M5587

10 trọng điểm

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

MÔN TOÁN 11

- Dành cho học sinh lớp 11 chương trình chuẩn và nâng cao
- Ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài
- Biên soạn theo nội dung và cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
DVL 13461 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm mục đích giúp các bạn học sinh lớp 10, lớp 11, lớp 12 có tư liệu đọc thêm để nâng cao trình độ, các bạn học sinh giỏi tự học bổ sung thêm kiến thức kỹ năng, các bạn học sinh chuyên Toán tự nghiên cứu thêm các chuyên đề, nhà sách **KHANG VIỆT** *hợp tác biên soạn bộ sách* BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI, BỒI DƯỠNG CHUYÊN TOÁN *gồm 3 cuốn:*

- **TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 10**
- **TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 11**
- **TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 12**

Cuốn TRỌNG ĐIỂM TOÁN LỚP 11 *này có 21 chuyên đề với nội dung là tóm tắt kiến thức trọng tâm của Toán phổ thông và Toán chuyên, phần các bài toán chọn lọc có khoảng 900 bài với nhiều dạng loại và mức độ từ cơ bản đến phức tạp, bài tập tự luyện khoảng 250 bài, có hướng dẫn hay đáp số.*

Cuối sách có 3 chuyên đề nâng cao: ĐA THỨC, PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN *và* TOÁN SUY LUẬN.

Dù đã cố gắng kiểm tra trong quá trình biên tập song cũng không tránh khỏi những khiếm khuyết sai sót, mong đón nhận các góp ý của quý bạn đọc để lần in sau hoàn thiện hơn.

Tác giả

LÊ HOÀNH PHÒ

Chuyên đề 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các tính chất của hàm số :

- Tính chẵn – lẻ của hàm số $y = f(x)$

  Tập xác định D : $x \in D \Rightarrow -x \in D$

  Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì f là hàm số chẵn

  Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì f là hàm số lẻ

- Tính đơn điệu của $y = f(x)$ trên $K = (a; b)$. $\forall x_1, x_2 \in K$

  Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì f đồng biến trên K

  Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì f nghịch biến trên K.

- Hàm số tuần hoàn

  Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

  $$x + T \in D,\ x - T \in D \text{ và } f(x + T) = f(x).$$

  Nếu có số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là một hàm số tuần hoàn với chu kì T.

  Chu kì của các hàm số $y = \sin ax$, $y = \cos ax$ là $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$, của các hàm số $y = \tan bx$, $y = \cot bx$ là $T = \dfrac{\pi}{|b|}$.

Các hàm số lượng giác:

- Hàm số $y = \sin x$: có tập xác định là **R** , tập giá trị là $[-1; 1]$, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi)$, $k \in$ **Z** và có đồ thị là một đường hình sin.
- Hàm số $y = \cos x$: có tập xác định là **R,** tập giá trị là $[-1; 1]$, hàm số chẵn, hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in$ **Z.** Có đồ thị là một đường hình sin.
- Hàm số $y = \tan x$: có tập xác định là: $D = \mathbf{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, tập giá trị là **R**, hàm số lẻ;hàm số tuần hoàn với chu kì π,đồng biến trên mỗi khoảng $(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in$ **Z,** đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (...Z) làm một đường tiệm cận.

- Hàm số y = cotx: có tập xác định là: $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, tập giá trị là **R**; hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn với chu kỳ π; nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbf{R}$; có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) làm một đường tiệm cận

Các hàm số lượng giác ngược:

- Hàm số y = arcsinx: có tập xác định là [−1; 1], tập giá trị là $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \\ \sin y = x \end{cases}$$

- Hàm số y = arccosx: có tập xác định là [−1; 1], tập giá trị là $[0; \pi]$.

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \pi \\ \cos y = x \end{cases}$$

- Hàm số y = arctanx: có tập xác định là **R**, tập giá trị là $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ \tan y = x \end{cases}$$

- Hàm số y = arccotx: có tập xác định là **R**, tập giá trị là $(0; \pi)$.

$$y = \text{arccot}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < \pi \\ \cot y = x \end{cases}$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1.1: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ b) $y = \tan(2x + \frac{\pi}{3})$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số chỉ xác định khi $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

b) Hàm số chỉ xác định khi $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) \ne 0$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định là $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài toán 1.2: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sqrt{3 - 2\cos x}$ b) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$

Hướng dẫn giải

a) Vì $3 - 2\cos x > 0$ với mọi x, nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Ta có $1 - \sin x \geq 0$ và $1 + \cos x \geq 0$ với mọi x nên hàm số chỉ xác định khi $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Bài toán 1.3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sin \pi x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \pi x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Vậy tập xác định: $D = (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$

b) Điều kiện: $\sin x - \cos x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,\sin(x - \frac{\pi}{4}) > 0$

$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \Leftrightarrow k2\pi < x - \frac{\pi}{4} < \pi + k2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài toán 1.4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{-\cos x}$ b) $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $-\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\sin(\cos x) \geq 0 \Leftrightarrow k2\pi \leq \cos x \leq \pi + k2\pi$

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi x nên điều kiện là:

$0 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 1. 5: Tìm các giá trị của m để hàm số :

$f(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m \sin x \cos x}$ xác định với mọi x.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\sin^4 x + \cos^4 x - 2m \sin x \cos x \geq 0, \forall x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 2m \sin x \cos x \geq 0, \forall x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - m \sin 2x \geq 0, \forall x$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2m \sin 2x - 2 \leq 0, \forall x$

Đặt $t = \sin 2x$, $-1 \leq t \leq 1$ thì bài toán trở thành: tìm m để

$f(t) = t^2 + 2mt - 2 \le 0$ thỏa mãn với mọi $t \in [-1, 1]$:

$$\begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 1 \le 0 \\ 2m - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}.$$

Bài toán 1.6: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số:

a) $y = f(x) = \tan x + 2\sin x$ b) $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$: $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \tan(-x) + 2\sin(-x) = -\tan x - 2\sin x = -f(x)$

Vậy f là hàm số lẻ.

b) $D = \mathbf{R}$: $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos x + \sin^2 x = f(x)$

Vậy f là hàm số chẵn.

Bài toán 1. 7: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số:

a) $y = f(x) = \sin x.\cos^3 x$ b) $y = f(x) = \sin x + \cos x$.

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R}$: $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \sin(-x).\cos^3(-x) = -\sin x.\cos^3 x = -f(x)$. Vậy f là hàm số lẻ.

b) $f(x) = \sin x + \cos x$, tập xác định là **R**.

Ta có: $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $f(-\frac{\pi}{4}) = 0$

Vì $f(-\frac{\pi}{4}) \ne f(\frac{\pi}{4})$ nên f(x) không phải là hàm số chẵn.

Vì $f(-\frac{\pi}{4}) \ne -f(\frac{\pi}{4})$ nên f(x) không phải là hàm số lẻ.

Vậy hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ không phải là hàm số chẵn hay lẻ.

Bài toán 1. 8: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số:

a) $y = \cos\frac{x}{2}$ b) $y = \tan\frac{x}{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ đồng biến trong các khoảng mà:

$$\pi + k2\pi < \frac{x}{2} < 2\pi + k2\pi \Leftrightarrow 2\pi + k4\pi < x < 4\pi + k4\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Hàm số nghịch biến trong các khoảng mà:

$$k2\pi < \frac{x}{2} < \pi + k2\pi \Leftrightarrow k4\pi < x < 2\pi + k4\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Vậy hàm số đồng biến trong các khoảng $(2\pi+4k\pi\ ;\ 4\pi+4k\pi)$; nghịch biến trong các khoảng $(4k\pi; 2\pi + 4k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$

b) Hàm số $y = \tan\frac{x}{3}$ đồng biến trong các khoảng mà:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{3} < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} + 3k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 3k\pi,\ k \in Z$$

Vậy hàm số đồng biến trong các khoảng $(-\frac{3\pi}{2} + 3k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 3k\pi),\ k \in Z$

Bài toán 1. 9: Chứng minh trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

Hướng dẫn giải

Trên khoảng K, hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì với x_1, x_2 tuỳ ý thuộc K mà $x_1 < x_2 \Rightarrow \sin^2 x_1 < \sin^2 x_2$.

Do đó $\cos^2 x_1 = 1 - \sin^2 x_1 > 1 - \sin^2 x_2 = \cos^2 x_2$, tức là hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến trên K.

Bài toán 1. 10: Chứng minh:

a) $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \text{arc}\cot\frac{2}{11}$ b) $\arctan(-2) + \arctan(-3) = -\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $a = \arcsin\frac{4}{5}$, $b = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$

thì: $\sin a = \frac{4}{5}$, $\cos b = \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $0 < a + b < \pi$.

Ta có: $\cos a = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$; $\sin b = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Suy ra $\cot(a + b) = \frac{1 - \tan a \tan b}{\tan a + \tan b} = \frac{2}{11} \Rightarrow a + b = \text{arccot}\frac{2}{11}$: đpcm

b) Đặt $a = \arctan(-2)$, $b = \arctan(-3)$, $-\frac{\pi}{2} < a < -\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2} < b < -\frac{\pi}{4}$ thì

$\tan a = -2$, $\tan b = -3$ và $-\pi < a + b < -\frac{\pi}{2}$

Ta có $\tan(a + b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b} = 1$. Suy ra $a + b = -\frac{3\pi}{4}$: đpcm.

Bài toán 1. 11: Chứng minh rằng:

a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $|x| \le 1$

b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$

c) $\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le -y \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin(-y) = -\sin y = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow -y = \arcsin(-x)$. Do đó $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

b) $y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{\pi}{2} - y \le \pi \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} - y = \arccos x \Leftrightarrow y + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Do đó $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

c) $y = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 + \cot^2 y = 1 + \dfrac{1-x^2}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{\sin^2 y} = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin y = x \end{cases} \Leftrightarrow y = \arcsin x.$

Do đó $\arcsin x = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

Bài toán 1. 12: Chứng minh rằng:

a) $\arctan(-x) = -\arctan x$, $x \in R$ b) $\arctan x + \text{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in R$

c) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$.

Hướng dẫn giải

a) $y = \arctan x \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < -y < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan(-y) = -\tan y = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow -y = \arctan(-x)$. Do đó $\arctan(-x) = -\arctan x$.

b) $y = \arctan x \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{\pi}{2} - y < \pi \\ \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \tan y = x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} - y = \text{arccot}x \Leftrightarrow y + \text{arccot}x = \dfrac{\pi}{2}$

Do đó $\arctan x + \text{arccot}x = \dfrac{\pi}{2}$.

c) $y = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos^2 y = 1 - \dfrac{x^2}{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan y = x \end{cases} \Leftrightarrow y = \arctan x$.

Do đó $\arctan x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R$.

Bài toán 1. 13: Cho $|x| \le 1$ và $|y| \le 1$.Chứng minh rằng:

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}), x+y \ge 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}), x+y < 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Với $|x| \le 1$ và $|y| \le 1$, đặt $x = \cos u$, $y = \cos v$, $0 \le u,v \le \pi$.

Ta có sinu, sin v ≥ 0 và $0 \le u + v \le 2\pi$ nên

$xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2} = \cos u.\cos v - \sin u.\sin v = \cos(u+v)$.

