhật.

Hướng dẫn

Kết quả $I_1\ I_2\ I_3\ I_4$ là một hình chữ nhật.

Bài tập 9.6: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn (K_1) nằm trong góc Â của tam giác tiếp xúc với hai cạnh AB và AC tại M_1, N_1 và tiếp xúc trong với (O) tại P_1. Đường tròn (K_2) nằm trong góc B của tam giác tiếp xúc với hai cạnh BC và BA tại M_2, N_2 và tiếp xúc trong với (O) tại P_2. Đường tròn (K_3) nằm trong góc C của tam giác tiếp xúc với hai cạnh CA và CB tại M_3, N_3 và tiếp xúc trong với (O) tại P_3. Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2 và M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Hướng dẫn

Chứng minh các hình tương ứng là hình bình hành.

Bài tập 9.7: Cho đường tròn (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng d_1, d_2. Một đường tròn (C_1) tiếp xúc với d_1 tại A và tiếp xúc ngoài với (C) tại C. Đường tròn (C_2) tiếp xúc với d_2 tại B, tiếp xúc ngoài với (C) tại D và tiếp xúc ngoài với (C_1) tại E, AD cắt BC tại Q. Chứng minh rằng Q là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDE.

Hướng dẫn

Q là giao 2 phân giác trong hay Q cách đều 2 cạnh tam giác CDE.

Bài tập 9.8: Cho tam giác ABC bất kì. Ta dựng bên ngoài tam giác đó các tam giác BCP, CAQ, ABR sao cho:

$$PBC = CAQ = 45^0,\ BCP = QCA = 30^0,\ ABR = BAR = 15^0.$$

Chứng minh rằng $QRP = 90^0$ và $QR = RP$

Hướng dẫn

Biến đổi tương đương và dùng định lý sin, côsin.

Bài tập 9.9: Cho tam giác đều ABC và một đường thẳng d. Gọi A', B', C' là chân đường vuông góc lần lượt hạ từ A, B, C xuống d. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Hướng dẫn

Xét 2 trường hợp d cắt và không cắt cạnh tam giác ABC. Gọi a là cạnh tam giác đều ABC. Kết quả $\frac{3a^2}{2}$

Bài tập 9.10: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, tạ có

$$(b^2 - c^2)\cos A = a(c.\cos C - b.\cos B)$$

Hướng dẫn

Dùng định lý cosin

Bài tập 9.11: Cho tam giác vuông ABC và D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và CA. Giả sử đường phân giác của BDC cắt BC tại M và phân giác góc ADC cắt AC tại N. Cho MN và CD cắt nhau tại O; EO cắt AC tại P và đường thẳng FO cắt BC tại Q. Chứng minh rằng CD = PQ.

Hướng dẫn

Sử dụng định lý Mênêlaut và Stewart

Bài tập 9.12: Tính các góc A, B và h_a, R của tam giác ABC biết:

$$a = \sqrt{6},\ b = 2,\ c = \sqrt{3} + 1$$

Hướng dẫn

Dùng hệ thức lượng và định lý diện tích.

Kết quả: $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$, $h_a = (\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$, $R = \sqrt{2}$.

Chuyên đề 10: TAM GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Trục đẳng phương và tâm đẳng phương

- Trục đẳng phương của hai đường tròn không đồng tâm: Tập hợp các điểm có phương tích bằng nhau đối với hai đường tròn.
- Tâm đẳng phương của ba đường tròn có các tâm không thẳng hàng: điểm chung I của ba trục đẳng phương của ba cặp đường tròn . Điểm I có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn.

Điều kiện tứ giác nội tiếp, tiếp xúc

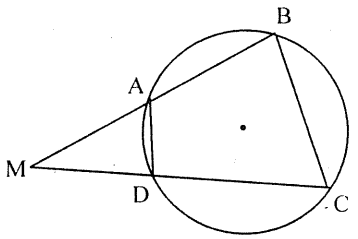
- Cho tứ giác ABCD. Hai cạnh đối AB và CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn là:

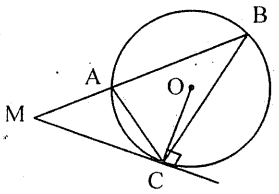
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}.$$

- Định lý Ptôlêmê: Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi:

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

- Cho tam giác ABC. M là điểm thuộc đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn thẳng AB. Điều kiện cần và đủ để MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MC^2$.





Thẳng hàng và đồng quy

- Định lý Menelaus: Tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt thuộc ba đường thẳng BC,CA,AB:

$$M, N, P \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

- Định lý Ceva: Tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt thuộc ba đường thẳng BC,CA,AB:

$$AM, BN, CP \text{ đồng quy hoặc song song} \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$

- Định lý Ceva dạng lượng giác: Tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt thuộc ba đường thẳng BC,CA,AB:

$$AM, BN, CP \text{ đồng quy} \Leftrightarrow \frac{\sin ABN}{\sin CBN}.\frac{\sin BCP}{\sin ACP}.\frac{\sin CAM}{\sin BAM} = 1$$

– Định lý Carnot: Tam giác ABC và ba điểm M, N, P.
Ba đường thẳng lần lượt qua M, N, P và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy $\Leftrightarrow (MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$.

Chú ý: Ta có thể dùng trục đẳng phương, tâm đẳng phương,... để chứng minh thẳng hàng và đồng quy.

– Định lý Stewart: Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M tùy ý thì $MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$.

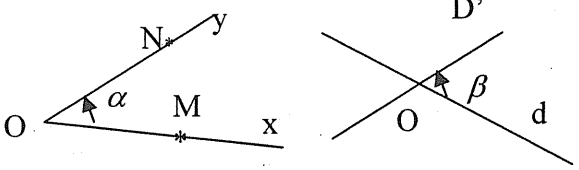
– Đường tròn Apollonius: Cho đoạn AB, tập hợp các điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k$ $(0 < k \neq 1)$ là đường tròn đường kính IJ, với I và J là hai điểm chia đoạn AB theo tỉ số $\pm$ k.

Góc định hướng

$(Ox, Oy) \equiv \alpha(\mathrm{mod}\, 2\pi)$

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \alpha(\mathrm{mod}\, 2\pi)$

$(d, d') \equiv \alpha(\mathrm{mod}\, \pi)$



Tam giác ABC : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \pi(\mathrm{mod}\, 2\pi)$

và $(AB, AC) + (BC, BA) + (CA, CB) \equiv 0(\mathrm{mod}\, \pi)$

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O):

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ và $(OA, OB) \equiv 2(CA, CB)(\mathrm{mod}\, \pi)$

Bốn điểm A,B,C,D thuộc đường tròn

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ hay $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv -(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})(\mathrm{mod}\, 2\pi)$

$\Leftrightarrow (CA, CB) \equiv (DA, DB)(\mathrm{mod}\, \pi)$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 10. 1:

Một tứ giác ABCD có các đường chéo vuông góc. Các trung trực của AB và CD cắt nhau tại một điểm duy nhất P ở bên trong ABCD. Chứng minh rằng ABCD là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi các tam giác ABP và CDP có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử AC và BD cắt nhau ở E. Không mất tính tổng quát, do tính đối xứng, ta giả sử rằng điểm P nằm trong tam giác ABE. Gọi M và N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P xuống AC và BD.

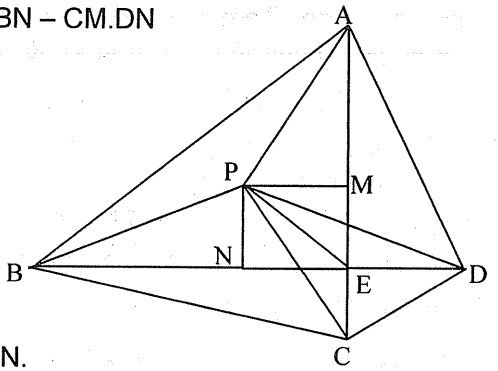
S(ABP) = S(ABE) – S(PAE) – S(PBE) nên

(AM+PN)(BN+PM)–(AM+PN)PM–(BN +PM)PN= AM.BN–PM.PN

Và S[CDP] = S[CDE] + S[PCE] + S[PDE] nên

(CM–PN)(DN–PM)+(CM–PN)PM+(DN–PM)PN = CM.DN – PM.PN

Do đó: 2(S(ABP) – S(CDP)) = AM. BN – CM.DN



Giả sử ABCD nội tiếp. Thế thì tính duy nhất của P kéo theo rằng nó phải là tâm đường tròn ngoại tiếp. Vì thế M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn AC và BD, nên AM = CM và BN = DN, do đó: S(ABP) = S(CDP)

Đảo lại, giả sử rằng S(ABP) = S(CDP) thì AM.BN = CM.DN.

Giả sử PA ≠ PC, chẳng hạn PA > PC thì AM > CM và BN > DN, vì PB > PD. Như thế AM.BN > CM.DN , là điều vô lí. Do đó PA = PC, điều đó dẫn đến P cách đều A, B, C, D. Vậy ABCD là tứ giác nội tiếp.

Bài toán 10. 2:

Cho đường tròn đường kính AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB ở H (H không trùng với A và B). Một đường thẳng quay quanh H cắt đường tròn ở M, N và các đường thẳng AM, AN lần lượt cắt Δ ở M', N'. Chứng minh:

a) Bốn điểm M, N, M', N' cùng thuộc một đường tròn (C) nào đó.

b) Các đường tròn (C) luôn đi qua hai điểm cố định.

Hướng dẫn giải

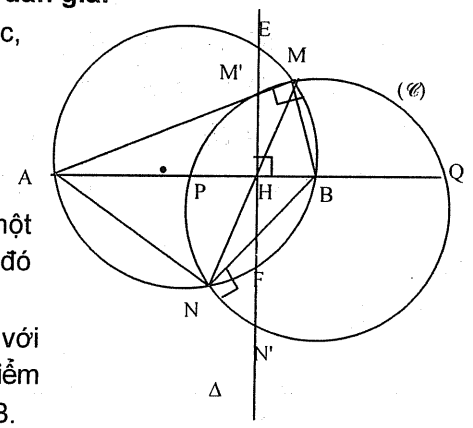
a) Tứ giác HBMM', HBN'N nội tiếp được,

nên: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}$

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}$

Do đó: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}$

Suy ra M, N, M', N' cùng thuộc một đường tròn, ta kí hiệu đường tròn đó là (C).



b) Gọi P, Q là các giao điểm của (C) với đường thẳng AB và E, F là các giao điểm của Δ với đường tròn đường kính AB.

Khi đó $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = AE^2 = AF^2$

Vậy P, Q thuộc đường tròn (S) tiếp xúc với AE, AF ở E, F.

Do (S) là đường tròn cố định nên P, Q là hai điểm cố định của (C).

Bài toán 10. 3:

Cho tam giác ABC không cân, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C qua cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAA', OBB', OCC' cùng đi qua một điểm khác O.

Hướng dẫn giải

Gọi Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự là trung trực của OA, OB, OC và gọi A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 theo thứ tự là giao của Δ_A với AC, AB; giao của Δ_B với BA, BC; giao của Δ_C với CB, CA.

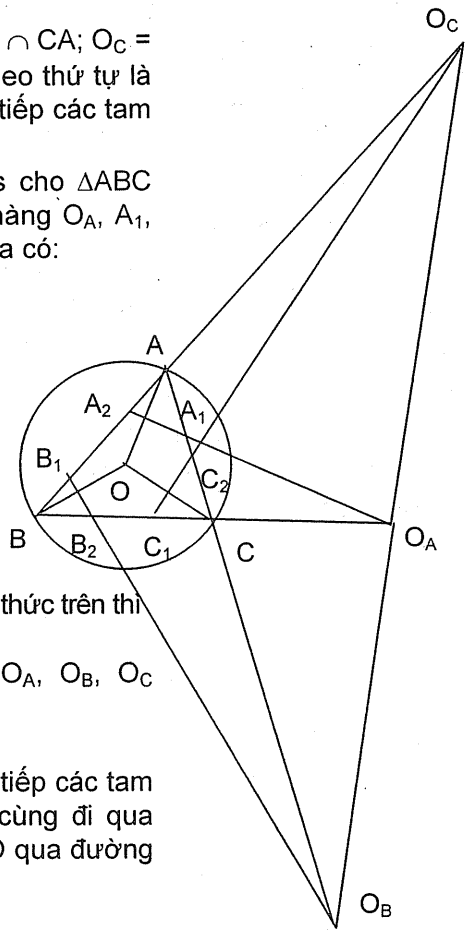
Gọi $O_A = \Delta_A \cap BC$; $O_B = \Delta_B \cap CA$; $O_C = \Delta_C \cap AB$ thì O_A, O_B, O_C theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAA_1, OBB_1, OCC_1.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABC với các bộ 3 điểm thẳng hàng O_A, A_1, A_2; O_B, B_1, B_2, O_C, C_1, C_2, ta có:

$$\frac{\overline{O_AB}}{\overline{O_AC}}.\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1A}}.\frac{\overline{A_2A}}{\overline{A_2B}}=1;$$

$$\frac{\overline{O_BC}}{\overline{O_BA}}.\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1B}}.\frac{\overline{B_2B}}{\overline{B_2C}}=1;$$

$$\frac{\overline{O_CA}}{\overline{O_CB}}.\frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1C}}.\frac{\overline{C_2C}}{\overline{C_2A}}=1;$$



Nhân vế với vế của ba đẳng thức trên thì

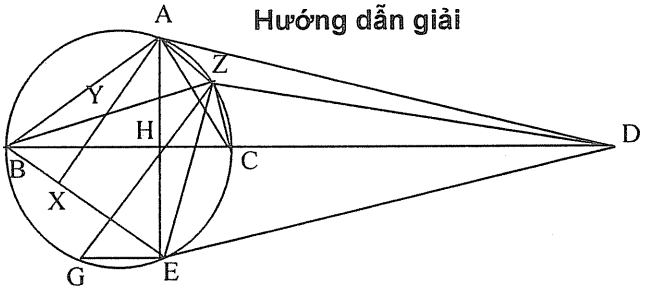
$$\frac{\overline{O_AB}}{\overline{O_AC}}.\frac{\overline{O_BC}}{\overline{O_BA}}.\frac{\overline{O_CA}}{\overline{O_CB}}=1$$ nên O_A, O_B, O_C thẳng hàng

Vậy các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAA_1, OBB_1, OCC_1 cùng đi qua một điểm K đối xứng với O qua đường thẳng chứa O_A, O_B, O_C.

Bài toán 10. 4:

Cho ABC là một tam giác sao cho $A = 90^0$ và góc B < C. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ω ngoại tiếp tam giác cắt BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng của A qua BC, X chân đường cao từ A xuống BE, và Y là trung điểm của AX, đường thẳng BY lại cắt ω tại Z. Chứng minh đường thẳng BD tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ADZ.

Hướng dẫn giải



Gọi G là điểm đối tâm của A và H là giao điểm của AE và BD. Để ý rằng B và G ở cùng một phía đối với AE vì góc B < C. Ta sẽ chứng minh G, H và Z thẳng hàng. Thật vậy:

$A\hat{E}G = 90^0 = AXB$, $AGE = ABE = ABX$

nên các tam giác AGE và ABX đồng dạng.

$\Rightarrow G\hat{A}E = B\hat{A}X$ và $\frac{GA}{GB} = \frac{AE}{AX}$

Gọi H và Y lần lượt là trung điểm của AE và AX. Thì các tam giác AGH và ABY cũng đồng dạng. Do đó $AGH = ABY$ và nếu GH cắt ω tại Z' thì ta có $ABZ = AGZ = ABY = ABZ$. Điều đó dẫn đến Z và Z' trùng nhau (đpcm)

Bây giờ ta chứng minh rằng $D\hat{A}Z = ZDH$. Vì G, H và Z ở trên cùng một đường thẳng, $AZH = AZG = 90^0$. Vì DA và DE là các tiếp tuyến của ω, ta có $D\hat{A}Z = AEZ$ và $DEZ = EAZ$. Như vậy ta có:

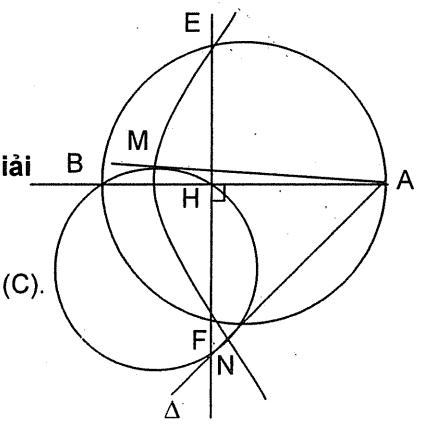
$DHZ = 90^0 = AHZ = EAZ = DEZ$ nên ZHED là một tứ giác nội tiếp.

Suy ra rằng $ZDH = ZEA = DAZ$, và DB chính là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADZ.

Bài toán 10. 5:

Cho đường tròn đường kính AB, H là điểm nằm giữa AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB tại H. Gọi E, F là giao điểm của đường tròn và Δ.

Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AE và đường tròn (C) bất kì qua H, B. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau ở M và N, chứng minh rằng AM và AN là hai tiếp tuyến của (C).



Hướng dẫn giải

Do M, N , E cùng thuộc đường tròn tâm A nên ta có AM = AN = AE. Trong tam giác vuông AEB, EH $\perp$ AB nên:

$AE^2 = AH.AB = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

Từ đó suy ra: $AM^2 = AN^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

Vậy AM, AN là 2 tiếp tuyến của (C).

Bài toán 10. 6:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là trung điểm của BC. Đường tròn nội tiếp tam giác AOM cắt lại BC tại điểm D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Gọi F là giao điểm của AE và BC.

a) Chứng minh $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FD}.\overline{FM}$

b) Chứng minh DA tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AFM.

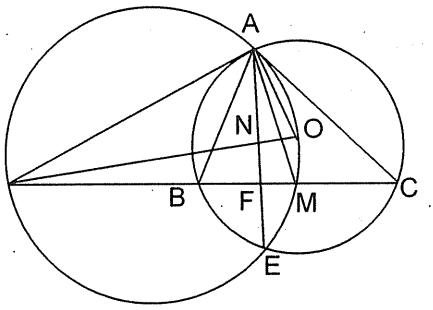
Hướng dẫn giải

a) Kí hiệu (I) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác MOAD. Do $OAD = OMD = 90^o$ nên tâm I của đường tròn này chính là trung điểm của OD.

Ta có: $P_{F/(O)} = \overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FA}.\overline{FE}$

$P_{F/(I)} = \overline{FD}.\overline{FM} = \overline{FA}.\overline{FE}$

Do đó: $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FD}.\overline{FM}$



b) Gọi N là giao điểm của OD và AE. Do OD đi qua hai tâm O và I nên $OD \perp AE$.

Suy ra tam giác ADO vuông tại A nên: $DA^2 = \overline{DN}.\overline{DO}$.

Mặt khác, tứ giác FMON là tứ giác nội tiếp

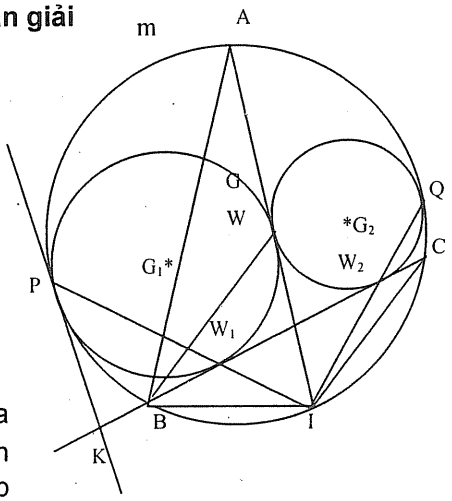
$\overline{DN}.\overline{DO} = \overline{DF}.\overline{DM}$

Vậy $\overline{DF}.\overline{DM} = DA^2$ và do đó DA tiếp xúc với (AFM) tại điểm A.

Bài toán 10. 7:

Hai đường tròn (G_1) và (G_2) nội tiếp trong hình viên phân BmCB của đường tròn (G) và tiếp xúc ngoài nhau tại điểm W. Gọi A là giao điểm của tiếp tuyến chung trong của (G_1) và (G_2) với cung BmC. Chứng minh rằng W là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Trước hết gọi P và W_1 lần lượt là các điểm tiếp xúc của (G_1) với (G) và BC. Gọi giao điểm của tiếp tuyến tại P của (G_1) với BC là K thì:

$PW_1K = W_1PC + PCW_1$

và $KPW_1 = KPB + BPW_1$.

Mà: $KPB = PCB$ và

$KPW_1 = PW_1K$ do đó:

$BPW_1 = W_1PC$.

Chứng tỏ PW_1 là phân giác trong của BPC. Tương tự ta có QW_1 là phân giác trong của BQC, với Q, W_2 là tiếp điểm của (G_2) với (G), BC. Do đó $PW_1 \cap QW_2 = I$ là trung điểm của cung BC

Suy ra $\Delta BW_1I \sim \Delta PBI$ nên $BI^2 = IW_1.IP$. Tương tự : $CI^2 = IW_2.IQ$.

Mà BI = CI nên $IW_1.IP = IW_2.IQ \Rightarrow$ I thuộc trục đẳng phương của (G_1) và $(G_2) \Rightarrow$ AW đi qua I $\Rightarrow$ AW là phân giác trong của BAC và IB = IW = IC.

Mặt khác: $ABW = BWI - BAI$, $CBW = IBW - CBI$

Mà: $BWI = IBW$; $BAI = CBI = \frac{1}{2}$ sđBC.

Suy ra: $ABW = CBW$, tức là BW là phân giác trong ABC. Do đó W là giao của hai phân giác trong AW, BW hay W chính là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC (đpcm).

Bài toán 10. 8:

Cho tứ giác lồi ABCD thoả $BÂD > 90^0$. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm nằm trên BC và CD sao cho $MÂD = NÂB = 90^0$. Chứng minh rằng nếu MN và BD cắt nhau tại I thì $IA \perp AC$.

Hướng dẫn giải

Nếu $M \equiv C$ (hay $N \equiv C$) thì $I \equiv D$ (hay $I \equiv B$) $\Rightarrow$ bài toán đúng.

Xét trường hợp $I \neq B$, $I \neq D$.

Áp dụng định lý Ménélaus cho tam giác BCD, ta có:

$$\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{ND}.\frac{ID}{IB} = 1 \Leftrightarrow \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}.\frac{S_{ANC}}{S_{AND}}.\frac{S_{AID}}{S_{AIB}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.\sin A_5}{AC.\sin A_4}.\frac{AC.\sin A_3}{AD.\sin A_2}.\frac{AD.\sin A_1}{AB.\sin IAB} = 1$$

$\Leftrightarrow \sin A_1.\sin A_3 = \sin A_4 . \sin IÂB$

$\Leftrightarrow \sin A_1 . \sin A_3 = \cos(A_2 + A_3).\cos(A_1 + A_2)$

$\Leftrightarrow \cos(A_1 + 2A_2 + A_3) + \cos(A_1 + A_3) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos(A_1 + A_2 + A_3).\cos A_2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(A_1 + A_2 + A_3) = 0 \Leftrightarrow A_1 + A_2 + A_3 = 90^0$.

Vậy $IA \perp AC$.

Bài toán 10. 9:

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R) có đường cao AA'. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu của A' trên AB, AC và J là giao điểm của EF với đường kính AD.

a) Chứng minh rằng AA' là tiếp tuyến của đường tròn (A'JD)

b) Tìm điều kiện của AA' để ba điểm E, F, O thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) Trong hai tam giác vuông AA'B và AA'C ta có: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = AA^2$ và $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} = AA^2$ nên $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$, suy ra tứ giác BEFC nội tiếp được, do đó ta có $AFE = ABC$

Mặt khác $ABC = ADC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) nên tứ giác DCFJ

nội tiếp được, suy ra $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = AA'^2$ do đó AA' là tiếp tuyến của đường tròn (A'JD)

b) Ba điểm E, F, O thẳng hàng khi O trùng với J hay AJ = R.

Do $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = AA'^2$ nên $AA'^2 = 2R^2$ hay $AA' = R\sqrt{2}$.

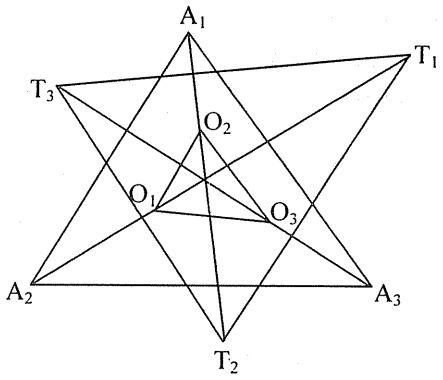
Bài toán 10. 10:

Cho $A_1A_2A_3$ là một tam giác không cân, có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi C_i, , i = 1, 2, 3 là các đường tròn bé hơn đi qua I và tiếp xúc với A_iA_{i+1} và A_iA_{i+2}. Gọi B_i, i = 1, 2, 3, là giao điểm thứ hai của C_{i+1} và C_{i+2}. Chứng minh rằng 3 tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Khi đó, T nằm trên phân giác trong của góc A.

Với i = 1, 2, 3 ta kí hiệu O_i là tâm đường tròn C_i và kí hiệu T_i là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_{i+1}IA_{i+2}$. Rõ ràng là O_i nằm trên phân giác trong của góc A_i. Theo bổ đề trên, T_i cũng nằm trên phân giác ấy.



Gọi Q_i, i = 1, 2, 3 là giao điểm của $O_{i+1}O_{i+2}$ và $T_{i+1}T_{i+2}$

Áp dụng Định lý Menelaus cho các tam giác IO_1O_2, IO_2O_3, IO_3O_1 cho 3 bộ điểm thẳng hàng thì:

$$\frac{O_2Q_3}{O_1Q_3}.\frac{O_3Q_1}{O_2Q_1}.\frac{O_1Q_2}{O_3Q_2} \Rightarrow Q_1, Q_2, Q_3 \text{ thẳng hàng}$$

Vì $T_{i+1}T_{i+2}$ là trung trực của A_iI và $O_{i+1}O_{i+2}$ là trung trực của B_iI nên những điểm này lần lượt chính là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I.

Bài toán 10. 11:

Cho tứ giác ABCD có các cạnh AB, CD kéo dài cắt nhau ở E và các cạnh AD, BC kéo dài cắt nhau ở F. Chứng minh rằng các trung điểm của các đoạn AC, BD và EF cùng thuộc một đường thẳng (đường thẳng Gao–xơ của tứ giác).

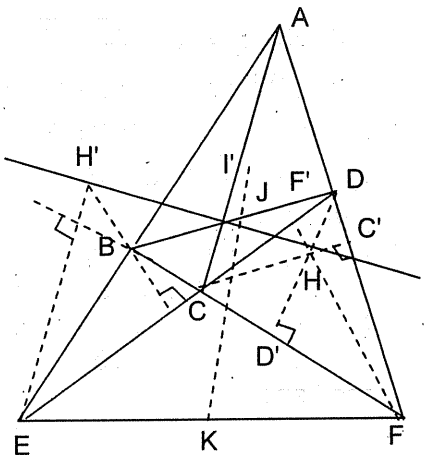
Hướng dẫn giải

Kẻ các đường cao CC', DD', FF' của tam giác CDF và gọi H là trực tâm của tam giác đó thì:

$$\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$$

Ta có trung điểm I của AC cũng là tâm đường tròn đường kính AC, đường tròn đó đi qua C' (do $AC'C = 90^o$).

Suy ra $P_{H/(I)} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$



Tương tự như vậy, gọi J, K là tâm đường tròn đường kính BD, EF:

$P_{H/(J)} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'}$, $P_{H/(K)} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$.

Do đó: $P_{H/(I)} = P_{H/(J)} = P_{H/(K)}$

Nếu lấy trực tâm H' của tam giác BCE ta cũng sẽ có:

$P_{H'/(I)} = P_{H'/(J)} = P_{H'/(K)}$

Vậy HH' là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (J), nên $HH' \perp IJ$, HH' cũng là trục đẳng phương của (I) và (K) nên $HH' \perp IK$. Từ đó ta có I, J, K thẳng hàng.

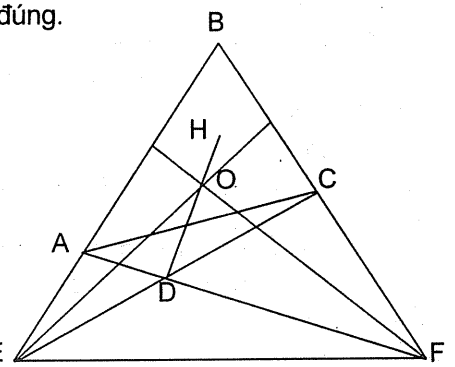
Bài toán 10. 12:

Cho tứ giác lồi ABCD có $A = B = C$. Gọi O, H là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC. Chứng minh O, H, D thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Xét $A = B = C = 90^o$, bài toán hiển nhiên đúng.

Xét A,B,C khác 90^o .Gọi E, F là giao điểm của AB với CD, của AD với BC.



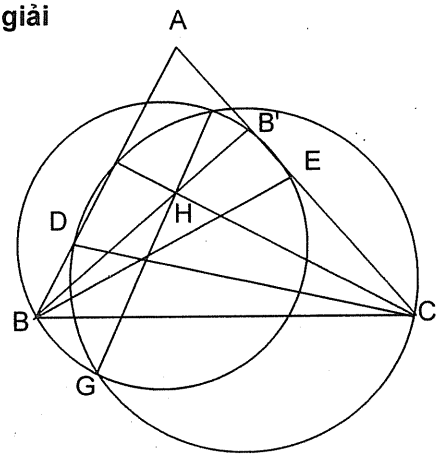
Theo giả thiết $A = B = C$, các tam giác ABF, BCE cân tại F, E nên các đường trung trực của AB, BC cũng chính là các đường cao trong các tam giác trên. Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC cũng chính là trực tâm tam giác BEF.

Mặt khác, bốn điểm A, C, F, E cùng thuộc một đường tròn (do $EAF = ECF$). Do đó các trực tâm O, H và điểm D thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AF, CE. Vậy O, H, D thẳng hàng.

Bài toán 10. 13:

Cho tam giác ABC có là trực tâm và D, E là các điểm tùy ý trên các cạnh AB, AC. Giả sử các đường tròn đường kính BE và CD cắt nhau tại hai điểm F, G. Chứng minh F,G, H thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Gọi BB',CC' là các đường cao trong tam giác ABC và (I), (J) là các đường tròn đường kính BE, CD

Ta có: B' ∈ (I) và $P_{H/(I)} = \overline{HB}.\overline{HB'}$

và C' ∈ (J) và $P_{H/(J)} = \overline{HC}.\overline{HC'}$

mà $\overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$ (do tứ giác BC.BC' nội tiếp).

Do đó $P_{H/(I)} = P_{H/(J)}$ nên H thuộc trục đẳng phương của (I) và (J), đó là đường thẳng FG. Vậy F, G, H thẳng hàng.

Bài toán 10. 14:

Cho tam giác ABC và (T) là đường tròn đi qua hai điểm A, C. Các cạnh AB và BC tương ứng cắt (T) tại các điểm thứ hai D và E. Gọi (S) là đường tròn tiếp xúc với cạnh BD, BE và tiếp xúc với cung DE tại M. Chứng minh rằng đường phân giác góc AMC đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính của (T), r là bán kính của (S) và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kéo dài AI và CI, chúng cắt (T) lần lượt tại M_A và M_C. Giả sử (S) tiếp xúc đường thẳng AD tại F và tiếp xúc với đường thẳng CE tại G. Gọi d là độ dài tiếp tuyến kẻ từ M_A đến (T). Để ý rằng AM_A là phân giác DÂC, ta có $DM_A = M_AC$. Tương tự ta có $EM_C = M_CA$.

Định lí Ptoleme: $CG.DM_A = M_AC.DF + d.CD$

$$d^2 = M_AC^2\left(\frac{CG-DF}{CD}\right)^2 \Rightarrow d^2 = M_AS^2 - r^2$$

Theo Định lí Stewart áp dụng cho tam giác SOM_A ta cũng có:

$M_AS^2.OM + M_AO^2.MS = M_AM^2.SO + SM.MO.SO$

$M_AS^2.R + R^2r = M_AM^2(R + r) + rR(R + r)$

$M_AM^2(R + r) = (M_AS^2 - r^2)R = d^2R$

Do đó: $M_AC^2\left(\frac{CG-DF}{CD}\right)^2 = \frac{M_AM^2(R+r)}{R}$

$$\left(\frac{M_AM}{M_AC}\right)^2 = \left(\frac{R}{R+r}\right)\left(\frac{CG-DF}{CD}\right)^2$$

Tương tự: $\left(\frac{M_CM}{M_CA}\right)^2 = \left(\frac{R}{R+r}\right)\left(\frac{AF-EG}{AE}\right)^2$

Ta có: CG – DF = (CG + GB) – (DF + FB) = CB – DB

và $AF - EF = (AF + FB) - (EG + GB) = AB - BE$

Ngoài ra, do ACDE là tứ giác nội tiếp, ta suy ra $BDC = AEC$ và $DCB = BAE$, do đó $\Delta CBD \sim \Delta ABE$ và:

$$\frac{CG - DF}{CD} = \frac{CB - DB}{CD} = \frac{AB - BE}{EA} = \frac{AF - EG}{AE}$$

nên: $\frac{M_AM}{M_AC} = \frac{M_CM}{M_CA} \Rightarrow \frac{\sin MAM_A}{\sin M_AAC} = \frac{\sin M_CCM}{\sin ACM_C}$

Theo dạng lượng giác của Định lý Ceva cho tam giác AMC:

$$\frac{\sin MAM_A}{\sin M_AAC} \cdot \frac{\sin ACM_C}{\sin MCCM} \cdot \frac{\sin CMI}{\sin IMA} = 1$$

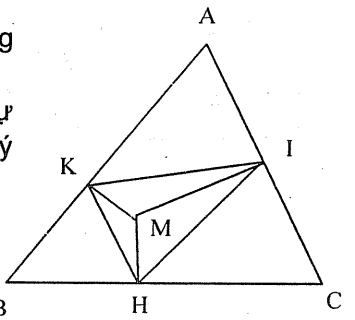
Suy ra $\sin CMI = \sin IMA \Rightarrow CMI = IMA$ do $AMC < 180^0$.

Như vậy, đường thẳng MI là phân giác AMC, tức là phân giác AMC đi qua tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.

Bài toán 10. 15:

Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác, gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB, và Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua A, B, C và lần lượt vuông góc với IK, KH, HI. Chứng minh rằng: Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy.

Hướng dẫn giải



Vì M nằm trong tam giác ABC nên H, I, K không thẳng hàng.

Vì MH, MI, MK đồng quy (tại M) và theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB nên theo định lý Carnot, ta có:

$(HB^2 - HC^2) + (IC^2 - IA^2) + (KA^2 - KB^2) = 0$

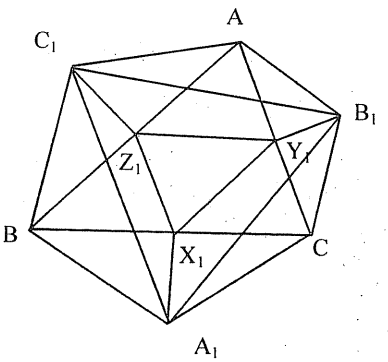
$\Rightarrow (AI^2 - AK^2) + (BK^2 - BH^2) + (CH^2 - CI^2) = 0$

Theo định lý Carnot thì Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy.

Bài toán 10. 16:

Cho tam giác ABC. Dựng các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 theo thứ tự cân tại A_1, B_1, C_1. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB.

Các đường thẳng Δ_X, Δ_Y, Δ_Z theo thứ tự đi qua X, Y, Z và lần lượt vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng: Δ_X, Δ_Y, Δ_Z đồng quy.



Hướng dẫn giải

Vì các tam giác A_1BC, B_1CA, C_1AB theo thứ tự cân tại A_1, B_1, C_1 và vì X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB nên: $A_1X \perp AB$; $B_1Y \perp CA$; $C_1Z \perp AB$.

Vì BC,CA, AB theo thứ tự song song với YZ, ZX, XY nên ta có: $A_1X \perp YZ$; $B_1Y \perp ZX$; $C_1Z \perp XY$

Do đó: $\left(XB_1^2 - XC_1^2\right) + \left(YC_1^2 - YA_1^2\right) + \left(ZA_1^2 - ZB_1^2\right)$

$= \left(A_1Z^2 - A_1Y^2\right) + \left(C_1Y^2 - C_1X^2\right) + \left(B_1X^2 - B_1Z^2\right)$

$= (XZ^2 - XY^2) + (ZY^2 - ZX^2) + (YX^2 - YZ^2) = 0$

Theo định lý Carnot thì Δ_X, Δ_Y, Δ_Z đồng quy.

Bài toán 10. 17:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O; R). AD cắt BC tại E, AB cắt CD tại F. Đường tròn (EAB) lại cắt EF tại I.

a) Tính IE^2 theo OE, OF và R.

b) Chứng minh OI, DB, AC đồng quy

Hướng dẫn giải

a) Tứ giác IEBA và ABCD nội tiếp nên tứ giác ADFI và ABEI nội tiếp

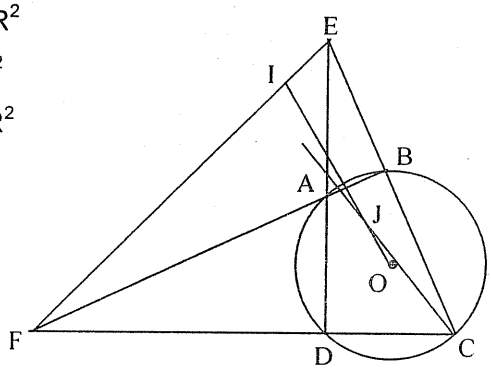
$\Rightarrow \overline{EI}.\overline{EF} = \overline{EA}.\overline{ED} = \mathcal{P}_{E/(O)} = EO^2 - R^2$

và $\overline{FI}.\overline{FE} = \overline{FA}.\overline{FB} = \mathcal{P}_{F/(O)} = FO^2 - R^2$

Do đó: $\overline{EF}(\overline{EI} + \overline{IF}) = EO^2 + FO^2 - 2R^2$

$\Rightarrow EF^2 = EO^2 + FO^2 - 2R^2$

Vậy $EI^2 = \dfrac{(EO^2 - R^2)^2}{EO^2 + FO^2 - 2R^2}$



b) Tương tự: $FI^2 = \dfrac{(FO^2 - R^2)^2}{EO^2 + FO^2 - 2R^2}$

$EI^2 - FI^2 = \dfrac{(EO^2 + FO^2 - 2R^2)(EO^2 - FO^2)}{EO^2 + FO^2 - 2R^2} = EO^2 - FO^2$

Nên $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OI}.(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}) = \dfrac{1}{2}(OF^2 - OE^2 + IE^2 - IF^2) = 0$

Do đó $OI \perp EF$. Gọi J là giao điểm của AC, BD. Tương tự thì có:

$EJ^2 - FJ^2 = EO^2 - FO^2 \Rightarrow OJ \perp EF$ nên O, J, I thẳng hàng : đpcm.

Bài toán 10. 18:

Cho bốn điểm A,B, C, D theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. Gọi E, F là các giao điểm của hai đường tròn: đường tròn (O_1) đường kính AC, đường tròn (O_2) đường kính BD. Lấy P là một điểm bất kì trên đường thẳng EF, CP cắt (O_1) tại M và BP cắt (O_2) tại N. Chứng minh AM, DN và EF đồng quy.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PE}.\overline{PF} = \overline{PN}.\overline{PB}$ nên M, C, N, B cùng thuộc một đường tròn.

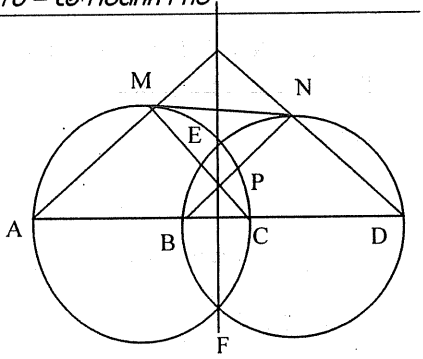
Suy ra $BNM = BCM$

mà $BCM + DAM = 90^o$, do đó:

$BNM + DAM = 90^o$

$\Rightarrow DNM + DAM = 180^o$

Vậy A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn (I). Vì AM, DN, EF là trục đẳng phương của từng cặp trong ba đường tròn (O_1), (O_2) và (I), suy ra AM, DN và EF đồng quy tại tâm đẳng phương.



Bài toán 10. 19:

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của một tam giác nhọn ABC. Chứng tỏ rằng, tồn tại các điểm D, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho: OD + DH = OE + EH = OF + FH và các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy

Hướng dẫn giải

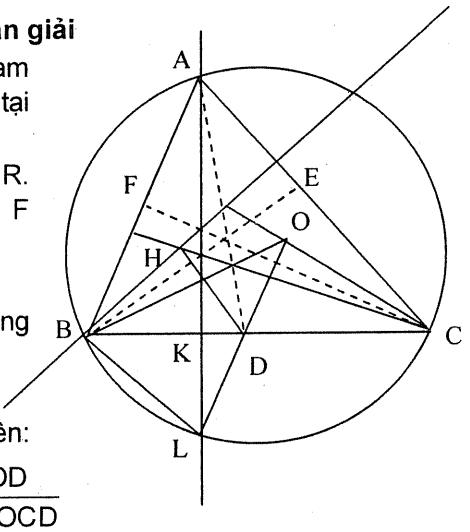
Kéo dài AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại L và BC tại K. Cho OL cắt BC tại D. Vì HK = KL, nên HD = LD.

Như thế OD + DH = OD + DL = OL = R.

Tương tự, có thể chọn các điểm E và F lần lượt trên CA và AB sao cho:

OE + EH = R = OF + FH.

Ta sẽ chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.



Ta chứng minh:

$B\hat{O}D = 180^0 - 2B$, $C\hat{O}D = 180^0 - 2C$ nên:

$$\frac{BD}{\sin BOD} = \frac{OD}{\sin OBD} \text{ và } \frac{CD}{\sin COD} = \frac{OD}{\sin OCD}$$

Do đó: $\frac{BD}{CD} = \frac{\sin(180^0 - 2B)}{\sin(180^0 - 2C)} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$

Tương tự thì được: $\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{EA}.\frac{AF}{FB} = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 10. 20:

Cho hình bình hành ABCD. Các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các cạnh DA, AB, BC, CD sao cho: $\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DC}}$. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 theo thứ tự qua A, B, C và theo thứ tự song song với XT, YT, ZT. Chứng minh rằng: Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy.

Hướng dẫn giải

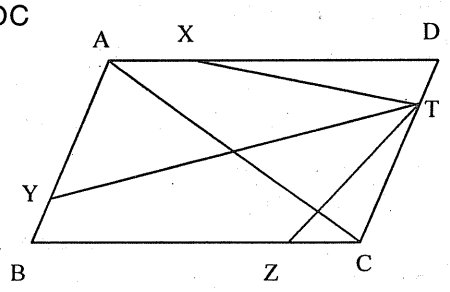
Đặt $\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DC}} = k$

Giả sử $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P

Ta có: $\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DT} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{DC}$

$= (1-k)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + k\overrightarrow{AB}$

$= (2k-1)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$



Mà $\overrightarrow{AM}$ // $\overrightarrow{XT}$ nên :

$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{k-1}{2k-1}$

Ta có: $\overrightarrow{YT} = \overrightarrow{YA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DT} = (1-k)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{DC}$

$= (1-k)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{BA} = (1-k)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

Mà $\overrightarrow{BN}$ // $\overrightarrow{YT}$ nên: $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{2k-1}{1}$

Tương tự: $\overrightarrow{ZT} = \overrightarrow{ZC} + \overrightarrow{CT} = -k\overrightarrow{CB} + (1-k)\overrightarrow{CD}$

$= -k\overrightarrow{CB} + (1-k)(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = (1-k)\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

Mà $\overrightarrow{CP}$ // $\overrightarrow{ZT}$ nên: $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{1}{1-k}$

Suy ra : $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{k-1}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{1} \cdot \frac{1}{1-k} = -1$

Theo định lý Ceva cho tam giác ABC thì $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy.

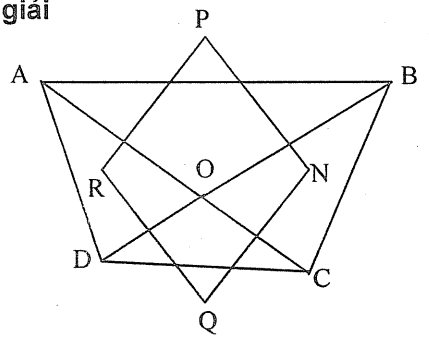
Bài toán 10. 21:

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi ABCD. Tìm tập hợp các điểm P thoả mãn điều kiện: OP < min (AP, BP, CP, DP)

Hướng dẫn giải

Trước hết nhận xét thấy rằng với hai điểm X, Y cho trước trong mặt phẳng thì tập hợp tất cả các điểm P thoả mãn PX < PY là nửa mặt phẳng chứa X và có bờ là đường trung trực của đoạn XY.

Trở lại bài toán, ta thấy điểm P thoả mãn OP < min (AP, BP, CP, DP) khi và chỉ khi P đồng thời thoả mãn OP < AP, OP < BP, OP < CP và OP < DP.



Do đó, theo nhận xét trên ta có tập hợp tất cả các điểm P thoả mãn đề bài là phần chung của bốn nửa mặt phẳng chứa O và lần lượt có bờ là đường trung trực của các đoạn AO, BO, CO, DO. Dựng các đường trung trực của các đoạn AO, BO, CO, DO ta được tập hợp điểm cần tìm chính là miền trong của hình bình hành MNQR (M, N, Q, R là các giao điểm của bốn đường trung trực nói trên).

Bài toán 10. 22:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm tập hợp các điểm M nằm trong đường tròn (O) sao cho 3 dây AA', BB', CC' đi qua M và thoả mãn:

$$\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}\le 3 \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Do M nằm trong đường tròn nên:

$$\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}=\frac{MA^2}{MA.MA'}+\frac{MB^2}{MB.MB'}+\frac{MC^2}{MC.MC'}=\frac{MA^2+MB^2+MC^2}{R^2-OM^2} \qquad (2)$$

Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là điểm bất kì, ta có:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + BG^2 + GC^2$

Và $3R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Suy ra: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3(MG^2 + R^2 - OG^2)$ (3)

Từ (2) và (3) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3(MG^2+R^2)-OG^2}{R^2-OM^2}\le 3 \Leftrightarrow MG^2 + OM^2 \le OG^2$$

Vậy, nếu ΔABC đều thì tập điểm cần tìm là tập gồm duy nhất điểm O, còn nếu ΔABC không đều thì tập điểm cần tìm là hình tròn đường kính OG.

Bài toán 10. 23:

Cho một đường tròn bán kính R và một điểm P cố định bên trong. Qua P ta vẽ hai dây cung thay đổi vuông góc nhau AC, BD của đường tròn này. Gọi Q là một trong bốn điểm thế nào cho một trong bốn tứ giác APCQ, APDQ, BPCQ, BPDQ là hình chữ nhật. Tìm tập hợp những điểm Q.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm đường tròn cố định. X là tâm hình chữ nhật APCQ, ta có:

$$OQ^2 = OX^2 + XQ^2 - 2.OX.XQ.\cos OXQ$$

$$OP^2 = OX^2 + XP^2 - 2.OX.XP.\cos(OXQ + \pi)$$

$\Rightarrow OQ^2 + OP^2 = 2OX^2 + 2XQ^2$

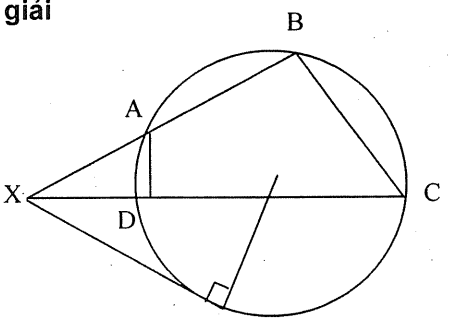
Mặt khác, vì X là tâm của hình chữ nhật nên XQ = XC và do X là trung điểm của AC trên OX vuông góc với AC, suy ra $XO^2 + XC^2 = OC^2$. Do đó $OQ^2 = 2OC^2 - OP^2$: không đổi, nên Q phải nằm trên đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{2R^2 - OP^2}$

Ngược lại, dễ thấy rằng tất cả các điểm của đường tròn nói trên đều là những điểm của tập hợp. Thật vậy, cho điểm Q bất kì trên đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{2R^2 - OP^2}$ này, gọi X là trung điểm PQ. Khi đó, chọn dây cung AC nhận X làm trung điểm.

Bài toán 10. 24:

Cho tứ giác lồi cố định ABCD nội tiếp trong đường tròn mà AB không song song với CD. Tìm tập hợp các điểm P thoả mãn điều kiện: ta có thể tìm được hai đường tròn lần lượt nhận AB và CD làm dây cung sao cho chúng tiếp xúc nhau tại P.

Hướng dẫn giải



Giả sử các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại X. Từ X, kẻ một tiếp tuyến đến đường tròn ngoại tiếp ABCD. Gọi d là độ dài tiếp tuyến này. Tập hợp cần tìm là đường tròn tâm X bán kính d.

Thật vậy, ta gọi (C_0) là đường tròn tâm X bán kính d. Lấy một điểm P bất kì trên (C_0). Xét đường tròn ngoại tiếp ABCD, ta có:

$d^2 = XA.XB = XC.XD$, suy ra $XP^2 = XA.XB = XC.XD$

Gọi (C_1) là đường tròn đi qua ba điểm C, D, P ta có:

$XC.XD = XP^2$ nên XP là tiếp tuyến của đường tròn (C_1).

Tương tự, gọi (C_2) là đường tròn đi qua ba điểm A, B, P thì XP là tiếp tuyến của đường tròn này. Như vậy, (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại P.

Ta chú ý rằng nếu P là một trong 4 giao điểm của AB hoặc CD với (C_0), thì không thể dựng các đường tròn như trên được, trừ khi ta chấp nhận rằng đó là đường tròn suy biến thành đường thẳng.

Bài toán 10. 25:

Cho tam giác ABC cạnh a, b, c tương ứng. Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $bc.MA + caMB + abMC = abc\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $bc.MA + caMB + abMC \geq abc\sqrt{3}$ với mọi điểm M.

Ta có $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = 4m_a^2 + 3a^2 \geq 4\sqrt{3}.am_a$

$$\Rightarrow am_a \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow a.GA \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3\sqrt{3}}$$

Dấu = chỉ khi: $4m_a^2 = 3a^2$ nên $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3a^2$

hay: $b^2 + c^2 = 2a^2$.

Mặt khác, gọi G là trọng tâm tam giác ABC :

$$\frac{MA}{a}=\frac{MA.GA}{a.GA}\geq\frac{\vec{MA}.\vec{GA}}{a.GA}\Rightarrow\frac{MA}{a}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(\vec{MA}.\vec{GA}+GA^2\right)$$

Dấu = chỉ khi $\vec{MA},\vec{GA}$ cùng hướng.Tương tự cho $\frac{MB}{b},\frac{MC}{c}$

nên:

$$\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(\vec{MA}\left[\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}\right]+GA^2+GB^2+GC^2\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=\sqrt{3}$$

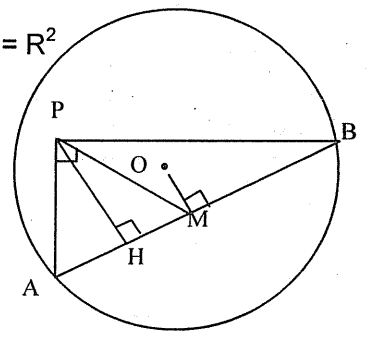
Vậy: bc.MA + caMB + abMC ≥ abc$\sqrt{3}$.

Dấu = chỉ khi tam giác ABC đều và đồng thời M trùng với trọng tâm G. Vậy nếu tam giác ABC không đều thì không tồn tại M, và nếu tam giác ABC đều thì chỉ có điểm M duy nhất là trọng tâm G.

Bài toán 10. 26:

Cho điểm P cố định nằm trong đường tròn (O; R) và hai điểm A, B chạy trên đường tròn đó sao cho góc APB luôn bằng 90°. Gọi M là trung điểm của dây AB và H là hình chiếu của P xuống AB. Chứng minh rằng M, H luôn cùng thuộc một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải



Ta có: $P_{H/(O)}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}=-HP^2$ và $P_{H/(O)}=HO^2=R^2$

Suy ra $HO^2-R^2=-HP^2$ hay $HO^2+HP^2=R^2$

Tương tự $P_{M/(O)}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-MB^2$

Và $P_{M/(O)}=MO^2-R^2$

Mặt khác tam giác vuông APB có trung tuyến

$MP=\frac{1}{2}AB=MB$ suy ra $MO^2-R^2=-MP^2$

hay $MO^2+MP^2=R^2=HO^2+HP^2$

Do đó thì H, M cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của OP và bán kính bằng $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-OP^2}$.

Bài toán 10. 27:

Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ AB và một điểm M thay đổi bên trong hình thang. Gọi E, F là giao điểm của MC, MD với AB. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AME và BMF cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh đường thẳng MN đi qua điểm cố định O là giao điểm của AD và BC. Gọi P. Q là giao điểm của AD, BC với đường tròn (AME), (BMF).

Ta có:

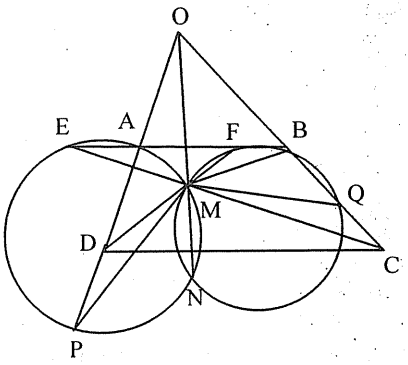
APM = AEM = DCM

⇒ D, M, P, C cùng thuộc một đường tròn

và BQM = AFM = CDM

⇒ C, M, Q, D cùng thuộc một đường tròn

Suy ra C, D, M, P, Q cùng thuộc một đường tròn nên C, D, P, Q cũng thuộc một đường tròn, mà AB // CD do đó A, B, P, Q cùng thuộc một đường tròn (I)



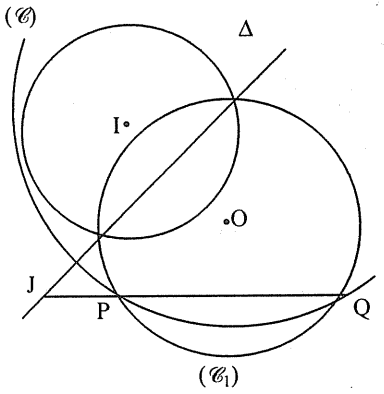
Vì MN, AP. BQ là trục đẳng phương của từng cặp trong ba đường tròn (AME), (BMF) và (I) nên chúng đồng quy tại tâm đẳng phương O. Vậy đường thẳng MN đi qua điểm cố định O.

Bài toán 10. 28:

Cho hai điểm P, Q nằm ngoài đường tròn (I) cố định với IP ≠ IQ. Vẽ đường tròn (C) bất kì đi qua P, Q. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (C) và (I) đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi (C_1) là đường tròn cố định có tâm O và đi qua P, Q. Do I không thuộc đường trung trực của PQ nên trục đẳng phương Δ của (C_1) và (I) không song song với PQ, chúng phải cắt nhau ở J.



Giả sử (C) là đường tròn bất kì đi qua P và Q, ta có J thuộc trục đẳng phương PQ của (C) và (C_1) nên:

$$P_{J/(C)} = P_{J/(C_1)}$$

Mà J thuộc trục đẳng phương của (C_1) và (I) nên: $P_{J/(C1)} = P_{J/(I)}$

Do đó : $P_{J/(C)} = P_{J/(I)}$, hay J thuộc trục đẳng phương của (C) và (I): đpcm.

Bài toán 10. 29:

Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') không có điểm chung, và d là trục đẳng phương của chúng. Gọi I là một điểm thay đổi trên d. Từ I kẻ các tiếp tuyến IM, IN, IM', IN' tới hai đường tròn.

a) Chứng minh rằng 4 điểm M, N, M', N' nằm trên đường tròn có tâm I, ta kí hiệu đường tròn đó là (I). Với điểm I' nằm trên d tương tự có đường tròn (I'). Tìm trục đẳng phương của (I) và (I').

b) Chứng minh rằng khi I thay đổi, đường tròn (I) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $P_{M/(O)} = IM^2 = IN^2$, $P_{M/(O)} = IM'^2 = IN'^2$.

Vì M nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O') nên $P_{M/(O)} = P_{M/(O')}$, suy ra IM = IN = IM' = IN'. Vậy bốn điểm M, M', N, N' cùng nằm trên đường tròn (I).

Ta có: $P_{O/(I)} = P_{O/(I')} = R^2$. Tương tự $P_{O'(I)} = P_{O'/(I')} = R'^2$.

Vậy OO' là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) ; (I')

b) Gọi H là giao điểm của d và OO' .

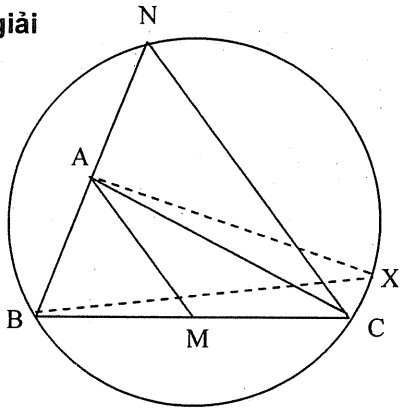
Vì hai đường tròn (O) và (O') không có điểm chung nên H nằm ngoài (O) và (O'). Nếu IM là tiếp tuyến của (O) thì: $IM^2 = IO^2 - R^2 > IO^2 - OH^2 > IH^2$

Vậy IM > IH. Suy ra đường tròn (I) cắt OO' tại hai điểm P, Q. Chọn đường tròn (I') cố định thì (I') cũng đi qua P, Q vì (I) và (I') có trục đẳng phương là OO'. Vậy mọi đường tròn (I) luôn luôn đi qua hai điểm cố định P, Q.

Bài toán 10. 30:

Dựng tam giác ABC, cho biết AC = b, AB = c và góc nhọn AMB = α, với M là trung điểm BC,

Hướng dẫn giải



Giả sử ta dựng được tam giác ABC như đề bài. Vì AMB là góc nhọn nên ta có c < b.

Gọi N là điểm trên đường thẳng BA sao cho A là trung điểm NB. Khi đó, AM là đường trung bình của tam giác BNC nên suy ra BCN = AMB = α

Ta suy cách dựng như sau:

Dựng đoạn AB có độ dài bằng c. Dựng điểm N sao cho A là trung điểm NB.

Dựng trên đoạn thẳng BN một cung (L) chứa góc α. Tiếp đến, vẽ đường tròn (C) có tâm A và bán kính bằng b, đường tròn này cắt cung (L) tại C.Ta được tam giác ABC phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng, rõ ràng tam giác ABC có AB = c, AC = b. Gọi M là trung điểm AB thì AM // NC nên ta có AMB = α.

Biện luận: Với điều kiện c < b, bài toán có lời giải khi và chỉ khi (C) cắt (L). Từ A ta kẻ đường thẳng vuông góc với BN, đường thẳng này cắt (L) ở X.

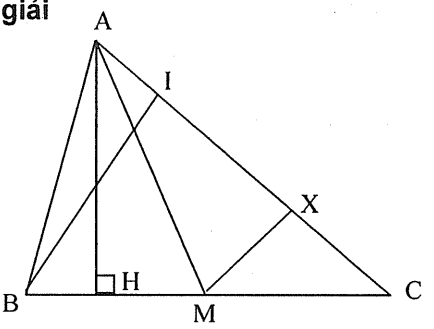
Ta có $AXB = \frac{\alpha}{2}$ nên (C) cắt (L) khi và chỉ khi:

$$AX \geq AC > AB \Leftrightarrow b.\tan\frac{\alpha}{2} \leq c < b.$$

Bài toán 10. 31:

Dựng tam giác ABC biết các độ dài đường cao kẻ từ A, B và độ dài đường trung tuyến kẻ từ A.

Hướng dẫn giải



Giả sử dựng được tam giác ABC có các đường cao AH = h, BI = k và trung tuyến AM = m (với h, k, m là các độ dài cho trước).

Hạ MX ⊥ AC. Vì M là trung điểm BC, đồng thời MX song song với BI nên:

$$MX = \frac{BI}{2} = \frac{k}{2}$$

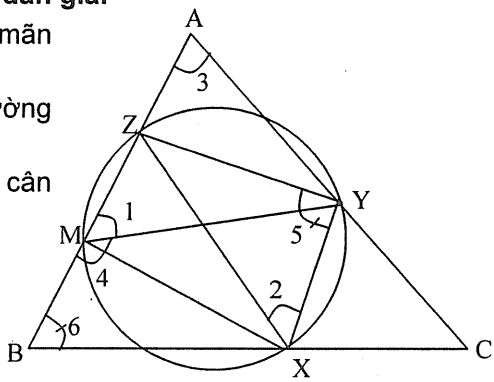
Từ phân tích trên ta đi đến cách dựng: tam giác vuông AHM, dựng X rồi đến C, B.

Biện luận: Với điều kiện h < m, ta luôn dựng được tam giác vuông AHM. Ngoài ra, để dựng được điểm X, đường tròn đường kính AM và đường tròn $(M; \frac{k}{2})$ phải cắt nhau.

Bài toán 10. 32:

Cho tam giác ABC, hãy dựng tam giác XYZ nội tiếp tam giác ABC (X ∈ BC, Y ∈ CA, Z ∈ AB), sao cho ΔXYZ ~ ΔABC và S_{XYZ} nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Giả sử ΔXYZ đã dựng được thoả mãn yêu cầu bài toán

Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn (XYZ) và cạnh AB

Suy ra các tam giác YMA, XMB cân đỉnh Y, X.

Đặt AM = x ⇒ MB = c – x

$$MY = \frac{x}{2\cos A} \text{ và } MX = \frac{c-x}{2\cos B}$$

$$XY^2 = MX^2 + MY^2 - 2MX.MY.\cos C = \left(\frac{x\sin C}{2\cos A.\cos B} - \frac{c.\sin B}{2\cos B}\right)^2 + \frac{c^2}{4}$$

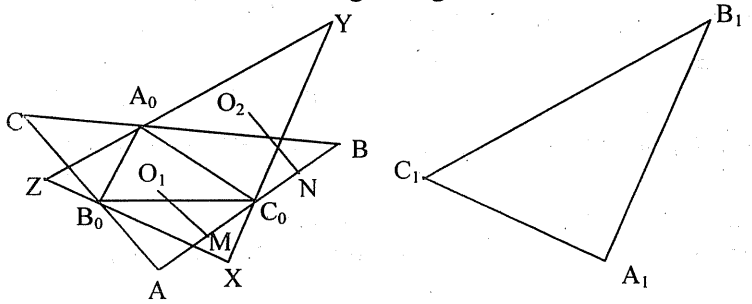
$$\Rightarrow XY \geq \frac{c}{2} \Rightarrow k \geq \frac{1}{2} \text{ (k là tỉ số đồng dạng)}$$

$\Rightarrow S_{XYZ} \geq \frac{1}{4} S_{ABC}$, dấu "=" xảy ra ⇔ XY là đường trung bình của ΔABC và khi đó Z là trung điểm của AB. Vậy ΔXYZ có các đỉnh trùng với trung điểm của các cạnh của ΔABC.

Bài toán 10. 33:

Cho $A_0B_0C_0$ và $A_1B_1C_1$ là các tam giác nhọn. Hãy dựng tam giác ABC có diện tích lớn nhất sao cho nó đồng dạng với tam giác $A_1B_1C_1$ và ngoại tiếp $A_0B_0C_0$ (nghĩa là cạnh BC chứa điểm A_0, cạnh CA chứa B_0 và cạnh AB chứa điểm C_0).

Hướng dẫn giải



Lấy bất kì một tam giác đồng dạng với $A_1B_1C_1$ và ngoại tiếp $A_0B_0C_0$, chẳng hạn, qua $A_0B_0C_0$ lần lượt kẻ các đường song song với các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ta được tam giác XYZ.

Giả sử ABC là một tam giác đồng dạng với $A_1B_1C_1$ và ngoại tiếp $A_0B_0C_0$. Khi đó, C phải nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm A_0, B_0, Z, vì các góc C, Z, C_1 bằng nhau. Tương tự B nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm C_0, A_0, Y và A nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm B_0, C_0, X.

Ta xét cạnh AB, cạnh này đi qua C_0 thì độ dài AB bằng 2 lần độ dài đoạn nối tâm của hai đường tròn (B_0, C_0, X, A) và (C_0, A_0, Y, B). Như thế, AB lớn nhất khi O_1O_2 // AB.

Cách dựng tam giác ABC thoả mãn yêu cầu đề bài như sau:

Dựng tam giác XYZ như trên. Tiếp đến, dựng các tâm điểm O_1, O_2, O_3 của 3 đường tròn ngoại tiếp các tam giác B_0C_0X, C_0A_0Y, A_0B_0Z. Qua A_0, B_0, C_0 ta lần lượt dựng các đường song song với các cạnh của tam giác $O_1O_2O_3$, chúng cắt nhau ở A, B, C sao cho BC chứa điểm A_0, cạnh CA chứa B_0 và cạnh AB chứa điểm C_0. Dễ dàng chứng minh được đó là tam giác phải dựng.

Bài toán 10. 34:

Cho ABC là tam giác nội tiếp trong đường tròn (T). Hãy dựng tất cả các điểm P trong mặt phẳng (ABC) và không nằm trên (T) thoả mãn điều kiện: Các đường thẳng PA, PB, PC cắt (T) lần lượt tại các điểm thứ hai A', B', C' sao cho $A'B' \perp A'C'$ và $A'B' = A'C'$.

Hướng dẫn giải

Các số đo góc sau đây được định hướng và theo modulo 180^0.

Để giải bài toán, ta sẽ chứng minh một kết quả tổng quát hơn.

Giả sử DEF là một tam giác cố định. Hãy xác định tất cả các điểm P sao cho nếu $A' = PA \cap (T)$, $B' = PB \cap (T)$, $C' = PC \cap (T)$ thì các tam giác A'B'C' và DEF

đồng dạng với nhau (các đỉnh được viết theo thứ tự tương ứng), hay nói cách khác: $B'C'A' = EFD$ và $C'A'B' = FDE$.

Với điểm P cho trước, ta luôn có:

$BPA = BCA + B'C'A', CPB = CAB + C'A'B''$

Từ đó, $B'C'A' = EFD$ nếu và chỉ nếu $BPA = BCA + EFD$ và $C'A'B' = FDE$ nếu và chỉ nếu $CPB = CAB + FDE$. Khi đó, điểm P cần tìm là giao điểm (khác với B) của hai đường tròn lần lượt chắn trên hai đoạn BA và CB các góc tương ứng bằng $BCA + EFD$ và $CAB + FDE$.

Trở lại bài toán ban đầu: Ta cần tìm các điểm P sao cho A'B'C' là tam giác vuông cân tại A'. Áp dụng chứng minh trên hai lần với tam giác DEF được xác định tương ứng, ta tìm được hai điểm P thoả mãn đề bài.

Bài toán 10. 35:

Cho ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên đường tròn (K). Hãy dựng điểm D trên (K) sao cho tồn tại một đường tròn nội tiếp trong tứ giác ABCD.

Hướng dẫn giải

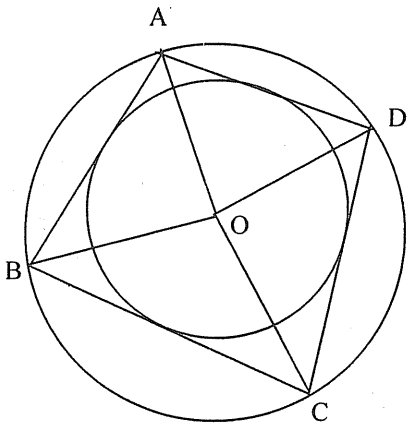
Giả sử bài toán đã được giải xong, gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ABCD ta có: $AÔC + AÔD + DÔC = 360^0$

$\Leftrightarrow AÔC + 180^0 - OÂD - ODA + 180^0 - ODC - OCD = 360^0$

$\Leftrightarrow AOC - \frac{BAD}{2} - \frac{BCD}{2} - ADC = 0$

$\Leftrightarrow AÔC - 90^0 - 180^0 + ABC$

$\Leftrightarrow AÔC = 270^0 - ABC$



Ta suy ra cách dựng: Trước hết, ta dựng cung chứa góc $(270^0 - ABC)$ dựng trên đoạn AC. Sau đó, gọi O là giao điểm của cung này với đường phân giác của góc ABC. Tiếp đến, dựng đường tròn (O) có tâm O và tiếp xúc với BA, BC. Từ A kẻ tiếp tuyến đến (O), tiếp tuyến này và (K) cắt nhau tại D thì. ABCD là tứ giác phải dựng.

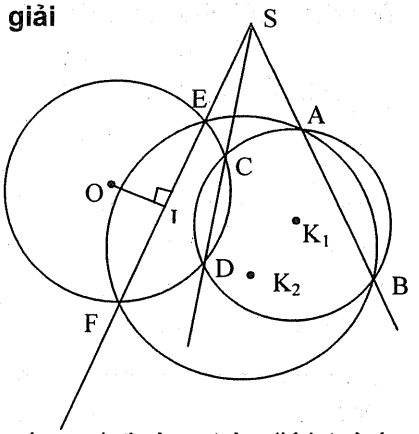
Biện luận: Điều kiện cần và đủ để bài toán có nghiệm hình là:

$AB + CD = BC + AD$.

Bài toán 10. 36:

Cho hai điểm A và B nằm ở ngoài đường tròn (O). Dựng một đường tròn (K) đi qua A, B và cắt (O) theo một dây cung có chiều dài d cho trước.

Hướng dẫn giải



Giả sử tâm O của đường tròn (O) không nằm trên đường thẳng (AB). Vẽ hai đường tròn (K_1) và (K_2) tuỳ ý, nhưng qua A, B và cắt (O) tương ứng ở C, D và E, F. Khi đó các đường thẳng AB, CD, EF phải đồng quy tại S tâm đẳng phương của (O), (K_1), (K_2). Nghĩa là các đường thẳng CD và EF luôn gặp nhau trên đường thẳng AB cố định. Điều đó chứng tỏ S phải cố định.

Do vậy S hoàn toàn xác định, bằng cách dựng 1 đường tròn (K_1) tuỳ ý qua A, B cắt (O) ở C, D rồi cho đường thẳng CD cắt AB ở S. Từ S dựng một cát tuyến (SEF) với (O) sao cho EF = d cho trước.

Vì $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}.\overline{SD} = \overline{SE}.\overline{SF}$ nên tứ giác ABEF nội tiếp với đường tròn (ABEF) chính là đường tròn (K) phải dựng, thoả mãn mọi điều kiện của bài toán. Rõ ràng là nếu $0 < d \leq 2R$ thì trong trường hợp đó bài toán luôn có nghiệm (đặc biệt nếu d = 2R thì chỉ có 1 nghiệm).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 10. 1: Gọi O là giao điểm 2 đường chéo AC và BD trong tứ giác lồi ABCD. Giả sử OAsinA + OCsinC = OBsinB + ODsinD, chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp.

Hướng dẫn

Chứng minh tổng 2 góc đối bù nhau

Bài tập 10. 2: Trên mặt phẳng cho trước hai vòng tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2). Trên đường tròn (O_1, r_1) lấy một điểm M_1 và trên đường tròn (O_2, r_2) lấy một điểm M_2 sao cho đường thẳng O_1M_1 cắt đường thẳng O_2M_2 tại một điểm Q. Cho M_1 chuyển động trên đường tròn (O_1, r_1), M_2 chuyển động trên đường tròn (O_2, r_2) cùng theo chiều kim đồng hồ và với vận tốc góc như nhau. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác M_1QM_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Dùng công thức độ dài cung $\ell = \alpha .R$.

Bài tập 10. 3: Qua đỉnh D của tứ giác ABCD kẻ các đường thẳng a, b, c lần lượt vuông góc với DA, DB,DC. Gọi A' = a $\cap$ = BC, B' = b $\cap$ CA, C' = c $\cap$ AB. Chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Hướng dẫn

Sử dụng định lý Menelaut.

Bài tập 10. 4: Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác đó ba tam giác cân AC_1B, BA_1C, CB_1A có các cạnh đáy AB, BC, CA và góc ở đáy là α. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Hướng dẫn

Xét 3 trường hợp góc $A + \alpha < 180^0$, $A + \alpha = 180^0$ và $A + \alpha > 180^0$. Sử dụng định lý Cêva.

Bài tập 10. 5: Cho đường tròn (O) tâm O và hai đường kính AB, CD không vuông góc với nhau. Gọi M là giao điểm của AC và tiếp tuyến của (O) tại B; MO cắt BC tại N. Đường thẳng MD cắt O tại điểm thứ hai tại P. Chứng minh A, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn

Sử dụng đường tròn Euler và trục đẳng phương. Các điểm A, N, P cùng phương tích với 2 đường tròn.

Bài tập 10. 6: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm tập hợp những điểm M nằm trong đường tròn sao cho ba dây cung đi qua M là AA', BB' và CC' thoả mãn hệ thức : $\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = k$.

Hướng dẫn

Dùng phương tích và tích vô hướng.

Bài tập 10. 7: Dựng một hình vuông nội tiếp trong một hình quạt cho trước sao cho hình vuông có hai đỉnh cùng nằm trên một bán kính, đỉnh thứ ba nằm trên bán kính kia và đỉnh thứ tư nằm trên cung hình quạt.

Hướng dẫn

Gọi 2 bán kính OA, OB . Hạ BH vuông góc với OA rồi dựng hình vuông tỉ lệ là HBCD với D nằm trên đường thẳng OA.

Bài tập 10. 8: Cho góc xOy. Hai điểm A và B lần lượt chuyển động trên hai cạnh Ox và Oy sao cho $OA + OB = \ell$ không đổi.

a) Chứng minh trung trực của AB luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Hướng dẫn

Kết quả Tập hợp là trung trực của OI với I là điểm cố định của các trung trực cạnh AB.

Bài tập 10. 9: Trong mặt phẳng có kẻ những đường thẳng song song cách đều. Có thể vẽ được một ngũ giác đều có các đỉnh nằm trên các đường thẳng đó không?

Hướng dẫn

Kết quả Không dựng được

Bài tập 10.10: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn đồng tâm, bán kính R, r (R > r). P là điểm cố định trên đường tròn bán kính r và B là điểm chuyển động trên đường tròn bán kính R. Đường thẳng BP cắt đường tròn bán kính

R ở điểm thứ hai C và đường thẳng ℓ vuông góc với đường thẳng BP tại P cắt đường tròn bán kính r ở điểm thứ hai A (nếu ℓ là tiếp tuyến của đường tròn thì A ≡ P)

a) Tìm tập hợp các giá trị của biểu thức: $BC^2 + CA^2 + AB^2$

b) Tìm tập hợp trung điểm của AB.

Hướng dẫn

a) Kết quả $BC^2 + CA^2 + AB^2 = 6R^2 + 2r^2$

b) Kết quả Tập hợp là đường tròn có tâm là trung điểm OP và bán kính $\frac{R}{2}$.

Bài tập 10. 11: Cho trước độ dài của cạnh AC = b, hãy dựng tam giác ABC có góc $ABC = 90^0$ và có trung tuyến BM thoả điều kiện $BM^2 = AB.AC$

Hướng dẫn

Trung tuyến $BM = \frac{AC}{2}$

Bài tập 10. 12: Trong mặt phẳng cho một đường tròn (O) và hai đường thẳng vuông góc với nhau d và d'. OA và OB là hai bán kính thay đổi vuông góc với nhau. Qua A kẻ Ax // d và qua B kẻ By // d'. Tìm tập hợp giao điểm M của Ax và By.

Hướng dẫn

Kết quả OM hợp với đường thẳng d một góc 45^0 không đổi.

Chuyên đề 11: CỰC TRỊ HÌNH HỌC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất :

- Sử dụng các phương pháp biến đổi tương đương, so sánh, tam thức bậc hai, đồ thị hàm số, quy nạp , phản chứng, tọa độ , lượng giác hóa,...
- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản về tam giác, lượng giác, bất đẳng thức về độ dài, vectơ, bất đẳng thức Ptoleme, bất đẳng thức giá trị tuyệt đối, AM–GM, Schwarz , BCS, ...

Bất đẳng thức về tam giác

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c thì

$a, b, c > 0$; $a + b > c, b + c > a, c + a > b$;

$a - b < c, b - c < a, c - a < b$;

$|a - b| < c$; $|b - c| < a$; $|c - a| < b$;

$(a - b)(A - B) \geq 0$; $(A - B)(\cos A - \cos B) \leq 0$; $(a - b)(\cos A - \cos B) \leq 0$

$(b - c)(B - C) \geq 0$; $(B - C)(\cos B - \cos C) \leq 0$; $(b - c)(\cos B - \cos C) \leq 0$

$(c - a)(C - A) \geq 0$; $(C - A)(\cos C - \cos A) \leq 0$; $(c - a)(\cos C - \cos A) \leq 0$

Bất đẳng thức về khoảng cách

Với 3 điểm A, B, C bất kì thì có: $|AB - AC| \leq BC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 3 điểm A, B, C thẳng hàng và A nằm ngoài đoạn BC.

Với 3 điểm A, B, C bất kì thì có: $BC \leq AB + BC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó.

Với các điểm A, B, C,...,Y, Z bất kì thì có:

$AZ \leq AB + BC + \ldots + YZ$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi n điểm A, B, C, ..., Y, Z thẳng hàng theo thứ tự đó.

Với điểm A, B bất kì nằm về hai phía của đường thẳng d. Điểm M thuộc d thì $MA + MB \geq AB$, dấu bằng khi M là giao điểm của đoạn thẳng AB với đường thẳng d.

Với điểm A, B bất kì nằm về một phía của đường thẳng d. Điểm M thuộc d thì $|MA - MB| \leq AB$, dấu bằng khi M là giao điểm nếu có của đường thẳng AB với đường thẳng d.

Bất đẳng thức về vectơ

Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bất kì thì có $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bất kì thì có $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bất kì thì có $|u - \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ngược hướng.

Với n vectơ $\vec{u_1},\vec{u_2},....,\vec{u_n}$ bất kì thì có

$$\left|\vec{u_1}+\vec{u_2}+....+\vec{u_n}\right| \le \left|\vec{u_1}\right|+\left|\vec{u_2}\right|+....+\left|\vec{u_n}\right|$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi cả n vectơ cùng hướng.

Bất đẳng thức Ptôlêmê

Tứ giác ABCD có 2 chéo AC, BD :

$AC.BD \le AB.CD + AD.BC$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp được.

Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

$|x+y| \le |x| + |y|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x và y cùng dấu.

$|x-y| \le |x| + |y|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x và y trái dấu.

Bất đẳng thức AM–GM giữa trung bình cộng và trung bình nhân (thường gọi là bất đẳng thức Cauchy)

– Với hai số a, b không âm: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b.

– Với ba số a, b, c không âm: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

Bất đẳng thức Schwarz

Với bốn số a, b, c, d thì $(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

hay $|ac + bd| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ad = bc.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 11.1:

Cho tam giác ABC có cạnh a, b, c tương ứng. Chứng minh:

$a + b + c \le 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $a = b\cos C + c\cos B$, $b = c\cos A + a\cos C$, $c = a\cos B + b\cos A$

nên bất đẳng thức tương đương với:

$(b\cos C + c\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (a\cos B + b\cos A)$

$\le 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$

$\Leftrightarrow (a\cos A + b\cos B - a\cos B - b\cos A) + (b\cos B + c\cos C$

$- b\cos C - c\cos B) + (c\cos C + a\cos A - c\cos A - a\cos C) \le 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(\cos A-\cos B)+(b-c)(\cos B-\cos C)+(c-a)(\cos C-\cos A) \le 0$

Ta chứng minh: $(a - b)(\cos A - \cos B) \le 0$, dấu = khi a = b

Xét a = b thì bất đẳng thức đúng.

Xét a > b thì A > B $\Rightarrow$ cosA < cosB $\Rightarrow$ (a – b)(cosA – cosB) < 0

Xét a < b thì A < B $\Rightarrow$ cosA > cosB $\Rightarrow$ (a – b)(cosA – cosB) < 0

Tương tự thì có đpcm.

Bài toán 11.2:

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} < \sqrt{3p}$.

b) $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 8$ khi p = 1.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x = \sqrt{p-a}$; $y = \sqrt{p-b}$; $z = \sqrt{p-c}$.

thì $x, y, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3p - (a + b + c) = p$.

BĐT: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < x + y + z \leq \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$.

Ta có $x + y + z \leq \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$ là BCS.

và $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < x + y + z$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 < (x + y + z)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 < x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow 0 < 2(xy + yz + zx)$: đúng.

b) Ta có: $a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) > 0$

Tương tự thì: $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

Vì a + b + c = 2 nên $abc \geq (2 - 2a)(2 - 2b)(2 - 2c)$. Suy ra:

$8 - 8(a + b + c) + 8(ab + bc + ca) - 9abc \leq 0$

$\Rightarrow 8 + 9abc - 8(ab + bc + ca) \geq 0$

$\Rightarrow 24 - 24(ab + bc + ca) + 27abc \geq 0$

$\Rightarrow 8(a + b + c)^2 - 24(ab + bc + ca) + 27abc \geq 8$

$\Rightarrow 8(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 27abc \geq 8$

$\Rightarrow 4(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 27abc \geq 8$

$\Rightarrow 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 27abc \geq 8 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 11.3:

Cho a, b, c là 3 cạnh tam giác ABC có chu vi 2p. Chứng minh:

a) $8(p - a)(p - b)(p - c) \leq abc$.

b) $\dfrac{a}{2b + 2c - a} + \dfrac{b}{2c + 2a - b} + \dfrac{c}{2c + 2a - b} \geq 1$

Hướng dẫn giải

a) Vì a, b, c là 3 cạnh tam giác ABC có chu vi 2p nên p – a > 0,

p – b > 0 và p – c > 0.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 3 cặp số dương:

VT $= 8(p-a)(p-b)(p-c)$

$= 2\sqrt{(p-a)(p-b)}.2\sqrt{(p-b)(p-c)}.2\sqrt{(p-c)(p-a)}$

$\le (p-a+p-b)(p-b+p-c)(p-c-p-a) = abc.$

b) Đặt $x = 2b+2c-a,\ y = 2c+2a-b,\ z = 2c+2a-b \Rightarrow x, y, z > 0$

và $a = \frac{1}{9}(2y+2z-x),\ b = \frac{1}{9}(2z+2x-y),\ c = \frac{1}{9}(2x+2y-z)$

Do đó: $\frac{a}{2b+2c-a}+\frac{b}{2c+2a-b}+\frac{c}{2c+2a-b}$

$= \frac{2}{9}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]-\frac{1}{3} \ge \frac{2}{9}(2+2+2)-\frac{1}{3}=\frac{12}{9}-\frac{1}{3}=1.$

Bài toán 11.4:

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác.Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)} \ge \frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{a}{b},\ y = \frac{b}{c},\ z = \frac{c}{a}$ thì x, y, z >0 và ta có: xyz = 1.

BĐT: $\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)} \ge \frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{y+1}+\frac{y-1}{z+1}+\frac{z-1}{x+1} > 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x-y-z+xy^2+yz^2+zx^2-3 \ge 0.$

Ta dùng bất đẳng thức BCS: $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2$

nên: $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \ge \sqrt[3]{xyz}\ (x+y+z) = x+y+z$

và: $xy^2+yz^2+zx^2 \ge 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+xy^2+yz^2+zx^2 \ge x+y+z+3 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 11.5:

Chứng minh với mọi tam giác ABC có cạnh a, b, c:

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|$

$$= \left|\frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(c+a)(a+b)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$$

$$= \left|\frac{(a-c+c-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(c+a)(a+b)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$$

$$= \frac{\left|-(a-b)(b-c)(c-a)\right|}{(a+b)(b+c)(c+a)} < \frac{c.a.b}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{abc}{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}} = \frac{1}{8}.$$

Bài toán 11.6:

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} \ge \frac{3r}{4R}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{r}{R} = \frac{\frac{S}{p}}{R} = \frac{abc}{4R^2p} = \frac{abc}{2R^2(a+b+c)}$

$$= \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM

$$\sin^3\frac{A}{2} + \sin^3\frac{B}{2} + \sin^3\frac{C}{2} \ge 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{3r}{4R}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài toán 11.7:

Chứng minh với mọi tam giác ABC nhọn, ta có

$$1 + \frac{r}{R} \ge 3\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}.$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{r}{R} = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$ Ta có

$$VT = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$= 2R\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \cos A + \cos B + \cos C.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 3 số dương thì được đpcm.

Bài toán 11.8:

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$ab\sin\frac{C}{2} + bc\sin\frac{B}{2} + ca\sin\frac{B}{2} \geq 2S\sqrt{3}.$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh với ABC là tam giác bất kỳ :

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1).$$

Bất đẳng thức đề bài tương đương

$$2S\left(\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin C} + \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin A} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin B}\right) \geq 2S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geq \sqrt{3} \quad (2).$$

Mà theo bất đẳng thức AM–GM:

$$\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) \geq 9 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra (2) đúng.

Bài toán 11.9:

Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC, ta có:

$$\left(\frac{a}{\cos B} + \frac{b}{\cos A} - c\right)\left(\frac{b}{\cos C} + \frac{c}{\cos B} - a\right)\left(\frac{c}{\cos A} + \frac{a}{\cos C} - b\right) \geq 27abc.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có:

$$\frac{a}{\cos B} + \frac{b}{\cos A} - c = \frac{2a^2c}{a^2+c^2-b^2} + \frac{2b^2c}{b^2+c^2-a^2} - c$$

$$= c\left(\frac{2a^2}{a^2+c^2-b^2} - 1 + \frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2} - 1 + 1\right)$$

$= c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}+\frac{b^2+a^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}+1\right)$

Tương tự: $\frac{b}{\cos C}+\frac{c}{\cos B}-a=a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2+a^2-c^2}+\frac{c^2+b^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}+1\right)$

$\frac{c}{\cos A}+\frac{a}{\cos C}-b=b\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}+\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}+1\right)$

Đặt: $x = b^2 + a^2 – c^2$, $y = c^2 + a^2 – b^2$, $z = c^2 + b^2 – a^2$ ta có:

BĐT $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y}+1\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+1\right)\geq 27$: Đúng, vì áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 3 số dương $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 11.10:

Chứng minh với tam giác ABC thì

$a^2(1 – \sqrt{3}\cot A) + b^2(1 – \sqrt{3}\cot B) + c^2(1 – \sqrt{3}\cot C) \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức đề bài tương đương với

$(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C – \sqrt{3}(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) \geq 0$

$\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$.

Sử dụng bất đẳng thức $\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Ta có:

$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \geq 3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}$

$= \frac{3(\sin A\sin B\sin C)}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}} \geq \frac{3\sin A\sin B\sin C}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}} = 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C.$

Bài toán 11.11:

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$\left(1+\tan\frac{A}{2}\right)\left(1+\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan\frac{C}{2}\right) \geq 2+\sqrt{3}+\frac{S}{p^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ nên

$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$ và

$$VT = 2 + \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} .$$

Và có $\frac{S}{p^2} = \frac{abc}{4R\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}$

$$= \frac{8R^3 \sin A \sin B \sin C}{R.4R^2(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \Rightarrow \text{đpcm} .$$

Bài toán 11.12:

Cho tam giác ABC, chứng minh bất đẳng thức

$b + c \geq \frac{a}{2} + h_a\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{a}{2} + h_a\sqrt{3} = \frac{a}{2} + \frac{2S\sqrt{3}}{a} = \frac{a}{2} + \frac{bc\sqrt{3}}{2R}$

nên BĐT $\Leftrightarrow$ $b + c \geq \frac{a}{2} + \frac{bc\sqrt{3}}{2R}$

$\Leftrightarrow 2\sin B + 2\sin C \geq \sin A + \sqrt{3}\sin B \sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin B + 2\sin C \geq \sin B \cos C + \sin C \cos B + \sqrt{3}\sin B \sin C$

$\Leftrightarrow \sin B\left(2 - \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) + \sin C\left(2 - \cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2\sin B[1 - \cos(C - \frac{\pi}{3})] + 2\sin C[1 - \cos(B - \frac{\pi}{3})] \geq 0$: đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow B = C = \frac{\pi}{3}$: tam giác ABC đều.

Bài toán 11.13:

Cho tam giác ABC, chứng minh bất đẳng thức

$a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-c)(p-a) + c^2(p-a)(p-b) \leq p^2R^2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = p - a > 0; y = p - b > 0; z = p - c > 0$.

BĐT $\Leftrightarrow a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-c)(p-a) + c^2(p-a)(p-b)$

$\leq [(p-a) + (p-b) + (p-c)]^2R^2$

$\Leftrightarrow a^2yz + b^2zx + c^2xy \le (x + y + z)^2R^2$

$\Leftrightarrow 4(yz\sin^2A + zx\sin^2B + xy\sin^2C) \le (x + y + z)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(y\cos2C + z\cos2B)x + 2yz\cos2A + y^2 + z^2 \ge 0.$

Vế trái là tam thức bậc hai theo x, có hệ số x^2 là $1 > 0$ và

$\Delta' = (y\cos2C + z\cos2B)^2 - (2yz\cos2A + y^2 + z^2)$

$= -(y\sin2C - z\sin2B)^2 \le 0 \quad \Rightarrow$ đpcm .

Bài toán 11.14:

Cho tam giác ABC .Chứng minh rằng

$2(ab + bc + ca) \ge 4\sqrt{3}S + a^2 + b^2 + c^2$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$

Ta có $2(ab + bc + ca) \ge 4\sqrt{3}S + a^2 + b^2 + c^2$.

$\Leftrightarrow 4S(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}) \ge 4\sqrt{3}S + 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{\sin A} - \cot gA) + (\frac{1}{\sin B} - \cot gB) + (\frac{1}{\sin C} - \cot gC) \ge \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos C}{\sin C} \ge \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$: đúng .

Bài toán 11.15:

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{h_A}{\ell_A} > \sqrt{\frac{2r}{R}}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $\frac{h_A}{\ell_A} = \sin(C + \frac{A}{2})$,

$\sin^2(C + \frac{A}{2}) = \cos^2\frac{C - B}{2}$ và $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

BĐT $\Leftrightarrow \sin^2(C + \frac{A}{2}) \ge \frac{2r}{R}$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{C - B}{2} \ge 4\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{C - B}{2} - \cos\frac{B + C}{2})$.

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{C - B}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C - B}{2} + 4\sin^2\frac{A}{2} \ge 0.$

Vế trái là tam thức bậc hai theo $\cos\frac{C-B}{2}$, hệ số bậc hai là $1 > 0$ và có $\Delta = 0$ nên bất đẳng thức đã được chứng minh .

Bài toán 11.16:

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{c}(\ell_A + \ell_B) + \frac{1}{a}(\ell_B + \ell_C) + \frac{1}{b}(\ell_C + \ell_A) \le 3\sqrt{3} .$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng công thức phân giác , ta có

$$\frac{1}{c}(\ell_A + \ell_B) + \frac{1}{a}(\ell_B + \ell_C) + \frac{1}{b}(\ell_C + \ell_A)$$

$$= \frac{1}{c}\left(\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} + \frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a} + \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}\right)$$

$$+ \frac{1}{b}\left(\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b} + \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) \le 3\sqrt{3}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh .

Bài toán 11.17:

Cho tam giác ABC. Chứng minh $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có trung tuyến trong tam giác ABC

$$4m_a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2$$

$$\Rightarrow (2m_a)^2 + (a\sqrt{3})^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow 2(m_a.a\sqrt{3}) \le 4ma^2 + 3a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow a.m_a \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{m_a} \ge \frac{2a^2\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Tương tự thì có $\frac{b}{m_b} \geq \frac{2b^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}$; $\frac{c}{m_c} \geq \frac{2c^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}$.

Cộng 3 bất đẳng thức thì được đpcm .

Bài toán 11.18:

Cho tam giác ABC, chứng minh nếu $2A + 3B = \pi$ thì $\frac{4}{h_A} + \frac{4}{h_B} \leq \frac{5}{h_C}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{4}{h_A} + \frac{4}{h_B} \leq \frac{5}{h_C} \Leftrightarrow a + b \leq \frac{5}{4}c$.

Từ giả thiết thì $A = \frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2} \Rightarrow \sin C = \cos\frac{B}{2}$

và $\sin A = \cos\frac{3B}{2} = \cos\frac{B}{2}(4\cos^2\frac{B}{2} - 3)$. Theo định lý sin

$$\frac{a}{\cos\frac{B}{2}\left(4\cos^2\frac{B}{2}-3\right)} = \frac{b}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{B}{2}}$$

Hay $\frac{a}{4\cos^2\frac{B}{2}-3} = \frac{b}{2\sin\frac{B}{2}} = \frac{c}{1}$.

Nên $\frac{a+b}{4\left(1-\sin^2\frac{B}{2}\right)-3+2\sin\frac{B}{2}} = \frac{c}{1}$

Do đó $a + b = c(-4\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2} + 1)$.

mà $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{A}{3} \Rightarrow 0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \sin\frac{B}{2} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 < -4\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2} + 1 \leq \frac{5}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 11.19: Cho tam giác ABC . Chứng minh

$36r^2 \leq ab + bc + ca \leq 9R^2$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

do đó $36r^2 \leq ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \geq 36.\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$ (1)

Mà $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A$

$= \sin A\sin B\sin C\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$

$\geq \frac{9\sin A\sin B\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 18\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (2)

Ta chứng minh $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ nên

$36.4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \leq 36.4.\frac{1}{8}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$= 18\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra (1) đúng.

Bài toán 11.20:

Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$\tan\frac{A}{2}\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)+\tan\frac{B}{2}\left(1+\cos\frac{B}{2}\right)+\tan\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)\geq\frac{p(R+r)+R(4R+r)}{pR}$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$2\sin\frac{A}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\geq 2\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}=\cos B+\cos C.$$

Tương tự: $2\sin\frac{B}{2}\geq\cos B+\cos A$, $2\sin\frac{C}{2}\geq\cos A+\cos C$

Suy ra :

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\geq\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R} \quad (1)$$

Ta chứng minh: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$ (2)

$$VT=\frac{r}{p-a}+\frac{r}{p-b}+\frac{r}{p-c}=r\left(\frac{-p^2+ab+bc+ca}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right)$$

$$VP=\frac{abc}{pS}+\frac{S}{p^2}=\frac{pabc+S^2}{p^2S}=\frac{pabc+p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2S}$$

$$=\frac{pabc+p^4-p^3(a+b+c)+p^2(ab+bc+ca)-pabc}{p^2S}$$

$$= \frac{p^4 - p^3.2p + p^2(ab+bc+ca)}{p^2S} = \frac{-p^2+ab+bc+ca}{S}$$

$$= \frac{p.r(-p^2+ab+bc+ca)}{S^2} = \frac{r(-p^2+ab+bc+ca)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (đpcm)}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh

Bài toán 11.21:

Cho tứ giác lồi ABCD . Chứng minh rằng

$$\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{D}{4}+\frac{16}{4+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}} < 4 .$$

Hướng dẫn giải

Vì ABCD lồi nên $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}, \tan\frac{D}{2} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 4 số dương Ta có

$$\frac{1}{1+\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\tan\frac{C}{2}}+\frac{1}{1+\tan\frac{D}{2}} \geq \frac{16}{4+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}}$$

Do đó , để có đpcm , chỉ cần chứng minh

$$\left(\tan\frac{A}{4}+\frac{1}{1+\tan\frac{A}{2}}\right)+\left(\tan\frac{B}{4}+\frac{1}{1+\tan\frac{B}{2}}\right)$$

$$+\left(\tan\frac{C}{4}+\frac{1}{1+\tan\frac{C}{2}}\right)+\left(\tan\frac{D}{4}+\frac{1}{1+\tan\frac{D}{2}}\right) < 4 .$$

Đặt $x = \tan\frac{A}{4}$, $0 < x < 1$ thì $\tan\frac{A}{2} = \frac{2x}{1-x^2}$. Ta có

$$\tan\frac{A}{4}+\frac{1}{1+\tan\frac{A}{2}} = \frac{1+x+x^2-x^3}{1+2x-x^2} < \frac{2x^2-x-x^3}{1+2x-x^2}+1 < 1 .$$

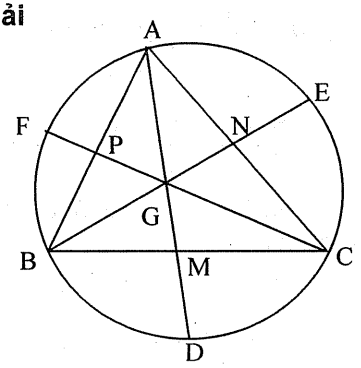
Vì: $1 + x^2 \geq 2x \Rightarrow x + x^3 \geq 2x^2$. Từ đó suy ra đpcm .

Bài toán 11.22:

Cho tam giác ABC với trọng tâm G và nội tiếp trong đường tròn bán kính R, các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C kéo dài cắt đường tròn lần lượt tại D, E, F. Chứng minh:

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF} \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}\right)$$

Hướng dẫn giải



Ta có: MD . MA = MB . MC

$\Rightarrow MD = \dfrac{a^2}{4m_a}$

Và $GD = GM + MD = \dfrac{1}{3}m_a + \dfrac{a^2}{4m_a}$

$$\geq \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{GD} \leq \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{BC}$$

Xét tương tự thì:

$$\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF} \leq \frac{\sqrt{3}}{BC}+\frac{\sqrt{3}}{AC}+\frac{\sqrt{3}}{AB} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)$$

Ta có: $\dfrac{GA}{GD} = \dfrac{8m_a^2}{4m_a^2+3a^2} = \dfrac{2(2b^2+2c^2-a^2)}{2b^2+2c^2-a^2+3a^2} = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Xét tương tự thì: $\dfrac{GA}{GD}+\dfrac{GB}{GE}+\dfrac{GC}{GF} = \dfrac{3a^2+3b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2} = 3$

Mà: $\dfrac{AD}{GD}+\dfrac{BE}{GE}+\dfrac{CF}{GF} = 3+\dfrac{GA}{GD}+\dfrac{GB}{GE}+\dfrac{GC}{GF} = 6$

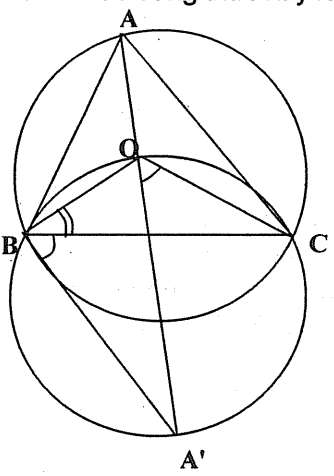
Vì các dây AD, BE, CF đều không lớn hơn 2R nên:

$$\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF} \geq \frac{6}{2R} = \frac{3}{R}.$$

Bài toán 11.23:

Cho ABC là một tam giác nhọn với tâm đường tròn ngoại tiếp O và bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Giả sử AO lại cắt đường tròn (BOC) tại một điểm A', BO lại cắt đường tròn (COA) tại điểm B' và CO lại cắt đường tròn (AOB) tại C'. Chứng minh rằng: $OA'.OB'.OC' \geq 8R^3$. Khi nào đẳng thức xảy ra.

Hướng dẫn giải



Gọi R, R_1 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC, ΔBA'C, thế thì:

$$2R_1 = \frac{BC}{\sin BOC} = \frac{2R\sin A}{\sin 2A} \Rightarrow R_1 = \frac{R}{2\cos A}$$

Ta có:

$A'BO = A'OC + CBO$

$= 180^0 - 2B + 90^0 - A = 90^0 + C - B$

và $OA' = 2R_1\sin(90^0 + C - B)$

$$= R\frac{\cos(B-C)}{\cos A}$$

Tương tự cho OB' và OC', ta được:

$$OA'.OB'.OC' = \frac{\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)}{\cos A\cos B\cos C}$$

Vì thế bất đẳng thức phải chứng minh trở thành

$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) \geq 8\cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow \cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)$

$\geq -8\cos(A+B)\cos(B+C)\cos(C+A)$

$\Leftrightarrow (1+\tan B\tan C)(1+\tan C\tan A)(1+\tan A\tan B)$

$\geq -8(1-\tan B\tan C)(1+\tan B\tan A)(1+\tan C\tan A)$

Đặt: $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$. Bất đẳng thức phải chứng minh:

$(xy+1)(yz+1)(zx+1) \geq 8(xy-1)(yz-1)(zx-1)$

$\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) \geq 8(y+z)(z+x)(x+y)$

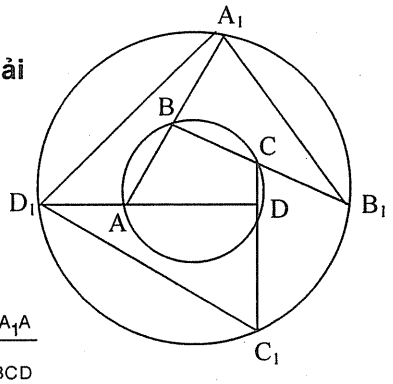
Mà $2x+y+z = (x+y)+(x+z) \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}$, tương tự cho hai biểu thức còn lại ở vế trái $\Rightarrow$ đpcm

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, nghĩa là nếu và chỉ nếu ΔABC là đều.

Bài toán 11.24:

Cho hai đường tròn đồng tâm O, bán kính R_1, R, với $R_1 > R$ và tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O; R). Tia AB, BC, CD, AD cắt đường tròn (O; R_1) lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1.

Chứng minh rằng: $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \frac{R_1^2}{R^2}$.



Hướng dẫn giải

Đặt AB = a, BC = b,
CD = c, DA = d.
$A_1B = x$, $B_1C = y$,
$C_1D = z$, $D_1A = t$

Ta có

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1+\frac{S_{A_1B_1B}}{S_{ABCD}}+\frac{S_{B_1C_1C}}{S_{ABCD}}+\frac{S_{C_1D_1D}}{S_{ABCD}}+\frac{S_{D_1A_1A}}{S_{ABCD}}$$

$$= 1+\frac{x(b+y)}{ab+cd}+\frac{y(c+z)}{ad+bc}+\frac{z(d+t)}{ab+cd}+\frac{t(x+a)}{ad+bc}$$

$$= 1+\frac{xy(b+y)}{y(ab+cd)}+\frac{yz(c+z)}{z(ad+bc)}+\frac{zt(d+t)}{t(ab+cd)}+\frac{tx(a+x)}{x(ad+bc)}$$

$$\geq 1+\frac{x(R_1^2-R^2)}{y\ 4R^2}+\frac{y(R_1^2-R^2)}{z\ 4R^2}+\frac{z(R_1^2-R^2)}{t\ 4R^2}+\frac{t(R_1^2-R^2)}{x\ 4R^2}$$

$$= 1 + \frac{(R_1^2 - R^2)}{4R^2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}\right) \geq 1 + \frac{(R_1^2 - R^2)}{4R^2}4 = \frac{R_1^2}{R^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ABCD là hình vuông.

Bài toán 11.25:

Các đỉnh D, E, F của ΔDEF đều tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Gọi S là diện tích của ΔABC, chứng minh

$$DE \geq \frac{2\sqrt{2}S}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi H, K là giao điểm của đường tròn (DEF) với BC, CA. Ta có:

$FGA = FDE = 60^0$, $FHB = FED = 60^0$

$GFH = 360^0 - ((FGC + FHC + C) = 120^0 - C$

Đặt AF = x thì $\frac{FG}{x} = \frac{\sin A}{\sin 60^0} = \frac{2}{\sqrt{3}\sin A}; \frac{FH}{c - x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin B$

Suy ra:

$HG^2 = \frac{4}{3}(x^2\sin^2 A + (c-x)^2\sin^2 B - 2x(c-x)\sin A.\sin B.\cos(120^0 - C)$

$= \frac{4}{3}(Lx^2 - 2Mc + Nc^2)$

$L = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin A.\sin B.\cos(120^0 - C)$

$M = \sin^2 B + \sin A.\sin B.\cos(120^0 - C)$, $N = \sin^2 B$, nên:

$$HG^2 = \frac{4L}{3}\left(\left(x - \frac{Mc}{L}\right)^2 + \left(\frac{N}{L} - \frac{M^2}{L^2}\right)c^2\right)$$

$$\geq \frac{4Lc^2}{3}\left(\frac{N}{L} - \frac{M^2}{L^2}\right) = \frac{4c^2}{3}.\frac{NL - M^2}{L}$$

Nếu gọi p là bán kính đường tròn (DEP), ta có:

$$\frac{HG}{\sin GFH} = 2p = \frac{DE}{\sin 60^0} \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{HG}{\sin(120^0 - C)}$$

Mà: $NL - M^2 = \sin^2 A.\sin^2 B[(1 - \cos(120^0 - C)]$

$= \sin^2 A.\sin^2 B\sin^2(120^0 - C)$

$L = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A.\sin B.\sin(60^0 + C)$

$= \sin^2 A + \sin^2 B - \sin A.\sin B(\cos C - \sqrt{3}\sin C)$

$$= \frac{1}{4R^2}\left(a^2+b^2-ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+2\sqrt{3}ab\sin C\right)$$

$$= \frac{1}{8R^2}\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right). \text{ Vì vậy:}$$

$$DE^2 = \frac{\sin 60^0}{\sin^2(120^0-C)}HG^2 \geq \frac{3}{4}.\frac{4c^2}{3}.\frac{NL-M^2}{L}.\cos^2(120^0-C)$$

$$= c^2.\frac{\sin^2 A\sin^2 B.8R^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S} = \frac{8S}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 11.26:

Cho tam giác ABC nhọn, H là trực tâm. Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các tam giác HAB, HBC, HCA. Gọi S, R, r là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi:

$$2r.S^2 = 27.R.S_1.S_2.S_3.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$\frac{8S^3}{27S_1S_2S_3} = \frac{1}{S_1S_2S_3}\left[\frac{(S_1+S_2)+(S_2+S_3)+(S_1+S_3)}{3}\right]^3$$

$$\geq \frac{S_1+S_2}{S_3}.\frac{S_2+S_3}{S_1}.\frac{S_1+S_3}{S_2}$$

Gọi AA_1; BB_1; CC_1 là các đường cao có:

$$\frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{HB}{HB_1} = \frac{HB}{HA}.\frac{HA}{HB_1} = \frac{\sin HAB}{\sin HBA}.\frac{1}{\sin HAC} = \frac{\cos B}{\cos A.\cos C}$$

Tương tự thì có:

$$\frac{S_1+S_2}{S_3}.\frac{S_2+S_3}{S_1}.\frac{S_1+S_3}{S_2} = \frac{1}{\cos A.\cos B.\cos C}$$

$$\geq \frac{8}{(\cos A+\cos B)(\cos B+\cos C)(\cos A+\cos C)}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{C-A}{2}}$$

$$\geq \frac{1}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{4R}{r}$$

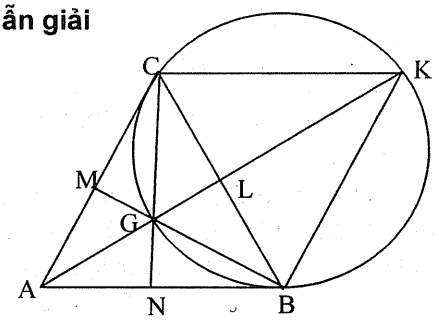
Do đó: $\frac{8S^3}{27S_1S_2S_3} \geq \frac{4R}{r}$. Dấu bằng xảy ra khi ΔABC đều

Bài toán 11.27:

Cho tam giác ABC cạnh a,b,c với trọng tâm G. Xác định vị trí của P nằm miền trong của tam giác ABC sao cho

AP.AG + BP.BG + CP.CG nhỏ nhất và xác định giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải



Gọi AL, BM, CN là 3 trung tuyến.

(S) là đường tròn qua B, G, C.

Đường thẳng AL cắt (S) tại G và K.

Vì ΔGLC và ΔBLK đồng dạng.

Suy ra: $\frac{CG}{KB} = \frac{LC}{LK}$

Tương tự ΔBGL và ΔKCL đồng dạng

Suy ra: $\frac{BG}{CK} = \frac{BL}{KL} = \frac{CL}{KL} = \frac{GL}{BL} = \frac{AG}{BC} \Rightarrow \frac{CG}{BK} = \frac{BG}{CK} = \frac{AG}{BC}$

Điểm P nằm miền trong ΔBC. Theo bất đẳng thức Ptôlêmê ta có:

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P nằm trên (S):

Do đó: $PK.BC \leq BP.CK + CP.BK$

$\Rightarrow$ $(PK + AP).AG \leq AP.AG + BP.BG + CP.CG$

Vì $AK \leq AP + PK \Rightarrow AK.AG \leq AP.AG + BP.BG + CP.CG$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P nằm trên đoạn AK và P nằm trên (S).

Tức P ≡ G. Lúc đó GTNN bằng:

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{4}{9}\left[m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right] = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Bài toán 11.28:

Cho tam giác ABC và điểm M. Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của M sao cho $MH^2 + MI^2 + MK^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

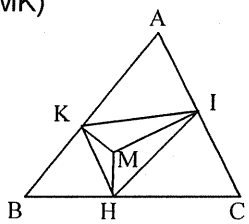
Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có:

$(a^2 + b^2 + c^2)(MH^2 + MI^2 + MK^2) \geq (aMH + bMI + cMK)^2$

$= (2S_{MBC} + 2S_{MCA} + 2S_{MAB})^2 \geq 4S_{ABC}^2$

Suy ra $MH^2 + MI^2 + MK^2 \geq \frac{4S_{ABC}^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Đẳng thức xảy ra khi M nằm trong tam giác ABC



Và $\frac{MH}{a} = \frac{MI}{b} = \frac{MK}{c}$: M là điểm Lemoine của tam giác ABC.

Bài toán 11.29:

Cho tam giác ABC có góc A = 2B, C > 90^0 và các cạnh đều là các số nguyên dương. Tìm GTNN của chu vi.

Hướng dẫn giải

Ta có A = 2B và C = $180^0 - 3B > 90^0 \Rightarrow B < 30^0$.

Theo định lý sin: $\frac{a}{\sin 2B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin 3B}$

Do đó: a = 2bcosB, c = b(3 – $4\sin^2 B$) = b($4\cos^2 B - 1$)

Nên $a^2 = b(b + c)$

Với các cạnh a, b, c nguyên dương mà chu vi bé nhất thì (a, b, c) = 1, do đó (b, c) = 1, hơn nữa:

$b = m^2$, $b + c = n^2$, a = mn với m, n nguyên dương.

Do đó: $2\cos B = \frac{m}{n}$ nên $\sqrt{3} < \frac{m}{n} < 2$.

Từ đó ta có (m, n) = (4, 7) là cặp số nguyên dương bé nhất thoả đề bài. Do đó: (a, b, c) = (28, 16, 33)

Vậy GTNN của chu vi là 77.

Bài toán 11.30:

Cho tam giác ABC và M là điểm bất kỳ thuộc miền trong của tam giác ABC. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Hãy xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Đặt S = S_{ABC}, S_1 = S_{MBC}, S_2 = S_{AMC}, S_3 = S_{ABM}

và $k = \frac{S_1S_2S_3}{(S - S_1).(S - S_2)(S - S_3)}$

Ta có: $\frac{S_1}{S} = \frac{MA_1}{AA_1}$ suy ra: $\frac{S_1}{S - S_1} = \frac{MA_1}{MA}$

Tương tự: $\frac{S_2}{S - S_2} = \frac{MB_1}{MB}$ và $\frac{S_3}{S - S_3} = \frac{MC_1}{MC}$

Vì $\frac{S_{MA_1B_1}}{S_3} = \frac{MA_1}{MA}.\frac{MB_1}{MB} \Rightarrow S_{MA_1B_1} = \frac{S_1}{S - S_1}.\frac{S_2}{S - S_2}.S_3 = k(S - S_3)$

Tương tự: $S_{MB_1C_1} = k(S - S_1)$, $S_{MA_1C_1} = k(S - S_2)$

Suy ra: $S_{A_1B_1C_1} = 2k.S$ nên $S_{A_1B_1C_1}$ lớn nhất khi k lớn nhất

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM: $\sqrt{S_1S_2} \le \frac{S_1+S_2}{2} = \frac{1}{2}(S-S_3)$

Tương tự thì: $S_1S_2S_3 \ge \frac{1}{8}(S-S_1)(S-S_2)(S-S_3) \Rightarrow k \le \frac{1}{8}$

Dấu = khi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{8}$, khi M trùng trọng tâm tam giác ABC.

Bài toán 11.31:

Trong tất cả các tứ giác lồi ABCD có chu vi bằng 1, tìm tứ giác sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$P=\frac{AB^4}{(AB+BC)^2.\sin B}+\frac{BC^4}{(BC+CD)^2.\sin C}+\frac{CA^4}{(CD+DA)^2.\sin D}+\frac{DA^4}{(DA+AB)^2.\sin A}$$

Hướng dẫn giải

Đặt AB = a, BC = b, CD = c, AD = d thì: a + b + c + d = 1

Đặt $S = \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}$

Ta chứng minh rằng $S \ge \frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{b^2-c^2}{b+c}+\frac{c^2-d^2}{c+d}+\frac{d^2-a^2}{d+a}=0$

Suy ra: $2S = \frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$

Nên $2S \ge \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)] = 1 \Leftrightarrow S \ge \frac{1}{2}$

Dấu đẳng thức khi và chỉ khi: $a = b = c = d = \frac{1}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức BCS ta được:

$$\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\right)^2 \le 4\left[\frac{a^4}{(a+b)^2}+\frac{b^4}{(b+c)^2}+\frac{c^4}{(c+d)^2}+\frac{d^4}{(d+a^2}\right]$$

Suy ra: $\frac{1}{16} \le \frac{a^4}{(a+b)^2}+\frac{b^4}{(b+c)^2}+\frac{c^4}{(c+d^2}+\frac{d^4}{(d+a)^2}$

Vì 0 < sinA; sinB; sinC ≤ 1 nên $P \ge \frac{1}{16}$

Và $P = \frac{1}{16}$ khi tứ giác ABCD là hình vuông.

Bài toán 11.32:

Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$E = \frac{a^2 \cos A}{bc} + \frac{b^2 \cos B}{ac} + \frac{a^2 \cos C}{ab}$$

Hướng dẫn giải

Giả sử rằng $A \geq B \geq C$

Do ΔABC nhọn nên $\begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \sin 2A \leq \sin 2B \leq \sin 2C \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Trêbưsep thì:

$$E = \frac{a^2 \cos A}{bc} + \frac{b^2 \cos B}{ac} + \frac{c^2 \cos C}{ab}$$

$$= \frac{1}{4S}\left(a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2C\right)$$

$$= \frac{1}{12S}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= \frac{1}{3S}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\sin A \sin B \sin C$$

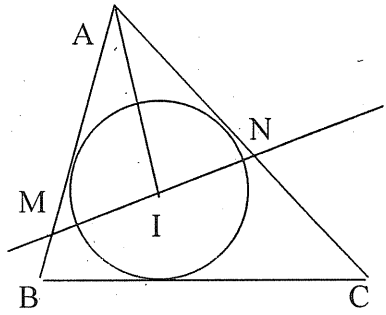
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3S} \cdot \frac{S}{2R^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) \leq \frac{3}{2}$$

Vậy $\max E = \frac{3}{2}$ khi ΔABC đều

Bài toán 11.33: Cho tam giác ABC có AB = 3; BC = 5; CA = 7. Một đường thẳng đi qua tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt cạnh AB, AC tại M, N. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{BM.CN}{AM.AN}$.

Hướng dẫn giải



Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

MN đi qua I nên $S_{IAM} + S_{IAN} = \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}.S_{ABC}$

Nên $\frac{1}{2}r.AM\frac{1}{2}r.AN = \frac{AM.AN}{AB.AC}.\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$

Hay $\frac{AB.AC}{AN} + \frac{AB.AC}{AM} = AB + BC + CA$

Hay $\frac{AB.CN}{AN} + \frac{AC.BM}{AM} = BC \Leftrightarrow \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM thì

$$1 = \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} \geq 2\sqrt{\frac{AB.CN}{BC.AN}.\frac{AC.BM}{BC.AM}}$$

Do đó $P = \frac{BM.CN}{AM.AN} \leq \frac{BC^2}{4AB.AC} = \frac{25}{84}$

Dấu = khi $\frac{AM}{BM} = \frac{14}{5}; \frac{AN}{CN} = \frac{6}{5}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 11.1: Cho tam giác ABC có cạnh a, b, c tương ứng.

Chứng minh: $\frac{aA + bB + cC}{a+b+c} \geq \frac{A+B+C}{3}$.

Hướng dẫn

BĐT$\Leftrightarrow$ (a – b)(A – B) + (b – c)(B – C) + (c–a)(C – A) ≥ 0:

Bài tập 11.2: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Hướng dẫn

Đặt x = b+c–a, y = c+ a–b, z = a+b–c,

thì x, y, z > 0 và $a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{z+x}{2}, c = \frac{x+y}{2}$.

Bài tập 11.3: Gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$.

Hướng dẫn

Đặt b + c – a = 2x, c + a – b = 2y, b + a – c = 2y thì

a = y + z, b = z + x, c = x + y và x, y, z > 0.

Bài tập 11.4: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh $\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\geq\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$.

Hướng dẫn

Đặt $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}$ thì x, y, z >0 và xyz = 1.

Bài tập 11.5: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$.

Hướng dẫn

Dùng BCS hay $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

Bài tập 11.6:

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác.Chứng minh bất đẳng thức

$a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$.

Hướng dẫn

BĐT $\Leftrightarrow$ (a + b – c) (c + a – b) (c + b – a) > 0.

Bài tập 11.7:

Cho ABCDEF là một lục giác lồi sao cho AB = BC; CD = DE; EF = FA. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn

Dùng bất đẳng thức Ptôlêmê và AM–GM

Bài tập 11.8: Cho đa giác lồi ABCDEF thoả điều kiện: AB //DE, BC // EF, CD // FA.Gọi R_A, R_C, R_E lần lượt là bán kính các vòng tròn ngoại tiếp của các tam giác FAB, BCD, DEF tương ứng; kí hiệu p là chu vi đa giác. Chứng minh rằng: $R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$.

Hướng dẫn

Sử dụng định lý sin và bất đẳng thức AM–GM

Bài tập 11.9: Cho tam giác ABC và điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Các đường phân giác trong của các góc A, B, C lần lượt cắt các cạnh đối diện tại A', B', C'. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4}<\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\frac{8}{27}$$

Hướng dẫn

Sử dụng bất đẳng thức AM–GM

Bài tập 11.10: Trên đường tròn (O; R) cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E theo thứ tự, sao cho AB = BC = DE = R. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AE. Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể có của chu vi tam giác BMN.

Hướng dẫn

Kết quả $\max P = \frac{3}{2}R(1 + \sqrt{3})$

Bài tập 11.11: Cho điểm M ở miền trong tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA và AB; gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tứ giác MB'AC', MC'BA' và MA'CB'. Hãy xác định vị trí M sao cho $f(M) = \frac{MA'.MB'.MC'}{R_1R_2R_3}$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Bài tập 11.12: Xét dạng tam giác ABC:

$$5\left(\frac{1}{AP}+\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CR}\right)-\left[\frac{3}{\min(AP,BQ,CR)}\right]=\frac{6}{r}$$

trong đó đường tròn nội tiếp (I; r) tiếp xúc với 3 cạnh AB, BC, CA lần lượt tại P, Q, R.

Hướng dẫn

$r = (p - a)\tan\frac{A}{2}$. Kết quả Tam giác ABC cân tại C

Chuyên đề 12: PHÉP BIẾN HÌNH

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phép biến hình

Phép biến hình F trong mặt phẳng là một quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy, gọi là ảnh của điểm M: F(M) = M'.

Phép dời hình

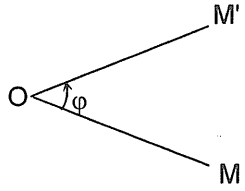
Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì. F: M $\mapsto$ M', N $\mapsto$ N' thì M'N' = MN

Định lí cơ bản: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

Các phép dời hình đặc biệt

- Phép biến hình đồng nhất I biến mỗi điểm M thành chính nó, tức là ảnh M' luôn trùng với M.
- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ cho trước, là phép biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$.
- Phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành điểm M' đối xứng với M qua d, kí hiệu là $Đ_d$.
- Phép đối xứng qua điểm O là phép biến đổi mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, kí hiệu là $Đ_O$.
- Phép quay tâm O góc quay φ, biến điểm O thành O và biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho:

$\begin{cases} OM' = OM \\ (OM, OM') = \phi \end{cases}$, kí hiệu $Q_{(O;\varphi)}$.



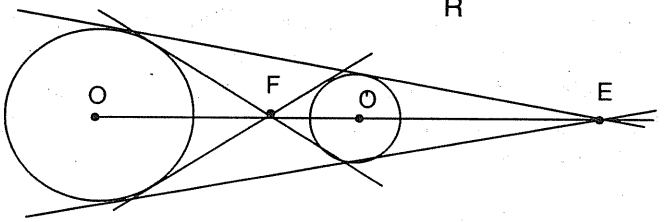
Phép đồng dạng

Phép biến hình D gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có M'N' = kMN.

Định lí cơ bản: phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài k lần, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR, biến góc thành góc bằng nó.

Phép vị tự

- Cho điểm O và một số k $\neq$ 0. Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến một điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Kí hiệu $V_{(O,k)}$.
- Nếu M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N qua phép vị tự tỉ số k thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$; M' N' = $|k|$.MN.
- Mọi phép đồng dạng D tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình F.
- Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm vị tự của 2 đường tròn không đồng tâm là 2 điểm chia trong và chia ngoài đoạn nối tâm theo tỉ k = $\pm\frac{R'}{R}$.



2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 12. 1:

Một điểm gọi là điểm bất động nếu nó trùng với ảnh của nó qua phép biến hình. Chứng minh một phép dời hình có hai điểm bất động là một phép đồng nhất hoặc là một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

Gọi F là phép dời hình có hai điểm bất động A, B: F(A) = A, F(B) = B. Lấy một điểm C không thẳng hàng với A, B và gọi C' = F(C).

Nếu C' $\equiv$ C thì F có ba điểm bất động không thẳng hàng. Giả sử F không phải là phép đồng nhất thì có một điểm M mà ảnh M' khác M ta có: AM = AM', BM = BM', CM = CM' nên A, B, C cách đều M và M' nên nằm trên trung trực của MM' do đó chúng thẳng hàng: vô lí. Vậy F là phép đồng nhất.

Nếu C' không trùng C thì AC = AC' và BC = BC' nên AB là trung trực của CC'. Khi đó F chính là phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng AB.

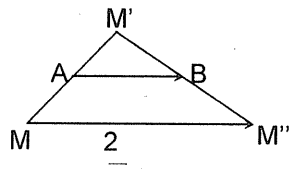
Kết quả: Nếu phép dời hình có ba điểm bất động không thẳng hàng thì phép dời hình đó là một phép đồng nhất.

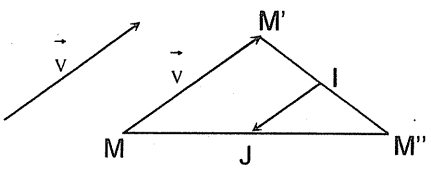
Bài toán 12. 2:

Chứng minh hợp thành của k phép đối xứng tâm là phép tịnh tiến hoặc đối xứng tâm.

Hướng dẫn giải

Ta có hợp thành của 2 phép đối xứng tâm A và B là phép tịnh tiến vec tơ $2\overrightarrow{AB}$. Do đó, hợp thành của k = 2n phép đối xứng tâm A_1, A_2,..., A_{2n} là phép tịnh tiến vectơ $2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + ... + \overrightarrow{A_{2n-1}A_n})$





Ta có hợp thành của phép tịnh tiến $\vec{V}$ và phép đối xứng tâm I là phép đối xứng tâm J sao cho $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{v}$. Do đó hợp thành của k = 2n + 1 phép đối xứng tâm $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ là phép đối xứng tâm O sao cho:

$$\overrightarrow{A_{2n+1}O} = -(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + ... + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}).$$

Bài toán 12. 3:

Chứng minh hợp thành của k phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến hay là một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

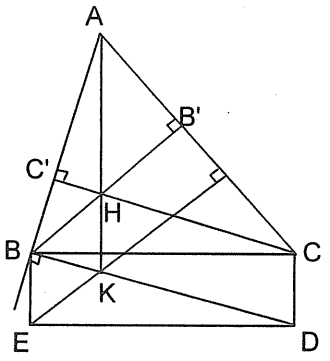
Hợp thành của hai phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến. Vì vậy, hợp thành của k =2n phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là hợp thành của n phép tịnh tiến, do đó cũng là phép tịnh tiến.

Giả sử F là hợp thành của k =2n + 1 phép đối xứng trục song song. Gọi phép đối xứng thứ nhất là $Đ_1$ có trục là đường thẳng a, 2n phép đối xứng còn lại có hợp thành là phép tịnh tiến T. Ta có thể xem T là hợp thành của hai phép đối xứng mà phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng: $Đ_{a'}$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Nhưng vì hợp thành của $Đ_{a'}$ và $Đ_a$ là phép đồng nhất e nên F chính là phép đối xứng $Đ_b$.

Bài toán 12. 4:

Cho tam giác ABC, vẽ ra ngoài hình chữ nhật BCDE. Các đường thẳng qua D và E lần lượt vuông góc với AB và AC cắt nhau tại K. Chứng minh AK vuông góc với BC.

Hướng dẫn giải



Gọi BB', CC' và H là trực tâm là hai đường cao của tam giác ABC.

Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ biến:

- BB' thành EK (vì EK // BB')
- CC' thành DK (vì DK // CC')

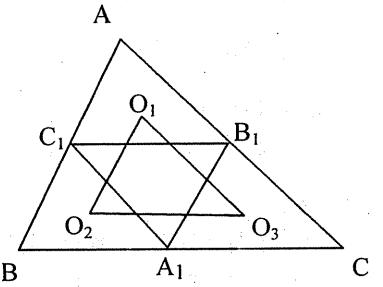
Mà BB' và CC' giao nhau tại H nên H và K là hai điểm tương ứng trong phép tịnh tiến này. Do đó HK // BE nên HK ⊥ BC.

Mà AH ⊥ BC, vậy A, H, K thẳng hàng, nghĩa là AK vuông góc với đường thẳng BC.

Bài toán 12. 5:

Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 là các trung điểm của ba cạnh BC, CA, AB. Gọi O_1, O_2, O_3 và I_1, I_2, I_3 tương ứng là các tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ba tam giác AB_1C_1, BC_1A_1 và CA_1B. Chứng minh $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$.

Hướng dẫn giải



Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ biến A thành C_1, C_1 thành B, B_1 thành A_1 nên tam giác AC_1B_1 thành tam giác C_1BA_1, do đó O_1 thành O_2 và I_1 thành I_2 nên $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{I_1I_2}$

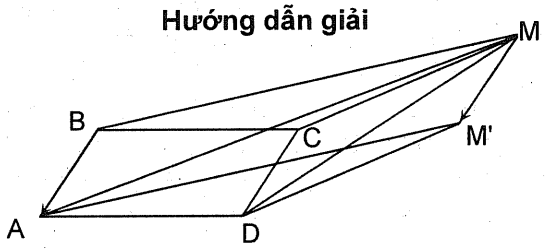
Tương tự $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{I_2I_3}$ và $\overrightarrow{O_3O_1} = \overrightarrow{I_3I_1}$

$\Rightarrow \Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ (c.c.c).

Bài toán 12. 6:

Cho hình bình hành ABCD và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD. Giả sử $MBC = MDC$. Chứng minh $AMD = BMC$

Hướng dẫn giải



Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ biến B thành A, C thành D, MC thành M'D nên DCMM' là hình bình hành, do đó $MDC = DMM'$ và $MBC = M'AD$

Mà $MBC = MDC$ nên $DMM' = M'\hat{A}D$.

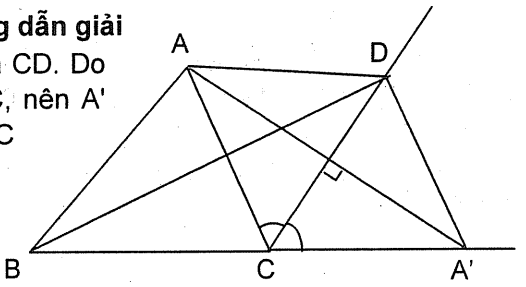
Do đó AMM'D là tứ giác nội tiếp nên $AMD = AM'D$

Hơn nữa, ta có: $BMC = A'MD$ nên $AMD = BMC$.

Bài toán 12. 7:

Cho tam giác ABC. Trên đường phân giác ngoài của góc C lấy một điểm D khác với C. Chứng minh: DA + DB > CA + CB.

Hướng dẫn giải



Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CD. Do CD là phân giác ngoài của góc C, nên A' thuộc tia đối của tia CB và A'C = AC

Ta có: DA + DB = DA' + DB > BA'

(do $D \notin BA'$)

Mà BA' = CB + CA' = CB + CA.

Do đó DA + DB > CA + CB.

Bài toán 12. 8:

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, BC và CA. Với một điểm M bất kì, lấy M_1 đối xứng với M qua d_1, M_2 đối xứng với M_1 qua d_2 và M_3 đối xứng với M_2 qua d_2. Chứng minh rằng trung trực của đoạn thẳng MM_3 là một đường thẳng cố định.

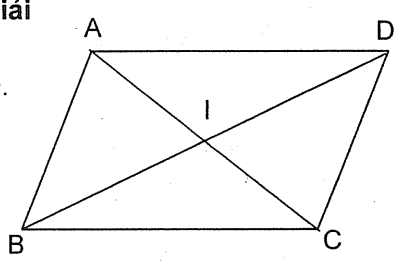
Hướng dẫn giải

Vì phép đối xứng qua đường thẳng không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm nên ta có $AM = BM_1 = CM_2 = AM_3$ và $OM = OM_1 = OM_2 = OM_3$. Do đó hai điểm A và O cách đều hai điểm M và M_3. Vậy trung trực của đoạn thẳng MM_3 chính là đường thẳng cố định OA.

Bài toán 12. 9:

Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì đó là hình bình hành.

Hướng dẫn giải



Giả sử tứ giác ABCD có tâm đối xứng là I.

Đỉnh A chỉ có thể biến thành A, B, C hay D.

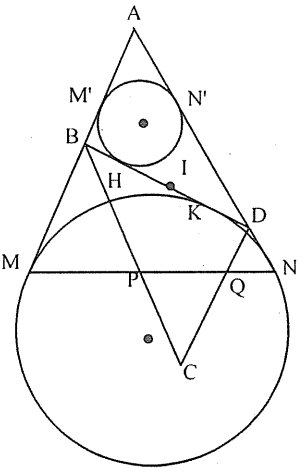
- Nếu đỉnh A biến thành chính nó thì A là tâm đối xứng của tứ giác: vô lí.
- Nếu A biến thành B hoặc D thì tâm đối xứng thuộc các cạnh AB hoặc AD của tứ giác: vô lí.

Vậy A chỉ có thể biến thành đỉnh C.Lí luận tương tự đỉnh B chỉ có thể biến thành đỉnh D. Khi đó tâm đối xứng I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác ABCD phải là hình bình hành.

Bài toán 12. 10:

Cho hình bình hành ABCD và đường tròn (C) bàng tiếp của tam giác ABD, tiếp xúc với phần kéo dài của AB và AD tương ứng tại các điểm M và N. Đoạn thẳng MN cắt BC và DC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với các cạnh BC và DC tại P và Q.

Hướng dẫn giải



Gọi K là tiếp điểm của (C) với BD; (V) là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với AB tại M', với AD tại N' và BD tại H; gọi I là trung điểm của BD.

Từ MM' = NN' và MM' = BH + BK,

NN' = DK + DH suy ra BH = DK.

Phép đối xứng $Đ_I$: $B \mapsto D$, $H \mapsto K$.

Tam giác AMN cân tại A và vì DQ // AM

Nên tam giác DQN cân tại D

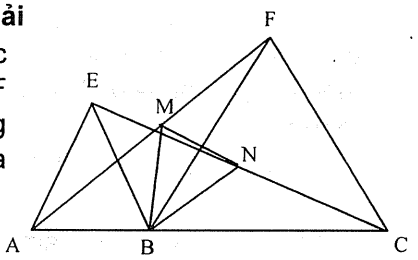
Suy ra DQ = DN = DK = BH = BM'.

Do đó, Q là ảnh của M' trong phép $Đ_I$. Tương tự, P là ảnh của N' trong phép $Đ_I$, phép $Đ_I$: (V) $\mapsto$ (V') đi qua 3 điểm K, Q, P. Vì M', N', H là các điểm chung duy nhất của (V) với AB, AD và BC, do đó K, Q, P cũng là điểm chung duy nhất của (V') với BC, CD, CB suy ra đpcm.

Bài toán 12. 11:

Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC. Chứng minh tam giác BMN đều.

Hướng dẫn giải



Phép quay tâm B góc quay 60^o biến các điểm E, C lần lượt thành các điểm A, F biến đoạn EC thành AF nên biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF, do đó BN = BM và (BN, BM) = 60^o.

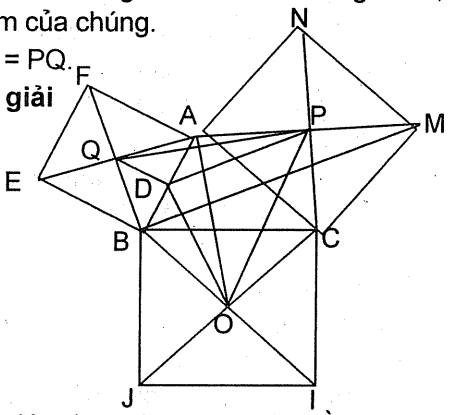
Vậy tam giác BMN đều.

Bài toán 12. 12:

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm của chúng.

Chứng minh AO vuông góc với PQ và AO = PQ.

Hướng dẫn giải



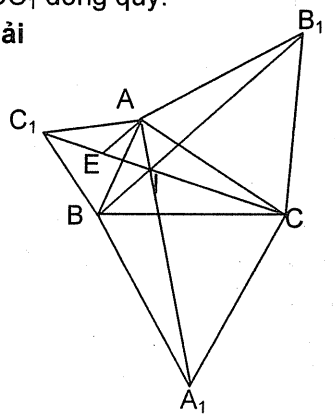
Gọi D là trung điểm AB thì phép quay tâm C góc 90^o biến MB thành AI, suy ra tam giác DPO vuông cân tại D.

Phép quay tâm D, góc 90^o biến O thành P, biến A thành Q. Do đó OQ = PQ và AO vuông góc với PQ.

Bài toán 12. 13:

Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Hướng dẫn giải



Gọi $I = AA_1 \cap CC_1$.

Phép quay tâm B góc 60^o biến A_1 thành C, biến A thành C_1, biến A_1A thành CC_1, do đó $AIC_1 = 60^o$.

Lấy trên CC_1 điểm E sao cho IE = IA thì tam giác EIA đều.

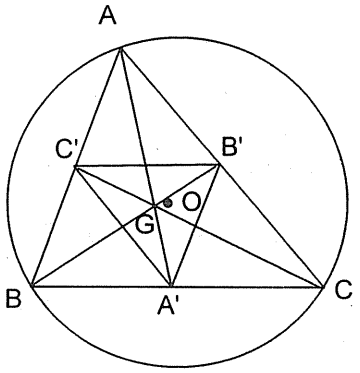
Phép quay tâm A góc 60^o biến C_1 thành B, biến E thành I, C thành B_1 và vì C_1, E, C thẳng hàng nên B, I, B_1 thẳng hàng.

Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại I.

Bài toán 12. 14:

Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ và ba điểm G, H, O cùng nằm trên một đường thẳng (gọi là đường thẳng O'–le).

Hướng dẫn giải



Ta có OA' ⊥ BC mà BC // B'C' nên OA' ⊥ B'C'. Tương tự OB' ⊥ A'C'. Vậy O là trực tâm của tam giác A'B'C'.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$.

Do đó phép vị tự V tâm G, tỉ số – 2 biến tam giác A'B'C' thành tam giác ABC. Điểm O là trực tâm của tam giác A'B'C' nên phép vị tự V biến O thành trực tâm H của tam giác ABC.

Do đó $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ nên ba điểm G, H, O thẳng hàng.

Bài toán 12. 15:

Chứng minh hợp thành F của hai phép vị tự V_1 có tâm O_1 tỉ số k_1 và V_2 có tâm O_2 tỉ số k_2 là phép tịnh tiến hay phép vị tự.

Hướng dẫn giải

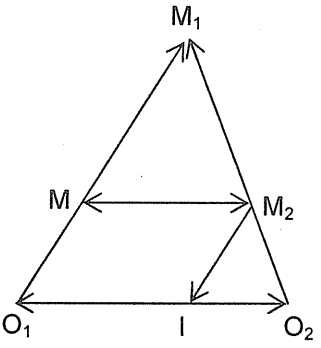
Lấy một điểm M bất kì, nếu V_1 biến M thành M_1 và V_2 biến M_1 thành M_2 thì:

$\overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$ và $\overrightarrow{O_2M_2} = k_1\overrightarrow{O_2M_1}$

Khi đó, phép hợp thành F biến M thành M_2.

Gọi I là ảnh của O_1 qua phép vị tự V_2, tức là:

$\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$



Khi đó: $\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$

– Nếu $k_1.k_2 = 1$ thì $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M}$ nên

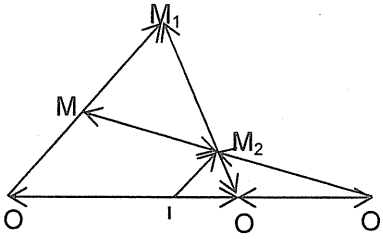
$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$: xác định.

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$

– Nếu $k_1.k_2 \neq 1$ ta chọn điểm O_3 sao cho: $\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

Khi đó: $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2}$

$= k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = k_1k_2\overrightarrow{O_3M}$



Vậy F là phép vị tự tâm O_3 tỉ số k_1k_2.

Tâm O_3 của phép vị tự đó được xác định bởi đẳng thức

$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

hay $\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

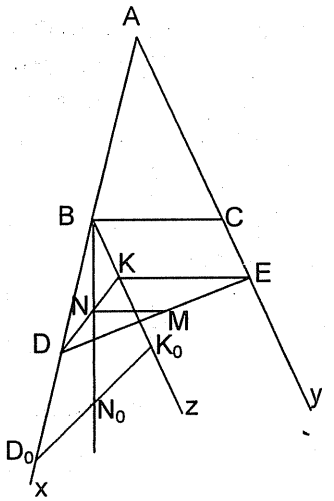
Suy ra $\overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = (1 - k_1k_2)\overrightarrow{O_1O_3}$ nên: $\overrightarrow{O_1O_3} = \dfrac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$

Do đó tâm của ba phép vị tự V_1, V_2 và F là ba điểm thẳng hàng.

Bài toán 12. 16:

Cho tam giác ABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là các tia đối của các tia BA, CA. Các điểm D, E thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy. Tìm tập hợp các trung điểm M của DE biết BD = 2CE.

Hướng dẫn giải



Vẽ hình bình hành BCEK, ta có K ở trên tia Bz cố định song song cùng chiều với tia Cy. Trên hai tia Bx, Bz lần lượt lấy hai điểm cố định D_o, K_o sao cho $BD_o = 2BK_o$.

Vì BD = 2CE = 2BK nên BK // D_oK_o.

Gọi N và N_o tương ứng là trung điểm của DK và DK_o. Ta có N_o cố định và tập hợp của N là tia BN_o.

Gọi I là trung điểm của BC:

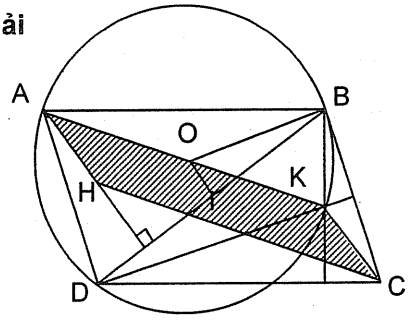
$\overrightarrow{NM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{KE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$

Nên $T_{\overrightarrow{BI}}$ biến N thành M. Vậy tập hợp của M là tia Im là ảnh của tia BN_o qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BI}}$ theo vectơ $\overrightarrow{BI}$.

Bài toán 12. 17:

Cho hình bình hành ABCD có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng 2a, còn A, B, D nằm trên một đường tròn cố định tâm O, bán kính R. Tìm tập hợp đỉnh C.

Hướng dẫn giải



AO kéo dài cắt đường tròn ở K, nên K cố định. Gọi H là trực tâm tam giác ABD, I là trung điểm của BD. Từ đó suy ra:

$AH = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$: không đổi nên suy ra H nằm trên đường tròn tâm A, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Do $\widehat{ABK} = \widehat{ADK} = 90^\circ$, mà AB // DC, AD // BC

$\Rightarrow$ BK $\perp$ DC và DK $\perp$ BC nên K là trực tâm tam giác BDC

$\Rightarrow$ CK $\perp$ DB $\Rightarrow$ CK // AH. Trong tam giác ACK, do OI là đường trung bình, nên KC = 2OI $\Rightarrow$ KC = AH $\Rightarrow$ AHKC là hình bình hành

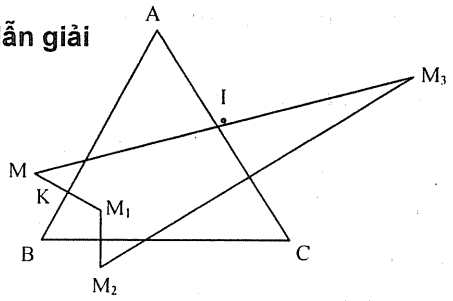
$\Rightarrow \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AK}$: xác định nên phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AK}$ biến H thành C, biến A thành K.

Vậy tập hợp của C là đường tròn tâm K, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Bài toán 12. 18:

Cho tam giác đều ABC. Với một điểm M tuỳ ý gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua đường thẳng AB, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua đường thẳng BC và M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua đường thẳng CA. Tìm tập hợp trung điểm I của MM_3.

Hướng dẫn giải



Gọi M' là điểm đối xứng của M qua BC, K là trung điểm của MM_1 (K $\in$ AB) và K' là trung điểm của $M'M_2$. Khi đó phép đối xứng qua đường thẳng BC sẽ biến M thành M', M_1 thành M_2 nên cũng biến K thành K' tức là biến BK thành BK'.

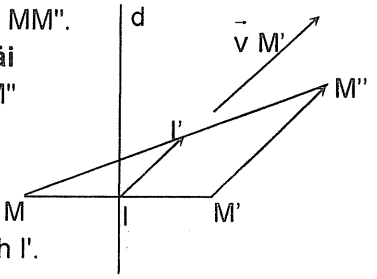
Suy ra góc hợp bởi BK' và BC cũng bằng 60° hay BK' // AC. Vì M'M_2 $\perp$ BK', M_2M_3 $\perp$ AC, suy ra ba điểm M', M_2, M_3 thẳng hàng. Nếu ta gọi H' là trung điểm M_2M_3 (H' $\in$ AC) thì $\overrightarrow{M'M_3} = 2\overrightarrow{K'H'} = 2\overrightarrow{BH}$ với BH là đường cao của tam giác ABC.

Nếu gọi P là trung điểm MM' (P $\in$ BC) và I là trung điểm MM_3 thì $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M_3} = \overrightarrow{BH}$. Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BH}$ sẽ biến điểm P thành I, vì P $\in$ BC nên tập hợp I chính là ảnh của đường thẳng BC qua phép tịnh tiến nói trên. Tập hợp này là đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh AB và AC.

Bài toán 12. 19:

Cho một đường thẳng d và một vectơ $\vec{v}$ cố định. Với mỗi điểm M bất kì, phép đối xứng trục $Đ_d$ biến M thành M', và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến M' thành M". Tìm tập hợp trung điểm của đoạn thẳng MM".

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm MM', I' là trung điểm MM"

thì $\vec{I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M''} = \frac{\vec{v}}{2}$.

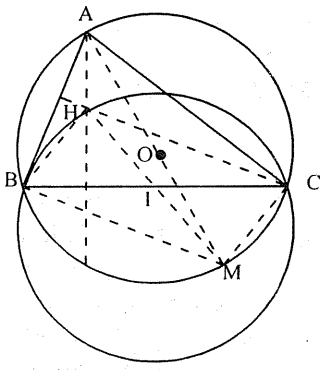
Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$ biến I thành I'.

Vì I nằm trên d nên tập hợp I' là đường thẳng d', ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{\vec{v}}{2}$.

Bài toán 12. 20:

Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Tìm tập hợp các trực tâm H của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Vẽ đường kính AM của đường tròn thì có BH // MC và CH // MB nên BHCM là hình bình hành. Nếu gọi I là trung điểm của BC thì I cố định và cũng là trung điểm của MH.

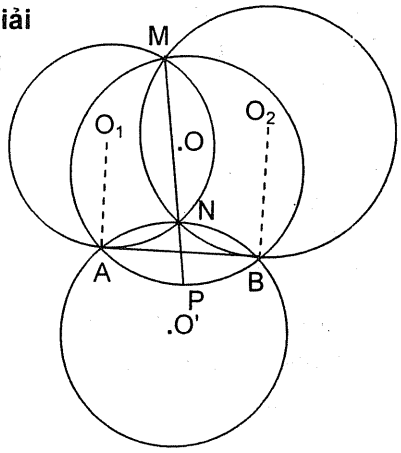
Vậy phép đối xứng qua điểm I biến M thành H.

Vậy tập hợp là đường tròn là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng tâm I.

Bài toán 12. 21:

Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn (O_1), (O_2) qua M theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm tập hợp các điểm N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2).

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

$IA^2 = IM \cdot IN = IB^2 \Rightarrow IA = IB$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của AB cố định.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với (O) ta có: $IA^2 = IA.IB = IM.IP$

$\Rightarrow$ IN = IP nên I là trung điểm của PN, do đó phép đối xứng tâm I biến P thành N.

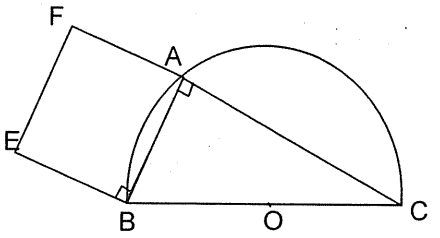
Vì tập hợp điểm P là đường tròn (O) nên tập hợp N là đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I, bỏ đi hai điểm A và B.

Bài toán 12. 22:

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông ABEF. Chứng minh rằng E chạy trên một nửa đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải

Ta có E là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc 90^o. Khi A chạy trên nửa đường tròn (O), E sẽ chạy trên nửa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép quay tâm B, góc 90^o.



Bài toán 12. 23:

Một điểm M lưu động trên cung AB lớn của đường tròn (O), với A, B là hai điểm cố định trên đường tròn này. Trên đoạn BM lấy điểm N sao cho BN = AM. Tìm tập hợp điểm N.

Hướng dẫn giải

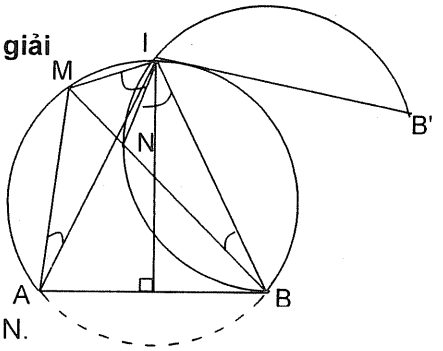
Đường trung trực của cung AB cắt cung AB lớn tại I cố định.

Ta có hai tam giác IMA và INB bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow$ IN = IM và $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN})$

$= (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \varphi$: không đổi

nên phép quay tâm I góc φ biến M thành N.



Vậy tập hợp điểm N là cung BIB' ảnh của cung AIB qua phép quay tâm I góc φ.

Bài toán 12. 24:

Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm qũy tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

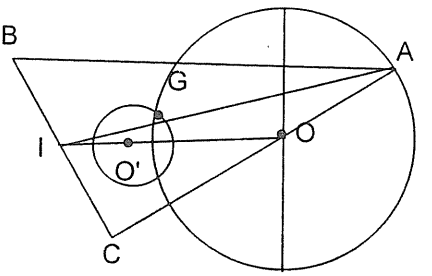
Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Do đó phép vị tự V tâm tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G. Từ đó suy ra khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì tập hợp G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn (O'; R')

mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3}R$.



Bài toán 12. 25:

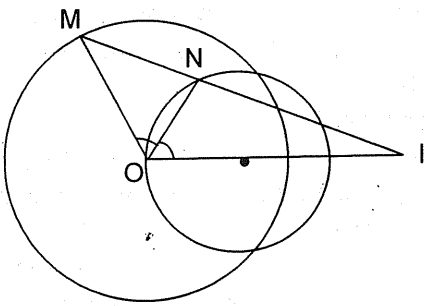
Cho đường tròn (O; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm tập hợp điểm N.

Hướng dẫn giải

Đặt IO = d. Ta có $\frac{IN}{NM} = \frac{IO}{OM} = \frac{d}{R}$

$\Rightarrow \frac{IN}{IN+NM} = \frac{d}{d+R} \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{d}{d+R}$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{IN} = \frac{d}{d+R}\overrightarrow{IM}$.



Do đó phép vị tự V tâm I tỉ số $k = \frac{d}{d+R}$ biến điểm M thành điểm N. Khi M ở vị trí M_o trên đường tròn (O; R) sao cho $I\hat{O}M_o = 0^o$ thì tia phân giác của góc $I\hat{O}M_o$ không cắt IM. Điểm N không tồn tại.

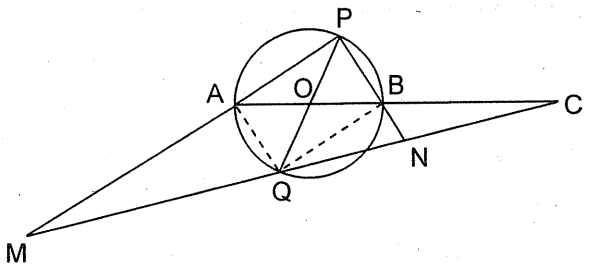
Vậy khi M chạy trên (O; R) (M khác M_o) thì tập hợp điểm N là ảnh của (O; R) qua phép vị tự V bỏ đi ảnh của điểm M_o.

Bài toán 12. 26:

Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N. Tìm tập hợp các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

Hướng dẫn giải

Ta có QB // AP (vì cùng vuông góc với PB) và B là trung điểm của AC nên Q là trung điểm của CM. Tương tự ta có AQ // BN (vì cùng vuông góc với AP) và B là trung điểm của AC nên N là trung điểm của CQ.



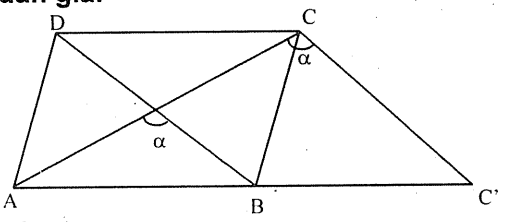
Ta có $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ}$ nên phép vị tự V tâm C tỉ số 2 biến Q thành M. Vì Q chạy trên đường tròn (O) trừ hai điểm A, B nên tập hợp M là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V trừ 2 ảnh của A, B.

Tương tự $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$ nên tập hợp N là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự V' tâm C, tỉ số $\frac{1}{2}$ trừ 2 ảnh của A, B.

Bài toán 12. 27:

Dựng hình bình hành cho biết hai cạnh liên tiếp và góc tạo bởi hai đường chéo.

Hướng dẫn giải



- Phân tích: Giả sử ABCD là hình bình hành đã dựng được có AB = a, BC = b và (AC, BD) = α. Gọi C' là ảnh của B trong phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.

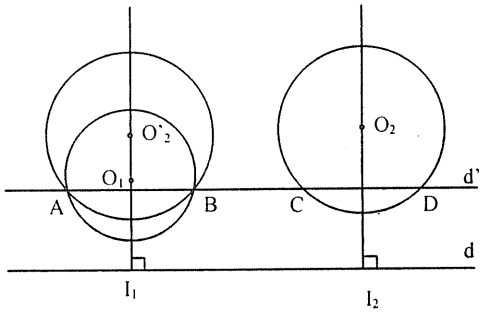
  Trong tam giác ACC' ta biết AC' = 2a, BC = b là trung tuyến kẻ từ C và AC'C = α.
- Dựng hình: Dựng AC' = 2a, trung điểm B của AC', cung chứa góc α trên dây AC', cung tròn tâm B, bán kính b. Gọi C là điểm chung của hai cung tròn đã dựng. Dựng D là ảnh của C trong phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.
- Chứng minh: Theo cách dựng thì ABCD là hình bình hành thảo mãn đề bài.
- Biện luận: Bài toán có số nghiệm là số điểm chung của hai cung tròn.

Bài toán 12. 28:

Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và một đường thẳng d. Dựng một đường thẳng d' // d sao cho d' cắt (O_1) và (O_2) theo hai dây cung bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử đã dựng được đường thẳng d' song song với d, cắt (O_1) tại A, B và cắt (O_2) tại C, D thoả mãn: AB = CD.Gọi I_1 và I_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc với O_1O_2 trên d. Gọi (O'_2) là ảnh của (O_2) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{I_2I_1}}$.



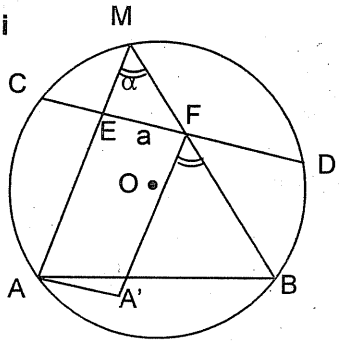
Do AB = CD $\Rightarrow$ AC = BD = I_1I_2 nên phép tịnh tiến đó biến C thành A, D thành B, do đó (O'_2) cắt (O_1) tại A và B. Từ đó suy ra cách dựng.

Dựng (O'_2) là ảnh của (O_2) qua $T_{\overrightarrow{I_2I_1}}$. Gọi A, B là các giao điểm của (O'_2) và (O_1) thì đường thẳng d' đi qua A, B sẽ là đường thẳng cần dựng.

Bài toán 12. 29:

Cho AB và CD là hai dây không cắt nhau của đường tròn (O). Với một điểm M nằm trên đường tròn, gọi E và F theo thứ tự là giao điểm của MA và MB với CD. Xác định điểm M để EF có độ dài bằng a cho trước.

Hướng dẫn giải



Ta có $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$ xác định.

Giả sử đã dựng được điểm M.

Gọi A' = $T_{\vec{a}}$ (A) thì MA // FA'

nên A'FB = AMB = α: không đổi.

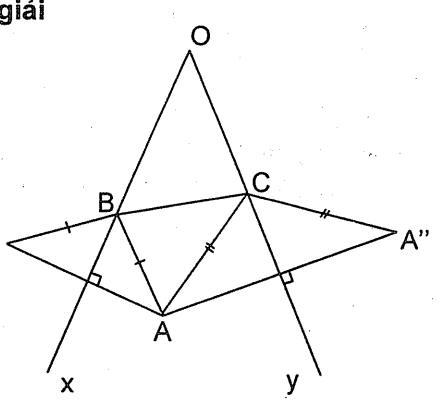
Do đó, F là giao điểm của CD với cung chứa góc α nhìn bởi đoạn A'B. Từ đó suy ra cách dựng.

Dựng ảnh của A qua $T_{\vec{a}}$ là A'. Dựng cung chứa góc α trên dây A'B. Dựng giao điểm F của CD với cung đó, thì M là giao điểm của BF với (O).

Bài toán 12. 30:

Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Xét tam giác ABC có B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy. Gọi A' và A" là các điểm đối xứng với điểm A lần lượt qua các đường thẳng Ox và Oy. Chu vi của tam giác ABC là:

AB + BC + CA = A'B +BC + CA" ≥ A'A". Dấu "=" xảy ra khi bốn điểm A', B, C, A" thẳng hàng. Vậy chu vi tam giác ABC bé nhất khi lấy B và C lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng A'A" với hai tia của góc nhọn xOy.

Vì góc xOy nhọn tồn tại các giao điểm B và C.

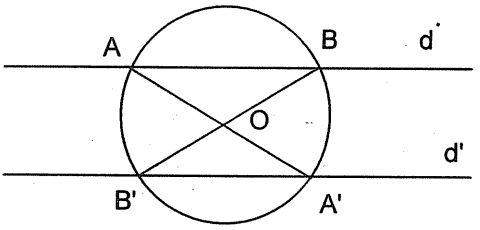
Bài toán 12. 31:

Cho phép đối xứng tâm $Đ_o$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_o$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

Hướng dẫn giải

Dựng đường tròn (O; R) sao cho nó cắt d tại hai điểm phân biệt A, B. Dựng các đường thẳng AO và BO, chúng cắt đường tròn đó lần lượt tại A' và B'.

Dựng đường thẳng d' đi qua A' và B'. Phép dựng trên đây sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.



Bài toán 12. 32:

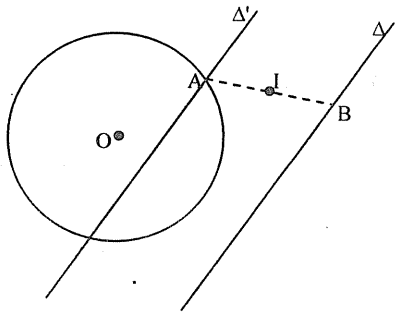
Cho đường tròn (O; R), đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Giả sử có điểm A trên đường tròn (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm AB. Phép đối xứng tâm $Đ_1$ biến B thành A nên biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' đi qua A.

Mặt khác A lại nằm trên (O; R) nên A phải là giao điểm của Δ' và (O; R). Suy ra cách dựng:

Dựng đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_1$. Lấy A là giao điểm của Δ' và (O; R), còn B là giao điểm của đường thẳng AI và đường thẳng Δ.



Số nghiệm hình là số giao điểm của Δ' và (O; R).

Bài toán 12. 33:

Cho 5 điểm P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Dựng một hình ngũ giác ABCDE sao cho trung điểm các cạnh AB,BC, CD, DE và EA lần lượt là P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

Hướng dẫn giải

Giả sử đã dựng được ngũ giác ABCDE theo yêu cầu. Lấy một điểm A' tuỳ ý, và gọi B' là điểm đối xứng của A' qua P_1, C là điểm đối xứng của B' qua P_2, D' là điểm đối xứng của C' qua P_3, E' là điểm đối xứng của D' qua P_4 và A" là điểm đối xứng của E' qua P_5.

Khi đó $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{P_1A'} - \overrightarrow{P_1A} = -\overrightarrow{P_1B'} + \overrightarrow{P_1B} = -\overrightarrow{BB'}$

Tương tự $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{DD'} = -\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{EE'} = -\overrightarrow{AA'}$

Do đó $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA''}$ nên A là trung điểm của A'A".

Từ đó suy ra cách dựng: Lấy một điểm A' bất kì, rồi dựng các điểm B', C', D', E', A" như trên. Cuối cùng dựng trung điểm A của đoạn thẳng A'A", thì A là một đỉnh của ngũ giác cần tìm. Các đỉnh còn lại dựng dễ dàng.

Bài toán có một nghiệm hình duy nhất. Thật vậy nếu có hai ngũ giác ABCDE và A'B'C'D'E' cùng thoả mãn điều kiện của bài toán thì lập luận như trên ta có $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA'}$ nên $\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$ tức là A trùng với A', và do đó B, C, D, E lần lượt trùng với B', C', D', E'.

Bài toán 12. 34:

Cho hai đường thẳng a, b song song và một điểm G không nằm trên chúng. Xác định tam giác đều ABC có $A \in a$, $B \in c$ và G là trọng tâm của tam giác đó.

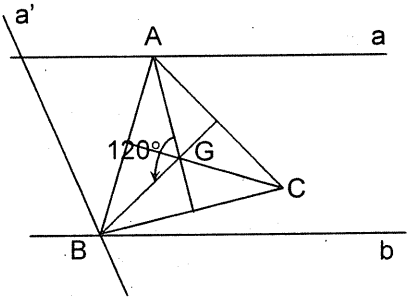
Hướng dẫn giải

Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn các điều kiện

Ta có: GA = GB = GC và

$AGB = BGC = CGA = 120^o$, do đó trong phép quay Q tâm G góc 120^o biến A thành B, biến a thành a' nên:

$B = b \cap a'$.



Từ đó suy ra cách dựng:

Dựng: a' là ảnh của a qua phép Q và $B = b \cap a'$. Các đỉnh A, C là ảnh của B qua phép quay tâm G, góc $\pm 120^o$.

Bài toán luôn có hai nghiệm hình, góc quay $\pm 120^o$.

Bài toán 12. 35:

Cho tam giác ABC, có góc $A = \varphi$, và một điểm M nằm trên cạnh AB. Dựng trên các đường thẳng BC, CA các điểm N, P tương ứng sao cho MP = MN và đường tròn đi qua A, M, P tiếp xúc với MN.

Hướng dẫn giải

Giả sử đã dựng được hai điểm:

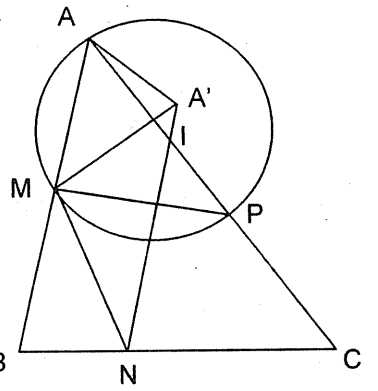
$N \in BC$, $P \in AC$ thoả mãn các điều kiện.

Ta có $NMP = MAP = \varphi$,

MP = MN nên phép quay Q tâm M, góc φ biến A thành A', PA thành NA'. Gọi $A'N \cap AC = I$.

Ta có $NIC = (PA, NA') = \varphi \Rightarrow NIC = B\hat{A}C$

$\Rightarrow IN // AB$.



Từ đó suy ra cách dựng như sau:

Phép quay tâm M, góc φ biến A thành A'. Vẽ $A'N // AB$, $N \in BC$.

Dựng tia MP cắt AC tại P sao cho $NMP = \varphi$ thì N và P là các điểm cần tìm.

Bài toán có một nghiệm duy nhất.

Bài toán 12. 36:

Tam giác ABC có BC = a, AC = b, C = φ ($\varphi < 120^o$). Tìm điểm M trong mặt phẳng sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất của tổng đó.

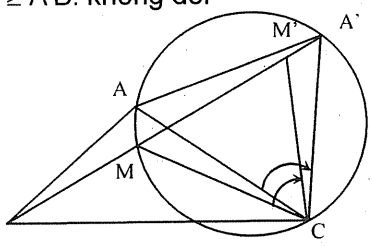
Hướng dẫn giải

Thực hiện phép quay: $Q_{(C;-60^o)}$: M $\mapsto$ M', A $\mapsto$ A' , thì MA = M'A'. Tam giác CMM' đều, nên MM' = CM.

Do đó: MA + MB + MC = BM + MM' + M'A' $\geq$ A'B: không đổi

Theo định lí hàm số cosin trong tam giác A'BC:

$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi + 60^o)$.



Độ dài đường gấp khúc BMM'A' ngắn nhất khi M và M' nằm trên BA', do đó CMA' = CÂA' = 60^o nên thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACA'.

Vậy điểm M cần tìm là giao của đường thẳng BA' và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACA'. Độ dài ngắn nhất của tổng là:

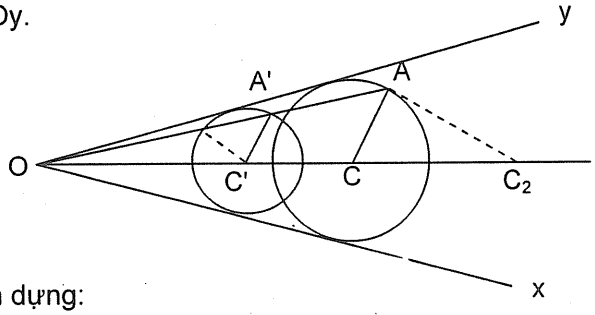
$$MA + MB + MC = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\varphi + 60^o).$$

Bài toán 12. 37:

Dựng một đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Ox, Oy cho sẵn và đi qua một điểm cố định A cho sẵn ở trong góc xOy.

Hướng dẫn giải

Phân tích, giả sử dựng được đường tròn (C) đi qua A và tiếp xúc với Ox, Oy, phép vị tự tâm O biến (C) thành (C') chỉ thoả 2 điều kiện tiếp xúc với Ox, Oy.



Cách dựng:

Dựng đường tròn (C') tuỳ ý tiếp xúc với Ox và Oy.Dựng OA cắt (C') tại A'.Dựng giao điểm A của đường thẳng OA' với đường thẳng qua C, song song C'A'. Đường tròn tâm C, bán kính CA là đường tròn phải dựng.

Chứng minh: Đường tròn tâm C, bán kính CA đi qua A là ảnh của đường tròn (C') trong phép vị tự nên tiếp xúc với Ox, Oy, tâm O tỉ k = $\frac{CA}{CA'}$.

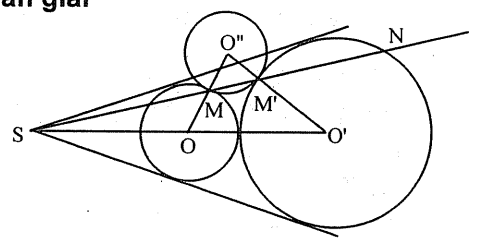
Biện luận: Đường thẳng OA cắt (C) tại 2 điểm A'_1, A'_2 nên bài toán có 2 nghiệm hình.

Bài toán 12. 38:

Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau và một điểm M trên (O). Dựng một đường tròn đi qua M và tiếp xúc với cả hai đường tròn (O) và (O').

Hướng dẫn giải

Gọi S là tâm vị tự ngoài của (O) và (O'). Gọi N là ảnh của M qua phép vị tự tâm S biến (O) thành (O'). Đường thẳng SN cắt (O') tại điểm thứ hai M'. Gọi O" là giao điểm của OM và O'M'.



Ta có OM // O'N $\Rightarrow \frac{O"M}{O'N} = \frac{O"M'}{M'O'}$ vì O'N = O'M' nên O"M = O"M'.

Vậy đường tròn O" bán kính O"M tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với (O') tại M' là tâm cần dựng.

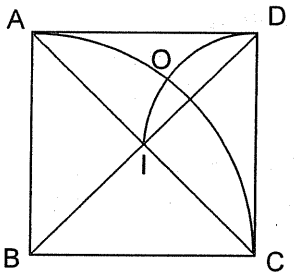
Bài toán 12. 39:

Cho hình vuông ABCD tâm I có các đỉnh A, B, C, D quay theo chiều dương. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải

Tỉ đồng dạng là $k = \frac{CD}{AI} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

Gọi O là giao điểm 2 cung chứa góc $\frac{3\pi}{4}$ dựng trên dây AC và ID.



Hợp thành của phép quay tâm O, góc quay $\frac{3\pi}{4}$ và phép vị tự tâm O tỉ k = $\sqrt{2}$ biến A thành C, I thành D nên chính là phép đồng dạng cần tìm biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

Bài toán 12. 40:

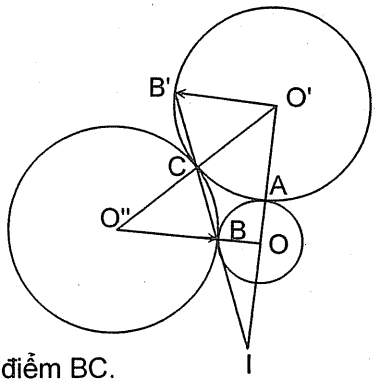
Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O") thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Kéo dài BC cắt (O') tại B'. Vì C là tâm vị tự trong của (O') và (O') nên hai vectơ $\overrightarrow{O'B'}$ và $\overrightarrow{O"B}$ ngược hướng.

Vì B là tâm vị tự trong của (O) và (O") nên hai vectơ $\overrightarrow{O"B}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{O'B'}$ cùng hướng.

Vậy đường thẳng BB', cũng chính là đường thẳng BC, luôn luôn đi qua điểm cố định là tâm vị tự ngoài I của (O) và (O').



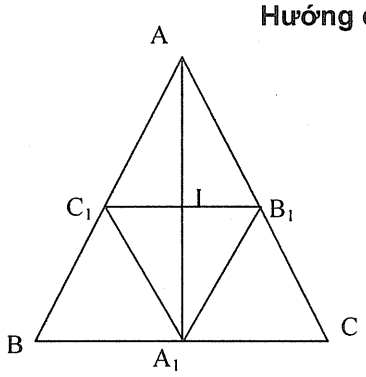
Bài toán 12. 41:

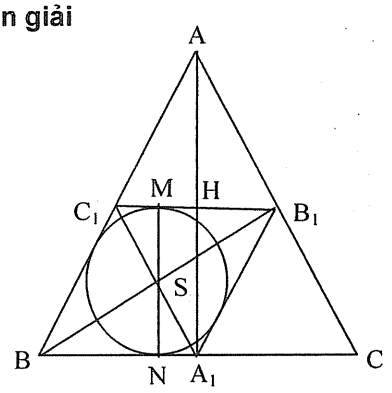
Cho tam giác ABC cân đỉnh A, A_1 là trung điểm BC.

a) Chứng minh tồn tại duy nhất cặp điểm B_1, C_1 thoả các điều kiện: B_1 thuộc đoạn AC, C_1 thuộc đoạn AB và $BC_1 + A_1B_1 = BA_1 + B_1C_1$.

b) Chứng minh khi đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng hai lần bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Hướng dẫn giải





a) Đặt BC= 2, $A_1B_1 = A_1C_1 = y$, $IC_1 = IB_1 = x$, AB= AC = b (b > 1)

$\Rightarrow BC_1 = b(1 - x)$, $AC_1 = bx$. Ta có:

$y^2 = 1 + b^2 (1 - x)^2 - 2b(1 - x)\cos C = 1 + b^2(1-x)^2 - 2(1-x)$

Mà $y = BC_1 = 1 + 2x \Rightarrow y^2 = [(1 + 2x - b(1 - x)]^2$

Do đó: $[1 + 2x - b(1 - x)]^2 = 1 + b^2(1 - x)^2 - 2(1 - x)$

$\Rightarrow 2(1 + b)x^2 - (b - 1)x - (b - 1) = 0$ $(0 < x < 1)$

Đặt $f(x) = 2(1 + b)x^2 - (b - 1)x - (b - 1)$. Ta có: $f(0) < 0 < f(1)$ và f(x) là tam thức bậc hai nên tồn tại duy nhất $x \in (0; 1)$ để $f(x) = 0$.

b) Từ câu a) thì tứ giác $BC_1B_1A_1$ ngoại tiếp được đường tròn (I_0, r_0). Ta gọi M, N là các tiếp điểm của đường tròn (I_0, r_0) với B_1C_1 và BA_1. Do đó: BB_1, C_1A_1, MN đồng quy tại S.

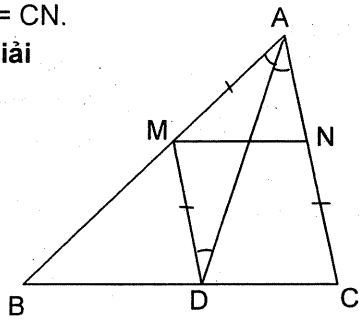
Gọi (I_1, r_1) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Xét các phép vị tự $V_{(B,k1)}$ biến đường tròn (I_0, r_0) thành đường tròn (I, r), $k_1 = \frac{r}{r_0} = \frac{BA_1}{BN}$. Ta có: $\frac{BA_1}{BN} = \frac{B_1C_1}{B_1M} = \frac{2B_1H}{B_1M}$ và qua $V_{(B, k2)}$ biến (I_1, r_1) thành (I_0, r_0), $k_2 = \frac{r_0}{r_1} = \frac{B_1M}{B_1H}$. Từ đó $r = 2r_1$.

Bài toán 12. 42:

Cho tam giác ABC. Tìm một điểm M trên cạnh AB và một điểm N trên cạnh AC sao cho MN song song với BC và AM = CN.

Hướng dẫn giải



Giả sử đã dựng được hai điểm M, N thoả mãn điều kiện đầu bài. Đường thẳng qua M và song song với AC cắt BC tại D thì tứ giác MNCD là hình bình hành. Do đó CN = DM nên tam giác AMD cân tại M.

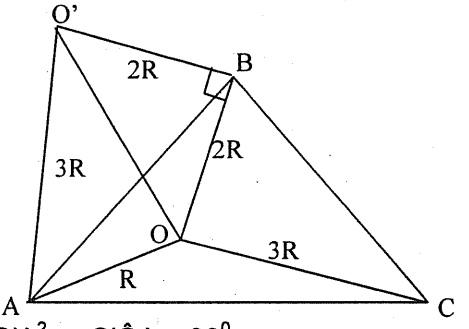
Ta có MÂD = MDA = DÂC nên AD là phân giác trong của góc A và $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD}$ nên M là ảnh của N qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$.

Từ đó suy ra cách dựng: Dựng đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D. Dựng đường thẳng d là ảnh của đường thẳng AC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CD}$, d cắt AB tại M. Dựng N sao cho $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CD}$, thì M, N là hai điểm cần dựng.

Bài toán 12. 43:

Trên ba đường tròn có cùng tâm O và có bán kính R, 2R, 3R, lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và điểm O thuộc miền trong tam giác này. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Hướng dẫn giải



Phép quay tâm B góc $-\frac{\pi}{2}$ biến C thành A sẽ biến điểm O thành O'

Ta có $\begin{cases} AO' = OC = 3R \\ BO' = BO = 2R, OBO' = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta OBO'$ vuông cân

$\Rightarrow OO' = OB\sqrt{2} = 2R\sqrt{2}$

Từ đó: $OO'^2 + OA^2 = 8R^2 + R^2 = 9R^2 = O'A^2 \Rightarrow O'\hat{O}A = 90^0$

Mà: $B\hat{O}O' = 45^0$ nên $B\hat{O}A = 135^0$

Định lý hàm số cosin trong tam giác BOA cho:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos BOA = (5 + 2\sqrt{2})R^2$

ΔABC vuông cân $\Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{2}R^2$.

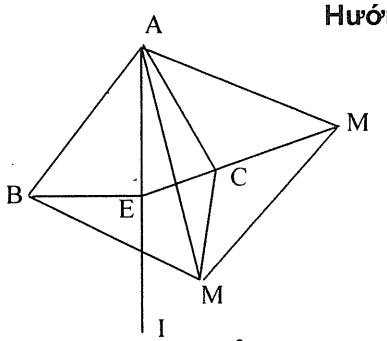
Bài toán 12. 44:

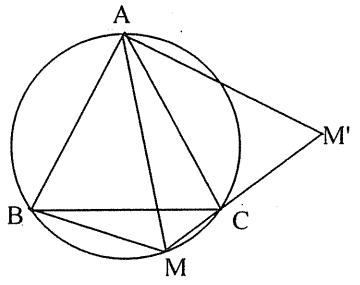
Cho tam giác đều ABC cạnh a, M là điểm tuỳ ý.

a) Chứng minh rằng: Từ 3 đoạn thẳng MA, MB, MC ta luôn luôn dựng được một tam giác (T) nào đó.Tam giác (T) suy biến thành đoạn thẳng khi và chỉ khi M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm tập hợp của điểm M sao cho (T) là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải





a) Xét phép quay $(A; 60^0)$: $AB \mapsto AC$ và $AM \mapsto AM'$

Tam giác AMM' đều nên: AM = AM'

$\Delta ABM = \Delta ACM'$ nên BM = CM'

Vậy tam giác MCM' có 3 cạnh: MM' = MA, M'C = MB và MC. Đó chính là tam giác (T) cần dựng.

Nếu (T) suy biến thành đoạn thẳng: (M, C, M' thẳng hàng)

Vì tam giác AMM' đều nên: $AMM' = 60^0 \Rightarrow AMC = ABC = 60^0$

Vậy: M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đảo lại dùng phép quay $(A, 60^0)$. Ta có: $ACM + ABM = 180^0$.

$\Delta ABM = \Delta ACM' \Rightarrow ACM' = ABM \Rightarrow ACM + ACM' = 180^0$

Vậy (T) suy biến thành đoạn thẳng

b) Trước hết, ta tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$MA^2 = MB^2 + MC^2$

Dựng I đối xứng với A qua BC. Gọi $E = AI \cap BC$. Ta có:

$$MB^2 + MC^2 = 2ME^2 + \frac{BC^2}{2};\quad MA^2 + MI^2 = 2ME^2 + \frac{AI^2}{2}$$

Suy ra: $MA^2 + MI^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$

Do đó: $\Delta MCM'$ vuông tại C $\Leftrightarrow MM'^2 = MC^2 + M'C^2$

$\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow MI^2 = a^2 \Leftrightarrow MI = a$

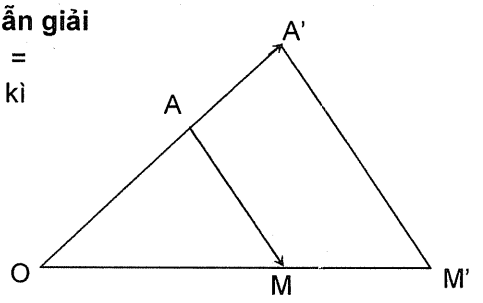
Vậy: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính R = a trừ hai điểm B, C.

Gọi J là điểm đối xứng với B qua AC và K là điểm đối xứng với C qua AB. Từ đó suy ra tập hợp của M là 3 đường tròn (I; a), (J; a), (K; a) trừ 3 đỉnh của tam giác ABC.

Bài toán 12. 45:

Gọi F là phép biến hình có tính chất sau đây: Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.

Hướng dẫn giải



Lấy một điểm A cố định và đặt A' = F(A). Theo giả thiết, với điểm M bất kì và ảnh M'= F(M), ta có:

$\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$

Nếu k = 1, thì $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$

nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$: xác định.

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Nếu $k \neq 1$ thì có điểm O sao cho $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

Ta có $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{OM}$

Vậy F là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 12.1: Chứng minh các phép tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng trục và phép quay đều là các phép dời hình.

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa của các phép tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng trục , phép quay và định nghĩa của phép dời hình.

Bài tập 12.2: Chứng minh rằng hợp thành của phép đối xứng trục $Đ_a$ và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với a là phép đối xứng trục.

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa. Kết quả trục đối xứng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Bài tập 12.3: Cho tam giác ABC cố định. Vẽ hình thoi BCDE mà E, D, A cùng phía đối với đường thẳng BC. Hạ $DD_1 \perp AB$, và $EE_1 \perp AC$. Các đường thẳng DD_1 và EE_1 cắt nhau tại M. Tìm tập hợp M.

Hướng dẫn

Kết quả đường tròn (H; BC) với H là trực tâm tam giác ABC.

Bài tập 12.4: Cho tứ giác lồi ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh tứ giác có diện tích $S \leq \frac{ac+bd}{2}$.

Hướng dẫn

Dùng phép đối xứng trục là đường trung trực Δ của đường chéo BD

Bài tập 12.5: Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P, Q và hai điểm A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.

Hướng dẫn

Lấy A_1 đối xứng A' qua d thì:$A'N + BN = A_1N + BN \geq A_1B$

Bài tập 12.6: Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.

Hướng dẫn

Kết quả tâm đối xứng là giao điểm của hai trục đối xứng vuông góc

Bài tập 12.7: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C. Tìm tập hợp các điểm M_3.

Hướng dẫn

Phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm.

Bài tập 12.8: Cho tam giác ABC. Lấy trên AB một điểm lưu động M và trên AC một điểm N sao cho BM = CN. Chứng minh trung trực của MN qua 1 điểm cố định và đường tròn (AMN) qua 2 điểm cố định.

Hướng dẫn

Dùng phép quay bảo toàn góc.

Bài tập 12.9: Gọi MA, MB, MC là 3 dây cung của đường tròn tâm O. Chứng minh rằng các giao điểm khác với M của 3 đường tròn đường kính MA, MB và MC lấy từng đôi một là 3 điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn

Dùng phép vị tự tâm M.

Bài tập 12.10: Cho tam giác nhọn ABC, hãy dựng hình vuông MNPQ sao cho hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và hai đỉnh M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC.

Hướng dẫn

Dựng hình vuông BCM'N' ra phía ngoài , AM' cắt BC tại M rồi dùng phép vị tự tâm A tỉ k= $\frac{AM}{AM'}$.

Bài tập 12.11: Cho đường tròn v(O; R) và dây cung BC cố định. Một điểm A chuyển động trên cung $B\overset{\frown}{X}C$ của đường tròn đó. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc M của H trên đường phân giác trong của góc BÂC.

Hướng dẫn

Dùng phép vị tự tâm A.

Bài tập 12.12: Cho hai đường tròn cố định (O; R) và (O'; R') với $R \neq R'$. Hai điểm M và M' lần lượt lưu động trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = 60^o$. Xác định phép đồng dạng biến M thành M'.

Hướng dẫn

Gọi I là giao điểm của đường tròn đường kính AB với cung chứa góc 60^o dựng trên dây OO'. Hợp thành của phép quay tâm I, góc 60^o và phép vị tự tâm I, tỉ $k = \frac{R'}{R}$ là phép đồng dạng cần tìm.

Chuyên đề 13: TỌA ĐỘ PHẲNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Tích vô hướng và góc, khoảng cách

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

- Góc giữa hai vectơ : $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

- Khoảng cách AB = $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- Khoảng cách từ $M_o(x_o; y_o)$ đến đường thẳng Δ : $ax + by + c = 0$:

$$d(M_o; \Delta) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Vị trí của 2 điểm M, N đối với đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$:

M, N cùng phía $\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$

M, N khác phía $\Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$

- Diện tích tam giác ABC có $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$:

$$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

Phương trình đường thẳng

- Phương trình tổng quát qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A;B)$:

$Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ hay $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

- Phương trình tham số qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a;b)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (a^2 + b^2 \neq 0)$$

- Phương trình chính tắc qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a;b)$:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \text{ với } a, b \neq 0$$

- Phương trình đoạn chắn: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ với $a, b \neq 0$

- Phương trình hai phân giác của các góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = 0$$

– Phương trình chùm đường thẳng đi qua điểm của 2 đường thẳng cắt nhau (D): Ax + By + C = 0 và (D′): A′x + B′y + C′ = 0 :

m(Ax + By + C) + n(A′x + B′y + C′) = 0, $m^2 + n^2 \neq 0$.