- Xét $x + y \ge 0 \Leftrightarrow \cos u + \cos v \ge 0$.

Nếu $x \ge 0, y \ge 0$ thì $0 \le u,v \le \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 \le u + v \le \pi$.

Do đó $u + v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2})$.

Nếu $x \ge 0, y < 0$ thì $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 \le \pi - v \le \dfrac{\pi}{2}$.

Từ $\cos u \ge -\cos v = \cos(\pi - v) \Rightarrow u \le \pi - v \Rightarrow u + v \le \pi$

Do đó u +v = arccos(xy – $\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}$).

Nếu x < 0, y ≥ 0 thì giải tương tự.

– Xét x +y < 0 ⇔ cosu + cosv < 0.

Nếu x ≤ 0, y ≤ 0 thì $\frac{\pi}{2} \le u, v \le \pi$ nên $\pi \le u+v \le 2\pi$

$\Rightarrow 0 \le 2\pi - u - v < \pi$ và $\cos(2\pi - u - v) = \cos(u+v)$

Do đó $2\pi - u - v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2})$.

Nếu x > 0, y < 0 thì $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \pi - v \le \frac{\pi}{2}$

nên $\pi \le u+v \le 2\pi$.

Từ $\cos u \le -\cos v = \cos(\pi - v) \Rightarrow u \ge \pi - v \Rightarrow u + v \ge \pi$

$0 \le 2\pi - u - v < \pi$ và $\cos(2\pi - u - v) = \cos(u+v)$

Do đó $2\pi - u - v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2})$.

Nếu x < 0, y ≥ 0 thì giải tương tự.

Bài toán 1. 14: Cho xy ≠ 1.Chứng minh rằng:

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan\frac{x+y}{1-xy}, xy < 1 \\ \pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy}, xy > 1, x > 0 \\ \pi - \arctan\frac{x+y}{1-xy}, xy > 1, x < 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Với xy ≠ 1. Đặt u = arctanx, v = arctany

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, tanu = x, tanv = y.

Ta có $\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u.\tan v} = \tan(u+v)$

– Xét xy <1 : vì cosu >0, cosv >0 nên

$$xy = \frac{\sin u.\sin v}{\cos u.\cos v} < 1 \Leftrightarrow \cos(u+v) > 0$$

Do đó $-\frac{\pi}{2} < u + v < \frac{\pi}{2}$ nên $u + v = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

– Xét xy >1 : vì cosu >0, cosv >0 nên

$$xy = \frac{\sin u.\sin v}{\cos u.\cos v} > 1 \Leftrightarrow \cos(u+v) < 0$$

Nếu x > 0 thì $0 < u < \frac{\pi}{2}$ nên $\frac{\pi}{2} < u + v < \frac{3\pi}{2}$.

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < u + v - \pi < \frac{\pi}{2}$ và $\tan(u + v - \pi) = \tan(u+v)$

Do đó $u + v - \pi = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow u + v = \pi + \arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

Nếu x < 0 thì $-\frac{\pi}{2} < u < 0$ nên $-\frac{3\pi}{2} < u + v < -\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi + u + v < \frac{\pi}{2}$ và $\tan(\pi + u+v) = \tan(u+v)$

Do đó $\pi + u + v = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow u + v = \pi - \arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

Bài toán 1. 15: Chứng minh các hàm số sau đây là tuần hoàn:

a) $y = f(x) = 2\sin 2x$ b) $y = f(x) = \cos\frac{x}{3} + 1$

Hướng dẫn giải

a) D = **R**. Chọn số $L = \pi \neq 0$.Ta có

$f(x + L) = f(x + \pi) = 2\sin 2(x + \pi) = 2\sin(2x + 2\pi) = 2\sin 2x = f(x)$. Vậy f là hàm số tuần hoàn.

b) D = **R** chọn số $L = 6\pi \neq 0$.

Ta có $f(x + L) = f(x + 6\pi) = \cos\frac{x+6\pi}{3} + 1$

$$= \cos(\frac{x}{3} + 2\pi) + 1 = \cos\frac{x}{3} + 1 = f(x)$$

Vậy f là hàm số tuần hoàn.

Bài toán 1. 16: Chứng minh các hàm số sau đây là tuần hoàn:

a) $y = f(x) = 2\sin^2 x - 3\cos x + 1$ b) $y = f(x) = -\tan 3x$

Hướng dẫn giải

a) D = **R** chọn số $L = 2\pi \neq 0$.

Ta có $f(x + L) = f(x + 2\pi) = 2\sin^2(x + 2\pi) - 3\cos(x + 2\pi) + 1$

$$= 2\sin^2 x - 3\cos x + 1 = f(x)$$

Vậy f là hàm số tuần hoàn.

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Chọn số $L = \frac{\pi}{3} \neq 0$.

Ta có: $f(x + L) = f(x + \frac{\pi}{3}) = -\tan 3(x + \frac{\pi}{3})$

$$= -\tan(3x + \pi) = -\tan 3x = f(x)$$

Vậy f là hàm số tuần hoàn.

Bài toán 1. 17: Chứng minh hàm số

a) $y = \cos x$ tuần hoàn và có chu kì $T = 2\pi$

b) $y = \tan x$ tuần hoàn và có chu kì $T = \pi$.

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R}$. Chọn số $L = 2\pi \neq 0$. Ta có:

$f(x + L) = f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$

Vậy f là hàm số tuần hoàn.

Ta chứng minh 2π là số dương và bé nhất trong các số $L \neq 0$ thoả mãn:

$f(x + L) = f(x)$ với mọi x, x + L thuộc D.

Giả sử có số T': $0 < T' < 2\pi$ sao cho:

$f(x + T') = f(x), \forall x \Rightarrow \cos(x + T') = \cos x, \forall x$

Chọn $x = 0$ thì $\cos T' = 1$: Vô lý vì $0 < T' < 2\pi$.

Vậy hàm số có chu kì $T = 2\pi$.

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Chọn số $L = \pi \neq 0$.

$f(x + L) = f(x + \pi) = \tan(x + \pi) = \tan x = f(x)$.

Vậy f là hàm số tuần hoàn.

Ta chứng minh π là số dương và bé nhất trong các số $L \neq 0$ thoả mãn:

$f(x + L) = f(x)$ với mọi x, $x + L \in D$.

Giả sử có số T': $0 < T' < \pi$ sao cho: $f(x + T') = f(x), \forall x, x + T' \in D$.

$\Rightarrow \tan(x + T') = \tan x, \forall x, x + T' \in D$.

Cho $x = 0$ thì $\tan T' = 0$: Vô lý vì $0 < T' < \pi$.

Vậy hàm số có chu kì $T = \pi$.

Bài toán 1. 18: Chứng minh hàm số

a) $y = |\sin x|$ là tuần hoàn với chu kì π.

b) $y = \sin 2x$ là tuần hoàn với chu kì π.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $f(x) = |\sin x|$ có tập xác định là $\mathbf{R}$. Chọn số $L = \pi \neq 0$.

Ta có: $x \in \mathbf{R} \Rightarrow x + \pi \in \mathbf{R}$ và:

$f(x + L) = f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$ (1)

Vậy f(x) là hàm số tuần hoàn. Ta chứng minh chu kì của nó là π, tức là π là số dương nhỏ nhất thoả mãn (1).

Giả sử còn có số dương $T' < \pi$ thoả mãn (1) với mọi x:

$|\sin(x + T')| = |\sin x|, \forall x \in \mathbf{R}$

Cho $x = 0$, ta được $|\sin T'| = 0$ hay $\sin T' = 0$: vô lý, vì $0 < T' < \pi$.

Vậy chu kì của hàm số đã cho là π.

b) Hàm số $f(x) = \sin 2x$ có tập xác định là $\mathbf{R}$. Chọn số $L = \pi \neq 0$.

Ta có $x \in \mathbf{R} \Rightarrow x + \pi \in \mathbf{R}$ và

$f(x + L) = \sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = f(x)$ (1)

Vậy f(x) là hàm số tuần hoàn. Ta sẽ chứng minh chu kì của nó là π.

Thật vậy, giả sử hàm số $f(x) = \sin 2x$ có chu kì A mà $0 < A < \pi$, khi đó ta có:

$$\sin[2(x + A)] = \sin 2x, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Cho $x = \frac{\pi}{4}$ thì $\sin 2(\frac{\pi}{4} + A) = \sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + 2A) = 1 \Rightarrow \cos 2A = 1$: vô lí, vì $0 < 2A < 2\pi$.

Vậy chu kì của hàm số $y = \sin 2x$ là π.

Bài toán 1. 19: Chứng minh các hàm số sau không tuần hoàn:

a) $y = x + \sin x$ b) $y = \cos(x^2)$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $f(x) = x + \sin x$ là hàm tuần hoàn, tức là có số $T \neq 0$ sao cho:

$f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow (x + T) + \sin(x + T) = x + \sin x, \forall x \in \mathbf{R}$

Cho $x = 0$ ta được: $T + \sin T = 0$, cho $x = \pi$ ta được: $T - \sin T = 0$.

Do đó $T + \sin T = T - \sin T = 0 \Rightarrow 2T = 0 \Rightarrow T = 0$: vô lí.

Vậy hàm số không tuần hoàn.

b) Giả sử hàm số $y = \cos^2 x$ là tuần hoàn, nghĩa là tồn tại $L \neq 0$ sao cho:

$\cos(x + L)^2 = \cos x^2$ với mọi x.

Suy ra $(x + L)^2 = x^2 + k2\pi$ hoặc $(x + L)^2 = -x^2 + k2\pi$.

Do đó $L = -x \pm \sqrt{x^2 + k2\pi}$ hoặc $L = -x \pm \sqrt{-x^2 + k2\pi}$ nên L phụ thuộc x: vô lí.

Vậy hàm số không tuần hoàn.

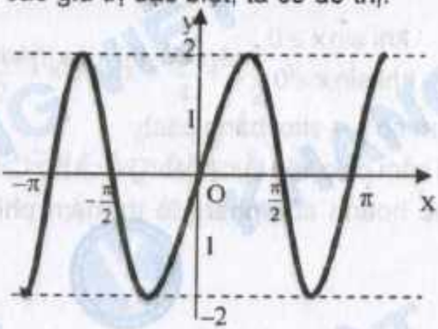
Bài toán 1. 20: Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$. Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ và vẽ đồ thị của hàm.

Hướng dẫn giải

Bảng biến thiên

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = 2\sin 2x$	0 ↘	−2 ↗	0 ↗	2 ↘	0

Dựa vào BBT và các giá trị đặc biệt, ta có đồ thị:



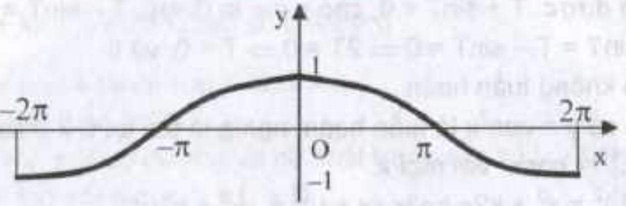
Bài toán 1. 21: Xét hàm số $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}$. Lập bảng biến thiên của hàm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ và vẽ đồ thị của hàm số..