Phương pháp toạ độ

Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp để tính toán, tìm chọn và chứng minh.

Với 3 điểm A, B, C bất kì thì có: $|AB - AC| \leq BC$.

Với 3 điểm A, B, C bất kì thì có: $BC \leq AB + BC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó.

Với các điểm A, B, C,…,Y, Z bất kì thì có:

$$AZ \leq AB + BC + \ldots + YZ.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các điểm A, B, C,….,Y, Z thẳng hàng theo thứ tự đó.

Với điểm A, B bất kì nằm về hai phía của đường thẳng d. Điểm M thuộc d thì MA + MB ≥ AB, dấu bằng khi M là giao điểm của đoạn thẳng AB với đường thẳng d.

Với điểm A, B bất kì nằm về một phía của đường thẳng d. Điểm M thuộc d thì $|MA - MB| \leq AB$, dấu bằng khi M là giao điểm nếu có của đường thẳng AB với đường thẳng d.

Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bất kì thì có $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng.

Với 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bất kì thì có $|\vec{u} - \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ngược hướng.

Với n vectơ $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ bất kì thì có

$$|\vec{u_1} + \vec{u_2} + \ldots + \vec{u_n}| \leq |\vec{u_1}| + |\vec{u_2}| + \ldots + |\vec{u_n}|$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi cả n vectơ cùng hướng.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 13. 1:

Cho điểm M(1; 2). Hãy lập phương trình của đường thẳng đi qua M và chắn trên hai trục toạ độ hai đoạn có độ dài bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Xét d qua gốc O thì d: y = kx ⇒ y = 2x.

Xét d không qua gốc O thì a, b ≠ 0

d: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Theo giả thiết thì $|a| = |b|$

Nếu b = a thì d: x + y = a.

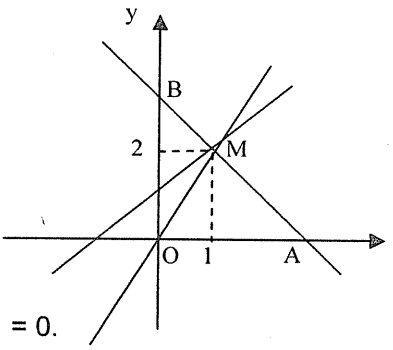
Vì d qua M(1; 2) nên a = 3 do đó d: x + y = 3

Nếu b = –a thì d: x – y = a

Vì d qua M(1; 2) nên a = –1, do đó x – y = –1

Vậy có 3 đường thẳng:

$$2x - y = 0,\ x + y - 3 = 0,\ x - y + 1 = 0.$$



Bài toán 13. 2:

Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A(2; 3) và cắt tia Ox, Oy tại 2 điểm M, N khác điểm O sao cho OM + ON nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi M(m; 0), N(0; n) với m, n > 0. Phương trình Δ: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

$$A \in \Delta \Rightarrow \frac{2}{m}+\frac{3}{n}=1 \Rightarrow n=\frac{3m}{m-2} \quad (m \neq 2).$$ Do n > 0 nên m > 2.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có:

$$OM + ON = m + n = m + \frac{3m}{m-2}$$

$$= m-2+\frac{6}{m-2}+5 \geq 2\sqrt{(m-2).\frac{6}{m-2}}+5 = 2\sqrt{6}+5$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 = \frac{6}{m-2}$

Chọn $m = 2 + \sqrt{6}$ (do m > 0). Suy ra $n = 3 + \sqrt{6}$.

Vậy OM + ON nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6}+5$ khi $m = 2+\sqrt{6}$, $n = 3+\sqrt{6}$.

Khi đó phương trình của Δ là: $\frac{x}{2+\sqrt{6}}+\frac{y}{3+\sqrt{6}}=1$.

Bài toán 13. 3:

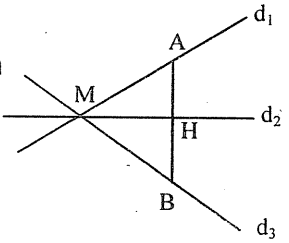
Cho hai đường thẳng d_1: x + y – 1 = 0 và d_2: x – 3y + 3 = 0. Hãy lập phương trình của đường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2.

Hướng dẫn giải

Giao điểm M(x; y) của d_1 và d_2 có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy M(0; 1).



Lấy A(1; 0) thuộc d_1, phương trình đường thẳng AH vuông góc với d_2:

$$3(x-1)+1(y-0)=0 \Leftrightarrow 3x+y-3=0$$

Toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x+y-3=0\\x-3y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{6}{5}\end{cases} \quad H\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right) \Rightarrow B\left(\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$$

Phương trình đường thẳng MB hay đường thẳng d_3 là:

$$(x-0)\left(\frac{12}{5}-1\right)-(y-1)\left(\frac{1}{5}-0\right)=0 \Rightarrow 7x-y+1=0.$$

Bài toán 13. 4:

Cho hai điểm A(1; 1) và B(3; 6). Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng 2.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ đi qua A(1; 1) có phương trình:

$a(x-1)+b(y-1)=0$ hay $ax+by-a-b=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$

Ta có $d(B;\Delta)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|3a+6b-a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow (2a+5b)^2=4(a^2+b^2)$

$$\Leftrightarrow b(21b+20a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\21b+20a=0\end{cases}$$

Với b = 0, chọn a = 1, ta được đường thẳng Δ_1: $x-1=0$

Với 21B + 20a = 0, chọn a = 21, b = –20 ta được đường thẳng Δ_2:

$$21x-20y-1=0,$$

Bài toán 13. 5:

Viết phương trình phân giác d của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng d_1: $x-2y-5=0$, d_2: $2x-y+2=0$.

Hướng dẫn giải

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-2y-5=0\\2x-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=-4\end{cases}$

Do đó I(–3; –4). Lấy $A(5;0)\in d_1$, $B(-1;0)\in d_2$

Ta có: $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=8.2+4.4=32>0$ nên góc AIB nhọn

M(x; y) thuộc phân giác d của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2

$$\cos(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IM})=\cos(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IM})$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(x+3)+4(y+4)}{4\sqrt{5}}=\frac{2(x+3)+4(y+4)}{2\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow x-y-1=0$. Vậy d: $x-y-1=0$.

Chú ý: Nếu góc AIB tù thì M ∈ d khi: $\cos(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IM}) = -\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM})$

Bài toán 13. 6:

Cho điểm P(3;0) và hai đường thẳng: (d_1): 2x – y – 2 = 0, (d_2): x + y + 3 = 0. Lập phương trình đường thẳng qua P và cắt (d_1), (d_2) lần lượt ở A và B trong mỗi trường hợp:

a) PA = PB

b) Tam giác IAB cân tại giao điểm I của (d_1) và (d_2)

Hướng dẫn giải

a) Gọi A(a, 2a–2) thuộc (d_1): y = 2x – 2,

B(b, –b–3) thuộc (d_2): y = –x – 3

Ta có P(3;0) trung điểm AB nên

$$\frac{a+b}{2} = 3 \text{ và } \frac{2a-2-b-3}{2} = 0 \text{ suy ra } a = \frac{11}{3} \text{ và } b = \frac{7}{3}$$

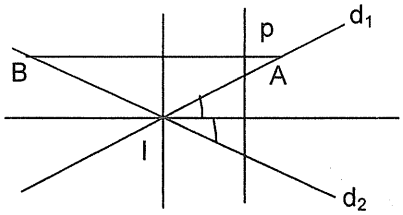
Do đó: $A\left(\frac{11}{3};\frac{16}{3}\right)$ nên (d) là AP: 8x – y – 24 = 0

b) Tam giác IAB cân tại I nên d lần lượt song song với 2 phân giác của góc tạo bởi d_1, d_2. Gọi M(x,y) thuộc phân giác:

$$d(M; d_1) = d(M;d_2) \Leftrightarrow \frac{|2x-y-2|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+y+3|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{2} - \sqrt{5})x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})y - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 0$$

Hoặc $(2\sqrt{2} + \sqrt{5})x - (\sqrt{2} - \sqrt{5})y - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5} = 0$



Từ đó ta tìm được 2 đường thẳng thoả đề bài là:

$$(2\sqrt{2} - \sqrt{5})x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})y - 3(2\sqrt{2} - \sqrt{5}) = 0$$

$$(2\sqrt{2} + \sqrt{5})x - (\sqrt{2} - \sqrt{5})y - 3(2\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 0.$$

Bài toán 13. 7:

Trong mặt phẳng Oxy, biết A(1; –1) và B(3; 0) là hai đỉnh của hình vuông ABCD. Tìm toạ độ các đỉnh C và D.

Hướng dẫn giải

Gọi C(x; y). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ = (2; 1), $\overrightarrow{BC}$ = (x – 3; y).

Điều kiện ABCD là hình vuông ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\\ AB=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-3)+1.y=0\\ (x-3)^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2(3-x)\\ 5(x-3)^2=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2(3-x)\\ (x-3)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=4,y=-2\\ x=2,y=2\end{bmatrix}$$

Với $C_1(4; -2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2; -3)$

Với $C_2(2; 2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0; 1)$.

Bài toán 13. 8:

Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm A(10; 5), B(15; –5), D(–20; 0) là ba đỉnh của một hình thang cân ABCD. Tìm toạ độ điểm C, biết rằng AB song song CD.

Hướng dẫn giải

Điểm M(x,y) thuộc trung trực d của AB khi:

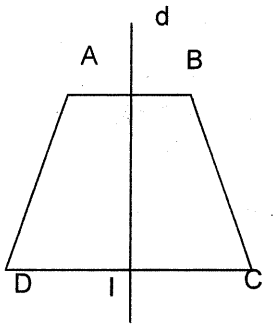
MA = MB

$\Leftrightarrow (x-10)^2+(y-5)^2=(x-15)^2+(y+5)^2$

$\Leftrightarrow 2x-4y-25=0$ nên có VTPT $\vec{n}=(1;-2)$

Gọi $C(x_0, y_0)$ thì $\overrightarrow{DC}=(x_0+20\ ;\ y_0)$ cùng phương $\vec{n}$ nên:

$$\frac{x_0+20}{1}=\frac{y_0}{-2}\Rightarrow y_0=-2x_0-40$$



Trung điểm I của CD có toạ độ:

$$x=\frac{x_C+x_D}{2}=\frac{x_0-20}{2},y=\frac{y_C+y_D}{2}=x_0-20$$

Vì $I\in(d)$ nên $x_0-20+4(x_0+20)-25=0$

$\Rightarrow x_0=-7\Rightarrow y_0=-26$. Vậy C(–7 ; –26).

Bài toán 13. 9:

Cho tam giác ABC trong mặt phẳng Oxy, cho biết đỉnh C(4;3), đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ A có phương trình lần lượt là:

$$x+2y-5=0 \text{ và } 4x+13y-10=0.$$

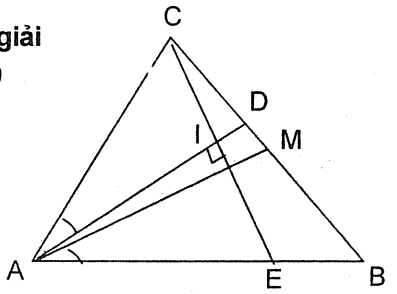
Tìm A và B.

Hướng dẫn giải

AD: x + 2y – 5 = 0, AM: 4x + 13y – 10 = 0

$\Rightarrow$ A(9,–2).

Nên AC: $\frac{x-4}{5}=\frac{y-3}{-5}\Leftrightarrow x+y-7=0$



Gọi E(x,y) là điểm đối xứng của C qua đường phân giác AD thì:

AD $\perp$ CE và $I\in$ AD nên x, y thỏa mãn:

$-2(x-4)+(y-3)=0$ và $\frac{x+4}{2}+(y+3)-5=0 \Rightarrow E(2;-1)$

Do đó AB: $\frac{x-2}{-7}=\frac{y+1}{1} \Leftrightarrow x+7y+5=0$

Gọi B(x,y) thì trung điểm $M\left(\frac{x+4}{2},\frac{y+3}{2}\right)$:

$B \in AB$, $M \in AM$ nên x, y thỏa mãn:

$x+7y+5=0$ và $4\left(\frac{x+4}{2}\right)+13\left(\frac{y+3}{2}\right)-10=0 \Rightarrow B(-12;1)$.

Bài toán 13. 10:

Cho E(3,3), F(0,2). Tìm M trên d: $x+y-4=0$ nhìn EF dưới góc 45^o hay 135^o.

Hướng dẫn giải

Gọi M(x,y) thuộc d: $x+y-4=0 \Rightarrow y=4-x$

nên $\overrightarrow{ME}=(3-x;x-1)$, $\overrightarrow{MF}=(-x;x-2)$

Theo đề bài: $|\cos(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{|(3-x)(-x)+(x-1)(x-2)|}{\sqrt{(3-x)^2+(x-1)^2}.\sqrt{x^2+(x-2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bình phương và rút gọn ta có:

$x^4-6x^3+7x^2+6x-8=0$

$(x-1)(x+1)(x-2)(x-4)=0$

$x=1$ hay $x=-1$ hay $x=2$ hay $x=4$

Vậy có 4 điểm M(1;3), (−1;5), (2;2) và (4;0)

Bài toán 13. 11:

Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 đường thẳng d_1: $x+y+3=0$, d_2: $x-y-4=0$, d_3: $x-2y=0$. Tìm M thuộc d_3 sao cho khoảng cách từ M đến d_1 bằng 2 lần khoảng cách đến d_2.

Hướng dẫn giải

Ta có: M(2y; y) thuộc d_3: $x-2y=0$.

Theo giả thiết: $d(M,d_1)=2\,.\,d(M,d_2) \Leftrightarrow \frac{|3y+3|}{\sqrt{2}}=2.\frac{|y-4|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow |3y+3|=2|y-4| \Leftrightarrow y=1$ hoặc $y=-11$.

Vậy: M(2; 1) hay M(−22; −11).

Bài toán 13. 12:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm 3 đỉnh biết trọng tâm $G(\frac{2}{3};0)$ và trung điểm của cạnh BC là M(1; −1).

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2/3 - x_A = 2(1 - 1/3) \\ 0 - y_A = 2(-1 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases}$$

Phương trình BC qua M có VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{AM} = (1; -3)$

$1(x - 1) - 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 4 = 0$

Ta có: $MB = MC = MA$ nên $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$

Do đó: B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải ra: $y = 0, x = 4$ hay $y = -2, x = -2$

Vậy: A(0;2), B(4;0), C(–2;–2) hay A(0;2), B(–2;–2), C(4;0).

Bài toán 13. 13:

Trong mặt phẳng Oxy, cho A(2; 2) và các đường thẳng d_1: $x + y - 2 = 0$, d_2: $x + y - 8 = 0$. Tìm các điểm B thuộc d_1, C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Hướng dẫn giải

Gọi B(b; 2–b) thuộc d_1, C(c; 8–c) thuộc d_2.

Tam giác ABC vuông cân tại A:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - 4b - c + 2 = 0 \\ b^2 - 2b = c^2 - 8c + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4) = 2 \\ (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 1 = -2 \\ c - 4 = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} b - 1 = 2 \\ c - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy B(–1; 3), C(3; 5) hoặc B(3; –1), C(5; 3).

Bài toán 13. 14:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng Δ : $x - y - 4 = 0$ và d : $2x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa $OM.ON = 8$.

Hướng dẫn giải

Điểm $N \in d \Rightarrow N(n; 2n - 2) \Rightarrow \overrightarrow{ON} = (n; 2n - 2)$

Điểm $M \in \Delta \Rightarrow M(m; m - 4) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (m; m - 4)$

Vì 2 đường thẳng d và Δ nằm cùng phía đối với điểm O nên

$OM.ON = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 8 \Leftrightarrow m = 5n$

Ta có $\overrightarrow{OM}$ cùng phương với $\overrightarrow{ON} \Leftrightarrow m.n + 4n - 2m = 0$.

Suy ra $5n^2 - 6n = 0 \Leftrightarrow n = 0$ hoặc $n = \frac{6}{5}$

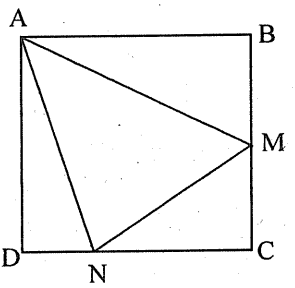
Với $n = 0$ thì $m = 0$, ta có điểm M (0; –4); N (0; –2)

Với $n = \frac{6}{5}$ thì m = 6, ta có điểm M (6; 2); $N\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Bài toán 13. 15:

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình 2x – y – 3 = 0. Tìm tọa độ điểm A.

Hướng dẫn giải



Ta có : $AN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$;

$AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN = \frac{5a}{6}$;

$\cos A = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow MAN = 45^0$

Phương trình đường thẳng AM : $ax + by - \frac{11}{2}a - \frac{1}{2}b = 0$

$$\cos\widehat{MAN} = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow 2(2a-b)^2 = 5(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3b^2 - 8ab - 3b^2 = 0$

Đặt $t = \frac{a}{b}$ thì có $3t^2 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hay $t = -\frac{1}{3}$

Với t = 3 thì tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4; 5)$

Với $t = -\frac{1}{3}$ thì tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1)$

Cách khác:

A thuộc AN: 2x – y – 3 = 0 nên A(a; 2a – 3),

Ta có $d(M, AN) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$,

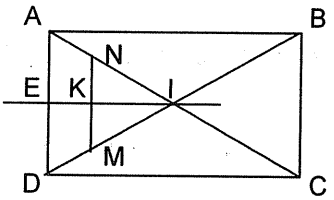
Do đó $MA = MH.\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow (a - \frac{11}{2})^2 + (2a - \frac{7}{2})^2 = \frac{45}{2}$

$\Leftrightarrow a = 1$ hay $a = 4 \Rightarrow A(1; -1)$ hay A (4; 5).

Bài toán 13. 16:

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x – y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M(-\frac{1}{3}; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Hướng dẫn giải



AC cắt AD tại A(–3; 1)

Vẽ MN // AD ($N \in AC$)

$\Rightarrow$ MN : $3x – 3y + 4 = 0$

Nên $N(-1; \frac{1}{3})$.

Trung trực của AD cũng là trung trực của MN : $x + y = 0$

$\Rightarrow$ trung điểm AD là E (–2; 2) nên D (–1; 3).

Giao điểm của AC và EK : I (0; 0)

I là trung điểm BD $\Rightarrow$ B (1; –3) nên C (3; –1).

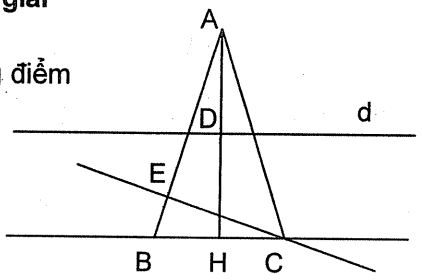
Vậy A(–3; 1); B (1; –3); C (3; –1) và D (–1; 3).

Cách khác:dùng $|\cos(BD,AD)| = |\cos(AC,BD)|$.

Bài toán 13. 17:

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC cân tại A(6;6); đường thẳng đi qua trung điểm của AB, AC có phương trình $x + y – 4 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B và C biết điểm E(1;–3) thuộc đường cao qua C của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BC và D là trung điểm của AH thì D(x ;y) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Do đó D(2 ;2) nên trung điểm của BC là H(–2;–2).

Phương trình BC qua H và song song với d là : $x + y + 4 = 0$.

Điểm B thuộc BC nên B(t ;–4–t) và C đối xứng B qua H nên C(–4–t ;t).

Điểm E thuộc đường cao qua C nên

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow (t - 6)(5 + t) + (-10 - t)(-3 - t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -6$$

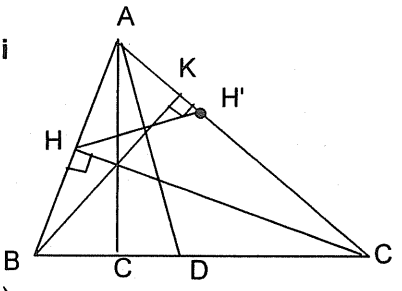
Vậy B(0;–4), C(–4;0) hoặc B(–6;2), C(2;–6).

Bài toán 13. 18:

Trong mặt phẳng Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết hình chiếu của C lên đường thẳng AB là H(–1;–1), đường phân giác trong

của góc A có phương trình x – y + 2=0 và đường cao kẻ từ B có phương trình 4x + 3y – 1 =0.

Hướng dẫn giải



Gọi H'(a, b) là điểm đối xứng của H qua phân giác AD thì HH' ⊥ AD và trung điểm của HH' là $I\left(\frac{a-1}{2};\frac{b-1}{2}\right)$ thuộc AD:

$$\begin{cases}1(a+1)+1(b+1)=0\\ \frac{a-1}{2}-\frac{b-1}{2}+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=1\end{cases}$$ nên H'(–3; 1)

Đường thẳng AC qua H', vuông góc với đường cao BK nên có phương trình: 3(x + 3) – 4(y – 1) = 0 ⇔ 3x – 4y + 13 = 0.

Đỉnh A = AD ∩ AC là A(5; 7).

Đường thẳng CH: 6(x + 1) + 8(y + 1) = 0 ⇔ 3x + 4y + 7 = 0.

C là giao điểm của AC và AH nên toạ độ C là nghiệm hệ :

$$\begin{cases}3x+4y+7=0\\ 3x-4y+13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{10}{3}\\ y=\frac{3}{4}\end{cases}$$. Vậy $C\left(-\frac{10}{3};\frac{3}{4}\right)$.

Bài toán 13. 19:

Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường thẳng: d_1: x – y = 0, d_2: 2x + y – 1 = 0. Tìm các đỉnh hình vuông ABCD biết A thuộc d_1, C thuộc d_2 và B, D thuộc trục hoành.

Hướng dẫn giải

Gọi A(a, a) thuộc d_1. Vì ABCD là hình vuông và B, D thuộc trục hoành nên C(a; –a).

Mà C thuộc d_2 nên 2a + a – 1 = 0 ⇒ a = 1.

Do đó A(1; 1) và C(1; –1).

Tâm hình vuông là trung điểm I của AC nên I(1; 0)

Gọi B(b; 0), D(d; 0): IB = ID = 1

nên $|b-1|=1$, $|d-1|=1$ Hướng dẫn giải ra b, d bằng 0 hoặc 2

Vậy hai đỉnh B, D có toạ độ (0; 0) và (2; 0).

Bài toán 13. 20:

Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết: A(2; –14), B(–2; 14), C(–5; –7).

Hướng dẫn giải

Phương trình AB: 7x + y = 0, BC: 7x – y + 28 = 0,

AC: x + y + 12 = 0.

Hai đường phân giác của góc A là:

$$\frac{7x+y}{\sqrt{50}} \pm \frac{x+y+12}{\sqrt{2}} = 0 \text{ hay } 2x + y + 10 = 0 \text{ và } x - 2y - 30 = 0.$$

Chọn phân giác trong của góc A với B và C nằm về hai phía của đường thẳng nên phân giác trong AK: $2x + y + 10 = 0$.

Hai đường phân giác của góc B là:

$$\frac{7x+y}{\sqrt{50}} \pm \frac{7x-y+28}{\sqrt{50}} = 0 \text{ hay } x + 2 = 0 \text{ và } y - 14 = 0$$

Chọn phân giác trong của góc B với A và C nằm về hai phía của đường thẳng nên phân giác trong BL: $x + 2 = 0$.

Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là giao điểm của hai đường phân giác trong AK và BL nên I (–2; –6).

Bán kính : $r = d(I, AB) = \frac{|-14-6|}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 13. 21:

Cho hai đường thẳng cắt nhau d: $2x – y + 1 = 0$ và d': $3x + y – 1 = 0$, chúng tạo thành 4 góc trong đó có một góc chứa điểm I(1; 5). Tìm điều kiện cần và đủ để điểm M(x; y) nằm trong góc có chứa điểm I.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x,y) = 2x – y + 1$ và $g(x,y) = 3x + y – 1$.

Điểm M(x, y) nằm trong góc có chứa điểm I(1; 5) khi và chỉ khi M và I nằm cùng phía đối với d, đồng thời M và I nằm cùng phía đối với d', tức là:

$$\begin{cases} f(1;5).f(x;y) > 0 \\ g(1;5).g(x;y) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ 3x + y - 1 > 0 \end{cases}$$

Bài toán 13. 22:

Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = x_2 + ct' \\ y = y_2 + dt' \end{cases}$.

Tìm điều kiện của a, b, c, d để hai đường thẳng d_1 và d_2:

a) Cắt nhau

b) Song song

c) Trùng nhau

d) Vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

d_1 đi qua $M_1(x_1; y_1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ (a; b), d_2 đi qua $M_2(x_2; y_2)$ có vectơ chỉ phương $\vec{v}$ (c; d)

a) d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương $\Leftrightarrow ad – bc \neq 0$

b) $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1; y_1) \notin d_2$

$\Leftrightarrow ad – bc = 0$ và $d(x_1 – x_2) \neq c(y_1 – y_2)$

c) $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1; y_1) \in d_2$

$\Leftrightarrow ad - bc = 0$ và $d(x_1 - x_2) = c(y_1 - y_2)$

d) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow ac + bd = 0$.

Bài toán 13. 23:

Biện luận theo tham số m vị trí tương đối của hai đường thẳng:

$$mx + y + 2 = 0 \text{ và } x + my + m + 1 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Xét hệ $\begin{cases} mx + y + 2 = 0 \\ x + my + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y = -2 \\ x + my = -m + 1 \end{cases}$

Ta lập các định thức

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m & -m + 1 \end{vmatrix} = m + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & -m - 1 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 2 = -(m - 1)(m - 2)$$

Vậy:

Nếu $m \neq 1$, $m \neq -1$ thì $D \neq 0$: hai đường thẳng cắt nhau

Nếu $m = 1$ thì $D = 0$, $D_x \neq 0$: hai đường thẳng song song

Nếu $m = -1$ thì $D = D_x = D_Y = 0$: hai đường thẳng trùng nhau

Bài toán 13. 24:

Chứng minh các họ đường thẳng: $y = (2m + 1)x - m^2$ luôn luôn tiếp xúc với 1 parabol cố định.

Hướng dẫn giải

Ta tìm các điểm họ không đi qua:

$$y = (2m + 1)x - m^2 \Leftrightarrow m^2 - 2xm + y - x = 0$$

$\Delta' = x^2 - y + x < 0 \Leftrightarrow y > x^2 + x$

Xét (P): $y = x^2 + x$ thì phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 + x = (2m + 1)x - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = 0$$

$\Delta' = m^2 - m^2 = 0$, $\forall m$

Vì phương trình luôn luôn có nghiệm kép nên họ đường thẳng tiếp xúc với parabol: $y = x^2 + x$ cố định.

Bài toán 13. 25:

Chứng minh rằng khi m thay đổi các đường thẳng sau đây luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định:

d: $(1 - m^2)x + 2my + m^2 - 4m + 3 = 0$

Hướng dẫn giải

Xem phương trình d ẩn m : $(1-x)m^2+2(y-2)m+3+x=0$

$\Delta' = (y-2)^2-(1-x)(3+x) = (x+1)^2+(y-2)^2-4$

Xét I(–1;2) thì d(I;d) = 2 không đổi.

Vậy đường thẳng Δ luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I(–1; 2) bán kính R = 2.

Bài toán 13. 26:

Các cạnh của tam giác ABC được cho bởi các phương trình sau: AB: x + y = 4; BC: 3x – y = 0; CA: x – 3y – 8 = 0.

a) Tính các góc, chu vi và diện tích của tam giác.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác.

Hướng dẫn giải

a) Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-3y-8=0 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy A(5; –1). Tương tự ta tính được B(1; 3), C(–1;–3)

Do đó: $AB = \sqrt{4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$, $CB = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$

$CA = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$

Tam giác ABC cân có $CA = CB = 2\sqrt{10}$.

Ta có $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{80-32}{80} = \dfrac{3}{5}$

$\cos A = \cos B = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{c}{2b} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Chu vi của tam giác ABC là $2p = 4(\sqrt{2}+\sqrt{10})$

Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}(2\sqrt{10})^2\sqrt{1-\cos^2 C} = \frac{1}{2}.40.\frac{4}{5} = 16$$

b) $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{16}{2(\sqrt{2}+\sqrt{10})} = \dfrac{8(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{10-2} = \sqrt{10}-\sqrt{2}$

$R = \dfrac{c}{2\sin C} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 13. 27:

Cho đường thẳng Δ_m: (m – 2)x + (m – 1)y + 2m – 1 = 0 và điểm A(2; 3). Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ_m là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Δ_m luôn đi qua điểm cố định $M(x_o; y_o)$ với mọi m khi và chỉ khi:

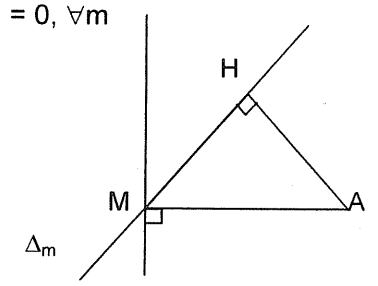
$$(m-2)x_o + (m-1)y_o + 2m - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_o + y_o + 2)m - 2x_o - y_o - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o + y_o + 2 = 0 \\ -2x_o - y_o - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = -3 \end{cases}$$

Vậy Δ_m luôn đi qua điểm cố định:

M(1; –3) với mọi m.



Hạ AH ⊥ Δ_m. Ta có AH ≤ AM với mọi m.

Vậy AH lớn nhất bằng AM khi và chỉ khi H trùng với M hay AM ⊥ Δ_m.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-1; -6)$, Δ_m có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1-m; m-2)$

$$AM \perp \Delta_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(1-m) - 6(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{5}$$

Vậy với $m = \frac{11}{5}$ thì khoảng cách từ A đến Δ_m là lớn nhất.

Bài toán 13. 28:

Tìm tập hợp những điểm M(x; y) thỏa mãn một trong các phương trình sau đây:

a) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 1 = 0$ b) $2x^2 + 3y^2 + 7xy + x - 2y - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 2y)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2y + 1)(x + 2y - 1) = 0$

Vậy tập hợp gồm hai đường thẳng có phương trình tổng quát là:

$x + 2y + 1 = 0$ và $x + 2y - 1 = 0$.

b) $2x^2 + 3y^2 + 7xy + x - 2y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + y - 1)(x + 3y + 1) = 0$

Vậy tập hợp gồm hai đường thẳng: $x + 2y - 1 = 0$ và $x + 3y + 1 = 0$.

Bài toán 13. 29:

Cho tam giác ABC với A(1; 2), B(2; –4), C(–1; 0). Trên hai tia AC và BC lần lượt lấy các điểm A', B' thay đổi sao cho AA' = BB'. Tìm quỹ tích trung điểm I của các đoạn thẳng A'B'.

Hướng dẫn giải

Phương trình tia AC: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ với $t \geq 0$

Phương trình tia BC: $\begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -4 + 4t' \end{cases}$ với $t' \geq 0$

Điểm A' nằm trên tia AC nên A' (1 – 2t; 2 – 2t), $t \geq 0$, điểm B' nằm trên tia BC nên B' (2 – 3t'; –4 + 4t') với $t' \geq 0$.

Khi đó trung điểm I : $\begin{cases} x = \dfrac{3-2t-3t'}{2} \\ y = -1-t+2t' \end{cases}$

Do đó AA' = BB' $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{2}t = 5t' \Leftrightarrow t' = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

nên: $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5+3\sqrt{2}}{5}t \\ y = -1 + \dfrac{-5+4\sqrt{2}}{5}t \end{cases}$ với $t \geq 0$

Vậy quỹ tích trung điểm I của A'B' là tia có gốc là điểm $I_0(\dfrac{3}{2}; -1)$ và có vectơ chỉ hướng là $\vec{u} = (-5-3\sqrt{2}; -5+4\sqrt{2})$

Bài toán 13. 30:

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi N là trung điểm của CD và lấy điểm N trên đường chéo AC sao cho AM = $\dfrac{1}{4}$AC. Tính diện tích BMN và đoạn CI với I là giao điểm của BN và AC.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục toạ độ Axy với điểm B(a; 0), D(0; a).

Ta có $M\left(\dfrac{a}{4}; \dfrac{a}{4}\right)$, $N\left(\dfrac{a}{2}; a\right)$

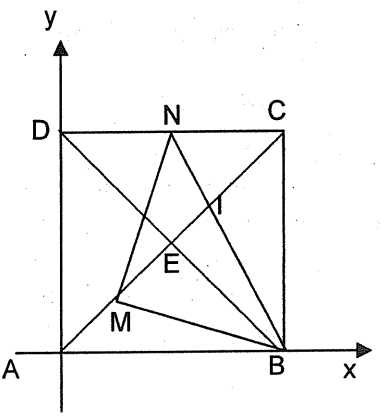
$BM = \sqrt{\left(\dfrac{a}{4}-a\right)^2 + \dfrac{a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

$BN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

Do đó BM = MN, $BM^2 + MN^2 = BN^2$

Vậy tam giác BMN vuông cân tại M nên

$S_{BMN} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4} = \dfrac{5a^2}{16}$.



Ta có I là trọng tâm tam giác BCD nên: $CI = \dfrac{2}{3}CE = \dfrac{1}{3}CA = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Bài toán 13. 31:

Cho hai điểm A, A' và hai điểm B, B' lần lượt trên hai đường thẳng vuông góc nhau, sao cho hai đường thẳng AB và A'B' cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng OQ, AB' và A'B nằm trên một đường thẳng

Hướng dẫn giải

Ta đưa toạ độ Oxy vào để giải toán: A, A' nằm trên trục Ox, và B, B' nằm trên trục Oy. Giả sử A(a; 0), A' (a'; 0), B(0; b); B'(0; b').

Các đường thẳng AB và A'B' lần lượt có phương trình

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ và $\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1$

Giải hệ gồm hai phương trình trên ta tìm được toạ độ điểm

$x_Q=\frac{(b-b')aa'}{(a'b-ab')}$; $y_Q=\frac{(a-a')bb'}{(a'b-ab')}$

Gọi Q' là trung điểm của đoạn thẳng OQ thì toạ độ Q' là

$x_{Q'}=\frac{(b-b')aa'}{2(a'b-ab')}$; $y_{Q'}=\frac{(a-a')bb'}{2(a'b-ab')}$

Và gọi M, N lần lượt là trung điểm AB' và A'B thì:

$M\left(\frac{a}{2};\frac{b'}{2}\right)$ và $N\left(\frac{a'}{2};\frac{b}{2}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{(b-b').aa'}{2(a'b-ab')}-\frac{a}{2};\frac{(a'-a).bb'}{2(a'b-ab')}-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{(a'-a)bb'}{2(a'b-ab')};\frac{ab'(b'-b)}{2(a'b-ab')}\right)$

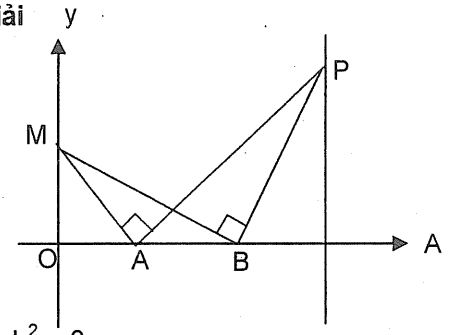
$\overrightarrow{NM}=\left(\frac{a-a'}{2};\frac{b'-b}{2}\right)$ nên $\overrightarrow{MQ'}=k\overrightarrow{NM}$, với $k=\frac{ab'}{a'b-ab'}$.

Vậy ba điểm Q', M, N thẳng hàng.

Bài toán 13. 32:

Cho hai điểm A, B cố định và điểm M lưu động lần lượt trên hai đường thẳng vuông góc nhau. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các đường thẳng vuông góc với MA tại A và vuông góc với MB tại B.Tìm tập hợp giao điểm P của d_1 và d_2.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ,hai điểm A, B trên trục Ox lần lượt có hoành độ a, b thoả $0 < a < b$ và M di động trên trục Oy có tung độ $m \neq 0$.

Ta có phương trình của d_1 là:

d_1: $a(x-a)-m(y-0)=0$,

hay là: $ax-my-a^2=0$

Tương tự phương trình của d_2 là:

d_2: $b(x-b)-m(y-0)=0$ hay là: $bx-my-b^2=0$

Giao điểm P(x; y) của d_1 và d_2 có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình:

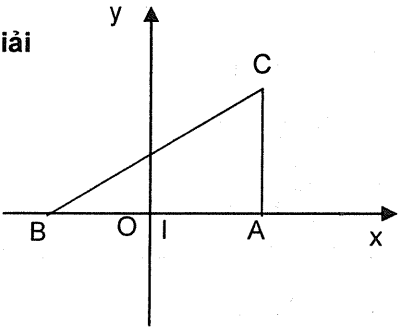
$$\begin{cases} ax-my-a^2=0 \\ bx-my-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b \\ y=\frac{ab}{m} \end{cases}$$ nên P(a + b; $\frac{ab}{m}$).

Vậy tập hợp điểm P là đường thẳng $x = a + b$ trừ điểm $P_o(a + b, 0)$.

Bài toán 13. 33:

Cho tam giác ABC, I là trung điểm cạnh AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua I cắt AC và BC lần lượt tại A' và B'. Tìm quỹ tích giao điểm M của A'B và B'A.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ .

Giả sử A(a, 0), B(–a, 0), C(c, d) thì:

Phương trình AC: $dx + (a - c)y - ad = 0$

Phương trình BC: $dx - (a + c)y + ad = 0$

Đường thẳng Δ đi qua $I \equiv O$ có phương trình $nx + my = 0$ với $n^2 + m^2 > 0$. Từ đó ta tìm được tọa độ của A':

$$x_{A'} = \frac{mad}{md - n(a-c)}, y_{A'} = \frac{-nad}{md - n(a-c)}, md - n(a-c) \neq 0.$$

Suy ra phương trình đường thẳng A'B là:

$ndx + [2md - n(a - c)]y + nad = 0$.

Tương tự phương trình đường thẳng B'A là:

$ndx + [2md + n(a + c)]y - nad = 0$.

Do đó giao điểm M: $x_M = -\frac{2md + nc}{n}, y_M = d = y_C$.

Vậy quỹ tích giao điểm M là đường thẳng qua C và song song AB.

Bài toán 13. 34:

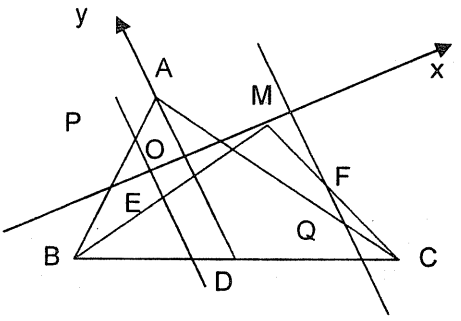
Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Lấy M di động trên đường thẳng d vuông góc với AD. Gọi E, F là trung điểm MB, MC. Đường thẳng lần lượt đi qua E, F và vuông góc với d cắt AB tại P, cắt AC tại Q. Chứng minh đường thẳng d' đi qua M và vuông góc PQ đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ:

A(0,a), B(b,c), C(d,e), M(m,0)

thì $E(\frac{b+m}{2}, \frac{c}{2})$, $F(\frac{d+m}{2}, \frac{e}{2})$



Phương trình PE: $x = \frac{b+m}{2}$,

FQ: $x = \frac{d+m}{2}$

AB: $(a - c)x + by - ab = 0$, AC: $(a - e)x + dy - ad = 0$

Suy ra toạ độ giao điểm $P(\frac{b+m}{2}, \frac{2ab - (a-c)(b+m)}{2b})$

Tương tự, giao điểm $Q(\frac{d+m}{2}, \frac{2ad-(a-c)(d+m)}{2d})$

từ đó lập được phương trình d' qua M và vuông góc PQ

$bd\,x + m(a-c)\,y - bdm = 0$ hay $bd\,x + [(a-c)\,y - bd]m = 0$

Vậy d' luôn đi qua điểm cố định $K(0, \frac{bd}{a-c})$.

Bài toán 13. 35:

a) Chứng minh $|3x^2 + 8x - 3| \le 5(x^2 + 1)$ với mọi x.

b) Chứng minh: $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}$ với 3 số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \le 1$.

Hướng dẫn giải

a) Bất đẳng thức: $|3x^2 + 8x - 3| \le 5(x^2 + 1)$

$\Leftrightarrow |3(x^2 - 1) + 4.2x| \le 5(x^2 + 1)$.

Trong mặt phẳng Oxy xét các vecto $\vec{u}(3;4)$, $\vec{v}(x^2 - 1, 2x)$,

ta có: $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$ nên

$|3(x^2 - 1) + 4.2x| \le \sqrt{25}.\sqrt{(x^2-1)^2 + 4x^2}$

$\Rightarrow |3x^2 + 8x - 3| \le 5\sqrt{(x^2+1)^2}$: đpcm.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy chọn $\vec{a}\left(x;\frac{1}{x}\right), \vec{b}\left(y;\frac{1}{y}\right), \vec{c}\left(z;\frac{1}{z}\right)$

Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \ge |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ nên:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$

$$= \sqrt{81(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - 80(x+y+z)^2}$$

$$\ge \sqrt{2.9(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - 80}$$

$$\ge \sqrt{18.3.\sqrt[3]{xyz}.3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} - 80} = \sqrt{82} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 13. 36:

Chứng minh với mọi a,b,c:

a) $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} \ge \sqrt{a^2 + ac + c^2}$

b) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(c-b)^2}+\sqrt{b^2+(c-a)^2}+\sqrt{(c-a)^2+(c-b)^2}\geq c\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

a) $VT=\sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2}$

Trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) lấy

$A\left(b+\frac{a}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}a\right), B\left(b+\frac{c}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$

$VT = OA + OB \geq AB = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}$

$= \sqrt{a^2+ac+c^2}$ (đpcm)

b) Trong mặt phẳng Oxy, chọn M(a;b), N(c;0), P(b;a), Q(c;c) thì:

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(c-b)^2}+\sqrt{b^2+(c-a)^2}+\sqrt{(c-a)^2+(c-b)^2}$

$\geq OM + MN + NP + PQ$

$\geq OQ = \sqrt{c^2+c^2} = |c|\sqrt{2} \geq c\sqrt{2}$.

Bài toán 13. 37:

Cho x và y thỏa mãn $x - 2y + 2 = 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$\sqrt{x^2+y^2-6x-10y+34}+\sqrt{x^2+y^2-10x-14y+74}\geq 6$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{x^2+y^2-6x-10y+34}+\sqrt{x^2+y^2-10x-14y+74}\geq 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}\geq 6$.

Trong mặt phẳng Oxy, xét đường thẳng d : $x - 2y + 2 = 0$ và chọn các điểm A(3;5), B(5;7), M(x;y) thuộc d thì:

$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}=MA+MB$.

Vì $f(x_A;y_A) = 3 - 10 + 2 < 0$ và $f(x_B;y_B) = 5 - 14 + 2 < 0$ nên hai điểm A, B nằm cùng một phía đối với đường thẳng d. Ta tìm A' đối xứng của A qua đường thẳng d.

Phương trình d' qua A và vuông góc với d

$2(x - 3) + 1(y - 5) = 0$ hay $2x + y - 11 = 0$.

Hình chiếu H của A lên d là giao điểm của d và d' nên H(4;3).

Vì H là trung điểm của AA' nên suy ra A'(5;1).

Do đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 6$: đpcm.

Bài toán 13. 38:

Cho 8 số $x_1, x_2, .., x_8$. Chứng minh trong 6 số sau đây:

$x_1x_3 + x_2x_4$; $x_1x_5 + x_2x_6$; $x_1x_7 + x_2x_8$; $x_3x_5 + x_4x_6$; $x_3x_7 + x_4x_8$;

$x_5x_7 + x_6x_8$ thì có ít nhất một số không âm.

Hướng dẫn giải

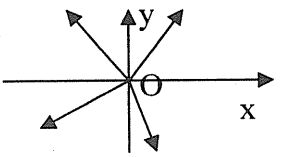
Trong mặt phẳng Oxy, xét 4 điểm $A(x_1; x_2)$, $B(x_3; x_4)$, $C(x_5; x_6)$, $D(x_7; x_8)$ thì:

- Nếu có một điểm trùng với gốc tọa độ O(0;0) thì bất đẳng thức đúng.
- Nếu cả 4 một điểm không trùng với gốc tọa độ thì 4 vectơ

$\overrightarrow{OA}(x_1; x_2)$, $\overrightarrow{OB}(x_3; x_4)$, $\overrightarrow{OC}(x_5; x_6)$, $\overrightarrow{OD}(x_7; x_8)$

Do đó 6 số $x_1x_3 + x_2x_4$; $x_1x_5 + x_2x_6$; $x_1x_7 + x_2x_8$; $x_3x_5 + x_4x_6$; $x_3x_7 + x_4x_8$; $x_5x_7 + x_6x_8$ là 6 tích vô hướng $\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD}$.

Vì 4 vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ chia góc 360^0 thành 4 góc nên có ít nhất một góc không tù, giá trị này tương ứng với số không âm cần phải chứng minh.



Bài toán 13. 39:

Cho E(1,6), F(–3, –4). Tìm điểm M trên đường thẳng d: 2x – y – 1 = 0 sao cho:

a) $|\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$ bé nhất. b) $|ME - MF|$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

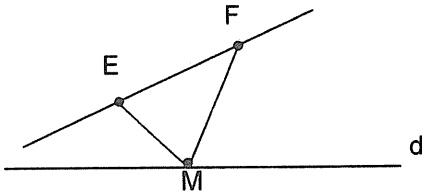
a) M(x,y) thuộc d: $2x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 2x - 1$

$\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = (-2-2x, 4-4x)$

nên: $|\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = \sqrt{(-2-2x)^2 + (4-4x)^2}$

$$= 2\sqrt{5x^2 - 6x + 5} = 2\sqrt{5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}} \geq \frac{8}{5}$$

Dấu = khi $x = \frac{3}{5}$ nên $M\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$



b) Đặt f(x,y) = 2x – y – 1 thì:

f(1,6) = 2 – 6 – 1 < 0

và f(–3,–4) = –6 + 4 – 1 < 0

nên E và F cùng phía đối với d.

Ta có $|ME - MF| \leq EF = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$

Dấu = khi M là giao điểm của đường thẳng EF với d.

EF: 5(x – 1) – 2(y – 6) = 0 hay 5x – 2y + 7 = 0

Toạ độ M(x,y) thỏa hệ $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 5x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = -19 \end{cases}$

Vậy M(–9;–19).

Bài toán 13. 40:

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2}$

$= \sqrt{(x-p)^2 + (-|p|)^2} + \sqrt{(x-q)^2 + (|q|)^2}$

Trên mặt phẳng Oxy, lấy M(x,0) và I(p;–|p|), J(q;|q|) thì M thuộc Ox và I, J ở 2 phía đối với trục Ox.

Ta có: $f(x) = MI + MJ \geq IJ = \sqrt{(q-p)^2 + (|q| + |p|)^2}$

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của đoạn IJ với Ox: tồn tại.

Vậy $\min f(x) = \sqrt{(q-p)^2 + (|q| + |p|)^2}$.

Bài toán 13. 41:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất:

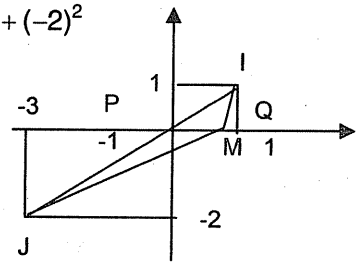
$y = \sqrt{\cos^2 a - 2\cos a + 2} + \sqrt{\cos^2 a + 6\cos a + 13}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = \sqrt{\cos^2 a - 2\cos a + 2} + \sqrt{\cos^2 a + 6\cos a + 13}$

$= \sqrt{(\cos a - 1)^2 + (1)^2} + \sqrt{(\cos a + 3)^2 + (-2)^2}$

Trong mặt phẳng Oxy xét M(cosa; 0), I(1;1) và J(–3;–2) thì I, J ở 2 phía của trục Ox.



$MI = \sqrt{(\cos a - 1)^2 + (1)^2}$

và $MJ = \sqrt{(\cos a + 3)^2 + (-2)^2}$

Vì $-1 \leq \cos a \leq 1$ nên M chạy trên đoạn PQ với P(–1,0), Q(1,0)

Ta có: $y = MI + MJ \geq IJ = \sqrt{16 + 9} = 5$

và $\max y = \max\{PI + PJ, QI + QJ\} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Bài toán 13. 42:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$f(x,y) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$.

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các điểm A(–1;1), B(1;–1), C(–2;–2) và M(x,y).

Ta có : f(x, y) = F(M) = MA + MB + MC.

Dùng phép quay tâm B góc quay 60^0 thì F(M) nhỏ nhất khi điểm M nhìn ba cạnh AB, BC, CA dưới cùng một góc 120^o.

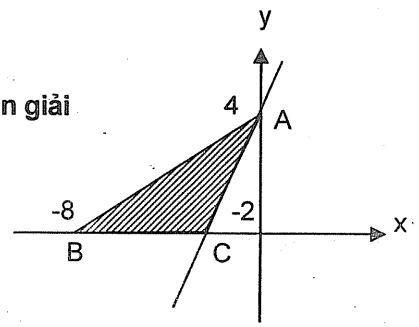
Từ đó giải được $x_M = y_M = \frac{OM}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra : $\min F(M) = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$.

Bài toán 13. 43:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ trên miền D chứa các điểm M(x,y): $\begin{cases} x - 2y + 8 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải



Đường thẳng: x – 2y + 8 = 0
cắt Oy, Ox tại A(0;4), B(–8,0)
Đường thẳng 2x – y + 4 = 0
cắt Oy, Ox tại A(0,4), C(–2,0)

nên miền D chứa các điểm M(x,y): $\begin{cases} x - 2y + 8 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ là phần trong tam giác ABC kể cả biên.

Ta có $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$ nên:
max OM = max {OA, OC, OB} = max{2,4,8} = 8
và min OM = d(O,AC)

Phương trình của AC là 2x – y + 4 = 0 nên $d(O,AC) = 4\frac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy max f(x,y) = 8 và $\min f(x,y) = 4\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 13. 44:

Cho x, y thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$A = \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} + |y-2|$.

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng (Oxy) chọn M(x–1; –y), N(x+1; y) thì

$\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} = OM + ON \geq MN = 2\sqrt{1+y^2}$

Do đó: $A \geq 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| = f(y)$

Khi $y \leq 2$ thì $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} - y + 2$

Ta chứng minh $f(y) \geq 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+y^2} - y + 2 \geq 2+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+y^2} \geq y + \sqrt{3} \Leftrightarrow 4(1+y^2) \geq y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 2\sqrt{3}y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}y - 1)^2 \geq 0$.

Dấu = khi $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\min f = f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2+\sqrt{3}$.

Khi $y > 2$ thì $A \geq 2\sqrt{1+y^2} + y - 2 \geq 2\sqrt{1+y^2} > 2\sqrt{5} > 2+\sqrt{3}$

Vậy $\min A = 2+\sqrt{3}$ khi $x = 0, y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 13. 1: Cho tam giác ABC có 3 đỉnh A(–3; 0), B(3; 0), C(2; 6). Tìm toạ độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác.

Hướng dẫn

Kết quả $G(\frac{2}{3}; 2)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$. Kết quả $H(2; \frac{5}{6})$.

Bài tập 13. 2: Cho tam giác ABC, biết đỉnh A(1; 1) và trọng tâm G(1; 2). Cạnh AC và đường trung trực của nó lần lượt có phương trình là $x + y - 2 = 0$ và $-x + y - 2 = 0$. Tìm các trung điểm M và N của BC và AC.

Hướng dẫn

Dùng tính chất trọng tâm. Kết quả $M(1; \frac{5}{2})$, N(0; 2).

Bài tập 13. 3: Cho điểm A(–1; 3) và đường thẳng Δ có phương trình $x - 2y + 2 = 0$. Dựng hình vuông ABCD sao cho hai đỉnh B, C nằm trên Δ và các toạ độ của đỉnh C đều dương. Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D.

Hướng dẫn

B là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ.

Kết quả B = (0; 1), C = (2; 2), D = (1; 4).

Bài tập 13. 4: Tìm toạ độ điểm đối xứng với điểm $I(x_o; y_o)$ qua đường thẳng d: Ax + By + C = 0.

Hướng dẫn

Lập phương trình đường thẳng qua $I(x_o; y_o)$ và vuông góc với đường thẳng d: Ax + By + C = 0.

Kết quả $x' = \dfrac{(-A^2+B^2)x_o - 2ABy_o - 2AC}{A^2+B^2}, y' = \dfrac{-2ABx_o + (A^2+B^2)y_o - 2BC}{A^2+B^2}$

Bài tập 13. 5: Cho tam giác ABC có trọng tâm G(3; 5) và phương trình AB: 2x – 3y + 1 = 0; AC: 4x + y – 5 = 0. Tìm các đỉnh

Hướng dẫn

Gọi B $(b; \dfrac{2b+1}{3})$ và C(c; 5–c).

Kết quả $A(1; 1), B\left(\frac{61}{7};\frac{43}{7}\right); C\left(-\frac{5}{7};\frac{55}{7}\right)$

Bài tập 13. 6: Cho hình bình hành AOBC với A(–3; 0) và giao điểm I(0; 2) của hai đường chéo AB và OC. Viết phương trình các đường chéo và các cạnh

Hướng dẫn

Kết quả AD: $2x - 3y + 6 = 0$, OC: x = 0

AO: y = 0; BC: y = 4 ; OB: 4x – 3y = 0,AC: 4x – 3y + 12 = 0

Bài tập 13. 7: Lập phương trình đường thẳng đối xứng của :

d : 4x – 3y + 6 = 0 qua Δ : 27x – 99y + 28 = 0.

Hướng dẫn

Tìm giao điểm A và thêm điểm đối xứng của B thuộc d qua Δ .

Kết quả 5x + 12y + 10 =0.

Bài tập 13. 8: Tìm các đỉnh của hình chữ nhật ABCD có tâm $I(\frac{1}{2};0)$, phương trình đường thẳng AB: x– 2y + 2 = 0 và cạnh AB = 2AD .Biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Hướng dẫn

Đường thẳng CD song với AB: x– 2y + 2 = 0 nên có dạng x– 2y + m = 0 với $m \neq 2$.

Kết quả A(–2;0), B(1;2), C(3;0), D(–1;–2)

Bài tập 13. 9: Cho điểm M(4; 6). Viết phương trình của đường thẳng đi qua M và cắt các trục Ox, Oy theo thứ tự tại A(a; 0) và B(0; b) với a, b > 0 sao cho diện tích tam giác OAB bé nhất.

Hướng dẫn

Dùng phương trình đoạn chắn.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM. Kết quả $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}=1$.

Bài tập 13. 10: Trên hai cạnh của góc vuông xOy lần lượt lấy hai cặp điểm A, A' và B B' sao cho OA.OA' = OB.OB'. Chứng minh rằng đường trung tuyến của tan giác ABO cũng là đường cao của tam giác A'B'O.

Hướng dẫn

Giải bằng tọa độ, chọn hệ trục toạ độ Oxy với
A(a;0), A'(a';0) và B(0;b), B'(0;b').

Bài tập 13. 11: Chứng minh bất đẳng thức với mọi a,b,c,d:

a) $\sqrt{(a-6)^2+(b-4)^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(c-2)^2+(d+4)^2}\geq 4\sqrt{5}$

b) $\sqrt{4\cos^2 a.\cos^2 b+\sin^2(a-b)}+\sqrt{4\sin^2 a.\sin^2 b+\sin^2(a-b)}\geq 2$

Hướng dẫn

a) Giải bằng tọa độ, dùng mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Giải bằng tọa độ, dùng mặt phẳng toạ độ Oxy với
M(2cosacosb ; sin(a–b)), N(2sinasinb ;–sin(a–b)).

Bài tập 13. 12:

Cho a và b thỏa mãn a – 2b + 2 = 0. Chứng minh
$\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}-\sqrt{(a-5)^2+(b-7)^2}\leq 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

Giải bằng tọa độ, xét vị trí của E(3;5) và F(5;7) với đường thẳng d:
x – 2y + 2 = 0,
đưa về hiệu khoảng cách ME – MF với M(x;y) thuộc d.

Chuyên đề 14: ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG CÔNIC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương trình đường tròn R

- Đường tròn tâm I $(x_o ; y_o)$, bán kính R có phương trình:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

- Phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

Với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ có tâm I(–a ; –b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

- Phương trình chùm đường tròn với điều kiện $m^2 + n^2 > 0$:

$m(x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c) + n(x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c') = 0$

Phương tích và trục đẳng phương

- Phương tích của điểm $A(x_A ; y_A)$ đối với đường tròn:

(C) : $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$ là

$\mathscr{P}_{A/(C)} = (x_A - x_o)^2 + (y_A - y_o)^2 - R^2$

(C) : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ là

$\mathscr{P}_{A/(C)} = x_A^2 + y_A^2 + 2ax_A + 2by_A + c$

- Trục đẳng phương d của hai đường tròn không đồng tâm (C_1) và (C_2):

$$M(x ; y) \in d \Leftrightarrow \mathscr{P}_{M/(C_1)} = \mathscr{P}_{M/(C_2)}.$$

Tương giao và tiếp xúc

- Phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại $T(x_T;y_T)$:

$$(x_T - x_0)(x - x_o) + (y_T - y_o)(y - y_o) = R^2$$

Hay $x_T.x + y_T.y + a(x_T + x) + b(y_T + y) + c = 0$.

- Tương giao của đường tròn tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ:

$d(I , \Delta) > R$: không có điểm chung, $d(I , \Delta) = R$: tiếp xúc,

$d(I , \Delta) < R$: đường thẳng cắt đường tròn theo một dây.

- Tương giao của hai đường tròn (C) tâm I, bán kính R và (C') tâm I', bán kính R':

$II' > R + R'$: ngoài nhau, $II' = R + R'$: tiếp xúc ngoài

$|R - R'| < II' < R + R'$: cắt nhau

$II' = |R - R'|$: tiếp xúc trong, $II' < |R - R'|$: đựng nhau

- Tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (C) và (C'):

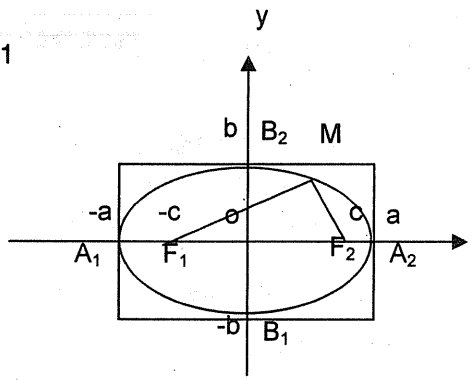
$$\Delta : ax + by + c = 0, a^2 + b^2 > 0 \text{ với } \begin{cases} d(I,\Delta) = R \\ d(I,\Delta') = R' \end{cases}$$

Đường Elip

$\{ M \mid MF_1 + MF_2 = 2a \}$, $a > c$ được gọi là đường elip.

F_1 và F_2 là hai tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip.

Phương trình chính tắc: (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



với $a > b > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$

Tiêu điểm: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

Trục lớn 2a, trục nhỏ 2b

Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$

Bán kính qua tiêu điểm:

$r_1 = MF_1 = a + ex$, $r_2 = MF_2 = a - ex$.

Hai đường chuẩn: $\Delta_{1,2}$: $x = \pm \frac{a}{e}$ ứng với hai tiêu điểm $F_{1,2}$.

Tiếp tuyến tại $M(x_0,y_0)$: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

Điều kiện tiếp xúc với đường thẳng Ax +By +C=0:

$$Aa^2 + Bb^2 = C^2, C \neq 0$$

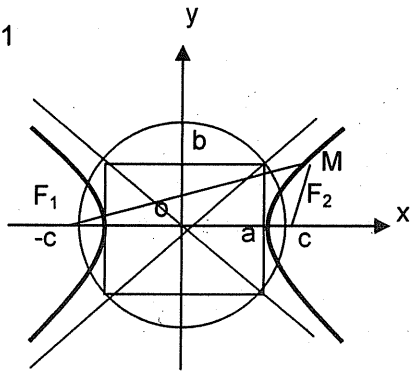
Điểm $M(x_0,y_0)$ nằm trong elip $\Leftrightarrow$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

Đường Hypebol

{M | $|MF_1 - MF_2| = 2a$ }, $a < c$ được gọi là đường hypebol.

F_1 và F_2 là hai tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của hypebol.

Phương trình chính tắc: (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



với $b^2 = c^2 - a^2$

Tiêu điểm: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

Trục thực 2a, trục ảo 2b

Tâm sai: $e = \frac{c}{a} > 1$

Bán kính qua tiêu điểm:

$MF_1 = |a + ex|$ và $MF_2 = |a - ex|$

Hai đường chuẩn: $\Delta_{1,2}$: $x = \pm \frac{a}{e}$ ứng với hai tiêu điểm $F_{1,2}$.

Tiệm cận: $y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx \pm ay = 0$.

Tiếp tuyến tại $M(x_0,y_0)$: $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

Điều kiện tiếp xúc với đường thẳng Ax +By +C=0: $Aa^2 - Bb^2 = C^2, C \neq 0$

Đường Parabol

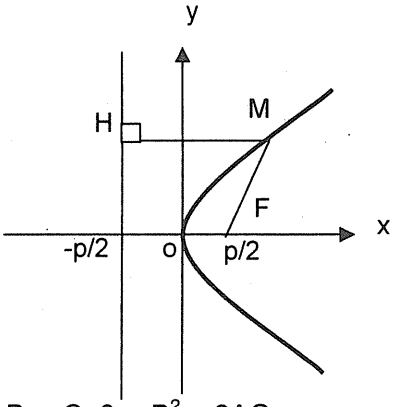
– Cho điểm F không nằm trên Δ. Tập hợp các điểm M mà khoảng cách từ M tới Δ và tới F bằng nhau gọi là đường parabol.

Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn của parabol.

Tham số tiêu p = d(F;Δ) > 0

Phương trình chính tắc: (P): $y^2 = 2px$

Tiêu điểm $F(\frac{p}{2};0)$.Tâm sai: $e = \frac{MF}{MH} = 1$



Đường chuẩn: $x = -\frac{p}{2}$

Bán kính qua tiêu điểm: $r = x + \frac{p}{2}$

Tiếp tuyến tại $M(x_0,y_0)$: $y_0y = p(x_0 + x)$.

Điều kiện tiếp xúc với đường thẳng Ax +By +C=0: $pB^2 = 2AC$

Ba đường conic

Cho đường thẳng Δ và điểm F nằm ngoài, và số e > 0. Tập hợp những điểm M sao cho tỉ số khoảng cách từ M tới F và tới Δ luôn bằng e là một đường cônic.

Nếu e < 1 cônic là đường elip , nếu e =1 cônic là đường parabol và nếu e > 1 cônic là đường hypebol.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 14. 1:

Cho tam giác ABC với các đường thẳng qua các cạnh AB: 2x – 3y + 7 = 0 ; BC : 2x – y + 1 = 0 ; CA : x – y + 3 = 0

Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 44$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$. Vậy A (–2 ; 1)

Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$. Vậy B (1 ; 3)

Tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$. Vậy C (2 ; 5)

Gọi M(x ; y). Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 44$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - 6y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{82}{9}$

Vậy tập hợp là đường tròn tâm $I(\frac{1}{3}; 3)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{82}}{3}$.

Bài toán 14. 2:

Cho n điểm $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$... $A_n(x_n; y_n)$ và n + 1 số: $k_1, k_2, ..., k_n, k$ thoả mãn $k_1 + k_2 + ... + k_n \neq 0$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_2^2 = k$.

Hướng dẫn giải

Gọi M(x; y), ta có: $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_2^2 = k$

$\Leftrightarrow [k_1(x - x_1)^2 + k_2(x - x_2)^2 + ... + k_n(x - x_n)^2] + [k_1(y - y_1)^2 +$
$k_2(y - y_2)^2 + ... + k_n(y - y_n)^2)] = k$

$\Leftrightarrow (k_1 + k_2 + ... + k_n)(x^2 + y^2) - 2(k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n)x - 2(k_1y_1 + k_2y_2 + ...$
$+ k_ny_n)y + k_1(x_1^2 + y_1^2) + k_2(x_2^2 + y_2^2) + ... + k_n(x_n^2 + y_n^2) = k.$

Đặt $a = \frac{k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n}{k_1 + k_2 + ... + k_n}$; $b = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + ... + k_ny_n}{k_1 + k_2 + ... + k_n}$

$$c = \frac{k_1(x_1^2 + y_1^2) + k_2(x_2^2 + y_2^2) + ... + k_n(x_n^2 + y_n^2) - k}{k_1 + k_2 + ... + k_n}$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c$

– Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I(a; b) bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

– Nếu $a^2 + b^2 - c = 0$ thì tập hợp các điểm M là điểm I(a; b)

– Nếu $a^2 + b^2 - c < 0$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng

Bài toán 14. 3:

Cho ba điểm A,O,B cố định theo thứ tự, OA = a, OB = b, a > b > 0. Tìm tập điểm những điểm M sao cho M nhìn 2 đoạn OA, OB dưới hai góc bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với A(–a; 0) và B (b; 0). Gọi $M(x_0; y_0)$ thì phương trình

MA: $y_0x - (x_0 + a)y + ay_0 = 0$; MB: $y_0x - (x_0 - b)y - by_0 = 0$

Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi MA và MB

$$\frac{y_0x - (x_0 + a)y + ay_0}{\sqrt{(x_0 + a)^2 + y_0^2}} \pm \frac{y_0x - (x_0 - b)y - by_0}{\sqrt{(x_0 - b)^2 + y_0^2}} = 0$$

Vì OMA = OMB nên một trong các đường phân giác đó phải đi qua gốc O:

$$\frac{ay_0}{\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}} \pm \frac{-by_0}{\sqrt{(x_0-b)^2+y_0^2}} = 0$$

Xét $y_0 = 0$ thỏa mãn. Xét $y_0 \neq 0$, vì a và b đều dương nên chọn:

$$\frac{a}{\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}} - \frac{b}{\sqrt{(x_0-b)^2+y_0^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\left[(x_0-b)^2+y_0^2\right] = b^2\left[(x_0+a)^2+y_0^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (-a+b)(x_0^2+y_0^2)+2abx_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+\frac{2ab}{-a+b}x_0 = 0$$

Vậy tập điểm là đường tròn tâm $I\left(\frac{ab}{a-b};0\right)$ và bán kính $\frac{ab}{a-b}$.

Bài toán 14. 4:

Lập phương trình đường tròn đi qua:

a) M(1 ; 2), N(5 ; 2), P(1 ; –3).

b) A(–1; 2),B(–2;3) và có tâm thuộc đường thẳng Δ:3x –y +10 = 0.

Hướng dẫn giải

a) Đường tròn có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

Đường tròn đi qua 3 điểm M,N,P nên:

$$\begin{cases} 1+4+2a+4b+c=0 \\ 25+4+10a+4b+c=0 \\ 1+9+2a-6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b+c=-5 \\ 10a+4b+c=-29 \\ 2a-6b+c=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 – 6x + y – 1 = 0$.

b) Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn, ta có:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ I \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2+(b-2)^2 = (a+2)^2+(b-3)^2 \\ 3a-b+10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=-8 \\ 3a-b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy I(–3 ; 1),R = IA = $\sqrt{5}$

Vậy phương trình đường tròn là $(x + 3)^2 + (y – 1)^2 = 5$.

Bài toán 14. 5:

Lập phương trình đường tròn qua 2 giao điểm của 2 đường tròn:

(C_1): $x^2 + y^2 – 4x = 0$, (C_2): $x^2 + y^2 – 4y = 0$

Và có bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải:

(C_1): $(x-2)^2 + y^2 = 4$ có tâm $I(2;0)$, $R_1 = 2$

(C_2): $x^2 + (y-2)^2 = 4$ có tâm $J(0;2)$, $R_2 = 2$

Vì $IJ = 2\sqrt{2} \Rightarrow R_1 - R_2 < IJ < R_1 + R_2$ nên 2 đường tròn cắt nhau tại A, B.

Xét chùm đường tròn (C_m) qua A, B cho bởi phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + m(x^2 + y^2 - 4y) = 0$

Đường tròn (C_m) có bán kính $R = \sqrt{\dfrac{4+4m^2}{(m+1)^2}}$

nên $R = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 4m^2 + 10m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ hay $m = -2$

Vậy có 2 đường tròn: $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$.

Bài toán 14. 6:

Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết phương trình các cạnh: AB: $3x + 4y - 6 = 0$; AC: $4x + 3y - 1 = 0$; BC: $y = 0$.

Hướng dẫn giải

Toạ độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-2;3)$$

Tương tự, ta tính được $B(2; 0)$, $C(\dfrac{1}{4}; 0)$

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A là:

$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{4x+3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y + 5 = 0 & (1) \\ x + y - 1 = 0 & (2) \end{bmatrix}$$

Thay lần lượt toạ độ của B, C vào vế trái của (1), ta được:

$$2 + 5 = 7 > 0;\ \frac{1}{4} + 5 > 0$$

Vậy (2) là phương trình đường phân giác trong của góc A.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc B là:

$$\frac{3x+4y-6}{5} = \pm y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x - y - 6 = 0 & (3) \\ x + 3y - 2 = 0 & (4) \end{bmatrix}$$

Thay lần lượt toạ độ của A, C vào vế trái của (4), thì (4) là phương trình đường phân giác trong của góc B.

Gọi $I(x; y)$ và r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó toạ độ của I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ r = d(I; BC) = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp là: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Bài toán 14. 7:

Lập phương trình của đường tròn đi qua gốc toạ độ và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1: 2x + y – 1 = 0, d_2: 2x – y + 2 = 0.

Hướng dẫn giải

Gọi I(a , b) là tâm của đường tròn (C), ta có:

(C) qua O và (C) và tiếp xúc với $d_1$và $d_2$khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} d(I,d_1)=d(I,d_2) \\ d(I,d_1)=IO \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2a+b-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2a-b+2|}{\sqrt{5}} & (1) \\ \dfrac{|2a+b-1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{a^2+b^2} & (2) \end{cases}$$

Giải (1) :Xét: 2a + b – 1 = 2a – b + 2 $\Leftrightarrow$ b = $\frac{3}{2}$

Thay vào (2) ta có: $\left|2a+\frac{1}{2}\right|=\sqrt{5(a^2+\frac{9}{4})}$

$\Leftrightarrow 4a^2+2a+\frac{1}{4}=5a^2+\frac{45}{4} \Leftrightarrow a^2-2a+11=0$ (VN)\

Xét 2a + b – 1 = –2a + b – 2 $\Leftrightarrow$ a = $-\frac{1}{4}$.Thay vào (2) ta có:

$$\left|b-\frac{3}{2}\right|=\sqrt{5\left(\frac{1}{16}+b^2\right)} \Leftrightarrow b^2-3b+\frac{9}{4}=5b^2+\frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow 64b^2+48b-31=0 \quad \Leftrightarrow b_{1,2}=\frac{-3\pm 2\sqrt{10}}{8}$$

Vậy phương trình của đường tròn:

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{3\pm 2\sqrt{10}}{4}\right)y=0.$$

Bài toán 14. 8:

Cho (C_m): $x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$, với m là tham số.

a) Tìm m để (C_m) là đường tròn, tìm tập hợp các tâm khi m thay đổi.

b) Tìm đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường tròn (C) : $x^2+y^2-1=0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a^2 + b^2 - c = 5m^2 + 2m + 6 > 0, \forall m$ nên (C_m) luôn là đường tròn với mọi m và có tâm I $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = -2m \end{cases}$.

Khử m thì tập hợp các tâm là đường thẳng $2x + y - 2 = 0$.

b) (C_m) là tâm I(m + 1 ; –2m) , r = $\sqrt{5m^2 + 2m + 6}$

(C) là tâm O(0 ; 0) , R = 1.

– Hai đường tròn tiếp xúc ngoài: OI = R + r $\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 1} = 1 + \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$

Phương trình vô nghiệm vì VT < VP

– Hai đường tròn tiếp xúc trong:

$OI = |R - r| \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 1} = |1 - \sqrt{5m^2 + 2m + 6}|$

$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 1} = \sqrt{5m^2 + 2m + 6} - 1$ (vì $\sqrt{5m^2 + 2m + 6} > 1$)

$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m + 1 = 5m^2 + 2m + 6 + 1 - 2\sqrt{5m^2 + 2m + 6}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{5m^2 + 2m + 6} = 6 \Leftrightarrow 5m^2 + 2m + 6 = 9$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hay $m = \frac{3}{5}$

Vậy có 2 đường tròn của (C_m) tiếp xúc với (C).

Bài toán 14. 9:

Cho đường tròn (C_m): $x^2 + y^2 + (m + 2)x - (m + 4)y + m + 1 = 0$. Tìm những điểm trong mặt phẳng toạ độ mà họ (C_m) không đi qua dù m lấy bất kì giá trị nào.

Hướng dẫn giải

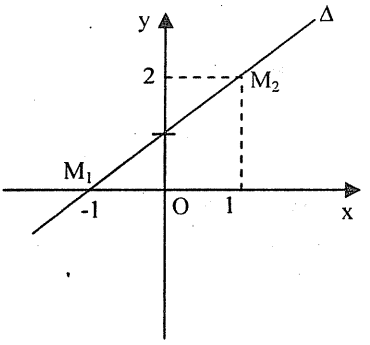
Ta có :$a^2 + b^2 - c = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - (m + 1) = \frac{m^2 + 4m + 8}{2} > 0$, với mọi m nên (C_m) là đường tròn với mọi giá trị của m.

(C_m) không đi qua điểm $(x_1; y_1)$ với mọi m khi và chỉ khi phương trình theo ẩn m: $(x_1 - y_1 + 1)m + x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 - 4y_1 + 1 = 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4y_1 + 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + 1 \\ x_1 \neq \pm 1 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ mà họ (C_m) không đi qua là đường thẳng Δ: y = x + 1, bỏ đi hai điểm cố định $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 2)$.



Bài toán 14. 10:

Chứng minh các họ đường thẳng: $\cos2\alpha.x + \sin2\alpha.y + 4\cos^2\alpha - 5 = 0$ luôn luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\cos2\alpha.x + \sin2\alpha.y + 4\cos^2\alpha - 5 = 0$

$(x + 2)\cos2\alpha + y.\sin2\alpha = 3$

Điều kiện có nghiệm: $(x + 2)^2 + y^2 \geq 3^2$

Xét đường tròn (C) tâm I(–2;0) và bán kính R = 3 ta có:

$$d(I;d) = \frac{\left|\cos 2\alpha.2 + \sin 2\alpha.0 + 4\cos^2\alpha - 5\right|}{\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}} = 3 = R$$

Vậy các đường thẳng luôn luôn tiếp xúc đường tròn cố định (C):

$$(x + 2)^2 + y^2 = 9.$$

Bài toán 14. 11:

Cho họ đường tròn: (C_m): $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

a) Chứng minh họ (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

b) Tìm m để (C_m) cắt đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh khi đó trục đẳng phương song song với 1 đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải:

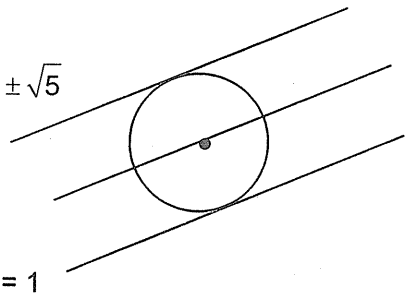
a) Ta có: (C_m): $(x - m)^2 + (y + 2m)^2 = 1$ có tâm I(m;–2m), R = 1

Tập hợp tâm I là đường thẳng (Δ) có phương trình y = –2x

Vì họ (C_m) có R = 1 không đổi và I chạy trên (Δ) nên (C_m) tiếp xúc với 2 đường thẳng song song (Δ) và cách (Δ) một đoạn bằng 1: y = –2x + k

Lấy M(x,y) thuộc các đường thẳng này thì:

$$1 = R = d(M;\Delta) = \frac{\left|2x + y\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|k\right|}{\sqrt{5}} \text{ nên: } k = \pm\sqrt{5}$$



Vậy các đường tròn luôn luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định là

$$y = -2x + \sqrt{5} \text{ và } y = -2x - \sqrt{5}$$

b) Đường tròn (C) có tâm O(0;0), bán kính R' = 1

Ta có: (C_m) cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow |R' - R| < OI < R' + R \Leftrightarrow 0 < OI < 2$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{5m^2} < 2 \quad \Leftrightarrow m < \frac{2}{\sqrt{5}}, m \neq 0$$

Trục đẳng phương có phương trình: $PM/(C) = PM/(C_m)$

$\Leftrightarrow 2mx - 4my - 5m^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 5m = 0$

Vậy AB luôn song song với 1 đường thẳng cố định: $x - 2y = 0$.

Bài toán 14. 12:

Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$ tại M(2 ; 1)

b) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ và đi qua N(2 ; 0).

Hướng dẫn giải

a) Tiếp tuyến tại M: $x_M.x + y_M.y + 2(x_M+x) + 2(y_M+y) - 17 = 0$

$2x + y + 2(2 + x) + 2(1 + y) - 17 = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 11 = 0.$

b) Đường tròn có tâm I(–1 ; –1) , bán kính R = 1.

Gọi phương trình tiếp tuyến là $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

Tiếp tuyến đi qua điểm N(2 ; 0) nên $2A + C = 0$ vậy $C = -2A$

Do đó Δ: $Ax + By - 2A = 0$

Điều kiện tiếp xúc: $d(I , \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|-3A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$\Leftrightarrow A^2 + B^2 = (-3A - B)^2$

$\Leftrightarrow 8A^2 + 6AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ hoặc $4A + 3B = 0$

Với A = 0, chọn B = 1 ta có tiếp tuyến y = 0.

Với 4A + 3B = 0, chọn A = 3 và B = –4 ta có tiếp tuyến $3x - 4y + 6 = 0$.

Bài toán 14. 13:

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

(C): $x^2 + y^2 - 1 = 0$; (C'): $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) tâm O(0 ; 0) , bán kính R = 1.

Đường tròn (C') tâm I (8 ; 6) , bán kính R' = 4

Gọi tiếp tuyến chung là $Ax + By + C = 0$, $(A^2 + B^2 \neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} d(O,\Delta) = R \\ d(I,\Delta) = R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 & (1) \\ \dfrac{|8A + 6B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 4 & (2) \end{cases}$

Từ đó suy ra $|8A + 6B + C| = 4|C|$ hay $8A + 6B + C = \pm 4C$

Trường hợp 1: Với $8A + 6B + C = 4C \Leftrightarrow C = \dfrac{8}{3}A + 2B$

$(1) \Leftrightarrow \left|\dfrac{8}{3}A + 2B\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\Leftrightarrow 64A^2 + 96AB + 36B^2 = 9A^2 + 9B^2$

$\Leftrightarrow 55A^2 + 96AB + 27B^2 = 0$

Giải phương trình đó với ẩn là A ta được: $A = \dfrac{-48B \pm 3B\sqrt{91}}{55}$

Ta chọn B = 55 thì $A = -48 \pm 3\sqrt{91}$ và $C = -18 \pm 8\sqrt{91}$

Vậy ta được hai tiếp tuyến chung là:

$(-48 + 3\sqrt{91})x + 55y - 18 + 8\sqrt{91} = 0$ và

$(-48 - 3\sqrt{91})x + 55y - 18 - 8\sqrt{91} = 0$

Trường hợp 2: Với $8A + 6B + C = -4C \Leftrightarrow C = -\dfrac{8}{5}A - \dfrac{6}{5}B$

$$(1) \Leftrightarrow \left|-\frac{8}{5}A - \frac{6}{5}B\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$\Leftrightarrow 64A^2 + 96AB + 36B^2 = 25A^2 + 25B^2$

$\Leftrightarrow 39A^2 + 96AB + 11B^2 = 0$

Giải tương tự ta có thêm hai tiếp tuyến chung là:

$(-48 + 25\sqrt{3})x + 39y + 30 - 40\sqrt{3} = 0$ và

$(-48 - 25\sqrt{3})x + 39y + 30 + 40\sqrt{3} = 0$.

Bài toán 14. 14:

Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ và điểm A(2 ; 1)

a) Chứng minh qua điểm A vẽ được hai tiếp tuyến đến (C).

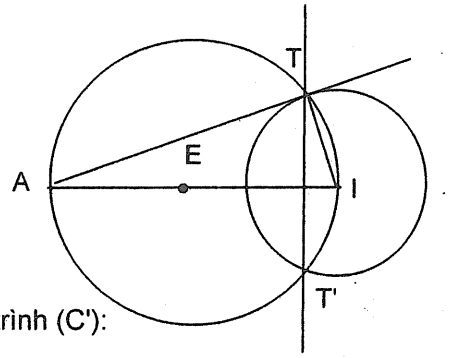
b) Lập phương trình đường thẳng qua hai tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

a) (C) có tâm I = (–4 ; –2) , R = 5.

$\mathcal{P}_{A/(C)} = 4 + 1 + 16 + 4 - 5 > 0$ nên A ở ngoài (C), do đó qua A vẽ được 2 tiếp tuyến đến (C).

b) Đường thẳng qua 2 tiếp điểm T, T' là đường thẳng đi qua 2 giao điểm của đường tròn (C) với đường tròn (C') đường kính IA.



Trung điểm của IA là $E(-1 ; -\dfrac{1}{2})$

Bán kính $r = \dfrac{IA}{2} = \dfrac{\sqrt{45}}{2}$ nên có phương trình (C'):

$$(x + 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + y - 10 = 0$$

Các điểm M(x ; y) thuộc đường thẳng TT' có toạ độ thoả mãn:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

Do đó: $8x - 2x + 4y - y - 5 + 10 = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 5 = 0$.

Vậy đường thẳng TT': $6x + 3y + 5 = 0$ (là trục đẳng phương).

Bài toán 14. 15:

Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$ và điểm $M(x_o; y_o)$ nằm ngoài (C). Từ M thay đổi trên đường thẳng d cố định không cắt (C), ta kẻ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 tới (C). Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm O(0; 0) bán kính R. Gọi $T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$.

Phương trình tiếp tuyến MT_1 có dạng $x_1x + y_1y = R^2$ và tiếp tuyến MT_2 có dạng: $x_2x + y_2y = R^2$.

$$M \in MT_1, M \in MT_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_o + y_1y_o = R^2 \\ x_2x_o + y_2y_o = R^2 \end{cases}$$

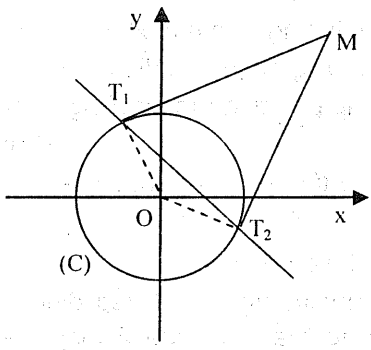
Suy ra $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ là các nghiệm của phương trình

$$x_ox + y_oy = R^2 \qquad (1).$$

Vì M nằm ngoài (C) nên $x_o^2 + y_0^2 > 0$, do đó (1) là phương trình đường thẳng. Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là $x_ox + y_oy - R^2 = 0$.

Xét trường hợp đường thẳng cố định d có phương trình dạng: $x = a$ ($|a| > R$).

Khi đó M $(a; y_o)$ và phương trình T_1T_2 là $ax + y_oy - R^2 = 0$ luôn đi qua điểm cố định $K\left(\frac{R^2}{a}; 0\right)$



Xét trường hợp đường thẳng d có phương trình dạng $y = kx + m$. Do d không cắt (C) nên $m \neq 0$.

Ta có $M(x_o; kx_o + m)$. Phương trình đường thẳng T_1T_2 là

$x_ox + (kx_o + m)y - R^2 = 0$ hay $x_o(x + ky) + my - R^2 = 0$ luôn đi qua điểm cố định là $K\left(\frac{-kR^2}{m}; \frac{R^2}{m}\right)$.

Bài toán 14. 16:

Cho đường tròn (C) có tâm I(0 ; 1), bán kính R = 1 và đường thẳng d : y = 3. Hai điểm di động M trên d và T trên Ox.

a) Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta luôn tìm được hai điểm T_1 và T_2 trên Ox để MT_1 và MT_2 tiếp xúc với (C).

b) Tìm tập hợp tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác MT_1T_2 .

Hướng dẫn giải

a) Gọi M(m ; 3) và T(t ; 0).

Phương trình đường thẳng MT là: $3x + (t - m)y - 3t = 0$.

MT tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi:

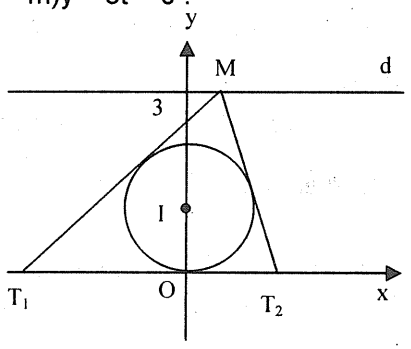
$d(I, MT) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|(t-m)-3t|}{\sqrt{9+(t-m)^2}} = 1$

$\Leftrightarrow (m + 2t)^2 = 9 + (t - m)^2$

$\Leftrightarrow t^2 + 2mt - 3 = 0$

$\Delta' = m^2 + 3 > 0$ nên nó luôn luôn có hai nghiệm t_1 và t_2 : đpcm.



b) Gọi (C') : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác MT_1T_2 với M(m ; 3) , T_1 (t_1 ; 0) và T_2 (t_2 ; 0).

Ta có: $\begin{cases} m^2 + 9 + 2am + 6b + c = 0 \\ t_1^2 + 2at_1 + c = 0 \\ t_2^2 + 2at_2 + c = 0 \end{cases}$

Suy ra: $t_1^2 - t_2^2 + 2a(t_1 - t_2) = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{t_1 + t_2}{2} = m$

Từ đó tính được $c = -3$; $b = -\dfrac{1}{2}m^2 - 1$ nên phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MT_1T_2 là :

$x^2 + y^2 + 2mx - (m^2 + 2)y - 3 = 0$

Tâm E có toạ độ : $x = -m$, $y = \dfrac{m^2}{2} + 1$

Khử m thì có tập hợp các tâm là parabol $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

Bài toán 14. 17:

Cho đường tròn (C) đi qua ba điểm A(2; –2), B(0; 2), C(0; –2). Tiếp tuyến tại A của (C) cắt trục tung tại P, tiếp tuyến tại B của (C) cắt AC tại Q, tiếp tuyến tại C của (C) cắt AB tại R. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$

Tiếp tuyến tại A(2; –2) có phương trình: $x - 2y - 6 = 0$, cắt trục tung tại P(0; –3).

Tiếp tuyến tại B(0; 2) có phương trình: $2y - x - 4 = 0$, cắt đường thẳng AC: $y = -2$ tại điểm Q(–8; –2)

Tiếp tuyến tại C có phương trình: $2y + x + 4 = 0$ cắt đường thẳng AB:

$2x + y - 2 = 0$ tại điểm $R\left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{10}{3}\right)$

Ta có $\overrightarrow{PR} = (\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}), \overrightarrow{PQ} = (-8, 1) = -3\overrightarrow{PR}$ nên ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Bài toán 14. 18:

Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua:

a) Hai điểm M(4 ; $\frac{9}{5}$) và N(3; $\frac{12}{5}$).

b) Điểm M$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Hướng dẫn giải

Phương trình chính tắc (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

a) (E) đi qua M(4 ; $\frac{9}{5}$) và N(3; $\frac{12}{5}$) nên có:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{81}{25b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases}$$. Vậy (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Vì M$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \in$ (E) nên $\frac{9}{5a^2} + \frac{16}{5b^2} = 1$

Ta có: $F_1MF_2 = 90° \Rightarrow OM = \frac{F_1F_2}{2} = c$

$\Rightarrow c^2 = OM^2 = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 5$

Do đó: $\frac{9}{5(b^2+5)} + \frac{16}{5b^2} = 1 \Leftrightarrow 9b^2 + 16(b^2 + 5) = 5b^2(b^2 + 5)$

$\Leftrightarrow b^4 = 16 \Leftrightarrow b^2 = 4$. Suy ra $a^2 = 9$. Vậy (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài toán 14. 19:

Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua M(1; 1) và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Δ có VTCP $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

I(1; 1) là trung điểm đoạn AB:

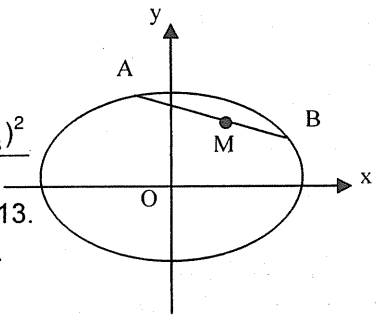
$x_A + x_B = 2$; $y_A + y_B = 2$

Nên $x_A^2 = (2 - x_B)^2$, $y_A^2 = (2 - y_B)^2$

Vì A, B ∈ (E): $\frac{x_A^2}{9} + \frac{y_A^2}{4} = 1 = \frac{(2-x_B)^2}{9} + \frac{(2-y_B)^2}{4}$

Suy ra $4x_B + 9y_B = 13$, tương tự: $4x_A + 9y_A = 13$.

Vậy phương trình cần tìm là: $4x + 9y - 13 = 0$.



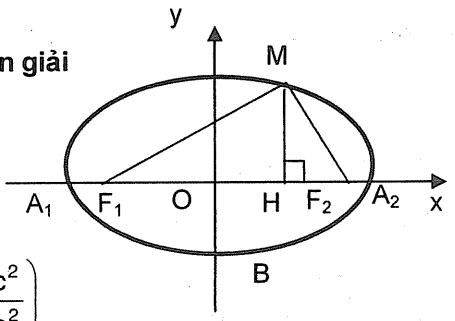
Bài toán 14. 20:

Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$ (a > b > 0). Gọi A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E), M là điểm tuỳ ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H. Chứng minh rằng:

a) $MF_1 . MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$, $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$.

b) $HM^2 = -\frac{b^2}{a^2}.\overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{HA_2}$.

Hướng dẫn giải



$M(x; y) \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) $MF_1 . MF_2 + OM^2$

$= (a + ex)(a - ex) + x^2 + y^2$

$= a^2 - e^2x^2 + x^2 + y^2 = a^2 + y^2 + x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$

$= a^2 + y^2 + b^2\frac{x^2}{a^2} = a^2 + y^2 + b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2$

và $(MF_1 - MF_2)^2 = 4e^2x^2$

$4(OM^2 - b^2) = 4(x^2 + y^2 - b^2) = 4.\left[x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) - b^2\right]$

$= 4x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 4e^2x^2$: đpcm.

b) Ta có $HM^2 = y^2$ và

$-\frac{b^2}{a^2}\overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{HA_2} = -\frac{b^2}{a^2}(-a - x)(a - x) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$

$= b^2 - (b^2 - y^2) = y^2 \Rightarrow HM^2 = -\frac{b^2}{a^2}\overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{HA_2}$.

Bài toán 14. 21:

Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến thay đổi. Chứng minh tích khoảng cách từ hai tiêu điểm F_1 , F_2 của (E) đến đường thẳng Δ không đổi.

Hướng dẫn giải

Gọi tiếp tuyến Δ : Ax + By + C = 0 ($A^2+B^2>0$) thì $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$.

(E) có hai tiêu điểm là F_1 (–c; 0) và F_2 (c ; 0) . Ta có:

$$d(F_1,\Delta).d(F_2,\Delta)=\frac{|-cA+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\frac{|cA+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|c^2A^2-C^2|}{A^2+B^2}$$

$$=\frac{|b^2(A^2+B^2)|}{A^2+B^2}=b^2 \text{ : không đổi.}$$

Bài toán 14. 22:

Cho điểm $I(x_0; y_0)$ nằm trong (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b).

a) Gọi d và d' là hai đường thẳng đi qua I và vuông góc với nhau, d cắt (E) tại A và B, d' cắt (E) tại A' và B'. Chứng minh rằng $\frac{1}{IA.IB}+\frac{1}{IA'.IB'}$ có giá trị không đổi.

b) Nếu M, N là hai điểm nằm trên (E) sao cho OMN là tam giác vuông tại O. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử đường thẳng d đi qua $I(x_0, y_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(\alpha;\beta)$. Khi đó tọa độ giao điểm của d và (E) là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t \text{ , } y=y_0+\beta t \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Suy ra: $\frac{(x_0+\alpha t)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta t)^2}{b^2}=1$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0.$$

Vì điểm $I(x_0; y_0)$ nằm trong (E) nên $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1\Rightarrow P<0$.

Gọi t_1 và t_2 là hai nghiệm và A, B là các giao điểm của d và (E) thì $\overrightarrow{IA} = t_1\vec{u}$ và $\overrightarrow{IB} = t_2\vec{u}$. Do đó IA.IB = $\left|\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\right| = \left|t_1.t_2\right|.\vec{u}^2$

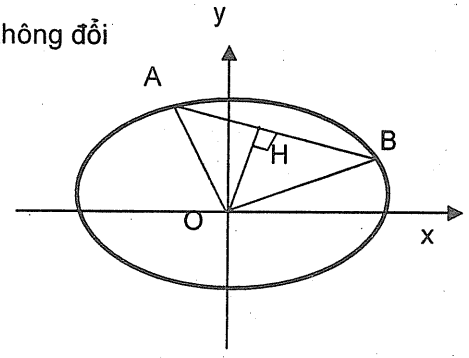
Mà $\left|t_1.t_2\right| = \left|\dfrac{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1}{\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}}\right| = \dfrac{1-\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)}{\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}}$

Nên IA.IB = $\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\dfrac{\alpha^2}{a}+\dfrac{\beta^2}{b^2}}$

Và tương tự IA'.IB' = $\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\alpha^2}{a}}$. Do đó:

$$\frac{1}{IA.IB}+\frac{1}{IA'.IB'} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{b^2}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2-b^2x_0^2-a^2y_0^2} : \text{không đổi}$$



b) Khi I trùng với điểm O, tức $x_0 = y_0 = 0$ thì IA = IB = OM, IA' = IB' = ON, và kết quả ở trên cho ta :

$$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

Nếu gọi OH là đường cao của tam giác vuông OAB thì $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{ON^2}$

nên OH = $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Vậy các đường thẳng MN luôn luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính

R = $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Bài toán 14. 23:

Cho elip (E). Chứng minh rằng:

a) Nếu một hình bình hành ngoại tiếp (E) (tức là bốn cạnh của hình bình hành đó đều tiếp xúc với (E) thì tâm của hình bình hành trùng với tâm của (E).

b) Nếu một hình thoi ngoại tiếp (E) thì các đỉnh của nó phải nằm trên các trục đối xứng của (E). Tính diện tích bé nhất của hình thoi ngoại tiếp một elip (E) đã cho.

Hướng dẫn giải

a) Gọi elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a> b >0_.

Nếu hai đường thẳng song song Ax + By + C = 0 và Ax + By + C' = 0, C' ≠ C cùng tiếp xúc với (E) thì

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2 = C'^2 \text{ nên } C = -C' .$$

Vậy hai đường thẳng đó đối xứng với nhau qua tâm O của elip. Từ đó suy ra nếu hình bình hành ABCD ngoại tiếp (E) thì O là tâm hình bình hành đó.

b) Giả sử hai cạnh liên tiếp của hình thoi ngoại tiếp (E) có phương trình lần lượt là:Ax + By + C = 0 và A'x + B'y + C' = 0

với $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$ và $a^2A'^2 + b^2B'^2 = C'^2$.

Tâm O của hình thoi cách đều hai cạnh đó nên:

$$\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}} \Leftrightarrow \frac{a^2A^2+b^2B^2}{A^2+B^2}=\frac{a^2A'^2+b^2B'^2}{A'^2+B'^2}$$

$\Leftrightarrow (A'^2 + B'^2)(a^2A^2 + b^2B^2) = (A^2 + B^2)(a^2A'^2 + b^2B'^2)$

$\Leftrightarrow (a^2 – b^2)(A^2B'^2 – A'^2B^2) = 0 \Leftrightarrow (AB' – A'B)(AB' + A'B) = 0.$

Vì hai cạnh đó không song song nên AB' – A'B ≠ 0, do đó phải có AB' + A'B = 0. Ta có thể xem A' = –A và B' = B.

Khi đó: $C^2 = a^2A^2 + b^2B^2 = aA'^2 + b^2B'^2 = C'^2$ hay C = ±C'.

Vậy nếu một cạnh hình thoi có phương trình Ax + By + C = 0 thì cạnh liên tiếp với nó có phương trình –Ax + By ± C = 0. Từ đó suy ra đỉnh hình thoi phải nằm trên trục Ox hoặc Oy.

Giao điểm của đường thẳng cạnh của hình thoi có phương trình Ax + By + C = 0, với $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$ với hai trục Ox và Oy là hai đỉnh M, N của hình thoi:

Vậy $M\left(-\frac{C}{A};0\right)$ và $N\left(0;-\frac{C}{B}\right)$. Diện tích S của hình thoi là:

$$S = 2OM.ON = 2\left|\frac{C^2}{AB}\right| = 2\frac{a^2A^2+b^2B^2}{|AB|} \geq \frac{4ab\sqrt{A^2B^2}}{|AB|} = 4ab$$

Dấu "=" xảy ra khi $a^2A^2 = b^2B^2 = \frac{C^2}{2}$

Bài toán 14. 24:

Tìm tập điểm những điểm M sao cho từ đó có thể vẽ hai tiếp tuyến vuông góc tới một đường elip (E) đã cho.

Hướng dẫn giải

Gọi (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a> b > 0). Giả sử điểm M(x_0; y_0). Hai đường thẳng đi qua M và vuông góc với nhau có phương trình:

$Ax + By – (Ax_0 + By_0) = 0$ và $Bx – Ay – (Bx_0 – Ay_0) = 0$

Vì hai đường thẳng đó đều là tiếp tuyến của elip nên:

$a^2A^2 + b^2B^2 = (Ax_0 + By_0)^2$ và $a^2B^2 + b^2A^2 = (Bx_0 – Ay_0)^2$

Từ đó suy ra:

$a^2A^2 + b^2B^2 + a^2B^2 + b^2A^2 = (Ax_0 + By_0)^2 + (Bx_0 – Ay_0)^2$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(A^2 + B^2) = (A^2 + B^2)((x_0^2 + y_0^2) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$

Vậy tập điểm các điểm M là đường tròn tâm O bán kính R = $\sqrt{a^2+b^2}$.

Bài toán 14. 25:

Cho elip (E) và một đường thẳng d cố định. Một đường thẳng d' thay đổi song song hoặc trùng với d, cắt (E) tại A và B. Tìm tập điểm trung điểm I của đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Gọi (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a> b > 0), đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(\alpha;\beta)$ và điểm I(x_0; y_0). Khi đó tọa độ giao điểm A, B của d' và elip (E) thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \ , y = y_0 + \beta t \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$

Suy ra: $\frac{(x_0+\alpha t)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta t)^2}{b^2}=1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$

Vì I là trung điểm của AB nên phương trình trên phải có hai nghiệm đối nhau:

$P \le 0$ và $S = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\le 1$ và $\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}=0$

Vậy tập điểm I là phần đường thẳng $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=0$ nằm trong hoặc trên elip (E).

Bài toán 14. 26:

Viết phương trình chính tắc của hypebol

a) Tâm sai e = $\sqrt{5}$ và đi qua M ($\sqrt{10}$; 6).

b) Độ dài trục ảo bằng 6 và hai đường tiệm cận vuông góc nhau.

Hướng dẫn giải

Hypebol có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

a) Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c=\sqrt{5}a \\ \frac{10}{a^2}-\frac{36}{b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5a^2 \\ \frac{10}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=4 \end{cases}$$ .Vậy (H) : $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$.

b) Ta có $2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Các đường tiệm cận vuông góc với nhau, suy ra $a = b = 3$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$.

Bài toán 14. 27:

Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ và đường thẳng Δ: $x - y + m = 0$.

a) Chứng minh rằng Δ luôn cắt (H) tại hai điểm M, N ($x_M < x_N$) thuộc hai nhánh khác nhau của (H).

b) Gọi F_1 là tiêu điểm trái và F_2 là tiêu điểm phải của (H). Xác định m để $F_2N = 2F_1M$.

Hướng dẫn giải

a) (H) : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow a = 2; b = \sqrt{5}$; $c = 3$

(H) có hai nhánh: nhánh trái ứng với $x \le -2$, nhánh phải ứng với $x \ge 2$.

Hoành độ giao điểm của (H) và Δ là nghiệm của phương trình:

$$5x^2 - 4.(x + m)^2 - 20 = 0, \text{ hay } x^2 - 8mx - 4(m^2 + 5) = 0$$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m. Do đó Δ luôn cắt (H) tại hai điểm M và N thuộc hai nhánh khác nhau : $x_M \le -2, 2 \le x_N$.

b) (H) có các tiêu điểm $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$

$$F_2N = \left|a-\frac{c}{a}x_N\right| = \frac{3}{2}x_N - 2 \text{ , } F_1M = \left|a+\frac{c}{a}x_M\right| = -\frac{3}{2}x_M - 2$$

$$F_2N = 2F_1N \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_N - 2 = 2(-\frac{3}{2}x_M - 2) \Leftrightarrow 3x_N + 6x_M + 4 = 0$$

Theo định lí Viét: $\begin{cases} x_M + x_N = 8m \\ x_M.x_N = -4(m^2 + 5) \end{cases}$

Do đó: $x_M = -\frac{4}{3} - 8m$, $x_N = \frac{4}{3} + 16m$.

nên ta có: $(-\frac{4}{3} - 8m)(\frac{4}{3} + 16m) = -4(m^2 + 5)$

$\Leftrightarrow 279m^2 + 72m - 41 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{1415}}{93}$.

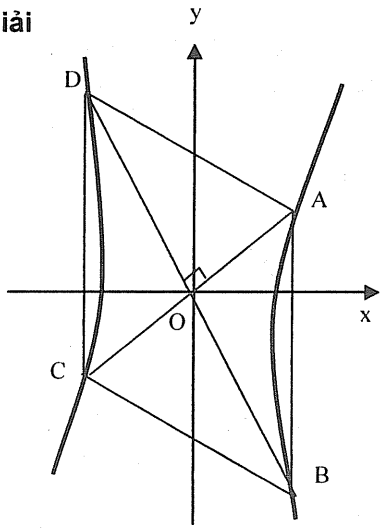
Bài toán 14. 28:

Cho hypebol (H) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O và có hệ số góc k, Δ' là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

a) Tìm điều kiện của k để cả Δ và Δ' đều cắt (H)

b) Xác định k để diện tích tứ giác có bốn đỉnh là bốn giao điểm của Δ và Δ' với (H) có giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



a) Từ giả thiết suy ra Δ: $y = kx$, Δ': $y = -\frac{1}{k}x$

Hoành độ giao điểm của Δ và (H) là nghiệm của phương trình:

$9x^2 - 4k^2x^2 = 36 \Leftrightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36$

Δ cắt (H) khi $9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2}$

Tung độ giao điểm của Δ' và (H) là nghiệm của phương trình

$9k^2y^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2 - 4)y^2 = 36$

Δ' cắt (H) khi $9k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |k| > \frac{2}{3}$

Vậy Δ và Δ' đều cắt (H) khi và chỉ khi : $\frac{2}{3} < |k| < \frac{3}{2}$

b) Gọi A và C là các giao điểm của Δ và (H) ($x_A > 0$); B và D là các giao điểm của Δ' và (H), $y_B < 0$). Do (H) nhận gốc O làm tâm đối xứng nên OA = OC, OB = OD do đó ABCD là hình bình hành. Mà AC vuông góc với BD nên ABCD là hình thoi.

Giải hệ các phương trình của Δ và (H): $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases}$

thì $A\left(\frac{6}{\sqrt{9 - 4k^2}}; \frac{6k}{\sqrt{9 - 4k^2}}\right)$. Tương tự $B\left(\frac{6k}{\sqrt{9k^2 - 4}}; \frac{-6}{\sqrt{9k^2 - 4}}\right)$

Ta có $S_{ABCD} = 4S_{OAB} = 2OA.OB = \dfrac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}$

Áp dụng bất đẳng AM–GM: $\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)} \le \dfrac{5+5k^2}{2} = \dfrac{5}{2}(1+k^2)$

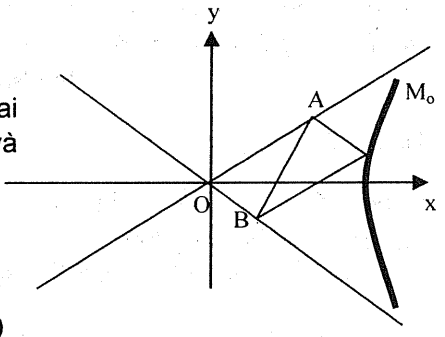
Nên $S_{ABCD} \ge \dfrac{144}{5}$. Vậy S_{ABCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 9-4k^2 = 9k^2-4 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Bài toán 14. 29:

Cho hypebol (H). Chứng minh diện tích của hình bình hành xác định bởi hai đường tiệm cận và hai đường thẳng đi qua một điểm trên (H) và song song với hai đường tiệm cận là một hằng số.

Hướng dẫn giải

Gọi (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Qua điểm M_o tuỳ ý trên (H) kẻ hai đường song song với hai tiệm cận và cắt hai tiệm cận tại B và A.

Đặt A $(m, \dfrac{b}{a}m)$; B $(n, \dfrac{b}{a}n)$ ta có:

$\overrightarrow{OM_o} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (m+n, \dfrac{b}{a}(m-n))$

$M_o \in (H) \Rightarrow \dfrac{(m+n)^2}{a^2} - \dfrac{(m-n)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow 4mn = a^2 \Rightarrow mn = \dfrac{a^2}{4}$

Gọi S là diện tích hình bình hành OAM_oB, ta có:

$S = 2.\ S_{OAB} = OA.\ OB.\ \sin AOB$

$= \left| m\left(-\dfrac{b}{a}n\right) - \left(\dfrac{b}{a}m\right).n \right| = \dfrac{b}{a}\left|-2mn\right| = \dfrac{ab}{2}$: không đổi

Bài toán 14. 30:

Hình bình hành ABCD có hai đỉnh A và C nằm trên hypebol (H), các cạnh của hình bình hành đều song song với các đường tiệm cận của (H). Chứng minh rằng các đường thẳng BD luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, $D(x_D; y_D)$.

Vì A, C thuộc (H) nên: $\dfrac{x_A^2}{a^2} - \dfrac{y_A^2}{b^2} = 1, \dfrac{x_C^2}{a^2} - \dfrac{y_C^2}{b^2} = 1$

Các vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_B; x_A; y_B - y_A)$ và $\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C; y_B - y_C)$ phải song song với các đường tiệm cận có các vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b)$ và $\vec{u}'(a; -b)$ nên $b(x_B - x_A) - a(y_B - y_A) = 0$ và $b(x_B - x_C) + a(y_B - y_C) = 0$.

Suy ra $\frac{x_B}{y_B} = \frac{x_D}{y_D}$ nên đường thẳng BD luôn luôn đi qua gốc O.

Bài toán 14. 31:

Cho hypebol (H) với hai đường tiệm cận là d và d' Chứng minh:

a) Nếu một đường thẳng cắt (H) tại A và B, cắt d và d' tại A' và B' thì AA' = BB'

b) Nếu một đường thẳng tiếp xúc với (H) tại I và cắt d, d' tại A' và B' thì I là trung điểm của A'B'.

Hướng dẫn giải

a) Gọi (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì hai đường tiệm cận có phương trình chung là

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$

Giao điểm A, B của Δ và (H) ứng với giá trị t_1 và t_2 là nghiệm của

$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + \beta t)^2}{b^2} = 1$ hay

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2}\right)t^2 + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$

Gọi I là trung điểm của AB thì I ứng với giá trị $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{S}{2}$.

Giao điểm A', B' của Δ với hai đường tiệm cận ứng với các giá trị t'_1 và t'_2 là nghiệm của phương trình

$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + \beta t)^2}{b^2} = 0$ hay

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2}\right)t^2 + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0 \qquad (2)$$

Gọi I' là trung điểm của A'B' thì I' ứng với giá trị $t' = \frac{t'_1 + t'_2}{2} = \frac{S'}{2}$.

Từ 2 phương trình (1)_ và (2) thì S = S' nên t = t' do đó I và I' trùng nhâu: đpcm.

b) Khi Δ tiếp xúc với (H) tại I thì nó cắt(H) tại hai điểm A, B trùng nhau và trùng với I. Bởi vậy I là trung điểm của A'B'.

Bài toán 14. 32:

Tìm tập điểm những điểm M sao cho từ đó có thể vẽ hai tiếp tuyến vuông góc tới một đường hyperbol (H) đã cho.

Hướng dẫn giải

Gọi (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$. Hai đường thẳng đi qua M và vuông góc với nhau có phương trình:

$Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$ và $Bx - Ay - (Bx_0 - Ay_0) = 0$

Vì hai đường thẳng đó đều là tiếp tuyến của hypebol nên:

$a^2A^2 - b^2B^2 = (Ax_0 + By_0)^2$ và $a^2B^2 - b^2A^2 = (Bx_0 - Ay_0)^2 \neq 0$

Từ đó suy ra:

$a^2A^2 - b^2B^2 + a^2B^2 - b^2A^2 = (Ax_0 + By_0)^2 + (Bx_0 - Ay_0)^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(A^2 + B^2) = (A^2 + B^2)((x_0^2 + y_0^2) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2.$

Nếu $a < b$ thì tập điểm là tập rỗng.

Nếu $a = b$ thì $x_0 = y_0 = 0$ nên $Ax_0 + By_0 = Bx_0 - Ay_0 = 0$: loại do đó tập điểm là tập rỗng.

Nếu $a > b$ thì tập điểm đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bài toán 14. 33:

Chứng minh parabol (P) có tiêu điểm $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$ và đường chuẩn Δ: $y + \frac{1+b^2-4ac}{4a} = 0$ có phương trình $y = ax^2 + bx + c$.

Hướng dẫn giải

Xét điểm tuỳ ý $M(x; y) \in (P)$, $MF = d(M; \Delta)$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)^2 = \left(y + \frac{1+b^2-4ac}{4a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{y}{a} + \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c.$$

Bài toán 14. 34:

Cho parabol (P): $y^2 = 12x$ có tiêu điểm F. Tìm 2 điểm A, B trên (P) sao cho tam giác OAB có trực tâm là F.

Hướng dẫn giải

Ta có: F(3; 0) nên tam giác OAB nhận F là trực tâm thì A, B đối xứng nhau qua Ox

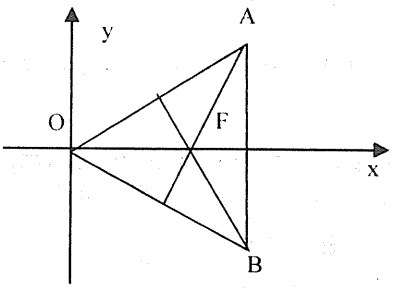
Gọi A(m, n) thì B(m, –n), $m \neq 0$

Ta có: $\begin{cases} A \in (P) \\ OA \perp BF \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 = 12m \\ m(m-3) - n^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-15) = 0 \\ n^2 = 12m \end{cases}$

Chọn m = 15 nên $n^2 = 180 \Rightarrow n = \pm 6\sqrt{5}$.

Vậy: A(15; $6\sqrt{5}$) và B(15; $-6\sqrt{5}$)



Bài toán 14. 35:

Đồ thị C của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Chứng minh rằng nếu (C) cắt (P) tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải

Tọa độ bốn giao điểm của (C) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{y}{a} - = 0 \\ y^2 - 2px = 0 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ thì được:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{b}{a} - 2p\right)x - \frac{y}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Suy ra bốn giao điểm nằm trên đường tròn đó.

Bài toán 14. 36:

Cho dây cung AB đi qua tiêu điểm F của parabol (P). Chứng minh đường tròn đường kính PB tiếp xúc với đường chuẩn.

Hướng dẫn giải

Hạ AA', BB', II' vuông góc với đường chuẩn Δ

Hình thang vuông ABB'A' có II' là đường trung bình nên

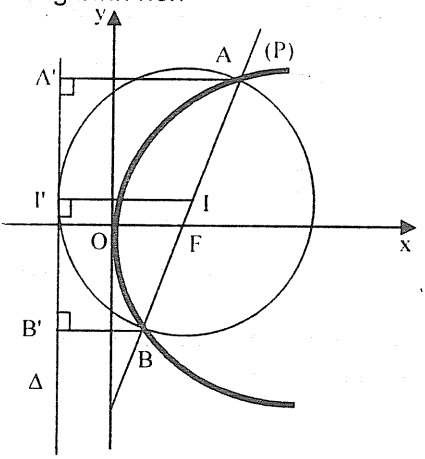
$$d(I,\Delta) = II' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$$

Mà A,B thuộc parabol nên:

AF = AA' và BF = BB'

Do đó AA' + BB' = AF + BF = AB

nên $d(I;\Delta) = \frac{1}{2}AB$, suy ra đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn Δ.



Bài toán 14. 37:

Viết phương trình tiếp tuyến chung của parabol $y^2 = 2x$ và elip $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$ tiếp xúc với parabol và elip đã cho là:

$$\begin{cases} B^2 = 2AC \\ 2A^2 + B^2 = C^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B^2 = 2AC \\ 2A^2 + 2AC = C^2 \end{cases}$$

Do đó: $(C - A)^2 = 3A^2 \Leftrightarrow C - A = \pm\sqrt{3}A \Leftrightarrow C = (1 \pm \sqrt{3})A$

Xét $A = 0 \Rightarrow B = 0$: loại

Xét $A \neq 0$, chọn $A = 1$ nên $C = 1 + \sqrt{3}$ và $B^2 = 2(1 + \sqrt{3})$ do đó $B = \pm\sqrt{2(1+\sqrt{3})}$.

Ta có hai tiếp tuyến chung $x \pm \sqrt{2(1+\sqrt{3})}y + 1 + \sqrt{3} = 0$.

Bài toán 14. 38:

Cho parabol: $y^2 = 4x$. Chứng minh từ điểm N tuỳ ý thuộc đường chuẩn của parabol vẽ được hai tiếp tuyến NT_1, NT_2 đến parabol và hai tiếp tuyến này vuông góc nhau và đường thẳng T_1, T_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải:

Parabol: $y^2 = 4x$ có tiêu điểm F(1;0) và đường chuẩn $x = -1$. Đường thẳng qua $N(-1;a)$ hệ số góc k có phương trình: $y = k(x + 1) + a$.

Xét hệ: $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x+1) + a \end{cases}$

$\Rightarrow 4y = ky^2 + 4k + 4a \Leftrightarrow ky^2 - 4y + 4k + 4a = 0$

Đường thẳng là tiếp tuyến khi: $k \neq 0$

và $\Delta' = 4 - k(4k + 4a) = 0 \Leftrightarrow k^2 + ak - 1 = 0$

Vì $P < 0$ và $P = -1$ nên phương trình có 2 nghiệm k_1, k_2 thỏa mãn $k_1.k_2 = -1$, do đó có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau

Tiếp tuyến NT_1 có tiếp điểm $T_1(x_1;y_1)$ và hệ số góc k_1 nên nghiệm kép: $y_1 = \frac{2}{k_1}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}y_1^2 = \frac{1}{k_1^2}$.

Tương tự tiếp tuyến NT_2 có tiếp điểm $T_2(x_2, y_2)$ với $x_2 = \frac{1}{k_2^2}$; $y_2 = \frac{2}{k_2}$. Từ đó suy ra FT_1, FT_2 cùng phương nên F, T_1, T_2 thẳng hàng. Vậy T_1T_2 luôn qua F(1;0), cố định.

Bài toán 14. 39:

Viết phương trình đường conic nhận F(1; 1) làm tiêu điểm và đường thẳng Δ: x + y – 1 = 0 làm đường chuẩn trong mỗi trường hợp:

a) Tâm sai e = 1 b) Tâm sai e = $\sqrt{2}$ c) Tâm sai e = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Gọi M (x;y) là điểm thuộc đường conic

a) $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$

b) $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e = \sqrt{2} \Leftrightarrow MF^2 = 2d^2(M;\Delta)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\frac{(x+y-1)^2}{2} \Leftrightarrow 2xy - 1 = 0$

c) $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,MF = d(M;\Delta) \Leftrightarrow 2MF^2 = d^2(M;\Delta)$

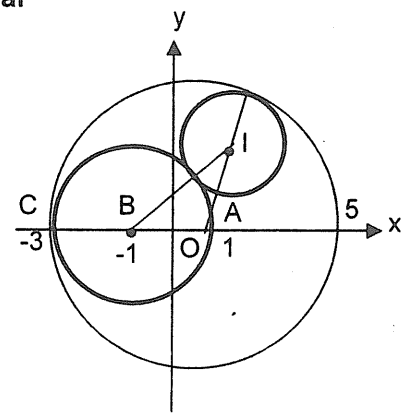
$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x - 6y + 7 = 0.$

Bài toán 14. 40:

Cho hai đường tròn tâm A(1; 0), bán kính $r_A = 4$ và tâm B(–1;0), bán kính $r_B = 2$. Tìm tập hợp tâm I(x;y) của các đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn trên.

Hướng dẫn giải

Khoảng cách 2 tâm AB = 2 = $r_A - r_B$ nên 2 đường tròn (A; r_A) và (B; r_B) tiếp xúc trong tại C(–3;0).



Xét 2 trường hợp:

- Đường tròn (I;r) nằm trong đường tròn (A; r_A) và nằm ngoài (B; r_B).

  Ta có: IB = r + r_B, IA = r_A – r $\Rightarrow$ IB + IA = r_B + r_A = 6, do đó I chạy trên đường elip (E) nhận A(1;0) và B(–1;0) làm 2 tiêu điểm, có phương trình là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ bỏ điểm C

- Đường tròn (I;r) tiếp xúc với 2 đường tròn đã cho tại C(–3;0) thì I chạy trên trục hoành.

Vậy tập hợp gồm elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ và trục hoành Ox, bỏ C(–3;0).

Bài toán 14. 41:

Qua tiêu điểm F của parabol (P), vẽ một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B.

a) Tìm tập điểm trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Khi FA ≥ FB. Trên tia FA lấy điểm N sao cho FN = FA – FB. Tìm tập điểm điểm N.

Hướng dẫn giải

Gọi (P): $y^2 = 2px$, phương trình của d là: $\begin{cases} x=\frac{p}{2}+at \\ y=t \end{cases}$

a) Các giao điểm A và B ứng với các giá trị t là nghiệm của phương trình:

$$t^2 = 2p\left(\frac{p}{2}+at\right) \text{ hay } t^2 - 2pat - p^2 = 0$$

Trung điểm M của AB ứng với giá trị $t = \frac{t_1+t_2}{2} = pa$ là

$$x_M = \frac{p}{2}+p\left(\frac{y_M}{p}\right)^2 \Rightarrow y_M^2 = p\left(x_M-\frac{p}{2}\right)$$

Tập điểm M là parabol có phương trình $y^2 = p\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

b) Giả sử các giao điểm A và B ứng với các giá trị t_1, t_2, ta có:

$$FA = |t_1|\sqrt{a^2+1},\ FB = |t_2|\sqrt{a^2+1}$$

Vì FA ≥ FB nên $|t_1| \ge |t_2|$ do đó:

$t_1 = p(a+\sqrt{a^2+1})$ và $t_2 = p(a-\sqrt{a^2+1})$

Suy ra $FN = FA - FB = (t_1+t_2)\sqrt{a^2+1} = 2pa\sqrt{a^2+1}$.

Vậy điểm N ứng với giá trị $t = 2pa$ là $x_N = \frac{p}{2} + 2pa^2$, $y_N = 2pa$.

Suy ra $x_N = \frac{p}{2}+2p\left(\frac{y_N}{2p}\right)^2 \Rightarrow y_N^2 = 2p\left(x_N-\frac{p}{2}\right)$

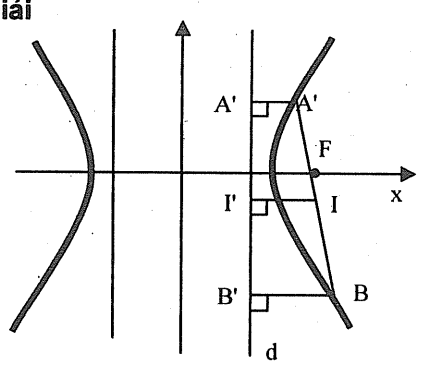
Vậy tập điểm N là parabol $y^2 = 2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

Bài toán 14. 42:

Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và F(c; 0) là một tiêu điểm của (H). Một đường thẳng đi qua F và cắt (H) tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB cắt đường chuẩn d: $x=\frac{a}{e}$ của (H).

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AB; A', B', I' lần lượt là hình chiếu của A, B, I trên đường chuẩn d_2: $x=\frac{a^2}{c}$



Ta có tâm sai e > 1 nên:

AB = e(AA' + BB') > AA' + BB' = 2II'.

Vậy đường tròn đường kính AB luôn cắt đường chuẩn d.

Bài toán 14. 43:

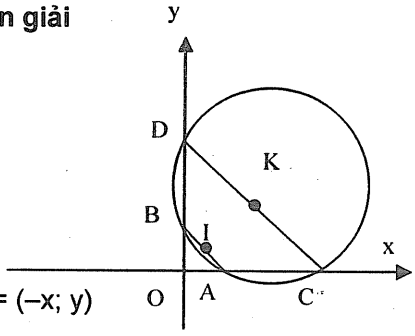
Cho hai điểm A(a; 0) và B(0; b) cố định với a, b ≠ 0. Đường tròn (C) thay đổi luôn đi qua A, B và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm thứ hai C(x; 0) và D(0; y). Gọi I và K tương ứng là trung điểm của các đoạn AB, CD. Chứng minh OI vuông góc với CD và tìm tập hợp các điểm K khi (C) thay đổi.

Hướng dẫn giải

Tứ giác ABDC nội tiếp nên ta có:

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$

Do đó: $ax=by \Leftrightarrow \frac{x}{b}=\frac{y}{a}$



Ta có:

$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ và $\overrightarrow{CD}=(-x;\ y)$

$\overrightarrow{OI}\ .\ \overrightarrow{CD}=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}=\frac{1}{2}(by-ax)=0$ nên OI ⊥ CD.

Tương tự ta chứng minh được: OK ⊥ AB. Vậy tập hợp điểm K là đường thẳng đi qua O và vuông góc với AB cố định.

Bài toán 14. 44:

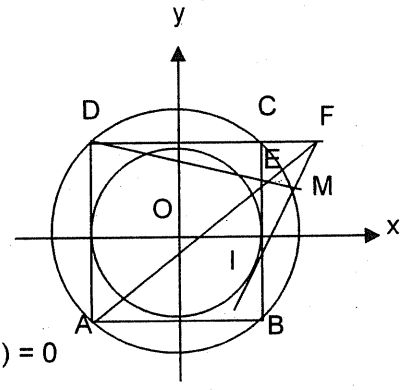
Cho hình vuông ABCD. Từ A kẻ một đường thẳng bất kỳ Δ, cắt BC, DC tại E và F. Gọi I là trung điểm của BE.

a) Chứng minh khi Δ quay quanh A, thì FI luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của hình vuông.

b) Giả sử DE cắt FI tại M. Chứng minh M nằm trên đường tròn ngoại tiếp của hình vuông.

Hướng dẫn giải:

a) Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ và giả sử hình vuông cạnh 2a nên : A(–a;–a), B(a;–a), C(a;a), D(–a;a)



Gọi hệ số góc của AF là m thì:

AF: $y = m(x + a) - a$

Ta có DF: $y = a \Rightarrow F\left(\dfrac{2a - ma}{m}; a\right)$

CB: $x = a \Rightarrow E(a, 2ma - a)$

và I(a;ma – a) nên:

FI: $(2m - m^2)x - 2(1 - m)y - a(m^2 - 2m + 2) = 0$

Vì: $d(O;FI) = \dfrac{a(m^2 - 2m + 2)}{\sqrt{(2m - m^2)^2 + 4(1-m)^2}} = a$

Vậy FI tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của hình vuông

b) Do D(–a,a) và E(a;2ma – a) nên DE: $(m - 1)x - y + ma = 0$

Suy ra $x_M = \dfrac{a(2 - m^2)}{m^2 - 2m + 2}, y_M = \dfrac{a(-m^2 + 4m - 2)}{m^2 - 2m + 2}$.

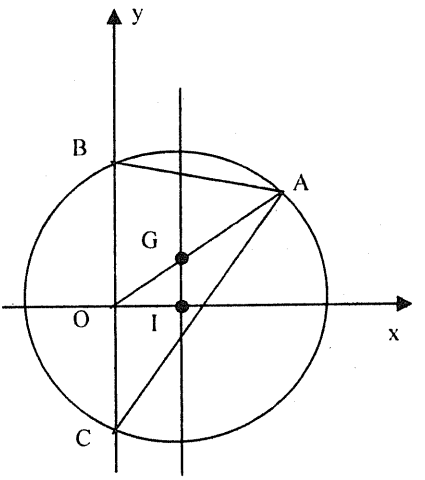
$\Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = 2a^2 = (a\sqrt{2})^2$

Vậy M nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông

Bài toán 14. 45:

Cho hai điểm phân biệt B và C. Chứng minh rằng tập hợp những đỉnh A của tam giác ABC mà đường thẳng Ơle của nó song song với BC là một đường elip (đường thẳng Ơle là đường thẳng đi qua trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác)

Giải



Chọn hệ toạ độ Oxy như sau: trục Oy qua BC, trục Ox là đường thẳng vuông góc với BC tại trung điểm O. Giả sử B và C lần lượt có các toạ độ (O; a) và (O;–a). Gọi A (x;y) là một đỉnh của tam giác ABC mà đường thẳng Ơle của nó song song với BC.

Từ đó ta có $G\left(\dfrac{x}{3};\dfrac{y}{3}\right)$; $I\left(\dfrac{x}{3};0\right)$ là trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: IA = IB

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-\frac{x}{3})^2+(y-0)^2}=\sqrt{(0-\frac{x}{3})^2+(a-0)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}x^2+y^2=\frac{x^2}{9}+a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Vậy tập hợp các đỉnh A là một elip

Bài toán 14. 46:

Cho 4 số a, b, c, d thoả mãn: $a^2 + b^2 = 1$, c + d = 6.

Chứng minh : $c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geq (3\sqrt{2} - 1)^2$.

Hướng dẫn giải

Vì: $a^2 + b^2 = 1$ nên M(a; b) thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$, R= 1.

Vì c + d = 6 nên N(c ; d) thuộc đường thẳng Δ : x + y – 6 = 0

$MN^2 = (c - a)^2 + (b - d)^2$

$= c^2 + d^2 + a^2 + b^2 - 2ac - 2bd$

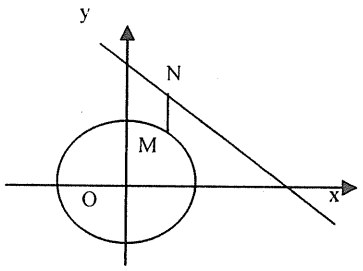
$= c^2 + d^2 - 2ac - 2bd + 1$

Vì $M \in (C)$, $N \in \Delta$

$\Rightarrow MN + OM \geq ON \geq d(O, \Delta)$

$$\Rightarrow MN + 1 \geq \frac{|0+0-6|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$\Rightarrow MN^2 \geq (3\sqrt{2} - 1)^2$: (đpcm)



Bài toán 14. 47:

Cho 2 số a, b thoả mãn: $a^2 + b^2 + 16 = 8a + 6b$.

Chứng minh : $24a \geq 7b$.

Hướng dẫn giải

Ta có $a^2 + b^2 + 16 = 8a + 6b$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 8a - 6b + 16 = 0 \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 9$.

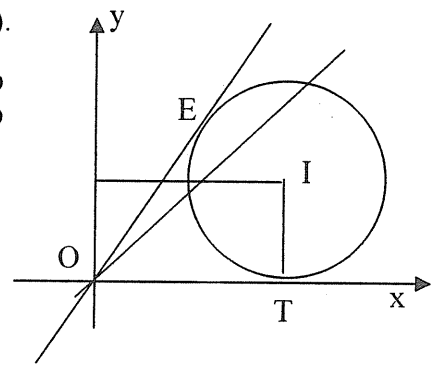
Do đó nếu 2 số a, b thoả mãn: $a^2 + b^2 + 16 = 8a + 6b$ thì điểm M(a;b) thuộc đường tròn (I) tâm I(4;3) và bán kính R = 3.

Ta có đường tròn (I) có một tiếp tuyến OT tiếp xúc với trục hoành tại T(4;0), và tiếp tuyến OE tại $E(\frac{28}{25};\frac{96}{25})$.

Tất cả các đường thẳng qua O và có điểm chung với đường tròn (I) đều có dạng y = kx với hệ số góc k thỏa mãn

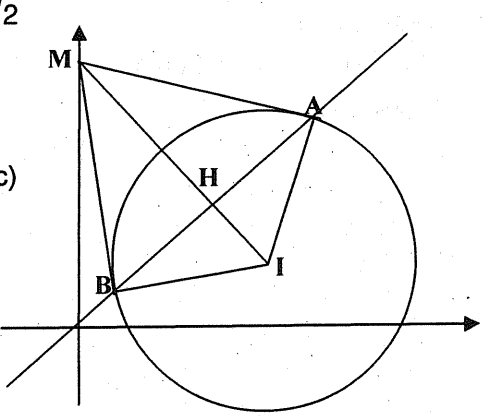
$$0 \leq k = \tan\phi = \frac{b}{a} \leq \frac{\frac{96}{25}}{\frac{28}{25}} = \frac{24}{7};\ a > 0$$

Suy ra $24a \geq 7b$.



Bài toán 14. 48: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc ia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Hướng dẫn giải



Ta có $\cos(AIH) = \dfrac{IH}{IA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow IH = \sqrt{2}$

Vậy $MH = MI - IH = 4\sqrt{2}$;

Gọi M (0; y)$\in$ Oy

$MI \perp AB \Rightarrow MI : x + y + c = 0$; M (0;–c)

$MH = d(M; \Delta) = \dfrac{|c|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow c = 8$ hay $c = -8$

I (t; –t – 8) hay (t; –t + 8)

$d(I; \Delta) = \dfrac{|t + t + 8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IH$

$\Leftrightarrow t = -3$ hay $t = -5$

Với $t = -3 \Rightarrow I(-3; -5)$; với $t = -5 \Rightarrow I(-5; -3)$

Vậy phương trình 2 đường tròn cần tìm là :

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 10 \text{ và } (x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 10.$$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 14. 1: Cho hai điểm A(1 ; 1) và B(9 ; 7).Tìm tập điểm các điểm M sao cho $2MA^2 - 3MB^2 = k^2$, trong đó k là một số cho trước.

Hướng dẫn

Gọi điểm M(x;y) rồi dùng công thức khoảng cách.

Kết quả $(x - 25)^2 + (y - 19)^2 = 600 - k^2$ rồi biện luận.

Bài tập 14. 2: Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(–1; 0); B(1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $x - y - 1 = 0$.

Hướng dẫn

Gọi tâm I(a;b) và bán kính R.

Kết quả $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.

Bài tập 14. 3: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$ và điểm A(–2 ; 3). Chứng minh A ở ngoài đường tròn. Lập phương trình 2 tiếp tuyến kẻ từ A. Tính khoảng cách giữa hai tiếp điểm T, T'

Hướng dẫn

(C) có tâm O(0;0) và bán kính R = 2, IA > R.

Kết quả Hai tiếp tuyến $x + 2 = 0$, $5x + 12y - 26 = 0$, $TT' = \frac{12}{\sqrt{13}}$

Bài tập 14. 4: Cho hai đường tròn :

$(C): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$, $(C'): x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$

a)Chứng minh hai đường tròn ngoài nhau.

b)Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Hướng dẫn

a) Kết quả $II' = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} > R + R'$

b) Gọi d: $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ là tiếp chung rồi dùng điều kiện tiếp xúc.

Kết quả $x = 5$, $y = 2$, $y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}x + 6 - 9\frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$.

Bài tập 14. 5: Cho 2 đường thẳng

$d_1 : kx - y + k = 0$, $d_2 : (1 - k^2)x + 2ky - 1 - k^2 = 0$.

a) Biện luận sự tương giao.Chứng minh các giao điểm nằm trên 1 đường tròn.

b) Chứng minh khoảng cách từ O đến d_1 không quá 1 .

Hướng dẫn

a) Kết quả $x^2 + y^2 = 1$

b) Chứng minh theo cách biến đổi tương đương.

Bài tập 14. 6: Cho các số a, b, c, d, x, y thoả

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 40 = 8a + 10b \\ c^2 + d^2 + 12 = 4c + 6d \\ 3x - 2y - 13 = 0 \end{cases}$$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

Hướng dẫn

Xét điểm E(a,b) thuộc đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 40 = 0$

Xét điểm F(c ;d) thuộc đường tròn (C') : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

Xét điểm M(x ;y)) thuộc đường thẳng d : $3x - 2y - 13 = 0$.

$\Rightarrow P = ME + MF$

So sánh tổng khoảng cách và vị trí 2 giao điểm đối với đường thẳng qua 2 tâm.

Kết quả $2\sqrt{13} - 2$.

Bài tập 14. 7: Tìm tâm sai của elip trong các trường hợp sau:

a) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn tới một đỉnh nằm trên trục bé bằng tiêu cự.

b) Độ dài trục lớn bằng k lần độ dài trục bé ($k > 1$)

Hướng dẫn

a) Đoạn $A_1B_1 = 2c$. Kết quả $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

b) $2a = k.2b$. Kết quả $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$

Bài tập 14. 8: Cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai đường thẳng:

(D): $ax - by = 0$, (D'): $bx + ay = 0$. Gọi M, N là các giao điểm của (D) và (E): P, Q là các giao điểm của (D') với (E).) Tìm điều kiện đối với a, b để diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Chú ý hai đường (D), (D') vuông góc.

Bài tập 14. 9: Cho $F_1(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Chứng minh mỗi điểm M(x;y) thuộc đồ thị $y = \frac{1}{x}$ đều có $|MF_1 - MF_2|$ không đổi.

Hướng dẫn

Tính $MF_1^{\ 2}$ và $MF_2^{\ 2}$. Kết quả $2\sqrt{2}$

Bài tập 14. 10: Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh của (H). M là điểm tuỳ ý trên (H) có hình chiếu trên Ox là N. Chứng minh rằng:

a) $OM^2 - MF_1 . MF_2 = a^2 - b^2$, $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2)$

b) $NM^2 = \frac{b^2}{a^2}.\overline{NA_1}.\overline{NA_2}$.

Hướng dẫn

a) Dùng công thức bán kính qua tiêu $MF_1 = |a + ex|$ và. $MF_2 = |a - ex|$

b) Gọi M(x;y) thì N(x;0).

Bài tập 14. 11: Cho parabol $y^2 = 2px$, đường thẳng d thay đổi luôn luôn với một phương cho trước, cắt parabol tại A và B. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn

Đường thẳng d thay đổi luôn luôn với một phương cho trước nên có hệ số góc không đổi: $y = kx + b$.

Kết quả tập hợp điểm I thuộc đường thẳng $y = \frac{p}{k}$

Bài tập 14. 12: Cho parabol (P): $y^2 = 2px$ ($p > 0$). A là một điểm cố định trên (P). Một góc vuông uAt quay quanh điểm A có các cạnh cắt (P) tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Giả sử $A\left(\frac{a^2}{2p};a\right)$, $B\left(\frac{b^2}{2p};b\right)$, $C\left(\frac{c^2}{2p};c\right)$

Phương trình đường thẳng BC là: $2px - (b + c)y + bc = 0$

Kết quả $M\left(\frac{a^2}{2p} + 2p\ ;\ -a\right)$ với $a = y_A$.

Chuyên đề 10: LƯỢNG GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Hệ thức cơ bản:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha .\cot\alpha = 1$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Công thức cộng

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$; $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$; $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha.\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \dfrac{\pi}{4})$, $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha \mp \dfrac{\pi}{4})$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\ (\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = \sqrt{a^2 + b^2}\ \sin(x + \alpha)$

với số α sao cho: $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Công thức nhân đôi, hạ bậc hai

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

Công thức nhân ba, hạ bậc ba

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

$\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}$; $\cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}$

Công thức góc phụ : Đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ thì :

$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$.

Công thức biến đổi

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$; $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$

$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}$; $\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}$

Phương pháp lượng giác hoá

Nếu $|x|\leq 1$ thì có thể đặt $x = \sin t$ hoặc $x = \cos t$,

Nếu $|x|\leq r$, $r>0$ thì có thể đặt $x = r.\sin t$ hoặc $x = r.\cos t$,

Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì có thể đặt $x = \sin t$ và $y = \cos t$,

Nếu $x^2 + y^2 = r^2$ thì có thể đặt $x = r.\sin t$ và $y = r.\cos t$,

Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì có thể đặt

$x = \cos a$, $y = \sin a.\cos b$, $z = \sin a.\sin b$,

Nếu $|x| \geq 1$ thì có thể đặt $x = \frac{1}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{1}{\cos t}$,

Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì có thể đặt $x = \tan u$ hoặc $x = \cot u$,

Nếu có biểu thức $a^2 + x^2$ thì có thể đặt $x = a.\tan u$ hoặc $a.\cot u$,

Nếu có đẳng thức $a + b + c = abc$ hay $ab + bc + ca = 1$ thì có thể đưa giá trị tang 3 góc của tam giác,...

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 15. 1:

Chứng minh hệ thức:

a) $\dfrac{1+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=\dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cot^2 x-\tan^2 x}=\sin^2 x\cos^2 x$

Hướng dẫn giải

a) $VT=\dfrac{1+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}$

$=\dfrac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\left[\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-\left(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)\right]}=\dfrac{2\sin^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$

b) $VT=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha.\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$

$=\sin^2\alpha.\cos^2\alpha\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$.

Bài toán 15. 2:

Chứng minh công thức:

a) $\sin\alpha.\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)=\dfrac{1}{4}\sin3\alpha$

b) $\cos\alpha.\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)\cos(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)=\dfrac{1}{4}.\cos3\alpha$

c) $\tan(\dfrac{\pi}{3}-\alpha).\tan\alpha.\tan(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)=\tan3\alpha.$

Hướng dẫn giải

a) $\sin\alpha\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)\sin(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)=\sin\alpha(\sin^2\dfrac{\pi}{3}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\dfrac{\pi}{3})$

$=\sin\alpha(\dfrac{3}{4}\cos^2\alpha-\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{4}(3-4\sin^2\alpha)=\dfrac{1}{4}\sin3\alpha$

b) $\cos\alpha\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)\cos(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)=\cos\alpha(\cos^2\dfrac{\pi}{3}\cos^2\alpha-\sin^2\dfrac{\pi}{3}\sin^2\alpha)$

$=\cos\alpha(\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha-\dfrac{3}{4}\sin^2\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{4}[\cos^2\alpha-3(1-\cos^2\alpha)]$

$=\dfrac{\cos\alpha}{4}(4\cos^2\alpha-3)=\dfrac{1}{4}\cos3\alpha.$

c) Suy ra từ a) và b).

Bài toán 15. 3:

Chứng minh công thức:

a) $\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x$

b) $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \frac{63}{128} + \frac{15}{32}\cos 4x + \frac{5}{128}\cos 8x$.

Hướng dẫn giải

a) $\cos^8 x + \sin^8 x = (\cos^4 x + \sin^4 x)^2 - 2\cos^4 x \sin^4 x$

$= \left[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$

$= (\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x)^2 - \frac{1}{16}(1 - \cos 4x)^2$

$= \frac{35}{64} + \frac{7}{16}\cos 4x + \frac{1}{64}\cos 8x$

b) Ta có $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$, $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

và $(\cos^4 x + \sin^4 x)(\cos^6 x + \sin^6 x)$

$= \cos^{10} x + \sin^{10} x + \cos^4 x \sin^4 x(\cos^2 x + \sin^2 x)$ suy ra đpcm.

Bài toán 15. 4:

Chứng minh công thức:

a) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$,

$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

b) $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^3 x + 18\cos^2 x - 1$

$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x$

$\cos 8x = 128\cos^8 x - 256\cos^6 x + 160\cos^4 x - 32\cos^2 x + 1$

$\cos 9x = 256\cos^9 x - 576\cos^7 x + 432\cos^5 x - 120\cos^3 x + 9\cos x$.

Hướng dẫn giải

a) $\cos 4x = \cos 2.2x = 2\cos^2 2x - 1$

$= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

$\cos 5x = \cos(3x + 2x) = \cos 3x.\cos 2x - \sin 3x.\sin 2x$

$= (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) - (3\sin x - 4\sin^3 x).2\sin x \cos x$

$= (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) - (3 - 4\sin^2 x).2\sin^2 x \cos x$

$= (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) - (4\cos^2 x - 1).2(1 - \cos^2 x)\cos x$

$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

b) Chứng minh tương tự.

Bài toán 15. 5:

Chứng minh trong điều kiện có nghĩa:

a) Nếu $\sin(2a + b) = 3\sin b$ thì $\tan(a + b) = 2\tan a$

b) Nếu $\sin a = A\sin(a + b)$ thì $\tan(a + b) = \dfrac{\sin b}{\cos b - A}$

Hướng dẫn giải

a) $\sin(2a + b) = 3\sin b \Rightarrow \sin[(a + b) + a] = 3\sin[(a + b) - a]$ nên

$\sin(a + b)\cos a + \sin a\cos(a + b) = 3[\sin(a + b)\cos a - \sin a\cos(a + b)]$

$\Rightarrow 4\sin a\cos(a + b) = 2\sin(a + b)\cos a$

$\Rightarrow \tan(a + b) = 2\tan a$ (với điều kiện có nghĩa).

b) $\sin a = A\sin(a + b) \Rightarrow \sin[(a + b) - b] = A\sin(a + b)$

$\Rightarrow \sin(a + b)\cos b - \sin b\cos(a + b) = A\sin(a + b)$

$\Rightarrow [\sin(a + b)](\cos b - A) = \sin b\cos(a + b)$

$\Rightarrow \tan(a + b) = \dfrac{\sin b}{\cos b - A}$.

Bài toán 15. 6:

Chứng minh biểu thức không phụ thuộc biến x,y:

a) $A = \cos^2(\alpha + x) + \cos^2 x - 2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha + x)$

b) $B = \sin 6x\cot 3x - \cos 6x$.

c) $C = \left(\cot\dfrac{x}{3} - \tan\dfrac{x}{3}\right)\tan\dfrac{2x}{3} - \tan y.\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + y\right)$

Hướng dẫn giải

a) $A = \cos(\alpha + x)[\cos(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos x] + \cos^2 x$

$= \cos(\alpha + x)(-\cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x) + \cos^2 x$

$= -\cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2x) + \cos^2 x$

$= \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha - \dfrac{\cos 2x}{2} + \cos^2 x = -\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \dfrac{1}{2} = \sin^2\alpha.$

b) $B = 2\sin 3x\cos 3x.\dfrac{\cos 3x}{\sin 3x} - (2\cos^2 3x - 1)$

$= 2\cos^2 3x - 2\cos^2 3x + 1 = 1$: không phụ thuộc x.

c) $C = \left(\dfrac{\cos\dfrac{x}{3}}{\sin\dfrac{x}{3}} - \dfrac{\sin\dfrac{x}{3}}{\cos\dfrac{x}{3}}\right)\dfrac{\sin\dfrac{2x}{3}}{\cos\dfrac{2x}{3}} + \tan y.\cot y$

$= \dfrac{\cos^2\dfrac{x}{3} - \sin^2\dfrac{x}{3}}{\sin\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}}.\dfrac{\sin\dfrac{2x}{3}}{\cos\dfrac{2x}{3}} + 1 = \dfrac{\cos\dfrac{2x}{3}}{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2x}{3}}.\dfrac{\sin\dfrac{2x}{3}}{\cos\dfrac{2x}{3}} + 1 = 3$

Bài toán 15. 7:

Chứng minh rằng

a) $\sin2^0.\sin18^0.\sin22^0.\sin38^0.\sin42^0.\sin58^0.\sin62^0.\sin78^0.\sin82^0=\frac{1}{256}.\sin18^0$

b) $\tan30^0 + \tan40^0 + \tan50^0 + \tan60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos20^0$.

Hướng dẫn giải:

a) Dùng công thức $\sin3a = 4\sin a \sin(60^0 + a) \sin(60^0 - a)$ thì:

$\sin2^0 \sin58^0 \sin62^0 = \frac{1}{4}\sin6^0$; $\sin18^0.\sin78^0.\sin42^0 = \frac{1}{4}\sin 54^0$;

$\sin22^0.\sin82^0.\sin38^0=\frac{1}{4}\sin66^0$

$VT = \frac{1}{4^3}\sin6^0.\sin54^0.\sin66^0 = \frac{1}{256}.\sin18^0$

b) $VT = \frac{\sin70^0}{\cos30^0\ \cos40^0} + \frac{\sin110^0}{\cos50^0\ \cos60^0}$

$= 2\cos20^0\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cos40^0} + \frac{1}{\cos50^0}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cos20^0\ \frac{\cos50^0 + \sqrt{3}\cos40^0}{\cos50^0.\cos40^0}$

$= \frac{8\cos20^0}{\sqrt{3}}\ \frac{\sin30^0\cos50^0 + \cos30^0\sin50^0}{\sin40^0.\cos40^0 + \sin40^0.\cos40^0} = VP$.

Bài toán 15. 8:

Tính tổng:

a) $A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}$

b) $B = \cot7{,}5^\circ + \tan67{,}5^\circ - \tan7{,}5^\circ - \cot67{,}5^\circ$

Hướng dẫn giải

a) $A = \left(\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}\right)$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} + 1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{16}.\cos^2\frac{3\pi}{16}$

$= 2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8} = 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{M+1}$

b) $B = \dfrac{\cos 7,5^\circ}{\sin 7,5^\circ} - \dfrac{\sin 7,5^\circ}{\cos 7,5^\circ} + \dfrac{\sin 67,5^\circ}{\cos 67,5^\circ} - \dfrac{\cos 67,5^\circ}{\sin 67,5^\circ}$

$= \dfrac{\cos^2 7,5^\circ - \sin^2 7,5^\circ}{\sin 7,5^\circ \cos 7,5^\circ} + \dfrac{\sin^2 67,5^\circ - \cos^2 67,5^\circ}{\sin 67,5^\circ \cos 67,5^\circ}$

$= \dfrac{\cos 15^\circ}{\frac{1}{2}\sin 15^\circ} - \dfrac{\cos 135^\circ}{\frac{1}{2}\sin 135^\circ} = \dfrac{2(\sin 135^\circ \cos 15^\circ - \cos 135^\circ \sin 15^\circ)}{\sin 15^\circ \sin 135^\circ}$

$= \sqrt[3]{\sin A}$.

Bài toán 15. 9:

a) Không dùng bảng , hãy tính $\sin 18^0$

b) Tính gọn $T = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}$ (n – 1 dấu căn)

Hướng dẫn giải:

a) Từ $\cos 2(18^0) = \sin 3(18^0)$

nên $1 - 2\sin^2 18^0 = 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0$.

Đặt $t = \sin(18^0)$, ta được phương trình

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2 + 2t - 1) = 0 .$$

$\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ hay $t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Vì $0 < \sin 18^0 < 1$, nên chọn $\sin 18^0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

b) Khi n = 2 thì $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2^2}$

Tổng quát n – 1 dấu căn thì $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$

Bài toán 15. 10:

Tính tích

a) $P = \cos 10^0 \cos 30^0 \cos 50^0 \cos 70^0$

b) $Q = \sin 10^0 \sin 30^0 \sin 50^0 \sin 70^0$

Hướng dẫn giải:

a) $P = \cos 30^0 (\cos 10^0 .\cos 50^0) . \cos 70^0$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\cos(-40^0) + \cos 60^0).\cos 70^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos 40^0 . \cos 70^0 + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\cos 70^0$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{8}\cos(-30^0) + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\cos 110^0 + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\cos 70^0 = \dfrac{3}{16}$.

b) Ngoài cách sử dụng công thức nhân 3, ta có thể tính

$$Q = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(\cos(-40^0) - \cos 60^0)\sin 70^0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}[\sin(110^0) + \sin(30^0)] - \frac{1}{4}\cos 20^0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos 20^0 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos 20^0\right) = \frac{1}{16}.$$

Bài toán 15. 11:

Tính tổng

a) $A = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

b) $B = \frac{1}{\cos^2 10^0} + \frac{1}{\sin^2 20^0} + \frac{1}{\sin^2 40^0} - \frac{1}{\cos^2 45^0}$.

Hướng dẫn giải:

a) $A\sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\alpha - \sin\frac{5\pi}{7}\right)$$

$= -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$. Do đó $A = -\frac{1}{2}$.

b) $B = \frac{\sin^2 20^0 + \cos^2 10^0}{\cos^2 10^0 \sin^2 20^0} + \frac{1}{\sin^2 40^0} - 2$

$$= \frac{\sin^2 20^0 \sin^2 40^0 + \cos^2 10^0 \sin^2 40^0 + \cos^2 10^0 \sin^2 20^0}{\cos^2 10^0 \sin^2 20^0 \sin^2 40^0} - 2$$

Xét phân thức, tử và mẫu:

$$T = \frac{1}{4}(1-\cos 40^0)(1-\sin 10^0) + \frac{1}{4}(1+\cos 20^0)(1-\sin 10^0)$$

$$+ \frac{1}{4}(1+\cos 20^0)(1-\cos 40^0)$$

$$= \frac{1}{4}(3 - 2\sin 10^0 + 2\cos 20^0 - 2\cos 40^0 + \sin 10^0\cos 40^0$$

$$- \cos 20^0\cos 40^0 - \sin 10^0\cos 20^0)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}(\sin 10^0 - \cos 20^0 + \cos 40^0)\right) = \frac{9}{16}$$

$$M = \frac{1}{8}(1 + \cos 20^0)(1 - \cos 40^0)(1 - \sin 10^0)$$

$$= \frac{1}{8}(1 + \cos 20^0 - \cos 40^0 - \cos 20^0 \cos 40^0)(1 - \sin 10^0)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2}(\sin 10^0 - \cos 20^0 + \cos 40^0)\right] = \frac{3}{64}$$

Suy ra B =10.

Bài toán 15. 12:

Tính tổng:

a) $S = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{a}{4} + \frac{1}{8}\tan\frac{a}{8} + \frac{1}{16}\tan\frac{a}{16}$

b) $T = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{9} + 9\sin^3\frac{a}{27} + 27\sin^3\frac{a}{81}$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta chứng minh: $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} = \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$.

Áp dụng lần lượt với $x = a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \frac{a}{16}$

Cộng vế theo vế, ta được: $S = \frac{1}{16}\cot\frac{a}{16} - 2\cot 2a$.

b) Từ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

Áp dụng với $x = \frac{a}{3}, \frac{a}{9}, \frac{a}{27}, \frac{a}{81}$ thì

$$T = \left(\frac{3}{4}\sin\frac{a}{3} - \frac{1}{4}\sin a\right) + \left(\frac{9}{4}\sin\frac{a}{9} - \frac{3}{4}\sin\frac{a}{3}\right)$$

$$+ \left(\frac{27}{4}\sin\frac{a}{27} - \frac{9}{4}\sin\frac{a}{9}\right) \cdots \left(\frac{81}{4}\sin\frac{a}{81} - \frac{27}{4}\sin\frac{a}{27}\right)$$

$$= \frac{81}{4}\sin\frac{a}{81} - \frac{1}{4}\sin a .$$

Bài toán 15. 13:

Cho $a \neq k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Chứng minh:

a) $S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin na = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

b) $T = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + ... + \cos na = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\cos\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$

Hướng dẫn giải

a) Nhân hai vế cho $2\sin\dfrac{a}{2} \neq 0$, ta được:

$$2S\sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{a}{2}\sin a + 2\sin\frac{a}{2}\sin 2a + ... + 2\sin\frac{a}{2}\sin na$$

$$= \left(\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2}\right) + \left(\cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2}\right) + ... +$$

$$+ \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)a - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)a$$

$$= \cos\frac{a}{2} - \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)a = 2\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}$$

Suy ra: $S = \dfrac{\sin\dfrac{na}{2}\sin\dfrac{(n+1)a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}$.

b) Tương tự, nhân 2 vế cho $\sin\dfrac{a}{2}$ thì có đpcm.

Bài toán 15. 14:

Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \left(1 + \dfrac{1}{\cos 2x}\right).\left(1 + \dfrac{1}{\cos 4x}\right)...\left(1 + \dfrac{1}{\cos 2^n x}\right)$

b) $B = \tan x.\tan 2x + \tan 2x.\tan 3x + ... + \tan(n-1)x.\tan nx$

Hướng dẫn giải

a) Nếu $\sin x = 0$ thì $A = (1 + 1)(1 + 1)...(1 + 1) = 2^n$

Nếu $\sin x \neq 0$ thì

$$A = \frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}.\frac{1+\cos 4x}{\cos 4x}...\frac{1+\cos 2^n x}{\cos 2^n x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}.\frac{2\cos^2 2x}{\cos 4x}...\frac{2\cos^2 2^{n-1}x}{\cos 2^n x}$$

$$= \frac{2^n \cos^2 x.\cos 2x.\cos 4x...\cos 2^{n-1}x}{\cos(2^n x)}$$

$= \cot x.2^n.\dfrac{\sin x\cos x.\cos 2x\cos 4x...\cos 2^{n-1}x}{\cos(2^n x)}$

$= \cot x.\dfrac{\sin 2^n x}{\cos(2^n x)} = \cot x.\tan(2^n x)$.

b) Nếu tanx = 0 thì $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

$\Rightarrow$ tanx = tan2x = ... = tannx = 0 $\Rightarrow$ B = 0

Nếu $\tan x \neq 0$ ($x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$)

Trong điều kiện tanx, tan2x, ..., tan(nx) có nghĩa ta có:

$\tan x = \tan(2x - x) = \dfrac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan x\tan 2x}$

$\Rightarrow 1 + \tan x.\tan 2x = \dfrac{\tan 2x - \tan x}{\tan x}$

Tương tựthì cộng vế ta có: (n – 1) + B = cotx.(tannx – tanx)

$\Rightarrow B = \cot x.\tan nx - n = \dfrac{\tan nx}{\tan x} - n.$

Bài toán 15. 15:

a) Tính tổng: $T = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{6\pi}{7}}$.

b) Tính tổng: $S = \cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{3\pi}{7}, \dfrac{6\pi}{7}$ là nghiệm phương trình: $\sin^2 4x = \sin^2 3x$

Đặt t = sinx thì $\sin^2 3x = (3t - 4t^3)^2$

Và $\sin^2 4x = (2\sin 2x . \cos 2x)^2 = 16t^2(1 - t^2)(1 - 2t^2)^2$

Ta có phương trình: $64t^6 - 112t^4 + 56t^2 - 7 = 0$

Do đó: $\sin^2\dfrac{2\pi}{7}, \sin^2\dfrac{3\pi}{7}, \sin^2\dfrac{6\pi}{7}$ là 3 nghiệm phương trình:

$64z^3 - 112z^2 + 56z - 7 = 0$

Áp dụng định lý Viete:

$T = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{3\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{6\pi}{7}}$

$= \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \dfrac{\dfrac{56}{64}}{\dfrac{7}{64}} = 8.$

b) Ta có: $\cos5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$

Với các giá trị $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 77^\circ$, $\alpha = 149^\circ$, $\alpha = 221^\circ$, $\alpha = 293^\circ$ thì $\cos5\alpha$ đều bằng $\cos25^\circ$.

Do đó: $\cos5^\circ$, $\cos77^\circ$, $\cos149^\circ$, $\cos221^\circ$, $\cos293^\circ$ là 3 nghiệm của đa thức $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos25^\circ$

Theo định lý Viete, ta có $S = \dfrac{0}{16} = 0$.

Bài toán 15. 16:

a) Tính $M = \tan\dfrac{\pi}{7}\tan\dfrac{2\pi}{7}\tan\dfrac{3\pi}{7}$.

b) Tính $N = \sqrt[3]{\cos\dfrac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\dfrac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\dfrac{8\pi}{7}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $M = \tan\dfrac{\pi}{7}\tan\dfrac{2\pi}{7}\tan\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}}{\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}} = \dfrac{A}{B}$

Tính B:

Ta có: $B\sin\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{3\pi}{7}\sin\dfrac{4\pi}{7}$

$= \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{8\pi}{7} \Rightarrow B = \dfrac{1}{8}$

Ta có: $\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{3\pi}{7}$ là nghiệm phương trình $\cos^2 3x = \cos^2 4x$

hay $(4\cos^3 x - 3\cos x)^2 = (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1)^2$

Từ đó dùng định lí Viete ta tính được: $A = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$

Vậy: $\tan\dfrac{\pi}{7}\tan\dfrac{2\pi}{7}\tan\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{\sqrt{7}}{8} : \dfrac{1}{8} = \sqrt{7}$.

b) Ta có: $\dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}, \dfrac{8\pi}{7}$ là nghiệm phương trình: $\cos3x = \cos4x$

$\Rightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x$ là nghiệm phương trình: $8t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0$

Do đó: $\alpha = 2\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\beta = 2\cos\dfrac{4\pi}{7}$, $\gamma = 2\cos\dfrac{8\pi}{7}$ là 3 nghiệm phương trình: $T^3 + T^2 - 2T - 1 = 0$.

Đặt $x = \sqrt[3]{\alpha}$, $y = \sqrt[3]{\beta}$, $z = \sqrt[3]{\gamma}$

và $A = x + y + z$, $B = xy + yz + xz$ $C = xyz \Rightarrow C = 1$

Ta có: $A^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$

$= 3AB - 4$

Tương tự: $B^3 = 3AB - 5$

nên $A^3B^3 = (3AB - 4)(3AB - 5) = 9A^2B^2 - 27AB + 20$

$\Rightarrow (AB - 3)^3 = -7 \Rightarrow AB = 3 - \sqrt[3]{7}$

Do đó: $A^3 = 3AB - 4 = 5 - 3\sqrt[3]{7}$. Vậy: $N = \sqrt[3]{\frac{A}{2}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$.

Bài toán 15. 17:

a) Chứng minh: $\tan^6\frac{\pi}{18} + \tan^6\frac{5\pi}{18} + \tan^6\frac{7\pi}{18} = 433$.

b) Chứng minh $u_n = \tan^{2n}20^\circ + \tan^{2n}40^\circ + \tan^{2n}80^\circ$ là số tự nhiên với mọi n nguyên dương.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}$, là nghiệm phương trình $\tan^2 3x = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(3\tan x - \tan^3 x)^2 = (1 - 3\tan^2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^6 x - 27\tan^4 x + 33\tan^2 x - 1 = 0$$

Do đó $\tan^2\frac{\pi}{18}, \tan^2\frac{5\pi}{18}, \tan^2\frac{7\pi}{18}$ là 3 nghiệm phương trình:

$3t^3 - 27t^2 + 33t - 1 = 0$

Áp dụng định lí Viete và hằng đẳng thức:

$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$

thì: $\tan^6\frac{\pi}{18} + \tan^6\frac{5\pi}{18} + \tan^6\frac{7\pi}{18} = 9^3 - 3.9.11 + 1 = 433.$

b) Ta dùng qui nạp trên công thức truy hồi.

Ta có: $20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ là nghiệm phương trình: $\tan 3x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan^2 20^\circ, \tan^2 40^\circ, \tan^2 80^\circ$ là 3 nghiệm phương trình:

$Z^3 - 33Z^2 + 27Z - 3 = 0.$

Do đó: $u_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 33$

$u_2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 - 2(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_4) = 1143$

$\Rightarrow u_3 = 33u_2^2 - 27u_1 + 3$ nguyên dương

và $u_n = \tan^{2n}20^o + \tan^{2n}40^o + \tan^{2n}80^o$ nên tổng quát ta có công thức truy hồi: $u_{n+2} = 33\,u_{n+1} - 27u_n + 3u_{n-1}$.

Suy ra: u_{n+2} nguyên. Mà $u_n > 0$ do đó u_n là số tự nhiên.

Bài toán 15. 18:

Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta luôn có

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$.

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$.

Giải

a) $VT = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

b) $VT = \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2(A+B)$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2(A+B)$

$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2(A+B)$

$= 1 + \cos(A+B)[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$.

c) $VT = 2\sin(A+B)\cos(A-B) - \sin 2(A+B)$

$= 2\sin(A+B)[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 4\sin A\sin B\sin C$.

Bài toán 15. 19:

Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta có :

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$ (không vuông).

b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\tan(A+B) = \tan(\pi - C)$ nên

$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C$

$\tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A\tan B)$

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$: đpcm .

b) Ta có : $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ nên

$$\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right) = 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1: \text{ đpcm.}$$

Bài toán 15. 20:

Chứng minh trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

b) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) Từ $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ thì suy ra đpcm.

b) VP $= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \cot\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\tan\frac{B}{2} + \cot\frac{B}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\tan\frac{C}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{\sin A} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sin B} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sin C} = \text{VT}.$$

Bài toán 15. 21:

Chứng minh với tam giác ABC bất kỳ:

a) $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$. b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải:

a) BĐT $\Leftrightarrow 4\cos A[\cos(B + C) + \cos(B - C)] \le 1$

$\Leftrightarrow -4\cos^2 A + 4\cos(B - C)\cos A \le 1$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 A + 4\cos(B - C)\cos A + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow (2\cos A - \cos(B - C))^2 + \sin^2(B - C) \ge 0$: Đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$, tam giác ABC đều.

b) BĐT $\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\sin^2 C\geq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}-\cos(A+B)\cos(A-B)-\sin^2 C\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C+\cos(A-B).\cos C+\frac{1}{4}\geq 0$$

Đúng vì tam thức bậc hai có $\Delta=\cos^2(A-B)-1\leq 0$.

Bài toán 15. 22:

Chứng minh với mọi tam giác ABC

a) $\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}\leq\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)$

b) $\sqrt{3}\cos A+2\cos B+2\sqrt{3}\cos C\geq 4$.

Hướng dẫn giải

a) BĐT $\Leftrightarrow \left(4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}\right)+\left(4\cos^3\frac{B}{3}-3\cos\frac{B}{3}\right)+\left(4\cos^3\frac{C}{3}-3\cos\frac{C}{3}\right)\leq\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2}-4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2}\geq 0$$: đúng.

b) BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2+\sqrt{3}\cos(B+C)-2\cos B-2\sqrt{3}\cos C\geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin^2 B+\frac{3}{2}\sin^2 C-\sqrt{3}\sin B\sin C\right)+\left(\frac{1}{2}\cos^2 B+\frac{3}{2}\cos^2 C+2\right.$$
$$\left.+\sqrt{3}\cos B\cos C-2\cos B-2\cos C-2\sqrt{3}\cos C\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin B-\sqrt{3}\sin C)^2+\frac{1}{2}(\cos B+\sqrt{3}\cos C-2)^2\geq 0$$: đúng.

Bài toán 15. 23:

Chứng minh với mọi tam giác ABC:

a) $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 12$

b) $\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)\geq 8\cos A\cos B\cos C$ (A,B,C nhọn)

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} \le \frac{a^2}{4bc}.$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} \ge \frac{4bc}{a^2}$. Chứng minh tương tự thì có

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 4\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}\right)$$

$$\ge 4.3\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}\frac{ca}{b^2}\frac{ab}{c^2}} = 12.$$

b) BĐT $\Leftrightarrow \cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) \ge -8\cos(A+B)\cos(B+C)\cos(C+A)$

$\Leftrightarrow (1 + \tan B\tan C)(1 + \tan C\tan A)(1 + \tan A\tan B)$

$$\ge -8(1 - \tan B\tan C)(1 + \tan B\tan A)(1 + \tan C\tan A)$$

Đặt: $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$.

Bất đẳng thức phải chứng minh:

$(xy + 1)(yz + 1)(zx + 1) \ge 8(xy - 1)(yz - 1)(zx - 1)$

$\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y) \ge 8(y+z)(z+x)(x+y)$

Mà $2x + y + z = (x + y) + (x + z) \ge 2\sqrt{(x+y)(x+z)}$, tương tự cho hai biểu thức còn lại ở vế trái $\Rightarrow$ đpcm

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, nghĩa là nếu và chỉ nếu tam giác ABC là đều.

Bài toán 15. 24:

Chứng minh với ABC là tam giác bất kỳ :

a) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{9}$.

b) $\tan A + \tan B + \tan C \ge \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$1 = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}$$

$= \quad 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}$ .Suy ra đpcm .

b) Ta chứng minh: $\tan A + \tan B \geq 2\cot\frac{C}{2}$.

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} \geq 2\tan\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \geq 2\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \cos A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[1+\cos(A+B)] \geq \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$\Leftrightarrow \cos(A-B) \leq 1$: đúng.

Áp dụng thì có đpcm. Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài toán 15. 25:

Cho tam giác ABC thoả điều kiện: $\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}=2\cos\frac{A-B}{2}$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}=2\sin\frac{3(A-B)}{4}\cos\frac{3(A-B)}{4}$

$1\geq\sin\frac{3(A+B)}{4}>0$;$\cos\frac{A-B}{2}>0$

$$0\leq\frac{|A-B|}{2}\leq\frac{3|A-B|}{2}<\pi\Rightarrow\cos\frac{A-B}{2}\geq\cos\frac{3(A-B)}{4}$$

Từ $\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}=2\cos\frac{A-B}{2}$ và $\cos\frac{A-B}{2}>0$

Suy ra: $2\sin\frac{3(A-B)}{4}\cos\frac{3(A-B)}{4}>0$ nên $\cos\frac{3(A-B)}{4}>0$

Do đó: $2\sin\frac{3(A-B)}{4}\cos\frac{3(A-B)}{4}\leq 2\cos\frac{3(A-B)}{4}\leq 2\cos\frac{A-B}{2}$

Dấu "=" khi $\begin{cases} \dfrac{|A-B|}{2} = \dfrac{3|A-B|}{4} \\ \sin\dfrac{3(A+B)}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán 15. 26:

Xét dạng của tam giác ABC thỏa mãn:

$$\frac{\cos A.\cos B}{\cos C} + \frac{\cos B.\cos C}{\cos A} + \frac{\cos C.\cos A}{\cos B} = \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện cho thì 3 góc A, B, C nhọn

Ta có: $\dfrac{\cos A.\cos B}{\cos C} = \dfrac{\cot A.\cot B}{\cot C(\cot A + \cot B)}$

Đặt: x = cotA.cotB ; y = cotB.cotC ; z = cotC.cotA

Ta có: x, y, z > 0 (do A, B, C nhọn) và:

$$\frac{\cos A.\cos B}{\cos C} = \frac{x}{y+z} \quad , \quad \frac{\cos B.\cos C}{\cos A} = \frac{y}{z+x} \quad , \quad \frac{\cos C.\cos A}{\cos B} = \frac{z}{x+y}$$

Nên ĐT $\Leftrightarrow \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} = \dfrac{3}{2}$ với x, y, z > 0

Theo bất đẳng thức Nasobit ta có dấu "=" xảy ra khi x = y = z $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Bài toán 15. 27:

Tính các góc của tam giác ABC biết:

$$\frac{140}{59}\sin^2\frac{A}{2} + \frac{84}{59}\sin^2\frac{B}{2} + \frac{60}{59}\sin^2\frac{C}{2} = 1$$

Hướng dẫn giải

Dùng bổ đề tam giác ABC, với x, y, z > 0:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yzcosA + 2xzcosB + 2xycosC$

Dấu "=" khi $\Leftrightarrow$ ΔABC ~ ΔXYZ có 3 cạnh có độ dài x, y, z

Ta có: $140\sin^2\dfrac{A}{2} + 84\sin^2\dfrac{B}{2} + 60\sin^2\dfrac{C}{2} = 59$

$\Leftrightarrow 70(1 - cosA) + 42(1 - cosB) + 30(1 - cosC) = 59$

$\Leftrightarrow 70cosA + 42cosB + 30cosC = 83$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos A}{3} + \dfrac{\cos B}{5} + \dfrac{\cos C}{7} = \dfrac{83}{210}$

Áp dụng bất đẳng thức trên:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yzcosA + 2xzcosB + 2xycosC$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos A}{x}+\frac{\cos B}{y}+\frac{\cos C}{z}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ$ có độ dài 3 cạnh là x, y, z

Ta có: $\frac{\cos A}{3}+\frac{\cos B}{5}+\frac{\cos C}{7}\le\frac{3^2+5^2+7^2}{2.3.5.7}=\frac{83}{210}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta XYZ$ có 3 cạnh có độ dài 3, 5, 7

Vậy : $\cos A=\frac{13}{14}$, $\cos B=\frac{11}{14}$, $\cos C=-\frac{1}{2}$.

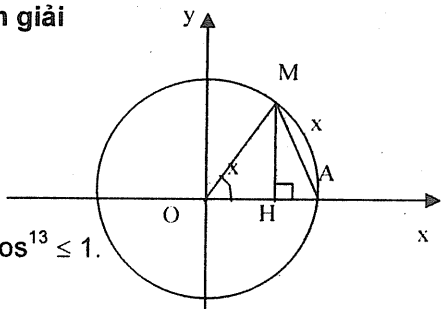
Bài toán 15. 28:

Chứng minh bất đẳng thức :

a) $\sin x \le x, \forall x > 0$.

b) $\sin^6 x + \cos^{13} x \le 1$ với mọi x.

Hướng dẫn giải



a) Xét $x \ge 1$ thì $\sin x \le 1 \le x$

Xét $0 < x < 1$ thì $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\sin x = MH < MA = \overset{\frown}{MA} = x$

b) Ta có: $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$ nên:

$\sin^6 x \le \sin^2 x$; $\cos^{13} x \le \cos^2 x \Rightarrow \sin^6 x + \cos^{13} \le 1$.

Bài toán 15. 29:

Chứng minh với $x , y , z \in [0; \pi]$ thì:

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \le \sin\frac{x+y+z}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $0 \le x , y \le \pi$ thì

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{x-y}{2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \cos\frac{x-y}{2} \le 1.$$

nên $\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$.

Áp dụng:

$$\sin\frac{x+y+z}{3} = \sin\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}}{2}$$

$$\text{nên } 2\sin\frac{x+y+z}{3} \ge \sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}$$

$$\ge \frac{\sin x+\sin y}{2}+\frac{\sin z+\sin\frac{x+y+z}{3}}{2}$$

Do đó $4\sin\frac{x+y+z}{3} \geq \sin x + \sin y + \sin z + \sin\frac{x+y+z}{3}$.

Vậy $\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin\frac{x+y+z}{3}$.

Bài toán 15. 30:

Chứng minh với $x, y, z \in [0; \frac{\pi}{2})$ thì:

$$\frac{\tan x + \tan y + \tan z}{3} \geq \tan\frac{x+y+z}{3}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $x, y \in [0; \frac{\pi}{2})$ thì $\sin(x+y) > 0$

$$\frac{\tan x + \tan y}{2} = \frac{\sin(x+y)}{2\cos x.\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

$$\geq \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+1} = \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\cos^2\frac{x+y}{2}} = \tan\frac{x+y}{2}$$

Áp dụng:

$$\tan\frac{x+y+z}{3} = \tan\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2}}{2}$$

$$\text{nên } 2\tan\frac{x+y+z}{3} \leq \tan\frac{x+y}{2} + \tan\frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2}$$

$$\leq \frac{\tan x + \tan y}{2} + \frac{\tan z + \tan\frac{x+y+z}{3}}{2}$$

Do đó

$$4\tan\frac{x+y+z}{3} \geq \tan x + \tan y + \tan z + \tan\frac{x+y+z}{3}.$$

Vậy $\frac{\tan x + \tan y + \tan z}{3} \geq \tan\frac{x+y+z}{3}$.

Bài toán 15. 31:

Chứng minh với mọi x thì có bất đẳng thức :

$$\tan(|\cos x|) > \cos(x + \sin x).$$

Hướng dẫn giải

Với mọi x thì : $0 \le |\cos x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(|\cos x|) \ge |\cos x| \ge \cos x$

Dấu bằng khi cosx = 0.

Ta chứng minh bất đẳng thức: $\cos x \ge \cos(x + \sin x)$

Khi sinx =0 thì BĐT đúng

Khi sinx >0 thì x = a +k2л , 0< a< л , k nguyên

Vì л –a > 0 nên sin (л –a) > л –a hay là sina <л –a

Do đó 0 <a < a + sina < л nên cos a > cos (a +sina)

cos (x – k2л) > cos (x –k2л + sin(x–k2л))

cos x > cos (x + sinx)

Khi sinx <0 ta nhận được BĐT bằng cách thay x bởi –x

Vì dấu bằng của BĐT khi sinx = 0 không đồng thời xảy ra với BĐT đầu nên với mọi x ta có : $\tan(|\cos x|) > \cos(x + \sin x)$.

Bài toán 15. 32:

Cho các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ với $0^\circ \le \alpha_i \le 180^\circ$, i = 1,2, ...,n sao cho giá trị của $\sum_{i=1}^{n}(1+\cos\alpha_i)$ là một số nguyên lẻ.

Chứng minh rằng : $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i \ge 1$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết, ta có :

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\cos\alpha_i) = 2\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\alpha_i}{2} = 2a + 1 \text{ (a nguyên không âm), và :}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}2\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_i}{2} \ge 2\sum_{i=1}^{k}\sin^2\frac{\alpha_i}{2} + 2\sum_{i=k+1}^{n}\cos^2\frac{\alpha_i}{2}$$

$= A + B$, với $A, B \ge 0$ (1)

Nếu $B \ge 1$ thì tổng $S \ge 1$.

Nếu $B < 1$ thì :

$$A = 2\sum_{i=1}^{k}\sin^2\frac{\alpha_i}{2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left(1-\cos^2\frac{\alpha_i}{2}\right) = 2k - 2\sum_{i=1}^{k}\cos^2\frac{\alpha_i}{2} \ge 0$$

Suy ra : $2k \ge 2\sum_{i=1}^{k}\cos^2\frac{\alpha_i}{2} = 2a + 1 - B \Rightarrow 2k \ge 2a + 1$

Theo (1) thì : $S \ge A + B$

Vậy : $S \ge 2k - (2a + 1 - B) + B \ge 1 + 2B \ge 1$, tức là : $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i \ge 1$.

Bài toán 15. 33:

Cho $x, y, z \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Chứng minh

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{\sin z} + \frac{\sin y - \sin z}{\sin x} + \frac{\sin z - \sin x}{\sin y} \right| \le (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 .$$

Hướng dẫn giải

Đặt $\sin x = a$; $\sin y = b$; $\sin z = c$ thì có $a, b, c \in [\frac{1}{2}, 1]$. Ta có

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} .$$

Giả sử $\frac{1}{2} \le a \le b \le c \le 1$, $u = \frac{a}{c}$; $v = \frac{b}{c}$ thì $\frac{1}{2} \le u \le v \le 1$.

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{(v-u)(1-u)(1-v)}{uv} \le (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 .$$

Ta có $$\frac{(v-u)(1-u)(1-v)}{uv} \le \frac{(v-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1-v)}{\frac{1}{2}v}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - v - \frac{1}{2v} \le 1 + \frac{1}{2} - 2\sqrt{v.\frac{1}{2v}} = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 .$$

Dấu " = " xảy ra khi $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $z = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 15. 34:

Tính giá trị lớn nhất – bé nhất của hàm số

a) $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$ b) $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $\sin x \ge 0$; $\cos x \ge 0$.

Ta có $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = 1$ và $\cos x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ nên $\max y = 1$.

Ta có $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \ge -\sqrt{\cos x} \ge -1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = 0$ và $\cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ nên $\min y = -1$.

b) Đặt $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ thì $y = \frac{t^2 + 2t + 2}{t^2 - t + 3}$

$\Leftrightarrow (y - 1)t^2 - (y + 2)t + 3y - 2 = 0$

Nếu $y = 1$: phương trình trở thành $-3t + 1 = 0$ thì phương trình có nghiệm .

Nếu $y \neq 1$: phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (y + 2)^2 - 4(y - 1)(3y - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2$.

Do đó $\max y = 2$ và $\min y = \frac{2}{11}$.

Bài toán 15. 35:

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $y = \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$.

Hướng dẫn giải

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} + 4$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}\right) + 4$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4 \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{16}{1}\right) + 4 = \frac{25}{2}$$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ nên $\min y = \frac{25}{2}$.

Bài toán 15. 36:

Cho tam giác ABC tùy ý.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh: với mọi $x, y \geq 0$: $x + y \leq \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)}$.

Thật vậy , $x + y \leq \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \Leftrightarrow (x + y)^3 \leq 4(x^3 + y^3)$

$\Leftrightarrow (x + y)(x - y)^2 \geq 0$: đúng .

Nên $\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} \leq \sqrt[3]{4(\sin A + \sin B)}$

$$= 2\sqrt[3]{\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}} = 2\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B .

Tương tự thì có:

$$\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

nên $P = \dfrac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}} \le 1$.

Dấu " = " xảy ra khi tam giác ABC đều .

Vậy , max P = 1 , khi tam giác ABC đều .

b) Đặt $x = \dfrac{1}{\sin A}; y = \dfrac{1}{\sin B}; z = \dfrac{1}{\sin C}$ thì x, y, z > 0

$\Rightarrow T = (1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz$

$\ge 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + xyz = (1+\sqrt[3]{xyz})^3$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}}\right)^3 \ge \left(1 + \frac{3}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^3$$

Mà $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T \ge \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$

Vậy $\min T = \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$ .Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài toán 15. 37:

a) Chứng minh nếu $ab \ne -1$; $bc \ne -1$; $ca \ne -1$ thì

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca} .$$

b) Chứng minh nếu $|b| \le |a|$ thì:

$$|a+b| + |a-b| = |a + \sqrt{a^2-b^2}| + |a - \sqrt{a^2-b^2}| .$$

Hướng dẫn giải

a) Đặt a = tanA; b = tanB; c = tanC, thì đẳng thức đề bài thành

$$\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} + \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B\tan C} + \frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C\tan A}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}\cdot\frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B\tan C}\cdot\frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C\tan A} .$$

$\Leftrightarrow \tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A) = \tan(A-B).\tan(B-C).\tan(C-A)$

Ta chứng minh:

$\alpha + \beta + \gamma = k\pi \Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \,.\, \tan\beta \,.\, \tan\gamma$

Để ý rằng (A – B) + (B – C) + (C – A) = 0 $\Rightarrow$ đpcm .

b) Nếu a = 0 thì b = 0nên đẳng thức đúng.

Nếu a $\neq$ 0 , đẳng thức tương đương :

$$|1+\frac{b}{a}|+|1-\frac{b}{a}|=|1+\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}|+|1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}| \quad (1)$$

Vì $|b| \le |a|$ nên đặt $\frac{b}{a}$ = cost, $0 \le t \le \pi$ thì (1) tương đương :

$|1+\cos t|+|1-\cos t|=|1+\sin t|+|1-\sin t|$

$\Leftrightarrow 1+\cos t+1-\cos t=1+\sin t+1-\sin t \Leftrightarrow 2=2$: đúng

Bài toán 15. 38:

a) Chứng minh: $\left|\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}(xy-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2})\right| \le 2$

b) Chứng minh: $-\frac{1}{4} \le \frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \le \frac{1}{4}, \forall x, \forall y$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện x, y $\in [-1; 1]$ nên đặt x = sina, y = sinb, a, b $\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Do đó ta có

$$\left|\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}(xy-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2})\right|$$

$$=\left|\sin a\cos b+\cos a\sin b+\sqrt{3}(\sin a\sin b-\cos a\cos b)\right|$$

$$=\left|\sin(a+b)-\sqrt{3}\cos(a+b)\right|=2\left|\sin(a+b-\frac{\pi}{3})\right| \le 2 .$$

b) Đặt x = tanα, y = tanβ thì

$$T=\frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}=\frac{x^2(1+y^2)^2-y^2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2.(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}=\frac{\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^2}-\frac{\tan^2\beta}{(1+\tan^2\beta)^2}$$

$$=\tan^2\alpha\left(\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\right)^2-\tan^2\beta\left(\frac{1}{1+\tan^2\beta}\right)^2$$

$$=\tan^2\alpha.\cos^4\alpha-\tan^2\beta.\cos^4\beta=\sin^2\alpha.\cos^2\alpha-\sin^2\beta.\cos^2\beta$$

$$=\frac{1}{4}(\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\beta).$$

Do đó $-\frac{1}{4} \le -\frac{1}{4}\sin^2 2\beta \le T \le \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha \le \frac{1}{4}$ (đpcm).

Bài toán 15. 39:

Chứng minh bất đẳng thức

a) $-2 \le \frac{\sqrt{3}+\sqrt{a^2-1}}{a} \le 2$.

b) $\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} + \frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}.\sqrt{1+z^2}} \ge \frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+z^2}}, \forall x,y,z$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $|a| \ge 1$, ta chỉ cần xét $a > 0$ do đó $a \ge 1$,

đặt $a = \frac{1}{\cos t}$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$ thì ta có: $\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a} = \frac{\tan t + \sqrt{3}}{\frac{1}{\cos t}} = \sin t + \sqrt{3}\cos t$

$= 2.\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \le 2 \Rightarrow$ đpcm.

b) Đặt $x = \tan a$, $y = \tan b$, $z = \tan c$ thì bất đẳng thức

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} + \frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}.\sqrt{1+z^2}} \ge \frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+z^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\tan a - \tan b|}{\sqrt{1+\tan^2 a}.\sqrt{1+\tan^2 b}} + \frac{|\tan b - \tan c|}{\sqrt{1+\tan^2 b}.\sqrt{1+\tan^2 c}} \ge \frac{|\tan a - \tan c|}{\sqrt{1+\tan^2 a}.\sqrt{1+\tan^2 c}}$$

$$\Leftrightarrow |\cos a \cos b(\tan a - \tan b)| + |\cos b \cos c(\tan b - \tan c)| \ge |(\cos a \cos c(\tan a - \tan c)|$$

$$\Leftrightarrow |\sin(a-b)| + |\sin(b-c)| \ge |\sin(a-c)|.$$

Ta có $|\sin(a-c)| = |\sin((a-b)+(b-c))|$

$= |\sin(a-b)\cos(b-c) + \sin(b-c)\cos(a-b)|$

$\le |\sin(a-b)\cos(b-c)| + |\sin(b-c)\cos(a-b)|$

$\le |\sin(a-b)| + |\sin(b-c)|$: đpcm.

Bài toán 15. 40:

Gọi m, n, p là ba nghiệm thực của phương trình

$ax^3 + bx^2 + cx - a = 0$, $a \ne 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p} \le m^2 + n^2 + p^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn giải

Theo định lý Viet: mnp = 1.