Hướng dẫn giải

Bảng biến thiên

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
$y = \cos\frac{x}{2}$	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1

Đồ thị:

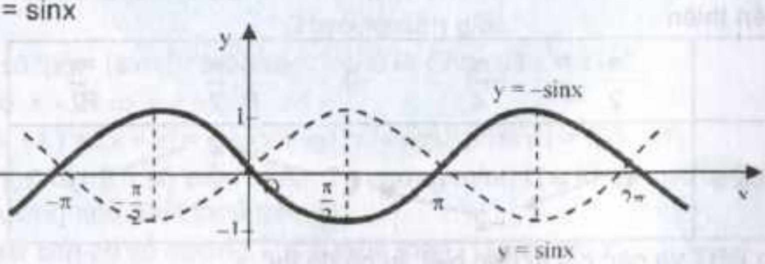


Bài toán 1. 22: Từ đồ thị của hàm số y = sinx, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó:

a) y = –sinx b) y = |sinx| c) y = sin|x|.

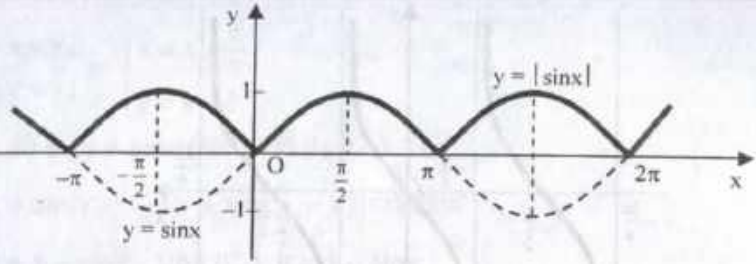
Hướng dẫn giải

a) Đồ thị của hàm số y = –sinx là hình đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số y = sinx

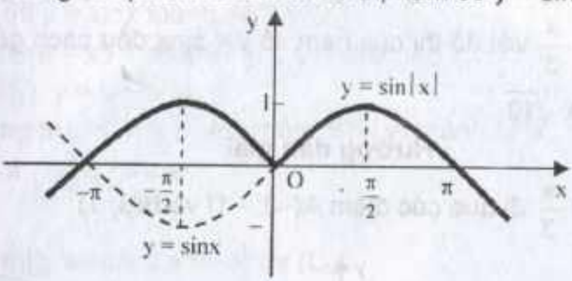


b) $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{khi } \sin x \ge 0 \\ -\sin x & \text{khi } \sin x < 0 \end{cases}$ nên đồ thị của hàm số y = |sinx| có được từ đồ thị của hàm số y = sinx bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành kể cả bờ Ox.
- Lấy đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành không kể bờ Ox.



c) Hàm số $y = \sin|x|$ là chẵn, nên đồ thị của nó nhận trục Oy làm trục đối xứng. Khi $x \geq 0$ thì $y = \sin|x| = \sin x$, như vậy phần $x \geq 0$ của đồ thị hàm số $y = \sin|x|$ trùng với phần $x \geq 0$ của đồ thị hàm số $y = \sin x$.



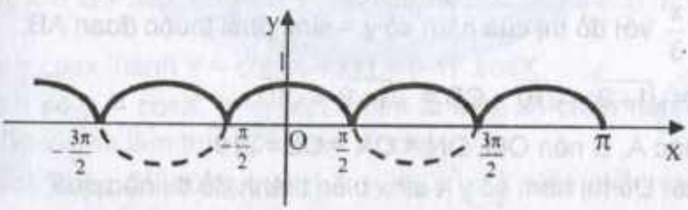
Bài toán 1. 23: Vẽ đồ thị của hàm số:

a) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ b) $y = \tan 2x$.

Hướng dẫn giải

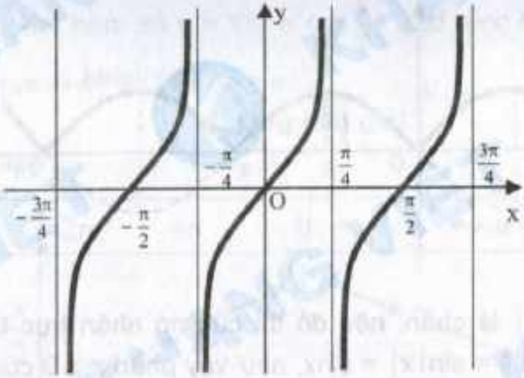
a) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua trục tung.

Khi $\cos x \geq 0$ thì $y = \cos x$. Ta có đồ thị $y = |\cos x|$



b) $y = \tan 2x$, $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

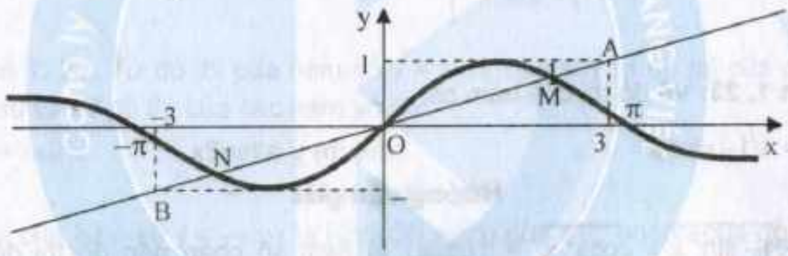
Đồ thị có các tiệm cận $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$



Bài toán 1. 24: Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng xác định bởi phương trình $y = \frac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số y = sinx đều cách gốc toạ độ một khoảng cách hơn $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ đi qua các điểm A(–3; –1) và B(3; 1)



Ta có $-1 \le y = \sin x \le 1$ với mọi x. Chỉ có đoạn thẳng AB của đường thẳng đó nằm trong dải $\{(x; y) | -1 \le y \le 1\}$. Do đó các giao điểm M, N của đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số y = sinx phải thuộc đoạn AB.

Ta có $OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $OB = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Vì M, N khác A, B nên OM, ON < OA = OB= $\sqrt{10}$.

Bài toán 1. 25: Đồ thị hàm số y = sinx biến thành đồ thị nào qua:

a) Phép tịnh tiến vectơ $\vec{u} = (\frac{\pi}{2}; 1)$ b) Phép đối xứng tâm $I(\frac{\pi}{2}; 3)$

c) Phép đối xứng trục d: x = 2.

Hướng dẫn giải

a) Phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}$ biến điểm M(x; y) thành M'(x'; y').

$$\begin{cases} x' = x + x_o \\ y' = y + y_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - \dfrac{\pi}{2} \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Thế vào đồ thị y = sinx thành đồ thị (C_1).

$$y' - 1 = \sin(x' - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - x') = -\sin x'$$

Do đó $y' = 1 - \sin x'$. Vậy (C_1): $y = 1 - \sin x$.

b) Phép đối xứng tâm I biến điểm M(x; y) thành M'(x'; y')

$$\begin{cases} x + x' = 2x_o \\ y + y' = 2y_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi - x' \\ y = 6 - y' \end{cases}$$

Thế vào đồ thị y = sinx thành đồ thị (C_2):

$6 - y' = \sin(\pi - x') = \sin x' \Rightarrow y' = 6 - \sin x'$.

Vậy đồ thị (C_2): $y = 6 - \sin x$.

c) Phép đối xứng trục d: x = 2 biến điểm M(x; y) thành M'(x'; y')

$$\begin{cases} x + x' = 4 \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = y' \end{cases}$$

Thế vào đồ thị y = sinx thành đồ thị (C_3):

$y' = \sin(4 - x')$. Vậy (C_3): $y = \sin(4 - x)$.

Bài toán 1. 26: Chứng minh với k nguyên tuỳ ý:

a) Các đường thẳng d: $x = k\pi$, $k \in Z$ là trục đối xứng của đồ thị y = cosx

b) Các điểm $I(k\pi; 0)$ là tâm đối xứng của đồ thị y = sinx

c) Các điểm $E(\frac{k\pi}{2}; 0)$ là tâm đối xứng của đồ thị y = tanx.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $I(k\pi; 0)$, $k \in Z$. Phép tịnh tiến $\overline{OI}$ biến đổi hệ trục Oxy thành IXY: $\begin{cases} x = X + k\pi \\ y = Y \end{cases}$.

Thế vào y = cosx thành $Y = \cos(X + k\pi) = (-1)^k.\cos X$

Vì các hàm số Y = cosX, Y = –cosX đều là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung IY: $x = k\pi$ làm trục đối xứng: đpcm.

Cách khác: Phép đối xứng trục d: $x = k\pi$, $k \in Z$ biến điểm M(x; y) thành M'(x'; y'): $\begin{cases} x + x' = 2k\pi \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' + k2\pi \\ y = y' \end{cases}$

Thế vào y = cosx thành $y' = \cos(-x' + k2\pi) = \cos x'$ chính là y = cosx. Do đó đồ thị không thay đổi (đpcm).

b) Phép đối xứng tâm $I(k\pi; 0)$, $k \in Z$ biến điểm M(x; y) thành M'(x'; y'):

$$\begin{cases} x + x' = 2k\pi \\ y + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' + k2\pi \\ y = -y' \end{cases}$$

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

Ta có M(x; y) ∈ (C): y = sinx

⇔ –y' = sin(–x' + kπ) ⇔ y' = sinx' ⇔ M'(x'; y') ∈ (C)

Vậy I(kπ; 0), k ∈ Z là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Phép tịnh tiến vectơ $\overline{OE}$ biến đổi hệ trục Oxy thành EXY:

$\begin{cases} x = X + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ y = Y + 0 \end{cases}$. Thế vào y = tanx thành Y = tan(X + $\dfrac{k\pi}{2}$)

Khi k = 2m thì Y = tanX là hàm số lẻ

Khi k = 2m+1 thì Y = –cotX là hàm số lẻ

Vậy đồ thị nhận gốc I($\dfrac{k\pi}{2}$; 0), k ∈ Z làm tâm đối xứng.

Cách khác: Phép đối xứng tâm E($\dfrac{k\pi}{2}$; 0), k ∈ Z biến điểm M(x; y) thành M'(x'; y'): $\begin{cases} x + x' = 2k\pi \\ y + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' + k\pi \\ y = -y' \end{cases}$

Thế vào y = tanx thành –y' = tan(–x' + kπ) = –tan x' hay chính là y = tanx : đpcm.

Bài toán 1. 27: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \cos^2x + 2\sin x + 2$. b) $y = \sin^4x - 2\cos^2x + 1$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y = \cos^2x + 2\sin x + 2 = 1 - \sin^2x + 2\sin x + 2$

$= 4 - (\sin x - 1)^2$. Suy ra: $0 \le y \le 4\ \forall x$

Vậy miny = 0 khi sinx = –1 ⇔ x = $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, k ∈ Z

maxy = 4 khi sinx = 1 ⇔ x = $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, k ∈ Z

b) $y = \sin^4x - 2\cos^2x + 1 = \sin^4x - 2(1 - \sin^2x) + 1$

$= \sin^4x + 2\sin^2x - 1 = (\sin^2x + 1)^2 - 2$

Ta có $1 \le \sin^2x + 1 \le 2$ nên $-1 \le x \le 2\ \forall x$

maxy = 2 khi $\sin^2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

miny = –1 khi $\sin^2x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Bài toán 1. 28: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \sin\dfrac{2x}{1+x^2} + \cos\dfrac{4x}{1+x^2} + 1$ b) $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$

Hướng dẫn giải:

a) Đặt t = $\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$1 + x^2 \ge 2|x| \Rightarrow \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$$

Ta có $-\frac{\pi}{2} < -1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ nên $-\sin 1 \le t \le \sin 1$

$$y = t + 1 - 2t^2 + 1 = -2t^2 + t + 2 = f(t)$$

Ta có hệ số a = –2 < 0, hoành độ đỉnh $t = \frac{1}{4}$.