Lấy $\alpha = 45^0$, $\beta = -30^0$, $\gamma = 165^0$ thì $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

và $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = -\cos 15^0 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Cho nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{2}np + \sqrt{3}pm - \sqrt{2+\sqrt{3}}mn \le m^2 + n^2 + p^2$$

$\Leftrightarrow 2npcos\alpha + 2pmcos\beta + 2mn\cos\gamma \le m^2 + n^2 + p^2$. (1)

mà $(p - mcos\beta - ncos\alpha)^2 + (msin\beta - nsin\alpha)^2 \ge 0$

$\Rightarrow p^2 + m^2(cos^2\beta + sin^2\beta) + n^2(cos^2\alpha + sin^2\alpha)$

$\ge 2mp\cos\beta + 2np\cos\alpha - 2mn\cos(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow p^2 + m^2 + n^2 \ge 2mp\cos\beta + 2np\cos\alpha + 2mn\cos\gamma$.

Như vậy (1) đã được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} msin\beta = nsin\alpha \\ p = mcos\beta + ncos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \frac{m}{sin\alpha} = \frac{n}{sin\beta} = \frac{p}{sin\gamma}.$$

Đặt $k = \frac{m}{sin\alpha}$ thì $k^3 = \frac{mnp}{sin\alpha.sin\beta.sin\gamma} = -4(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow k = -\sqrt[3]{4(\sqrt{3}+1)}$

Vậy dấu " = " xảy ra khi $m = ksin\alpha = -\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$;

$$n = ksin\beta = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \text{ và } p = ksin\gamma = -\sqrt[6]{\frac{7-4\sqrt{3}}{2}}.$$

Bài toán 15. 41:

Cho n nguyên dương, $x_0 = 0$ và n số dương x_i sao cho $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chứng minh $1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+..+x_{i-1}}.\sqrt{x_i+x_{i+1}+..+x_n}} < \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 2 số dương

$$\sqrt{1+x_0+x_1+..+x_{i-1}}.\sqrt{x_i+x_{i+1}+..+x_n} \le \frac{1+x_0+x_1+..+x_n}{2} = 1.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức bên phải:

Vì n số dương x_i sao cho $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ nên đặt

$\sin a_i = x_0 + x_1 + ... + x_i, i = 0,1,..,n,\ 0 \le a_i \le \frac{\pi}{2}$.

Ta có $1 - \cos^2 a_{i-1} = \sin^2 a_{i-1} = (x_0 + x_1 + ... + x_{i-1})^2$

Nên $\cos^2 a_{i-1} = 1 - \sin^2 a_{i-1} = \left(1 - (x_0 + x_1 + ... + x_{i-1})^2\right)$

$= \left(1 - (x_0 + x_1 + ... + x_{i-1})\right)\left(1 + (x_0 + x_1 + ... + x_{i-1})\right)$

Do đó $\cos a_{i-1} = \sqrt{(1 + \sum_{k=0}^{i-1} x_k)(\sum_{k=i}^{n} x_k)}$.

Nên $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + .. + x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i + x_{i+1} + .. + x_n}} < \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin a_i - \sin a_{i-1}}{\cos a_{i-1}} < \frac{\pi}{2}$.

Ta có $\sin a_i - \sin a_{i-1} = 2\cos\frac{a_i + a_{i-1}}{2}\sin\frac{a_i - a_{i-1}}{2}$

$< 2\cos\frac{a_i + a_{i-1}}{2}.\frac{a_i - a_{i-1}}{2}$

Do đó $\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin a_i - \sin a_{i-1}}{\cos a_{i-1}} < \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0 = \frac{\pi}{2}$

Bài toán 15. 42:

Cho 3 số thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $T = xy + yz + 2zx$.

Hướng dẫn giải

Vì $y^2 + (x^2 + z^2) = 1$ nên đặt $y = \cos a$, $x = \sin a.\cos b$, $z = \sin a.\sin b$ thì

$T = xy + yz + 2zx = \sin a.\cos a(\cos b + \sin b) + \sin^2 a.\sin 2b$

$\le \frac{1}{2}\sin 2a.\sqrt{2} + \sin^2 a.1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2}.\sin 2a - \cos 2a)$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(2a - \phi) \le \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dấu = chẳng hạn khi $b = \frac{\pi}{4}$ và $\sin(2a - \phi) = 1$

Vậy $\max T = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 15. 43:

Cho x, y, z dương thoả $xz - zy - yx = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{2y^2}{1+y^2} + \frac{3z^2}{1+z^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: x, y, z > 0 nên $xz - zy - yx = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz}$

Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, (a, b, c > 0) thì $b - a - c = abc$

$\Rightarrow a + c = b(1 - ac) \Rightarrow b = \frac{a+c}{1-ac}$

Đặt $\begin{cases} a = \tan\alpha \\ c = \tan\beta \end{cases}$ với $\alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ suy ra $b = \tan(\alpha + \beta)$

Do b > 0 và $\alpha, \beta > 0$ nên $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

$$P = \frac{2}{1+a^2} - \frac{2}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2}$$

$$= 2\cos^2\alpha - 2\cos^2(\alpha+\beta) + 3\cos^2\beta = \cos 2\alpha - \cos 2(\alpha+\beta) + 3\cos^2\beta$$

$$= 2\sin\beta.\sin(\alpha+\beta) + 3\cos^2\beta = -3\sin^2\beta + 2\sin\beta.\sin(2\alpha+\beta) + 3$$

$$= -3\left[\sin\beta - \frac{1}{3}\sin(2\alpha+\beta)\right]^2 - \frac{1}{3}\cos^2(2\alpha+\beta) + \frac{10}{3} \le \frac{10}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \cos(2\alpha+\beta) = 0 \\ \sin\beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy GTLN của $P = \frac{10}{3}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 15. 1: Chứng minh:

a) $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan a \tan b \tan c + \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c}$

b) $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

Hướng dẫn

a) dùng $\sin(a + b + c) = \sin[(a + b) + c]$

b) dùng $\sin 5x = \sin(3x + 2x)$

Bài tập 15. 2: Tìm a $\in (0; \pi)$ để mỗi biểu thức sau không phụ thuộc x:

a) S = sinx + sin(x + a) + sin(x + 2a) + sin(x + 3a) + sin(x + 4a)

b) T = cosx + cos(x + a) + cos(x + 2a) + ... + cos(x + 5a).

Hướng dẫn

a) Nhân 2 vế với $2\cos\frac{x}{2}$. Kết quả $a = \frac{2\pi}{5}$, $a = \frac{4\pi}{5}$

b) Nhân 2 vế với $2\sin\frac{x}{2}$ .Kết quả $a = \frac{\pi}{3}$, $a = \frac{2\pi}{3}$.

Bài tập 15. 3:

a) Cho $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$

b) Tính $\sin 36^0$ và $\cos 6^0$

Hướng dẫn

a) Bình phương 2 giải thiết. Kết quả $\cos(\alpha - \beta) = \frac{59}{72}$

b) Kết quả $\sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos 6^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$

Bài tập 15. 4: Tính tổng:

a) $A = \frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} + ... + \frac{1}{\cos 7\alpha\cos 8\alpha}$

b) $B = \cos^2 a + \cos^2 2a + \cos^2 3a + \cos^2 4a + \cos^2 5a + \cos^2 6a$.

Hướng dẫn

a) $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Kết quả $A = \frac{\tan 8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}$.

b) Dùng công thức hạ bậc. Kết quả $B = \frac{\sin 13a - \sin a + 12}{4}$.

Bài tập 15. 5: Đặt: $u_n = \cos^n\frac{\pi}{7} + \cos^n\frac{3\pi}{7} + \cos^n\frac{5\pi}{7}$, n nguyên.

a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4

b) Chứng minh u_n hữu tỉ với mọi n nguyên.

Hướng dẫn

a) Kết quả $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{5}{4}$, $u_3 = \frac{1}{2}$, $u_4 = \frac{13}{16}$

b) Chứng minh qui nạp $8u_{n-1} = 4u_n + 4u_{n-1} - u_{n-2}$, $n \geq 3$

Bài tập 15. 6: Chứng minh rằng với mọi x, y $\in$ **R**:

a) $4\sin 3x + 5 \geq 4\cos 2x + 5\sin x$

b) $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 \geq 0$.

Hướng dẫn

a) BĐT$\Leftrightarrow$ $(1 - \sin x)(4\sin x + 1)^2 \geq 0$

b) BĐT$\Leftrightarrow$ $(2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1))^2 + \cos^2(2^x + y - 1) \geq 0$

Bài tập 15. 7: Chứng minh với $x, y, z \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ thì :

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3} \leq \cos\frac{x + y + z}{3}.$$

Hướng dẫn

Dùng $\frac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos\frac{x + y}{2}$

Bài tập 15. 8: Chứng minh với mọi tam giác ABC

a) $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq 1$. b) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

a) Biến đổi tương đương

b) Dùng tam thức bậc hai

Bài tập 15. 9: Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) \leq \frac{17}{4}$.

b) $2\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \sqrt{3}\right) \geq \cot B + \cot C$.

Hướng dẫn

a) $(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 \geq 0$

b) $2\sin B[1 - \sin(C + \frac{\pi}{6})] + 2\sin C[1 - \sin(B + \frac{\pi}{6})] \geq 0$:

Bài tập 15. 10: Cho tam giác ABC tùy ý.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \cos 3A + \cos 3B - \cos 3C$

Hướng dẫn

a) Dùng phương trình bậc hai theo cosC. Kết quả max M = 3 .

b) Kết quả Min $P = -\frac{3}{2}$

Bài tập 15. 11: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $2\sqrt{2} \le \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} \le 4$, $\forall x \in [-4,4]$.

b) $20a^3 - 15a + 36b - 48b^3 \le 13$ với $a^2 + b^2 = 1$.

Hướng dẫn

a) $|x| \le 4$ nên đặt $x = 4\cos 2t$, $0 \le 2t \le \pi$.

b) $20a^3 - 15a + 36b - 48b^3 = 5(4a^3 - 3a) + 12(3b - 4b^3)$

Bài tập 15. 12: Xét các số thực dương thoả mãn: $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của : $P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$.

Hướng dẫn

Biến đổi $abc + a + c = b \Leftrightarrow a.c + c.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.a = 1$.

Đặt $a = \tan\frac{A}{2}; c = \tan\frac{B}{2}; \frac{1}{b} = \tan\frac{C}{2}$

Kết quả max $P = \frac{10}{3}$.

Chuyên đề 16: BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN

Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức đúng, phân tích bình phương, tổng các bình phương, tích các đại lượng không đổi dấu,...

Phương pháp so sánh, đánh giá

$A^2 + C \geq C,\ C - B^2 \leq C, \ldots$

Nếu $A > B > 0$ thì $\frac{A}{B} > 1,\ 0 < \frac{B}{A} < 1$

Nếu $a, b, c > 0$ và $a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$;

Nếu $a, b, c > 0$ và $a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

Với các số nguyên dương k thì

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k.k} > \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k.k} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k};\ k \neq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}), \ldots$$

Phương pháp tam thức bậc 2 theo 1 biến

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases},\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}.$$

Phương pháp khác : phản chứng, quy nạp, dùng tính chất hàm số đồng biến hay nghịch biến, dùng đồ thị, miền giá trị, toạ độ, vectơ, lượng giác hoá,...

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

$|x + y| \le |x| + |y|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x và y cùng dấu.

$|x - y| \le |x| + |y|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x và y trái dấu.

$||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$

$||x| - |y|| \le |x - y| \le |x| + |y|$,...

Bất đẳng thức Schwarz

Với bốn số a, b, c, d thì $(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

hay $|ac + bd| \le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ad = bc.

Bất đẳng thức Nesbitt

Nếu a, b, c dương thì: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi a =b = c.

Bất đẳng thức AM–GM giữa trung bình cộng và trung bình nhân (thường gọi là bất đẳng thức Cauchy)

– Với hai số a, b không âm: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Hay $a + b \ge 2\sqrt{ab}; \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}; ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b.

– Với ba số a, b, c không âm: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

Hay $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}; \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}; abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

Chú ý: Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng có thể áp dụng được bất đẳng thức cơ bản với các kỹ thuật tách số hoặc ghép số, ghép cặp 2, ghép cặp 3, ngược dấu; tăng hoặc giảm số số hạng, tăng hoặc giảm bậc luỹ thừa, bổ sung đại lượng dựa vào vế kia, chọn lựa các hệ số để dấu đẳng thức xảy ra,...

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 16.1: Chứng minh

a) bất đẳng thức AM–GM cho 3 số a,b,c ≥ 0: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

b) bất đẳng thức Shur với a, b, c > 0 , r > 0 thì :

$$a^r (a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Hướng dẫn giải

a) Xét a + b + c = 0, vì a, b, c ≥ 0 nên a = b = c = 0: BĐT đúng

Xét a + b + c > 0. Ta có

$$(a+b) + (c + \frac{a+b+c}{3}) \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}\right) \geq 4\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc : \Rightarrow \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

Cách khác: Đặt A = $\sqrt[3]{a}$, B = $\sqrt[3]{b}$, C = $\sqrt[3]{c}$ thì bất đẳng thức tương đương: $\frac{1}{2}(A+B+C)\left[(A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2\right] \geq 0$.

b) Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử: a ≥ b ≥ c, ta có bất đẳng thức a^r

$$(a-b)(a-c) - b^r(a-b)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left[a^r(a-c) - b^r(b-c)\right] + c^r(a-c)(b-c) \geq 0$$

Vì a ≥ b ≥ c nên bất đẳng thức đúng.

Bài toán 16.2:

Cho hai số a, b thoả mãn a + b ≥ 2.

Chứng minh bất đẳng thức $a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết thì $a + b - 2 \geq 0$ và bất đẳng thức

$a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq 0$

Ta cần chứng minh trung gian: $a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq a + b - 2$.

Thật vậy $a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq a + b - 2$

$\Leftrightarrow (a^4 - a^3 - a + 1) + (b^4 - b^3 - b + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a - 1) - (a - 1) + b^3(b - 1) - (b - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 1) + (b - 1)(b^3 - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 (a^2 + a + 1) + (b - 1)^2 (b^2 + b + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2[(a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] + (b-1)^2[(b + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] \geq 0$: Đúng.

Bài toán 16.3:

Cho $x, y \in [0, 1]$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Hướng dẫn giải

Vì $x, y \in [0, 1]$, BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{4}{1+xy}$

Ta có $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} \geq 1+xy$.

$\Leftrightarrow (1 + x^2)(1 + y^2) \geq (1+xy)^2 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$: đúng.

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$.

Thật vậy $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+xy} - \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{1+xy} - \frac{1}{1+y^2}$

$\Leftrightarrow \frac{(1-xy)(x-y)^2}{(1+xy)(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0$ đúng vì x, y thuộc [0, 1].

Bài toán 16.4:

Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Hướng dẫn giải

Ta sử dụng đánh giá trung gian với giả sử a = min{a, b, c}.

Vì a, b, c > 0 nên $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq 1$ do đó

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+a^2}{ab+bc+ca+a^2} = \frac{2a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)}.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Thật vậy $\frac{2a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$

$\Leftrightarrow (b+c)(2a^2+b^2+c^2) + 8abc \geq 2(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow (b-c)^2(b+c-2a) \geq 0$: đúng.

Bài toán 16.5:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a+bc)} + \sqrt{(b+ca)} + \sqrt{(c+ab)} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có a,b,c là các số thực dương nên

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow \sqrt{abc} = \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{c+ab} \geq \sqrt{c} + \sqrt{\frac{ab}{c}}$.

Thật vậy, $\sqrt{c+ab} \geq \sqrt{c} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \Leftrightarrow c+ab \geq c + \frac{ab}{c} + 2\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow c+ab \geq c+ab\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0: \text{đúng.}$$

Bài toán 16.6: Giả sử a,b,c là các số không âm và không có hai trong các số đó bằng không. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Ta có $\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+bc}=1+\dfrac{a(b+c-a)}{a^2+bc}$, nên ta có thể viết bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+c-a)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a-b)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b-c)}{c^2+ab}\geq 0.$$

Giả sử rằng $a\leq b\leq c$. Vì $b+c-a>0$, nên ta chỉ cần chứng minh rằng $\dfrac{b(c+a-b)}{b^2+ca}+\dfrac{c(a+b-c)}{c^2+ab}\geq 0$.

Thật vậy $\dfrac{b(c+a-b)}{b^2+ca}+\dfrac{c(a+b-c)}{c^2+ab}\geq 0$

$\Leftrightarrow (b^2+c^2)a^2-(b+c)(b^2-3bc+c^2)a+bc(b-c)^2\geq 0$:đúng vì

$(b^2+c^2)a^2-(b+c)(b^2-3bc+c^2)a+bc(b-c)^2=$

$=(b^2+c^2-2bc)a^2-(b+c)(b^2-2bc+c^2)a+bc(b-c)^2+abc(2a+b+c)=$

$=(b-c)^2(a-b)(a-c)+abc(2a+b+c)\geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=(0,1,1)$ hoặc hoán vị vòng.

Bài toán 16.7:

Cho 2 số x và y không đồng thời bằng 0.

Chứng minh rằng $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Hướng dẫn giải

Nếu $x+y\leq 0$ thì bất đẳng thức đúng.

Nếu $x+y>0$, ta có $x+y\leq 2\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\leq 2x^2+2y^2 \Leftrightarrow 0\leq(x-y)^2$: đúng.

Và ta có $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2-xy+y^2}\leq\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \le 2x^2-2xy+2y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$:đúng.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 16.8:

Cho a, b, c > 0.Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$.

Hướng dẫn giải

BĐT $\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)$

$$\le \frac{a(a+b)(b+c)}{b}+\frac{b(a+b)(b+c)}{c}+\frac{c(a+b)(b+c)}{a}$$

$\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)$

$$\le \frac{a^2c}{b}+a^2+ab+ac+\frac{b^2(a+b)}{c}+b^2+ab+c^2+bc\frac{cb(b+c)}{a}$$

Vì: $(a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)=a^2+ac+c^2+3b^2+3ab+3bc$

Do đó ta cần chứng minh: $\frac{a^2c}{b}+\frac{b^2(a+b)}{c}+\frac{cb(b+c)}{a} \ge 2b^2+2bc+ab$

Thật vậy: $\frac{a^2c}{b}+\frac{b^2(a+b)}{c}+\frac{cb(b+c)}{a}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b}+\frac{b^3}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2c}{b}+\frac{c^2b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^3}{c}+\frac{c^2b}{a}\right)+b^2\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$$\ge ab+\left(\sqrt{ac^3}+\sqrt{\frac{b^4c}{a}}\right)+2b^2 \ge ab+2bc+2b^2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Bài toán 16.9:

Cho a, b, c là ba số từng đôi một khác nhau.

Chứng minh: $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3} \ge \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

BĐT $\Leftrightarrow \frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+bc+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+ac+a^2}{(c-a)^2} \ge \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\right]+\left[\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{bc}{(b-c)^2}+\frac{ca}{(c-a)^2}\right] \ge \frac{9}{4}$$

Đặt : $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$ nên

$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x - 1)(y - 1)(z - 1) \Leftrightarrow xy + xz + yz = -1$

Mà: $(x + y + z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + xz + yz) = 2$

Nên: $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{5}{2}$

Và $\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{bc}{(b-c)^2} + \frac{ca}{(c-a)^2} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} = 0$.

Bài toán 16.10:

Cho n nguyên, $n \geq 2$. Chứng minh: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Hướng dẫn giải

Và với n nguyên, $n \geq 2$, khai triển nhị thức:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = C_n^0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

$$= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \ldots$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3.$$

Bài toán 16.11:

Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

a) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + \ldots + \frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)} < \frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.5}+...+\frac{1}{1.3.5...(2n+1)}$

$< \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2}$: đúng.

b) Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{k^3}=\frac{k}{k^4}\le\frac{k}{(k^2-\frac{1}{4})^2}=\frac{k}{(k-\frac{1}{2})^2(k+\frac{1}{2})^2}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2}\right)$

hoặc: $\frac{1}{k^3}=\frac{k}{k.k^2}<\frac{1}{k(k^2-1)}=\frac{1}{k}.\frac{1}{(k+1)(k-1)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{2(k-1)}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2(k+1)}$

thì suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 16.12:

Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số không âm, thì

$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Vì a,b,c là các số không âm nên trong các số $1-a, 1-b$ và $1-c$ có hai số là cùng dấu, giả sử đó là 1–b và 1–c, do đó $(1-b)(1-c)\ge 0$.

Ta có $a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)=$

$=(a-1)^2+(b-c)^2+2a+2abc-2(ab+ca)=$

$=(a-1)^2+(b-c)^2+2a(1-b)(1-c)\ge 0 \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 16.13: Cho x, y, z ≥ 0. Chứng minh

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\geq(x+y+z)\sqrt{3}.$$

Hướng dẫn giải

Với x, y, z ≥ 0, ta có:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}=\sqrt{3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}\geq\sqrt{3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}=\frac{x+y}{2}.\sqrt{3}$$

Tương tự: $\sqrt{y^2+yz+z^2}\geq\frac{y+z}{2}.\sqrt{3}$; $\sqrt{z^2+zx+x^2}\geq\frac{z+x}{2}.\sqrt{3}$

Cộng 3 bất đẳng thức thì có:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}$$

$$\geq\left(\frac{x+y}{2}+\frac{y+3}{2}+\frac{z+x}{2}\right).\sqrt{3}=(x+y+z)\sqrt{3}.$$

Bài toán 16.14:

Cho a, b, c dương và có abc = 1. Chứng minh:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$=(a+b)[a^2b^2+a^3(a-b)-b^3(a-b)]$

$=(a+b)[a^2b^2+(a-b)(a^3-b^3))$

$=(a+b)[a^2b^2+(a-b)^2(a^2+ab+b^2)]\geq(a+b)a^2b^2$

Nên: $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leq\frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}=\frac{1}{ab(a+b)+1}\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{a+b+c}$

Tương tự rồi cộng 3 bất đẳng thức thì được

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq\frac{a+b+c}{a+b+c}=1:\text{đpcm.}$$

Bài toán 16.15:

Chứng minh với số nguyên dương n, ta có:

a) $(n!)^2\geq n^n$.

b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leq\frac{a^n+b^n}{2}$ với $a+b>0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh bổ đề $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ bằng quy nạp

Khi n = 1 thì $1^1 \geq 2^0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$: đúng

Giả sử bất đẳng thức đúng khi n = k, $k \geq 1$: $k^k \geq (k+1)^{k-1}$.

Ta phải chứng minh BĐT đúng khi n = k+1: $(k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k$.

Thật vậy $k^k.(k+1)^{k+1} \geq (k+1)^{k-1} . (k+1)^{k-1} = (k+1)^{2k}$.

$= [k(k+2)+1]^k \geq [k(k+2)]^k = k^k . (k+2)^k$.

Do đó $(k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k$: đpcm.

Khi n = 1 thì BĐT $(n!)^2 \geq n^n$: $(1!)^2 \geq 1^1$ đúng.

Giả sử BĐT đúng đến n = k tức là $(k!)^2 \geq k^k$.

Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1: $((k+1)!)^2 \geq (k+1)^{k+1}$

Ta có $((k+1)!)^2 = (k+1)^2 (k!)^2 \geq (k+1)^2 . k^k$ (1)

Theo bổ đề thì $k^k \geq (k+1)^{k-1}$.

Nên $(k+1)^2 k^k \geq (k+1)^2 (k+1)^{k-1} = (k+1)^{k+1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Vậy BĐT đúng với mọi số nguyên dương n.

b) Khi n = 1: BĐT đúng

Giả sử BĐT đúng khi n = k: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k+b^k}{2}$ (1)

Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1. Thật vậy, vì a + b > 0

nên (1) $\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a^k+b^k}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$.

Ta chứng minh: $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

$\Leftrightarrow ab^k + a^kb \leq a^{k+1} + b^{k+1}$ (2)

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$.

Vì a + b > 0 nên a > –b, do đó $a \geq |b| \Rightarrow a^m \geq |b|^m \geq b^m$ với mọi m nguyên dương.

Ta có (2) $\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^k(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^k-b^k) \geq 0$: đúng.

Bài toán 16.16:

Cho n số dương $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ có tích: $x_1.x_2.x_3...x_n = 1$.

Chứng minh tổng $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geq n$.

Suy ra bất đẳng thức AM–GM tổng quát.

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì $x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$: đúng.

Giả sử khẳng định trên đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh khẳng định đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

Xét k + 1 số dương $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ có tích

$$x_1.x_2...x_{k-1}x_k.x_{k+1} = 1. \qquad (1).$$

Giả sử cả k + 1 số $x_i > 1 \Rightarrow$ tích $x_1x_2 ... x_{k+1} > 1$: vô lý

Giả sử cả k + 1 số $x_i < 1 \Rightarrow$ tích $x_1x_2...x_{k+1} < 1$: vô lý.

Do đó tồn tại số $x_u \leq 1$ và $x_v \geq 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $u_k \leq 1$ và $u_{k+1} \geq 1$.

Từ (1) $\Rightarrow x_1x_2 ... x_{k-1} (x_k. x_{k+1}) = 1$.

Áp dụng giả thiết quy nạp với k số $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_kx_{k+1}$ có tích bằng 1 nên tổng: $x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_kx_{k+1} \geq k$.

$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + x_k + x_{k+1} - x_kx_{k+1}$

$\geq k + 1 + (x_k - 1) + x_{k+1}(1 - x_k)$.

$= k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) \geq k + 1$: đpcm.

Ta chứng minh BĐT AM–GM tổng quát với n số $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$.

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \qquad (2)$$

Nếu có số $a_i = 0$ thì (2) đúng.

Xét cả n số $a_i > 0$. Đặt $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$ thì $x_i > 0$ và tích:

$$x_1x_2 ... x_n = \frac{a_1a_2...a_n}{\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)^n} = 1$$

Áp dụng kết quả trên thì tổng: $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

$$\Rightarrow \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} \geq n$$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n.\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 16.17:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng D. Chứng minh

nếu mọi a, b $\in$ D: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

thì với n số $x_1, x_2, ..., x_n \in D$ bất kì, $n \geq 2$, ta có:

$$f\left(\frac{x_1 + _2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}.$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 2:BĐT đúng theo giả thiết

Giả sử BĐT đúng khi n = k, k nguyên, $k \geq 2$.

Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

$$f\left(\frac{x_1 + ... + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right)$$

$$= f\left(\frac{\frac{x_1 + ... + x_k}{k} + \frac{1}{k}\left(x_{k+1} + (k-1)\frac{x_1 + ... + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right)}{2}\right)$$

$$\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + ... + x_k}{k}\right) + f\left(\frac{1}{k}\left(x_{k+1} + (k-1)\frac{x_1 + ... + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right)\right)}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1) + ... + f(x_k)}{k} + \frac{f(x_{k+1}) + (k-1)f\left(\frac{x_1 + ... + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right)}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2k}\left(f(x_1) + ... + f(x_k) + f(x_{k+1})\right) + \frac{k-1}{2k}f\left(\frac{x_1 + ... + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right)$$

Do đó: $\Rightarrow 2k.f\left(\frac{x_1 + ... + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right) \leq f(x_1) + ... + f(x_k) + f(x_{k+1})$

$$+ (k+1).f\left(\frac{x_1 + ... + x_k + x_{k+1}}{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow (k+1).f\left(\frac{x_1+\ldots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right) \le f(x_1)+\ldots+f(x_k)+f(x_{k+1})$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1+\ldots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right) \le \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_k)+f(x_{k+1})}{k+1}: \text{đpcm}$$

Bài toán 16.18:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \ge abc$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \ge \sqrt{3}abc$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)=-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2 \le 0$$

Vì $a+b+c \ge abc$ nên $(abc)^{\frac{2}{3}} \le a^2+b^2+c^2$.

Ta dùng phương pháp phản chứng

Giả sử $(abc)\sqrt{3} > a^2+b^2+c^2$ thì $abc < 3\sqrt{3}$, nhưng theo bất đẳng thức AM–GM, ta có $a^2+b^2+c^2 \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$.

Mà $3(abc)^{\frac{2}{3}} \le a^2+b^2+c^2 < (abc)\sqrt{3}$ nên $abc > 3\sqrt{3}$: mâu thuẫn.

Vì vậy, ta phải có $a^2+b^2+c^2 \ge (abc)\sqrt{3}$.

Bài toán 16.19:

Chứng minh bất đẳng thức **BCS** với 2n số $a_1, a_2,\ldots,a_n$ và $b_1, b_2,\ldots,b_n$ tuỳ ý:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)..$$

Hướng dẫn giải

Nếu $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ thì BĐT đúng.

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng $0 \Rightarrow a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 > 0$

Ta có $(a_ix - b_i)^2 \ge 0, \forall x \Rightarrow a_i^2.x^2 - 2a_ib_ix + b_i^2 \ge 0, \forall x$

Cho i = 1, 2,...,n và cộng lại thì được:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \ge 0, \forall x$$

Vì vế trái là tam thức bậc hai: $f(x) \ge 0, \forall x$ nên $\Delta' \le 0$

$$\Rightarrow (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 - (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \le 0$$

$\Rightarrow (a_1b_1+a_2b_2+ \ldots +a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$: đpcm.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho

$a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, ..., $a_n = kb_n$.

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 2 số dương

$$\left|\frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right|\left|\frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)$$

Bài toán 16.20:

Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số không âm, thì

$$2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \ge (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Ta có $2\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right) = 1+a^2b^2+(a-b)^2+(1-a)^2(1-b)^2$

nên $2\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right) \ge 1+a^2b^2$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$3\left(1+a^2b^2\right)\left(1-c+c^2\right) \ge 2\left(1+abc+a^2b^2c^2\right).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(3+a^2b^2\right)c^2 - \left(3+2ab+3a^2b^2\right)c + 1 + 3a^2b^2 \ge 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai theo biến c

Ta có hệ số $3 + a^2b^2 > 0$ và $\Delta = -3(1-ab)^4 \le 0$ nên được đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 16.21:

Cho hai dãy số tăng $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$; $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ với $n \ge 2$.

Nếu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là một hoán vị của dãy 1, 2, ..., n thì:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\alpha_i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Hướng dẫn giải

Đặt $M=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$; $m=\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$; $T = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\alpha i}$ thì điều cần chứng minh: $m \le T \le M$

Ta chứng minh $T \le M$ bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với n = 2, ta có : $a_1 \le a_2$ và $b_1 \le b_2$

$T - M = (a_1b_2 + a_2b_1) - (a_1b_1 + a_2b_2)$

$= (a_1 - a_2)(b_2 - b_1) \le 0$ nên $T \le M$ đúng.

Giả sử BĐT đúng với n – 1, ta chứng minh BĐT đúng với n.

Ta có : $M = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = a_1b_1 + A$

$T = a_1b_i + b_1a_j + B$

Đặt : $T' = a_1b_1 + a_ib_j + B$

Theo giả thiết quy nạp ta có $T' \le M$ và $T \le T'$.

nên $T \le M$. Chứng minh tương tự ta có $m \le T$.

Vậy $m \le T \le M$.

Bài toán 16.22:

Chứng minh với mọi x thì có:

a) $|x+1| + |x+2| + |x+7| + |x+8| \ge 12$

b) $|x^2 + x - 2| \ge x^2 + 1 - |x - 3|$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$ có các nghiệm tăng dần là $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$. Ta ghép cặp tương ứng ngoài:

$$|x+1| + |x+2| + |x+7| + |x+8|$$
$$= (|x+1| + |x+8|) + (|x+2| + |x+7|)$$
$$= (|x+1| + |-x-8|) + (|x+2| + |-x-7|)$$
$$\ge |x+1-x-8| + |x+2-x-7| = 7 + 5 = 12$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi: $-7 \le x \le -2$.

b) Ta có $|x - 3| + |x^2 + x - 2| \ge |(x-3) - (x^2 + x - 2)|$

$= |-x^2 - 1| = x^2 + 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 16.23:

Chứng minh bất đẳng thức :

a) $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \le 2\sqrt{x^2+1}$, $\forall x \in [-1,3]$.

b) $4(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)(c^2 + z^2) \ge 3(bcx + cay + abz)^2$, $\forall a,b,c,x,y,z$.

Hướng dẫn giải

a) Với $x \in [-1,3]$ thì có:

$$\left(x\sqrt{x+1} + 1\sqrt{3-x}\right)^2 \le (x^2+1)(x+1+3-x) = 4(x^2+1)$$

$$\Rightarrow \left|x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}\right| \le 2\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

b) Ta có $\left(a^2+x^2\right)\left[\left(cy+bz\right)^2+b^2c^2\right]\geq\left[a\left(cy+bz\right)+bcx\right]^2$.

Như vậy, ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$4\left(b^2+y^2\right)\left(c^2+z^2\right)\geq 3\left[\left(cy+bz\right)^2+b^2c^2\right].$$

$\Leftrightarrow \left(cy-bz\right)^2+\left(bc-2yz\right)^2\geq 0$:điều này hiển nhiên đúng.

Trong trường hợp $abc\neq 0$, đẳng thức khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 16.24:

Cho x, y, z > 0. Chứng minh bất đẳng thức :

a) $3x+2y+4z\geq\sqrt{xy}+3\sqrt{yz}+5\sqrt{zx}$.

b) $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 2 số dương :

$$\sqrt{xy}+3\sqrt{yz}+5\sqrt{zx}\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)+3\left(\frac{y+z}{2}\right)+5\left(\frac{z+x}{2}\right)=3x+2y+4z$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

b) Ta có: $x^3+y^2\geq 2\sqrt{x^3y^2}=2xy\sqrt{x}\Rightarrow\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}\leq\frac{1}{xy}$

và $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{2}{xy}\Rightarrow\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$

Tương tự rồi cộng lại 3 bất đẳng thức vế theo vế thì có

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$: đpcm.

Bài toán 16.25:

Chứng minh với các số a,b,c dương thì:

a) $a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$.

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$.

Hướng dẫn giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 2 số dương:

$a^3+abc\geq 2a^2\sqrt{bc}$, $b^3+abc\geq 2b^2\sqrt{ca}$, $c^3+abc\geq 2c^2\sqrt{ab}$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$

Và có $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

Cộng lại 2 bất đẳng thức thì:

$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}) \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Ta có: $a^3 + b^3 + abc = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + abc$

$\geq (a + b)ab + abc = ab(a + b + c)$

Do đó: $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)}$

Chứng minh tương tự rồi cộng lại 3 bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc}$$

$$\leq \frac{1}{a + b + c}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{1}{abc}.$$

Bài toán 16.26:

Cho a, b, c dương. Chứng minh:

a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a} + \frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{15}{2}$.

b) $\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2.\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a} + \frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c}\right)$

$$= \left(\frac{2a}{b+c} + \frac{b+c}{2a}\right) + \left(\frac{2b}{c+a} + \frac{c+a}{2b}\right) + \left(\frac{2c}{a+b} + \frac{a+b}{2c}\right) + \frac{3}{2}\left[\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right]$$

$$\geq 2 + 2 + 2 + \frac{3}{2}(2 + 2 + 2) = 15.$$

$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a} + \frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{15}{2}$:đpcm.

b) Áp dụng BĐT AM–GM cho hai số dương, ta có:

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{a(a+b)}{4} \geq a^2 \Rightarrow \frac{a^3}{a+b} \geq \frac{3}{4}a^2 - \frac{ab}{4}$$

Tương tự: $\frac{b^3}{b+c} \geq \frac{3}{4}b^2 - \frac{bc}{4}$; $\frac{c^3}{c+a} \geq \frac{3}{4}c^2 - \frac{ca}{4}$

Do đó: $\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{4}(ab + bc + ca)$

$\geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 16.27:

Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh:

nếu $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$ thì $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$

nên $\frac{1}{1+a} \geq (1 - \frac{1}{1+b}) + (1 - \frac{1}{1+c}) + (1 - \frac{1}{1+d})$

$= \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$.

Tương tự rồi nhân 4 bất đẳng thức thì được

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81\sqrt[3]{\frac{a^3b^3c^3d^3}{(1+a)^3(1+b)^3(1+c)^3(1+d)^3}}$$

Hay $\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq \frac{81abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$

Mà a, b, c ,d dương nên có $abcd \leq \frac{1}{81}$.

Bài toán 16.28:

Cho các số dương x, y, z thoả mãn xyz = 1. Chứng minh:

a) $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$.

b) $\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Với x, y, z > 0, áp dụng bất đẳng thức AM–GM

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}$$

$$\geq \frac{\sqrt{3xy}}{xy}+\frac{\sqrt{3xy}}{yz}+\frac{\sqrt{3zx}}{zx}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\text{ (vì xyz = 1)}$$

$$\geq \sqrt{3}\left(3.\sqrt[3]{\sqrt{xyz}}\right)=3\sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm. Dấu bằng khi } x=y=z=1.$$

b) Đặt $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ thì a, b, c > 0, abc = 1.

Ta có $\frac{1}{x^3(y+z)}+\frac{1}{y^3(z+x)}+\frac{1}{z^3(x+y)}$

$$=\frac{a^3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{b^3}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{c^3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \text{ nên}$$

Bất đẳng thức tương đương $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a \Rightarrow \frac{a^2}{b+c}\geq a-\frac{b+c}{4}$

Tương tự rồi cộng lại thì

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq a+b+c-\frac{a+b+c}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\geq\frac{1}{2}.3.\sqrt[3]{abc}=\frac{3}{2}.$$

Bài toán 16.29:

Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số không âm, thì

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)\geq\left(ab+bc+ca\right)^3.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $4\left(a^2+ab+b^2\right)-3\left(a+b\right)^2=\left(a-b\right)^2\geq 0$.

nên $4\left(a^2+ab+b^2\right)\geq 3\left(a+b\right)^2$,

Tương tự $4\left(b^2+bc+c^2\right)\geq 3\left(b+c\right)^2$, $4\left(c^2+ca+a^2\right)\geq 3\left(c+a\right)^2$,

Do đó

$$64\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)\geq 27\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh

$$27\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2\geq 64\left(ab+bc+ca\right)^3.$$

Vì $3\left(ab+bc+ca\right)\leq\left(a+b+c\right)^2$ nên chỉ cần chứng minh rằng

$$81\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2\geq 64\left(a+b+c\right)^2\left(ab+bc+ca\right)^2.$$

$\Leftrightarrow 9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\geq 8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)$,

$\Leftrightarrow a\left(b-c\right)^2+b\left(c-a\right)^2+c\left(a-b\right)^2\geq 0$: đúng

Bài toán 16.30:

Chứng minh rằng nếu a,b,c,d là các số dương, thì

$$5+\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2}\geq\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ và $y=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$.

Ta có $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=x+y+3$

và $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2=$

$$=2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)+4=$$

$$=2\left(x^2-2y\right)+2\left(y^2-2x\right)+4=\left(x+y-2\right)^2+\left(x-y\right)^2\geq\left(x+y-2\right)^2.$$

Do đó,

$$\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2}\geq x+y-2=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-5.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $b=c$ hoặc $c=a$.

Bài toán 16.31:

Giả sử a,b,c là các số không âm, không có hai trong số đó là bằng 0.

Chứng minh: $\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1.$

Hướng dẫn giải

Đặt $A=a^2+ab+b^2, B=b^2+bc+c^2$ và $C=c^2+ca+a^2$, vì a,b,c là các số không âm, không có hai trong số đó là bằng không nên 3 số A, B, C đều dương.

Ta có $\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}-1\right)=$

$$=\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}+\frac{b^2+c^2}{BC}+\frac{c^2+a^2}{CA}+\frac{a^2+b^2}{AB}-\frac{1}{A}-\frac{1}{B}-\frac{1}{C}$$

$$=\sum\left(\frac{a^2}{A^2}-\frac{bc}{BC}\right)+\sum\frac{b^2+bc+c^2}{BC}-\sum\frac{1}{A}=\sum\left(\frac{a^2}{A^2}-\frac{bc}{BC}\right)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{b}{B}-\frac{c}{C}\right)^2\geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 16.32:

Giả sử a,b,c là các số không âm, chứng minh:

$$8\left(a^2+1\right)^3\left(b^2+1\right)^3\left(c^2+1\right)^3\geq\left(a+1\right)^3\left(b+1\right)^3\left(c+1\right)^3\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right)$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bất đẳng thức $2\left(a^2+1\right)^3\geq\left(a+1\right)^3\left(a^3+1\right).$

Thật vậy, lập hiệu số

$$2\left(a^2+1\right)^3-\left(a+1\right)^3\left(a^3+1\right)=\left(a-1\right)^4\left(a^2+a+1\right)\geq 0.$$

Tương tự ta có các bất đẳng thức

$$2\left(b^2+1\right)^3\geq\left(b+1\right)^3\left(b^3+1\right), 2\left(c^2+1\right)^3\geq\left(c+1\right)^3\left(c^3+1\right),$$

Nhân các bất đẳng thức ta có

$$8\left(a^2+1\right)^3\left(b^2+1\right)^3\left(c^2+1\right)^3\geq\left(a+1\right)^3\left(b+1\right)^3\left(c+1\right)^3\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right)$$

Bài toán 16.33:

Chứng minh rằng nếu a,b,c,d là các số không âm, thì

$$\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right)\left(1-c+c^2\right)\left(1-d+d^2\right)\geq\left(\frac{1+abcd}{2}\right)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Cho $a = b = c = d$, bất đẳng thức: $2\left(1-a+a^2\right)^2 \geq 1+a^4$

Bất đẳng thức này đúng vì $2\left(1-a+a^2\right)^2 - 1 - a^4 = \left(1-a\right)^4 \geq 0$.

Sử dụng kết quả trên, ta có

$$4\left(1-a+a^2\right)^2\left(1-b+b^2\right)^2 \geq \left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right).$$

Mà $\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right) \geq \left(1+a^2b^2\right)^2$

nên $2\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right) \geq 1+a^2b^2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh là kết quả của việc nhân các bất đẳng thức sau $2\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right) \geq 1+a^2b^2$,

$$2\left(1-c+c^2\right)\left(1-d+d^2\right) \geq 1+c^2d^2,\ \left(1+a^2b^2\right)\left(1+c^2d^2\right) \geq \left(1+abcd\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 16.34:

Cho đa thức bậc n: $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ có n nghiệm không âm phân biệt hay trùng nhau. Chứng minh: $\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)^n \geq a_n^{n-1}$.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Viete ta có:

$x_1.x_2 ... x_{n-1} + x_1.x_3 ... x_n + x_2x_3.... x_n = (-1)^{n-1} . a_{n-1}$

$x_1.x_2...x_n = (-1)^n a_n$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho n số không âm:

$$\frac{x_1x_2...x_{n-1} + x_1x_3...x_n + ... + x_2x_3...x_n}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)^{n-1}.a_{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^{n-1}}$$

$$\Rightarrow (-1)^{n-1}.a_{n-1} \geq n\sqrt[n]{[(-1)^n.a_n]^{n-1}} \Rightarrow \left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)^n \geq a_n^{n-1} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 16.35:

Cho đa thức: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i$ ($n \geq 2$; $a_na_0 \neq 0$) có n nghiệm dương. Chứng minh rằng: $\left|\frac{a_{n-1}.a_1}{a_na_0}\right| \geq n^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi $x_1, x_2, ..., x_n$ là n nghiệm dương.của P(x), khi đó do $a_n \neq 0$ nên theo định lý Viete, ta có:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$$

...

$$x_1x_2...x_{n-1} + x_1x_3...x_n + x_2x_3 ... x_n = (-1)^{n-1}.\frac{a_1}{a_n} > 0$$

$$x_1x_2 ... x_n = (-1)^n.\frac{a_0}{a_n} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$\left|\frac{a_{n-1}a_1}{a_na_0}\right| = \left|\frac{(x_1 + ... + x_n)(x_1x_2...x_{n-1} + ... + x_2...x_n}{x_1...x_n}\right|$$

$$\geq \frac{n\sqrt[n]{x_1...x_n}\,n\sqrt[n]{(x_1...x_n)^{n-1}}}{x_1...x_n} = n^2$$

Kết quả: Nếu đa thức:

$ax^n - ax^{n-1} + c_2x^{n-2} + c_3x^{n-3} + ... + c_{n-2}x^2 - n^2bx + b = 0$ có n nghiệm dương.thì các nghiệm đó đều bằng nhau.

Thật vậy: $a_n = a$, $a_{n-1} = -a$, $a_1 = -n^2b$, $a_0 = b$ nên:

$$n^2 \leq \frac{a_{n-1}.a_1}{a_n.a_0} = \frac{-a.-n^2b}{a.b} = n^2$$

Do đó dấu bằng đồng thời xảy ra nên: $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Bài toán 16.36:

Cho $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + 1$, với các $a_i \geq 0$ có n nghiệm x_i.Chứng minh: $P(x) \geq (x + 1)^n$, $\forall x \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Vì $a_i \geq 0$ nên các nghiệm $x_i < 0$ và theoViete: $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Xét $x \in \mathbb{Z}^+$, Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = \prod_{i=1}^{n}(x + |x_i|) = \prod_{i=1}^{n}\underbrace{(1+1+...+1+|x_i|)}_{x+1\text{số}}$$

$$\geq \prod_{i=1}^{n}(x+1)\sqrt[x+1]{|x_i|} = (x+1)^n\sqrt[x+1]{|x_1...x_n|} = (x+1)^n$$

Xét x > 0 tuỳ ý:

$$a_k = \sum x_{i_1}.x_{i_2}...x_{i_k}(-1)^k \quad (1 \le i_1 < i_2 < ... < i_n \le n)$$

$$= \sum \left|x_{i_1}\right|.\left|x_{i_2}\right|...\left|x_{i_k}\right| \ge C_n^k.\sqrt[C_n^k]{\left|x_1x_2...x_n\right|^k} = C_n^k$$

Do đó: $P(x) \ge \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{n-k} = (1+x)^n$ (đpcm).

Cách khác: Với 2n số $b_i, c_i \ge 0$ ta có bất đẳng thức :

$$\sqrt[n]{\prod(b_i + c_i)} \ge \sqrt[n]{\prod b_i} + \sqrt[n]{\prod c_i}$$

Nên $$\sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{\prod(x + \left|x_i\right|)} \ge \sqrt[n]{\prod x} + \sqrt[n]{\prod \left|x_i\right|}$$

$\Rightarrow \sqrt[n]{P(x)} \ge (x+1) \Rightarrow P(x) \ge (x+1)^n$ (đpcm)

Kết quả: Chọn x = 2 > 0 ta có $P(2) \ge 3^n$.

Bài toán 16.37:

Giả sử phương trình $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ với a, b, c, d dương có 4 nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{1}{2})$.

Chứng minh bất đẳng thức: $21a + 164c \ge 80b + 320d$.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Viete ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$,

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{b}{a},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \frac{c}{a} \text{ và } x_1x_2x_3x_4 = \frac{d}{a}.$$

Vì a > 0 nên bất đẳng thức: $21a + 164c \ge 80b + 320d$

$$\Leftrightarrow 21 + 164\frac{c}{a} \ge 80\frac{b}{a} + 320\frac{d}{a}$$

$$\Leftrightarrow 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$

$$\ge 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320(x_1x_2x_3x_4) \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)$$

$$\le \left(\frac{1-2x_1 + 1-2x_2 + 1-2x_3}{3}\right)^3 = \left(\frac{1+2x_4}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow 27(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3) \le (1 + 2x_4)^3 \quad (1)$$

Tương tự:

$27(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_4) \le (1+2x_3)^3$ (2)

$27(1-2x_1)(1-2x_3)(1-2x_4) \le (1+2x_2)^3$ (3)

$27(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4) \le (1+2x_1)^3$ (4)

Nhân từng vế của (1), (2), (3), (4) và rút gọn ta có:

$81(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4)$

$\le (1+2x_3)(1+2x_4)(1+2x_1)(1+2x_2)$

Khai triển và rút gọn ta có bất đẳng thức (*).

Đẳng thức xảy ra: $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{8}, \frac{c}{a} = \frac{1}{16}, d = \frac{1}{256}$

Bài toán 16.38:

Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$xy + yz + zx + xyz = 4.$

Chứng minh rằng $x + y + z \ge xy + yz + zx.$

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện $xy + yz + zx + xyz = 4$ suy ra $z = \frac{4-xy}{x+y+xy}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$x + y - xy + \frac{4-xy}{x+y+xy}(1-x-y) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - x^2y^2 + 4 - xy - 4(x+y) + xy(x+y) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (1+y-y^2)x^2 + (y^2+y-4)x + y^2 - 4y + 4 \ge 0$$

Vì x, y, z dương thoả mãn đẳng thức $xy + yz + zx + xyz = 4$, ta suy ra 3 số không thể cùng lớn hơn 1 hoặc cùng nhỏ hơn 1. Do đó luôn tìm được 2 số, giả sử đó là x và y sao cho $y \le 1 \le x$

$\Delta = (y^2+y-4)^2 - 4(1+y-y^2)(y^2-4y+4) = y(5y-8)(y-1)^2 \le 0$

do đó tam thức bậc 2, ta suy ra bất đẳng thức đúng.

Bài toán 16.39:

Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n \in [-1; 1]$ và tổng các số này bằng n–3.

Chứng minh rằng: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 + x_n^2 \le n - 1.$

Hướng dẫn giải

Đặt $a_i = 1 - x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $-1 \le x_i \le 1$, $\forall i \Leftrightarrow 0 \le a_i \le 2$, $\forall i$

$x_1 + x_2 + ... + x_n = n - 3 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n = 3.$

Do đó có tối đa 2 số $a_i > 1$.

BĐT $\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le 5$

Nếu $0 \le a_i \le 1$, i = 1,2,...,n. Khi đó $a_i^2 \le a_i$, $\forall$i nên:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le a_1 + a_2 + ... + a_n = 3 < 5$$

Nếu có duy nhất một số $a_i > 1$, giả sử $a_1 > 1$. Khi đó:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le a_1^2 + a_2 + ... + a_n$$

$= a_1(a_1 - 1) + a_1 + a_2 + ... + a_n \le 2.1 + 3 = 5$

Nếu có hai số $a_i > 1$, giả sử $a_1 > 1$, $a_2 > 1$. Khi đó:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le a_1^2 + a_2^2 + a_3 + ... + a_n$$

$= a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + a_1 + a_2 + ... + a_n$

$\le 2(a_1 - 1) + 2(a_2 - 1) + 3 = 2(a_1 + a_2) - 1 \le 2.3 - 1 = 5$

Dấu = không xảy ra nên suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 16.40:

Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn: $\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = 0 \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng trong n số đó, có hai số có tích không vượt quá $-\frac{1}{n}$.

Hướng dẫn giải

Gọi m, M là số bé nhất và lớn nhất trong các số $a_1, a_2,..., a_n$ đã cho

Ta có với mọi i ($1 \le i \le n$)

$$(a_i - m)(a_i - M) \le 0 \Leftrightarrow a_i^2 - a_i(m + M) + mM \le 0$$

Cộng n bất đẳng thức này ứng với i = 1, 2,..., n ta được:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - (m + M)\sum_{i=1}^{n} a_i + nmM \le 0$$

nên $1 + nmM \le 0 \Rightarrow mM \le -\frac{1}{n}$ (đpcm)

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 16. 1: Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a + b + c + d}{4} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}}$$

Hướng dẫn

BĐT $\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\geq 0$

Bài tập 16. 2: Chứng minh bất đẳng thức với mọi x, y > 0:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\geq\frac{1}{1+xy}$$

Hướng dẫn

BĐT $\Leftrightarrow xy(x-y)^2+(xy-1)^2\geq 0$.

Bài tập 16. 3: Cho 3 số không âm a, b,c . Chứng minh

$$(a+b+c)^6\geq 27(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2).$$

Hướng dẫn

Đặt P = a +b+ c, $Q=ab+bc+ca$ và R = abc.

Dùng P, Q , R.

Bài tập 16. 4: Cho 2 số a , b có tổng $a+b\geq 0$ và m, n nguyên dương. Chứng minh $(a^n+b^n)(a^m+b^m)\leq 2(a^{n+m}+b^{n+m})$.

Hướng dẫn

Biến đổi tương đương về tích số không âm.

Bài tập 16. 5: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

a) $1!3!\ldots(2n+1)!\geq((n+1)!)^{n+1}$.

b) $a_1a_2^4+a_2a_3^4+\ldots+a_na_1^4\geq a_2a_1^4+a_3a_2^4+\ldots+a_1a_n^4$ với $a_1<a_2<\ldots<a_n$

Hướng dẫn

a) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp

b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp hay biến đổi tương đương

Bài tập 16. 6:

a) Chứng minh: $19x^2+54y^2+16z^2+36xy-16xz-24yz\geq 0$, $\forall x,y,z$

b) Cho $a_1x^2+2b_1x+c_1\geq 0$, $\forall x$, và $a_2x^2+2b_2x+c_2\geq 0$, $\forall x$.

Chứng minh rằng: $a_1a_2x^2+2b_1b_2x+c_1c_2\geq 0$, $\forall x$.

Hướng dẫn

a) Dùng tam thức bậc hai theo biến x rồi tam thức bậc hai theo biến y.

b) Dùng hai tam thức bậc hai theo biến x không dương.

Bài tập 16. 7: Cho a,b,c là các số dương: $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng nếu $a\leq b\leq c$, thì $ab^2c^3\geq 1$.

Hướng dẫn

Chứng minh rằng $a\leq 1$bằng phản chứng

Bài tập 16. 8: Chứng minh rằng nếu a,b,c,d là các số dương, thì

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq 0.$$

Hướng dẫn

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{c-d}{d+a}=\frac{a+c}{b+c}+\frac{a+c}{d+a}-2=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)-2$$

Bài tập 16. 9: Giả sử a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

Hướng dẫn

Nhân $1+abc$ và cộng cho 3 cho vế trái.

Bài tập 16. 10: Giả sử a,b,c,d là các số thực không âm sao cho $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\geq abcd$.

Hướng dẫn

Ta chứng minh các bất đẳng thức $(1-a)(1-b)\geq cd$, $(1-c)(1-d)\geq ab$.

Bài tập 16. 11:

Giả sử a,b,c là các số không âm sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\leq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn

Kết quả: Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=(1,1,1)$, $(a,b,c)=\left(0,1,\sqrt{2}\right)$ hoặc hoán vị vòng.

Bài tập 16. 12: Cho a, b, c > 0 và thoả mãn a + b + c = 1.

Chứng minh rằng: $2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2+b^2+c^2)+12abc\geq\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn

Đặt x = ab + bc + ca, y = abc.

Đưa về chứng minh: $18y-12x+5\geq\frac{5}{3}$.

Chuyên đề 17: BẤT ĐẲNG MỞ RỘNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

CÁC PHƯƠNG PHÁP MỞ RỘNG

Phương pháp dùng phép thế

Đặt $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$ thì

$$a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}.$$

Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ thì $xyz = \frac{1}{abc}$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, $t = \frac{1}{d}$ thì $xyzt = \frac{1}{abcd}$.

Nếu a,b,c là 3 cạnh tam giác thì tồn tại x,y,z >0 sao cho:

$a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

Khi đó $x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}$

Nếu a,b,c >0 và có tổng a +b +c = k thì tồn tại x,y,z >0 sao cho:

$$a = \frac{kx}{x+y+z}, a = \frac{ky}{x+y+z}, a = \frac{kz}{x+y+z}$$

Nếu x,y,z >0 và xyz =1 thì tồn tại a,b,c >0 sao cho:

$$x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a} \text{ hay } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}}, y = \sqrt{\frac{b}{c}}, z = \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ hay } x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, y = \sqrt[3]{\frac{b}{c}}, z = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca}, z = \frac{c^2}{ab} \text{ hay } x = \frac{bc}{a^2}, y = \frac{ca}{b^2}, z = \frac{ab}{c^2}, \ldots$$

Nếu x,y,z,t >0 và xyzt =1 thì tồn tại a,b,c,d >0 sao cho:

$$x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{d}, t = \frac{d}{a} \text{ hay } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$$

Đặt $x = a + b + c$, $y = ab + bc + ca$ và $z = abc$,...

Phương pháp phân tích bình phương SOS

Cho 3 số a,b,c, đặt $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$

$S \geq 0$ trong mỗi trường hợp:

(i) $S_a \geq 0, S_b \geq 0, S_c \geq 0$

(ii) $S_a + S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0, S_c + S_a \geq 0$

và $a \geq b \geq c (a \leq b \leq c) \Rightarrow S_b \geq 0$

(iii) $a \geq b \geq c$ (hay $a \leq b \leq c$)

$\Rightarrow S_a \geq 0, S_c \geq 0, S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0$

(iv) $a \leq b \leq c \Rightarrow S_a \geq 0, S_b \geq 0, b^2 S_c + c^2 S_b \geq 0$

(vi) $S_a + S_b > 0$ (hay $S_b + S_c > 0$) (hay $S_c + S_a > 0$)

và $S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \geq 0$.

Phương pháp chuẩn hoá với bất đẳng thức thuần nhất

Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là hàm thuần nhất bậc α nếu với mọi số thực t ta có

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^{\alpha} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Bất đẳng thức dạng $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ với f là một hàm thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất (bậc α).

Dạng thường gặp của bất đẳng thức thuần nhất là

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

trong đó f và g là hai hàm thuần nhất cùng bậc.

Do tính chất của hàm thuần nhất, ta có thể chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về việc chứng minh bất đẳng thức

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq A$ với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$

thoả mãn điều kiện $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A$.

Chẳng hạn với f(a,b,c) ta có thể chuẩn hóa a +b+c =1, a+b+c= 3,.... Chuẩn hóa một cách thích hợp, ta có thể làm đơn giản các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh, tận dụng được một số tính chất đặc biệt của các hằng số.

Phương pháp dồn biến

Để chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, ta có thể chứng minh bất đẳng thức trung gian ít biến hơn bằng cách thử các khẳng định:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, x_n\right)$$

Hay $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, \ldots, x_n), \ldots$

Tổng quát $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f(t, t, \ldots, x_n)$

Sau đó là chứng minh bất đẳng thức ít biến hơn

$f(x_1,x_1,x_3,\ldots,x_n) = g(x_1,x_1,x_3,\ldots,x_n) \geq 0$.

Chẳng hạn $f(a,b,c) \geq f(a,b,0)$ hay $f(a,b,c) \geq f(a+b,\frac{1}{a+b},0)$;

$f(a,b,c) \geq f(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c)$ hay $f(a,b,c) \geq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$;

$f(a,b,c) \geq f(0,b+\frac{a}{2},c+\frac{a}{2})$ hay $f(a,b,c) \geq f(a,b,\sqrt{ab}),\ldots$ và nếu cần ta giả sử thêm biến lớn nhất hay nhỏ nhất.

Phương pháp đánh giá bậc nhất (tiếp tuyến)

Cho n số a_i thuộc D có tổng $a_1 + a_2 +\ldots+ a_n = nb$ không đổi.

Bất đẳng thức có dạng $f(a_1) + f(a_2) +\ldots+ f(a_n) \geq nf(b)$

Ta tìm đánh giá $f(x) \geq Ax + B$ trên D, dấu bằng xảy ra khi $x = b$.

Khi đó $f(a_1) + f(a_2) +\ldots+ f(a_n))$

$\geq A(a_1 + a_2 +\ldots+ a_n) + nB$

$= Anb + nB = n(Ab + B) = nf(b)$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 =\ldots= a_n = b$.

Hay ngược lại

$f(a_1) + f(a_2) +\ldots+ f(a_n) \leq nf(b)$ thì ta tìm đánh giá

$f(x) \leq Ax + B$ trên D, dấu bằng xảy ra khi $x = b$.

Để tìm đánh giá $f(x) \geq Ax + B$ trên D, vì dấu bằng xảy ra khi $x = b$ nên xét dạng: $f(x) \geq A(x – b)$ rồi tìm A nhờ biến đổi bất đẳng thức về dạng $(x –b)[g(x) – A]$ với yêu cầu là thừa số vế trái là bình phương đủ $(x – b)^2$ nên $A = g(b)$. Sau đó kiểm chứng lại bất đẳng thức vừa dự đoán là đúng mới áp dụng.

Cách này cũng có được nhờ biến đổi đánh giá khác và có thể mở rộng cho dự đoán bất đẳng thức hàm bậc cao, hàm hữu tỉ.,...

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG

Bất đẳng thức Bernoulli

Nếu $x > –1$ và $\alpha \geq 1$ thì $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

Nếu $x > –1$ và $0 < \alpha \leq 1$ thì $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân AM–GM

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ thì

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \text{ hay } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi : $a_1 = a_2 = \ldots= a_n$

Bất đẳng thức trung bình luỹ thừa

Nếu $x_i > 0 \ \forall i=\overline{1,n}$ và $p \geq q > 0$ thì $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Bất đẳng thức Shur

Cho a, b, c > 0 , r > 0 thì :

$a^r (a- b)(a-c) + b^r(b - a)(b - c) + c^r(c - a)(c - b) \geq 0$

Bất đẳng thức Bunyakovsky –Cauchy–Schwatz BCS

Với hai dãy số thực : $a_1, a_2, ...,a_n$; $b_1 , b_2 , ...b_n$.

thì $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho

$a_1 = kb_1 , a_2 = kb_2 , ..., a_n = kb_n$

Hơn nữa, với n.m số dương (a_{ij}) i = 1,2,...,m ; j = 1,2,...,n thì :

$$\left|\sum_{j=}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{ij}\right)\right|^m \leq \prod_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^m\right|$$

Bất đẳng thức Jensen

Nếu $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_i) \leq f\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} x_i\right)$ với 2 số tùy ý $x_i \in (a,b)$

thì mọi $a_i \in (a,b)\ \forall i = \overline{1,n}$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \leq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Nếu $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} x_i\right)$ với 2 số tùy ý $x_i \in (a, b)$

thì mọi $a_i \in (a,b)\ \forall i = \overline{1,n}$: $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$

Bất đẳng thức sắp thứ tự

Cho hai dãy số tăng $a_1 \leq a_2 \leq ....\leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq ....\leq b_n$ $(n \geq 2)$

Nếu $\alpha_1, \alpha_2, ...,\alpha_n$ là một hoán vị của dãy 1, 2, ..., n thì:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Bất đẳng thức Chebysep

Với hai dãy: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$; $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$

thì : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Bất đẳng thức Mincopxki

Với hai dãy: $a_1, a_2, ..,a_n$ và $b_1, b_2, ...,b_n$ thì $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

Chú ý:

Quy ước tổng đối xứng, tổng vòng tròn theo thứ tự:

Với 3 biến a,b,c thì:

$$\sum_{sym} a^2b = a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b\,;\ \sum_{cyclic} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a$$

Với 4 biến x,y,z,t thì:

$$\sum_{sym} xy = xy + xz + xt + yz + yt + zt\,;\ \sum_{cyclic} xy = xy + yz + zt + tx\,.$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 17. 1:

Cho a, b, c là các số thực dương sao cho abc = 1.

Chứng minh $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \ge \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \dfrac{1}{a}$; $y = \dfrac{1}{b}$; $c = \dfrac{1}{c}$ thì x,y,z> 0 và xyz = 1.

$$S = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Theo bất đẳng thức AM–GM ta có:

$$[(y + z) + (z + x) + (x + y)]S \ge (x + y + z)^2$$

nên $S \ge \dfrac{x+y+z}{2} = \dfrac{x+y+z}{2}.\dfrac{3}{2} \ge \sqrt[3]{xyz}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

Đẳng thức khi và chỉ khi $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài toán 17. 2:

Chứng minh rằng nếu a,b,c,d là các số thực dương, thì

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+d}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a}\right)^2 \ge 1.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{b}, z = \dfrac{d}{c}$ và $t = \dfrac{a}{d}$ thì x,y,z,t là các số dương và có $xyzt = 1$.

Bất đẳng thức

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+d}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a}\right)^2 \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\geq 1,$$

Ta chứng minh các bất đẳng thức

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\geq \frac{1}{1+xy} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\geq \frac{1}{1+zt}=\frac{xy}{1+xy} \qquad (2)$$

Chứng minh bất đẳng thức (1) :

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}-\frac{1}{1+xy}=\frac{xy\left(x^2+y^2\right)-x^2y^2-2xy+1}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)}=$$

$$=\frac{xy(x-y)^2+(1-xy)^2}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)}\geq 0.$$

Chứng minh (2) tương tự, ta có

$$\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+zt}=\frac{zt(z-t)^2+(1-zt)^2}{(1+z)^2(1+t)^2(1+zt)}\geq 0.$$

Công (1) và (2) thì được bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d$.

Bài toán 17. 3:

Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số thực dương, thì

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leq 3.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\sqrt{\frac{b}{a}}, y=\sqrt{\frac{c}{b}}, z=\sqrt{\frac{a}{c}}$ thì x,y,z dương và $xyz=1$.

BĐT : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Giả sử rằng $x=\max\{x,y,z\}$, suy ra $yz\leq 1$, ta chứng minh các bất đẳng thức sau $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leq \frac{2}{\sqrt{1+yz}}$ (1)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad (2).$$

Ta có $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\le\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=1+\frac{1-y^2z^2}{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}\le$

$$\le 1+\frac{1-y^2z^2}{\left(1+yz\right)^2}=\frac{2}{1+yz}.$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{1+x}$ nên chỉ cần chứng minh $\frac{1}{1+x}+\sqrt{\frac{2}{1+yz}}\le\frac{3}{2}$.

Thật vậy $\frac{3}{2}-\frac{1}{1+x}-\sqrt{\frac{2}{1+yz}}=\frac{1+3x}{2\left(1+x\right)}-\sqrt{\frac{2x}{1+x}}=\frac{1+3x-2\sqrt{2x\left(1+x\right)}}{2\left(1+x\right)}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}\right)^2}{2\left(1+x\right)}\ge 0.$$

Cộng (1) và (2) thì được bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 17. 4:

Giả sử a,b,c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{\left(a+1\right)^2+b^2+1}+\frac{2}{\left(b+1\right)^2+c^2+1}+\frac{2}{\left(c+1\right)^2+a^2+1}\le 1.$$

Hướng dẫn giải

Khai triển mẫu số và áp dụng bất đẳng thức AM–GM ở mẫu ta có

$$\frac{2}{\left(a+1\right)^2+b^2+1}=\frac{2}{a^2+b^2+2a+2}\le\frac{1}{ab+a+1}.$$

Sử dụng phép thế $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$ thì

$$\frac{1}{ab+a+1}=\frac{1}{\frac{x}{z}+\frac{x}{y}+1}=\frac{yz}{xy+xz+zy}.$$

Do đó $\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}\le\frac{yz}{xy+yz+zx}$

Tương tự rồi cộng 3 bất đẳng thức thì được đpcm.

Bài toán 17. 5:

Giả sử a,b,c là các số không âm sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\le 1$.

Hướng dẫn giải

BĐT $\Leftrightarrow \quad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2\ge 4$.

Đặt $bc=z, ca=y$ và $ab=x$ thì $x,y,z\ge 0$ và $x+y+z=3$.

Ta chỉ cần chứng minh $x^2+y^2+z^2+xyz\ge 4$,

Giả sử rằng $x=\min\{x,y,z\}, x\le 1$, ta có

$$x^2+y^2+z^2+xyz-4=x^2+(y+z)^2+yz(x-2)-4\ge$$

$$\ge x^2+(y+z)^2+\frac{1}{4}(y+z)^2(x-2)-4=$$

$$=x^2+\frac{x+2}{4}(y+z)^2-4=x^2+\frac{x+2}{4}(3-x)^2-4=$$

$$=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+2)\ge 0: \text{đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 17. 6:

Cho a, b, c là các số thực dương sao cho abc = 1.

Chứng minh $\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)}\ge\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Dùng phép thế $a=\frac{yz}{x^2}, y=\frac{zx}{y^2}, z=\frac{xy}{z^2}$ với x,y,z> 0

Bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)(2x^2+yz)}+\frac{y^4}{(y^2+zx)(2y^2+zx)}+\frac{z^4}{(z^2+xy)(2z^2+xy)}\ge\frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\sum_{\text{cyclic}}\frac{x^4}{(x^2+yz)(2x^2+yz)}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum_{\text{cyclic}}(x^2+yz)(2x^2+yz)}$$

Và cần chứng minh $\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum_{\text{cyclic}}(x^2+yz)(2x^2+yz)}\ge\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)^2 - \sum_{\text{cyclic}} (x^2+yz)(2x^2+yz) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2 \geq 0$: đúng.

Bài toán 17. 7:

Cho các số dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$.

Hướng dẫn giải

Đặt: x = b + c, y = c + a, z = a + b

Khi đó: $a = \frac{-x+y+z}{2}$, $b = \frac{x-y+z}{2}$, $c = \frac{x+y-z}{2}$

Vì a, b, c > 0 nên x, y, z > 0 và z < x + y

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM

$$\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} = \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{4(x-y+z)}{2y} + \frac{9(x+y-z)}{2z}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - 2 - \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{y}{2x} + \frac{2x}{y}\right) + \left(\frac{z}{2x} + \frac{9x}{2z}\right) + \left(\frac{2z}{y} + \frac{9y}{2z}\right)$$

$\geq -7 + 2 + 3 + 6 = 4$.

Đẳng thức xảy ra khi: y = 2x, z = 3x, 3y = 2z $\Rightarrow$ x + y = z (loại)

Vậy dấu = không xảy ra nên: $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$: đpcm

Bài toán 17. 8:

Cho x, y, z dương và x(x + y + z) = 3yz. Chứng minh:

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \leq 5(y+z)^3.$$

Hướng dẫn giải

Đặt a = x + y, b = y + z, c = z + x thì a, b, c > 0

x(x + y + z) = 3yz $\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Ta có:

$c^2 = a^2 + b^2 - ab \geq 2ab - ab = ab$.

Và $c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2$

nên $a + b \leq 2c$.

Do đó $(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \leq 5(y+z)^3$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3abc \leq 5c^3 \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc \leq 5c^3$

$\Leftrightarrow (a+b)c^2 + 3abc \leq 5c^3 \Leftrightarrow (a+b)c + 3ab \leq 5c^2$

$\Leftrightarrow c(a + b - 2c) + 3(ab - c^2) \leq 0$: Đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b =c $\Leftrightarrow$ x= y =z.

Bài toán 17. 9:

Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số không âm, thì

$$\left(a^2-bc\right)\sqrt{b+c}+\left(b^2-ca\right)\sqrt{c+a}+\left(c^2-ab\right)\sqrt{a+b}\geq 0.$$

Hướng dẫn giải

Vì a,b,c là các số không âm nên đặt:

$b+c=2x^2, c+a=2y^2$ và $a+b=2z^2\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$

thì $a=-x^2+y^2+z^2, b=x^2-y^2+z^2, c=x^2+y^2-z^2$.

Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức

$$xy(x^3+y^3)+yz(y^3+z^3)+zx(z^3+x^3)$$
$$\geq x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)(x-y)^2+yz(y+z)(y-z)^2+zx(z+x)(z-x)^2\geq 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng.

Bài toán 17. 10:

Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số thực, thì

$$2(1+abc)+\sqrt{2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}\geq(1+a)(1+b)(1+c).$$

Hướng dẫn giải

Dùng phép thế $u=a+b+c, v=ab+bc+ca$ và $w=abc$.

BĐT $\Leftrightarrow \sqrt{2\left(u^2+v^2+w^2-2wu-2v+1\right)}\geq u+v-w-1.$

Ta chỉ cần chứng minh $2\left(u^2+v^2+w^2-2wu-2v+1\right)\geq(u+v-w-1)^2.$

Thật vậy $2\left(u^2+v^2+w^2-2wu-2v+1\right)\geq(u+v-w-1)^2$

$$\Leftrightarrow u^2+v^2+w^2-2uv+2vw-2wu+2u-2v-2w+1\geq 0,$$

$\Leftrightarrow (u-v-w+1)^2\geq 0$: đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u-v-w+1=0$ và $u+v-w-1\geq 0$.

Bài toán 17. 11:

Giả sử a,b,c là các số dương sao cho $abc=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{(1+a)^3}+\dfrac{1}{(1+b)^3}+\dfrac{1}{(1+c)^3}+\dfrac{5}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geq 1.$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\dfrac{1}{1+a}; y=\dfrac{1}{1+b}, z=\dfrac{1}{1+c}, S=x+y+z$ và $Q=xy+yz+zx$, trong đó $0<x,y,z<1$.

Giả thiết $abc = 1$ trở thành $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$

Nghĩa là $2xyz = 1 - S + Q$.

BĐT $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 5xyz \geq 1 \Leftrightarrow 8xyz + S^3 - 3SQ \geq 1$.

$\Leftrightarrow S^3 - 4S + 3 \geq (3S-4)Q$.

Ta chứng minh bất đẳng thức cuối khi $S - 1 < Q \leq \frac{S^2}{3}$. Điều kiện về trái suy từ $2xyz = 1 - S + Q$, còn điều kiện về phải thì hiển nhiên.

Bây giờ ta xét các trường hợp sau

Trường hợp $S \leq 1$, ta có

$$S^3 - 4S + 3 = (1-S)(3 - S - S^2) \geq 0 > (3S-4)Q.$$

Trường hợp $1 < S < \frac{4}{3}$, ta có

$$S^3 - 4S + 3 - (3S-4)Q > S^3 - 4S + 3 - (3S-4)(S-1) = (S-1)^3 > 0.$$

Trường hợp $S \geq \frac{4}{3}$, ta có

$$S^3 - 4S + 3 - (3S-4)Q \geq S^3 - 4S + 3 - (3S-4)\frac{S^2}{3} = \frac{(2S-3)^2}{3} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 17. 12:

Giả sử a,b,c là các số không âm và không có hai trong các số đó bằng không. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} + \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}.$$

Hướng dẫn giải

Ký hiệu $E(a,b,c) = \frac{ab+bc+ca}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ab+bc+ca}{c^2 - ca + a^2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2 - ab + b^2}$.

Trước tiên ta giả sử rằng $a \leq b \leq c$ và khi đó chứng minh

$E(a,b,c) \geq E(0,b,c) \geq 0$.

Ta có

$$E(a,b,c) - E(0,,b,c) = \frac{a(b+c)}{b^2 - bc + c^2} + \frac{a(c^2 + 2bc - ab)}{c^2 - ca + a^2} + \frac{a(b^2 + 2bc - ac)}{a^2 - ab + b^2} \geq$$

$$\geq \frac{a(b+c)}{b^2 - bc + c^2} + \frac{a(bc - ab)}{c^2 - ca + a^2} + \frac{a(bc - ac)}{a^2 - ab + b^2} \geq 0$$

Và $E(0,b,c)-3=\dfrac{bc}{b^2-bc+c^2}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}-3=\dfrac{(b-c)^4}{bc\left(b^2-bc+c^2\right)}\geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=(0,1,1)$ hoặc hoán vị vòng.

Bài toán 17. 13:

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1 .

Chứng minh $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+48(ab+bc+ca)\geq 25$.

Hướng dẫn giải

Xét a = max{a, b, c}.

Đặt $f(a,b,c)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+48(ab+bc+ca)$.

Ta chứng minh $f(a,b,c)\geq f(a,\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2})$:

$$f(a,b,c)-f(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2})=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{b+c}+48\left(bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right)$$

$$=(b-c)^2\left(\frac{1}{bc(b+c)}-12\right)$$

Vì a = max{a, b, c} và a + b + c = 1 nên a ≥ 1/3 và do đó $b+c\leq\dfrac{2}{3}$.

Do vậy $bc(b+c)\leq\dfrac{(b+c)^3}{4}\leq\dfrac{2}{27}$. Suy ra

$\dfrac{1}{bc(b+c)}-12\geq\dfrac{27}{2}-12>0$ nên có đpcm.

Ta chứng minh *f(a, t, t)* ≥ 25.

Ta có a > t > 0 và a + 2t = 1 nên $t<\dfrac{1}{2}$. Xét hiệu số

$$f(a,t,t)-25=\frac{1}{a}+\frac{2}{t}+48(2at+t^2)-25$$

$$=\frac{1}{1-2t}+\frac{2}{t}+48(2(1-2t)t+t^2)-25$$

$$=\frac{2(4t-1)^2(3t-1)^2}{(1-2t)t}\geq 0$$

nên *f(a, t, t)* ≥ 25 suy ra đpcm.

Bài toán 17. 14:

Giả sử $a,b,c \in \left[\frac{1}{3},3\right]$. Chứng minh rằng $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \ge \frac{7}{5}$.

Hướng dẫn giải

Ký hiệu $E(a,b,c)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$,

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a=\max\{a,b,c\}$. Ta sẽ chứng minh rằng $E(a,b,c) \ge E\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \ge \frac{7}{5}$. Ta có

$$E(a,b,c)-E\left(a,b,\sqrt{ab}\right)=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}-\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{ab}-c\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(b+c)(c+a)} \ge 0.$$

Đặt $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Do $a,b,c \in \left[\frac{1}{3},3\right]$ nên $x \le 3$. Khi đó,

$$E\left(a,b,\sqrt{ab}\right)-\frac{7}{5}=\frac{a}{a+b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{7}{5}=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{7}{5}=$$

$$=\frac{3-7x+8x^2-2x^3}{5(x+1)(x^2+1)}=\frac{(3-x)\left[x^2+(1-x)^2\right]}{5(x+1)(x^2+1)} \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=\left(3,\frac{1}{3},1\right)$ hoặc hoán vị vòng.

Bài toán 17. 15:

Giả sử a,b,c là các số không âm sao cho $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{a+b^2+c}+\frac{1}{a+b+c^2} \le 1$.

Hướng dẫn giải

BĐT $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{a+b^2+c}+\frac{1}{a+b+c^2} \le 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3} \le 1.$

Ta có $\frac{4-a}{9}-\frac{1}{a^2-a+3}=\frac{(a-1)^2(3-a)}{9(a^2-a+3)}=\frac{(a-1)^2(b+c)}{9(a^2-a+3)}\geq 0$.

Do đó $\frac{1}{a^2-a+3}\leq\frac{4-a}{9},\frac{1}{b^2-b+3}\leq\frac{4-b}{9},\frac{1}{c^2-c+3}\leq\frac{4-c}{9}$.

Cộng các bất đẳng thức này thì được

$$\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}\leq\frac{12-(a+b+c)}{9}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 17. 16:

Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 thì:

$$\frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}+\frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c+b-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\geq\frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\frac{a}{(a+b+c)}$, $y=\frac{b}{(a+b+c)}$, $z=\frac{c}{(a+b+c)}$

thế thì x, y, z> 0 và x + y + z = 1. Ta có

$$\frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}+\frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c+b-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\geq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1-4z)^2}{2z^2+(1-z)^2}+\frac{(1-4y)^2}{2y^2+(1-y)^2}+\frac{(1-4x)^2}{2x^2+(1-x)^2}\geq\frac{1}{2}$$

Để ý rằng với 0 < t < 1:

$$\frac{(1-4t)^2}{2t^2+(1-t)^2}=\frac{16}{3}+\frac{8t-13}{9t^2-6t+3}=\frac{16}{3}+\frac{8t-13}{(3t-1)^2+2}\geq\frac{16}{3}+\frac{8t-13}{2}$$

Do đó:

$$VT\geq\frac{16}{3}+\frac{8x-13}{2}+\frac{16}{3}+\frac{8y-13}{2}+\frac{16}{3}+\frac{8z-13}{2}$$

$$=16+4(x+y+z)-\frac{39}{2}=\frac{1}{2}.$$

Bài toán 17. 17:

Cho 4 số dương a, b, c, d có tổng a + b +c + d =1.

Chứng minh: $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c, d dương có tổng a + b +c + d =1 nên 0 < a,b,c, d < 1.

BĐT $\Leftrightarrow 6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq\frac{1}{8}$.

$\Leftrightarrow (6a^3-a^2)+(6b^3-b^2)+(6c^3-c^2)+(6d^3-d^2)\geq\frac{1}{8}$.

$\Leftrightarrow (6a^3-a^2-\frac{1}{32})+(6b^3-b^2-\frac{1}{32})+(6c^3-c^2-\frac{1}{32})+(6d^3-d^2-\frac{1}{32})\geq 0$

Dự đoán dấu bằng khi a = b =c = d = $\frac{1}{4}$.

Xét bất đẳng thức $6x^3-x^2-\frac{1}{32}\geq A(x-\frac{1}{4})$ với 0< x< 1

$\Leftrightarrow 6(x^3-\frac{1}{64})-(x^2-\frac{1}{16})-A(x-\frac{1}{4})\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{4})\left[6(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{16})-(x+\frac{1}{4})-A\right]\geq 0$

Để có dạng $(x-\frac{1}{4})^2$ thì $A=6(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{16})-(x+\frac{1}{4})$ tại x = $\frac{1}{4}$

Nên A = $\frac{5}{8}$

Vậy với 0 < x < 1 , ta chứng minh

$$6x^3-x^2-\frac{1}{32}\geq\frac{5}{8}(x-\frac{1}{4})\Leftrightarrow 6x^3-x^2\geq\frac{5x-1}{8}.$$

Thật vậy $6x^3-x^2\geq\frac{5x-1}{8}\Leftrightarrow 8(6x^3-x^2)\geq 5x-1$

$\Leftrightarrow (4x-1)^2(3x+1)\geq 0$: đúng, dấu bằng khi x = $\frac{1}{4}$.

Do đó $(6a^3-a^2)+(6b^3-b^2)+(6c^3-c^2)+(6d^3-d^2)$

$= f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$

$$\geq\frac{5a-1}{8}+\frac{5b-1}{8}+\frac{5c-1}{8}+\frac{5d-1}{8}=\frac{5(a+b+c+d)-4}{8}=\frac{1}{8}$$

Vậy $(6a^3-a^2)+(6b^3-b^2)+(6c^3-c^2)+(6d^3-d^2)\geq\frac{1}{8}$

Dấu bằng khi a = b =c = d = $\frac{1}{4}$.

Bài toán 17. 18:

Cho 3 số dương a, b, c có tổng a + b +c =1.

Chứng minh $\frac{1-b-c}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1-c-a}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1-a-b}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c dương có tổng a + b +c =1 nên 0 < a,b,c < 1 và

$T=\frac{1-b-c}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1-c-a}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1-a-b}{\sqrt{1+c^2}}$

$=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

Theo như cách làm của bài trên, ta tìm $A=\frac{27}{10\sqrt{10}}$

Với 0 < x < 1 , ta chứng minh $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\le\frac{1}{10\sqrt{10}}(27x+1)$

Thật vậy $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\le\frac{1}{10\sqrt{10}}(27x+1)$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{10}x\le(27x+1)\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow 1000x^2\le(27x+1)^2(1+x^2)$

$\Leftrightarrow 729x^6+54x^4-270x^2+54x+1\ge 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2(81x^2+60x+1)\ge 0$: đúng, dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{1}{3}$.

Do đó

$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=f(a)+f(b)+f(c)$

$\le\frac{1}{10\sqrt{10}}(27a+1)+\frac{1}{10\sqrt{10}}(27b+1)+\frac{1}{10\sqrt{10}}(27c+1)$

$=\frac{1}{10\sqrt{10}}(27(a+b+c)+3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Dấu bằng khi a = b =c = $\frac{1}{3}$.

Bài toán 17. 19:

Cho a, b, c là 3 số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{6}{5}.$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức thuần nhất (không thay đổi khi ta thay a, b, c lần lượt bởi ka, kb, kc) nên ta chuẩn hóa: a + b + c = 1. Do đó

$$\frac{(b+c)}{(b-c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-a)a}{1-2a+2a^2}+\frac{(1-b)b}{1-2b+2b^2}+\frac{(1-c)c}{1-2c+2c^2}\le\frac{6}{5}$$

Ta có $1-2a+2a^2=1-2a(1-a)\ge 1-\frac{(a+1)^2}{4}=\frac{(1-a)(3+a)}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2}\le\frac{a(1-a).4}{(1-a)(3+a)}=\frac{4a}{3+a}$$

Nên: $F(a,b,c)\le\frac{4a}{3+a}+\frac{4b}{3+b}+\frac{4c}{3+c}\le\frac{6}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}\ge\frac{9}{9+a+b+c}=\frac{9}{10}.$$

Bài toán 17. 20:

Cho a, b, c là 3 số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{6}{5}$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức thuần nhất, ta chuẩn hoá: a + b + c = 1

BĐT $\Leftrightarrow \frac{(1-a)a}{1-2a+2a^2}+\frac{(1-b)b}{1-2b+2b^2}+\frac{(1-c)c}{1-2c+2c^2}\le\frac{6}{5}$

Đặt $F(a,b,c)=\frac{(1-a)a}{1-2a+2a^2}+\frac{(1-b)b}{1-2b+2b^2}+\frac{(1-c)c}{1-2c+2c^2}$

Ta có: $1-2a+2a^2=1-2a(1-a)\ge 1-\frac{(a+1)^2}{4}=\frac{(1-a)(3+a)}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2}\le\frac{a(1-a).4}{(1-a)(3+a)}=\frac{4a}{3+a}$$

Nên tương tự thì có : $F(a,b,c)\le\frac{4a}{3+a}+\frac{4b}{3+b}+\frac{4c}{3+c}\le\frac{6}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}\ge\frac{9}{9+a+b+c}=\frac{9}{10}.$$

Bài toán 17. 21:

Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\left[\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\right]$$

$$.[a(b+2c+3d) + b(c+2d+3a) + c(d+2a+3b) + d(a+2b+3c)]$$

$$\geq (a+b+c+d)^2$$

Do đó: $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}$

$$\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Ta chứng minh: $\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}\geq\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 3(a + b + c + d)^2 \geq 8(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$\Leftrightarrow (a–b)^2 + (a–c)^2 + (a–d)^2 + (b–c)^2 + (b–d)^2 + (c–d)^2 \geq 0$: Đúng

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = d.

Bài toán 17. 22:

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9\left(ab+bc+ca\right).$$

Hướng dẫn giải

$$VT = a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8.$$

Theo bất đẳng thức AM–GM ta có $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 3\left(ab+bc+ca\right)$,

Và $\left(2a^2b^2+2\right)+\left(2b^2c^2+2\right)+\left(2c^2a^2+2\right)\geq 4\left(ab+bc+ca\right)$.

Ta chỉ cần chứng minh

$$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2\geq 2\left(ab+bc+ca\right). \qquad (*)$$

Theo bất đẳng thức AM–GM ta có

$$\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq 8xyz$$

Xét $(u+v-w),(u-v+w),(-u+v+w)$ là các số không âm, ta có thể đặt $2a=-u+v+w, 2b=u-v+w, 2c=u+v-w$ và nhận được

$uvw \geq (-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w)$.

Nếu u,v,w là các số dương thì một trong số $(u+v-w)$, $(u-v+w)$, $(-u+v+w)$ là âm.

Trong trường hợp đó, $uvw \geq (-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w)$.

Vì vậy nó cũng đúng với mọi số dương u,v,w. Bằng cách khai triển, ta nhận được $u^3+v^3+w^3+3uvw \geq uv(u+v)+vw(v+w)+wu(w+u)$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM đối với $u+v$; $v+w$, $w+u$, ta có

$$u^3+v^3+w^3+3uvw \geq 2(uv)^{\frac{3}{2}}+2(vw)^{\frac{3}{2}}+2(wu)^{\frac{3}{2}}$$

Đặt $u=a^{\frac{2}{3}}, v=b^{\frac{2}{3}}, w=c^{\frac{2}{3}}$, ta nhận được

$$a^2+b^2+c^2+3(abc)^{\frac{2}{3}} \geq 2(ab+bc+ca) \qquad (**)$$

Như vậy, ta có

$$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2 \geq (a^2+b^2+c^2)+3(abc)^{\frac{2}{3}}.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức AM–GM đối với các số $a^2b^2c^2, 1, 1$ và kết hợp (**) cho ta kết quả (*).

Bài toán 17. 23:

Cho a, b, c >0. Chứng minh

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}-1=\frac{b(a-b)+c(a-c)}{b^2+c^2}$

Tương tự và cộng lại thì có

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}-3=\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{b}{b^2+c^2}-\frac{a}{a^2+c^2}\right)=\sum_{cyc}(a-b)^2\frac{ab-c^2}{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}$$

Và $1-\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}=\frac{\sum_{cyc}a^2(b^2-c^2)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}(a-b)^2\frac{ab-c^2}{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}+\frac{\sum_{cyc}a^2(b^2-c^2)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\frac{ab(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2)}\geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng theo SOS vì $S_a, S_b, S_c \geq 0$.

Bài toán 17. 24:

Cho a, b, c >0. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-(a+b+c)=\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}$

Và $\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}-(a+b+c)=\sum_{cyc}(a-b)^2\frac{a+b}{a^2+b^2+c^2}$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{b}-(a+b)\right)\geq 0$$

Ta có $S_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{b}-(a+b)=\frac{a^2+c^2}{b}-a$

Và $S_b=\frac{b^2+c^2}{a}-c, S_a=\frac{a^2+b^2}{c}-b$.

– Xét $a\geq b\geq c$ thì $S_a\geq 0, S_c\geq 0$.

Ta có $S_a+2S_b\geq 0$

$\Leftrightarrow a^3+ab^2-abc+2b^2c+2c^3-2ac^2\geq 0$: đúng vì

$$\frac{2}{3}(a^3+2c^3)=\frac{2}{3}(a^3+c^3+c^3)\geq 2ac^2$$

Và $\frac{1}{3}(a^3+ab^2+c^3)\geq\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)\geq abc$.

Tương tự $S_c+2S_b\geq 0$ nên bất đẳng thức đúng theo SOS.

– Xét $a\leq b\leq c$ thì $S_b\geq 0, S_c\geq 0$.

Ta có $S_b+S_a\geq 0 \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{a}-c+\frac{a^2+b^2}{c}-b\geq 0$

$\Leftrightarrow (\frac{b^2}{a}-b)+(\frac{c^2}{a}-c)+\frac{a^2+b^2}{c}\geq 0$: đúng nên bất đẳng thức đúng theo SOS.

Bài toán 17. 25:

Cho a, b, c >0. Chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2)(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geq 4(a+b+c)^2-(ab+bc+ca).$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}(\frac{a^3}{b}+\frac{a^2b}{c}+ac)\geq 4(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(\frac{a^3}{b}-a^2)+\sum_{cyc}(\frac{a^2b}{c}-ab)\geq 3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

Mà $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}-(a^2+b^2+c^2)=\sum_{cyc}(\frac{a}{b}+\frac{1}{2})(a-b)^2$

$$\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}-(a^2+b^2+c^2)=\sum_{cyc}(a-b)^2\frac{c}{a}$$

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}(\frac{a}{b}+\frac{1}{2}+\frac{c}{a}-\frac{3}{2})(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow \sum_{cyc}(\frac{a^2+bc-ab}{ab})(a-b)^2\geq 0$$

Nên có $S_a=b^2a+ca^2-abc$, $S_b=c^2b+ab^2-abc$,

$S_c=a^2c+bc^2-abc$.

Do tính hoán vị của bất đẳng thức nên ta xét 2 trường hợp:

– Xét $a\geq b\geq c$ thì $S_a\geq 0, S_b\geq 0$.

Và vì $a^2b+a^2c\geq cb^2+a^2c\geq 2abc$ suy ra

$S_b+S_c=cb^2+bc^2+ab^2+a^2c-2abc\geq 0$ nên bất đẳng thức đúng theo SOS.

– Xét $a\leq b\leq c$ thì $S_b\geq 0, S_c\geq 0$.

Và vì $c^2b+ca^2\geq c^2b+ba^2\geq 2abc$ suy ra

$S_a+S_b=a^2b+ab^2+a^2c+c^2b-2abc\geq 0$ nên bất đẳng thức đúng theo SOS.

Bài toán 17. 26:

Cho a, b > 0. Chứng minh $a^b + b^a > 1$.

Hướng dẫn giải

Nếu a > 1 hay b > 1 thì bất đẳng thức đúng

Nếu 0 < a , b < 1 . Đặt $\begin{cases} a = 1-\alpha \\ b = 1-\beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in (0,1)$

Theo bất đẳng thức Becnulli ta có:

$$a^b + b^a = (1-\alpha)^{1-\beta} + (1-\beta)^{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^{\beta}} + \frac{1-\beta}{(1-\beta)^{\alpha}}$$

$$\geq \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} + \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}$$

Ta chỉ cần chứng minh: $\frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta} > 1$

$\Leftrightarrow \quad 2-\alpha-\beta > 1-\alpha\beta \Leftrightarrow \quad 1-\alpha-\beta+\alpha\beta > 0$

$\Leftrightarrow \quad (1-\alpha)(1-\beta) > 0$

Vì $\alpha, \beta \in (0,1)$ nên bất đẳng thức cuối cùng đúng : đpcm.

Bài toán 17. 27:

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$a+b+c < \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử $a \geq b \geq c$ thì có 2 dãy:

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2; \quad \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức sắp thứ tự thì :

$$a^2\frac{1}{a} + a^2\frac{1}{a} + b^2\frac{1}{b} + b^2\frac{1}{b} + c^2\frac{1}{c} + c^2\frac{1}{c}$$

$$\leq a^2\frac{1}{c} + b^2\frac{1}{c} + b^2\frac{1}{a} + c^2\frac{1}{a} + c^2\frac{1}{b} + a^2\frac{1}{b}$$

nên có: $a+b+c < \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b}$

Và tương tự với hai dãy :

$$a \geq a \geq b \geq b \geq c \geq c; \frac{a^2}{bc} \geq \frac{a^2}{bc} \geq \frac{b^2}{ca} \geq \frac{b^2}{ca} \geq \frac{c^2}{ab} \geq \frac{c^2}{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức sắp thứ tự thì :

$$\frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

Bài toán 17. 28:

Cho số dương a, b, c, d thoả mãn: ab + bc + cd + da = 1.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt: A = b + c + d ; B = c + d + a

C = d + a + b ; D = a + b + c

Ta có: $1 = ab + bc + cd + da \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Giả sử: $a \geq b \geq c \geq d > 0$ thì $D \geq C \geq B \geq A > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 \geq b^3 \geq c^3 \geq d^3 > 0 \\ \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B} \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{D} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right) \leq 4\left(\frac{a^3}{A}+\frac{b^3}{B}+\frac{c^3}{C}+\frac{d^3}{D}\right)$$

Mà: $\begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2 > 0 \\ a \geq b \geq c \geq d > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$

Nên: $\frac{a^3}{A}+\frac{b^3}{B}+\frac{c^3}{C}+\frac{d^3}{D}$

$$\geq \frac{1}{6}(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)$$

$$= \frac{1}{48}(A+B+C+D)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\geq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3} \geq \frac{1}{3}.$$

Bài toán 17. 29:

Cho a, b, c > 0. Chứng minh :

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}},$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $A_p = \left[\frac{a^p+b^p+c^p}{3}\right]^{\frac{1}{p}}$

Ta có : $A_1 \le A_2 \le A_3$ nên theo bất đẳng thức trung bình luỹ thừa thì có

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Bài toán 17. 30:

Cho a, b, c > 0 và abc = 1

Chứng minh: $(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) \le 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$.

Bất đẳng thức cho tương đương:

$$\prod (x^3 - xyz + xz^2) \le \prod x^3$$

$$\Leftrightarrow 3\prod x^3 + \sum x^6y^3 \ge \sum x^4y^4z + \sum x^5y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow 3\prod x^2y + \sum (x^2y)^3 \ge \sum (x^2y)^2\left(y^2z\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum x^4(x-y)(x-z) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Schur với r = 4.

Bài toán 17. 31:

Giả sử a,b,c là các số dương sao cho $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $abc + \frac{17}{ab+bc+ca} \ge 5$.

Hướng dẫn giải

Theo bất đẳng thức Schur với r =3:

$$\left(a+b+c\right)^3 + 9abc \ge 4\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right),$$

ta nhận được $3abc \ge 4\left(ab+bc+ca\right) - 9$.

Ta chỉ cần chứng minh $4\left(ab+bc+ca\right) - 9 + \frac{36}{ab+bc+ca} \ge 15$.

$\Leftrightarrow \left(ab+bc+ca-3\right)^2 \ge 0$:đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $\left(a,b,c\right) = \left(1,1,1\right)$.

Bài toán 17. 32:

Cho hai dãy 2n số không âm $a_1, a_2,...,a_n$; $b_1, b_2, ...,b_n$ và cho số thực p > 1

thì $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$ thì có $q(p-1)=p$

Áp dụng bất đẳng thức Holder cho hai dãy (a_i), $(a_i+b_i)^{p-1}$.

Ta có: $\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Holder cho hai dãy (b_i) và $(a_i+b_i)^{p-1}$:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) thì được:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Suy ra $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Vậy $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{1-\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Bài toán 17. 33:

Giả sử a,b,c là các số không âm sao cho $a^2+b^2+c^2=a+b+c$.

Chứng minh rằng $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le ab+bc+ca$.

Hướng dẫn giải

Bình phương 2 vế từ điều kiện của bài toán, ta nhận được

$$a^4+b^4+c^4-a^2-b^2-c^2=2\left(ab+bc+ca-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Do đó, BĐT $\Leftrightarrow$ $a^4+b^4+c^4 \ge a^2+b^2+c^2$.

$\Leftrightarrow$ $\left(a+b+c\right)^2\left(a^4+b^4+c^4\right) \ge \left(a^2+b^2+c^2\right)^3$

suy trực tiếp từ bất đẳng thức Holder.

Bài toán 17. 34:

Cho a, b, c là cố số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \ge \frac{3}{5}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $s = a^2 + b^2 + c^2$ và kí hiệu tổng vòng tròn là $\sum$.

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \sum \frac{2ab + 2ac}{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc} \le \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5s^2 \sum ab + 10s\sum a^2bc + 20\sum a^3b^2c \le 6s^3 + 6s^2 \sum ab + 12s\sum a^2bc + 48a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 6s^3 + s^2\sum ab + 2s\sum a^2bc + 8\sum a^2b^2c^2 \ge 10s\sum a^2bc + 20\sum a^3b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum 3a^6 + 2a^5b - 2a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 - 12a^3b^2c + 4a^2b^2c^2 \ge 0 \ (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur ta được (nhân với 4abc):

$\sum 4a^4bc - 8a^3b^2c + 4a^2b^2c^2 \ge 0$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có:

$$2\sum \frac{2a^6 + b^6}{3 - a^4b^2} \ge 0 \ ; \ \sum \frac{4a^6 + b^6 + c^6}{6 - a^4bc} \ge 0$$

$$2\sum \frac{2a^3b^3 + c^3a^3}{3 - a^3b^2c} \ge 0 \ ; 2\sum_{sym} \frac{2a^5b + a^5c + ab^5 + ac^5}{6 - a^3b^2c} \ge 0 .$$

Trong mỗi bất đẳng thức trên, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Bài toán 17. 35:

Cho $x,,y,z$ là các số thực khác 1 thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \ge 1$ và đẳng thức xảy ra với vô hạn bộ 3 số hữu tỷ (x,y,z) .

Hướng dẫn giải

Đặt $a = \frac{x}{1-x}, b = \frac{y}{1-y}, c = \frac{z}{1-z}$. Khi đó ta có

$$abc = (1+a)(1+b)(1+c) = \frac{1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$\Leftrightarrow ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 0$.

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) + 2(a + b + c) + 2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c + 1)^2 + 1 \ge 1$

Vậy điều khẳng định được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a + b + c + 1 = 0$

$\Leftrightarrow xy + zx + yz = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + yz = 3 \quad (\text{vì } x = \frac{1}{yz})$

$\Leftrightarrow z^2y^2 - y(3z-1) + z = 0$

Đây là phương trình bậc hai theo y, nên ta có

$$\Delta = (3z-1)^2 - 4z^3 = (z-1)^2(1-4z)$$

Chọn $z = \frac{1-m^2}{4}, |m| > 0$, khi đó phương trình có nghiệm hữu tỷ y, vì vậy $x = \frac{1}{yz}$ cũng là một số hữu tỷ.

Điều khẳng định được chứng minh.

Bài toán 17. 36:

Cho phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có 3 nghiệm dương x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng: $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}$.

Hướng dẫn giải

Theo Vieet: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Ta có: $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Leftrightarrow 0 < \frac{c}{a} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Và $(x_1 + x_2 + x_3)^2 \leq 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \Leftrightarrow 0 < \frac{b^2}{3a^2} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Do đó: $0 < \frac{b^2c}{3a^3} \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \Rightarrow 0 < \frac{b^2c}{9a^3} \leq (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$

Vì $x_1, x_2, x_3 > 0$ nên:

$$\left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4\right)^2 = (x_1^{\frac{1}{2}}.x_1^{\frac{7}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}.x_2^{\frac{7}{2}} + x_3^{\frac{1}{2}}.x_3^{\frac{7}{2}})^2$$

$$\leq (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7)$$

$$\Rightarrow \frac{b^4c^2}{81a^6} \leq -\frac{b}{a}(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) \Rightarrow -\frac{b^3c^2}{81a^5} \leq (x_1^7 + x_2^7 + x_3^7)$$

Dấu "=" xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a}$.

Bài toán 17. 37:

Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện a, b, $c \geq -1$, $a + b + c = 1$.

Chứng minh ta có bất đẳng thức: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}$.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Nếu $(x + y)(xy - 3) \leq 0$ thì $f(x) + f(y) \leq 2f(\frac{x+y}{2})$

Chứng minh: Thực hiện các phép khai triển trực tiếp ta có:

$f(x) + f(y) \leq 2f(\frac{x+y}{2})$

$\Leftrightarrow [x(1+y^2) + y(1+x^2)]\,[(4 + (x+y)^2] \leq 4(x+y)(1+x^2)(1+y^2)$

$\Leftrightarrow (x+y)\,[4(1+x^2)(1+y^2) - (1+xy)(4 + x^2 + y^2 + 2xy)] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+y)[2x^2y^2 + 3(x^2 + y^2) - 6xy - (x^2 + y^2)xy] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(3 - xy)(x - y)^2 \geq 0$. Từ đó suy ra đpcm

Trở lại bài toán. Ta xét hai trường hợp

a) Tồn tại 1 trong 3 số, chẳng hạn c, sao cho $-\frac{1}{3} \leq c \leq 1$. Khi đó:

$$a + b \geq 0,\ ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(1-c)^2}{4} < 3,\ c + \frac{1}{3} \geq 0,\ \frac{c}{3} < 3$$

$$\frac{(a+b)}{2} + \frac{(c+\frac{1}{3})}{2} \geq 0,\ \left[\frac{(a+b)}{2}\right]\left[\frac{(c+\frac{1}{3})}{2}\right] \leq \frac{(a+b+c+\frac{1}{3})^2}{4} = \frac{4}{9} < 3$$

Áp dụng bổ đề ta có:

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(\frac{1}{3}) \leq 2f(\frac{a+b}{2}) + 2f(\frac{c+\frac{1}{3}}{2}) \leq 4f(\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+\frac{1}{3}}{2}}{2}) = 4f(\frac{1}{3}) = \frac{12}{10}$$

Từ đó suy ra đpcm.

b) Cả ba số a, b, c đều không nằm trong đoạn $[-\frac{1}{3}, 1]$. Khi đó do điều kiện a, b, c ≥ –1, ta phải có hai số âm và 1 số dương (Nếu ngược lại, giả sử b, c > 0 thì ta có a+b+c > –1 + 1 + 1 = 1, vô lý). Giả sử, chẳng hạn a, b < 0.

Khi đó $f(a) + f(b) + f(c) \le f(c) \le \frac{1}{2} < \frac{9}{10}$

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều chứng minh được rằng

$f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{9}{10}$ nghĩa là: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \le \frac{9}{10}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 17. 38:

Chứng minh bất đẳng thức với 2n số $a_i, b_i \ge 0$:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho n số dương:

$$\frac{a_1}{a_1+b_1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+b_n} \ge n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)}}$$

$$\frac{b_1}{a_1+b_1} + \ldots + \frac{b_n}{a_n+b_n} \ge n\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\ldots b_n}{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)}}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên thì được:

$$n \ge n\left(\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_a+b_1)\ldots(a_n+b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1b_2\ldots b_n}{(a_a+b_1)\ldots(a_n+b_n)}}\right) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 17. 39:

Cho n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \ge 3$). Chứng minh:

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2} < n-1.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2} < n-1$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}-1+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}-1+\ldots+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}-1<-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2x_3}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_3x_4}{x_2^2+x_3x_4}+\ldots+\frac{x_1x_2}{x_n^2+x_1x_2}>1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}>1.$$

Với: $a_1=\frac{x_1^2}{x_2x_3}>0$; ... ; $a_n=\frac{x_n^2}{x_1x_2}>0$ và $\prod_{i=1}^{n}a_i=1$

Ta có: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}>\frac{1}{1+ab}$

và $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}=1$ khi ab = 1

Từ đó, ta có: $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_1+1}>\frac{1}{a_1a_2+1}+\frac{1}{a_3+1}+\ldots+\frac{1}{a_1+1}>$

$$>\frac{1}{a_1a_2a_3+1}+\frac{1}{a_4+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}>\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1}a_i+1}+\frac{1}{a_n+1}=1$$

Bài toán 17. 40:

Cho n ≥ 2 là số tự nhiên, các số thực:p, a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,.., b_n thoả mãn $\frac{1}{2}\le p\le 1$, $a_i\ge 0$, $0\le b_i\le p$ với mọi i = $\overline{1,n}$ và $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1$.

Chứng minh: $\sum_{i=1}^{n}b_i.\prod_{j=1,j\ne 1}^{n}a_j\le\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n$.

Đặt $A_i=a_1a_2..a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n$.

nên: $(b_i-b_j)(A_i-A_j)\le 0\Rightarrow b_iA_i+b_jA_j\le b_iA_j+b_jA_i$

Do đó tổng $\sum b_iA_i$ không bé hơn khi ta hoán vị các số (a_i), từ đó có thể giả sử $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ và do đó: $A_1\ge A_2\ge\ldots\ge A_n$

Lúc đó tổng $\sum b_iA_i$ với các a_i cố định sẽ lớn nhất trong điều kiện $\sum m_i=1$, khi b_1 nhận giá trị lớn nhất, tức $b_1=p$ và b_2 nhận giá trị lớn kế tiếp, $b_2=1-p$, trong khi $b_3=\ldots=b_n=0$

Khi đó

$\sum b_iA_1 = pA_1 + (1-p)A_2 = a_3a_4...a_n(pa_2 + (1-p)a_1) \le a_3a_4...a_n.(a_1 + a_2)p.$

Nên: $a_3a_4 ...a_n.(a_1 + a_2)p \le \left(\frac{a_3 + a_4 + ... + a_n + (a_1 + a_2}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)^{n-1}}.$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 17. 1:

Giả sử a,b,c là các số thực dương sao cho $abc = 1$.

a) Chứng minh rằng $1 + \frac{3}{a+b+c} \ge \frac{6}{ab+bc+ca}$.

b) Chứng minh $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}$.

Hướng dẫn

a) Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì $xyz = 1$.

b) Đặt $x = a + b + c$ và $y = ab + bc + ca$.

Bài tập 17. 2:

Giả sử a,b,c,d là các số không âm sao cho $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$.

Chứng minh rằng $(a+b)(c+d) \ge 2(ab+cd)$.

Hướng dẫn

Đặt $x = a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$ và giả sử rằng $ab \ge cd$.

Bài tập 17. 3:

Cho các số a, b, c ≥ 1 và a + b + c + 2 = abc.

Chứng minh $bc\sqrt{a^2-1} + ca\sqrt{b^2-1} + ab\sqrt{c^2-1} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}abc$.

Hướng dẫn

Từ giả thiết thì $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{2}{abc} = 1$.

Bài tập 17. 4:

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) + \left(1+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$

Hướng dẫn

Đặt: $x = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}$; $y = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}$; $z = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow xyz = 1$

Bài tập 17. 5:

Cho bốn số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)} \geq \frac{a+b+c+d}{4}$$

Hướng dẫn

Dùng bất đẳng thức BCS

Bài tập 17. 6: Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+d^3} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Hướng dẫn

Dùng phân tích SOS

Bài tập 17. 7:

Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực dương x, y, z

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

Hướng dẫn

Dùng biến đổi tương đương phối hợp với bất đẳng thức BCS

Bài tập 17. 8:

Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 thì:

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+a)^2} + \frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{2a^2+(b+c)^2} \leq \frac{2}{3}.$$

Hướng dẫn

Chuẩn hóa a +b +c = 1

Bài tập 17. 9:

Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 và a+b+c =1 thì:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 48(ab+bc+ca) \geq 25.$$

Hướng dẫn

Dồn biến $f(a,b,c) \geq f(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$ với a lớn nhất

Bài tập 17. 10:

Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \in N^*$).Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}+...+\frac{n}{a_1+a_2+..+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$$

Hướng dẫn

Tách các tổng.

Bài tập 17. 11: Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thoả mãn điều kiện: 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + abc + abd + acd + bcd = 17.

Chứng minh rằng: $a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

Hướng dẫn

Dùng Viet của đa thức có 4 nghiệm a,b,c,d.

Bài tập 17. 12:

Cho $x_1, x_2, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6$ dương. Chứng minh

$$\frac{x_1(x_5+x_6)}{x_2+x_3}+\frac{x_2(x_6+x_4)}{x_3+x_1}+\frac{x_3(x_4+x_5)}{x_1+x_2}\geq\frac{3(x_4x_5+x_5x_6+x_6x_4)}{x_4+x_5+x_6}$$

Hướng dẫn

Dùng bất đẳng thức BCS và Mincôpxki

Chuyên đề 18: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các định nghĩa

Cho hàm số y = f(x) trên tập xác định D.

Nếu tồn tại một điểm $x_o \in D$ sao cho $f(x) \le f(x_o)$ với mọi $x \in D$ thì số $M = f(x_o)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f trên D, kí hiệu là $M = \max\limits_{x\in D} f(x)$.

Nếu tồn tại một điểm $x_o \in D$ sao cho $f(x) \ge f(x_o)$ với mọi $x \in D$ thì số $m = f(x_o)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên D, kí hiệu là $m = \min\limits_{x\in D} f(x)$.

Tổng quát $A = f(x_1, x_2,..., x_n)$ là biểu thức phụ thuộc vào n biến $x_1, x_2, ..., x_n$ trong đó $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$

Nếu $\begin{cases} A \ge m, \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2, ..., \forall x_n \in X_n \\ \exists x_1^o \in X_1, \exists x_2^o \in X_2, \exists x_n^o \in X_n \quad \text{sao cho } f(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o) = m \end{cases}$

thì m được gọi là giá trị bé nhất của A, ký hiệu m = min A.

Nếu $\begin{cases} A \le M, \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2, ..., \forall x_n \in X_n \\ \exists x_1^o \in X_1, \exists x_2^o \in X_2, \exists x_n^o \in X_n \quad \text{sao cho } f(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o) = M \end{cases}$

thì M được gọi là giá trị lớn nhất của A, ký hiệu M = max A.

Nguyên tắc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số:

Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên miền D ta xác lập bất đẳng thức dạng: $f(x) \le A$ với A là hằng số.

Bước 2 là xem xét dấu đẳng thức xảy ra khi nào. Dấu = có thể nêu tồn tại, hoặc nêu chẳng hạn giá trị x nào đó thuộc D.

Cuối cùng là kết luận giá trị lớn nhất f(x) bằng A.

Kí hiệu $\max\limits_{x\in D} f(x)$, nếu không nhầm lẫn nào thì ghi max f(x).

Tương tự cho việc tìm giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{x\in D} f(x)$.

Nguyên tắc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức:

Để tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức T = g(a;b;c;..) trên miền D các điều kiện của biến a, b, c,... , ta xác lập bất đẳng thức dạng: $g(a;b;c;..) \le A$ với A là hằng số.

Bước 2 là xem xét dấu đẳng thức xảy ra khi nào. Dấu = có thể nêu tồn tại, hoặc nêu chẳng hạn các giá trị a,b,c,.. nào đó thuộc D.

Cuối cùng là kết luận giá trị lớn nhất g(a;b;c;..) = A.

Tương tự cho việc tìm giá trị nhỏ nhất.

Chú ý:

1) Dấu đẳng thức có thể nêu đầy đủ các biến, có thể chỉ ra biến (chẳng hạn), còn bài toán dùng điều kiện có nghiệm thì đã tồn tại.

2) Cũng như bài toán chứng minh bất đẳng thức, việc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là một bài toán khó, có rất nhiều phương pháp đánh giá tuỳ thuộc dạng của bài toán, đặc trưng của đề bài, có khi ta phải phối hợp nhiều cách khác nhau để giải quyết bài toán::

- phương pháp nhóm và so sánh,
- phương pháp đồ thị và tam thức bậc hai,
- phương pháp lượng giác hóa,
- phương pháp tọa độ, vectơ,
- phương pháp dùng phép,
- phương pháp biến đổi biểu thức cần đánh giá, về dạng có thể áp dụng được dùng bất đẳng thức cơ bản, nâng cao,....

Đối với bất đẳng thức AM–GM có các kỹ thuật tách số hoặc ghép số, ghép cặp 2, ghép cặp 3, AM–GM ngược dấu; tăng hoặc giảm số số hạng, tăng hoặc giảm bậc luỹ thừa, bổ sung đại lượng dựa vào vế kia, chọn lựa các hệ số để dấu đẳng thức xảy ra,...

Ngoài ra ta còn sử dụng phép khai phương, bình phương, dùng phép thế, đặt biến mới, cố định biến, dồn biến, làm trội,...Đặc biệt là ước lượng trước kết quả, dấu bằng xảy của các biến rồi biến đổi tương đương hay chứng minh như các cách chứng minh một bất đẳng thức đã nêu.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 18. 1:

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = x^4 - 8xy - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$.

Hướng dẫn giải

Ta có $T = x^4 - 8xy - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$

$= x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 + x^2y^2 - 8xy$

$= x^3(x - y) + y^3(y - x) + (xy - 4)^2 - 16$

$= (x - y)(x^3 - y^3) + (xy - 4)^2 - 16$

$= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) + (xy - 4)^2 - 16 \geq -16.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ và $xy = 4 \Leftrightarrow x = y = \pm 2$.

Vậy min $T = -16$.

Bài toán 18. 2:

Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \sqrt{-x^2+4x+21} - \sqrt{-x^2+3x+10}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} -x^2+4x+21 \geq 0 \\ -x^2+3x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5$

Ta có $(-x^2+4x+21)-(-x^2+3x+10) = x+11 > 0$ nên $y > 0$.

Do đó $y^2 = -x^2+4x+21+-x^2+3x+10-2\sqrt{-x^2+4x+21}.\sqrt{-x^2+3x+10}$

$= (x+3)(7-x)+(x+2)(5-x)-2\sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)}$

$= 2+\left(\sqrt{(x+3)(5-x)}-\sqrt{(x+2)(7-x)}\right)^2 \geq 2$

Do đó $y \geq \sqrt{2}$, Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}$.

Vậy min $y = \sqrt{2}$ tại $x = \frac{1}{3}$.

Bài toán 18. 3:

Cho a, b, c, > 0. Hãy tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}} + \frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}$

$= \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^6+2a^3c^3+c^6)} = \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^6+2a^3c^3+c^6)}$

$= \sqrt[3]{(a^{12}+2a^3b^6c^3)+(2a^9c^3+b^6c^6)+a^6b^6+a^6c^6}$

$\geq \sqrt[3]{a^6.b^6+3a^6b^4c^2+3a^6b^2c^4+a^6c^6} = \sqrt[3]{(a^2b^2+a^2c^2)^3} = a^2b^2+a^2c^2$

Suy ra: $\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}} \leq \frac{a^4}{a^4+a^2b^2+a^2c^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Tương tự: $\frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$

$$\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(c^3+b^3)^2}} \le \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có: $P \le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Vậy max $P = 1$.

Bài toán 18. 4:

Cho a,b,c là các số thực phân biệt, tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$T = \frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2}.$$

Hướng dẫn giải

Sử dụng đồng nhất thức:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Ta có

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} = \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)^2 +$$

$$+ \frac{2bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{2ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{2ab}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)^2 + 2 \ge 2.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Vậy min $T = 2$.

Bài toán 18. 5:

Cho a,b,c,d là các số dương sao cho $abcd = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của

$$M = \frac{1}{1+ab+bc+ca} + \frac{1}{1+bc+cd+db} + \frac{1}{1+cd+da+ac} + \frac{1}{1+da+ab+bd}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{d}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$,

do đó $ab+bc+ca \ge \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$,

Và $\frac{1}{1+ab+bc+ca} \le \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$.

Tương tự rồi cộng 4 bất đẳng thức này ta nhận được kết quả $M \le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$. Vậy max M = 1.

Bài toán 18. 6:

Cho các số dương x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của

$$N = \frac{y+z}{x+\sqrt[3]{4(y^3+z^3)}} + \frac{z+x}{y+\sqrt[3]{4(z^3+x^3)}} + \frac{x+y}{z+\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}}.$$

Hướng dẫn giải:

Ta có $4(x^3+y^3) - (x+y)^3 = 3(x+y)(x-y)^2 \ge 0$ (vì x, y > 0)

Đẳng thức xảy ra khi x = y.

Suy ra : $z+\sqrt[3]{4(x^3+y^3)} \ge z+x+y$ nên: $\frac{x+y}{z+\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}} \le \frac{x+y}{x+y+z}$

Tương tự rồi cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức thì

$$N = \frac{y+z}{x+\sqrt[3]{4(y^3+z^3)}} + \frac{z+x}{y+\sqrt[3]{4(z^3+x^3)}} + \frac{x+y}{z+\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}}$$

$$\le \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi x =y =z. Vậy max N = 2.

Bài toán 18. 7:

Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn

a) [0; 2]. Tìm giá trị lớn nhất của: $T = 2(x+y+z) - (xy+yz+zx)$.

b) [1, 2].Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+y}{2+z} + \frac{y+z}{2+x} + \frac{z+x}{2+y}.$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x, y, z \in [0; 2] \Rightarrow 2-x, 2-y, 2-z \ge 0$

$\Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \ge 0$

$\Rightarrow 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz \ge 0$

$\Rightarrow 4(x+y+z) - 2(xy+yz+zx) \le 8 - xyz \le 8$

$\Rightarrow T = 2(x+y+z) - (xy+yz+zx) \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi x, y, z có 2 số bằng 0; 1 số bằng 2.

Vậy max T = 4.

b) Vì $x, y, z \in [1; 2] \Rightarrow x+y \ge 2 \Rightarrow x+y+z \ge 2+z$.

Tương tự: $x+y+z \ge 2+y$ và $x+y+z \ge 2+x$.

Nên $P = \frac{x+y}{2+z} + \frac{y+z}{2+x} + \frac{z+x}{2+y}$

$$\geq \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} = 2$$

Dấu = khi x = y = z = 1 $\Rightarrow$ min P = 2.

và $P = \frac{x}{2+z} + \frac{y}{2+x} + \frac{z}{2+y} + \frac{y}{2+z} + \frac{z}{2+x} + \frac{x}{2+y}$

$$\leq \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{x}{x+y} = 3$$

Dấu = khi x = y = z = 2 $\Rightarrow$ max P = 3.

Bài toán 18. 8:

Cho a, b, c dương. Tìm giá trị lớn nhất :

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}.$$

Hướng dẫn giải

Với x > 0, áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$\sqrt{1+x^3} = \sqrt{(1+x)(1-x+x^2)} \leq \frac{1+x+1-x+x^2}{2} = 1+\frac{x^2}{2}.$$

Do đó với a, b, c > 0:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$$

$$\geq \frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự rồi cộng lại 3 bất đẳng thức thì có

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1.$$

Dấu bằng khi a =b= c. Vậy min P =1.

Bài toán 18. 9:

Cho a, b, c là các số thực thoả mãn abc = –1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(|ab|+|bc|+|ca|\right)\left(15\sqrt{a^2+b^2+c^2} - 7(a+b+c)\right)$.

Hướng dẫn giải

Do abc < 0 ta xét 2 trường hợp:

– Cả 3 số a, b, c đều âm. Khi đó ta có:

$$|ab|+|bc|+|ca| \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$$

$$15\sqrt{a^2+b^2+c^2} - 7(a+b+c)$$

$$\ge 15\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} + 7.3\sqrt[3]{-abc} = 15\sqrt{3}+21$$

Suy ra P > 48

– Nếu trong 3 số a, b, có 1 số âm, 2 số dương. Không mất tổng quát, giả sử: a < 0, b > 0, c > 0.

Đặt $a_1 = -a > 0$, ta có:

$$\sqrt{a_1^2+b^2+c^2} \ge \frac{2b+2c+a_1}{\sqrt{2^2+2^2+1}} \Rightarrow 3\sqrt{a_1^2+b^2+c^2} \ge 2b+2c+a_1$$

Nên $P \ge \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)[5(2b+2c+a_1) - 7(b+c-a_1)]$

$$= 3\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(4a_1+b+c) > 3(1.2+1.1+1.1)^2 = 48$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = c = 2a_1 > 0$ và $a_1bc = 1$ hay

$b = c\sqrt[3]{2}$ và $a = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. Vậy min P = 48.

Bài toán 18. 10:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \quad \text{với } x \in [-1;1].$$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt[4]{1-x}$, $v = \sqrt[4]{1+x}$ $(u,v \ge 0) \Rightarrow uv = \sqrt[4]{1-x^2}$, $u^4+v^4 = 2$

thì f(x) = A = uv + u + v.

Ta có $(u^2-v^2)^2 \ge 0 \Rightarrow u^4+v^4 \ge 2u^2v^2$

$\Rightarrow 2(u^4+v^4) \ge (u^2+v^2)^2 \Rightarrow u^2+v^2 \le 2$

và $(u-v)^2 \ge 0 \Rightarrow u^2+v^2 \ge 2uv \Rightarrow 2(u^2+v^2) \ge (u+v)^2$

$$\Rightarrow u+v \le 2; \quad uv \le \frac{u^2+v^2}{2} \le \frac{2}{2} = 1$$

Do đó $A \le 1 + 2 = 3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $\max f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

Bài toán 18. 11:

Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $ab + bc + ca = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1} + \dfrac{1}{c^2+1}$.

Hướng dẫn giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a = b= c =1. Ta sẽ chứng minh :

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \ge \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3a^2b^2c^2$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 3 số dương thì được

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc,$$

Mà $ab + bc + ca = 3$ nên $a + b + c \ge 3abc$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c).$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca)^2$$
$$\ge 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow ab(a^2+b^2) + bc(b^2+c^2) + ca(c^2+a^2) \ge 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2),$$

$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \ge 0$: đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c) = (1,1,1)$ hoặc $(a,b,c) = (0,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

Vậy $\min P = \dfrac{3}{2}$.

Bài toán 18. 12:

Giả sử a,b,c là các số dương sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = 5(a+b+c) + \dfrac{3}{abc}$.

Hướng dẫn giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1. Ta sẽ chứng minh :

$$5(a+b+c) + \frac{3}{abc} \ge 18$$

Đặt $p = a + b + c$ và $q = ab + bc + ca$.

Từ $a^2+b^2+c^2=3$, ta nhận được $p^2=2q+3, p>\sqrt{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM thì suy ra

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Do đó $\frac{1}{abc} \geq \frac{3p}{q^2}$.

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $5p+\frac{9p}{q^2} \geq 18$. Thật vậy

$$5p+\frac{9p}{q^2}-18 = 5p+\frac{36p}{(p^2-3)^2}-18$$

$$=\frac{5p^5-18p^4-30p^3+108p^2+81p-162}{(p^2-3)^2}$$

$$=\frac{(p-3)^2(5p^3+12p^2-3p-18)}{(p^2-3)^2}$$: đúng vì ta có

$$5p^3+12p^2-3p-18 = p^2\left(5p+12-\frac{3}{p}-\frac{18}{p^2}\right) > p^2\left(5\sqrt{3}+12-\sqrt{3}-6\right) > 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy min P = 18.

Bài toán 18. 13:

Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm thuộc đoạn [0; 1].

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

Hướng dẫn giải

Gọi 2 nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 < x_2$; theo định lý Viet:

$$P = \left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{b}{a}\right) : \left(1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 2+\frac{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

Vì $x_1, x_2 \in [0; 1]$ nên: $x_1^2 \leq x_1x_2 \leq x_2^2 \leq 1$ và $1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \le \frac{x_1x_2+1+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 1 \Rightarrow P \le 3$$

Dễ thấy khi $a = c = -\frac{b}{2} \neq 0$ thì P = 3. Vậy maxP = 3.

Bài toán 18. 14:

Xét các số thực x, y thoả mãn điều kiện: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = x + y.

Hướng dẫn giải

ĐK: $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \Leftrightarrow x + y = 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2})$.

Gọi G là tập giá trị của P, ta có: $a \in G \Leftrightarrow$ a là số thực sao cho hệ phương trình $\begin{cases} 3(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}) = a \\ x+y = a \end{cases}$ có nghiệm.

Đặt $u = \sqrt{x+1}$ và $v = \sqrt{y+2}$, $(u, v \ge 0)$. Ta có:

$$\begin{cases} 3(u+v) = a \\ u^2+v^2 = a+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{a}{3} \\ uv = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{9} - a - 3\right) \end{cases}$$

Do đó hệ có nghiệm khi phương trình $18t^2 - 6at + a^2 - 9a - 27 = 0$ có hai nghiệm không âm, suy ra :

$$\begin{cases} -a^2+18a+54 \ge 0 \\ a \ge 0 \\ a^2 - 9a - 27 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \le a \le 9+3\sqrt{15}$$

Vậy $\min P = \frac{9+3\sqrt{21}}{2}$ và $\max P = 9 + 3\sqrt{15}$.

Bài toán 18. 15:

Cho 2 số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $P = \frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2} = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}$

Xét y = 0 thì P = 2.

Xét $y \neq 0$, đặt $x = ky$ thì

$$P = \frac{2(k^2y^2 + 6ky^2)}{k^2y^2 + y^2 + 2ky^2 + 2y^2} = \frac{2k^2 + 12k}{k^2 + 2k + 3}$$

$\Leftrightarrow 2k^2 + 12k = P(k^2 + 2k + 3)$

$\Leftrightarrow (P-2)k^2 + 2(P-6)k + 3P = 0.$

Với $P = 2$ thì $k = \frac{3}{4}$.

Với $P \neq 2$, vì phương trình bậc hai có nghiệm nên $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow (P-6)^2 - 12P(P-2) \geq 0 \Leftrightarrow P^2 + 3P - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3.$

Ta có $P = 3 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}; y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

và $P = -6 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}; y = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Vậy $\min P = -6$, $\max P = 3$.

Bài toán 18. 16:

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của z.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $\Rightarrow (x + y + z)^2 = 16 \Rightarrow x + y + z = \pm 4$

Đặt $S = x + y$, $P = xy$ thì có 2 trường hợp:

1) $S = 4 - z$, $P = 4 - yz - zx = 4 - (4 - z)z = z^2 - 4z + 4$

Điều kiện có nghiệm $\Delta = S^2 - 4P \geq 0 \Rightarrow (4 - z)^2 - 4(z^2 - 4z + 4) \geq 0$

$\Rightarrow -3z^2 + 8z \geq 0 \Rightarrow 0 \leq z \leq \frac{8}{3}$

Ta có $z = \frac{8}{3}$ khi $S = \frac{4}{3}$, $P = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}$.

2) $S = -4 - z$, $P = z^2 + 4z + 4$ thì tương tự:

$\Delta \geq 0 \Rightarrow -3z^2 - 8z \geq 0 \Rightarrow -\frac{8}{3} \leq z \leq 0$

Ta có $z = -\frac{8}{3}$ khi $S = -\frac{4}{3}$, $P = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = y = -\frac{2}{3}$

Vậy $\max z = \frac{8}{3}$, $\min z = -\frac{8}{3}$.

Bài toán 18. 17:

Cho 2 số x, y $\neq$ 0 và thoả $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}$.

Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$ thì có $a + b = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab$..

nên $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)^2$.

Ta có $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$ thì được $a + b \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2$

Suy ra $(a + b)^2 - 4(a+b) \leq 0$ nên $0 \leq a+b \leq 4$.

Do đó $A = (a+b)^2 \leq 16$.

Khi $x = y = \frac{1}{2}$ thì A = 16. Vậy max A = 16 .

Bài toán 18. 18:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = \frac{(x^2+1)^3}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)(x^2 + 3!)} \text{ với } x \in \mathbf{R}.$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bất đẳng thức với $a_i, b_i \geq 0$:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n}$$

Áp dụng với $a_1 = a_2 = a_3 = x^2$; $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_2 = \frac{1}{3}$; $b_3 = 3!$

Ta có: $x^2 + 1 \leq \sqrt[3]{(x^2 + \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{3})(x^2 + 3!)} \Rightarrow A \leq 1$

Vậy max A = 1 đạt khi x = 0.

Bài toán 18. 19:

Cho a, b, c là các số dương sao cho: $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Hướng dẫn giải

Đặt : $x=\frac{1}{a}, y=\frac{2}{b}, z=\frac{8}{c}$ .Khi đó, điều kiện của bài toán đã cho trở thành :

$2xyz \geq 2x + 4y + 7z$ (*) và $S = x + y + z$.

Từ điều kiện (*) , ta có : $z(2xy - 7) \geq 2x + 4y \Rightarrow \begin{cases} 2xy > 7 \\ z \geq \frac{2x+4y}{2xy-7} \end{cases}$

$\Rightarrow S = x + y + z \geq x + y + \frac{2x+4y}{2xy-7}$

Hay $S = x + \frac{11}{2x} + y - \frac{7}{2x} + \frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7} \geq x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}$

Mà ta có $2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}} \geq \frac{3+\frac{7}{x}}{2}$ nên $S = x + y + z \geq \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x} \geq \frac{15}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 3, y = \frac{5}{2}, z = 2.$

Vậy min $S = \frac{15}{2}$ đạt được khi $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{5}$, $c = \frac{3}{2}$.

Bài toán 18. 20:

Cho x, y, z ∈ [2001; 2002]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$f(x,y,z) = \frac{|2001.2002 - xy|}{(x+y)z} + \frac{|2001.2002 - yz|}{(y+z)x} + \frac{|2001.2002 - zx|}{(z+x)y}.$$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$\forall x, y, z \in [a; b], a > 0$ ta luôn có: $\frac{|ab - xy|}{x+y} \leq \frac{b-a}{2}$ (1)

$\Leftrightarrow 4(ab - xy)^2 \leq (x + y)^2 (b - a)^2$

$\Leftrightarrow [2ab - 2xy - (x + y)(b - a)] [2ab - 2xy + (x + y)(b - a)] \leq 0$

$\Leftrightarrow [b(2a - x - y) + x(a - y) + y(a - x)][a(2b - x - y) + x(b - y)$

$+ y(b - x)] \leq 0$: Đúng

Từ (1) ta có: $\frac{|ab - xy|}{(x+y)z} \leq \frac{b-a}{2z} \leq \frac{b-a}{2a}$

Dấu "=" khi x = y = b, z = a hay x = y = z = a

Từ đó suy ra: $f(x,y,z) \le \frac{b-a}{2a}+\frac{b-a}{2a}+\frac{b-a}{2a}=\frac{3(b-a)}{2a}$

Dấu = khi x = y = z = a

Thay a = 2001, b = 2002, ta được max f(x, y, z) = $\frac{1}{1334}$.

Bài toán 18. 21:

Cho a, b, c là các số thực dương sao cho abc = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}$.

Hướng dẫn giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a = b= c =1 nên ta chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\ge 1$$

Dùng phép thế $a=\frac{yz}{x^2}, y=\frac{zx}{y^2}, z=\frac{xy}{z^2}$ với x,y,z> 0

Bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2zx+z^2x^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2xy+x^2y^2}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$\sum_{\text{cyclic}}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum_{\text{cyclic}}(x^4+x^2yz+y^2z^2)}$$

Và chứng minh $\sum_{\text{cyclic}}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\ge 1$

$\Leftrightarrow (x^4+y^4+z^4)^2\ge\sum_{\text{cyclic}}(x^2+yz)(2x^2+yz)$

$\Leftrightarrow x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2\ge 0$: đúng.

Vậy min T = 1 khi a = b= c =1.

Bài toán 18. 22:

Xét các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x\ge\max|y,z|$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x}{y}+2\sqrt{1+\frac{y}{z}}+3\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $\frac{x}{y}\ge 1$, và $0<\frac{z}{x}\le 1$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho các số dương ta được

$$P = \frac{x}{y} + 2\sqrt{1+\frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}} \geq \frac{x}{y} + 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{\frac{z}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x}{y} + 3(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2})\sqrt[6]{\frac{z}{x}}$$

$$\geq 11\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[11]{\frac{x.y.z}{y.z.x}} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = z.

Vậy min P = $1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2}$.

Bài toán 18. 23:

Cho x,y,z dương thỏa mãn: $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho các số dương ta được

$$P = (\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}) + 2(\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}) + 3(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z})$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}) + 2.2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}) + 3.2\sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}} = 6x + 4y + 2z$$

$$= 4(x + y) + 2(x + z) \geq 4.2\sqrt{xy} + 2.2\sqrt{xz} = 4(2\sqrt{xy} + \sqrt{xz}) = 4$$

Dấu = khi $\begin{cases} x = y = z \\ 2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy min P = 4.

Bài toán 18. 24:

Cho a, b > 0 và $a^3 + b^3 \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: T = 2a +b.

Hướng dẫn giải

Ta tìm các hằng số dương x và y để áp dụng bất đẳng thức AM–GM :

$a^3 + x^3 + x^3 \geq 3x^2 a$, dấu bằng khi a = x

$b^3 + y^3 + y^3 \geq 3y^2 b$, dấu bằng khi b =y.

Do đó $a^3 + b^3 + 2(x^3 + y^3) \geq 3(x^2 a + y^2 b)$

Nên $3(x^2 a + y^2 b) \leq a^3 + b^3 + 2(x^3 + y^3) \leq 1 + 2(x^3 + y^3)$

Ta chọn x và y sao cho $x^2 = 2y^2$ và dấu = xảy ra, khi đó :

$$\begin{cases} a = b\sqrt{2} \\ a^3 + b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}} \\ b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}} \end{cases}$$

Suy ra $T = 2a + b \le \dfrac{1+2(x^3+y^3)}{3y^3} = \left(\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}\right)^2$

Vậy $\max T = \left(\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}\right)^2$ khi $a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}}, b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}}$.

Bài toán 18. 25:

Cho a, b, c là 3 số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}.$$

Hướng dẫn giải

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a = b =c >0. Ta chứng minh

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: a + b + c = 3. Do đó

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} + \frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3} + \frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3} \le 24$$

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a= b =c = 1 nên ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3} \le Ax + B \text{ với mọi } x \in (0;3) \text{ và ước lượng được}$$

A = 4, B = 4.

Ta chứng minh với mọi $x \in (0;3)$:

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3} \le 4x+4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(4x+3)}{(x-1)^2+2} \ge 0 \text{ : đúng.}$$

Nên: F(a, b, c) ≤ 4(a+b+c) + 12 = 24.

Vậy max P = 8.Dấu bằng khi a = b =c >0.

Bài toán 18. 26:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$f(x) = x(1993 + \sqrt{1995 - x^2})$ trên miền xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $|x| \le \sqrt{1995}$

Ta nhận thấy rằng f(x) là hàm số lẻ và $f(x) \ge 0$ với mọi $x \ge 0$

Ta xét f(x) với $x \in [0; \sqrt{1995}]$.

Áp dụng bất đẳng thức Schawrz ta có

$$f(x) = x.\left(1993 + \sqrt{1995 - x^2}\right) = x\left(\sqrt{1993}.\sqrt{1993} + 1.\sqrt{1995 - x^2}\right)$$

$$\le x\sqrt{1994}.\sqrt{1993 + 1995 - x^2} \le \sqrt{1994}.\frac{x^2 + 1993 + 1995 - x^2}{2}$$

$= \sqrt{1994}.1994$. Dấu "=" khi $x = \sqrt{1994}$

Vậy $\text{Max}f(x) = 1994\sqrt{1994}$ khi $x = \sqrt{1994}$

$\text{Min}(x) = -1994\sqrt{1994}$ khi $x = -\sqrt{1994}$.

Bài toán 18. 27:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}\ , \text{với } x > 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(9+7)\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \ge \left(3 + \frac{7}{x}\right)^2$

Nên $y \ge x + \frac{11}{2x} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{x}\right) = \left(x + \frac{9}{x}\right) + \frac{3}{2} \ge 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

Khi $x = 3$ thì $y = \frac{15}{2}$ nên giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{15}{2}$.

Bài toán 18. 28:

Cho 3 số dương x, y, z thoả điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)} + \sqrt{(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2)}$$

$$+ \sqrt{(z^2 + zx + x^2)(x^2 + xy + y^2)}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Schawrz ta có

$$\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\right]\left[\left(z+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\right]\geq\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(z+\frac{1}{2}y\right)+\frac{3}{4}y^2\right]^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\right]\left[\left(z+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\right]\geq zx+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+y^2$$

Tương tự rồi cộng lại:

$P \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 = 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy min P = 1.

Bài toán 18. 29:

Cho ba số a, b, c dương và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{a^3}{a+2b+3c}+\frac{b^3}{b+2c+3a}+\frac{c^3}{c+2a+3b}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức BCS:

$$A = \frac{a^4}{a^2+2ab+3ac}+\frac{b^4}{b^2+2bc+3ab}+\frac{c^4}{c^2+2ac+3bc}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2+c^2+5(ab+bc+ca)}\left[\left(\sqrt{a^2+2ab+3ca}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{b^2+2bc+3ab}\right)^2+\left(\sqrt{c^2+2ca+3bc}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+2ab+3ca}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b^2}{\sqrt{b^2+2bx+3ab}}\right)^2+\left(\frac{c^2}{\sqrt{c^2+2ca+3bc}}\right)^2\right]$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+5(ab+bc-ca)} \geq \frac{1}{1+5(ab+bc+ca)}$$

Mà: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$\Rightarrow 1 + 5(ab + bc + ca) \le 6 \Rightarrow \dfrac{1}{1+5(ab+bc+ca)} \ge \dfrac{1}{6}$

Do đó $A \ge \dfrac{1}{6}$. Dấu = khi $a = b = c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy $\min A = \dfrac{1}{6}$.

Bài toán 18. 30:

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=4 \qquad (1)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)$$

Hướng dẫn giải

Nếu không có điều kiện ràng buộc thì ta có thể dễ dàng dùng bất đẳng thức BCS để thu được GTNN của P là 9.

Do có điều kiện ràng buộc, ta chỉ áp dụng BCS cho hai nhóm (như vậy các biến số không bị ép bằng nhau và vì thế vẫn có thể thoả mãn (1)). Cụ thể

$$P=\left((a^4+b^4)+c^4\right)\left(\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)+\frac{1}{c^4}\right)$$

$$\ge\left(\sqrt{(a^4+b^4)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)}+1\right)=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1\right)^2 \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a^4+b^4}{\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{b^4}}=\dfrac{c^4}{\dfrac{1}{c^4}} \Leftrightarrow ab=c^2$.

Do $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2-2$ nên bây giờ ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$. Nếu giá trị nhỏ nhất này đạt được khi điều kiện $ab = c^2$ thoả mãn thì ta sẽ tìm được giá trị nhỏ nhất của P.

Khai triển (1) thành $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)c^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right)c+(a+b)=0$.

Xem đây là một phương trình bậc hai theo c, ta có

$$\Delta=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)^2-4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-7\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\ge 0$$

$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 7.$

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ là 7,

nên có $a+b=3\sqrt{ab}$. Và khi đó ta có

$$c=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\frac{3ab}{a+b}=\sqrt{ab}\frac{3\sqrt{ab}}{a+b}=\sqrt{ab}$$

Tức là khi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 7 thì dấu bằng cũng xảy ra ở (2).

Kết hợp những điều trên, ta tìm được GTNN của P là $48^2 = 2304$, đạt được khi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=7$ và $c=\sqrt{ab}$.

Bài toán 18. 31:

Cho x, y, z, t là các số thực không âm thay đổi thoả mãn

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2005$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\frac{x}{2005\sqrt{2005}+yzt}+\frac{y}{2005\sqrt{2005}+ztx}+\frac{z}{2005\sqrt{2005}+txy}$$

$$+\frac{x}{2005\sqrt{2005}+xyz}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt: $a=\frac{x}{\sqrt{2005}}$; $b=\frac{y}{\sqrt{2005}}$; $c=\frac{z}{\sqrt{2005}}$; $d=\frac{t}{\sqrt{2005}}$

thì $a, b, c, d \geq 0$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow 0 \leq a,b,c,d \leq 1$

Áp dụng bất đẳng thức BCS :

$$F=\frac{1}{2005}\left(\frac{a}{1+bcd}+\frac{b}{1+acd}+\frac{c}{1+abd}+\frac{d}{1+abc}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2005}\cdot\frac{(a+b+c+d)^2}{a(1+bcd)+b(1+acd)+c(1+abd)+d(1+abc)}$$

$$=\frac{1}{2005}\cdot\frac{1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{a+b+c+d+4abcd}$$

Mà: $1 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - (a+b+c+d) - 4abcd$

$= (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$+ (abc + abd + acd + bcd) - 5abcd$

$\geq ab + ac + ad + bc + bd + cd - 5abcd$

$\geq 6\sqrt[6]{a^3b^3c^3d^3} - 5abcd = 6\sqrt{abcd} - 5abcd \geq 0$ nên:

$1 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq a+b+c+d+4abcd > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{(a+b+c+d+4abcd)} \geq 1$. Do đó $F \geq \dfrac{1}{2005}$

Lấy $x = y = z = 0, t = \sqrt{2005}$ thì $F = \dfrac{1}{2005}$. Vậy $\min F = \dfrac{1}{2005}$.

Bài toán 18. 32:

Cho phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt không nhất thiết khác nhau.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \dfrac{c}{b}$.

Hướng dẫn giải

Gọi p, q, r là ba nghiệm của $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

Ta có $1+a+b+c = (1+p)(1+q)(1+r)$ và

$3 + 2a + b = (1+p)(1+q) + (1+q)(1+r) + (1+p)(1+r)$

Đặt $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{xy+yz+zx}$ thì $Q = f(1+p,1+q,1+r) - f(p,q,r)$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $p \geq q \geq r$ và theo bất đẳng thức sắp thứ tự thì có $3\left(\dfrac{1}{p(1+p)} + \dfrac{1}{q(1+q)} + \dfrac{1}{r(1+r)}\right) \geq \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r}\right)\left(\dfrac{1}{1+p} + \dfrac{1}{1+q} + \dfrac{1}{1+r}\right)$

và vì vậy nếu đặt $X = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r}$ và $Y = \dfrac{1}{1+p} + \dfrac{1}{1+q} + \dfrac{1}{1+r}$

Suy ra $Q = \dfrac{X-Y}{XY} \geq \dfrac{1}{3}$ và dấu bằng khi $p = q = r$. Vậy $\min Q = \dfrac{1}{3}$.

Bài toán 18. 33:

Cho x, y thoả mãn $x + y + 2 = 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2})$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{1}{x} + \frac{1}{y+3}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \geq 1, y \geq -2$.

Ta có $x + y + 2 = 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{y+2})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)^2 + (\sqrt{y+2} - 1)^2 = 1$ nên tồn tại t để

$\cos t = \sqrt{x-1} - 1, \sin t = \sqrt{y+2} - 1$

Suy ra $x = 1 + (1 + \cos t)^2$ và $y = (1 + \sin t)^2 - 2$.

Ta có $Q = \frac{1}{x} + \frac{1}{y+3} \geq \frac{4}{x + (y+3)}$

$$= \frac{4}{5 + 2(\sin t + \cos t)} = \frac{4}{5 + 2\sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})} \geq \frac{4}{5 + 2\sqrt{2}}$$

Dấu = xảy ra khi $x = y + 3 = \frac{5}{2} + \sqrt{2}$. Vậy min $Q = \frac{4}{5 + 2\sqrt{2}}$.

Bài toán 18. 34:

Cho x, y, z dương thoả $xz - zy - yx = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{2y^2}{1+y^2} + \frac{3z^2}{1+z^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: x, y, z > 0 nên $xz - zy - yx = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz}$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, (a, b, c > 0) thì $b - a - c = abc$

$\Rightarrow a + c = b(1 - ac) \Rightarrow b = \frac{a+c}{1-ac}$

Đặt $\begin{cases} a = \tan\alpha \\ c = \tan\beta \end{cases}$ với $\alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ suy ra $b = \tan(\alpha + \beta)$

Do b > 0 và $\alpha, \beta > 0$ nên $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

$$P = \frac{2}{1+a^2} - \frac{2}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2}$$

$= 2\cos^2\alpha - 2\cos^2(\alpha+\beta) + 3\cos^2\beta = \cos 2\alpha - \cos 2(\alpha+\beta) + 3\cos^2\beta$

$= 2\sin\beta.\sin(\alpha+\beta) + 3\cos^2\beta = -3\sin^2\beta + 2\sin\beta.\sin(2\alpha+\beta) + 3$

$$= -3\left[\sin\beta - \frac{1}{3}\sin(2\alpha+\beta)\right]^2 - \frac{1}{3}\cos^2(2\alpha+\beta) + \frac{10}{3} \le \frac{10}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\cos(2\alpha+\beta)=0\\ \sin\beta=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ z=2\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy min $P = \frac{10}{3}$.

Bài toán 18. 35:

Giả sử $n \ge 1$ và n số $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực sao cho

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n \text{ và } a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2 \ge n^2.$$

Chứng minh rằng $\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \ge 2$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử $a_i < 2$ với mọi i.

Đặt $x_i = 2 - a_i > 0$ với mọi i, và đặt $S = x_1 + x_2 + ... + x_n, S > 0$.

Từ $n \le a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n - S$, ta được $S \le n$,

và từ $n^2 \le a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2 - x_i)^2 =$

$$= 4n - 4S + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 4n - 4S + S^2 = 4n - 4 + (S-2)^2,$$

ta được $(S-2)^2 > (n-2)^2$.

Khi $S \ge 2, (S-2)^2 > (n-2)^2$ thì $S > n$, điều này mâu thuẫn $S \le n$.

Khi $S < 2, (S-2)^2 > (n-2)^2$ thì $2 - S > n - 2$, và do đó $S < 4 - n \le 0$, điều này mâu thuẫn $S > 0$. Vậy $\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \ge 2$.

Bài toán 18. 36:

Cho x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các số nguyên dương thoả:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 > 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 > 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2000 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $(x_1 + x_3)^{x_2+x_4}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = y_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = y_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = y_4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = y_5 \end{cases}$

Từ giả thiết suy ra: $y_i \in Z^+$, $\forall i = \overline{1;5}$ nên:

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2000$

Do các y_i, $i = \overline{1;5}$ cùng tính chẵn lẻ và tổng của chúng bằng 2000

$\Rightarrow y_i$, $\forall i = \overline{1;5}$ là số nguyên dương chẵn, nên:

$$x_1 + x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{2}(2000 - y_5),$$

$$x_2 + x_4 = \frac{1}{2}(2000 - y_1)$$

Nên $(x_1 + x_3)^{x_2+x_4}$ lớn nhất khi y_1 và y_5 nhỏ nhất tức là :$y_1 = y_5 = 2$

Vậy $\text{Max}(x_1 + x_3)^{x_2+x_4} = 999^{999}$ đạt được chẳng hạn khi

$x_1 = x_2 = x_5 = 2$ và $x_3 = x_4 = 997$.

Bài toán 18. 37:

Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_6 \in [0; 1]$. Tìm GTLN của biểu thức

$$F = \frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5}$$

$$+ ... + \frac{x_6^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_1^5 + 5}.$$

Hướng dẫn giải

Do $x_i \in [0; 1] \Rightarrow 1 \geq x_i \geq 0$, i = 1, 2,..., 6

$$\Rightarrow F \leq \sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^3}{\sum_{i=1}^{6} x_i^5 + 4} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^3}{\sum_{i=1}^{6} x_i^5 + 4}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$t^5 + t^5 + t^5 + 1 + 1 \geq 5\sqrt[5]{t^{15}} = 5t^3$$

$$\Rightarrow t^5 \geq \frac{5}{3}t^3 - \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} x_i^5 \geq \frac{5}{3}\sum_{i=1}^{6} x_i^3 - 6.\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} x_i^5 + 4 \geq \frac{5}{3}\sum_{i=1}^{6} x_i^3 \Rightarrow F \leq \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^3}{\sum_{i=1}^{6} x_i^5 + 4} \leq \frac{3}{5}$$

Vậy max $F = \frac{3}{5}$ khi $x_1 = x_2 = ... = x_6 = 1$.

Bài toán 18. 38:

Cho $k_1, k_2,..., k_{304}$ là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện:

$$k_1^3 + k_2^3 + ... + k_{304}^3 \leq 2003.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $k_1 + k_2 + ... + k_{304}$.

Hướng dẫn giải

Rõ ràng giá trị lớn nhất này tồn tại. Gọi A là giá trị lớn nhất đó. Xét tất cả các bộ số thoả điều kiện

$$k_1^3 + k_2^3 + ... + k_{304}^3 \leq 2003 \text{ và } k_1 + k_2 + ... + k_{304} = A.$$

Trong các bộ số như vậy, giả sử $k_1, k_2, .., k_{304}$ là bộ số có tổng $k_1^3 + k_2^3 + ... + k_{304}^3$ nhỏ nhất.

Ta chứng minh khi đó $k_i \leq 2$ với mọi i = 1, 2,..., 304. Thật vậy, giả sử tồn tại i sao cho $k_i \geq 3$, chẳng hạn $k_1 \geq 3$ thì do trong các số k_j còn lại chắc chắn có ít nhất 1 số 1 (nếu không $k_1^3 + k_2^3 + ... + k_{304}^3 \geq 8.304 = 2432 > 2003$) nên nếu ta thay cặp $(k_1, 1)$ bằng cặp $(k_1 - 1, 2)$ thì được bộ mới có tổng bằng A không đổi nhưng tổng lập phương sẽ nhỏ hơn vì $(k_1 - 1)^3 + 2 + < k_1^3 + 1^3$.

Điều này mâu thuẫn với cách chọn bộ k_i. Vậy $k_i \leq 2$.

Gọi k là số các số 2 và 304 – k là số các số 1 thì ta có $8k + 304 - k \le 2003$ suy ra $k \le 242$. Từ đó $A = 2k + 304 - k = k + 304 \le 546$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 546 đạt được với 242 số 2 và 62 số 1.

Bài toán 18. 39:

Cho các số thực không âm $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2003}$ thoả các điều kiện:

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2003} = 2$ và $a_1a_2 + a_2a_3 + ... a_{2002}a_{2003} + a_{2003}a_1 = 1$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của :

$$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_{2003}^2.$$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng a_{2003} là $\min\{a_i\}$ và $a_1 > 0$

$4 = (a_1 + a_2 + ... + a_{2003})^2 \ge (a_1 + a_2 + ... + a_{2003})^2$

$- (a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_{2003})^2$

$= 4(a_1 + a_3 + ... + a_{2003})(a_2 + a_4 + ... + a_{2002})$

$\ge 4(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{2002}a_{2003}) + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + ... + a_{2000}a_{2003})$

$+ 4a_1(a_6 + a_8 + ... + a_{2002})$

$= 4(1 - a_{2003}a_1) + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + ... + a_{2000}a_{2003})$

$+ 4a_1(a_6 + a_8 + ... + a_{2002})$

≥ 4

Dấu bằng đồng thời xảy ra:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + ... + a_{2003} = a_2 + a_4 + ... + a_{2002} = 1 \\ a_1a_4 = a_2a_5 = ... = a_{2000}a_{a002} = 0 \\ a_6a_8 + ... + a_{2002} = a_{2003} \end{cases}$$

Vì $a_1 > 0$ nên $a_4 = 0$. Vì $a_{2003} = \min\{a_i\}$ nên $a_{2003} = 0$

Do đó $a_6 = a_8 = ... = a_{2002} = 0 \Rightarrow a_2 = 1$ và $a_1 + a_3 = 1$

nên $a_4 + a_5 + ... + a_{2003} = 0$

Suy ra $a_4 = a_5 = ... = a_{2003}$. Do đó:

$$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + 1 + (1 - a_1)^2 = 2\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

Vậy $S_{max} = 2$ khi $a_1 = 1$ và $S_{min} = \frac{3}{2}$ khi $a_1 = \frac{1}{2}$.

Bài toán 18. 40:

Cho a, b, c là các số không âm: $a + b + c = 1$. Tìm số k lớn nhất sao cho

$a^3 + b^3 + c^3 + kabc \ge \frac{1}{9} + \frac{k}{27}$ đúng với mọi a, b, c thoả điều kiện trên.

Hướng dẫn giải

Chọn $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$ ta có $k \le \frac{15}{4}$, ta chứng minh rằng $\max k = \frac{15}{4}$, tức là ta chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 + \frac{15}{4}abc \ge \frac{1}{4}$.

Xét 3 số $(a + c - b)$; $(a + b - c)$; $(b + c - a)$ có nhiều nhất 1 số âm (vì tổng 2 số tuỳ ý đều không âm).

Nếu có 1 số âm thì $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) < 0 < abc$.

Nếu cả 3 số đều dương ta dễ dàng chứng minh

$$(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \le abc$$

Do đó: $(1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) \le abc$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} - 3(ab + bc + ca) + \frac{27}{4}abc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^3 - 3(ab + bc + ca)(a + b + c) + \frac{27}{4}abc \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + \frac{27}{4}abc \ge \frac{1}{4}$$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + . \frac{15}{4}abc \ge \frac{1}{4}$:đúng. Vậy $\max k = \frac{15}{4}$.

Bài toán 18. 41:

Cho n là một số nguyên dương cố định, $n \ge 2$.

Hãy tìm hằng số C bé nhất sao cho ta có:

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C\left(\sum x_i\right)^4$$ với mọi số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$.

Hướng dẫn giải

Cho $x_1 = x_2 = 1$ và $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$ thì $C \ge \frac{1}{8}$

Mặt khác, với mọi số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ ta có

$$\left(\sum x_i\right)^4 = \left(\sum x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_i\right)^2$$

$$\ge 4\left(\sum x_i^2\right)\left(2\sum_{i<j} x_i x_i\right) = 8\sum_{i<j}\left(x_i x_j \sum x_k^2\right)$$

$\geq 8\sum_{i<j} x_i x_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) \Rightarrow C \geq \frac{1}{8}$. Vậy $\min C = \frac{1}{8}$.

Bài toán 18. 42:

Hãy xác định số thực lớn nhất M sao cho bất đẳng thức sau

$$\left|ab\left(a^2 - b^2\right) + bc\left(b^2 - c^2\right) + ca\left(c^2 - a^2\right)\right| \leq M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

đúng với mọi số thực a, b và c.

Hướng dẫn giải

Phân tích thừa số ở vế trái ta nhận được

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Đặt $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ và $s = a + b + c$.

Khi đó bất đẳng thức đã cho trở thành

$$|xyzs| \leq \frac{M}{9}\left(x^2 + y^2 + z^2 + s^2\right)^2.$$

Do tính chất $x + y + z = 0$ và hai trong số x, y, z có cùng dấu, nên ta có thể giả sử hai số đó là x, y.

Vì vậy bằng cách đặt trung bình cộng của chúng để thay thế cho việc thực hiện bất đẳng thức ngặt (vế trái nhận giá trị lớn nhất và vế phải nhận giá trị nhỏ nhất).

Giả sử rằng $x = y$ và do đó $z = -2x$, bất đẳng thức trở thành

$$\left|2x^3 z\right| \leq \frac{M}{9}\left(s^2 + 6x^2\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM đối với các số $s^2, 2x^2, 2x^2, 2x^2$, ta được

$$\left(s^2 + 6x^2\right)^2 \geq 16\sqrt{8s^2x^6} = 32\sqrt{2}sx^3.$$

Từ đó suy ra $\max M = \frac{9}{16\sqrt{2}}$.

Bài toán 18. 43: Cho 2 số thực x, y thay đổi sao cho

$$2x(1 - x) \geq y(y - 1).$$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = x - y + 3xy$.

Hướng dẫn giải

Ta có $2x(1 - x) \geq y(y - 1) \Rightarrow 2x - 2x^2 \geq y^2 - y$

$\Rightarrow 2x + y \geq 2x^2 + y^2$

$\Rightarrow 2x + y = \frac{1}{3}(2 + 1)(2x^2 + y^2) \geq \frac{1}{3}(2x + y)^2$

Do đó $(2x + y)^2 - 3(2x + y) \le 0$

Nên $0 \le 2x + y \le 3$

Mặt khác $2x(1 - x) \ge y(y - 1) \Rightarrow 2x - 2x^2 \ge y^2 - y$

$\Rightarrow 2x - x^2 \ge x^2 + y^2 - y \ge 2xy - y$

Do đó $2x - x^2 - 1 \ge 2xy - y - 1 \Rightarrow -(x - 1)^2 \ge 2xy - y - 1$

Nên $2xy - y - 1 \le 0 \Rightarrow 2xy \le y + 1$.

$$P = x - y + 3xy \le x - y + \frac{3}{2}(1+y) = \frac{2x + y + 3}{2} \le 3.$$

Dấu bằng khi $x = y = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = x - y + 3xy$ bằng 3.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 18. 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của: $S = |x| + \left|\frac{2x - 1}{x + 3}\right|$

Hướng dẫn

Chặn giá trị $x = 0$ thì $S = \frac{1}{3}$ nên chỉ xét trường hợp $|x| \le \frac{1}{3}$.

Kết quả $\min S = \frac{1}{2}$

Bài tập 18. 2: Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $T = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

Hướng dẫn

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \le 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) = 8$. Kết quả $\max T = 8$

Bài tập 18. 3: Cho năm số thực a; b; c; d, e thuộc đoạn [0; 1].
Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{a}{1 + bcde} + \frac{b}{1 + cdea} + \frac{c}{1 + deab} + \frac{d}{1 + eabc} + \frac{e}{1 + abcd}.$$

Hướng dẫn

Không mất tính tổng quát giả sử $a \le b \le c \le d \le e$.

Ta có $P = \frac{a}{1 + bcde} + \frac{b}{1 + cdea} + \frac{c}{1 + deab} + \frac{d}{1 + eabc} + \frac{e}{1 + abcd}$

nên $P \le \frac{a}{1 + abcde} + \frac{b}{1 + abcde} + \frac{c}{1 + abcde} + \frac{d}{1 + abcde} + \frac{e}{1 + abcde}$

$= \dfrac{a+b+c+d+e}{1+abcde}$.

Kết quả max P = 4.

Bài tập 18. 4: Cho 2 số số x, y thỏa mãn $\begin{cases} x+y \le 2 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $T = x^2 + y^2 - xy$.

Hướng dẫn

Hệ $\begin{cases} x+y \le 2 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-a \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$ với $a \ge 0$.

Kết quả min T = 1 khi x =1,y =1 hoặc x = –1,y =– 1.

max T = 9 khi $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$.

Bài tập 18. 5: Cho a, b, c ≥ 0 thỏa ab + bc + ca = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}$.

Hướng dẫn

Dồn biến. Kết quả min $T = \dfrac{5}{2}$ khi a =b= 1, c = 0 và các hoán vị

Bài tập 18. 6: Cho a, b, c là các số dương thoả mãn a + b + c = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{11a+9b}{9a(a+b)} + \dfrac{11b+9c}{9b(b+c)} + \dfrac{11c+9a}{9c(c+a)}$.

Hướng dẫn

Tách số và dùng AM – GM.

Kết quả min P = 10 khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Bài tập 18. 7: Cho 30 số $x_1, x_2, ..., x_{30}$ nguyên dương thoả $\sum_{j=1}^{30} x_j = 2020$.

Đặt $P = \prod_{i=1}^{30} x_i$. Tìm minP và maxP.

Hướng dẫn

Dùng AM – GM và làm trội

Bài tập 18. 8: Cho x, y, z ∈ [–1; 1] và x + y + z = 0 . Tìm GTNN

$$S = \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y^2+z^2} + \sqrt{1+z+x^2}$$

Hướng dẫn

Để ý với a.b ≥ 0, a + b ≥ –1 thì: $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \ge 1 + \sqrt{1+a+b}$

Kết quả minS = 3

Bài tập 18. 9: Cho a, b, c là 3 số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{a^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{2c^2 + (a+b)^2}.$$

Hướng dẫn

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi a = b =c >0. Ta chứng minh $P \le \frac{2}{3}$.

Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: a + b + c = 1 và dùng đánh giá bậc nhất.

Bài tập 18. 10: Cho x, y, z ∈ [1; 2]. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Hướng dẫn

Giả sử $1 \le x \le y \le z \le 2$ thì $\begin{cases} (1-\frac{x}{y})(1-\frac{y}{z}) \ge 0 \\ (1-\frac{y}{x})(1-\frac{z}{y}) \ge 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{1}{2} \le t \le 2 \Rightarrow t + \frac{1}{t} \le \frac{5}{2}$

Kết quả maxP = 10

Bài tập 18. 11: Tìm các số thực a và b thoả mãn các điều kiện sau:

$$a < b \le 2000.2001 \text{ và } (x + y + z - 2000.2001)^2 \le \frac{xyz}{500.2001}$$

với mọi x, y, z ∈ [a; b] và (b – a) đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Đưa về bài toán, tìm a_1, b_1 sao cho:

$(x_1+y_1+z_1-4)^2 \le x_1.y_1.z_1$, $\forall x_1, y_1, z_1 \in [a_1, b_1]$ mà $b_1 - a_1$ max

Bài tập 18. 12: Cho n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả:

$$\frac{1}{a + a_2} + \frac{2}{2 + a_2} + \ldots + \frac{n}{n + a_n} \ge n - 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của tích $P_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$

Hướng dẫn

Tách số hạng và dùng AM–GM. Kết quả max $P_n = \frac{n!}{(n-1)^n}$

Chuyên đề 19: ĐA THỨC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Định nghĩa đa thức:

XF Cho hàm số f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ta gọi f là đa thức nếu: $f \equiv$ const (hằng số) hoặc tồn tại $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 1$ và các số thực $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ với $a_0 \neq 0$ sao cho: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ hay $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$

Các số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gọi là các hệ số, $a_0 \neq 0$ là hệ số cao nhất, a_n là hệ số tự do.

Khi $a_0 = 1$ thì đa thức gọi là đa thức chuẩn tắc hay mônic

Với $a_0 \neq 0$ thì n gọi là bậc của đa thức f(x), ký hiệu deg f = n.

Khi $f \equiv$ const thì deg f = 0. Có khi ta viết ngược lại:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,\ b_n \neq 0.$$

Nếu các hệ số $a_i \in \mathbf{R}$ thì kí hiệu $f \in \mathbf{R}[x]$

Nếu các hệ số $a_i \in \mathbf{Q}$ thì kí hiệu $f \in \mathbf{Q}[x]$

Nếu các hệ số $a_i \in \mathbf{Z}$ thì kí hiệu $f \in \mathbf{Z}[x]$.

Cho $f, g \in \mathbf{R}[x]$ và deg f = n, deg g = m thì:

$\deg(f \pm g) \leq \max\{m;n\}$, $\deg f.g = n + m$, $\deg f_0 g = n.m$.

Đa thức sai phán:

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$, deg f = n thì đa thức sai phân:

$$\Delta f = f(x+1) - f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x+1)^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left[(x+1)^{n-i} - x^{n-i} \right]$$

có bậc là n–1 và hệ số cao nhất là na_0.

Từ đó ta có dãy đa thức sai phân giảm dần 1 bậc $\Delta^k f$.

Đa thức CHEBYSHEV:

$T_n(x)$ xác định như sau:

$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \geq 1$.

Cụ thể: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$,

$T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$,

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$, ...

Đa thức Chebyshev (Trêbưsep) $T_n(x)$ có bậc n và có hệ số cao nhất 2^{n-1}.

Đôi khi ta chỉ xét $n \geq 1$ trở đi.

Kết quả: $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$, $|T_n(x)| \le 1$, $\forall x \in [-1,1]$, $|T_n(x)| = 1$ có đúng n nghiệm phân biệt trên [−1,1] là $x = \cos k\frac{\pi}{n}$, k = 0,1, ..., n−1.

Ước và bội:

Cho 2 đa thức f, g ∈ R[x] thì tồn tại cặp đa thức q(x) và r(x) duy nhất thuộc R[x]:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ với: } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Ta gọi q(x) và r(x) lần lượt là thương và dư trong phép chia f(x) cho g(x). Nếu r(x) = 0 thì ta nói f(x) chia hết cho g(x), hay g(x) chia hết f(x) hay f(x) là bội của g(x) hay g(x) là ước của f(x) ta kí hiệu f ⋮ g hay g | f.

Ước chung lớn nhất:

Một đa thức d(x) chia hết hai đa thức f(x) và g(x) gọi là ước chung của f(x) và g(x). Nếu d(x) là một ước chung chia hết cho mọi ước chung khác của 2 đa thức f(x) và g(x) đúng thì ta gọi d(x) là ước chung lớn nhất của f(x) và g(x).

Rõ ràng các ước chung lớn nhất sai khác hằng số, để bảo dảm tính duy nhất ta có thể quy ước chọn ước chung lớn nhất dạng chuẩn tắc (hệ số cao nhất bằng 1). Viết tắt UCLN, kí hiệu:

$$d(x) = UCLN(f(x), g(x)) = (f(x), g(x)) = \gcd(f(x), g(x))$$

Định lí BEZOUT: α là một nghiệm của đa thức f(x) khi và chỉ khi f(x) chia hết cho x − α.

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) + f(\alpha) \text{ với dư } r = f(\alpha).$$

Nghiệm của đa thức:

Cho f ∈ R[x] và số α ∈ R .Ta gọi α là một nghiệm thực của f nếu f(α) = 0. Ta gọi α là nghiệm bội k của f(x) nếu f(x) chia hết cho $(x-\alpha)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$.

- Mỗi đa thức thực bậc n đều có không quá n nghiệm thực.
- Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không f ≡ 0.
- Nếu đa thức có bậc ≤ n và có quá n nghiệm là đa thức không.
- Nếu đa thức có bậc ≤ n và nhận n+1 giá trị như nhau tại n+1 điểm khác nhau của biến là đa thức hằng: f ≡ C.
- Hai đa thức có bậc ≤ n và nhận n+1 giá trị như nhau tại n+1 điểm khác nhau của biến thì đồng nhất nhau: f ≡ g.

Nghiệm hữu tỷ, nghiệm nguyên

Cho f ∈ Z[x], deg f = n, $a_i \in Z$

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Nghiệm hữu tỷ nếu có $x = \frac{p}{q}$ với (p,q) = 1 thì p là ước của hệ số tự do và q là ước của hệ số cao nhất: $p \mid a_n$, $q \mid a_0$.

Nếu $a_0 = 1$ thì các nghiệm hữu tỉ nếu có của f(x) đều là nghiệm nguyên với f(x) là đa thức hệ số nguyên.

Phân tích nhân tử theo các nghiệm.

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$ có nghiệm $x_1, x_2, ..., x_m$ với bội tương ứng $k_1, k_2, ... k_m$ thì tồn tại $g \in \mathbf{R}[x]$

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1}.(x - x_2)^{k_2}...(x - x_m)^{k_m}.g(x)$$

hay $f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)^{k_i} g(x)$ với $\sum_{i=1}^{m} k_i \le n$

với g(x) là tích các tam thức bậc hai vô nghiệm.

Nếu f bậc n có đủ n nghiệm phân biệt hay trùng nhau thì:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2) ... (x - x_n) = A.\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Khai triển ABEL:

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$, deg f = n và n số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$ khi đó tồn tại bộ n+1 số thực duy nhất $b_0, b_1, ..., b_n$ sao cho:

$$f(x) = b_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) ... (x - \alpha_n) + b_1(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) ... (x - \alpha_{n-1}) + ... + b_{n+1}(x - \alpha_1) + b_n$$

Đặc biệt nếu $f \in \mathbf{Z}[x]$ và $\alpha_i \in \mathbf{Z}$ thì $b_i \in \mathbf{Z}$.

Khai triển theo x – a:

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$ và deg f = n. $\forall a \in \mathbf{R}$ ta có khai triển theo x – a:

$$f(x) = c_0(x - a)^n + c_1(x-a)^{n-1} + ... + c_{n-1}(x-a) + c_n$$

với bộ n+1 số $c_0, c_1, ..., c_n$ duy nhất thuộc **R**.

Định lý Viete

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, deg f = n.

Nếu f có n nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ (phân biệt hay trùng nhau) thì:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_0},\ x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}.x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}, ...$$

$$x_1x_2 ... x_n = (-1)^n . \frac{a_n}{a_0}.$$

Ngược lại,nếu n số $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ có tổng các tích chập k của n số x_i là S_k thì $x_1, x_2, ..., x_n$ là nghiệm nếu có của phương trình:

$$X^n - S_1X^{n-1} + S_2X^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}.S_{n-1}X + (-1)^n . S_n = 0$$

Công thức nội suy LAGRANGE:

Cho $f \in \mathbf{R}[x]$, deg f = n. Với n+1 số bất kì $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ thì:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\alpha_i) \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n+1} \frac{x - \alpha_j}{x_i - \alpha_j}$$

Khả qui và bất khả qui:

Ta nói f bất khả qui trong $\mathbf{Z}[x]$ khi $f \in \mathbf{Z}[x]$ và f không phân tích được thành tích 2 đa thức hệ nguyên có bậc ≥ 1. Tương tự cho $\mathbf{Q}[x]$.

– **Định lí:** Cho $f \in \mathbf{Z}[x]$, deg f = n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Nếu có số nguyên tố p thoả mãn 3 điều kiện với $0 \leq k < n$:

(1) a_0 không chia hết cho p.

(2) $a_{n-k}, a_{n-k+1}, ..., a_n$ chia hết cho p

(3) a_n không chia hết cho p^2

và nếu f được viết dưới dạng tích 2 đa thức thuộc $\mathbf{Z}[x]$

thì có ít nhất 1 đa thức có bậc $\geq k+1$.

Khi k = n–1 ta có tiêu chuẩn EISENSTEIN (Âyđăngxtan):

Cho $f \in \mathbf{Z}[x]$, deg f = n, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$

Nếu có số nguyên tố p thoả mãn 3 điều kiện:

(1) a_0 không chia hết cho p

(2) $a_1, a_2, ..., a_n$ chia hết cho p

(3) a_n không chia hết cho p^2

thì f bất khả qui trên $\mathbf{Q}[x]$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 19. 1:

Xác định đa thức f(x) hệ số thực:

a) deg f = 2 và f(x) – f(x–1) = x với mọi x.

b) $(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2 = (x^2 + 4) f(x)$ với mọi x.

Hướng dẫn giải

a) Vì deg f = 2 nên $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Thế vào f(x) – f(x – 1) = x rồi đồng nhất hệ số

$\Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$. Vậy $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$, c tùy ý..

b) Vì deg của vế trái là bậc 4 nên deg f = 2

Do đó $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Hơn nữa hệ số cao nhất của vế trái bằng 1 nên $a = 1$.

Suy ra $f(x) = x^2 + bx + c$. Ta khai triển đồng nhất:

$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = (x^2 + 4)(x^2 + bx + c)$

$= x^4 + bx^3 + (4 + c)x^2 + 4bx + 4c$

Do đó $\begin{cases} b = -2 \\ 4 + c = 6 \\ 4b = -8 \\ 4c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$

Vậy: $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

Bài toán 19. 2:

Xác định đa thức $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sao cho:

$P(Q(x)) = Q(P(x))$ (1) với $P(x) = x^2 - \alpha$.

Hướng dẫn giải

Từ (1) $\Rightarrow (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 - \alpha$

$= (x^2 - \alpha)^3 + a(x^2 - \alpha)^2 + b(x^2 - \alpha) + c$ (2)

Đồng nhất hệ số ta được: $2a = 0$ và $2c = 0$ nên $a = c = 0$

Nên $Q(x) = x^3 + bx$.

Khi đó (2) trở thành: $(x^3 + bx)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + b(x^2 - \alpha)$

Đồng nhất hệ số ta được:

$2b = -3\alpha$, $b^2 = 3\alpha^2 - b$ và $\alpha = \alpha^3 + b\alpha$

$\Rightarrow \alpha(2\alpha^2 - 3\alpha - 2) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0, \alpha = 2, \alpha = -\frac{1}{2}$

Khi $\alpha = 0 \Rightarrow Q(x) = x^3$, khi $\alpha = 2 \Rightarrow Q(x) = x^3 - 3x$

Khi $\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ không tồn tại $Q(x)$.

Vậy $Q(x) = x^3$, $Q(x) = x^3 - 3x$.

Bài toán 19. 3:

Xác định hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ hệ số thực:

$P(Q(x)) = P(x).Q(x)$ với mọi x.

Hướng dẫn giải

Nếu $P(x) \equiv 0$ thì $Q(x)$ là đa thức bất kỳ.

Nếu $P(x)$ không $\equiv 0$, gọi deg P = n và deg Q = m

Ta có $P(Q(x)) = P(x).Q(x)$

Nên $n.m = n + m \Leftrightarrow (n - 1)(m - 1) = 1$.

Do đó n = m = 0 hay n = m = 2.

Xét n = m = 0 thì P(x) = C $\neq$ 0 và Q(x) =1

Xét n = m = 2 thì

$P(x) = ax^2 + bx + c$ và $Q(x) = dx^2 + ex + f$ với a, d $\neq$ 0

Thế vào đề bài và đồng nhất được

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$ Nên $P(x) = ax^2$ và $Q(x) = x^2$ với a $\neq$ 0.

Thử lại đúng. Vậy các đa thức cần tìm:

P(x) =0 và Q(x) là đa thức bất kỳ.

P(x) = C $\neq$ 0 và Q(x) =1

$P(x) = ax^2$ và $Q(x) = x^2$ với a $\neq$ 0.

Bài toán 19. 4:

Cho đa thức bậc hai $f(x) = x^2 + px + q$. Xác định đa thức bâc 4 g(x) chuẩn tắc (hệ số cao nhất bằng 1) thỏa mãn: f(g(x)) = g(f(x)).

Hướng dẫn giải

Xét g(x) = f(f(x)) thì g(x) thỏa mãn đề bài.

Ta chứng minh đa thức đó là duy nhất.

Giả sử có đa thức h(x) thỏa đề bài f(h(x)) = h(f(x))

Đặt p(x) = f(f(x)) – h(x) thì deg p < 4 (cùng hệ số cao nhất).

$\Rightarrow$ p(f(x)) = f(f(f(x))) – h(f(x)) = f(f(f(x))) – f(h(x))

$= [f(f(x))]^2 + p.f(f(x)) + q – (h(x))^2 – ph(x) – q$

$= [f(f(x))^2 – (h(x))^2] + p[(f(f(x))) – h(x)]$

= p(x) . [f(f(x)) + h(x) + p]

$\Rightarrow$ deg p . deg f = deg p + 4 nên deg p = 4: vô lý

Vậy: g(x) = f(f(x))

$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + p + 2q)x^2 + p(2q + p)x + q(p + q + 1)$.

Bài toán 19. 5:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực thoả mãn mỗi điều kiện:

a) P(x) $\equiv$ P(x +1) b) xP(x – 1) $\equiv$ (x – 2) P(x).

Hướng dẫn giải

a) Ta có P(x) $\equiv$ P(x +1) nên P(0) = P(1) =P(2) = ...

Do đó đa thức Q(x) = P(x) – P(0) có vô số nghiệm nên

Q(x) $\equiv$ 0 hay P(x) = P(0) hằng số. Thử lại đúng.

Vậy P(x) = C hằng số .

Tổng quát:

Nếu đa thức P(x) thoả mãn: $P(x) \equiv P(x+a)$ với $a \neq 0$ thì P(x) = C hằng số.

b) Thay vào đồng nhất thức $xP(x-1) \equiv (x-2)P(x)$ các giá trị x = 0, x = 2 thì x = 0; 1 là các nghiệm của P(x)

Suy ra: $P(x) = x(x-1).Q(x) = (x^2 - x)Q(x)$

Thay vào đồng nhất thức có: $Q(x) = Q(x-1)$

Từ đó: $Q(0) = Q(-1) = Q(-2) = ... \Rightarrow Q(x) = C$ (hằng số)

Nên $P(x) = C(x^2 - x)$. Thử lại đúng.

Vậy $P(x) = C(x^2 - x)$.

Bài toán 19. 6:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực thoả mãn mỗi điều kiện:

a) $P(x+1) \equiv P(x) + 2x + 1$.

b) $P((x+1)^2) \equiv P(x^2) + 2x + 1$.

Hướng dẫn giải

a) Để ý công thức sai phân $\Delta x = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$

Nên $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$

$\Rightarrow$ $P(x+1) - (x+1)^2 = P(x) - x^2$

Xét $Q(x) = P(x) - x^2$ thì $Q(x+1) = Q(x)$

Đặc biệt $Q(0) = Q(1) = Q(2) = ...$

Nên Q(x) = C. Thử lại đúng. Vậy $P(x) = x^2 + C$.

b) Ta có: $P((x+1)^2) = P(x^2) + 2x + 1$

$\Leftrightarrow$ $P((x+1)^2) - (x+1)^2 = P(x^2) - x^2$

Giải tương tự cho $Q(x) = P(x) - x$ thì $Q(x) \equiv C$.

Thử lại đúng. Vậy $P(x) = x + C$.

Bài toán 19. 7:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực trong các trường hợp sau:

a) $P(x^2) = [P(x)]^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$ b) $P(x^2 - 2x) = [P(x-2)]^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử đa thức cần tìm có dạng

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$

Giả thiết rằng một trong các hệ số $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ khác 0. Ta gọi số k lớn nhất $(k < n)$ sao cho $a_k \neq 0$. Khi đó ta có:

$$P(x^2) = a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + ... + a_1 x^2 + a_0$$
$$= (a_n x^n + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0)^2 \equiv [P(x)]^2$$

Cân bằng các hệ số của x^{n+k} ta nhận được: $0 = 2a_n a_k$.

Điều này trái với giả thiết $a_k \neq 0$.

Suy ra: $a_{n-1} = a_{n-2} = ... = a_1 = a_0 = 0$. Vậy: $P(x) = a_n x^n$

Từ điều kiện: $a_n x^{2n} = P(x^2) = [P(x)]^2 = a_n^2 x^{2n}$

Ta nhận được: $a_n = 1$. Thử lại đúng

Vậy: $P(x) = x^n$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

b) Đặt: $y = x - 1$, $Q(y) = P(y - 1)$

Khi đó: $[P(x - 2)]^2 = [P(y - 1)]^2 = [Q(y)]^2$

$P(x^2 - 2x) = P(y^2 - 1) = Q(y^2)$

Nên $P(x^2 - 2x) = [P(x - 2)]^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$Q(y^2) = [Q(y)]^2$, $y \in \mathbb{R}$

Do đó, theo câu a) thì $Q(y) = y^n$ hay $P(y) = (y + 1)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Vậy: $P(x) = (x + 1)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 19. 8:

Xác định đa thức hệ số thực P(x) thoả mãn:

a) $P(x^2) \equiv P(x) \cdot P(x - 1)$.

b) $P(x) \cdot P(y) \equiv P^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - P^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$ (1)

Hướng dẫn giải

a) Nếu $\deg P = 0 \Rightarrow P(x) \equiv 0$ hay $P(x) \equiv 1$ thoả đề bài:

Nếu $\deg P \geq 1$. Ta thấy nếu α là một nghiệm thực của P(x) thì $(\alpha + 1)^2$ cũng là một nghiệm của nó, nên P(x) không có nghiệm thực.

Do đó P(x) bậc chẵn $\Rightarrow \deg P = 2k$, $k \in \mathbb{N}^+$.

Từ: $P(x^2) \equiv P(x)\, P(x-1)$

$\Rightarrow$ Hệ số ở bậc 2k của P(x) bằng 1.

Đặt: $Q(x) = P(x) - (x^2 + x + 1)^k \Rightarrow \deg Q \leq 2k-1$.

và $Q(x^2) = P(x) \cdot P(x - 1) - (x^4 + x^2 + 1)^k$

$= [Q(x) + (x^2 + x + 1)^k]\,[Q(x-1) + (x^2 - x + 1)^k] - (x^4 + x^2 + 1)^k$.

$= Q(x)\, Q(x - 1) + Q(x)\, (x^2 - x + 1)^k + Q(x - 1)\, (x^2 + x + 1)^k$.

Giả sử: $\deg Q = q \geq 1$ với $q \leq 2k-1$ thì:

$\deg [Q(x^2) - Q(x)\, Q(x - 1)] \leq 2q \leq q + 2k - 1$.

$\deg [Q(x)\, (x^2 - x + 1)^k + Q(x - 1)\, (x^2 + x + 1)^k] = q + 2k$: vô lý.

Do đó: $\deg Q = 0 \Rightarrow Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = (x^2 + x + 1)^k$

Lúc đó:

$P(x^2) = (x^4 + x^2 + 1)^k = (x^2 + x + 1)^k\, (x^2 - x + 1)^k = P(x).P(x-1)$.

Vậy đa thức cần tìm là: $P(x) \equiv 0$ hoặc $P(x) = (x^2 + x + 1)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Ta có: $P(x) \equiv 0$ thỏa mãn bài tóan. Xét $P(x) \neq 0$.

Thay $x = 0, y = 0$ vào (1) thì $P(0) = 0$

Thay $y = 3x$ thì (1) trở thành:

$P(x) . P(3x) = P^2(2x) - P^2(-x)$

Hay $P(x) . P(3x) + P^2(-x) = P^2(2x), \forall x \in \mathbf{R}$ (2)

Nếu $P(x) = c, \forall x$ $(c \neq 0)$: không thỏa mãn (2).

Nếu deg $P(x) = n \geq 1$.Gọi hệ số cao nhất của $P(x)$ là a_0 $(a_0 \neq 0)$, thì từ (2):

$$a_0 (3^n a_0) + a_0^2 = (2^n a_0)^2 \Leftrightarrow 3^n + 1 = 4^n \Leftrightarrow n = 1$$

Do đó: $P(x) = a_0.x, a_0 \in \mathbf{R}; a_0 \neq 0$

Thử lại đa thức bậc nhất tuyến tính này thỏa mãn.

Vậy: $P(x) = ax, a \in \mathbf{R}$.

Bài toán 19. 9:

Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện:

$$P(u^2 - v^2) = P(u + v) . P(u - v), \forall u, v \in \mathbf{R}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $P(u^2 - v^2) = P(u + v) . P(u - v), \forall u, v \in \mathbf{R}$

Nên dễ thấy điều kiện bài toán tương ứng với:

$$P(xy) = P(x) . P(y) \text{ với } \forall x,y \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Trong (1) cho $x = y = 0$ ta được: $P(0) = P^2(0)$

$\Rightarrow$ hoặc $P(0) = 1$ hoặc $P(0) = 0$

1) Nếu $P(0) = 1$, trong (1) cho $y = 0$ ta được $P(0) = P(x) . P(0)$

Vậy $P(x) = 1, \forall x \in R$.

2) Nếu $P(0) = 0$ thì $P(x) = x Q_1(x)$ với $Q_1(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của $P(x)$ một đơn vị.