BBT

x	$-\sin 1$	$\frac{1}{4}$	$\sin 1$
y	↗		↘

Vậy $\max y = f(\frac{1}{4}) = \frac{7}{8}$

$\min y = \min\{f(-\sin 1); f(\sin 1)\} = f(-\sin 1) = -2\sin^2 1 - \sin 1 + 2.$

b) Đặt $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ thì $y = \frac{t^2 + 2t + 2}{t^2 - t + 3}$

$\Leftrightarrow (y - 1)t^2 - (y + 2)t + 3y - 2 = 0$

Nếu y = 1: phương trình trở thành $-3t + 1 = 0$ thì phương trình có nghiệm.

Nếu $y \ne 1$: phương trình có nghiệm khi

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 - 4(y - 1)(3y - 2) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \le y \le 2.$$

Do đó max y = 2 khi $t = \tan\frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctan 2 + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \arctan 2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

và $\min y = \frac{2}{11}$ khi $t = \tan\frac{x}{2} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài toán 1. 29: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x - 4}$. b) $y = \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$ với mọi x nên $\sin x + 2\cos x \le 3 < 4$, do đó tập xác định D = **R**.

Ta chuyển hàm số về phương trình:

$$y = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x - 4} \Leftrightarrow 3\sin x - \cos x = y(\sin x + 2\cos x - 4)$$

$\Leftrightarrow (3 - y)\sin x - (1 + 2y)\cos x = -4y$

Do đó: $(3 - y)^2 + (1 + 2y)^2 \ge (-4y)^2 \Leftrightarrow 11y^2 + 2y - 10 \le 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{111}+1}{11} \le y \le \dfrac{\sqrt{111}-1}{11}$. Vậy max $y = \dfrac{\sqrt{111}-1}{11}$, min $y = -\dfrac{\sqrt{111}+1}{11}$.

b) Ta có $|\sin 2x| \le 1$, $|\cos 2x| \le 1$ với mọi x nên

$\sin 2x - \cos 2x \ge -2 > -3$, do đó D = **R**.

$y = \dfrac{2\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3} \Leftrightarrow 2\sin 2x + \cos 2x = y(\sin 2x - \cos 2x + 3)$

$\Leftrightarrow (2 - y)\sin 2x + (1 + y)\cos 2x = 3y$

Do đó: $(2 - y)^2 + (1 + y)^2 \ge (3y)^2 \Leftrightarrow 7y^2 + 2y - 5 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le y \le \dfrac{5}{7}$.

Vậy max $y = \dfrac{5}{7}$, min $y = -1$.

Bài toán 1. 30:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $y = (\sin x + \cos x)^3 + \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của: $y = \sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x}$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $(\sin x + \cos x)^3 = 2\sqrt{2}\cos^3(x - \dfrac{\pi}{4}) \ge -2\sqrt{2}$,

đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = -\dfrac{3\pi}{4}$,

và: $\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x} \ge 4$

đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = \pm\dfrac{3\pi}{4}$.

Do đó $y \ge 4 - 2\sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Vậy min $y = 4 - 2\sqrt{2}$, chẳng hạn khi $x = -\dfrac{3\pi}{4}$

b) Điều kiện $\sin x, \cos x \ge 0$, ta có

$y^2 = (\sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x})^2 \le (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x + \cos x)$

$= \sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) \le \sqrt{2} \Rightarrow y \le \sqrt[4]{2}$.

Dấu = xảy ra, chẳng hạn khi $x = \dfrac{\pi}{4}$. Vậy max $y = \sqrt[4]{2}$.

Bài toán 1. 31: Tìm giá trị lớn nhất – bé nhất của:

a) $f(x) = \dfrac{12x^4 + 8x^2 + 3}{(2x^2 + 1)^2}$

b) $f(x;y) = \dfrac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$

Hướng dẫn giải:

a) Đặt $x\sqrt{2}$ = tant, với $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ta có

$$f(x) = \frac{3\tan^4 t + 4\tan^2 t + 3}{(\tan^2 t + 1)^2} = 3 - \frac{1}{2}\sin^2 2t = g(t).$$

Vì $\sin^2 2t \le 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \le g(t) \le 3$.

Cho $t = 0$ thì $y = 3$, cho $t = \frac{\pi}{4}$ thì $y = \frac{5}{2}$.

Vậy max f(x) = 3 chẳng hạn khi x = 0 và min $f(x) = \frac{5}{2}$, chẳng hạn khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Đặt $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$ với $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$f(x;y) = \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)}{(1 + \tan^2\alpha)(1 + \tan^2\beta)} = \sin(\alpha + \beta).\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha + \beta)$$

Nên $-\frac{1}{2} \le f(x;y) \le \frac{1}{2}$.

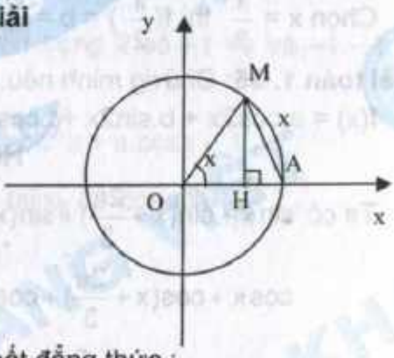
Vậy, max $f(x;y) = \frac{1}{2}$ chẳng hạn $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ hay (x = 0; y = 1).

min $f(x;y) = -\frac{1}{2}$ chẳng hạn $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4}$ hay (x = 0; y = –1).

Bài toán 1. 32: Chứng minh bất đẳng thức

a) $\sin^7 x + \cos^{12} x \le 1$ với mọi x. b) $\sin x \le x, \forall x > 0$.

Hướng dẫn giải



a) Vì $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$ nên:

$\sin^7 x \le \sin^2 x$, $\cos^{12} x \le \cos^2 x\ \forall x$

$\Rightarrow \sin^7 x + \cos^{12} x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x$

b) Xét $x \ge 1$ thì $\sin x \le 1 \le x$

Xét $0 < x < 1$ thì $0 < x < \frac{\pi}{2}$

nên sinx = MH < MA = $\widehat{\text{đdMA}}$ = x.

Bài toán 1. 33: Chứng minh với mọi x thì có bất đẳng thức :

$$\tan(|\cos x|) > \cos(x + \sin x).$$

Hướng dẫn giải

Với mọi x thì : $0 \le |\cos x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(|\cos x|) \ge |\cos x|$

Dấu bằng khi cosx = 0.

Mà $|\cos x| \ge \cos x$ nên với mọi x thì

$$\tan(|\cos x|) \ge |\cos x| \ge \cos x \qquad (1)$$

Dấu bằng khi cosx = 0

Ta chứng minh: $\cos x \ge \cos(x + \sin x) \qquad (2)$

Khi sinx =0 thì BĐT đúng

Khi sinx >0 thì $x = a + k2\pi$, $0<a<\pi$, k nguyên

Vì $\pi - a > 0$ nên $\sin(\pi - a) > \pi - a$ hay là $\sin a < \pi - a$

Do đó $0 < a < a + \sin a < \pi$ nên $\cos a > \cos(a + \sin a)$

$$\cos(x - k2\pi) > \cos(x - k2\pi + \sin(x - k2\pi))$$

$$\cos x > \cos(x + \sin x)$$

Khi sinx <0 ta nhận được BĐT bằng cách thay x bởi –x

Vì dấu bằng của BĐT (2) khi sinx = 0 không đồng thời xảy ra với BĐT (1) nên với mọi x ta có : $\tan(|\cos x|) > \cos(x + \sin x)$.

Bài toán 1. 34: Chứng minh nếu f(x) = a.cosx + b.sinx ≥ 0 với mọi x thì a = b = c = d = 0.

Hướng dẫn giải

Nếu f(x) = a.cosx + b.sinx $\ge$ 0 với mọi x thì

$f(x + \pi) = -a.\cos x - b.\sin x \ge 0$ với mọi x

Mà $f(x) + f(x + \pi) = 0$ với mọi x

Nên phải có $f(x) = f(x + \pi) = 0$ với mọi x .

Chọn x = 0 thì f(0) = a = 0.

Chọn $x = \frac{\pi}{2}$ thì $f(\frac{\pi}{2}) = b = 0$. Vậy a = b =0.

Bài toán 1. 35: Chứng minh nếu:

f(x) = a.cos2x + b.sin2x +c.cosx +d.sinx $\ge$ 0 với mọi x thì a = b = 0.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{4\pi}{3}) = 0, \forall x$

$$\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0, \forall x$$

$$\sin 2x + \sin 2(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin 2(x + \frac{4\pi}{3}) = 0, \forall x$$

$$\cos 2x + \cos 2(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos 2(x + \frac{4\pi}{3}) = 0, \forall x$$

Nên $f(x)+f(x+\frac{2\pi}{3})+f(x+\frac{4\pi}{3})=0,\forall x$

Mà $f(x)\geq 0, f(x+\frac{2\pi}{3})\geq 0, f(x+\frac{4\pi}{3})\geq 0,\forall x$

Nên phải có $f(x)=0, f(x+\frac{2\pi}{3})=0, f(x+\frac{4\pi}{3})=0,\forall x$

Ta có $0 = f(0) = a + c$, $0 = f(\pi) = a - c \Rightarrow a = c = 0$

Và $0 = f(\frac{\pi}{2}) = -a + d \Rightarrow d = 0.$

$$0 = f(\frac{\pi}{4}) = b + \frac{1}{\sqrt{2}}(c+d) \Rightarrow d = 0.$$

Vậy $a = b = c = d = 0$.

Bài toán 1. 36: Cho hàm số $f(x) = \cos 2x + a.\cos x + b.\sin x$.

a) Chứng minh $f(x)$ nhận giá trị dương và giá trị âm.

b) Chứng minh nếu $f(x) \geq -1, \forall x$ thì $a = b = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $a = b = 0$ thì $f(x) = \cos 2x$ nhận giá trị dương và giá trị âm.

Xét a và b không đồng thời bằng 0 thì $a + b$ và $a - b$ không đồng thời bằng 0.

Ta có $f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{5\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)-\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)=0$

$$f(-\frac{\pi}{4})+f(\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)-\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)=0$$

Nên cặp số $f(\frac{\pi}{4}), f(\frac{5\pi}{4})$ hay $f(-\frac{\pi}{4}), f(\frac{3\pi}{4})$ khác dấu.

b) Giả sử a và b không đồng thời bằng 0, ta chứng minh tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) < -1$.