Điều kiện (1) trở thành: $xy Q(xy) = x Q(x) y Q(y)$

mà điều này đúng với mọi $x,y \in R$ nên ta phải có:

$Q(xy) = Q(x) . Q(y), \forall x,y \in R$.

Vậy hoặc $Q(x) = 1, \forall x \in R$ hoặc $Q(x) = xQ_1(x)$ với $Q_1(x)$ là 1 đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ một đơn vị.

Tiếp tục quá trình lập luận này ta có: hoặc $P(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$ hoặc $P(x) = x^n$, với n là một số nguyên dương thoả đề bài.

Bài toán 19. 10:

Cho 2 số a và b, $a \neq 0$. Đa thức $P(x)$ thoả mãn:

$$x . P(x - a) = (x - b) P(x) \text{ với mọi } x.$$

a) Chứng minh nếu $\frac{b}{a}$ không nguyên dương thì $P(x) \equiv 0$.

b) Giả sử $\frac{b}{a} = n$ nguyên dương. Xác định P(x).

Hướng dẫn giải

a) Nếu $P(x) \equiv 0$, thì rõ ràng P(x) thoả mãn hệ thức:

$$x\,P(x-a) = (x-b)\,.\,P(x) \qquad (1)$$

Ta cần chứng minh : Nếu P(x) là một đa thức bậc $n \geq 1$, thoả mãn hệ thức (1), thì tỷ số $\frac{b}{a}$ phải là một số nguyên dương. Ta có:

$(1) \Leftrightarrow b.P(x) = x[P(x) - P(x-a)]$ (2)

Xét: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $(a_0 \neq 0)$ (3)

Thế thì

$$P(x-a) = a_0(x-a)^n + a_1(x-a)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x-a) + a_n$$

Do đó:

$$P(x) - P(x-a) = a_0[x^n - (x-a)^n] + a_1[x^{n-1} - (x-a)^{n-1}] + \ldots$$

Để ý rằng:

$$x^k - (x-a)^k = a[x^{k-1} + x^{k-2}(x-a) + \ldots + (x-a)^{k-1}]$$

là một đa thức bậc k–1, nên:

$$P(x) - P(x-a)$$

$= a_0[x^n - (x-a)^n] + H(x)$ với H(x) là đa thức bậc n–2

$= na_0axn^{-1} + K(x)$ với K(x) là đa thức bậc n–2 (4)

Mang các biểu thức (3) và (4) vào hệ thức (2), thì được:

$$a_0bx^n + a_1bx^{n-1} + \ldots = x[na_0ax^{n-1} + K(x)]$$

$= na_0ax^n + R(x)$ (đa thức bậc n–1)

Vì vậy : $a_0b = na_0a$ mà $a_0 \neq 0$ nên $b = na \Rightarrow \frac{b}{a}$ nguyên dương.

b) Giả sử b = na (n nguyên dương). Hệ thức (1) trở thành:

$$xP(x-a) = (x-na).\,P(x) \qquad (5)$$

Cho x = 0 thì được: $0.P(x-a) = (-na)\,P(0)$

$\Rightarrow P(0) = 0$ (vì $a \neq 0$)

Trong (5) cho x = a, thì được: $a.P(0) = -a(n-1).\,P(a) \Rightarrow P(a) = 0$

Cho x = 2a thì được:

$$2a\,P(a) = -(n-2)a\,P(2a) \Rightarrow P(2a) = 0$$

Giả sử với mọi k nguyên $0 \leq k < (n-1)$: $P(ka) = 0$

Trong (5) cho x = (k + 1)a, thì được:

$(k + 1)a\, P(ka) = -(n - k + 1)a\, P((k+1)a)$

$\Rightarrow P((k+1)a) = 0$

Phép qui nạp theo k ($0 \le k \le n - 1$) thì:

$P(0) = P(a) = P(2a) = ... = P((n-1)a) = 0$

$\Rightarrow P(x) = x(x - a)(x - 2a) ... [x - (n - 1)a] . Q(x)$

Mang biểu thức này vào (1), thì được:

$Q(x-a).x(x - a)(x - 2a) ... (x - na)$

$= x(x - a)(x - 2a) ... (x - na) . Q(x)$

Do đó $Q(x - a) = Q(x) \Rightarrow Q(x) = C$ (Hằng số)

Vậy: $P(x) = C.x(x - a) ... [x - (n - 1)a]$.

Bài toán 19. 11:

Xác định đa thức P(x) có các hệ số nguyên không âm, nhỏ hơn 6 thỏa mãn P(6) = 1994.

Hướng dẫn giải

Giả sử đa thức cần tìm có dạng: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Theo đề bài:

$P(6) = a_n 6^n + a_{n-1}6^{n-1} + ... + a_1 6 + a_0 = 1994$

Vì a_i, i = 0, 1, ..., n là các số nguyên không âm, nhỏ hơn 6 nên

$P(6) = a_n 6^n + a_{n-1}6^{n-1} + ... + a_1 6 + a_0 = \overline{a_n a_{n-1}...a_{0(6)}} = 1994$

Trong đó: $\overline{a_n a_{n-1}...a_{0(6)}}$ là biểu diễn của 1994 trong hệ đếm cơ số 6. Ta có

$1994 = 13122_{(6)}$

Nên: $\overline{a_n a_{n-1}...a_{0(6)}} = 13122$

$\Rightarrow n = 4, a_4 = 1, a_3 = 2, a_2 = 1, a_1 = a_0 = 2$

nên $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2$.Thử lại đúng.

Vậy đa thức cần tìm là: $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2$.

Bài toán 19. 12:

Xác định đa thức P(x) với hệ số nguyên thoả mãn điều kiện:

$$16P(x^2) = [P(2x)]^2 , \forall x \in \mathbf{R}.$$

Hướng dẫn giải

Giả sử P(x) là đa thức bậc n với hệ số nguyên thoả mãn bài toán

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \qquad (a_0 \ne 0)$.

Từ: $16P(x^2) = [P(2x)]^2, \forall x \in \mathbf{R}$.

Suy ra:

$16(a_0x^{2n} + a_1x^{2(n-1)} + ... + a_{n-1}x^2 + a_n) = [a_0(2x)^n + ... + a_n]^2$

$\Rightarrow 16a_0 = 4^n a_0^2 \Rightarrow a_0 = \dfrac{16}{4^n} \in \mathbf{Z}.$

Từ đó suy ra: n = 0,1,2.

i) Với n = 0: dễ thấy chỉ có 2 đa thức bậc 0 thoả mãn điều kiện bài toán là:

$P(x) = 0$ và $P(x) = 16$.

ii) Với n = 1, khi đó: $a_0 = 4 \Rightarrow P(x) = 4x + a_n$.

Từ $16P(x^2) = [P(2x)]^2, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 16(4x^2 + a_n) = (8x + a_n)^2$

$\Leftrightarrow 64x^2 + 16a_n = 64x^2 + 16x \cdot a_n + a^2{}_n$

$\Leftrightarrow 16a_n = 0$ và $a^2{}_n = 16a_n \Leftrightarrow a_n = 0$

Do đó: $P(x) = 4x, \forall x \in \mathbf{R}$

iii) Với n = 2 $\Rightarrow a_0 = 1$.Giả sử: $P(x) = x^2 + a_{n-1}x + a_n$.

Ta có: $16P(x^2) = [P(2x)]^2, \forall x \in \mathbf{R}$.

$\Leftrightarrow 16(x^4 + a_{n-1}.x^2 + a_n) = (4x^2 + 2a_{n-1} \cdot x + a_n)^2, \forall x \in \mathbf{R}$.

Suy ra: $16b = 0, 4b^2 + 8c = 16b \Leftrightarrow b = c = 0, c^2 = 16c$.

Do đó: $P(x) = x^2, \forall x \in \mathbf{R}$.

Vậy các đa thức cần tìm là:

$P(x) = 0, P(x) = 16, P(x) = 4x; P(x) = x^2$.

Bài toán 19. 13:

Xác định đa thức $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ có các hệ số nguyên sao cho các hệ số $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ là nghiệm của đa thức đó.

Hướng dẫn giải

Ta có $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ là nghiệm của đa thức nên:

$f(x) = (x - a_0)(x - a_1) ... (x - a_{n-1}), n > 1$

$\Rightarrow f(0) = (-1)^n \cdot a_0a_1...a_{n-1} = a_0$

$\Rightarrow a_1a_2 ... a_n = (-1)^n \Rightarrow |a_i| = 1$ (vì a_i nguyên).

1) Trường hợp $|a_0| = 1$ thì $f(x) = (x - 1)^p (x + 1)^q$ với p+q = n

Ta có: $(x - 1)^p (x + 1)^q = f(x)$

So sánh hệ số thì: $\begin{cases} q - p = a_{n-1} = \pm 1 \\ \dfrac{q(q-1)}{2} + \dfrac{p(p-1)}{2} - pq = a_{n-2} = \pm 1 \end{cases}$

Xét các trường hợp đưa về p+q = 3

$\Rightarrow$ p = 1, q = 2 hay p = 2, q = 1

Với p = 1, q = 2: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ (thoả)

Với p = 2, q = 1: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ (thoả)

2) Trường hợp $|a_0| \geq 2$.

Ta co: $0 = f(a_0) = \left|a_0^n + a_{n-1}a_0^{n-1} + ... + a_1a_0 + a_0\right|$

$\geq \left|a_0^n\right| - \left|a_0\right|^{n-1} - ... - \left|a_0^2\right| - \left|a_0\right|$

$= \dfrac{\left|a_0\right|(\left|a_0\right| - 2)(\left|a_0\right|^{n-1} - 1)}{\left|a_0\right| - 1} \geq 0$

dấu "=" khi $|a_0| = 2$.

Khi đó: $a_{n-1}.a_0^{n-1}$, ..., a_1a_0, a_0 cùng dấu a_0^n

$\Rightarrow a_0 = -2$, n là số chẵn và $a_i = (-1)^{i+1}$ với $i = \overline{1, n-1}$

Nếu $n > 2 \Rightarrow a_2 = -1$ và:

$0 = f(-1) = (-1)^n + (-1)^n(-1)^{n-1} + ... + (-1)^2(-1) - 2 = -n$: vô lý

Do đó $n = 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + x - 2$ (thoả)

Vậy có 3 đa thức: $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$,

$f(x) = x^2 + x - 2$.

Bài toán 19. 15:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực thoả mãn hệ thức sau

$$P(x^2) + x\left[3P(x) + P(-x)\right] = (P(x))^2 + 2x^2 \text{ với mọi x.}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $P(x^2) + x\left[3P(x) + P(-x)\right] = (P(x))^2 + 2x^2$ với mọi x. (1)

Thay x bởi – x vào (1), ta được

$$P(x^2) - x\left[3P(-x) + P(x)\right] = (P(-x))^2 + 2x^2 \text{ với mọi x.} \quad (2)$$

Trừ (1) cho (2), ta được $4x[P(x) + P(-x)] = P^2(x) - P^2(-x)$

$$\Leftrightarrow \left[P(x) + P(-x)\right]\left[P(x) - P(-x) - 4x\right] = 0 \quad (3)$$

Do (3) đúng với mọi x, nên ta phải có :

Hoặc $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với vô số các giá trị x,

hoặc $P(x) - P(-x) - 4x = 0$ đúng với vô số các giá trị x.

Vì P là đa thức nên suy ra hoặc $P(x) + P(-x) = 0$ đúng với mọi x, hoặc $P(x) - P(-x) - 4x = 0$ đúng với mọi x.

Ta xét các trường hợp :

– Trường hợp $P(x) + P(-x) \equiv 0$.

Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2)+2xP(x)=[P(x)]^2+2x^2 \Leftrightarrow P(x^2)-x^2=[P(x)-x]^2.$$

Đặt $Q(x)=P(x)-x$ thì $Q(x^2)=Q^2(x)$.

Do đó $Q(x)\equiv 0, Q(x)\equiv 1, Q(x)\equiv x^n$.

Từ đó $P(x)\equiv x, P(x)\equiv x+1, P(x)\equiv x^n+x$.

So sánh với điều kiện

$P(x)+P(-x)\equiv 0$, ta chỉ nhận các nghiệm :

$$P(x)\equiv x, P(x)\equiv x^{2k+1}+x, (k=0,1,2\ldots).$$

– Trường hợp $P(x)-P(-x)-4x\equiv 0$.

Khi đó ta có phương trình

$$P(x^2)+x[4P(x)-4x]=P^2(x)+2x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x^2)-2x^2=[P(x)-2x]^2.$$

Đặt $Q(x)=P(x)-2x$ thì $Q(x^2)=Q^2(x)$ và như thế

$$Q(x)\equiv 0, Q(x)\equiv 1, Q(x)\equiv x^n.$$

Từ đó $P(x)\equiv 2x, P(x)=2x+1, P(x)=x^n+2x$.

So sánh với điều kiện

$P(x)-P(-x)-4x=0$, ta chỉ nhận các nghiệm :

$$P(x)\equiv 2x, P(x)\equiv 2x+1, P(x)\equiv x^{2k}+2x\,(k=1,2,\ldots).$$

Vậy hai trường hợp, ta có tất cả nghiệm của (1) là các đa thức là :

$$P(x)\equiv x, P(x)\equiv x^{2k+1}+x, (k=0,1,2\ldots).$$

$$P(x)\equiv 2x, P(x)\equiv 2x+1, P(x)\equiv x^{2k}+2x\,(k=1,2,\ldots).$$

Bài toán 19. 16:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực thỏa mãn:

$$(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1)=(x^3-3x^2+3x-2)P(x) \text{ với mọi } x.$$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta tìm các nghiệm của đa thức P(x).

Từ giả thiết $(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1)=(x^3-3x^2+3x-2)P(x)$

ta có $(x+2)(x^2+x+1)P(x-1)=(x-2)(x^2-x+1)P(x)$

Từ đây chọn : $x=-2$ suy ra $P(-2)=0$,

chọn $x=-1$ suy ra $P(-1)=0$ (do $P(-2)=-9P(-1)$),

chọn x =0 suy ra P(0) = 0, chọn x =1 suy ra P(1) = 0.

Do đó $P(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)$, với Q(x) là đa thức hệ số thực.

Thay P(x) vào đẳng thức ở đề bài ta được

$$[(x+2)(x^2+x+1)](x-1)(x-2)x(x+1)Q(x-1)$$

$$= (x-2)(x^2-x+1)x(x-1)(x+2)Q(x)$$

Suy ra $(x^2+x+1)Q(x-1) = (x^2-x+1)Q(x), \forall x \neq 0,1,-1,-2,2$

$$\Leftrightarrow \frac{Q(x-1)}{x^2-x+1} = \frac{Q(x)}{x^2+x+1}, \forall x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1, x \neq 2, x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1} = \frac{Q(x)}{x^2+x+1}, \forall x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1, x \neq -2, x \neq 2$$

Đặt $R(x) = \frac{Q(x)}{x^2+x+1}$, ta có

$$R(x) = R(x-1), \forall x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1, x \neq 2, x \neq -2.$$

Suy ra $R(x) \equiv C$ (hằng số) nên $Q(x) \equiv C(x^2+x+1)$.

Do đó $P(x) = Cx(x-1)(x+1)(x+2)$ .Thử lại đúng. :

Bài toán 19. 17:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực sao cho:

$$P(xy) = P(x)P(y) \text{ với mọi số thực x, y .}$$

Hướng dẫn giải

Ta có P(xy) = P(x)P(y) với mọi số thực x, y .

Chọn x = y = 0 thì P(0) = P(0).P(0)

Do đó P(0) [P(0) – 1] = 0 nên P(0) = 1 hay P(0) = 0.

– Xét P(0) = 1.

Cho y = 0 thì P(0) = P(x).P(0) hay P(x)=1. Thử lại đúng.

– Xét P(0) = 0.

Khi đó P(x) = x.Q(x) với Q(x) là đa thức hệ số thực.

Thay P(x) = x.Q(x) vào giả thiết thì xyQ(xy) = xQ(x)yQ(y)

nên Q(xy) = Q(x)Q(y)

Như vậy thì tương tự Q(x) = 1 hay $Q(x) = xQ_1(x)$.

Tiếp tục như vậy thì được P(x) =1 hay $P(x) = x^n$ với n nguyên dương.Thử lại đúng.

Bài toán 19. 18:

Xác định đa thức $P(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thoả mãn: $(x_1-3)^3 + (x_2-3)^3 + (x_3-3)^3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $y = x - 3$. Khi đó: $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 3$, $y_3 = x_3 - 3$ là 3 nghiệm cuả đa thức:

$(y + 3)^3 - 6(y + 3)^3 + a(y + 3) + a$

$= y^3 + 3y^2 + (a - 9)y + 4a - 27$

Theo định lý Viete ta có:

$$\sum y_i = -3,\ \sum y_iy_j = a - 9,\ \prod y_i = 27 - 4a$$

và theo giả thiết $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$ .Mà:

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1+y_2+y_3)^3 - 3(y_1y_2+y_2y_3+y_2y_1)(y_1+y+y_3) + 3y_1y_2y_3$$

Từ đó, điều kiện cần và đủ cuả a là:

$0 = (-3)^3 - 3(a - 9)(-3) + 3(27 - 4a) = -27 - 3a$

$\Leftrightarrow \quad a = -9.$

Vậy $P(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 9.$

Bài toán 19. 19:

Xác định đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ hệ số nguyên sao cho có 2 trong số các nghiệm có tích bằng –1.

Hướng dẫn giải

Giả sử có 2 số nguyên a, b mà phương trình

$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ (1) có 2 nghiệm u, v với $u.v \in \mathbb{Z}$ và $u.v \neq 1$.

Để ý rằng nếu x là 1 nghiệm thì $x \neq 0$ và $\frac{1}{x}$ cũng là nghiệm.

Như vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là: u, v, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$

Theo định lý Viete ta có:

$$u + v + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{(u+v)(uv+1)}{uv} = -a \qquad (2)$$

và $$u.v + \frac{v}{u} + \frac{u}{v} + \frac{1}{u.v} + 2 = u.v + \frac{(u+v)^2 + 1}{u.v} = b \qquad (3)$$

Ta sẽ chứng minh $u.v = -1$.Giả sử $u.v \neq -1$.

Từ (2) và (3) ta suy ra u + v hữu tỉ và $(u + v)^2 \in \mathbb{Z}$ nên $(u + v) \in \mathbb{Z}$ và cả hai $(u + v)$, $(u + v)^2 + 1$ đều chia hết cho u.v.

Nhưng $[(u + v), (u + v)^2 + 1] = 1$, nên suy ra hoặc $u.v = 1$ hoặc $u.v = -1$. Điều này mâu thuẫn với $u.v \neq \pm 1$.

Vậy $u.v = -1$ và do đó $a = 0$, $b = -(u + v)^2 - 2 \leq -2$.

Ngược lại nếu $a = 0$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \leq -2$.

Phương trình (1) trở thành: $x^4 + bx^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm:

$$u = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2}},\ v = \sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}} \text{ thoả } u.v = -1 \in \mathbf{Z},\ u.v \neq 1.$$

Vậy $P(x) = x^4 + bx^2 + 1$ với $b \in \mathbf{Z}$, $b \leq -2$.

Bài toán 19. 20:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực bậc 2 nhận giá trị bằng 3; 5; –1 tại x bằng 1,2,7 tương ứng.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 7$ và $f(x_1) = 3, f(x_2) = 5, f(x_3) = -1$

Áp dụng công thức nội suy LAGRANGE với n = 2

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)(x-7) + 1(x-1)(x-7) - \frac{1}{30}(x-1)(x-2)$$

$$= f(1)\frac{(x-2)(x-7)}{(1-2)(1-7)} + f(2)\frac{(x-1)(x-7)}{(2-1)(2-7)} + f(7)\frac{(x-1)(x-2)}{(7-1)(7-2)}$$

$$= \frac{8}{15}x^2 + \frac{8}{15}x - \frac{1}{15}$$

Bài toán 19. 21:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực:

$P(x) = x^n - nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ với $n \geq 3$ có n nghiệm thực.

Hướng dẫn giải

Ta kí hiệu x_i ($i = \overline{1,n}$) là n nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^n - nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Khi đó theo định lí Viete thì:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \text{ và } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j = \frac{n^2-n}{2} \text{ (với } j \neq i)$$

nên: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j = n^2 - n^2 + n = n$

và $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i + n = n - 2n + n = 0$

Từ đó suy ra $x_i = 1$ ($i = 1,n$). Vậy đa thức $P(x) = (x-1)^n$.

Bài toán 19. 22:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực:

$P(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k a_k^k x^{n-k}$ mà các số $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ là các nghiệm của đa thức:

Hướng dẫn giải

Giả sử các số $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ là các nghiệm của đa thức:

$$P(x) = x^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k a_k^k x^{n-k}$$

Khi đó theo định lí Viete thì:

$$C_n^k a_k^k = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_k} \quad (k = 1, ..., n) \qquad \text{(tổng có } C_n^k \text{ số hạng)}$$

Giả sử: $|a_k| = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}$

$$\Rightarrow C_n^k|a_k^k| = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} |a_{i_1}||a_{i_2}|...|a_{i_k}| \le C_n^k|a_k|^k$$

Do đó: $|a_1| = |a_2| = ... = |a_n|$

Mà $|a_1 + a_2 + ... + a_n| = n|a_1|$ nên $a_1, a_2, ..., a_n$ cùng dấu và do đó chúng bằng nhau. Đặt $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$ thì ta có đa thức:

$P(x) = (x - a)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k .a^k .x^{n-k}$: thoả mãn.

Bài toán 19. 23:

Xác định các đa thức:

a) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ chia hết cho $x^2 - x + b$

b) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x - 2$ và chia $x^2 - 1$ thì có dư $2x$.

Hướng dẫn giải

a) Lấy đa thức $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ chia cho

$g(x) = x^2 - x + b$ thì được thương $q(x) = 6x^2 - x + (a - 5b - 1)$

Và phần dư $r(x) = (a - 5b + 2)x + (-ab - 6b^2 + b + 2)$

Vì $f(x) \vdots g(x)$ nên $r(x) = 0 \Rightarrow a - 5b + 2 = 0$ (1)

và $-ab + 6b^2 + b + 2 = 0$ (2)

(1) $\Rightarrow a = 5b - 2$ thay vào (2): $b^2 + 3b + 2 = 0$

$\Rightarrow b = -1; b = -2$

Với $b = -1$ thì $a = -7$. Với $b = -2$ thì $a = -12$.

Vậy $f(x) = 6x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 2$ hay

$f(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$.

b) Ta có $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

Vì $f(x)$ chia hết cho $x - 2$ nên $f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0$

Do $f(x)$ chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x$

nên $g(x) = f(x) - 2x$ chia hết cho $(x^2 - 1)$.

Suy ra $g(1) = 1 + a + (b - 2) + c = 0$ hay $a + b + c = 1$

Và $g(-1) = -1 + a - b + 2 + c = 0$ hay $a - b + c = -1$

Từ đó ta nhận được $a = -10$; $c = -10$, $b = -19$.

Vậy: $f(x) = x^3 - 10x^2 - 19x - 10$.

Bài toán 19. 24:

Xác định đa thức $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$ biết rằng nó chia hết cho đa thức $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$

$f(x)$ chia hết cho $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c - 6 = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta có: $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

Vậy: $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2$.

Bài toán 19. 25:

Xác định đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho với bất kì số thực a, b, c nào, ta cũng có

$$P(a+b-2c)+P(b+c-2a)+P(c+a-2b)=3P(a-b)+3P(b-c)+3P(c-a).$$

Hướng dẫn giải

Cho $x = a - b$, $y = b - c$ thì được

$P(x - y) + P(-2x - y) + P(2 + 2y) = 3P(x) + 3P(y) + 3P(-x - y)$ với mọi x, y

Cho $x = y = 0 \Rightarrow P(0) = 0$.

Cho y =0, ta được $P(-2x) = P(x) + 3P(-x)$ (*)

Đặt $P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x$,

Từ (*) suy ra $a_k(-2)^k = a_k + 3a_k(-1)^k, k = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow a_k\left[(-2)^k-1-3(-1)^k\right]=0\Leftrightarrow\begin{cases}a_k\left(2^k-4\right)=0,\ k\vdots 2\\ a_k\left(2^k-2\right)=0,\ k\not\vdots 2\end{cases}$$

nên khi $k\geq 3\Rightarrow a_k=0\Rightarrow P(x)=\lambda x^2+\mu x$

Thử lại đúng. Vậy các đa thức cần tìm là $P(x)=\lambda x^2+\mu x$, $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$

Bài toán 19. 26:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực sao cho:

P(a–b) + P(b–c) + P(c–a)= 2P(a + b +c)

với mọi a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 0.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta tìm một nghiệm nguyên của phương trình

ab + bc + ca = 0.

Chọn a = 6 ta được 6b + 6c + bc=0.

Chọn b =3 ta được $18 + 6c + 3c = 0\Rightarrow c = -2$.

Do đó bộ (a; b; c)=(6;3; –2) là một nghiệm nguyên của

ab + bc + ca=0 nên với mọi x thì (a,b,c) = (6x,3x,–2x) thỏa mãn:

ab + bc + ca = 0

Ta có: P(a–b) + P(b–c) + P(c–a)= 2P(a + b +c)

nên P(3x) + P(5x) + P(–8x) = 2 P(7x) với mọi x

Đặt $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +..+a_0$ thì có được:

$(3^i + 5^i + (-8)^i -2.7^i)\ a_i = 0$ với mọi i từ 0 đến n.

Đặt $\lambda_i = 3^i + 5^i + (-8)^i - 2.7^i$, $\forall i = 0,1,2,\ldots,n$. Ta thử tính một vài giá trị ban đầu của dãy số $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$

$\lambda_0 = 1 > 0$, $\lambda_1 = 3 + 5 - 8 - 2.7 < 0$, $\lambda_2 = 9 + 25 + 64 - 2.49 = 0$

$\lambda_3 = 27 + 125 - 512 - 2.343 < 0$, $\lambda_4 = 81 + 625 + 4096 - 4802 = 0$.

Từ đó xét các trường hợp:

Nếu i lẻ thì $3^i + 5^i + (-8)^i -2.7^i < 0$ nên $a_i =0$ với i lẻ.

Nếu i = 0 thì $3^i + 5^i + (-8)^i -2.7^i > 0$ nên $a_0 =0$

Nếu i chẵn, $i\geq 6$ thì $3^i + 5^i + (-8)^i -2.7^i >0$ nên $a_i =0$ với i chẵn, $i\geq 6$.

Từ đó ta có đa thức $P(x) = Ax^4 + Bx^2$.

Thử lại đúng nên đa thức cần tìm là $P(x) = Ax^4 + Bx^2$.

Cách khác:

Cho a = b = c = 0 thì P(0) = 0.

Cho a = b = 0, c = x tùy ý thì P(–x) = P(x) với mọi x nên P là hàm đa thức bậc chẵn, đặt $P(x) = Q(x^2)$ rồi đưa về 2Q(t) + Q(4t) = 2Q(3t) với mọi $t \geq 0$.

Bài toán 19. 27:

Xác định đa thức P(x) hệ số thực và thỏa mãn với a, b, c là ba số thực bất kì thì: $P(\sqrt{3}(a-b))+P(\sqrt{3}(b-c))+P(\sqrt{3}(c-a))$

$$=P(2a-b-c)+P(-a+2b-c)+P(-a-b+2c).$$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy đa thức hằng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Tiếp theo giả sử $\deg P=h\geq 1$.

Đặt $x=a-c, y=b-a, z=c-b$.

Khi đó $x+y+z=0$. Từ giả thiết suy ra

$$P(\sqrt{3}x)+P(\sqrt{3}y)+P(\sqrt{3}z)=P(x-y)+P(y-z)+P(z-x),$$

với x, y, z là ba số thực sao cho x + y + z = 0.

Như vậy thay bộ (x; y; z) bởi bộ (x; x; –2x) ta được

$$P(\sqrt{3}x)+P(\sqrt{3}x)+P(-2\sqrt{3}x)=P(0)+P(3x)+P(-3x),\forall x \quad (1)$$

Giả sử $P(x)=\sum_{i=0}^{h}a_i x^i$, $a_h\neq 0$, thay vào (1) ta được

$$2\sum_{i=0}^{h}a_i(\sqrt{3}x)^i+\sum_{i=0}^{h}a_i(-2\sqrt{3}x)^i=a_0+\sum_{i=0}^{h}a_i(3x)^i+\sum_{i=0}^{h}a_i(-3x)^i. \quad (2)$$

So sánh hệ số của x^h ở hai vế của (2) ta được

$$2(\sqrt{3})^h+(-2\sqrt{3})^h=3^h+(-3)^h. \quad (3)$$

Dễ thấy h =1, h =2 thỏa (3).

Tiếp theo xét $h\geq 3$. Từ (3) ta thấy rằng h phải là số chẵn: h =2k, với $k\geq 2$.

Khi đó (3) trở thành

$$2.3^k+12^k=2.9^k \Leftrightarrow 2+4^k=2.3^k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=2. \end{array}\right.$$

Tóm lại từ (3) suy ra h chỉ có thể là h =1, h =2, h =4.

Trường hợp h =1. Khi đó P(x) = mx +n. Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài thấy thỏa mãn.

Trường hợp h =2. Khi đó $P(x) = mx^2 +nx +p$. Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$3m\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$$=m\left[(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2\right] \text{ (đúng).}$$

Trường hợp h = 4. Khi đó $P(x) = mx^4 +nx^3 +px^2 +qx + e$.

Trong phương trình hàm đã cho ở đầu bài, thay bộ (a; b; c) bởi (x; 0; 0) ta được

$$P(\sqrt{3}x)+P(0)+P(-\sqrt{3}x)=P(2x)+2P(3x),\forall x \quad (4)$$

Thay $P(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + e$ vào (4) ta được

$$9mx^4 + 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 + \sqrt{3}qx + 9mx^4 - 3\sqrt{3}nx^3 + 3px^2 - \sqrt{3}qx + 3e$$

$$= 16mx^4 + 8nx^3 + 4px^2 + 2qx + 2mx^4 - 2nx^3 + 2px^2 - 2qx + 3e,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hay $mx^4 = 18mx^4 + 6nx^3$ với mọi x.

Do đó n = 0. Vậy $P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e$.

Thay vào phương trình hàm đã cho ở đầu bài ta được

$$9m\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] + 3p\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

$$= m\left[(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4\right]$$

$$+p\left[(2a-b-c)^2 + (2b-c-a)^2 + (2c-a-b)^2\right] \quad (5)$$

Tiếp theo ta chứng minh đẳng thức

$$9\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right]$$

$$= (2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4. \quad (6)$$

Đặt $x = a-c, y = b-a, z = c-b$. Khi đó $x + y + z = 0$.

Ta có $9\left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4\right] = 9(x^4 + y^4 + z^4)$. (7)

Mặt khác $(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4$

$$= (x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4$$

$$= 2(x^4 + y^4 + z^4) - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3$$

$$-4y^3z + 6y^2z^2 - 4yz^3 - 4z^3x + 6z^2x^2 - 4zx^3$$

$$= 2(x^4 + y^4 + z^4) - 4x^3(y+z) - 4y^3(x+z) - 4z^3(x+y)$$

$$+6(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2). \quad (8)$$

Do $x + y + z = 0$ nên $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$.

Suy ra $x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$

$$= 4[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyx(x+y+z)] = 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Như vậy $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$.

Thay vào (8) ta được

$$(2a-b-c)^4 + (2b-c-a)^4 + (2c-a-b)^4 = 9(x^4 + y^4 + z^4). \quad (9)$$

Từ (7) và (9) suy ra (6) được chứng minh.

Do đó (5) đúng, nghĩa là đa thức $P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Kết luận : Các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$P(x) = mx + n$, $P(x) = mx^2 + nx + p$

$P(x) = mx^4 + px^2 + qx + e$ với $m \neq 0$.

Chú ý :

Từ (4) ta so sánh hệ số của x^h ở hai vế cũng suy ra được h chỉ có thể là h =1, h =2, h =4.

Bài toán 19. 28:

Tìm số tất cả các đa thức P(x) bậc không lớn hơn 3 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn P(3) = 2000.

Hướng dẫn giải

Xét trường hợp bậc của $P(x) \leq 1$. Giả sử : $P(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbf{N})$.

$P(3) = a.3 + b = 2000$ suy ra $0 \leq a \leq \left[\frac{2000}{3}\right] = 666$

Như vậy có 667 đa thức P(x) có bậc ≤ 1 thỏa mãn đề bài. (1)

Xét trường hợp bậc của P(x) bằng 2.

Giả sử : $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbf{N}, a > 0)$.

$P(3) = 9a + 3b + c = 2000$. Ta có: $0 < a \leq \left[\frac{2000}{9}\right] = 222$

Do đó $3b + c = 2000 - 9a$. Suy ra $0 \leq b \leq 666 - 3a$.

Tức là có $667 - 3a$ số b.

Từ đó số đa thức P(x) của trường hợp này là:

$$\sum_{a=1}^{222}(667 - 3a) = 667 \times 222 - 3(1+2+3+...+222)$$

$$= 667 \times 222 - \frac{3 \times 222 \times 223}{2} = 73815. \quad (2)$$

Xét trường hợp bậc của P(x) bằng 3.

Giả sử :$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbf{N}, a > 0)$

$P(3) = 27a + 9b + 3c + d = 2000$.

Tương tự như các đánh gía trên ta có:

$$1 \leq a \leq \left[\frac{2000}{27}\right] = 74,\ 0 \leq b \leq \left[\frac{2000 - 27a}{9}\right] = 222 - 3a$$

nên có $223 - 3a$ gía trị b,

$$0 \leq c \leq \left[\frac{2000 - 27a - 9b}{3}\right] = 666 - 9a - 3b$$

nên có $667 - 9a - 3b$ gía trị c.

Từ đó số đa thức P(x) của trường hợp này là: $= \sum_{a=1}^{74} \sum_{b=0}^{222-3a} (667 - 9a - 3b)$

$$= \sum_{a=1}^{74} \left[(667 - 9a)(223 - 3a) - 3(0 + 1 + \ldots + (222 - 3a)) \right]$$

$$= \sum_{a=1}^{74} \left[(667 - 9a)(223 - 3a) - \frac{3(222 - 3a)(223 - 3a)}{2} \right]$$

$$= \sum_{a=1}^{74} \left(74482 - \frac{4011}{2}.a + \frac{27}{2}.a^2 \right) = 1807043$$

Vậy tổng số đa thức P(x) thỏa mãn đề bài là:

667 + 73 815 + 1 807 043 = 1 881 525.

Bài toán 19. 29:

Cho phương trình: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ có 4 nghiệm a,b,c,d. Tìm đa thức có 3 nghiệm: $\frac{ab - cd}{a + b - c - d}; \frac{ac - bd}{a + c - b - d}, \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bổ đề: Nếu r, s, t, u là 4 nghiệm của phương trình:

$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ và rs = tu thì $A^2D = C^2$ (qui hồi).

Thật vậy, với qui ước viết tắt Σ, Π là các tổng, tích nhận được

Theo Viete thì có: $\Sigma r = -A$ và $\Pi r = D$

$\Rightarrow$ $A^2D = (r^2s + rs^2 + rst + rsu)^2 = (\Sigma rst)^2 = C^2$

Ta lập phương trình có 4 nghiệm là: a–z, b–z, c–z, d–z (z là ẩn)

Theo Viete ta có: $\Sigma a = 0$, $\Sigma ab = p$, $\Sigma abc = -q$, $\Pi a = r$.

Từ đó:

$\Sigma(a-z) = -4z$

$\Sigma(a-z)(b-z) = (\Sigma ab) - 3(\Sigma a)z + 6z^2 = p + 6z^2$

$\Sigma(a-z)(b-z)(c-z) = \Sigma abc - 2(\Sigma ab)z + 3(\Sigma a)z^2 - 4z^3 = -4z^3 - q - 2pz.$

$\Pi(a-z) = r + qz + pz^2 + z^4$.

Suy ra phương trình cần lập có dạng:

$y^4 + 4zy^3 + (p + 6z^2)y^2 + (q + 2pz + 4z^3)y + (r + qz + pz^2 + z^4) = 0.$

Ta chứng minh: với $z_1 = \frac{ab - cd}{a + b - c - d}$; $z_2 = \frac{ac - bd}{a + c - b - d}$;

$z_3 = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$ đều thoả mãn $(a - z_1)(b - z_1) = (c - z_1)(d - z_1)$ và tương tự đối với z_2, z_3 (tích 2 nghiệm bằng tích 2 nghiệm còn lại)

Áp dụng bổ đề có được:

$$16z_i^2(r + qz_i + pz_i^2 + z_i^4) = (q + 2pz_i + 4z_i^2)^2$$

hay $8qz^3 + 4(4r - p^2)z^2 - 4pqz - q^2 = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Vậy đa thức cần tìm là:

$f(z) = 8qz^3 + 4(4r - p^2)z^2 - 4pqz - q^2$.

Bài toán 19. 30:

Xác định đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$ thoả: $|f(x)| \le \frac{1}{2}, \forall x \in [-1,1]$.

Hướng dẫn giải

Thay $x = 0;1;-1$ vào đa thức $f(x)$ ta được:

$f(0) = b \quad \Rightarrow -\frac{1}{2} \le b \le \frac{1}{2}$ (1)

$f(1) = 1 + a + b \Rightarrow -\frac{3}{2} \le a + b \le -\frac{1}{2}$ (2)

$f(-1) = 1 - a + b \Rightarrow -\frac{3}{2} \le -a + b \le -\frac{1}{2}$ (3)

Từ (2) và (3) ta được $b \le -\frac{1}{2}$

Kết hợp với (1) ta được $b = -\frac{1}{2}$

Thay $b = -\frac{1}{2}$ vào (2) và (3) ta được: $a \le 0$ và $a \ge 0$

$\Rightarrow \quad a = 0$ từ đó $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

Thử lại đúng. Vậy: $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$.

Bài toán 19. 31:

Xác định đa thức $P(x)$ khác đa thức không, có hệ số không âm và thỏa mãn $P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \le [P(1)]^2, \forall x > 0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $P(x) = a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0$ là đa thức thỏa mãn các yêu cầu đề bài, khi đó $a_i \ge 0, \forall i = \overline{0,d}$.

Với mọi $x>0$, theo bất đẳng thức BCS ta có

$$P(x)P(x^{-1}) = (a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0)(a_d x^{-d} + \ldots + a_1 x^{-1} + a_0)$$

$$\ge (a_d + \ldots + a_1 + a_0)^2 = [P(1)]^2.$$

Kết hợp với giả thiết $P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \le [P(1)]^2,\ \forall x > 0$ ta được

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = [P(1)]^2,\ \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow (a_d x^d + ... + a_1 x + a_0)(a_d x^{-d} + ... + a_1 x^{-1} + a_0) = [P(1)]^2,\ \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow (a_d x^d + ... + a_1 x + a_0)(a_d + ... + a_1 x^{d-1} + a_0 x^d) = [P(1)]^2 x^d,\ \forall x > 0.$$

Từ đây, so sánh hệ số của $x^{d+1}, x^{d+2}, ..., x^{2d}$ ở hai vế ta được

$$a_0 = a_1 = ... = a_{d-1} = 0.$$

Do đó $P(x) = a_d x^d$ với $a_d > 0$ .Thử lại đúng.

Vậy đa thức $P(x) = ax^n$ với a>0.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 19. 1: Xác định đa thức P(x) thoả mãn đồng nhất thức

$$(x - 1)\,P(x + 1) - (x + 2)\,P(x) \equiv 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Hướng dẫn

Cho lần lượt x = –2, x = 1.

Kết quả $P(x) = a(x^3 - x)$.

Bài tập 19. 2: Xác định đa thức P(x) thoả: $x.P(x - 1) \equiv (x - 26)\ .\ P(x)$

Hướng dẫn

Cho lần lượt x = , x = 2,.... Kết quả P(x) = cx(x–1)(x–2)(x–3)...(x–25)

Bài tập 19. 3: Xác định đa thức P(x) hệ số thực thoả:

$$P(x) + P(1) = \frac{1}{2}\,[P(x + 1) + P(x - 1)],\ \forall x$$

Hướng dẫn

Xét dạng đa thức P(x) bậc 4 rồi đồng nhất hệ số.

Kết quả $P(x) = ax^4 - 2ax^3 + cx^2 + (a - c)\,x + c$

Bài tập 19. 4: Xác định đa thức P(x) có deg = 6 thoả mãn đồng thời:

$$P(-1) = P(5) = 729, P(0) = P(4) = 64, P(1) = P(3) = 1 \text{ và } P(2) = 0.$$

Hướng dẫn

Xét dạng đa thức P(x) bậc 6 rồi đồng nhất hệ số.

Kết quả $P(x) = (x - 2)^6$

Bài tập 19. 5: Xác định đa thức P(x) với hệ số thực thoả mãn điều kiện: P(F(x))=F(P(x)), P(0)= 0 trong đó F(x) là hàm số cho trước thoả mãn F(x) > x với mọi $x \ge 0$.

Hướng dẫn

Kết quả P(x) = x.

Bài tập 19. 6: Xác định đa thức hệ số nguyên P(x) sao cho đa thức:

$Q(x) = (x^2 + 6x + 10).P^2(x) - 1$ là bình phương của một đa thức hệ số nguyên.

Hướng dẫn

Gọi bậc của P(x) là n thì từ giả thiết thì có $n^2 = 2n$.

Kết quả P(x) = 0, P(x) = 1, $P(x) = x^2 + bx + c$

Bài tập 19. 7: Xác định đa thức P(x) hệ số thực thoả mãn điều kiện:

$P(0) = 1$ và $P(x^2+1) - [P(x)]^2 - 2xP(x) = 0$ với mọi x.

Hướng dẫn

P(x) có 3 nghiệm x = 0, x = 1, x = –1.

Kết quả $P(x) = (x-1)x^2(x+1)$.

Bài tập 19. 8: Xác định đa thức hệ số thực thoả mãn:

$P(P(x) + x) = P(x)P(x+1)$ với mọi x.

Hướng dẫn

$P(x+1) - P(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow P(x+1) - (x+1)^2 = P(x) - x^2$.

Kết quả $P(x) = x^2 + a$.

Bài tập 19. 9: Xác định đa thức đa thức P(x) hệ số thực thỏa mãn: nếu P(a) nguyên thì a nguyên.

Hướng dẫn

Xét P(0)= 0 thì xây dựng dãy $b_0 = 0$; $b_{n+1} = b_n^2 + 1$.

Xét $P(0) \neq 0$ thì dùng dạng đa thức tổng quát.

Kết quả $P_0(x) = x$; $P_1(x) = x^2 + 1, \ldots P_{n+1}(x) = [P_n(x)]^2 + 1$.

Bài tập 19. 10: Xác định đa thức f(x) với hệ số nguyên sao cho với mọi n nguyên dương ta có f(n) là ước của $2^n - 1$.

Hướng dẫn

Dùng đa thức P(x) dạng tổng quát rồi đồng nhất.

Kết quả P(x) = 0 ; P(x) = 16 ; P(x) = 4x ; $P(x) = x^2$.

Bài tập 19. 11: Xác định đa thức P(x) bậc 4 mà P(1 – x) = P(x)

Hướng dẫn

$P(0) = (P(0))^2$ nên P(0) =0 hay P(0) = 1.

Kết quả P(x) = 1 ; $P(x) = x^n$.

Bài tập 19. 12: Xác định đa thức P(x) thoả:

$P((x+1)^3) = (P(x) + 1)^3$ với mọi x và P(0) = 0.

Hướng dẫn

Q(x) là đa thức tùy ý , nếu P(x ;y) = Q(x–y) thì

P(x +1; y+1) = Q(x–y).

Kết quả P(x ;y) = Q(x–y) với Q(x) là đa thức tùy ý.

Chuyên đề 20: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương trình bậc nhất

- Phương trình bậc nhất 2 ẩn: ax +by = c với a, b, c nguyên có nghiệm nguyên khi (a,b)|c.
  Phương pháp chia 2 vế cho min{|a|,|b|}.
  Đặc biệt phương trình x +by = c thì y = t nguyên tuỳ ý, x = c–bt còn với phương trình ax +y = c thì x = t nguyên tuỳ ý, y = c–at .
- Phương trình bậc nhất nhiều ẩn: ax +by +cz + ...= m với a, b, c, ...m nguyên có nghiệm nguyên khi (a,b,c,...)|m.
  Chú ý ghép ẩn, khử ẩn của hệ,...

Phương pháp chung

Vận dụng lý thuyết và phối hợp các tính chất, kết quả cùng các kỹ thuật về các loại số để giải phương trình nghiệm nguyên , nguyên dương,.. , phối hợp các hướng:

- chia tách ép nguyên,
- phân tích thừa số, phương trình ước số,
- dùng tính chẵn lẻ, tính chất số nguyên tố,
- thử sai thử đúng, viết chia có dư,
- nguyên tắc cực hạn, vai trò như nhau,
- phương pháp lùi vô hạn(xuống thang)
- ghép ẩn, khử ẩn của hệ,
- điều kiện có nghiệm $\Delta \geq 0$,
- đánh giá qua bất đẳng thức, giới hạn giá trị, ...

Chú ý:

- Nếu 2 số nguyên x, y khác 0 thì quan hệ giữa bội chung nhỏ nhất [x, y] và ước chung lớn nhất (x, y): xy = (x, y) . [x, y]
- Nếu $a^2 + b^2 \vdots p$ mà p là số nguyên tố có dạng 4k + 3 thì a ⋮ p và b ⋮ p.
- Định lý Fermat (nhỏ): Nếu n là một số nguyên và p là số nguyên tố thì $n^p - n \equiv 0 \pmod p$
- Định lý Euler: Cho m là số nguyên dương và số nguyên a nguyên tố cùng nhau với m thì: $a^{\varphi}(m) \equiv 1 \pmod m$
- Định lý Wilson: Nếu p là một số nguyên tố thì:
  $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$
- Định lý phần dư Trung Hoa:
  Nếu r và s là 2 số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, a và b là 2 số nguyên bất kì, thì hệ 2 phương trình đồng dư:
  $N \equiv a \pmod r$ và $N \equiv b \pmod s$ có nghiệm duy nhất N nguyên theo modulo (rs).

Tổng quát: Nếu $m_1, m_2, ..., m_k$ là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một và $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số nguyên, thì hệ k phương trình đồng dư: $x \equiv a_i \pmod{m_i}$; i = 1, 2, ..., k có nghiệm x nguyên duy nhất theo modulo $(m_1, m_2, ..., m_k)$.

– Phương trình Pell: Nếu (a, b) là nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ thì mọi nghiệm nguyên dương đều có dạng:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{(a+b\sqrt{d})^n + (a-b\sqrt{d})^n}{2} , \frac{(a+b\sqrt{d})^n - (a-b\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}} \right)$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 20. 1:

Cho phương trình: 11x + 8y = 73

a) Tìm các nghiệm nguyên b) Tìm các nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn giải

a) $11x + 8y = 73$ nên $y = \frac{73 - 11x}{8} = 8 - x + \frac{3(3-x)}{8}$

Vì x, y nguyên và (3 ;8) = 1 nên $\frac{3-x}{8} = t$ nguyên

Do đó x = 3 –8t và y = 5 + 11t

Vậy nghiệm nguyên $\begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = 5 + 11t \end{cases}$ (t nguyên tuỳ ý)

b) các nghiệm x, y nguyên dương khi

$\begin{cases} 3 - 8t > 0 \\ 5 + 11t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{11} < t < \frac{3}{8}$. Do $t \in \mathbf{Z}$ nên t = 0.

Vậy nghiệm nguyên dương x = 3; y = 5.

Bài toán 20. 2:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) 6x + 15y + 10z = 3 b) 2x – 5y – 6z = 4.

Hướng dẫn giải

a) PT 6x + 15y + 10z = 3

Ta thấy 10z ⋮ 3 nên z ⋮ 3. Đặt z = 3k, k nguyên ta được:

6x + 15y + 10.3k = 3 $\Leftrightarrow$ 2x + 5y + 10k = 1 $\Leftrightarrow$ 2x + 5y = 1 – 10k

Do đó $x = \frac{1 - 10k - 5y}{2} = -5k - 2y + \frac{1-y}{2}$

Vì x, y nguyên nên $\frac{1-y}{2}$ = t (t nguyên), ta có: y = 1 – 2t

x = –5k – 2(1 – 2t) + t = 5t – 5k – 2, z = 3k

Vậy nghiệm của phương trình:

$\begin{cases} x = 5t - 5k - 2 \\ y = 1 - 2t \\ z = 3k \end{cases}$ với t, k là các số nguyên tuỳ ý.

b) Ta có $5y \vdots 2$ nên $y \vdots 2$. Đặt $y = 2k$, k là các số nguyên.

PT: $2x - 5y - 6z = 4 \Leftrightarrow 2x - 10k - 6z = 4$

$\Leftrightarrow x - 5k - 3z = 2 \Leftrightarrow x = 5k + 3z + 2$.

Từ đó suy ra nghiệm $\begin{cases} x = 5k + 3t + 2 \\ y = 2k \\ z = t \end{cases}$, (k, t là các số nguyên tuỳ ý)

Bài toán 20. 3:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 2018$ b) $x^2 + y^2 = 2019$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có x^2, y^2 chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1 nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 3. Còn vế phải 2018 chia cho 4 dư 2.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) x^2, y^2 chia cho 4 có số dư 0, 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 2. Còn vế phải 2019 chia cho 4 dư 3.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 20. 4:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

a) $2(x + y + z) = xyz$ b) $x + y + z + t = xyzt$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}$

Giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$ thì $\frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{2}$ nên $z^2 \leq 6$ do đó $z \in \{1; 2\}$

- Với z = 1, thì: $2(x + y + 1) = xy \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 6$

  Ta được: x = 8, y = 3; x = 5, y = 4
- Với z = 2, thì: $x + y + z = xy \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 3$

  Ta được: x = 4, y = 2.

Vậy phương trình có nghiệm (8 ;3 ;1), (5 ;4 ;1), (4 ;2 ;2) và các hoán vị.

b) $x + y + z + t = xyzt$

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq t$. Ta có $xyzt = x + y + z + t \leq 4t$ nên $xyz \leq 4$

Với xyz = 1 ta có x = y = z = 1: loại

Với xyz = 2 ta có x = y = 1, z = 2: t = 4

Với xyz = 3 ta có x = y = 1, z = 3: loại

Với xyz = 4 ta có x = 1, y = z = 2; hoặc x = y = 1, z = 4: loại

Vậy phương trình có nghiệm (1 ;1 ;2 ;4) và các hoán vị.

Bài toán 20. 5:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^5 - 5x^3 + 4x = 24(5y + 1)$ b) $3x^5 - x^3 + 6x^2 - 18x = 2005$.

Hướng dẫn giải

a) $x^5 - 5x^3 + 4x = 24(5y + 1)$ hay $x(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) = 120y + 24$

Vế trái là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5, còn vế phải không chia hết cho 5 nên phương trình không có nghiệm nguyên.

b) Vế phải chia hết cho 3. Suy ra $x^3 \vdots 3$, do đó $x \vdots 3$. Khi đó vế trái chia hết cho 9, còn vế phải không chia hết cho 9 nên phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 20. 6:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 + xy + y^2 = 2x + y$ b) $x^2 - 3xy + 3y^2 = 3y$

Hướng dẫn giải

a) Biến đổi thành pt bậc hai theo x: $x^2 + (y - 2)x + (y^2 - y) = 0$

$\Delta = (y - 2)^2 - 4(y^2 - y) = 4 - 3y^2$

Điều kiện $\Delta \geq 0$ được $3y^2 \leq 4$ nên $|y| \leq 1$

Với $y = -1$ ta được $x^2 - 3x + 2 = 0$ nên có: $x = 1$; $x = 2$

Với $y = 0$ ta được $x^2 - 2x = 0$ nên có: $x = 0$, $x = 2$

Với $y = 1$ ta được $x^2 - x = 0$ nên có: $x = 0$, $x = 1$

Vậy nghiệm $(1; -1)$, $(2; -1)$, $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$.

b) Biến đổi thành pt bậc hai theo x: $x^2 - 3yx + 3y(y - 1) = 0$

Điều kiện $\Delta = -3y(y - 4)$, $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$

Với $y = 0$ ta được: $x^2 = 0$ nên có: $x = 0$

Với $y = 1$ ta được: $x^2 - 3x = 0$ nên có: $x = 0$; $x = 3$.

Với $y = 2$ thì $\Delta = 12$ không là số chính phương: loại

Với $y = 3$ ta được: $x^2 - 9x + 18$ nên có: $x = 3$, $x = 6$

Với $y = 6$ ta được: $x^2 - 17x + 90 = 0$ vô nghiệm

Vậy nghiệm: $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(3; 1)$, $(3; 3)$, $(6; 3)$.

Bài toán 20. 7:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$ b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$.

Hướng dẫn giải

a) $2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 3(7 - y^2)$

Ta có $3(7 - y^2) \vdots 2 \Rightarrow 7 - y^2 \vdots 2 \Rightarrow y$ lẻ.

Ta lại có $7 - y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$ nên: $2(x + 1)^2 = 18$

Ta được: $x + 1 = \pm 3$ do đó: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$

Các cặp số $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-4; 1)$, $(-4; -1)$ thoả mãn nên là nghiệm của phương trình đã cho.

b) $y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) + 3$

Ta có $y^2 - (x^2 + x)^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} > 0$

Và $(x^2 + x + 2)^2 - y^2 = (x^2 + x + 2)^2 - (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3)$

$= 3x^2 + 3x + 1 = 3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} > 0$

Nên $(x^2 + x)^2 < y^2 < (x^2 + x + 2)^2$ do đó $y^2 = x^2 + x + 1$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ hoặc $x = -2$.

Với $x = 1$ hoặc $x = -2$ thì $y = \pm 3$.

Bài toán 20. 8:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$ b) $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.

Hướng dẫn giải

a) $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = 4y^2 + 4y + 1$

$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x + 1) = (2y + 1)^2$

Vế phải là số lẻ nên $x^2 + 1$ và $x + 1$ cùng lẻ.

Ta có $(x^2 + 1, x + 1) = 1$. Thật vậy, giả sử $x^2 + 1 \vdots d$, $x + 1 \vdots d$ thì $x^2 + 1 \vdots d$, $x^2 - 1 \vdots d$ nên $(x^2 + 1) - (x^2 - 1) = 2 \vdots d$; do d lẻ nên $d = 1$. Như vậy $x^2 + 1$ và $x + 1$ đều là hai số chính phương. Do x^2 và $x^2 + 1$ là hai số nguyên liên tiếp và cùng là số chính phương nên số nhỏ bằng 0, đó là $x^2 = 0$.

Từ $x = 0$ ta được $y = 0$ hoặc $y = -1$.

Vậy nghiệm: $(0; 0), (0; -1)$.

b) Ta có $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$

$\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4y^2 + 4y$

$\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 4y + 1$

$\Leftrightarrow (2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 1 = (2y + 1)^2$

Xét $(2x^2 + x)^2 < (2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2y+1)^2 - (2x^2 + x)^2 > 0 \\ (2x^2 + x + 1)^2 - (2y + 1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 > 0 \\ (2x^2 + x)^2 + 2(2x^2 + x) + 1 - (2x^2 + x)^2 - 3x^2 - 4x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(3x+1) > 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \quad \text{hay} \quad x > -\frac{1}{3} \\ x < 0 \quad \text{hay} \quad x > 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x < -1$ hoặcặc $x > 2$ (do $x \in \mathbb{Z}$)

Như vậy với $x < -1$ hoặc $x > 2$ thì $(2y + 1)^2$ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp, vô lí.

Lần lượt xét $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$ ta được sáu nghiệm $(-1; 0)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(0; -1)$, $(2; 5)$, $(2; -6)$.

Bài toán 20. 9:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ b) $x^2 + y^2 = 6(z^2 + t^2)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x \vdots 2$. Đặt $x = 2x_1$ với x_1 nguyên. Thay vào phương trình rồi chia hai vế cho 2 được: $4x_1^3 + y^3 = 2z^3$.

Do đó $y \vdots 2$. Đặt $y = 2y_1$ với y_1 nguyên. Tiếp tục thay vào phương trình rồi chia hai vế cho 2 được: $2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3$.

Do đó $z \vdots 2$. Đặt $z = 2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào phương trình rồi chia hai vế cho 2 được: $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$.

Như vậy nếu (x, y, z) là nghiệm của phương trình thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình, trong đó $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$.

Lập luận tương tự như trên, (x_2, y_2, z_2) cũng là nghiệm của phương trình trong đó $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tuỳ ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Vậy nghiệm duy nhất: $(0; 0; 0)$.

b) Ta thấy x^2, y^2 chia hết cho 3 dư 0 hoặc 1 mà $x^2 + y^2 \vdots 3$ nên x^2 và y^2 đều chia hết cho 3. Do đó x và y đều chia hết cho 3.

Thay $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ vào phương trình đã cho, ta được $z^2 + t^2 \vdots 3$ do đó z và t chia hết cho 3.

Thay $z = 3z_1$, $t = 3t_1$ vào phương trình và rút gọn được $x_1^2 + y_1^2 = 6(z_1^2 + t_1^2)$.

Như vậy (x_1, y_1, z_1, t_1) cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z , t chia hết cho 3^k với k là số tự nhiên tuỳ ý.

Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = t = 0$.

Vậy nghiệm duy nhất: $(0; 0; 0; 0)$.

Bài toán 20. 10:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 - 2x - 11 = y^2$ b) $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $x^2 - 2x + 1 - 12 = y^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x - 1 + y)(x - 1 - y) = 12$

Vì phương trình chứa y với số mũ chẵn nên có thể giả thiết rằng $y \geq 0$.

Thế thì $x - 1 + y \geq x - 1 - y$.

Ta có $(x - 1 + y) - (x - 1 - y) = 2y$ nên $x - 1 + y$ và $x - 1 - y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng chẵn.

Ta có hai trường hợp x –1 + y = 6 và x – 1 – y = 2

Hoặc x –1 + y = –2 và – 1 – y = – 6

Từ đó suy ra các nghiệm: (5; 2), (5; –2), (–3; 2), (3–; –2)

b) Viết thành phương trình bậc hai đối với x:

$x^2 + (3y - 1)x + (2y^2 - y + 3) = 0$

$\Delta = (3y - 1)^2 - 4(2y^2 - y + 3) = y^2 - 2y - 11$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên:

Δ là số chính phương $\Leftrightarrow y^2 - 2y - 11 = k^2$ $(k \in N)$

Giải ra được y = 5, y = –3.

Với y = 5, thì $x^2 + 14x + 48 = 0 \Leftrightarrow$ x = –8; x = –6.

Với y = –3, thì $x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow$ x = 6; x = 4.

Vậy nghiệm: (–8; 5), (–6; 5), (6; –3), (4; –3).

Bài toán 20. 11:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ b) $x^2 + y^2 = 6(z^2 + t^2)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có x ⋮ 2. Đặt $x = 2x_1$ với x_1 nguyên. Thay vào phương trình rồi chia hai vế cho 2 được: $4x_1^3 + y^3 = 2z^3$.

Do đó y ⋮ 2. Đặt $y = 2y_1$ với y_1 nguyên. Tiếp tục thay vào phương trình rồi chia hai vế cho 2 được: $2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3$.

Do đó z ⋮ 2. Đặt $z = 2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào phương trình rồi chia hai vế cho 2 được: $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$.

Như vậy nếu (x, y, z) là nghiệm của phương trình thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình, trong đó $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$.

Lập luận tương tự như trên, (x_2, y_2, z_2) cũng là nghiệm của phương trình trong đó $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tuỳ ý. Điều này chỉ xảy ra khi x = y = z = 0.

Vậy nghiệm duy nhất: (0; 0; 0).

b) Ta thấy x^2, y^2 chia hết cho 3 dư 0 hoặc 1 mà $x^2 + y^2$ ⋮ 3 nên x^2 và y^2 đều chia hết cho 3. Do đó x và y đều chia hết cho 3.

Thay $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ vào phương trình đã cho, ta được $z^2 + t^2$ ⋮ 3 do đó z và t chia hết cho 3.

Thay $z = 3z_1$, $t = 3t_1$ vào phương trình và rút gọn được $x_1^2 + y_1^2 = 6(z_1^2 + t_1^2)$.

Như vậy (x_1, y_1, z_1, t_1) cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z , t chia hết cho 3^k với k là số tự nhiên tuỳ ý. Điều này chỉ xảy ra khi x = y = z = t = 0.

Vậy nghiệm duy nhất: (0; 0; 0; 0).

Bài toán 20. 12:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 - 2x - 11 = y^2$ b) $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $x^2 - 2x + 1 - 12 = y^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x - 1 + y)(x - 1 - y) = 12$

Vì phương trình chứa y với số mũ chẵn nên có thể giả thiết rằng $y \geq 0$.

Thế thì $x - 1 + y \geq x - 1 - y$.

Ta có $(x - 1 + y) - (x - 1 - y) = 2y$ nên $x - 1 + y$ và $x - 1 - y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng chẵn.

Ta có hai trường hợp $x - 1 + y = 6$ và $x - 1 - y = 2$

Hoặc $x - 1 + y = -2$ và $-1 - y = -6$

Từ đó suy ra các nghiệm: (5; 2), (5; –2), (–3; 2), (3–; –2)

b) Viết thành phương trình bậc hai đối với x:

$x^2 + (3y - 1)x + (2y^2 - y + 3) = 0$

$\Delta = (3y - 1)^2 - 4(2y^2 - y + 3) = y^2 - 2y - 11$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên:

Δ là số chính phương $\Leftrightarrow y^2 - 2y - 11 = k^2$ $(k \in N)$

Giải ra được $y = 5$, $y = -3$.

Với $y = 5$, thì $x^2 + 14x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = -8$; $x = -6$.

Với $y = -3$, thì $x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6$; $x = 4$.

Vậy nghiệm: (–8; 5), (–6; 5), (6; –3), (4; –3).

Bài toán 20. 13:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ b) $3x^2 + 4y^2 = 6x + 13$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ nên $x^2 + y^2 + z^2 \vdots 2$.

Có hai trường hợp:

– Trong x, y, z có một số chẵn, hai số lẻ, chẳng hạn x chẵn, y và z lẻ. Khi đó vế trái $(x^2 + y^2 + z^2)$ chia cho 4 dư 2, còn vế phải (2xyz) chia hết cho 4, loại.

– Ba số x, y, z đều chẵn: Đặt $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ thì suy được (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm phương trình đã cho. Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z , t chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tuỳ ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Vậy nghiệm: (0; 0; 0).

b) $3x^2 + 4y^2 = 6x + 13 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 16 - 4y^2$

hay $3(x - 1)^2 = 4(4 - y^2)$

Ta có $4 - y^2 \geq 0$ và $4 - y^2 \vdots 3$ nên $y^2 = 1$ hoặc $y^2 = 4$

Vậy nghiệm (3; 1), (3; –1), (–1; 1), (–1; –1), (1; 2), (1; –2).

Bài toán 20. 14:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^4 - 2y^2 = 1$ b) $x^2 + y^2 = 7z^2$

Hướng dẫn giải

a) Trong phương trình $x^4 - 2y^2 = 1$ thì x và y có số mũ chẵn, do đó ta giả sử x, $y \geq 0$.Hiển nhiên x lẻ, do đó x^4 chia cho 4 dư 1, suy ra y^2 chẵn, do đó y chẵn.

Đặt $x = 2a + 1$, $y = 2b$ với $a, b \in \mathbf{N}$. Do đó:

$(4a^2 + 4a + 1)^2 - 1 = 8b^2 \Leftrightarrow (4a^2 + 4a + 2)(4a^2 + 4a) = 8b^2$

$\Leftrightarrow (2a^2 + 2a + 1)(a^2 + a) = b^2$

Đặt $a^2 + a = n$ ta có: $(2n + 1).n = b^2$

Với $a = 0$ thì $x = 1$ được $y = 0$

Với $a \geq 1$ thì n và $2n + 1$ là hai số nguyên dương và chúng nguyên tố cùng nhau. Tích của chúng bằng b^2 nên mỗi số đều là số chính phương.

Đặt $n = k^2$, $(k \in N)$, ta có $a^2 + a = k^2$.

$a^2 < a^2 + a < a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$

hay k^2 nằm giữa hai số chính phương liên tiếp:vô lí .

Vậy nghiệm: (1; 0), (–1; 0).

b) $x^2 + y^2 = 7z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8z^2$

Do $x^2 + y^2 + z^2$ chẵn nên có hai trường hợp:

– Trong ba số x, y, z có một số chẵn, hai số lẻ: loại, vì khi đó vế trái của (1) chia cho 4 dư 2, còn vế phải chia hết cho 4.

– Cả ba số x, y, z đều chẵn. Đặt $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$.

Thay vào và rút gọn được $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 8z_1^2$

Như vậy (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến: x, y, z chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tuỳ ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Vậy nghiệm: (0; 0; 0)

Bài toán 20. 15:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 = 3$ b) $x^2 - y^3 = 7$

Hướng dẫn giải

a) PT : $x^2(x^2 - y^2) - 4y^2(x^2 - y^2) = 3$

$\Leftrightarrow (x - 2y)(x - y)(x + y)(x + 2y) = 3$

Nếu $y = 0$ thì $x^4 = 3$, không có nghiệm nguyên

Nếu $y \neq 0$ thì vế trái là tích của bốn thừa số khác nhau đôi một, còn vế phải chỉ phân tích được thành nhiều nhất là tích của ba thừa số khác nhau đôi một: $3 = (-3).1.(-1)$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên

b) Bổ đề: Nếu $a^2 + b^2 \vdots p$ mà p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$ thì $a \vdots p$ và $b \vdots p$.

Chứng minh : Giả sử một trong hai số a và b không chia hết cho p thì theo giả thiết suy ra số kia cũng không chia hết cho p.

Theo định lí nhỏ Fecma: $a^{p-1} - 1 \vdots p$; $b^{p-1} - 1 \vdots p$

Suy ra: $a^{p-1} + b^{p-1} - 2 \vdots p$. Do $p = 4k + 3$ nên $a^{4k+2} + b^{4k+2} - 2 \vdots p$

Ta có $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \vdots a^2 + b^2 \vdots p$ nên $2 \vdots p$.

Do p là số nguyên tố nên $p = 2$, trái với $p = 4k + 3$.

Bổ đề được chứng minh.

Phương trình: $x^2 - y^3 = 7$ hay $x^2 + 1 = y^3 + 8$

Xét hai trường hợp:

– Nếu y chẵn thì x lẻ. Khi đó vế trái chia cho 4 dư 2, còn vế phải chia hết cho 4. Mâu thuẫn

– Nếu y lẻ, ta có: PT $\Leftrightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

Ta thấy $y^2 - 2y + 4 = (y - 1)^2 + 3$ chia cho 4 dư 3 nên có ước nguyên tố p có dạng $4k + 3$. Do đó $x^2 + 1$ có ước nguyên tố p có dạng $4k + 3$: Vô lý.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 20. 16:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $7(x^2 + xy + y^2) = 39(x + y)$ b) $7x^2 - 5y^2 = 3$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $7(x^2 + xy + y^2) = 39(x + y)$

vì 7 và 39 nguyên tố cùng nhau nên:

$$\begin{cases} x + y = 7m \\ x^2 + xy + y^2 = 39m \end{cases}, \text{ (m nguyên)}$$

Ta có: $x^2 + 2xy + y^2 = 49m^2$ suy ra : $xy = 49m^2 - 39m$

Ta có bất đẳng thức $(x + y)^2 \geq 4xy$ nên:

$49m^2 \geq 4(49m^2 - 39m)$, suy ra $m(52 - 49m) \geq 0$

Vì $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ nên $m \geq 0$ do đó $m \in \{0; 1\}$

Với m = 0 thì $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$ ta có nghiệm (0; 0)

Với m = 1 thì: $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$ ta có nghiệm (5; 2), (2; 5)

Vậy nghiệm: (0; 0), (5; 2), (2; 5).

b) $7x^2 - 5y^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 6y^2 + x^2 + y^2 = 3$ nên: $x^2 + y^2 \vdots 3$

Ta thấy x^2, y^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà $x^2 + y^2 \vdots 3$ nên x^2 và y^2 đều chia hết cho 3. Do đó x và y đều chia hết cho 3 nên x^2, y^2 chia hết cho 9.

Vì vế trái $(7x^2 - 5y^2)$ chia hết cho 9, còn vế phải không chia hết cho 9.Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 20. 17:

Giải phương trình nghiệm tự nhiên:

a) $x^2 + y^2 + xy + y = x$ b) $m^2n + 6mn + 9n = 32$.

Hướng dẫn giải

a) $x^2 + y^2 + xy + y = x$

Xét $x > 1$ không thỏa (do x, y là các số nguyên không âm)

Vậy $0 \le x \le 1$ và $x \in Z \Rightarrow x \in \{0 ; 1\}$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$ (thỏa). Với $x = 1 \Rightarrow y = 0$ (thỏa)

Vậy có 2 nghiệm: (0 ; 0) và (1 ; 0).

b) Ta có: $m^2n + 6mn + 9n = 32$. Xét $n = 0$ thì không thỏa mãn.

Xét $n \neq 0$ thì PT $\Leftrightarrow n(m+3)^2 = 32$

$\Leftrightarrow (m+3)^2 = \dfrac{32}{n}$ (m, n nguyên dương)

Vì $m+3 > 3$ nên n là ước của 32 và $\dfrac{32}{n}$ là số chính phương lớn hơn 9

$$(m+3)^2 = \frac{32}{n} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m+3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm (m,n) bằng (1,2).

Bài toán 20. 18:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2$ b) $x^3 - y^3 = xy + 8$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu y thoả mãn phương trình thì –y cũng thoả mãn, do đó ta giả sử $y \ge 0$.

PT $\Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = y^2$

Đặt $x^2 + 3x + 1 = a$, ta được:

$(a-1)(a+1) = y^2 \Leftrightarrow a^2 - 1 = y^2 \Leftrightarrow (a+y)(a-y) = 1$

Suy ra $a + y = a - y = 1$, do đó $y = 0$ nên:

$x = 0$; $x = -1$; $x = -2$; $x = -3$

Vậy nghiệm: (0; 0), (–1; 0), (–2; 0), (–3, 0)

b) Ta có $x^3 - y^3 = xy + 8$

nên $|x - y| \, |x^2 + xy + y^2| = |xy + 8| \Rightarrow x \neq y$

Do x, y nguyên nên $|x - y| \ge 1$

Suy ra: $|x^2 + xy + y^2| \le |xy + 8|$

do đó: $x^2 + xy + {}^2 \le |xy + 8|$

Xét $xy + 8 < 0$ thì: $x^2 + xy + y^2 \le -xy - 8 \Leftrightarrow (x+y)^2 \le -8$: loại

Xét $xy + 8 \ge 0$ thì: $x^2 + xy + y^2 \le xy + 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 8$

Do đó: $x^2, y^2 \in \{0; 1; 4\}$

Nếu $x = 0$ thì $y^3 = -8$, nên $y = -2$

Nếu $y = 0$ thì $x^3 = 8$ nên $x = 2$.

Nếu x, y đều khác 0 thì $x^2, y^2 \in \{1; 4\}$. Do $x \neq y$ nên chỉ có:

$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Như vậy trong hai số x và y có một số chẵn, một số lẻ: loại

Vậy nghiệm: (0; –2), (2; 0).

Bài toán 20. 19:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^3 + y^3 = 3xy + 3$ b) $x^3 – y^3 = xy + 25$.

Hướng dẫn giải

a) $x^3 + y^3 = 3xy + 3$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 – 3xy = 3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + 1 – 3xy = 4$

$\Leftrightarrow (x + y + 1)\left[\dfrac{(x-y)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2}{2}\right] = 4$

Suy ra: $(x – y)^2 + (y – 1)^2 + (x – 1)^2 \in \{2; 4; 8\}$

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nếu ba số đó là 1, 1, 0; bằng 4 nếu ba số là 4, 0, 0; bằng 8 nếu ba số là 4, 4, 0; trong trường hợp nào cũng có một số bằng 0, tức là:

$\begin{bmatrix} x-1=0 \\ y-1=0 \\ x-y=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ y=1 \\ x=y \end{bmatrix}$

– Xét x + y + 1 = 4, tức là x + y = 3

Nếu x = 1 thì y = 2, thoả mãn. Nếu y = 1 thì x = 2 thoả mãn

– Xét x + y + 1 = 2, tức là x + y = 1

Nếu x = 1 thì y = 0, không thoả. Nếu y = 1 thì x = 0, không thoả

– Xét x + y + 1 = 1, tức là x + y = 0

Nếu x = 1 thì y = –1, thoả mãn. Nếu y = 1 thì x = –1, thoả mãn

Nếu x = y thì x = y = 0, không thỏa mãn

Vậy nghiệm: (2; 1), (1; 2), (1; –1), (–1; 1).

b) $x^3 – y^3 = xy + 25 \Leftrightarrow (x – y)^3 + 3xy(x + y) = xy + 25$

Đặt x – y = a, xy = b, ta có: $a^3 + 3ab = b + 25$

Do đó $a^3 – 25 = – (3a – 1)b$

nên $a^3 – 25 \vdots 3a – 1$, từ đó 3a – 1 là ước của 674 và chọn được:

$3a – 1 \in \{–1; 2; –337; 674\}$

Tương ứng tìm được:

$\begin{cases} a = 0 \\ b = -25 \end{cases}, \begin{cases} a = 1 \\ b = 12 \end{cases}, \begin{cases} a = -112 \\ b = -4169 \end{cases}, \begin{cases} a = 225 \\ b = -16900 \end{cases}$

Do phải có $a^2 + 4b > 0$ nên chọn a = 1, b = 12 cho các nghiệm: (4; 3), (–3; –4).

Bài toán 20. 20:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ b) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 1$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$ nên:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$

Suy ra: $xy + yz + zx = 0$ do đó: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Giả sử $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ thì $z = 0$, $y = 0$, $x = \pm 1$

Vậy nghiệm: (1; 0; 0) và các hoán vị.

b) PT $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$

Vì x^2y^2 là số chính phương nên chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1.

Nếu x^2y^2 chia cho 4 dư 1 thì x, y lẻ. Khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 4 dư 2 nên $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 4 dư 2 hoặc 3 : vô lý.

nên $x^2y^2 \vdots 4$. Do đó x và y không thể đều lẻ.

Xét trong x và y có một số chẵn, một số lẻ, chẳng hạn x chẵn, y lẻ.

Khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 4 dư 1, còn z^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1 nên $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 4 dư 1 hoặc 2: vô lý.

Xét x và y đều chẵn. Suy ra z chẵn.

Đặt $x = 2x_2$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, với x_1, y_1 nguyên.

Thay vào ta được:

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1^2y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$$

Vế phải chia hết cho 4. Lại lập luận như trên suy ra x_1, y_1, z_1 chẵn.

Đặt $x_1 = 2x_1$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$.

Thay vào và rút gọn $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 16x_2^2y_2^2$

Bằng phương pháp lùi vô hạn, như vậy nếu (x, y, z) là nghiệm của phương trình thì x, y, ź chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tuỳ ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là (0; 0; 0).

Bài toán 20. 21:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

a) $xy = z^2$ b) $x^2 + y^2 = z^2$

Hướng dẫn giải

a) Trước hết ta có thể giả sử (x, y, z) = 1. Thật vậy nếu bộ ba số (x_o, y_o, z_o) thoả mãn phương trình và có ƯCLN bằng d, giả sử $x_o = dx_1$, $y_o = dy_1$, $z_o = dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm.

Với (x, y, z) = 1 thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có $z^2 = xy$ mà (x, y) = 1 nên $x = a^2$, $y = b^2$, với a, b, $\in \mathbf{N}^*$

Suy ra: $z^2 = xy = (ab)^2$, do đó: z = ab.

Như vậy: $\begin{cases} x = ta^2 \\ y = tb^2 \\ z = tab \end{cases}$; với t là số nguyên dương tuỳ ý.

Thử lại đúng.

b) Trước hết ta có thể giả sử x, y, z nguyên tố cùng nhau. Thật vậy nếu bộ ba số (x_o, y_o, z_o) thoả mãn phương trình và có ƯCLN là d, giả sử $x_o = dx_1$, $y_o = dy_1$, $z_o = dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình.

Với x, y, z nguyên tố cùng nhau thì chúng đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số ấy có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta thấy x và y không thể cùng chẵn (vì chúng nguyên tố cùng nhau), không thể cùng lẻ (vì nếu x và y cùng lẻ thì z chẵn, khi đó $x^2 + y^2$ chia hết cho 4 dư 2, còn $z^2 \vdots 4$). Như vậy trong hai số x và y có một số chẵn, một số lẻ.

Giả sử x lẻ, y chẵn thì z lẻ. Ta viết phương trình dưới dạng

$x^2 = (z + y)(z - y)$

Ta có z + y và z – y là các số lẻ và chúng nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, giả sử $z + y \vdots d$, $z - y \vdots d$ (d lẻ) thì:

$(z + y) + (z - y) = 2z \vdots d$, $(z + y) - (z - y) = 2y \vdots d$

Do (2, d) = 1 nên $z \vdots d$, $y \vdots d$

Do (y, z) = 1 nên d = 1. Vậy (z + y, z – y) = 1

Hai số nguyên dương z + y và z – y nguyên tố cùng nhau, có tích là số bình phương x^2 nên mỗi số z + y và z – y cũng là số chính phương.

Đặt $z + y = m^2$; $z - y = n^2$ với m, n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, m > n.

Do đó: $\begin{cases} x = mn \\ y = \dfrac{m^2 - n^2}{2} \\ z = \dfrac{m^2 + n^2}{2} \end{cases}$ với m và n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, m > n.

Thử lại đúng.

Bài toán 20. 22:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2015$ b) $x^3 + y^3 + z^3 = 2021$

Hướng dẫn giải

a) Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 cũng dư 1.

Tổng $x^2 + y^2 + z^2$ là số lẻ nên trong ba số x^2, y^2, z^2 phải có: hoặc có một số lẻ, hai số chẵn; hoặc ba số đều lẻ.

Trường hợp trong ba số x^2, y^2, z^2 có một số lẻ, hai số chẵn thì vế trái chia cho 4 dư 1, còn vế phải chia cho 4 dư 3: loại

Trường hợp ba số x^2, y^2, z^2 đều lẻ thì vế trái chia cho 8 dư 3, còn vế phải chia cho 8 dư 7: loại

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) Lập phương trình của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 8. Do đó vế trái của phương trình chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8. Còn vế phải chia cho 9 dư 5.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài toán 20. 23:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 2011$ b) $x^7 + y^7 = 7z$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu a là số chẵn thì $a^4 \vdots 16$

Nếu a là số lẻ thì a^2 chia cho 8 dư 1 nên

$a^4 = (8k + 1)^2 = 64k^2 + 16k + 1$, chia cho 16 dư 1

Mỗi số x^4, y^4, z^4, t^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1 nên

$x^4 + y^4 + z^4 + t^4$ chia cho 16 có số dư nhỏ hơn hoặc bằng 4.

Trong khi đó, vế phải chia cho 16 dư 11.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) $x^7 + y^7 = 7z$ nên $x^7 + y^7$ chia hết cho số nguyên tố 7

Theo định lí nhỏ Fecma: $x^7 - x \vdots 7$, $y^7 - y \vdots 7$

PT: $(x^7 - x) + (y^7 - y) + (x + y) = 7z$

Ta có: $x + y \vdots 7$. Đặt $x + y = 7k$ (k nguyên)

Suy ra nghiệm $\begin{cases} x = t \\ y = 7k - t \\ z = \dfrac{t^7 + (7k - t)^7}{7} \end{cases}$, (t, k nguyên tuỳ ý)

Bài toán 20. 24:

Giải phương trình nghiệm nguyên tố :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = zyz$ b) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xyzt$.

Hướng dẫn giải

a) Tồn tại một trong ba số x, y, z chia hết cho 3.

Thật vậy nếu cả ba số không chia hết cho 3 thì vế trái chia hết cho 3, vế phải không chia hết cho 3.

Giả sử $z \vdots 3$ thì z nguyên tố nên z = 3.Ta có: $x^2 + y^2 + 9 = 3xy$

Suy ra $x^2 + y^2 \vdots 3$, vì x, y nguyên tố nên x = y = 3

Thử lại đúng. Vậy nghiệm (3 ;3 ;3).

b) Tồn tại một trong bốn số x, y, z, t chia hết cho 2.

Giả sử t ⋮ 2 thì t nguyên tố nên t = 2.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 2xyz$

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \vdots 2$. Tồn tại một trong ba số nguyên tố x, y, z chia hết cho 2, giả sử z ⋮ 2 thì z = 2.

Ta có: $x^2 + y^2 + 8 = 4xy$ do đó: $x^2 + y^2$ chia hết cho 4.

Suy ra x = y = 2, thử lại đúng. Vậy nghiệm (2 ;2 ;2 ;2).

Bài toán 20. 25:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

a) x! + y! = (x + y)! b) $x^{17} + y^{17} = 19^{17}$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $x \geq y$ thì $x! \geq y!$. Do đó: $(x + y)! = x! + y! \leq 2x!$

Như vậy: $2x! \geq (x + y)!$ hay: $2x! \geq x!(x + 1)(x + 2)... (x + y)$

Nên: $2 \geq (x + 1)(x + 2) ... (x + y)$

Chỉ xảy ra khi x = 1, y = 1

Thử lại, cặp số (1; 1) thoả mãn 1! + 1! = 2!

b) Giả sử $x^{17} + y^{17} = 19^{17}$ và $1 \leq x \leq y < 19$

Ta có $19^{17} \geq (y + 1)^{17} = y^{17} + 17y^{16} + ... \Rightarrow 19^{17} > y^{17} + 17y^{16}$

Do đó: $x^{17} + y^{17} > y^{17} + 17y^{16} \Rightarrow x^{17} > 17y^{16}$

Do $y \geq x \geq 1$ nên $x^{17} > 17y^{16}$ suy ra $x^{17} > 17x^{16}$, vậy x > 17.

Ta có: $17 < x \leq y < 19$, chỉ có thể x = y = 18.

Thử: $18^{17} + 18^{17} = 19^{17}$, loại vì vế trái chẵn, vế phải lẻ.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Bài toán 20. 26:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{40}{31}$.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $x \geq y$ thì $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$, $\frac{1}{2xy} < \frac{1}{y}$ nên: $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} < \frac{3}{y}$

Suy ra y < 6. Mặt khác y > 1.

Xét $y \in \{2; 3; 4; 5\}$ được: y = 3; x = 7.Vậy nghiệm: (7; 3), (3; 7).

b) Ta tách phần nguyên và phần lẻ :

Ta có: $\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{40}{31}$ nên $x + \frac{zt + 1}{yzt + y + t} = 1 + \frac{9}{31}$

Do có duy nhất một cách viết như trên nên: x = 1; $\frac{zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{9}{31}$

Suy ra $\frac{yzt+y+1}{zt+1}=\frac{31}{9}$ hay $y+\frac{t}{2t+1}=3+\frac{4}{9}$

Suy ra y = 3; $\frac{zt+1}{t}=\frac{9}{4}$ hay $z+\frac{1}{t}=2+\frac{1}{4}$

Suy ra: z = 2, t = 4. Thử lại đúng. Vậy nghiệm: (1; 3; 2; 4)

Bài toán 20. 27:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

b) $(1 + 2 + 3 + ... + x)(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + x^2) = y^2$

Hướng dẫn giải

a) $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$

Ta thấy xy và xy + 1 là hai số nguyên liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Xét xy = 0, thì có $x^2 + y^2 = 0$ nên x = y = 0.

Xét xy + 1 = 0. Ta có xy = –1 nên (x, y) bằng (1; –1), hoặc (–1; 1).

Thử lại, ba cặp số (0; 0), (1; –1), (–1; 1) đều là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Ta có tổng: $1^2 + 2^2 + ... + x^2 = \frac{1}{6}x(x + 1)(2x + 1)$

nên phương trình: $\frac{x(x+1)}{2}.\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}=y^2$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2.\frac{2x+1}{3}=y^2$

Ta phải có $\frac{2x+1}{3} = (2n + 1)^2$ với n nguyên

Phương trình này có vô số nghiệm nguyên: $x = 6n^2 + 6n + 1$.

Từ đó suy ra nghiệm y.

Bài toán 20. 28:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$

b) $\frac{1}{x^2(x^2+y^2)}+\frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}+\frac{1}{x^2(x^2+y^2+z^2)}=1.$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$, x, y, z ≠ 0

$\Rightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3xyz \Rightarrow xyz > 0$

Do đó trong x, y, z hoặc cả ba số dương hoặc có một số dương, hai số âm. Chú ý rằng nếu đổi dấu hai trong ba số x, y, z thì PT không đổi, do đó có thể giả thiết x, y, z > 0

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương:

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z}.\frac{xz}{y}.\frac{yz}{x}} = 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3$$

Dấu = khi và chỉ khi:

$$\frac{xy}{z} = \frac{xz}{y} = \frac{yz}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Đổi dấu hai trong ba số x, y, z ta được thêm ba nghiệm nữa:

$$(1; -1; -1), (-1; 1; -1), (-1; -1; 1)$$

b) Đặt $x^2 = a$, $x^2 + y^2 = b$, $x^2 + y^2 + z^2 = c$ thì a, b, c nguyên dương, $1 \leq a \leq b \leq c$.

Phương trình trở thành: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1$

Do đó a + b + c = abc. Giải ra được a = 1, b = 2, c = 3.

Suy ra $x^2 = y^2 = z^2 = 1$

Vậy phương trình có tám nghiệm nguyên:(1; 1; 1), (1; 1; –1), (1; –1; 1), (–1; 1; 1), (1; –1; –1), (–1; 1; –1), (–1; –1; 1), (–1; –1; –1).

Bài toán 20. 29:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = y$ b) $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = \sqrt{48}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Bình phương hai vế :

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = y$ nên $x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = y^2$

hay $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = y^2 - x = k$ ($k \in \mathbf{N}$)

Bình phương tiếp tục rồi chuyển vế :

$\sqrt{x+\sqrt{x}} = k^2 - x = m$ ($m \in \mathbf{N}$) nên: $x + \sqrt{x} = m^2$

hay $\sqrt{x} = m^2 - x$ .Do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên và là số tự nhiên.

Ta có: $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = m^2$

Hai số tự nhiên liên tiếp $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x} + 1$ có tích là một số chính phương nên số nhỏ : $\sqrt{x} = 0$

Suy ra: x = 0; y = 0 thoả mãn phương trình đã cho

Vậy nghiệm của phương trình là (0; 0).

b) PT $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4\sqrt{3}$.Điều kiện: $y \geq 0$; $x \geq 12$

hay $3\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4\sqrt{3}$

nên: $9y = 4x + 48 - 16\sqrt{3x}$ hay $16\sqrt{3x} = 4x + 48 - 9y$

Do đó 3x là số chính phương nên $x = 3a^2$

Suy ra $y = 3b^2$

PT: $2a\sqrt{3} - 3b\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 2a - 3b = 4$

Ta có b ⋮ 2. Đặt b = 2t thì a – 3t = 2 nên a = 3t + 2

Khi đó: $x = 3a^2 = 3(3t + 2)^2$, $y = 3b^2 = 12t^2$

Điều kiện $x \geq 12$ được thoả mãn. Thử lại đúng.

Vậy nghiệm $\begin{cases} x = 3(3t+2)^2 \\ y = 12t^2 \end{cases}$, với t là số tự nhiên tuỳ ý.

Bài toán 20. 30:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y} + 2$ b) $\sqrt{xyz} = (x + y)\sqrt{z}$.

Hướng dẫn giải

a) Do hai vế của phương trình là số dương, bình phương hai vế ta được phương trình tương đương $x + y + 2\sqrt{xy} = x + y + 4 + 4\sqrt{x+y}$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} = 2 + 2\sqrt{x+y} \Leftrightarrow xy = 4 + 4(x + y) + 8.\sqrt{x+y}$.

Suy ra $\sqrt{x+y}$ là số nguyên dương từ đó $\sqrt{xy}$ là số nguyên dương chẵn.

Đặt $\sqrt{xy} = 2t$ (t nguyên dương), ta có:

$2 + 2\sqrt{x+y} = 2t$ hay $1 + \sqrt{x+y} = t$

Do đó $\sqrt{x} + \sqrt{y} = (\sqrt{x+y} + 1) + 1 = t + 1$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = t + 1 \\ \sqrt{x}.\sqrt{y} = 2t \end{cases}$ nên $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình $X^2 - (t + 1)X + 2t = 0$

$\Delta = (t + 1)^2 - 8t = (t^2 - 6t + 9) - 8 = (t - 3)^2 - (2\sqrt{2})^2$

$= (t - 3 + 2\sqrt{2})(t - 3 - 2\sqrt{2}) \geq 0$

Suy ra $t \geq 3 + 2\sqrt{2} > 6$

Khi đó:

$X_1 = \dfrac{t + 1 + \sqrt{t^2 - 6t + 1}}{2}$; $X_2 = \dfrac{t + 1 - \sqrt{t^2 - 6t + 1}}{2}$

Do $t \in Z$, nên để $X \in Z$ thì $t^2 - 6t + 1$ là số chính phương

Ta lại có $(t-5)^2 \le t^2 - 6t + 1 < (t-3)^2$

Nếu $t^2 - 6t + 1 = (t-4)^2$, phương trình này không có nghiệm nguyên.

Nếu $t^2 - 6t + 1 = (t-5)^2 \Rightarrow t = 6$ và $X_1 = 4$, $X_2 = 3$

Nghiệm của phương trình là x = 16; y = 9 và x = 9; y = 16.

b) Ta có $(x+y)^2 z = 10\overline{xy} + z$ hay $|(x+y)^2 - 1|z = 10\overline{xy}$.

Nếu $\overline{xy}$ không chia hết cho 3 thì (x + y) cũng không chia hết cho 3, do đó $(x+y)^2$ khi chia cho 3 còn dư 1, từ đó $(x+y)^2 - 1$ chia hết cho 3, suy ra xy chia hết cho 3, trái giả thiết.

Vậy xy chia hết cho 3, nên (x + y), z đều chia hết cho 3.

Vì $1 \le x + y \le 18$, do đó:

Nếu x + y lấy giá trị 12, 15, 18 thì $10\overline{xy}$ chia hết cho 143, 224, 323 khi đó xy chia hết cho 143, 224, 323 là điều vô lí vì $\overline{xy}$ là số có hai chữ số.

Nếu x + y = 3 thì $8z = 10\overline{xy}$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái là số có một chữ số trong khi đó vế phải là số có ba chữ số.

Nếu x + y = 6 thì $7z = 2\overline{xy} = 20x + 2y = 18x + 12$. Phương trình này không có nghiệm nguyên.

Nếu x + y = 9 thì $8z = \overline{xy} = 9x + 9$, suy ra z = 9; x = 7; y = 2. Bộ ba số x = 7; y = 2; z = 9 thoả mãn đề bài.

Bài toán 20. 31:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương :

a) $2^x + 3^x = 35$ b) $2^x + 3^x = 5^x$

Hướng dẫn giải

a) x = 1, x = 2 không thoả mãn $2^x + 3^x = 35$

x = 3 thoả mãn $2^x + 3^x = 35$ vì 8 + 27 = 35

Với x > 3 thì $2^x + 3^x > 2^3 + 3^3 = 35$: loại

Vậy nghiệm: x = 3.

b) $2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$

Với x = 1 thì vế trái bằng 1: đúng

Với $x \ge 2$, vì cơ số $\frac{2}{5}, \frac{3}{5} < 1$ nên $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$: loại

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình: x = 1.

Bài toán 20. 32:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương :

a) $2^x + 2^y = 2^z$ b) $x^x + y^y + z^z = t^t$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $x \geq y$. Chia hai vế cho $2^y \neq 0$ được: $2^{x-y} + 1 = 2^{z-y}$

Từ đề bài suy ra $z > y$ nên vế phải số chẵn. Do đó $2^{x-y} = 1$, vậy $x - y = 0$, tức là $x = y$.Đặt $x = y = k$ (k nguyên dương).

$\Rightarrow 2 = 2^{z-k} \Leftrightarrow 1 = z - k \Leftrightarrow z = k + 1$

Vậy nghiệm: $(k; k; k + 1)$ với k là nguyên dương tuỳ ý.

b) Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z < t$

Nếu $z = 1$ thì $x = y = 1$. Ta có $3 = t^t$: loại

Nếu $z = 2$ thì $t \geq 3$. Khi đó: $t^t \geq 3^3 > 3.2^2 \geq x^x + y^t + z^z$: vô lý

Nếu $z \geq 3$ thì: $t^t \geq (z + 1)^{z+1} > z^{z+1} = z.z^z \geq 3 \,.\, z^z \geq x^x + y^y + z^z$: vô lý

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Bài toán 20. 33:

Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $\begin{cases} xy + 2zt = 0 \\ xt - yz = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 209 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $xy + 2zt = 0$; $xt - yz = 1$

Suy ra: $(xy + 2zt)^2 + 2(xt - yz)^2 = 2$ nên: $(x^2 + 2z^2)(y^2 + 2t^2) = 2$

Xét $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 1 \\ y^2 + 2t^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1; z = 0; y = 0; t = \pm 1$

Ta có: $xt = yz + 1 = 1 \Rightarrow$ x và t cùng dấu.

Nghiệm $(1; 0; 0; 1)$ và $(-1; 0; 0; -1)$

Xét $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 2 \\ y^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0; z = \pm 1; y = \pm 1; t = 0$

Ta có: $yz = xt - 1 = -1 \Rightarrow$ y và z trái dấu

Suy ra nghiệm $(0; 1; -1; 0)$ và $(0; -1; 1; 0)$.

Vậy hệ có bốn nghiệm:

$(1; 0; 0; 1)$, $(-1; 0; 0; -1)$, $(0; 1; -1; 0)$, $(0; -1; 1; 0)$.

b) Ta có: $z = 25 - x - y$ nên $x^2 + y^2 + (25 - x - y)^2 = 209$

$x^2 + (y - 25)x + (y^2 - 25y + 208) = 0$

Để tồn tại x phải có: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y - 25)^2 - 4(y^2 - 25y + 208) \geq 0$

$\Leftrightarrow -3y^2 + 50y - 207 \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 50y + 207 \leq 0 \Leftrightarrow 7\frac{2}{3} \leq y \leq 9$

Do y là số nguyên nên $y = 8$ hoặc $y = 9$

Với $y = 8$ thì $x^2 - 17x + 72 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8; x_2 = 9$

Với $y = 9$ thì $x^2 - 16x + 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 8)^2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 8$

Vậy nghiệm: $(8; 8; 9)$, $(9; 8; 8)$, $(8; 9; 8)$.

Bài toán 20. 34:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

a) $x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0$ b) $(x + 1)^{y+1} + 1 = (x + 2)^{z+1}$

Hướng dẫn giải

a) PT (1) $\Rightarrow (2x + 1)^2 = 2(2y + 1)^2 - 1$

Đặt: $z = 2x + 1$, $t = 2y + 1$, PT trở thành: $z^2 - 2t^2 = -1$

Đây là phương trình "kiểu Pell", có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là (1; 1) nên: Các nghiệm nguyên dương có dạng:

$$\begin{cases} z_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2} \\ t_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2\sqrt{2}} \end{cases}, n \in \mathbf{N}$$

Với $n = 0 \Rightarrow z_0 = t_0 = 1 \Rightarrow x = 0, y = 0$ không thoả bài toán

Ta sẽ chứng tỏ với $n > 0$ thì z_n, t_n lẻ và lớn hơn 1. (Khi đó ta được các nghiệm (x, y) tương ứng của bài toán).

Đặt $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $S_n = x_1^n + x_2^n$

$\Rightarrow$ x_1, x_2 là nghiệm phương trình: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $S_{n+2} = 2S_{n+1} + S_n$

Do $S_0 = 2$, $S_1 = 2 \Rightarrow (S_n)$ là dãy tăng với $S_n \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow z_n = \dfrac{S_{2n+1}}{2}$ là dãy tăng và lẻ

$\Rightarrow$ Với $n > 0$, z_n lẻ, lớn hơn 1 ($z_n \geq z_1 = 7$)

Suy ra: $2t_n^2 = z_n^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 = 2 \pmod 4$

$\Rightarrow$ Với $n > 0$, t_n lẻ và lớn hơn 1 (do $z_n > 1$)

Vậy: Các nghiệm nguyên dương của n là:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1} - 2}{4} \\ y_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1} - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$$

b) Đặt $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$. Ta có $a, b, c \geq 2$ và

$$a^b + 1 = (a + 1)^c \Leftrightarrow ((a + 1) - 1)^b + 1 = (a + 1)^c$$

Từ hai phương trình trên suy ra $(-1)^b + 1 \equiv 0 \pmod{(a + 1)}$, suy ra b là số lẻ. Áp dụng khai triển nhị thức cho phương trình thứ hai và đưa về phương trình đồng dư $\pmod{(a + 1)^2}$ ta cũng có:

$$C_b^1 (a + 1)(-1)^{b-1} + (-1)^b + 1 \equiv 0 \pmod{(a + 1)^2},$$

Suy ra (a + 1) chia hết b và do đó a là số chẵn. Mặt khác, áp dụng khai triển nhị thức cho phương trình thứ nhất và đưa về phương trình đồng dư (mod a^2) ta được $1 \equiv C_c^1 a + 1 \pmod{a^2}$, từ đó c chia hết cho a, suy ra c là số chẵn. Đặt $a = 2a_1$, $c = 2c_1$, ta có:

$$2^b a_1^b = a^b = (a+1)^c - 1 = ((a+1)^{c_1} - 1)((a+1)^{c_1} + 1)$$

Suy ra UCLN $((a+1)^{c_1} - 1, (a+1)^{c_1} + 1)) = 2$. Từ đó, do $2a_1$ là một ước số của $(a+1)^{c_1} - 1$, ta có thể kết luận:

$$(a+1)^{c_1} - 1 = 2a_1^b \ , \ (a+1)^{c_1} + 1 = 2^{b-1}$$

Ta phải có $2^{b-1} > 2a_1^b$ nên suy ra $a_1 = 1$. Từ đó, các phương trình trên cho ta $c_1 = 1$ và $b = 3$. Vậy nghiệm duy nhất của bài toán là: (x, y, z) = (1, 2, 1).

Bài toán 20. 35:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

a) $4x^4 + 8x^2y + 3y^2 - 4y - 15 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 2011^{1995^k+1}(10 - z)$ với k là số cho trước.

Hướng dẫn giải

a) $4x^4 + 8x^2y + 3y^2 - 4y - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x^4 + 2xy + y^2) - (y^2 + 4y + 4) = 11$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + y)^2 - (y + 2)^2 = 11$

$\Leftrightarrow (2x^2 + y - 2)(2x^2 + 3y + 2) = 11$

Giải lần lượt các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x^2 + y - 2 = 1 \\ 2x^2 + 3y + 2 = 11 \end{cases} ; \begin{cases} 2x^2 + y - 2 = 11 \\ 2x^2 + 3y + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y - 2 = -1 \\ 2x^2 + 3y + 2 = -11 \end{cases} ; \begin{cases} 2x^2 + y - 2 = -11 \\ 2x^2 + 3y + 2 = -1 \end{cases}$$

Ta tìm được các nghiệm của phương trình

(x, y) = (0, 3); (–2, –7) và (2, –7) : loại.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

b) Trước hết ta chứng minh bổ đề:

"Nếu p là số nguyên tố dạng 4k + 3 và $x^2 + y^2 \vdots p$ thì $x \vdots p, y \vdots p$"

Thật vậy nếu $x \not\vdots p$ thì $y \not\vdots p$

Theo định lí Fecma $x^{p-1} = x^{4k+2} \equiv 1 \pmod p$

$y^{4k+2} \equiv 1 \pmod p$

Mặt khác vì $x^2 \equiv -y^2 \pmod p \Rightarrow x^{4(2k+1)} \equiv -y^{4(2k+1)} \pmod p$

$\Rightarrow 1 \equiv -1 \pmod p$: vô lí

Trở lại bài toán, vì 2011 là số nguyên tố dạng 4k + 3, do đó theo bổ đề $x = 2001x_1$; $y = 2011y_1$

Đặt $2n = 1995^k + 1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 2011^{2n-2}(10 - z)$

Tiếp tục như vậy n lần ta có: $x_n^2 + y_n^2 = 10 - z$ (1)

Với $x = 2011^n x_n$, $y = 2011^n y_n$

Bằng cách thử trực tiếp ta thấy nghiệm nguyên dương của (1) là:

$(x_n, y_n, z) = (1, 1, 8), (1, 2, 5), (2, 1, 3)$ và $(2, 2, 2)$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là:

$(2001^n, 2011^n, 8), (2011^n, 2.2011^n, 5), (2.2011^n, 2011^n, 5), (2.2011^n, 2.2011^n, 2)$ với $n = \frac{1995^k + 1}{2}$.

Bài toán 20. 36:

Giải phương trình nghiệm tự nhiên (x, y, n):

$$x! + y! = 3^n.n! \quad (1).$$

Hướng dẫn giải

Giả sử (x, y, n) là bộ số tự nhiên thoả mãn (1). Dễ thấy phải có $n \geq 1$; và không mất tổng quát, có thể giả sử $x \leq y$.

Trường hợp 1 : $x \leq n$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{y!}{x!} = 3^n \frac{n!}{x!}$ (2)

Suy ra $1 + \frac{y!}{x!} \equiv 0 \pmod 3$. Từ đây, lưu ý rằng tích của ba số nguyên liên tiếp là một số chia hết cho 3 và $n \geq 1$. Suy ra $x < y \leq x + 2$.

– Nếu $y = x + 2$ thì từ (2) ta có:

$$1 + (x + 1)(x + 2) = 3^n \frac{n!}{x!} \quad (3)$$

Với lưu ý rằng tích của hai số nguyên liên tiếp là một số chia hết cho 2, từ (3) suy ra $n \leq x + 1$.

Với $n = x$ thì từ (3) ta được

$1 + (x + 1)(x + 2) = 3^x$, hay $x^2 + 3x + 3 = 3^x$ (4)

Vì $x \geq 1$ nên từ (4) suy ra $x \equiv 0 \pmod 3$.

Do đó, phải có $x \geq 3$. Khi đó, từ (4) ta có: $-3 = x^2 + 3x - 3^x \equiv 0 \pmod 9$

Điều vô lí nhận được chứng tỏ $n \neq x$

Với $n = x + 1$, từ (3) ta có: $1 + (x + 1)(x + 2) = 3^n(x + 1)$

Suy ra $x + 1$ là ước nguyên dương của 1. Do đó $x = 0$, kéo theo $y = 2$ và $n = 1$.

– Nếu $y = x + 1$ thì từ (2) ta có: $x + 2 = 3^n \frac{n!}{x!}$ (5)

Với chú ý rằng $n \geq 1$, từ (5) suy ra $x \geq 1$.

Do đó :$x + 2 \equiv 1 \pmod{(x+1)}$. Vì thế, từ (5) suy ra n = x.

Khi đó, từ (5) ta có $x + 2 = 3^x$ (6)

Dễ thấy, có duy nhất giá trị x = 1 thoả mãn (6), ta được bộ số (x = 1, y = 2, n = 1).

Trường hợp 2: x > n. Ta có : $(1) \Leftrightarrow \frac{x!}{n!} + \frac{y!}{n!} = 3^n$ (7)

Với lưu ý rằng n + 1 và n + 2 không thể đồng thời là các luỹ thừa của 3, từ (7) suy ra x = n + 1.

Khi đó, từ (7): $n + 1 + \frac{y!}{n!} = 3^n$ (8)

Vì $y \geq x$ nên $y \geq n + 1$. Đặt $A = \frac{y!}{(n+1)!}$. Khi đó có thể viết hệ thức (8) dưới dạng: $(n + 1)(1 + A) = 3^n$ (9)

Rõ ràng, nếu $y \geq n + 4$ thì $A \equiv 0 \pmod 3$; vì thế A + 1 không thể là một luỹ thừa của 3. Do đó, từ (9) suy ra $y \leq n + 3$.

- Nếu y = n + 3 thì A = (n + 2)(n + 3). Do đó, từ (9) ta có:
  $(n + 1)(1 + (n+2)(n+3)) = 3^n$, hay $(n + 2)^3 - 1 = 3^n$ (10)
  Suy ra n > 2 và $n + 2 \equiv 1 \pmod 3$.
  Đặt n + 2 = 3k + 1, $k \geq 2$.
  Khi đó, (10) trở thành $9k.(3k^2 + 3k + 1) = 3^{3k-1}$: vô lý.
  Vì $3k^2 + 3k + 1$ không là một luỹ thừa của 3.
- Nếu y = n + 2 thì A = n + 2. Do đó, từ (9) $(n + 1)(n + 3) = 3^n$: vô lý
  Vì n + 1 và n + 3 không thể đồng thời là các luỹ thừa của 3
- Nếu y = n + 1, ta có A = 1.
  Do đó, từ (9) ta được: $2(n + 1) = 3^n$. Rõ ràng, không tồn tại n thoả mãn hệ thức vừa nêu. Do vậy $y \neq n + 1$.
- Ngược lại, dễ thấy tất cả các bộ số vừa nêu đều thoả mãn (1).
  Vậy, nghiệm là: (0, 2, 1), (2, 0, 1), (1, 2, 1) và (2, 1, 1).

Bài toán 20. 37:

Giải phương trình, hệ phương trình:

a) $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{x^2 - 1}\right] = y$ với nghiệm nguyên tố.

b) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ (2x + 1)^3 + (y - 1)^3 = -6 + (2 - 3z)^3 \end{cases}$ với nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\forall k \in N$ thì:

$$k = \left[\sqrt{k^2}\right] = \left[\sqrt{k^2 + 1}\right] = \left[\sqrt{k^2 + 2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{k^2 + 2k}\right]$$

Suy ra: $\left[\sqrt{k^2}\right]+\left[\sqrt{k^2+1}\right]+\left[\sqrt{k^2+2}\right]+...+\left[\sqrt{k^2+2k}\right]=$

$= k(2k + 1) = 2k^2 + k$

Cho k = 1, 2, ..., (x–1) rồi cộng từng vế của các đẳng thức ta được:

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right]=2\left[1^2+2^2+...+(x-1)^2\right]+$$

$$+(1+2+3+...+(x-1)=\frac{(x-1)x(2x-1)}{3}+\frac{x(x-1)}{2}$$

Phương trình đã cho:

$$y=\frac{(x-1)x(2x-1)}{3}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)x(4x+1)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)x(4x+1)}{y}=6$$

Vì y là số nguyên tố $\Rightarrow$ y là ước của (x–1); x; (4x + 1)

$\Rightarrow y \le \max\{(x-1); x; (4x+1)\} = 4x + 1$

$$\Rightarrow 6=\frac{(x-1)x(4x+1)}{y}\ge x(x-1)\Rightarrow x\le 3\Rightarrow x=2 \text{ hoặc } 3$$

Vậy các số cần tìm là: x = 2; y = 3 ; x = 3; y = 13.

b) Hệ viết lại: $\begin{cases}(2x+1)+(y-1)+(3z-2)=0\\(2x+1)^3+(y-1)^3+(3z-2)^3=-6\end{cases}$

Để ý nếu a + b + c = 0 thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+1)+(y-1)+(3z-2)=0 & (1)\\(2x+1)(y-1)(3z-2)=-2 & (2)\end{cases}$$

Vì x, y, z nguyên nên 2x + 1, y – 1, 3z – 2 nguyên

Ta xét các trường hợp với số 2x + 1

– Nếu $2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ thì hệ: $\begin{cases}(y-1)+(3z-2)=-1\\(y-1)(3z-2)=-2\end{cases}$

$\Rightarrow$ y – 1, 3z – 2 là nghiệm của phương trình: $X^2 + X – 2 = 0$

Do đó $\begin{cases}y-1=1\\3z-2=-2\end{cases}$ hay $\begin{cases}y-1=-2\\3z-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\z=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}y=-1\\z=-1\end{cases}$

– Nếu $2x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -1$ thì hệ: $\begin{cases}(y-1)+(3z-2)=1\\(y-1)(3z-2)=2\end{cases}$

$\Rightarrow$ y – 1, 3z – 2 là nghiệm của phương trình:

$X^2 – X + 2 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên: (0, 2, 0), (0, –1, 1).

Bài toán 20. 38:

Chứng minh rằng phương trình

a) $x^2 + y^2 = 2003z^2$ không có nghiệm (x; y; z) nguyên dương.

b) $2002x^2 - 2003y^2 + 12^4 = 0$ có vô số nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử phương trình có nghiệm dương

Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình với x_0, y_0, z_0 nguyên dương và x_0 là nhỏ nhất.

Ta chứng minh $x_0 \vdots 2003$ và $y_0 \vdots 2003$

Nếu $x_0 \not\vdots 2003$ thì từ $x_0^2 + y_0^2 = 2003z_0$ suy ra

$y_0 \not\vdots 2003$ (vì 2003 là số nguyên tố)

Theo định lí Fermat nhỏ ta có:

$$x_0^{2002} - 1 \equiv 0 \pmod{2003} \text{ và } y_0^{2002} - 1 \equiv 0 \pmod{2003}$$

$$\Rightarrow \left(x_0^2\right)^{1001} + \left(y_0^2\right)^{1001} - 2 \equiv 0 \pmod{2003}$$

$$\Rightarrow \left(x_0^2 + y_0^2\right) . A - 2 \equiv 0 \pmod{2003} \Rightarrow -2 \equiv 0 \pmod{2003} \text{ (vô lý)}$$

Vậy: $x_0 \vdots 2003 \Rightarrow y_0 \vdots 2003$. Đặt $x_0 \vdots 2003x_1$ và $y_0 \vdots 2003\, y_1$

Thế vào phương trình:

$$\left(x_0^2 + y_0^2\right)2003 = z_0^2 \Rightarrow z_0 \vdots 2003 \Rightarrow z_0 \vdots 2003 z_1$$

Thế x_0, y_0, z_0 vào phương trình ta được: $x_1^2 + y_1^2 = 2003z_1$

Như vậy (x_1, y_1, z_1) là nghiệm nguyên dương của phương trình mà $x_1 < x_0$.

Mâu thuẫn này chứng tỏ phương trình không có nghiệm nguyên dương.

b) Ta có: $2002x^2 - 2003y^2 + 12^4 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 2003y^2 - 2002x^2 = (12^2)^2$

Xét phương trình: $2003y^2 - 2002x^2 = 1$ (2)

Nhận xét rằng nếu (2) có nghiệm (x, y) thì (1) có nghiệm $(12x^2, 12^2y)$, nên ta chỉ cần chứng minh phương trình $2003y^2 - 2002x^2 = 1$ có vô số nghiệm thì phương trình (1) cũng có vô số nghiệm.

Nếu (x_0, y_0) là nghiệm của phương trình: $ay^2 - bx^2 = 1$ trong đó $a - b = 1$

thì: $\begin{cases} x_1 = (a+b)x_0 + 2ay_0 \\ y_1 = 2bx_0 + (a+b)y_0 \end{cases}$ cũng là nghiệm của phương trình ấy

Thật vậy ta có:

$$ay_1^2 - bx_1^2 = a\left[4b^2x_0^2 + 4b(a+b)x_0y_0 + (a+b)^2y_0^2\right] -$$

$$-b\left[(a+b)^2x_0^2 + 4a(a+b)x_0y_0 + 4a^2y_0^2\right]$$

$= (a+b)^2(ay_0^2 - bx_0^2) - 4ab(ay_0^2 - bx_0^2)$

$= (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 = 1$ (đpcm)

Từ đó áp dụng bổ đề cho phương trình $2003y^2 - 2002x^2 = 1$ ta có phương trình có tập vô hạn nghiệm :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4005x_n + 4006y_n \\ y_{n+1} = 4004x_n + 4005y_n \end{cases}$$

Với $n \in N$ và $x_0 = y_0 = 1$ là một nghiệm của phương trình

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 20. 39:

Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 1993x^3 + (1993 + n)x^2 - 11x + n = 0$ với n là số nguyên, có không quá một nghiệm nguyên

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên, khi đó, đa thức:

$x^4 - 1993x^3 + (1993 + n)x^2 - 11x + n$

sẽ có nhân tử dạng bậc hai $(x^2 - ax + b)$, với a và b là các số nguyên. Xét:

$$(x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d) = x^4 - 1993x^3 + (1993 + n)x^2 - 11x + n$$

So sánh các hệ số: (1) $a + c = 1993$; (2) $ac + b + d = 1993 + n$

(3) $bc + ad = 11$, (4) $bd = n$

Từ (1) suy ra c là số nguyên, khi đó (2) cho ta d cũng là số nguyên.

Từ (1), (4), (2) ta có $ac - a - c = bd - b - d$.

Để thuận lợi, đặt $A = a - 1$, $B = b - 1$, $C = c - 1$, $D = d - 1$.

Ta được $A + C = 1991$, $AC = BD$ và $(B + 1)(C + 1) + (A + 1)(D + 1) = 11$

Khai triển rồi nhân với B, ta có:

$B^2(C + 1) + BC + B + ABD + BD + AB + B = 11B$

Thay BD bằng AC ta có:

$B^2(C + 1) + B(A + C - 9) + A^2C + AC$, hay

$B^2(C + 1) + 2.991.B + A(A + 1)C = 0$

Phương trình bậc hai theo B trên phải có nghiệm thực, do đó:

$A(A + 1)C(C + 1) \le 991^2$

Mà $A+C = 1991$ và A, C là các số nguyên nên $AC > 991$, trừ khi A hoặc C = 0. Tương tự, $(A+1)(C+1) > 991$ trừ khi A hoặc $C = -1$. Do đó, (A, C) = (0, 1991), (–1, 1992) hoặc (1992, – 1).

Ngoài ra $(B + 1)(C + 1) + (A + 1)(D + 1) = 11$ nên không thể xảy ra (A, C) = (–1, 1992) hay (1992 – 1) (nếu ngược lại, suy ra 1993 chia hết 11). Từ đó, AC = 0, do đó BD = n = 0.

Suy ra (A, B, C, D) = (0, 0, 1991, –1982) hay (1991, –1982, 0, 0)

Như vậy hai nghiệm nguyên nói trên của phương trình đã cho là hai nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ hoặc phương trình

$$x^2 - 1991x - 1982 = 0$$

Nhưng rõ ràng cả hai phương trình không có nghiệm nguyên, mâu thuẫn, suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 20. 40:

a) Biết bộ bốn số 12, 14, 37 và 65 là nghiệm của phương trình bốn ẩn:

$$xy - xz + yt = 182.$$

Hỏi mỗi số trên là giá trị của ẩn nào?

b) Với giá trị nguyên dương nào của p thì phương trình

$$x^2 + y^2 + 1 = pxy$$

có nghiệm nguyên dương?

Hướng dẫn giải

a) Phương trình: $x(y - z) + yt = 2.7.13$

Nếu $x = 14$, thì $yt \vdots 7$. Điều này không xảy ra vì trong các số 12, 37, 65 không có hai số nào để $yt \vdots 7$. Vậy $x \neq 14$

Nếu $x = 65$ thì $yt \vdots 13$. Điều này cũng không xảy ra, vì trong các số 12, 14, 37 không có hai số nào để $yt \vdots 13$. Vậy $x \neq 65$.

Phương trình có thể viết về dạng: $y(x + t) - xz = 2.7.13$

Lập luận tương tự ta có $y \neq 14$, $y \neq 65$

Vậy x, y chỉ có thể nhận một trong hai giá trị 12 và 37

khi đó $xy = 12.37 = 444$ và phương trình đã cho trở thành $xz - yt = 262$

Nếu một trong hai số x, y là số chẵn thì một trong hai số xz, yt là số chẵn. Khi đó ta có hai số xz, yt đều là số chẵn. Như vậy xz và yt chỉ có thể là 12.65 hoặc 14.37.

Suy ra $xz = 262 + yt > yt$ nên $xz = 12.65$, còn $yt = 14.37$.

Từ đó $x = 12$; $y = 37$; $z = 65$ và $t = 14$. Thử lại đúng.

b) Với $p = 3$ phương trình có nghiệm chẳng hạn $x = y = 1$.

Xét $p \neq 3$. Gọi P là tập hợp các nghiệm của phương trình. Giả sử (x_0, y_0) là nghiệm sao cho $x_0 + y_0$ bé nhất. Ta có $x_0 \neq y_0$.

Thật vậy nếu $x_0 = y_0$ suy ra $1 = x_0^2(p - 2) \Rightarrow p = 3$

Không giảm tổng quát giả sử $x_0 < y_0$

Xét phương trình $y^2 - px_0y + x_0^2 + 1 = 0$ (1)

Vì y_0 là nghiệm của (1) nên theo định lí Viet phương trình (1) còn một nghiệm y_1 với $y_1 + y_0 = px_0$, $y_1y_0 = x_0^2 + 1$ (2)

Từ (2) suy ra y_1 nguyên dương. Do đó từ (1) suy ra $(y_1, x_0) \in P$

Mặt khác: $y_1 = \dfrac{x_0^2 + 1}{y_0} = \dfrac{x_0^2}{y_0} + \dfrac{1}{y_0} < x_0 + \dfrac{1}{y_0} \leq x_0 + 1$

Vậy $y_1 \leq x_0$. Do đó $y_1 + x_0 < x_0 + y_0$. Trái với cách chọn của ta.

Vậy với $p \neq 3$ thì phương trình vô nghiệm.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 20. 1: Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $3x + 7xy - 4y = 285$ b) $8x - 2y - 13 = 3xy - 3x^2$

Hướng dẫn

a) Rút x theo y.

b) Kết quả (–1;18), (5;6)

Bài tập 20. 2: Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^3 - y^3 = 9$ b) $x^2 - 2y^2 + xy = 3$

Hướng dẫn

a)Kết quả (2;–1)

b) Đánh giá bậc hai

Bài tập 20. 3: Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ b) $x^3 - y^3 = 3x$

Hướng dẫn

a) Kết quả $(0; \pm 1)$

b) Kết quả (0;0)

Bài tập 20. 4: Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$ b) $(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + y + x^2 + x) = 105$

Hướng dẫn

a) Kết quả $(2; \pm 1)$, $(-4; \pm 1)$

b) Đánh giá biểu thức $2^{|x|} + y + x^2 + x$.

Kết quả (0;4)

Bài tập 20. 5: Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2z = 4$

b) $(x + y + 1)^2 = 3(x^2 + y^2 + 1)$

Hướng dẫn

a) Kết quả (4; 4; 3)

b) Kết quả (1;1)

Bài tập 20. 6: Giải phương trình không có nghiệm nguyên

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1999$ b) $x^3 + y^3 + z^3 = 2003$

Hướng dẫn

a) Phân tích theo 4k. Kết quả vô nghiệm

b) Kết quả vô nghiệm

Bài tập 20. 7: Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = \sqrt{x + y + 1}$

Hướng dẫn

a) Kết quả x =3

b) Bình phương tương đương

Bài tập 20. 8: Giải phương trình nghiệm nguyên:

a) $\begin{cases} x+y \geq 25 \\ y-2x \leq 18 \\ x^2+4x-y \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x|+|3-y|=2 \\ x^2+|y-2|=x+2 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Kết quả x =3, y = 22, 23, 24

b) Vì x, y nguyên và |x| + | 3 –y| = 2 nên x = –2; –1; 0; 1; 2.

Bài tập 20. 9: Chứng minh phương trình có vô số nghiệm nguyên

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = (x + 2y + 3z)^2$

b) $y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Hướng dẫn

a) Kết quả x = n, y = z =0

b) $y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1|$

Bài tập 20. 10: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}$

Hướng dẫn

a) Đánh giá bằng cách xét $1 \leq x \leq y$.

b) Kết quả (43, 7), (7, 43)

Bài tập 20. 11: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

a) $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 71$ b) $x + y + z^2 = 4xy$

Hướng dẫn

a) Kết quả vô nghiệm

b) Kết quả vô nghiệm

Bài tập 20. 12: Giải bất phương trình nghiệm nguyên:

a) $5x^2 + y^2 - 4xy + 2x < 0$

b) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 2xy + 5 \leq 0$

Hướng dẫn

a) Kết quả (–1; –2)

b) Nhóm tổng bình phương.

Chuyên đề 21: TOÁN SUY LUẬN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Mệnh đề SDG

- $\overline{P}$ (phủ định) đúng $\Leftrightarrow$ P sai; $\overline{P}$ sai $\Leftrightarrow$ P đúng.
- $(P \Rightarrow Q)$: (kéo theo) chỉ sai khi P đúng và Q sai.
- $(P \Leftrightarrow Q)$: (tương đương) chỉ đúng khi P và Q cùng đúng hoặc cùng sai.
- $(P \wedge Q)$: (và) chỉ đúng khi P đúng và Q đúng.
- $(P \vee Q)$: (hoặc) chỉ sai khi P sai và Q sai.
- $\forall x \in X, P(x)$ đúng $\Leftrightarrow$ mọi $x_o \in X, P(x_o)$ đúng.
- $\forall x \in X, P(x)$ sai $\Leftrightarrow$ có $x_o \in X, P(x_o)$ sai.
- $\exists x \in X, P(x)$ đúng $\Leftrightarrow$ có $x_o \in X, P(x_o)$ đúng.
- $\exists x \in X, P(x)$ sai $\Leftrightarrow$ mọi $x_o \in X, P(x_o)$ sai.

Điều kiện cần, điều kiện đủ

- Cho khẳng định đúng dạng $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$.
  P(x) là điều kiện đủ để có Q(x); Q(x) là điều kiện cần để có P(x)
- Cho khẳng định đúng dạng $\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(X)$
  P(x) là điều kiện cần và đủ để có Q(x),
  hay: Điều kiện cần và đủ để có P(x) là Q(x).
  hay: P(x) nếu và chỉ nếu Q(x), hay: P(x) khi và chỉ khi Q(x).
- Cấu trúc mệnh đề $P \Rightarrow Q$
  $P \Rightarrow Q$: Mệnh đề thuận, $Q \Rightarrow P$: Mệnh đề đảo
  $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$: Mệnh đề phản, $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$: Mệnh đề phản đảo.

Nguyên tắc Dirichlê

- Nếu nhốt k + 1 con thỏ vào k chuồng (k nguyên dương) thì tồn tại một chuồng chứa ít nhất 2 con.
- Nếu nhốt 2k + 1 con thỏ vào k chuồng (k nguyên dương) thì tồn tại một chuồng chứa ít nhất 3 con.
- Nếu nhốt nk + 1 con thỏ vào k chuồng (k, n nguyên dương) thì tồn tại một chuồng chứa ít nhất n + 1 con.

Nguyên tắc cực hạn

Tồn tại độ đo lớn nhất và độ đo nhỏ nhất hay đại lượng lớn nhất và đại lượng nhỏ nhất của tập hữu hạn khác rỗng các độ đo hay các đại lượng.

Bất biến và đơn biến

Đại lượng bất biến, tính chất bất biến là những đại lượng hay tính chất không thay đổi trong quá trình thực hiện các phép biến đổi nào đó.

Đại lượng đơn biến, tính chất đơn biến là những đại lượng hay tính chất thay đổi một chiều, hoặc tăng thêm hoặc giảm đi trong quá trình thực hiện các phép biến đổi nào đó.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 21.1:

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) $\exists x \in \mathbf{R}, x > x^2$.

b) $\forall x \in \mathbf{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.

c) $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

d) $\exists a \in \mathbf{Q}, a^2 = 2$.

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề đúng, chẳng hạn $x = \frac{1}{2}$

b) Mệnh đề sai, chẳng hạn $x = -5$: $|-5| < 3 \Leftrightarrow -5 < 3$.

c) Mệnh đề đúng. Thật vậy:

Xét $n = 3k \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 1$, không chia hết cho 3.

Xét $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$.

$\Rightarrow n^2 + 1 = 3k' + 2$ ($k' \in \mathbf{N}$) không chia hết cho 3.

d) Mệnh đề sai vì $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Bài toán 21.2:

Các mệnh đề sau đúng hay sai:

a) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: x + y = 20$

b) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}: x + y = 20$

c) $\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}: x + y = 20$

d) $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}: x + y = 20$.

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề sai, chọn $x = 1$ và $y = 2$

b) Mệnh đề đúng, vì với mọi x, chọn $y = 20 - x$

c) Mệnh đề sai, vì nếu tồn tại x thì $y = 20 - x$ là duy nhất.

d) Mệnh đề đúng, vì chọn $x = y = 10$.

Bài toán 21.3:

Mệnh đề đúng hoặc sai:

a) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

b) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: x > y \Leftrightarrow x^3 > y^3$

c) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: x > y \Leftrightarrow x^2 > y^2$

d) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: x > y \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{y}$

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề sai, chọn $x = 2$, $y = -1$.

b) Mệnh đề đúng, vì $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)[(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2]$

c) Mệnh đề sai, chọn x = 1, y = –2

d) Mệnh đề sai, chọn x = 5, y = –1.

Bài toán 21.4:

Mệnh đề sau đúng hay sai:

a) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: x^2 + y^2 \geq 2xy$

b) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: |x + y| \leq |x| + |y|$

c) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: x + y \geq 2\sqrt{xy}$

d) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}: |x - y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \leq 0$

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề đúng, vì $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$.

b) Mệnh đề đúng, vì $2xy \leq 2|xy|$

c) Mệnh đề sai, chọn x = y = –2.

d) Mệnh đề đúng, vì $-2xy = 2|xy| \Leftrightarrow xy \leq 0$.

Bài toán 21.5:

Cho P(x), Q(x) là hai mệnh đề chứa biến. Chứng minh rằng mệnh đề: "$\exists x \in X$, $P(x) \vee Q(x)$" tương đương với mệnh đề: $(\exists x \in X, P(x)) \vee (\exists x \in X, Q(x))$.

Hướng dẫn giải

Giả sử mệnh đề "$\exists x \in X$, $P(x) \vee Q(x)$" đúng. Khi đó tồn tại x_0 để $P(x_0) \vee Q(x_0)$ đúng. Nếu $P(x_0)$ đúng thì mệnh đề $\exists x \in X$, P(x) đúng, còn nếu $Q(x_0)$ đúng thì mệnh đề $\exists x \in X$, Q(x) đúng.

Do đó mệnh đề $(\exists x \in X, P(x) \vee (\exists x \in X, Q(x))$ đúng.

Ngược lại, giả sử mệnh đề $(\exists x \in X, P(x)) \vee (\exists x \in X, Q(x))$ đúng. Suy ra hoặc mệnh đề "$\exists x \in X$, P(x)" đúng hoặc mệnh đề "$\exists x \in X$, Q(x)" đúng.

Nếu mệnh đề $\exists x \in X$, P(x) đúng thì tồn tại x_0 để $P(x_0)$ đúng, do đó $P(x_0) \vee Q(x_0)$ đúng . Vậy mệnh đề "$\exists x \in X$, $P(x) \vee Q(x)$" đúng. Tương tự, nếu mệnh đề $\exists x \in X$, Q(x) đúng, ta cũng suy ra mệnh đề "$\exists x \in X$, $P(x) \vee Q(x)$" đúng.

Bài toán 21.6:

Chứng minh rằng từ 5 số nguyên bất kì, luôn tìm được ba số có tổng chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Nếu 5 số đó khi chia cho 3 có 3 số dư (0, 1, 2) thì 3 số chia cho 3 có số dư khác nhau đôi một là 3 số cần tìm.

Nếu 5 số đó khi chia cho 3 có không quá 2 số dư thì theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 số có cùng số dư khi chia cho 3, khi đó 3 số này là 3 số cần tìm.

Bài toán 21.7:

Chứng minh rằng trong 7 số tự nhiên tuỳ ý, luôn có thể chọn ra hai số có hiệu bình phương chia hết cho 20.

Hướng dẫn giải

Trong 7 số tự nhiên thì có ít nhất 4 số cùng tính chẵn lẻ, giả sử các số đó là a_1, a_2,.a_3, a_4. Khi đó ta có $a_i^2 - a_j^2$ chia hết cho 4.

Bốn số a_i^2 khi chia cho 5 thì các số dư chỉ có thể là 0, 1,4 nên tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 5; hai số đó thoả mãn đề bài.

Bài toán 21.8:

Trên mặt phẳng cho 5 điểm có toạ độ nguyên, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 5 điểm trên, có ít nhất ba tam giác có diện tích nguyên.

Hướng dẫn giải

Với tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ và $C(x_C, y_C)$ thì

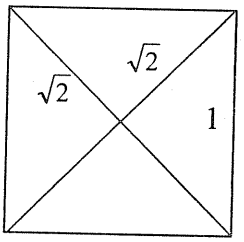
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)\right|.$$

Xét năm điểm nguyên A, B, C, D, E thì toạ độ mỗi điểm sẽ thuộc các dạng sau: (chẵn, chẵn), (lẻ, lẻ), (chẵn, lẻ) và (lẻ, chẵn). Do đó tồn tại hai điểm có toạ độ cùng tính chẵn lẻ, giả sử là A, B. Khi đó các tam giác CAB, DAB và EAB có diện tích nguyên vì $y_B - y_A$ và $x_B - x_A$ đều chẵn.

Bài toán 21.9:

Cho 2009 điểm khác nhau nằm bên trong hình chữ nhật có chiều dài 251cm và chiều rộng 4cm. Vẽ 2009 hình tròn nhận các điểm trên làm tâm và có cùng bán kính là $\sqrt{2}$ cm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 hình tròn trong số chúng chứa ít nhất 3 điểm trong 2009 điểm nói trên.

Hướng dẫn giải



Chia hình chữ nhật có chiều dài 251cm, chiều rộng 4cm thành 1004 hình vuông có độ dài cạnh là 1cm.

Do đó 2009 điểm phân biệt nằm bên trong hình chữ nhật chứa 1004 hình vuông có độ dài cạnh là 1cm.

Theo nguyên tắc Dirichlê thì tồn tại ít nhất 1 hình vuông có độ dài cạnh là 1cm chứa ít nhất 3 điểm trong 2009 điểm đã cho.

Hình vuông có độ dài cạnh là 1cm nên khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm thuộc miền của hình vuông là $\sqrt{2}$ cm

Không mất tính tổng quát, giả sử 3 điểm đó là A, B, C.

$\Rightarrow AB \le \sqrt{2}$ cm, $AC \le \sqrt{2}$ cm

$\Rightarrow$ A, B, C thuộc hình tròn tâm A bán kính $\sqrt{2}$ cm.

Vậy tồn tại ít nhất 1 hình tròn có tâm một trong 2009 điểm đã cho, có bán kính $\sqrt{2}$ cm chứa ít nhất 3 điểm trong 2009 điểm đã cho.

Bài toán 21.10:

Mỗi ô vuông đơn vị của bảng kích thước 10 x 10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh ràng có số được ghi ít nhất 17 lần

Hướng dẫn giải

Trên mỗi hình vuông con, kích thước 2 x 2 chỉ có không quá 1 số chia hết cho 2, cũng vậy, có không quá 1 số chia hết cho 3.

Lát kín bảng bởi 25 hình vuông, kích thước 2 x 2, có nhiều nhất 25 số chia hết cho 2, có nhiều nhất 25 số chia hết cho 3. Do đó, có ít nhất 50 số còn lại không chia hết cho 2, cũng không chia hết cho 3. Vì vậy, chúng phải là một trong các số 1, 5, 7.

Vậy, theo nguyên lý Dirichlet, có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Bài toán 21.11:

Trên bàn cờ 10 x 10, người ta viết các số từ 1 đến 100. Mỗi hàng chọn ra số lớn thứ ba. Chứng minh rằng tồn tại một hàng có tổng các số trong hàng đó nhỏ hơn tổng các số lớn thứ ba được chọn.

Hướng dẫn giải

Sắp xếp thứ tự của 10 số lớn thứ ba của các hàng là $a_1 > a_2 > ... > a_{10}$. Ta thấy có tối đa là 20 số có thể lớn hơn a_1 (là các số lớn nhất và lớn nhì của các hàng), do vậy $a_1 \geq 80$. Tương tự, có tối đa là 28 số có thể lớn hơn a_2 (là số lớn nhất, và lớn nhì của các hàng và thêm 8 số nữa ở hàng chứa a_1 có thể lớn hơn a_2), do đó $a_2 \geq 72$. Vậy

$$a_1 + a_2 + ... + a_{10} \geq 80 + 72 + (a_{10} + 7) + (a_{10} + 6) + ... + a_{10}$$

$$= 8a_{10} + 180$$

Trong khi đó, tổng các số ở hàng chứa a_{10} không lớn hơn:

$$100 + 99 + a_{10} + (a_{10} - 1) + ... + (a_{10} - 7) = 8a_{10} + 171.$$

Cho nên tổng các số ở hàng này nhỏ hơn $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 21.12:

Người ta đánh dấu mỗi đỉnh của một đa giác đều 2n + 1 cạnh (n > 2) bằng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi chỉ một màu.

Hướng dẫn giải

Vì đa giác đã cho có số đỉnh lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau được đánh dấu cùng màu, ta gọi hai đỉnh đó là A và B. Như vậy ở đa giác đã xét, còn đỉnh M nào đó thuộc đường trung trực của AB. Do đó:

- Nếu M được đánh dấu cùng màu với A và B thì tam giác AMB thoả mãn điều kiện của đề bài.
- Nếu M được đánh dấu khác màu với A và B thì đỉnh E kề với đỉnh A và đỉnh F kề với đỉnh B.

Trường hợp cả E và F cũng được đánh dấu khác nhau với A và B thì tam giác EMF là tam giác thoả mãn điều kiện của đề bài. Còn khi có ít nhất một trong các đỉnh E hoặc F cùng màu với A và B chẳng hạn, đỉnh E thì tam giác AEB thoả mãn điều kiện của đề bài.

Vậy ta luôn luôn tìm được một tam giác cân có 3 đỉnh được đánh dấu cùng một màu.

Bài toán 21. 13:

Trên đường tròn cho 16 điểm được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng. Các dây cung nối 2 điểm trong 16 điểm trên được tô bởi hai màu: tím, đen. Chứng minh rằng ta luôn có 3 trong 16 điểm trên được tô cùng màu và 3 dây cung nối chúng cũng được tô cùng màu.

Hướng dẫn giải

Vì 16 điểm được tô 3 màu theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 6 điểm cùng màu, không mất tính tổng quát, giả sử 6 điểm A_1, A_2, ..., A_6 cùng màu xanh.

Từ A_1 nối các điểm A_2, ..., A_6, ta có 5 dây cung được tô 2 màu đen và tím, do đó tồn tại 3 dây cung cùng màu, giả sử đó là A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 được tô cùng màu đen.

Xét 3 dây cung A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 được tô hai màu đen và tím. Nếu cả 3 dây cung đều được tô màu tím thì A_2, A_3, A_4 là 3 điểm cần tìm. Nếu có một dây cung A_iA_j ($i, j \in \{2, 3, 4\}$) được tô màu đen thì 3 điểm A_1, A_i, A_j là 3 điểm cần tìm.

Bài toán 21. 14:

Một số cung của một đường tròn được tô màu xanh. Tổng số cung được tô màu xanh nhỏ hơn một nửa độ dài đường tròn. Chứng minh rằng trong đường tròn này còn có ít nhất một đường kính mà hai đầu của nó không bị tô màu xanh.

Hướng dẫn giải

Ta tô màu đỏ các cung đối xứng với các cung tô màu xanh qua tâm đường tròn.

Vì tổng các cung tô màu đỏ bằng tổng các cung tô màu xanh, nên tổng các cung được tô màu nhỏ hơn độ dài đường tròn, điều này có nghĩa là trên đường tròn có ít nhất một điểm không được tô màu, nên điểm đối xứng với nó qua tâm O cũng không được tô màu. Đây chính là hai đầu của đường kính phải tìm

Bài toán 21. 15:

a) Cho 5 đường tròn đã cho mà cứ 4 đường tròn có một điểm chung. Chứng minh rằng cả 5 đường tròn đó đều có một điểm chung.

b) Cho 6 đường tròn có một điểm chung. Chứng minh rằng có một hình tròn chứa tâm của một hình tròn khác.

Hướng dẫn giải

a) Ký hiệu các đường tròn là (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) và (O_5).

Giả sử các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) và (O_4) cắt nhau tại A, các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) và (O_5) cắt nhau tại B, các đường tròn (O_1), (O_2), (O_4), (O_5) cắt nhau tại C.

Nếu ba điểm A, B, C khác nhau thì hai đường tròn (O_1) và (O_2) trùng nhau. Nhưng khi đó điểm chung của các đường tròn (O_1), (O_3), (O_4) và (O_5) cũng thuộc đường tròn (O_5). Do đó có 2 điểm trùng nhau, chẳng hạn các điểm A và C trùng nhau và A là điểm chung của cả 5 đường tròn.

b) Ta nối điểm chung A với các tâm $O_1, O_2, ..., O_n$ của các đường tròn đã cho. Nếu có hai tia AO_i và AO_j $(i \neq j)$ trùng nhau và chẳng hạn $i \leq j$ thì hình tròn tâm O_j chứa tâm O_i.

Nếu các tia $AO_1, AO_2, ..., AO_n$ phân biệt, giả thiết rằng các tia này sắp xếp quanh A theo chiều kim đồng hồ và giả thiết rằng O_1AO_2 là góc nhỏ nhất trong các góc tạo bởi hai tia kề nhau (nếu không, có thể sắp xếp lại).

Do đó $O_1AO_2 \leq 360^o : n \ (n \geq 6)$.

Xét tam giác O_1AO_2, giả sử $AO_1 \leq AO_2$ thì $O_1 \geq O_2$ từ đó $O_1 \geq 60^o$. Vậy $O_1 \geq A$ vì thế trong ΔO_1AO_2 ta có $O_2A \geq O_1O_2$, do đó hình tròn tâm O_2 chứa tâm O_1.

Còn nếu trong tam giác này mà $AO_1 \geq AO_2$ thì lập luận tương tự hình tròn tâm O_1 chứa tâm O_2.

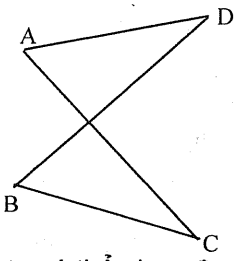
Bài toán 21. 16:

Trên mặt phẳng cho n điểm đỏ và n điểm xanh, trong số đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có thể vẽ n đoạn thẳng có hai đầu màu sắc khác nhau và không có điểm chung.

Hướng dẫn giải

Xét tất cả các phân hoạch của các điểm đã cho thành những cặp điểm có màu sắc khác nhau.

Số các phân hoạch này là hữu hạn và do đó có một phân hoạch sao cho tổng độ dài các đoạn thẳng xác định bởi các cặp điểm của phân hoạch đó là bé nhất.



Ta chứng minh trước hết các đoạn thẳng này không cắt nhau.

Thật vậy, giả sử nếu có hai đoạn thẳng cắt nhau thì ta có thể chọn được phân hoạch ứng với tổng bé nhất các độ dài của các đoạn thẳng bằng cách thay các đường chéo của tứ giác lồi bởi các cạnh đối của nó.

Bài toán 21. 17:

a) Trong một mặt phẳng cho 2000 điểm. Hỏi có tồn tại hay không một đường tròn chứa đúng 1000 điểm?

b) Có hay không 2015 điểm trên mặt phẳng mà bất kỳ 3 điểm nào trong chúng đều tạo thành 1 tam giác có góc tù.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $M_1, M_2, ..., M_{2000}$ là các điểm đã cho và d là một đường thẳng nào đó sao cho tất cả các điểm này thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ d.

Trên d lấy một điểm A tuỳ ý. Qua hai điểm bất kỳ trong số 2000 điểm và điểm A vẽ một đường tròn, số đường tròn này là hữu hạn.

Gọi B là một điểm thuộc đường thẳng d, B khác A và B nằm ngoài tất cả các đường tròn kể trên. Với cách chọn điểm B ta được 2000 góc có độ lớn khác nhau. Giả sử

$$AM_1B < AM_2B < ... < AM_{1000}B < AM_{1001}B < ... < AM_{2000}B$$

Gọi α là một góc nào đó mà $AM_{1000}B < \alpha < AM_{1001}B$. Như vậy cung chứa góc α dựng trên AB thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ d đối với các điểm đã cho sẽ chứa trong nó đúng 1000 điểm.

b) Trên mặt phẳng vẽ đường tròn đường kính AB bất kì.

Trên nửa đường tròn đó lấy 2015 điểm A_1; A_2, ...; A_{2015} khác nhau và khác B

$\Rightarrow$ Bất kì 3 điểm nào A_i, A_j, A_k ($i \neq j \neq k$) đều tạo thành một tam giác chắc chắn có một góc tù.

Suy ra luôn tồn tại 2015 điểm thoả mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 21. 18:

Chứng minh rằng với một lục giác đều tùy ý, bao giờ cũng chọn được một đỉnh sao cho: từ độ dài 3 đường chéo xuất phát từ đỉnh ấy bao giờ cũng dựng được một tam giác.

Hướng dẫn giải

Xét một lục giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Trong lục giác lồi này đương nhiên tồn tại một đường chéo có độ dài lớn nhất.

Có hai trường hợp xảy ra:

(1) Đường chéo lớn nhất A_1A_5 chẳng hạn chia lục giác thành tam giác $A_1A_5A_6$ và ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$. Khi đó:

- Nếu $A_1A_3 + A_1A_4 > A_1A_5$ thì $A_1A_3 + A_1A_5 > A_1A_4$ và $A_1A_4 + A_1A_5 > A_1A_3$ như vậy tồn tại một tam giác nhận các đoạn A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 làm các cạnh.
- Nếu $A_1A_3 + A_1A_4 \leq A_1A_5$ ta gọi B là giao điểm của A_1A_4 và A_5A_3; C là giao điểm của A_1A_3 và A_5A_2. Trong các tam giác A_1BA_5 và A_1CA_5 ta có: $A_1B + BA_5 + A_1C + CA_5 > 2A_1A_5$.

  Do vậy $A_1A_4 + A_5A_3 + A_1A_3 + A_5A_2 > 2A_1A_5$ mà $A_1A_3 + A_1A_4 \leq A_1A_5$, nên $A_5A_2 + A_5A_3 > A_1A_5$. Khi đó, đỉnh A_5 thoả mãn điều kiện của đề bài.

(2) Đường chéo lớn nhất A_1A_4 chẳng hạn chia lục giác thành hai tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ và $A_1A_4A_5A_6$

Tương tự như trên:

- Nếu $A_1A_3 + A_1A_5 > A_1A_4$ thì đỉnh A_1 thoả mãn điều kiện của đề bài.
- Nếu $A_1A_3 + A_1A_5 \leq A_1A_4$ thì đỉnh A_4 thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài toán 21. 19:

Cho 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100. Chứng minh rằng có thể chọn được 4 số a, b, c, d sao cho $a < b < c$ và $a + b + c = d$.

Hướng dẫn giải

Giả sử 69 số có thể được sắp xếp tăng: $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{69} < 101$.

Khi đó ta xét các tổng: $a_{69} + a_1$, $a_{68} + a_1$, ..., $a_2 + a_1$ và các hiệu $a_{69} - a_2$, $a_{68} - a_2$, ..., $a_3 - a_2$, có tất cả 135 số.

Ta có:

$a_{69} + a_1 > a_{68} + a_1 > ... > a_3 + a_1$ và $a_{69} - a_2 > a_{68} - a_2 > ... > a_3 - a_2$

Mặt khác $1 \le a_j - a_2$, $a_1 + a_i \le 100 + 32 = 132$

Do đó, theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại i, j sao cho:

$$a_i + a_1 = a_j - a_2 \ (i \ne j) \text{ suy ra } a_j = a_i + a_1 + a_2.$$

Bài toán 21. 20:

Trong 100 số tự nhiên từ 1 đến 100, cần chọn n số ($n \ge 2$) sao cho hai số phân biệt bất kì được chọn có tổng chia hết cho 6. Hỏi có thể chọn n số thoả mãn điều kiện trên với n lớn nhất là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Giả sử có hai số a, b được chọn, viết chúng trong dạng $a = 6k + r$ và $b = 6h + s$ với $0 \le r < 6$ và $0 \le s < 6$. Theo yêu cầu cần chọn $(a + b) \vdots 6$ nghĩa là $(r + s) \vdots 6$.

Các cặp (r, s) hoặc (s, r) có thể là (0, 0); (1, 5); (2, 4); (3, 3)

Nếu có ít nhất ba số được chọn a, b, c ta cũng viết $c = 6p + t$ với $0 \le t < 6$, thì các cặp (t, r); (t, s) hoặc (r, t); (s, t) cũng phải thuộc các dạng trên.

Từ đó suy ra nếu $r \ne s$ thì với $(t + r) \vdots 6$ suy ra $t = s$, lúc đó $(t + s)$ không chia hết cho 6.

Vậy chỉ có thể $r = s = t$, nghĩa là ba số được chọn (và cũng suy ra mọi số được chọn) phải có cùng số dư là 0 hoặc 3 khi chia cho 6.

Xét dạng số dư 0: trong 100 số từ 1 đến 100 có 16 số

Xét dạng số dư 3: trong 100 số từ 1 đến 100 có 17 số

Vậy n lớn nhất là 17.

Bài toán 21. 21:

Trên bảng viết 3 số $\sqrt{2}$, 2, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta bắt đầu thực hiện trò chơi sau: Tại mỗi bước, chọn hai số trên bảng, chẳng hạn a, b; xoá chúng và thay vào hai số $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng dù chơi bao nhiêu lần cũng không thể có đồng thời ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ trên bảng.

Hướng dẫn giải

Do $a^2 + b^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\right)^2$ nên tổng bình phương ba số không thay đổi sau mỗi một lần chơi.

Tổng bình phương ba số ban đầu là: $\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{13}{2}$

Tổng bình phương ba số đòi hỏi là:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \frac{41}{8} + 2\sqrt{2} \neq \frac{13}{2}$$

Như vậy dù chơi bao nhiêu lần ta cũng không thể có đồng thời ba số $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ trên bảng.

Bài toán 21. 22:

Trên bảng có bốn số 3, 4, 5, 6. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số x, y có trên bảng và thay bằng $x + y + \sqrt{x^2+y^2}$ và $x + y - \sqrt{x^2+y^2}$. Hỏi sau một số hữu hạn bước thực hiện, trên bảng có thể xuất hiện một số nhỏ hơn 1 được không?

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$, $b = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$, ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{2(x+y)}{(x+y)^2-(x^2+y^2)} = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

Như vậy, qua các phép biến đổi, tổng nghịch đảo các số trên bảng không thay đổi.

Vì $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1$ nên qua các lần biến đổi, tổng nghịch đảo các số trên bảng vẫn nhỏ hơn 1. Do các số trên bảng qua các phép biến đổi đều dương nên từ đây suy ra không có số nào nhỏ hơn 1.

Bài toán 21. 23:

Một đường tròn được chia làm 6 cung, trên đó viết các số 1, 0, 1, 0, 0, 0 (theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Mỗi một lần thực hiện, bạn có thể cộng hai số ở cạnh nhau với 1. Hỏi có thể xảy ra trường hợp sau một số lần thực hiện, tất cả các số trên các cung tròn bằng nhau hay không?

Hướng dẫn giải

Gọi $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ là các số trên 6 cung tròn. Sau mỗi lần thực hiện phép biến đổi, đại lượng $S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$ luôn bằng 2. Do đó, không thể xảy ra trường hợp tất cả các số trên cung tròn đều bằng nhau vì trong trường hợp đó, ta sẽ có S = 0.

Bài toán 21. 24:

Trên bảng có một số nguyên. Người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xoá đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số vừa xoá. Ban đầu trên bảng ghi số 7^{2015}. Hỏi có thể hay không sau một số lần thực hiện như thế, ta thu được số 2015^7?

Hướng dẫn giải

Giả sử số trên bảng đang là $N = 10a + b$ $(0 \le b \le 9)$ thì số nhận được sau một phép biến đổi sẽ là $N' = a + 5b$. Nhận xét rằng $5N - N' = 49a$ nên nếu N chia hết cho 7 thì N' cũng chia hết cho 7. Do 7^{2015} chia hết cho 7 còn 2015^7 không chia hết cho 7 nên từ 7^{2015}, qua các phép biến đổi trên, ta không thể thu được 2015^7.

Bài toán 21. 25:

Tại đỉnh A_0 của đa giác lồi $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \ge 3)$ người ta đặt n viên bi. Thực hiện việc chuyển chỗ các viên bi theo cách sau: mỗi lần lấy một viên bi ở A_i rồi đặt vào một đỉnh kề A_i và đồng thời lấy một viên bi ở A_j rồi đặt nó vào một đỉnh kề A_j với $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ (có thể i = j). Hãy tìm tất cả giá trị của n sao cho sau một số hữu hạn lần thực hiện việc chuyển bi nói trên một cách thích hợp thì ở mỗi đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đều có một viên bi.

Hướng dẫn giải

Ta thấy $n = 2k$ (k là số tự nhiên ≥ 2) thoả mãn bài ra. Vậy ta xét $n = 2k + 1$ với k tự nhiên $\ne 0$. Ta tô các đỉnh $A_0, A_1, \ldots A_{2k+1}$ với hai màu xanh, đỏ sao cho đỉnh A_0 được tô màu đỏ; với mỗi $i = 0, 1, 2, \ldots, 2k + 1$ đỉnh A_i có màu khác với màu của đỉnh kề với nó.

Ta nhận thấy rằng : trong mỗi lần chuyển bi, mỗi bi đều được chuyển từ đỉnh có màu này sang đỉnh có màu kia. Vì thế, sau mỗi lần chuyển bi, tổng số bi có tại tất cả các đỉnh được tô màu xanh không thay đổi tính chẵn, lẻ. Suy ra có thể xếp được vào mỗi đỉnh $A_1, A_2, \ldots A_{2k+1}$ một bi chỉ khi $k + 1 \equiv 0 \pmod 2$ hay $n \equiv 3 \pmod 4$.

Ngược lại, với $n = 4m + 3$, $m \in \mathbf{N}$, thực hiện việc chuyển bi theo cách sau đây chẳng hạn :

Lần lượt, với mỗi $k = 1, 2, \ldots, 2m + 1$ ở bước thứ 1 ta làm như sau : Lấy 2 bi ở A_0, chuyển chúng qua các đỉnh $A_1, A_2, \ldots$, tới đỉnh A_{2k} thì dừng lại. Sau bước thứ 2m+1, tại đỉnh A_0 sẽ có 1 bi, tại mỗi đỉnh $A_2, A_4, \ldots, A_{4m+3}$ đều có 2 bi, còn tại các đỉnh $A_1, A_3, \ldots, A_{4m+3}$ đều không có bi.

Sau đó, lần lượt với mỗi $k = 1, 2, \ldots, 2m + 1$ ở bước thứ k ta làm như sau : lấy 1 bi ở A_{4k} chuyển sang A_{4k-1}, đồng thời lấy 1 bi ở A_{2k-2} chuyển sang A_{4k-3} (quy ước coi A_0 là A_{4m+4}). Sau bước thứ m + 1, tại mỗi điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{4m+3}$ sẽ có 1 bi.

Vậy tất cả giá trị $n \ne 3$ phải tìm là n khác $\equiv 1 \pmod 4$.

Bài toán 21. 26:

Một bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có 1991 hàng và 1992 cột (nghĩa là bảng gồm 1991 x 1992 ô vuông). Ký hiệu ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m (kẻ từ trên xuống dưới) và cột thứ n (kể từ trái sang phải) là (m; n). Tô màu các ô vuông của bảng theo cách sau : lần thứ nhất tô 3 ô (r; s), (r + 1; s + 1), (r + 2; s + 1) với r, s là hai số tự nhiên cho trước thoả mãn $1 \leq r \leq 1998$ và $1 \leq s \leq 1991$, từ lần thứ hai mỗi lần tô đúng 3 ô chưa có màu nằm cạnh nhau hoặc trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không ?.

Hướng dẫn giải

Ta hãy ghi vào mỗi ô vuông của bảng một số tự nhiên theo quy tắc sau : ở mỗi hàng, lần lượt từ trái sang phải, ghi các số tự nhiên từ 1 đến 1992. Như vậy ba số được ghi vào ba ô cạnh nhau trong cùng một hàng sẽ là ba số tự nhiên liên tiếp, trong cùng một cột sẽ là ba số tự nhiên bằng nhau.

Suy ra, kể từ lần thứ hai, mỗi lần tô màu ta sẽ xoá đi ba số có tổng chia hết cho 3. Như thế ba số được ghi vào ba ô (r; s), (r + 1; s + 1) và (r + 2; s + 1) sẽ là s, s + 1 và s + 1 mà tổng của chúng là một số chia cho 3 dư 2.

Vậy nếu tô màu được hết các ô vuông của bảng đã cho thì tổng S' của tất cả các số đã được ghi vào bảng phải là một số chia cho 3 dư 2.

Nhưng S = 1991 . (1 + 2 + ... + 1992) = 1991 . 1993 . 993, chia hết cho 3.

Mâu thuẫn ! Do đó không thể tô màu được tất cả ô vuông của bảng đã cho.

Bài toán 21. 27:

Một hình tròn được chia thành 14 hình quạt. Mỗi hình đặt một viên bi. Ta thực hiện một nước đi như sau: Mỗi lần 2 viên bi ở 2 hình quạt khác nhau di chuyển sang 2 hình quạt kề với 2 ô đó nhưng theo chiều ngược nhau. Hỏi rằng sau một số lần thực hiện nước đi đó, ta có thể đưa tất cả các viên bi về cùng một ô hay không?

Hướng dẫn giải

Đánh số các hình quạt từ 1 đến 14. Đặt S bằng tổng số bi trong ô chẵn trừ đi tổng số bi trong ô lẻ. Ban đầu S sẽ bằng 0

Khi chuyển một viên bi từ ô chẵn sang ô lẻ, S sẽ giảm đi 2, còn khi chuyển một viên từ ô lẻ sang ô chẵn, S sẽ tăng 2. Do đó sau mỗi lần chuyển chỗ 2 viên bi, S sẽ hoặc không đổi, hoặc giảm 4, hoặc tăng 4.

Như vậy S luôn chia hết cho 4 . Chính vì vậy ta sẽ không thể dồn tất cả 14 viên bi về một ô (do S không thể bằng ± 14)

Bài toán 21. 28:

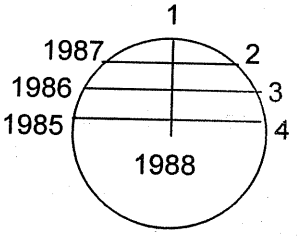
Có 1988 con gà nhốt vào 994 chuồng, mỗi chuồng có hai con. Sau mỗi ngày người ta lại thay đổi vị trí của gà sao cho không có hai con gà nào đã ở chung chuồng trước đó lại nằm cùng chuồng lần nữa. Hỏi có bao nhiêu ngày làm được như vậy ?.

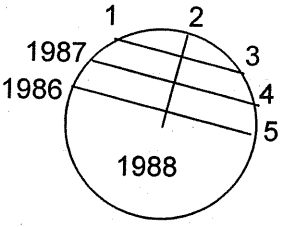
Hướng dẫn giải

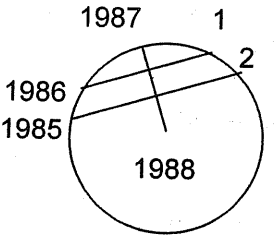
Đánh số các con gà là 1, 2, ..., 1988. Vẽ đa giác đều 1987 cạnh nội tiếp trong đường tròn tâm là điểm 1988. Cách làm như sau :

1) Lấy 1 và 1988. Các dây cung vuông góc với bán kính 1 – 1988 là : 2 – 1987, 3 – 1986, ...

2) Lấy 2 và 1988. Các dây cung vuông góc với bán kính 2 – 1988 là 1 – 3, 4 – 1987, 5 – 1986, ... Cứ thế mãi đến 1987 thì 1987 và 1988; các dây cung vuông góc với bán kính 1987 – 1998 là : 1 – 1986, 2 – 1985 ,....







Rõ ràng có 1987 ngày, vì trên đường tròn là đa giác đều có số cạnh là số lẻ. Hơn nữa không có quá 1987 ngày vì mỗi con gà chỉ có thể ở cùng chuồng với một trong số 1987 con khác.

Bài toán 21. 29:

Một quốc gia có 100 sân bay. Khoảng cách giữa các sân bay là khác nhau. Mỗi một sân bay chỉ có một chuyến bay đến sân bay gần nhất. Chứng minh rằng không có sân bay nào có quá 5 chuyến bay đến.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại một sân bay có hơn 5 chuyến bay đến. Gọi O là sân bay đó và A_i ($i \in \{1, ..., 6\}$ là một trong các sân bay đến O. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử thứ tự các sân bay này theo chiều kim đồng hồ từ A_1 là $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Khi đó $\sum_{i=1}^{6} A_1OA_{i+1} = 360^o$ nên $\exists i$ để $A_iOA_{i+1} \le 60^o$ (xem $A_7 \equiv A_1$)

Do đó một trong hai góc còn lại của tam giác A_1OA_{i+1} lớn hơn 60^o (do các khoảng cách không bằng nhau)

$\Rightarrow A_1A_{i+1} < \max\{OA_1, OA_{i+1}\}$, mâu thuẫn với giả thiết (vì nếu $A_iA_{i+1} < OA_i$ thì sân bay A_i có chuyến bay đến A_{i+1} chứ không phải đến O).

Bài toán 21. 30:

Có 3 trường học, mỗi trường có n học sinh. Mỗi một học sinh quen với ít nhất n + 1 học sinh từ hai trường khác. Chứng minh rằng người ta có thể chọn ra từ mỗi trường một học sinh sao cho ba học sinh được chọn đôi một quen nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi A là số học sinh có nhiều bạn nhất ở một trường khác. Gọi số bạn này là k. Giả sử A ở trường 1 và những bạn quen A là $B_1, B_2, ..., B_k$ ở trường 2.

Ta có $k \geq \frac{n+1}{2}$. Cũng theo giả thiết, có ít nhất 1 học sinh C ở trường 3 quen với A. Giả sử C không quen với B_i với mọi i = 1, 2,..., k thì C quen với nhiều nhất n – k học sinh của trường 2. Suy ra C quen với ít nhất n + 1 – (n – k) = k + 1 học sinh ở trường 1, điều này mâu thuẫn với cách chọn A. Vậy C phải quen với một bạn B_i nào đó. Khi đó A, B_i và C chính là 3 học sinh cần tìm.

Bài toán 21. 31:

Các em nhỏ ở một lớp đứng vòng tròn chơi trò chia kẹo. Cô giáo cho mỗi em một số chẵn chiếc kẹo (lớn hơn 0, có thể bằng nhau, có thể khác nhau). Một em nào đó đưa một nửa số kẹo của mình cho bạn ở ngay bên phải của mình. Tiếp đó, em vừa nhận được kẹo của bạn xong cũng là như thế nếu số kẹo hiện có của mình là số chẵn, còn nếu là số lẻ thì nhận được thêm một chiếc kẹp của cô giáo trước khi đưa kẹo cho bạn. Các em cứ lần lượt đưa kẹo như thế theo vòng tròn. Chứng minh rằng sẽ dẫn đến trường hợp là có một em đưa một nửa số kẹo của mình không phải cho bạn mà cho cô giáo thì khi số kẹo đó của mỗi em bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Ta xét việc em thứ i đưa nửa số kẹo của mình cho em thứ (i + 1) thành hai giai đoạn : giai đoạn 1, em thứ i đưa nửa số kẹo của mình cho cô giáo; giai đoạn 2, cô giáo đưa nửa số kẹo đó cho em thứ i + 1.

Bây giờ xét bài toàn đã cho ở trạng thái của giai đoạn 1 : mọi việc đều tính ở thời điểm "sau khi đưa kẹo cho cô giáo" cũng chính là thời điểm "trước khi cô giáo đưa kẹo cho em sau đó". Với việc xét như vậy thì bài toán trở thành : "Chứng minh rằng đến một lúc nào đó mọi em đều có số kẹo như nhau".

Ký hiệu ở bước thứ i số kẹo lớn nhất em nào đó có được là M_i, còn số kẹo nhỏ nhất là m_i . Thế thì rõ ràng là M_i không tăng. Mặt khác, một khi tất cả mọi người chưa có số kẹo như nhau thì m_i tăng. Vậy đến một lúc nào đó sẽ tồn tại i_0 sao cho $m_{i_0} = M_{i_0}$.

Bài toán 21. 32:

Có 1991 học sinh đứng thành vòng tròn và quay mặt vào giữa để chơi trò đếm số như dưới đây. Mỗi học sinh đếm một số lần lượt theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ học sinh A nào đó. Các số đếm được là 1, 2, 3 và cứ lặp lại theo thứ tự như thế. Nếu học sinh nào đến số 2 hoặc số 3 thì phải rời ngay khỏi vị trí ở vòng tròn. Học sinh còn lại cuối cùng sẽ được thưởng. Hỏi học sinh muốn nhận phần thưởng thì lúc bắt đầu chơi phải chọn vị trí thứ bao nhiêu theo chiều kim đồng hồ kể từ học sinh A đếm số 1 lần đầu tiên ?.

Hướng dẫn giải

Xét 2 trường hợp :

1) Trường hợp có 3^n học sinh đứng thành vòng tròn.

Nếu chia học sinh thành từng nhóm 3 người theo số đếm 1, 2, 3 thì có $3^n : 3 = 3^{n-1}$ nhóm. Sau 1 vòng đếm thì số học sinh ra khỏi vòng là $2 . 3^{n-1}$ và còn lại 3^{n-1} học sinh. Chú ý rằng học sinh B đếm số 1 đầu tiên trong vòng đầu sẽ lại đếm số 1 đầu tiên ở mỗi vòng nên sẽ ở lại đến cuối cùng và sẽ được nhận thưởng.

2) Trường hợp có 1991 học sinh.

Ta có : $3^5 = 729 < 1991 < 3^6 = 2187$. Ta đưa về trường hợp 1 bằng cách tính xem đến khi nào còn lại $729 = 3^5$ học sinh thì học sinh B đếm số 1 đầu tiên trong 729 người sẽ được thưởng.

Như vậy cần có 1991 – 729 = 1262 học sinh rời khỏi vị trí có 1262 : 2 = 631 nhóm 3 người, do đó cần có 631 . 3 = 1893 học sinh đứng trước học sinh B đếm số 1 đầu tiên trong 729 người còn lại.

Vậy nếu chọn số 1 đầu tiên trong số 1991 người thì học sinh B đứng ở vị trí thứ 1894 sẽ là người đếm số 1 đầu tiên trong 729 người, do đó sẽ còn lại đến cuối cùng và được thưởng.

Bài toán 21. 33:

Trong một mạng lưới liên lạc giữa hai vùng A và B có n trạm ở vùng A và k trạm ở vùng B. Mỗi trạm ở vùng A có thể liên lạc được với ít nhất k – p trạm ở vùng B. Chứng minh rằng nếu $n.p < k$ thì có ít nhất một trạm ở vùng B có thể liên lạc được với mọi trạm ở vùng A.

Hướng dẫn giải

Gọi số mạng lưới liên lạc giữa n trạm ở A và trạm ở vùng B là s.

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử không có trạm nào ở vùng B liên lạc với cả n trạm ở A. Ta thấy ngay là : $s \le k(n - 1)$.

Mặt khác theo giả thiết thì mỗi trạm ở vùng A có thể liên lạc được với ít nhất là k – p trạm ở cùng B.

Do đó : $s \ge n(k - p) \Rightarrow n(k-p) \le k(n-1)$

Mà $np < k$ nên $nk - np > nk - k$.

hay : $n(k - p) > k(n - 1)$: vô lý

Vậy phải có ít nhất 1 trạm ở vùng B liên lạc được với cả n trạm ở vùng A.

Bài toán 21. 34:

Tìm tất cả các hình chữ nhật để từ mỗi hình chữ nhật đó có thể cắt ra được 13 hình vuông bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, các hình vuông được cắt phải bằng nhau nên mỗi cạnh của hình chữ nhật phải được chia thành những phần bằng nhau: một cạnh m phần, cạnh còn lại n phần (m, n là những số nguyên dương).

Khi đó, số các hình vuông là m.n, như vậy m:n = 13. Vì 13 là số nguyên tố nên một trong hai số m hoặc n bằng 1, số còn lại là 13.

Vậy: chỉ có hình chữ nhật cạnh 1 và 13 thoả mãn đề bài.

Bài toán 21. 35:

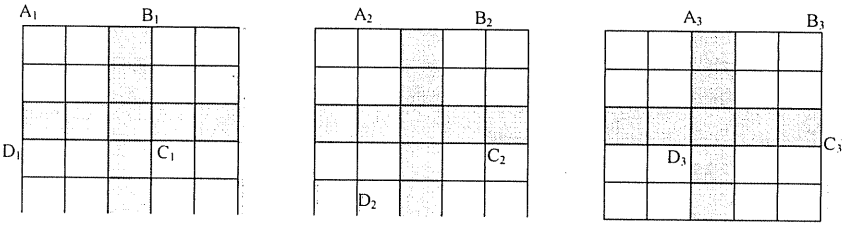
Tính số các ô nhỏ nhất phải quét sơn trên một bảng 5 x 5 để cho bất kì vùng 3 x 3 nào đó trên bảng này cũng chứa ít nhất 4 ô đã quét sơn.

Hướng dẫn giải

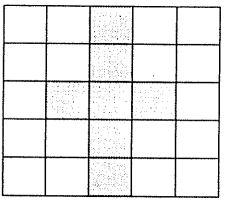
Dọc theo chiều ngang sát cạnh trên của bảng 5 x 5 có 3 vùng 3 x 3 ở 3 vị trí $A_1B_1C_1D_2$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$.

Dịch chuyển xuống theo chiều dọc một ô, ta có thêm 3 vùng 3 x 3. Dịch chuyển xuống theo chiều dọc một ô nữa, ta có thêm 3 vùng 3 x 3.

Do đó có 9 vùng con 3 x 3 của bảng 5 x 5, mỗi vùng con đều chứa 5 ô vuông con 1 x 1 thuộc hình chữ thập đã tô màu.



Nếu chỉ quét sơn như hình vẽ bên thì mỗi vùng con 3 x 3 đều chứa 4 hoặc 5 ô 1 x 1 được quét sơn



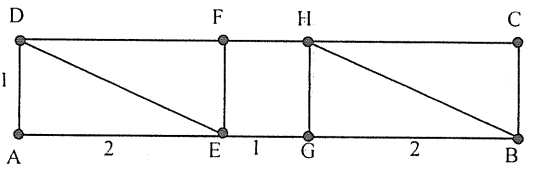
Vậy, để mỗi vùng con 3 x 3 của bảng 5 x 5 chứa ít nhất 4 ô 1 x 1 được quét sơn, thì chỉ cần quét số ô nhỏ nhất là 7 ô như hình vẽ bên.

Bài toán 21. 36:

Một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước 1 x 5. Hãy cắt tấm bìa thành các mảnh để ráp lại thành một hình vuông. Hướng dẫn giải thích.

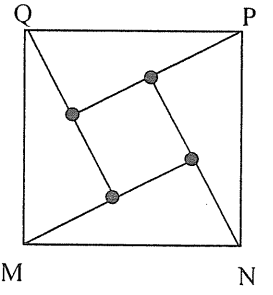
Hướng dẫn giải

Tấm bìa hình chữ nhật 1 x 5 có diện tích là 5 (đvdt)



Để cắt hình chữ nhật thành các mảnh ráp thành hình vuông thì cạnh của hình vuông bằng $\sqrt{5}$, bằng độ dài cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông có kích thước là 1 và 2 có diện tích bằng 1 (đvdt).

Do đó nếu cắt hình chữ nhật 1 x 5 theo đường chéo của 2 hình chữ nhật AEFD và GBCH và cắt theo 2 đường EF và GH xong ráp lại thì được hình vuông MNPQ như hình bên.



Bài toán 21. 37:

Có 2010 viên sỏi. Hai người chơi thay phiên nhau bốc sỏi, mỗi lượt đi người chơi được quyền bốc một số lượng viên sỏi là luỹ thừa với số mũ tự nhiên bất kỳ của 2 (1, 2, 4, 8...).Ai bốc được viên sỏi cuối cùng là thắng cuộc. Giả sử cả 2 người chơi đều là người thông minh. Hỏi ai là người thắng cuộc?

Hướng dẫn giải

Chiến thuật của người đi sau như sau:

Khi người đi trước bốc 2^k viên sỏi.

Nếu k lẻ thì 2^k chia 3 dư 2, người đi sau sẽ bốc 1 viên sỏi.

Nếu k chẵn thì 2^k chia 3 dư 1, người đi sau sẽ bốc 2 viên sỏi.

Như vậy người đi trước sẽ luôn phải đối mặt với tình huống số viên sỏi còn lại chia hết cho 3 và không bao giờ bốc được viên sỏi cuối cùng.

Vậy người đi sau thắng cuộc.

Bài toán 21. 38:

Hai người chơi trò chơi sau: Ban đầu có các số 1, 2, 3, 4 xếp theo một vòng tròn. Mỗi một lần thực hiện, người thứ nhất cộng vào hai số cạnh nhau nào đó 1 đơn vị, còn người thứ hai đổi chỗ hai số cạnh nhau nào đó. Người thứ nhất thắng nếu sau một nước đi nào đó, tất cả các số bằng nhau. Hỏi người thứ hai có thể cản trở người thứ nhất chiến thắng không?

Hướng dẫn giải

Có thể. Ta chứng minh rằng người thứ hai luôn có thể đạt được điều là: sau bước đi của người này, các số trên vòng tròn sẽ có tính chẵn lẻ xen kẽ nhau, tức là C – L – C – L. Khi đó, bằng 1 nước đi của mình, người thứ nhất sẽ biến các số trên vòng tròn về dạng L – C – C – L, do đó sau nước đi này, các số sẽ không thể đồng thời bằng nhau.

Chú ý là từ lúc đầu, các số đã cho có dạng chẵn lẻ xen kẽ nhau. Như vậy, sau nước đi của người thứ nhất, các số sẽ có dạng L – C – C – L và người thứ hai có thể đổi chỗ hai số để đưa về dạng C – L – C – L. Như vậy người thứ nhất không thể thắng.

Bài toán 21. 39:

Cho 1994 số $a_1, a_2, ..., a_{1994}$ mỗi số bằng 1 hoặc –1. Hỏi có thể chọn ra được hay không từ 1994 số đó một số số sao cho tổng các số được chọn ra bằng tổng các số còn lại?

Hướng dẫn giải

Giả sử trong 1994 số $a_1, a_2, ..., a_{1994}$ có m số bằng 1 và n số bằng –1, khi đó m + n = 1994. Vì 1994 là số chẵn nên m + n là số chẵn, do vậy m và n cũng tính chẵn lẻ.

Nếu m là số chẵn thì n là số chẵn, khi đó chọn $\frac{m}{2}$ số bằng 1 và $\frac{n}{2}$ số bằng –1 thì tổng của các số được chọn ra bằng tổng của các số còn lại.

Nếu m là số lẻ thì n là số lẻ. Đặt m = 2k + 1 và n = 2q + 1 (k và q nguyên dương). Ta chọn k số bằng 1 và q số bằng –1, khi đó tổng các số chọn ra là k+ (–q) = k – q, tổng các số còn lại là k + 1 – (q + 1) = k – q.

Vậy tổng các số được chọn ra bằng tổng các số còn lại.

Bài toán 21. 40:

Một nhà thông thái bị xử phạt tội chết và bị hành quyết: hoặc chém đầu hoặc treo cổ. Trước khi hành quyết nhà vua cho được nói một câu và giao hẹn: nếu nói đúng thì chém đầu, nếu nói sai thì treo cổ. Nhà thông thái mỉm cười và nói một câu và nhờ đó đã thoát chết.

Bạn hãy cho biết câu nói đó của nhà thông thái như thế nào?

Hướng dẫn giải

Câu nói của nhà thông thái là: "Tôi sẽ bị treo cổ".

- Nếu nhà vua đem nhà thông thái đi chém đầu thì nhà thông thái nói sai. Mà nói sai thì phải xử treo cổ chứ không thể chém đầu nhà thông thái.
- Nếu nhà vua đem treo cổ nhà thông thái thì nhà thông thái nói đúng. Mà nói đúng thì phải đem chém đầu chứ không thể treo cổ.

Nhà thông thái không bị chém đầu, không bị treo cổ cho nên đã thoát chết.

Bài toán 21. 41: Có 2 đống đá, một có n hòn và đống kia có k hòn. Cứ mỗi phút, một máy tự động lại chọn đống có số hòn đó là chẵn và chuyển một nửa qua đống kia, nếu cả 2 đống cùng chẵn thì máy chọn ngẫu nhiên một đống. Nếu cả 2 đống số hòn đá cùng lẻ thì máy dừng lại. Hỏi tồn tại bao nhiêu cặp thứ tự (n;k) với n, k nguyên không vượt quá 2013 để máy hoạt động sau một khoảng thời gian hữu hạn thì dừng?

Hướng dẫn giải

Giả sử $n = 2^a.u$ và $k = 2^b.v$ với u, v lẻ.

Ta chứng minh máy hoạt động sau một khoảng thời gian hữu hạn thì dừng khi và chỉ khi a = b.

Xét a =b = 0 thì n và k lẻ nên máy dừng.

Xét a =b $\geq$ 1 thì từ cặp (n;k) máy tự động có thể nhân được cặp

$(2^{a-1}.u;2^{a-1}.(u + 2v))$ hoặc $(2^{a-1}.(2u+v);2^{a-1})$.

Ví các số u + 2v và 2u + v đều lẻ nên máy tự động làm giảm số mũ của 2 xuống 1 đơn vị, qua a bước thì số mũ này bằng 0 nên máy sẽ dừng.

Xét a $\neq$ b , giả sử a < b.

Nếu a $\leq$ b– 2 thì từ cặp (n;k) máy tự động có thể nhân được cặp

$(2^a.(u + 2^{b-1-a} v);2^{b-1}.v)$ với các số mũ của lũy thừ 2 khác nhau.

Nếu a = b– 1 thì từ cặp (n;k) máy tự động có thể nhân được cặp

$$(2^a.(u + v);2^a.v) = \left(2^{a+m}.\frac{u+v}{2^m};2^a.v\right)$$, m nguyên dương, $\frac{u+v}{2^m}$ lẻ nên các số mũ của lũy thừ 2 khác nhau. Trong trường hợp này máy sẽ không dừng lại.

Khi n, k nguyên không vượt quá 2013 thì

$n = 2^a.u \leq 2013$ và $k = 2^b.v \leq 2013$ với u, v lẻ.

Có 1007 số lẻ không vượt quá 2013 nên với số cặp ứng a = 0 là 1007^2.

Có 503 số không vượt quá 2013, chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4 nên với số cặp ứng a = 1 là 503^2,...

Tổng số cặp là

$1007^2 + 503^2 + 252^2 + 126^2 + 63^2 + 31^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = 1351709$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 21. 1: Hội nghị đại biểu thanh niên gồm 47 nam nữ thanh niên. Cô Lê nhận ra mình quen 16 nam, cô Đào quen 17 nam, cô Mận quen 18 nam, ... và cô Cam, người nữ thanh niên cuối cùng nhận thấy mình quen tất cả nam có mặt ở hội nghị. Hãy tính xem có bao nhiêu nam, bao nhiêu nữ ?

Hướng dẫn

Kết quả hội nghị có 16 nữ và 31 nam.

Bài tập 21. 2: Trong một hình vuông cạnh bằng 1 đặt 51 điểm bất kỳ. Chứng minh tồn tại 3 điểm trong đó nằm tronh một hình tròn bán kính $R = \frac{1}{7}$.

Hướng dẫn

Chai hình vuông thành 5x5 hình vuông bằng nhau.

Bài tập 21. 3: Tìm 2 số nguyên dương a và b sao cho 3 trong 4 mệnh sau có giá trị Đ:

(1): $a + 1 \vdots b$ (2): $a = 2b + 5$ (3): $a + b \vdots 3$ (4): $a + 7b$ nguyên tố

Hướng dẫn

Kết quả (a;b) = (9;2) hoặc (17;6).

Bài tập 21. 4: Mặt phẳng được phân chia thành các tam giác đều bằng nhau sao cho hai tam giác bất kỳ không có điểm chung hoặc chung nhau một đỉnh, hoặc chung nhau một cạnh. Có hay không một hình tròn chứa đúng 1988 đỉnh các tam giác đó ?.

Hướng dẫn

Kết quả tồn tại

Bài tập 21. 5: Cho đa giác lồi $A_1A_2 ... A_{1993}$ mà tồn tại mỗi đỉnh đã ghi một dấu cộng (+) hoặc một dấu trừ (–) sao cho trong 1993 dấu đó có cả dấu (+) và dấu (–). Thực hiện việc thay dấu như sau : mỗi lần, thay dấu đồng thời tại tất cả các đỉnh A_i(i = 1, 2, ..., 1993) của đa giác theo quy tắc : Nếu dấu tại A_i và A_{i+1} là như nhau thì dấu tại A_i được thay bởi dấu (+); nếu dấu tại A_i và A_{i+1} là khác nhau thì dấu tại A_i được thay bởi dấu (–) với qQuy ước coi A_{1994} là A_1.

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k \geq 2$ sao cho sau khi thực hiện liên tục k lần phép thay dấu nói trên, ta được đa giác $A_1A_2 ... A_{1993}$ mà dấu tại mỗi đỉnh A_i (i = 1, 2, ..., 1993) trùng với dấu tại chính đỉnh đó ngay sau lần thay dấu thứ nhất.

Hướng dẫn

Đường thẳng chia hình bình hành ABCD thành 2 hình thang với tỉ diện tích là $\frac{1}{3}$ nên phải đi qua trung điểm của nửa đoạn trung bình của hình bình hành.

Bài tập 21. 6: Cho 2016 số nguyên dương tuỳ ý. Chứng minh tồn tại một số số trong đó có tổng chia hết cho 2016.

Hướng dẫn

Dùng phản chứng.

Bài tập 21. 7: Trên đường thẳng có 2n + 1 đoạn thẳng. Mỗi một đoạn thẳng giao với ít nhất n đoạn thẳng khác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng giao với tất cả các đoạn thẳng còn lại.

Hướng dẫn

Chia hình tròn thành 8 phần bằng nhau bởi 4 đường kính rồi khét đi hình tròn ở giữa bán kính bằng thành ra 9 phần.

Bài tập 21. 8: Chứng minh rằng trong 15 số nguyên dương thuộc {2, 3, ..., 1992} và đôi một nguyên tố cùng nhau, có ít nhất một số nguyên tố.

Hướng dẫn

Xét 2016 tổng gồm k số đầu tiên a_1, $a_1 + a_2$; ... , $a_1 + a_2 + ... + a_{2016}$ rồi xét đồng dư khi chia cho 2016.

Bài tập 21. 9: Cho 2n – 1 số tự nhiên liên tiếp 1, 2, 3, ..., 2n – 1. Hãy gạch đi ít nhất n – 1 số theo quy tắc sau: Nếu đã gạch số a thì phải gạch số 2a = a + a. Nếu đã gạch số a và số b thì phải gạch số a + b

Hỏi cần phải gạch số nào để tổng các số còn lại là lớn nhất ? Tại sao ?.

Hướng dẫn

Kết quả phải gạch mọi số chẵn trong dãy đã cho: 2, 4, ..., 2n – 2.

Bài tập 21. 10: Một số số thực dương được viết trên bảng. Tổng của các tích đôi một của chúng bằng 1. Chứng minh rằng ta có thể xoá đi một số để tổng các số còn lại nhỏ hơn $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

Dùng bất biến.

Bài tập 21. 11: Trên bảng ghi số $\frac{1}{96}, \frac{2}{96}, \frac{3}{96}, ..., \frac{96}{96}$. Mỗi lần xóa đi 2 số a và b trong đó rồi thay bởi số a +b – 2ab. Sau 95 lần thực hiên thì còn lại số nào?

Hướng dẫn

Đặt các số là $a_1, a_2, ... a_k$ thì tích $(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_k-1)$ không đổi dấu.

Kết quả còn số $\frac{48}{96} = \frac{1}{2}$

Bài tập 21. 12: Cho số nguyên $n \geq 2$ và cho một đa giác đều 2n đỉnh. Người ta tô tất cả các đỉnh của đa giác đều đó bởi n màu sao cho các điều kiện sau đồng thời được thoả mãn :

(i) Mỗi đỉnh được tô bằng một màu;

(ii) Mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau.

Hai cách tô màu thoả mãn các điều kiện trên được gọi là tương đương nếu cách tô màu này nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đều đã cho. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương ?.

Hướng dẫn

Kết quả $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{(2n-1-k)!}{2^{n-k}} \cdot C_n^k + \frac{1}{2}(n-1)!$

MỤC LỤC

Chuyên đề 1: PHẢN CHỨNG VÀ QUY NẠP 3
Chuyên đề 2: ÁNH XẠ VÀ HÀM SỐ 24
Chuyên đề 3: TẬP HỢP VÀ PHÉP ĐẾM 55
Chuyên đề 4: PHƯƠNG TRÌNH 75
Chuyên đề 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH 107
Chuyên đề 6: BẤT PHƯƠNG TRÌNH 140
Chuyên đề 7: VECTƠ 164
Chuyên đề 8: TÍCH VÔ HƯỚNG 190
Chuyên đề 9: HỆ THỨC LƯỢNG 214
Chuyên đề 10: TAM GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN 244
Chuyên đề 11: CỰC TRỊ HÌNH HỌC 269
Chuyên đề 12: PHÉP BIẾN HÌNH 293
Chuyên đề 13: TOẠ ĐỘ PHẲNG 317
Chuyên đề 14: ĐƯỜNG TRÒN VÀ CÔNIC 343
Chuyên đề 15: LƯỢNG GIÁC VÀ ỨNG DỤNG 378
Chuyên đề 16: BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN 411
Chuyên đề 17: BẤT ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG 440
Chuyên đề 18: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT 473
Chuyên đề 19: ĐA THỨC 504
Chuyên đề 20: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN 531
Chuyên đề 21: TOÁN SUY LUẬN 562

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập : **TS. PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập : **DUY THẮNG – QUỐC ĐẠT**

Chế bản : **CÔNG TY KHANG VIỆT**

Trình bày bìa : **CÔNG TY KHANG VIỆT**

Tổng phát hành và đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

SÁCH LIÊN KẾT

10 TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN–LỚP 10

Mã số: 1[illegible]–121ĐH2014
Mã số ISBN: 978–604–939–455–3
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm
Tại: **CÔNG TY TNHH In ấn Mai Thịnh Đức**
Địa chỉ: 71 Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 390 – 2014/CXB/16 – 58/ĐHQGHN ngày 05/03/2014.
Quyết định xuất bản số: 114LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, cấp ngày 07/03/2014
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2014