- Xét $b \neq 0$: vì $f(\frac{\pi}{2})=-1+b; f(-\frac{\pi}{2})=-1-b$ nên trong 2 số $-1 + b$ và $-1 - b$ phải có một số nhỏ hơn -1.
- Xét $b = 0$ thì $a \neq 0$: $f(x) = \cos 2x + a.\cos x = 2.\cos^2 x + a.\cos x - 1$.

Chọn số dương $m > 2$ sao cho $\frac{|a|}{m} < 1$ thì tồn tại x_0 để $\cos x_0 = \frac{-a}{m}$.

$$f(x_0)=\frac{2a^2}{m^2}-\frac{a^2}{m}-1=-1-\frac{a^2}{m}(1-\frac{2}{m})<-1.$$

Bài toán 1. 37: Cho hàm số

$$f(x) = a.\cos 2x + b.\cos x + 1 \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

Chứng minh $|a| + |b| \leq \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Vì $f(x) = a.\cos 2x + b.\cos x + 1 \geq 0$ với mọi x.

nên $f(x + \pi) = a.\cos 2x - b.\cos x + 1 \geq 0$ với mọi x.

Từ đó ta có thể giả sử $b \geq 0$.

- Xét b = 0 thì $f(x) = a.\cos 2x + 1 \geq 0$ với mọi x nên $|a| \leq 1$.

  Do đó $|a| + |b| = 1 \leq \sqrt{2}$.

- Xét b > 0 thì $f(\pi) = a - b + 1 \geq 0 \Rightarrow b - a \leq 1$.

  Nếu $a \leq 0$ thì $|a| + |b| = b - a \leq 1 \leq \sqrt{2}$.

  Nếu a >0 thì $f(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + 1 \geq 0 \Rightarrow a + b \leq 2$

  Do đó $|a| + |b| = a + b \leq \sqrt{2}$.

Bài toán 1. 38: Cho a, b, t sao cho hàm số

$$f(x) = a.\cos 2x + b.\cos(x - t) + 1 \geq 0 \text{ với mọi x.}$$

Chứng minh:

a) $|a| \leq 1$. b) $|b| \leq \sqrt{2}$. c) $f(x) \leq 3$ với mọi x.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $f(x) = a.\cos 2x + b.\cos(x - t) + 1 \geq 0$ với mọi x.

nên $f(x + \pi) = a.\cos 2x - b.\cos(x - t) + 1 \geq 0$ với mọi x.

Do đó $2a.\cos 2x + 2 \geq 0$ với mọi x.

Hay $a.\cos 2x + 1 \geq 0$ với mọi x.

Chọn x = 0 và $x = \pi$ thì có $a + 1 \geq 0$ và $-a + 1 \geq 0$

$\Rightarrow -1 \leq a \leq 1 \Rightarrow |a| \leq 1$.

b) Ta có $f(x) = a.\cos 2x + b.\cos(x - t) + 1 \geq 0$ với mọi x.

nên $f(x - \frac{\pi}{2}) = -a.\cos 2x + b.\sin(x - t) + 1 \geq 0$ với mọi x.

Do đó $b[\sin(x - t) + \cos(x - t)] + 2 \geq 0$ với mọi x.

Hay $b.\sin(x - t + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \geq 0$ với mọi x. .

Chọn $x = t + \frac{\pi}{4}$ và $x = t + \frac{5\pi}{4}$ thì có $b + \sqrt{2} \geq 0$ và $-b + \sqrt{2} \geq 0$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq b \leq \sqrt{2} \Rightarrow |b| \leq \sqrt{2}$.

c) Ta có $\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0, \forall x$

$$\cos 2x + \cos 2(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos 2(x + \frac{4\pi}{3}) = 0, \forall x$$

Nên $f(x) + f(x + \frac{2\pi}{3}) + f(x + \frac{4\pi}{3}) = 3, \forall x$

Mà $f(x+\frac{2\pi}{3})\ge 0, f(x+\frac{4\pi}{3})\ge 0, \forall x$

Nên phải có $f(x)\le 3, \forall x$

Bài toán 1. 39: Cho hàm số $f(x) = \cos 3x + a.\sin 2x + b.\sin x$.

Chứng minh nếu $f(x) \ge -1,\ \forall x$ thì $a = b = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f(\frac{\pi}{3})\ge -1; f(-\frac{\pi}{3})\ge -1$

$\Rightarrow a+b \ge 0; -a-b \ge 0$ nên $a+b=0 \Rightarrow b=-a$.

Do đó $f(x) = \cos 3x + a(\sin 2x - \sin x) \ge -1,\ \forall x$

$\Rightarrow -1+2\cos^2\frac{3x}{2}+2a.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}\ge -1,\ \forall x$

$\Rightarrow \cos\frac{3x}{2}(\cos\frac{3x}{2}+a.\sin\frac{x}{2})\ge 0,\ \forall x$

Thay x bởi –x thì được $\cos\frac{3x}{2}(\cos\frac{3x}{2}-a.\sin\frac{x}{2})\ge 0,\ \forall x$

Nên tích: $\cos^2\frac{3x}{2}(\cos^2\frac{3x}{2}-a^2.\sin^2\frac{x}{2})\ge 0,\ \forall x$

$\Rightarrow \cos^2\frac{3x}{2}\ge a^2.\sin^2\frac{x}{2},\ \forall x \Rightarrow 1+\cos 3x \ge a^2(1-\cos x), \forall x$

$\Rightarrow \cos 3x + a^2\cos x \ge a^2-1, \forall x \Rightarrow \cos 3x + a^2\cos x \ge -1, \forall x$

$\Rightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + a^2\cos x \ge -1, \forall x$

Đặt $t=\cos x$ thì có $t(4t^2+a^2-3)\ge -1, \forall t\in[-1;1]$

Giả sử $a\ne 0$ thì chọn được $|t|\le 1 \ne 0$ sao cho $t(4t^2+a^2-3)< -1$

$\Rightarrow a=0$ nên $b=0$. Do đó $a=b=0$.

Bài toán 1. 40: Cho các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ với $0^\circ \le \alpha_i \le 180^\circ$, $i = 1,2, ...,n$ sao cho giá trị của $\sum_{i=1}^{n}(1+\cos\alpha_i)$ là một số nguyên lẻ.

Chứng minh rằng : $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i \ge 1$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết, ta có :

$\sum_{i=1}^{n}(1+\cos\alpha_i) = 2\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{\alpha_i}{2} = 2a+1$ (a nguyên không âm), và :

$S = \sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}2\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_i}{2} \ge 2\sum_{i=1}^{k}\sin^2\frac{\alpha_i}{2} + 2\sum_{i=k+1}^{n}\cos^2\frac{\alpha_i}{2}$

$= A + B$, với $A, B \geq 0$ (1)

Nếu $B \geq 1$ thì tổng $S \geq 1$.

Nếu $B < 1$ thì :

$$A = 2\sum_{i=1}^{k}\sin^2\frac{\alpha_i}{2} = 2\sum_{i=1}^{k}\left(1-\cos^2\frac{\alpha_i}{2}\right) = 2k - 2\sum_{i=1}^{k}\cos^2\frac{\alpha_i}{2} \geq 0$$

Suy ra : $2k \geq 2\sum_{i=1}^{k}\cos^2\frac{\alpha_i}{2} = 2a + 1 - B \Rightarrow 2k \geq 2a + 1$

Theo (1) thì : $S \geq A + B$

Vậy : $S \geq 2k - (2a + 1 - B) + B \geq 1 + 2B \geq 1$, tức là : $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i \geq 1$

Bài toán 1. 41: Cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và hàm số:

$f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx$

nhận giá trị dương $\forall x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng $a_0 > 0$.

Hướng dẫn giải

Với $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Đặt $A_k = \sum_{i=0}^{n}\cos\frac{i.2k.\pi}{n+1}$

Ta có: $\left(2\sin\frac{k\pi}{n+1}\right).A_k$

$$= 2\sin\frac{k\pi}{n+1} + \sin\frac{3k\pi}{n+1} - \sin\frac{k\pi}{n+1} + \sin\frac{5k\pi}{n+1} - \sin\frac{3k\pi}{n+1} + \ldots + \sin\frac{(2n+1)k\pi}{n+1} - \sin\frac{(2n-1)k\pi}{n+1}$$

$$= \sin\frac{k\pi}{n+1} + \sin\frac{(2n+1)k\pi}{n+1} = 0$$

Vì $\sin\frac{k\pi}{n+1} \neq 0, \forall k \in \{1, 2, .., n\}$ nên $A_k = 0$

Do đó: $T = \sum_{\ell=0}^{n}P\left(\frac{2\ell\pi}{n+1}\right) = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}a_h\cos\ell\frac{2k\pi}{n+1}$

$$= \sum_{\ell=0}^{n}a_h\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{\ell.2k\pi}{n+1} = (n+1)a_0 + \sum_{h=0}^{n}a_k.A_k = (n+1)a_0$$

Vì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ nên $T > 0 \Rightarrow a_0 > 0$ (đpcm).

Bài toán 1. 42: Cho số nguyên dương n và $m = 2^n - 1$. Chứng minh rằng với mọi $a_k \in \mathbf{R}$, hàm số

$f(x) = \cos 2^n x + a_1\cos(2^n - 1)x + a_2\cos(2^n - 2)x + \ldots + a_m\cos x$,

không thể chỉ nhận giá trị cùng dấu.

Hướng dẫn giải

Giả sử f(x) chỉ nhận giá trị dương. Khi đó

$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x + \pi)) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Do $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$ nên hàm số:

$f_1(x) = \cos 2^{nx} + a_2\cos(2^n - 2)x + ... + a_{m-2}\cos 2x > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Do đó hàm số:

$f_2(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_1(x + \frac{1}{2}\pi)) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Tương tự như trên ta cũng thu được:

$f_2(x) = \cos 2^{nx} + a_4\cos(2n - 4)x + ... + a_{m-4}\cos 4x$.

Vậy: $f(x) = \frac{1}{2}(f_2(x) + f_2(x + \frac{1}{4}\pi)) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Lặp lại quá trình trên, sau hữu hạn bước ta thu được

$g(x) = \cos 2^{nx} > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$: vô lý.

Chứng minh tương tự khi f(x) chỉ nhận giá trị âm là không xảy ra.

Bài toán 1. 43: Cho a và α tùy ý. Xét $f(x) = \cos 2x + a.\cos(\alpha + x)$.

Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của f(x).

Chứng minh $m^2 + M^2 \geq 2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x) = \cos 2x + a\cos(x + \alpha)$

Suy ra $f(0) = 1 + a\cos\alpha$, $f(\pi) = 1 + a\cos(\pi + \alpha) = 1 - a\cos\alpha$

nên $f(0) + f(\pi) = 2$.

Vì $M = \max f(x)$ nên $M \geq f(0)$, $M \geq f(\pi)$.

Do đó: $M \geq \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \Rightarrow M \geq 1 \Rightarrow M^2 \geq 1$

Tương tự: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$ nên $m = \min f(x) \leq -1 \Rightarrow m^2 \geq 1$

Vậy: $M^2 + m^2 \geq 2$.

Bài toán 1. 44: Cho các số thực a, b, A, B và hàm số

$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \leq 2$, $A^2 + B^2 \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $\sqrt{a^2 + b^2} = r$; $\sqrt{A^2 + B^2} = R$.

Khi đó tồn tại α, β để $a = r\cos\alpha$; $b = r\sin\alpha$,

$a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \alpha)$, $A = R\cos 2\beta$; $B = R\sin 2\beta$,

$A\cos 2x + B\sin 2x = R\cos 2(x - \beta)$

Suy ra: $f(x) = 1 - r\cos(x - \alpha) - R\cos 2(x - \beta)$.

Đặt $f(\alpha + \frac{\pi}{4}) = P$, $f(\alpha - \frac{\pi}{4}) = Q$ thì

$P = 1 - \dfrac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2\left(\alpha - \beta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$Q = 1 - \dfrac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2\left(\alpha - \beta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Nếu $r^2 > 2$ thì $1 - \dfrac{r}{\sqrt{2}} < 0$.

Trị tuyệt đối của hiệu hai góc $2\left(\alpha - \beta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ và $2\left(\alpha - \beta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng π nên các cosin của chúng trái dấu nên trong hai biểu thức

$R\cos 2\left(\alpha - \beta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ và $R\cos 2\left(\alpha - \beta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ có một biểu thức không âm.

Từ đó dẫn đến trong hai số P và Q có một số âm. Vậy ít nhất một trong hai gía trị $f(\alpha + \dfrac{\pi}{4})$ và $f(\alpha - \dfrac{\pi}{4})$ là số âm.

Điều đó là vô lý (do giả thiết $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$).

Vậy $r^2 \leq 2$, suy ra $a^2 + b^2 \leq 2$.

Tương tự ta có:

$f(\beta) = 1 - r\cos(\beta - \alpha) - R\cos 0 = 1 - r\cos(\beta - \alpha) - R;$

$f(\beta + \pi) = 1 - r\cos(\beta - \alpha + \pi) - R.$

Nếu xảy ra trường hợp $R > 1$ thì $1 - R < 0$ và do hiệu của 2 góc $\beta - \alpha + \pi$ và $\beta - \alpha$ bằng π nên lập luận tương tự như trên ta thu được một trong hai số $f(\beta)$ và $f(\beta + \pi)$ là số âm, vô lý. Vậy: $A^2 + B^2 \leq 1$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 1. 1: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \cot(x + \dfrac{\pi}{3})$ b) $y = \tan(2x - \dfrac{\pi}{6})$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x + \dfrac{\pi}{3} \neq k\pi$. Kết quả $D = \mathbf{R}\ \{-\dfrac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

b) Điều kiện $2x - \dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Kết quả $D = \mathbf{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài tập 1. 2: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

Hướng dẫn

a) Điều kiện $\cos x \neq 0$

Kết quả $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

b) Để ý $1 - \sin x \ge 0$ và $1 + \sin x \ge 0$ với mọi x.

Kết quả $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài tập 1. 3: Cho $|x| \le 1$ và $|y| \le 1$.Chứng minh rằng:

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), xy \le 0 \text{ hay } x^2 + y^2 \le 1 \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa hàm ngược:

Hàm số y = arcsinx: có tập xác định là $[-1; 1]$, tập giá trị là $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \\ \sin y = x \end{cases}$$

Bài tập 1. 4: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:

a) $y = \sin x + 1$

b) $y = \sin x + \sin\frac{x}{3}$

c) $y = |\sin x|$

d) $y = x^2 + \cos x$.

Hướng dẫn

a) $D = \mathbf{R}$ và tính $f(\frac{\pi}{2})$, $f(-\frac{\pi}{2})$. Kết quả không có tính chẵn lẻ.

b) Kết quả hàm số lẻ.

c) $D = \mathbf{R}$ và tính $f(-x) = f(x)$. Kết quả hàm số chẵn.

d) Kết quả hàm số chẵn

Bài tập 1. 5: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của các hàm số

a) $y = \sin 2x$

b) $y = \cos(x - 1)$

Hướng dẫn

a) Kết quả đồng biến trong các khoảng $(-\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + k\pi)$; nghịch biến trong các khoảng $(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Kết quả đồng biến trong các khoảng $(1+\pi+k2\pi; 1+2\pi+k2\pi)$; nghịch biến trong các khoảng $(1 + k2\pi; 1 + \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 1. 6: Từ đồ thị hàm số y = f(x) = cosx, hãy suy ra đồ thị của các hàm số và vẽ đồ thị của các hàm số :

a) $y = \cos x + 2$; b) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

Hướng dẫn

a) Để ý $y = \cos x + 2 = f(x) + 2$

b) Để ý $y = \cos(x - \frac{\pi}{4}) = f(x - \frac{\pi}{4})$.

Bài tập 1. 7: Đồ thị hàm số y = cosx biến thành đồ thị nào qua:

a) Phép tịnh tiến vectơ $\vec{u} = (\frac{\pi}{2}; 1)$

b) Phép đối xứng tâm $I(\frac{\pi}{2}; 3)$

c) Phép đối xứng trục d: x = 2.

Hướng dẫn

a) Kết quả (C_1): $y = \sin x + 1$
b) Kết quả (C_2): $y = \cos x + 6$.
c) Kết quả (C_3): $y = \cos(4 - x)$.

Bài tập 1. 8: Tìm chu kỳ các hàm số sau:

a) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ b) $f(x) = |\cos x|$

c) $f(x) = \tan\frac{2\pi x}{3}$ d) $f(x) = \cot 4x$

Hướng dẫn

a) D = **R**. $T = \text{BCNN}\{\frac{2\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\}$. Kết quả $T = 2\pi$

b) Kết quả $T = \pi$

c) Điều kiện $\frac{2\pi x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kết quả $T = \frac{3}{2}$

d) Kết quả $T = \frac{\pi}{4}$

Bài tập 1. 9: Cho hàm số $f(x) = \cos 3x + a.\cos 2x + b.\cos x$.

Chứng minh nếu $f(x) \geq -1$, $\forall x$ thì a = b = 0.

Hướng dẫn

Sử dụng $f(\pi) \geq -1; f(\frac{\pi}{3}) \geq -1$.

Bài tập 1. 10: Tìm a để mọi x có $f(x) = \cos 2x + a.\cos x + 2 \geq 0$.

Hướng dẫn

Đưa về bậc hai theo t = cosx. Kết quả $|a| \leq 2\sqrt{2}$.

Bài tập 1. 11: Tìm giá trị nhỏ nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x + 2\sin x + 2}$

b) $y = \dfrac{x}{2} + \sin^2 x$ trên đoạn $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

Hướng dẫn

a) Kết quả : $\max y = 1$ khi $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $\min y = \dfrac{1}{5}$ khi $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Kết quả $\max y = 1 + \dfrac{\pi}{4}$ khi $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài tập 1. 12:

a) Tìm giá trị lớn nhất của $y = 2\sin^4 x + 5\cos^7 x$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$y = \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$$

Hướng dẫn

a) Với sinx, cosx thuộc $[-1;1]$ thì

$$y = 2\sin^4 x + 5\cos^7 x \le 2\sin^2 x + 5\cos^2 x = 2 + 3\cos^2 x \le 5$$

b) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \dfrac{1}{\sin^4 x} + \dfrac{1}{\cos^4 x} + 4$

$= (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \dfrac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right) + 4$

$= \left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \dfrac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4 \ge \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{16}{1}\right) + 4 = \dfrac{25}{2}$

Kết quả $\min y = \dfrac{25}{2}$.

Chuyên đề 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Đặt điều kiện xác định nếu có, đề bài có đơn vị hay không?
- Góc không đặc biệt nếu tồn tại thì đặt hình thức α, ,...
- Kết hợp nghiệm bằng cách biểu diễn trên đường tròn lượng giác, so sánh hoặc xét nghiệm bằng nhau khi nào,...
- Biến đổi về phương trình cơ bản, phương trình thường gặp, tích các dạng, dùng bất đẳng thức, đánh giá 2 vế,...

Phương trình lượng giác cơ bản:

- Phương trình sinx = m có nghiệm khi $|m| \le 1$.

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hay $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

- Phương trình cosx = m có nghiệm khi $|m| \le 1$.

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hay $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

- Phương trình tanx = m luôn có nghiệm với mọi m.

  $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  Hay $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- Phương trình cotx = m luôn có nghiệm với mọi m.

  $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  Hay $\cot x = m \Leftrightarrow x = \text{arccot} m + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Phương trình thường gặp:

- Phương trình theo hàm số lượng giác: giải trực tiếp, nếu cần đặt ẩn phụ rồi giải.
- Phương trình thuần nhất(đẳng cấp) bậc n: Xét cosx = 0, xét $\cos x \ne 0$ rồi chia 2 vế cho $\cos^n x$ để đưa về phương trình theo t = tanx.

  Nếu chia $\sin^n x$ thì đưa về phương trình theo t = cotx. Chú ý bậc tăng, giảm tương đối của lượng giác.
- Phương trình bậc nhất theo sin, cos (cổ điển):

  Dạng: a.sinu + b.cosu = c, chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ rồi đưa sin, cosin của góc xác định.

  Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$.

- Phương trình đối xứng theo sin, cos:

Dạng: $a(\sin x + \cos x) + b(\sin x\cos x) + c = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Chú ý: $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

- Phương trình chứa giá trị tuyệt đối, căn thức ta sử dụng các biến đổi đại số như xét dấu, bình phương tương đương, ...

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 2. 1: Giải các phương trình:

a) $\sin^3(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin x$.

b) $3\cos^4x - 4\cos^2x \, . \, \sin^2x + \sin^4x = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta biến đổi phương trình đã cho như sau

$$[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)]^3 = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^3 = 4\sin x$$

Vì $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^3x \ne 0$ ta được phương trình:

$$\left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}\right)^3 = 4\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$\Leftrightarrow (\tan x - 1)^3 = 4\tan x(1 + \tan^2x)$ (1)

Đặt $t = \tan x$;

(2) $\Leftrightarrow (t - 1)^3 = 4t(1 + t^2) \Leftrightarrow 3t^3 + 3t^2 + t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t + 1)(3t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Vậy $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Vì $\cos x = 0$ không thỏa mãn, nên chia hai vế cho $\cos^4x \ne 0$ ta được phương trình tương đương, $t = \tan^2x \ge 0$

$$3 - 4\tan^2x + \tan^4x = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1$ hay $\tan x = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 2. 2: Giải các phương trình:

a) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$

b) $2(\tan x - \sin x) + 3(\cot x - \cos x) + 5 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Phương trình được biến đổi

$$\sin x + \cos x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x.\cos x} = \frac{10}{3} \quad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $|t| \leq \sqrt{2}$ thì $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

và (1) $\Leftrightarrow 3t^3 - 10t^2 + 3t + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 2)(3t^2 - 4t - 5) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2;\ t = \frac{2 + \sqrt{19}}{3};\ t = \frac{2 - \sqrt{19}}{3}$.

Chọn $t = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} = \sin\alpha$ nên có nghiệm

$$x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi;\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ (tm)}.$$

b) Điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Phương trình:

$$2(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x + 1) + 3(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sin x \cos x)[\frac{2}{\cos x} + \frac{3}{\sin x}] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sin x \cos x)(2.\tan x + 3) = 0 = 0$

Xét $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0$ (1)

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $|t| \leq \sqrt{2}$

(1) $\Leftrightarrow t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{2}$ (loại) ; $t = 1 - \sqrt{2}$

nên $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha$, do đó

$$x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ (tm)}.$$

Xét $2.\tan x + 3 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{3}{2} = \tan\beta \Leftrightarrow x = \beta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (tm).

Bài toán 2. 3: Giải các phương trình:

a) $2\cos 9x(3-4\sin^2 x)(3-4\sin^2 3x)=1$

b) $\cos 9x+3\cos 3x+\sin 3x=3\sin x$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $\sin x=0$ thì không là nghiệm của phương trình.

Xét $\sin x\neq 0$. PT: $2\cos 9x\sin x(3-4\sin^2 x)(3-4\sin^2 3x)=\sin x$

$\Leftrightarrow 2\cos 9x\sin 3x(3-4\sin^2 3x)=\sin x \Leftrightarrow 2\cos 9x\sin 9x=\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin 18x=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}18x=x+2k\pi\\ 18x=\pi-x+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{2\pi}{17},\quad (k\neq 17m)\\ x=\dfrac{\pi}{19}+k\dfrac{2\pi}{19}\end{array}\right.$$

b) PT: $\cos 9x+3\cos 3x=3\sin x-\sin 3x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 3x=4\sin^3 x \Leftrightarrow \cos 3x=\sin x$

$$\Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}-x+2k\pi\\ 3x=x-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Bài toán 2. 4: Giải các phương trình:

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)+2\cos x=-\dfrac{1}{2}$

b) $(16\cos^4 x-20\cos^2 x+5)(16\cos^4 5x-20\cos^2 5x+5)=1$.

Hướng dẫn giải

a) PT: $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)+\cos x+\cos x+\cos\dfrac{\pi}{3}=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3x}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3x}{2}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\right]=0$$

Xét $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Xét $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{3x}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

b) Xét $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của phương trình

Xét $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và áp dụng công thức:

$\cos 5x = 16\cos^5 x - 2\cos^3 x + 5\cos x$, ta có PT

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} \cdot \frac{\cos 25x}{\cos 5x} = 1 \Leftrightarrow \cos 25x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 25x = x + 2k\pi \\ 25x = -x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{12}\ (k \neq 12m + 6,\ m, k \in Z) \\ x = k\frac{\pi}{13} \qquad (k \in Z) \end{array}\right.$$

Bài toán 2. 5: Giải các phương trình:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sin 4x = 1$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x = 4\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

a) PT: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sin 4x - \sin\frac{\pi}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

Xét $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2},\ (k \in Z)$

Xét $\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

b) PT: $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\left[\cos\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] = 4\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow 4\sin\frac{\pi}{6}.\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = 4\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 0$ hay $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Bài toán 2. 6: Giải các phương trình:

a) $2 + \tan x \tan 3x = \tan^2 x$ b) $2\tan x + \tan 3x = \tan 5x$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$

PT: $(1 - \tan^2 x) + (1 + \tan x \tan 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 2x}{\cos x \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + \cos 3x) = 0$

Xét $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ (tm)

Xét $\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$

Chọn nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $\cos^x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$, $\cos 5x \neq 0$

PT: $(\tan x + \tan 3x) + (\tan x - \tan 5x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} - \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 5x} = 0 \Leftrightarrow \sin 4x(\cos 5x - \cos 3x) = 0$

Xét $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4}$, $(k \in \mathbb{Z})$ (tm)

Xét $\cos 5x = \cos 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

Chọn nghiệm $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Bài toán 2. 7: Giải các phương trình:

a) $(3 - \tan^2 x)(3 - \tan^2 3x) = \sqrt{3}\tan 9x(1 - 3\tan^2 x)(1 - 3\tan^2 3x)$

b) $\tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x = \cot x - 8$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$, $\cos 9x \neq 0$

Xét $(1 - 3\tan^2 x)(1 - 3\tan^2 3x) = 0$ thì không thỏa mãn

Xét $(1 - 3\tan^2 x)(1 - 3\tan^2 3x) \neq 0$ phương trình:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}\right)\left(\frac{3-\tan^2 3x}{1-\tan^2 3x}\right) = \sqrt{3}\tan 9x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan 9x}{\tan x} = \sqrt{3}\tan 9x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 9x = 0 \\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{9}\ (k \in \mathbf{Z})\ (\text{loại}) \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \quad (\text{loại}) \end{array}\right.$$

b) Điều kiện: $\sin 8x \neq 0$ .Phương trình đã cho tương đương với

$\cot x - \tan x - 2\tan 2x - 4\tan 4x = 8$

$\Leftrightarrow 2\cot 2x - 2\tan 2x - 4\tan 4x = 8 \Leftrightarrow 2(\cot 2x - \tan 2x) - 4\tan 4x = 8$

$\Leftrightarrow 4\cot 4x - 4\tan 4x = 8 \Leftrightarrow 4(\cot 4x - \tan 4x) = 8$

$\Leftrightarrow 8\cot 8x = 8 \Leftrightarrow \cot 8x = 1 \Leftrightarrow 8x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{32} + k\dfrac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}$ (tm)

Bài toán 2. 8: Giải các phương trình:

a) $\tan x\tan 2x + \tan 2x\tan 3x + \tan 3x\tan 4x + 3 = 0$

b) $\dfrac{\tan x}{\cos 2x} + \dfrac{\tan 2x}{\cos 4x} + \dfrac{\tan 4x}{\cos 8x} = 0$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$, $\cos 4x \neq 0$

Khi $\sin x = 0$ không thỏa mãn phương trình

Khi $\sin x \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$(\tan x\tan 2x + 1) + (\tan 2x\tan 3x + 1) + (\tan 3x\tan 4x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan 2x - \tan x}{\tan x} + \frac{\tan 3x - \tan 2x}{\tan x} + \frac{\tan 4x - \tan 3x}{\tan x} = 0$$

$\Leftrightarrow \tan 4x = \tan x \Leftrightarrow 4x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}$ ($k \neq 3m$, k, m $\in \mathbf{Z}$)

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\cos 4x \neq 0$, $\cos 8x \neq 0$

Phương trình đã cho tương đương với:

$(\tan 2x - \tan x) + (\tan 2x - \tan 4x) + (\tan 8x - \tan 4x) = 0$

$\Leftrightarrow \tan 8x = \tan x \Leftrightarrow 8x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{7}$ ($k \in \mathbf{Z}$) (tm)

Bài toán 2.9: Giải các phương trình:

a) $\dfrac{1}{\sin x\sin 2x} + \dfrac{1}{\sin 2x\sin 3x} + \dfrac{1}{\sin 3x\sin 4x} = 0$

b) $\frac{\cos x}{\sin 3x}+\frac{\cos 3x}{\sin 9x}+\frac{\cos 9x}{\sin 27x}=0$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $\sin 3x \neq 0$, $\sin 4x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$

Nhân hai vế với $\sin x \neq 0$ ta được

$$\frac{\sin x}{\sin x \sin 2x}+\frac{\sin x}{\sin 2x \sin 3x}+\frac{\sin x}{\sin 3x \sin 4x}=0$$

$\Leftrightarrow (\cot x - \cot 2x) + (\cot 2x - \cot 3x) + (\cot 3x - \cot 4x) = 0$

$\Leftrightarrow \cot x = \cot 4x \Leftrightarrow x = 4x + k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbf{Z}, k \neq 3n, n \in \mathbf{Z})$

b) Điều kiện: $\sin 27x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{m\pi}{27}$, $(m \in \mathbf{Z})$

PT: $\frac{2\cos x}{\sin 3x}+\frac{2\cos 3x}{\sin 9x}+\frac{2\cos 9x}{\sin 27x}=0$

$\Leftrightarrow (\cot x - \cot 3x) + (\cot 3x - \cot 9x) + (\cot 9x - \cot 27x) = 0$

$\Leftrightarrow \cot x = \cot 27x \Leftrightarrow x = 27x + k\pi$

$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{26}$ $(k \neq 26m, k, n \in \mathbf{Z})$

Bài toán 2. 10: Giải các phương trình:

a) $\tan^2 x + \sin^2 2x = 4\cos^2 x$

b) $\cos^3 3x + \cos^2 x + 3\cos^2 2x + \cos 2x = 2$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

PT $\Leftrightarrow (\tan x + \sin 2x)^2 - 4(\cos^2 x + 4\sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\tan x + \sin 2x)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\tan x + \sin 2x - 2)(\tan x + \sin 2x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x+\sin 2x-2=0\\ \tan x+\sin 2x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^3-2t^2+3t-2=0\\ t^3+2t^2+3t+2=0\end{array}\right. (t=\tan x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\ (tm)\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\ (tm)\end{array}\right.$$

b) PT: $\Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x)^2 = 2 - 3\cos^2 2x + 2\cos^2 2x - 1$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x+\cos x)^2=\sin^2 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x+\cos x=\sin 2x\\ \cos 3x+\cos x=-\sin 2x\end{array}\right.$$

Xét $\cos 3x + \cos x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x(\cos 2x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 2x = \sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right., (k \in \mathbf{Z})$$

Xét $3\cos x + \cos x = -\sin 2x \Leftrightarrow \cos x(\cos 2x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 2x = -\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right., (k \in \mathbf{Z})$$

Bài toán 2. 11: Giải các phương trình:

a) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) + \cos^2 2x + \cos^2 x = \dfrac{7}{4}$

b) $16\cos^5 x = 1 + 5\cos 3x + 10\cos x$.

Hướng dẫn giải

a) PT: $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - 6x\right) + \cos 4x + \cos 2x\right] = \dfrac{7}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - 6x\right) + \cos 4x + \cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - 6x\right) - \cos\dfrac{\pi}{3} + \cos 4x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right) + 2\cos 3x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x\left[\cos x - \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 3x\right)\right] = 0$

Xét $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$, $(k \in \mathbf{Z})$

Xét $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 3x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.$, $(k \in \mathbf{Z})$

b) Ta có:

$16\cos^5 x = 2(4\cos^3 x)(2\cos^2 x) = 2(\cos 3x + 3\cos x)(1 + \cos 2x)$

$= 2\cos 3x + 6\cos x + (\cos 5x + \cos x) + 3(\cos 3x + \cos x)$

$= \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$

Phương trình đã cho tương đương với: $\cos 5x = 1 \Leftrightarrow 5x = 2k\pi$

Vậy: $x = \dfrac{2k\pi}{5}$ $(k \in \mathbf{Z})$

Bài toán 2. 12: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$

b) $3 + \sin^2 2x = 2\sin 2x + \cos 2x + 2\sqrt{2}\sin x$.

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện : $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{2}.\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + l2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sin^2 2x - 2\sin 2x + 1) + (2 - \cos 2x - 2\sqrt{2}\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x - 1)^2 + (\sqrt{2}\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbf{Z})$$

Bài toán 2. 13: Giải các phương trình:

a) $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0$

b) $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x$.

Hướng dẫn giải:

a) $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x\cos x - 2\sin^2 3x + \cos 3x + \sin x\cos 3x - 2\cos^2 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x + \cos 3x = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \text{: vô nghiệm .}$$

b) PT: $\sin^8x(2\sin^2x - 1) + \cos^8x(2\cos^2x - 1) + \frac{5}{4}\cos2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^8x\cos2x - \sin^8x\cos2x + \frac{5}{4}\cos2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x(\cos^8x - \sin^8x + \frac{5}{4}) = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x = 0$ (1) hoặc $\sin^8x = \cos^8x + \frac{5}{4}$ (2).

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình (2) vô nghiệm vì VT ≤ 1; VP $\ge \frac{5}{4} >$ VT.

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Bài toán 2. 14: Giải các phương trình:

a) $(\sin x + \cos x)^4 = 5 - \sin^2 2x$ b) $2\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{\cos x} = 2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(\sin x + \cos x)^4 \le 4$ và $5 - \sin^2 2x \ge 4$

Vậy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}(\sin x + \cos x)^4 = 4\\ \sin^2 2x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\\ \cos 2x = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ (k \in Z)$$

b) Ta có: $2\sqrt{\sin x} = 2\sqrt[4]{\sin^2 x} \ge 2\sin^2 x$

$$\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{\cos x} = \sqrt[4]{\cos^2 x} + \sqrt[8]{\cos^2 x} \ge 2\cos^2 x \Rightarrow VT \ge 2$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0, \cos x = 1\\ \sin x = 1, \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ x = 2k\pi\end{array}\right., (k \in Z)$$

Bài toán 2. 15: Giải các phương trình:

a) $\sin^{2020}x + \cos^{2020}x = 1$ b) $\sin^{20}x + \cos^{20}x = \frac{1}{32}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\cos^{2020}x \le \cos^2x$, dấu = xảy ra khi $\cos x = 0$ hoặc $\cos x = \pm 1$

và $\sin^{2020}x \le \sin^2x$, dấu = xảy ra khi $\sin x = 0$ hoặc $\sin x = \pm 1$.

Nên $\sin^{2020}x + \cos^{2020}x \le \sin^2x + \cos^2x = 1$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra, phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^{10}+b^{10}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{10}$, với a, b ≥ 0 và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b, ta có:

$$VT = (\sin^2x)^{10} + (\cos^2x)^{10} \geq 2\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\sin^2x = \cos^2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 2. 16: Giải các phương trình 2 ẩn:

a) $4\cos^2x + 3\tan^2y - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan y + 4 = 0$

b) $\cos^4x + \sin^4x + \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x} = 8 + \frac{\sin y}{2}$.

Giải

a) Phương trình tương đương

$$4\cos^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 + (\sqrt{3}\tan y)^2\ 2\sqrt{3}\tan y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan y + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \text{ với } k, l \in \mathbf{Z}.$$

b) Điều kiện: $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$VT = (\cos^4x + \sin^4x)(1 + \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$= (1 - 2\sin^2x\cos^2x)(1 + \frac{16}{(2\sin x\cos x)^4})$$

$$= (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x})$$

$\geq (1 - \frac{1}{2})(1 + 16) = \frac{17}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi

$\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

và VP = $8 + \frac{\sin y}{2} \le 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\sin y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $y = \frac{\pi}{2} + m2\pi$ với $k, m \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 2. 17: Giải các phương trình:

a) $2\cos x - |\sin x| = 1$　　　　b) $\sqrt{2}\,(|\sin x| + |\cos x|) = 2\sin 4x$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$2\cos x - 1 = |\sin x| \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge \frac{1}{2} & (1) \\ (2\cos x - 1)^2 = \sin^2 x & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(2) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 5\cos^2 x - 4\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ (loại) hay $\cos x = \frac{4}{5}$ (thích hợp)

Do đó $\cos x = \frac{4}{5} = \cos\alpha \Rightarrow x = \pm\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Xét dấu lần lượt 4 góc phần tư của x thì kết quả:

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ x = \frac{3\pi}{5} + k2\pi,\ x = \frac{7\pi}{3} + k2\pi,\ x = \frac{13\pi}{53} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 2. 18: Giải các phương trình:

a) $\cos x \sin x + |\cos x + \sin x| = 1$.

b) $|\sin x - \cos x| + 2\sin 2x = 1$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = |\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\,|\sin(x + \frac{\pi}{4})|$

$\Rightarrow 0 \le t \le \sqrt{2}$ và $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

Phương trình đề bài trở thành

$\frac{1}{2}(t^2 - 1) + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -3$ (loại).

Chọn $t = 1$ thì $|\sin(x + \frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[1 - \cos2(x + \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 1$

$\Leftrightarrow -\sin2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Đặt $t = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2}\,|\sin(x - \frac{\pi}{4})| \Rightarrow 0 \le t \le \sqrt{2}$

và $\sin x \cos x = -\frac{1}{2}(t^2 - 1)$. Phương trình đã cho trở thành

$t + 2(t^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -\frac{3}{2}$ (loại).

Với $t = \sqrt{2}\,|\sin(x - \frac{\pi}{4})| = 1 \Leftrightarrow |\sin(x - \frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}[1 - \cos2(x - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình : $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$.

Bài toán 2. 19: Giải các phương trình:

a) $|\cot x| = \tan x - \frac{1}{\sin x}$

b) $\frac{\tan^2 x}{|\tan x - 1|} = |\tan x + 1| + \frac{1}{|\tan x - 1|}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện : $\tan x - \frac{1}{\sin x} \ge 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \cot^2 x = (\tan x - \frac{1}{\sin x})^2$

$\Leftrightarrow \cot^2 x = \tan^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \cot^2 x + 1 - \frac{2}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right)} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \text{ : thích hợp.}$$

Với $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) - \frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right)} = -\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \text{ : loại .}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ta xét các trường hợp :

Với $\tan x \leq -1$: $\begin{cases} \tan x + 1 \leq 0 \\ \tan x - 1 < 0 \end{cases}$ Phương trình trở thành

$$-\frac{\tan^2 x}{\tan x - 1} = -(\tan x + 1) - \frac{1}{\tan x - 1}$$

$$\Leftrightarrow -(\tan x + 1) - \frac{1}{\tan x - 1} = -(\tan x + 1) - \frac{1}{\tan x - 1}$$

Nên mọi x thỏa $\tan x \leq -1$ là nghiệm .

Với $-1 < \tan x < 1$: $\begin{cases} \tan x + 1 > 0 \\ \tan x - 1 < 0 \end{cases}$. Phương trình trở thành

$$-\frac{\tan^2 x}{\tan x - 1} = (\tan x + 1) - \frac{1}{\tan x - 1}$$

$$\Leftrightarrow -(\tan x + 1) - \frac{1}{\tan x - 1} = (\tan x + 1) - \frac{1}{\tan x - 1}$$

$\Leftrightarrow \tan x = -1$: loại .

Với $\tan x > 1$: $\begin{cases} \tan x + 1 > 0 \\ \tan x - 1 > 0 \end{cases}$.

Phương trình trở thành $\frac{\tan^2 x}{\tan x - 1} = (\tan x + 1) + \frac{1}{\tan x - 1}$

$$\Leftrightarrow \tan x + 1 + \frac{1}{\tan x - 1} = \tan x + 1 + \frac{1}{\tan x - 1}$$

Nên mọi x thỏa $\tan x > 1$ là nghiệm .

Vậy nghiệm của phương trình :

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi < x \le -\frac{\pi}{4}+k\pi \;;\; \frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Bài toán 2. 20: Giải các phương trình:

a) $\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x = |1 - 2\cos x + \cos 2x|$

b) $\cos 4x - \sin 4x = |\cos x| + |\sin x|$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình tương đương với

$$2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x = |2\cos^2 x - 2\cos x|$$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos x - 1) = |\cos x|.|\cos x - 1|$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos x - 1) = -|\cos x|(\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(\sin 2x + |\cos x|) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 1$ (1) hay $\sin 2x + |\cos x| = 0$ (2)

Ta có (1) $\Leftrightarrow x = k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Và (2) $\Leftrightarrow |\cos x| = -\sin 2x$ (3) $\Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 2x,\ \sin 2x \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = 1 - \cos^2 2x,\ \sin 2x \le 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0,\ \sin 2x \le 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 1$ hay $\cos x = -\frac{1}{2},\ \sin 2x \le 0$

Với $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ thì có $\sin 2x = \sin 2(\frac{2\pi}{3} + k2\pi) < 0$ (thỏa)

Với $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ thì có $\sin 2x = \sin 2(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi) > 0$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi;\ x = k2\pi,\ k\in \mathbf{Z}$.

b) Ta xét các trường hợp :

Với $k2\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases}\sin x \ge 0\\ \cos x > 0\end{cases}$

Phương trình trở thành: $\cos 4x - \sin 4x = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow \cos(4x + \frac{\pi}{4}) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+\frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{k2\pi}{5}\end{array}\right.$$

Chọn các nghiệm: $x = k2\pi\ ;\ x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Với $\frac{\pi}{2} + k2\pi \le x < \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x \le 0 \end{cases}$.

Phương trình trở thành: $\cos 4x - \sin 4x = -\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 4x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} - 4x = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{4} - 4x = \frac{5\pi}{4} - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Chọn các nghiệm : $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \frac{9\pi}{10} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Với $\pi + k2\pi \le x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \le 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$.

Phương trình trở thành: $\cos 4x - \sin 4x = -\cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow \sin(4x - \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$$

Chọn các nghiệm : $x = \pi + k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{5} + k2\pi$.

Với $\frac{3\pi}{2} + k2\pi \le x < 2\pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases}$.

Phương trình trở thành $\cos 4x - \sin 4x = \cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow \cos(4x + \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$$

Chọn các nghiệm : $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{10} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 2. 21: Giải các phương trình

a) $2|\sin x| + |\cos x| + \cos^2 x = 2$ b) $\frac{2 + |\sin x|}{3 + |\cos x|} = |\sin x| + |\cos x|$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2|\sin x| \ge 2\sin^2 x$, $|\cos x| + \cos^2 x \ge 2\cos^2 x$

Suy ra VT ≥ 2

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 1, \cos x = 0\\ \sin x = 0, \cos^2 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có: VP: $|\sin x| + |\cos x| \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Và VT $\le 1 \Leftrightarrow 2 + |\sin x| \le 3 + |\cos x|$

$\Leftrightarrow |\sin x| \le 1 + |\cos x|$ (đúng)

Do đó PT $\Leftrightarrow \begin{cases}|\sin x| = 1\\ |\cos x| = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Bài toán 2. 22: Giải các phương trình:

a) $2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x}$

b) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$, $x \in (0; 2\pi)$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) \ge 0$. Phương trình tương đương

$$4\sin^2(3x + \frac{\pi}{4}) = 1 + 8\sin 2x\cos^2 2x$$

$\Leftrightarrow 2[1 - \cos(6x + \frac{\pi}{2})] = 1 + 4\sin 2x(1 + \cos 4x)$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sin 6x = 1 + 4\sin 2x + 4\sin 2x\cos 4x$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sin 6x = 1 + 4\sin 2x - 2\sin 2x + 2\sin 6x$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{12} + k\pi\\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\end{array}\right.$

Thử lại điều kiện ta được nghiệm :

$x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{12} + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện $\cos 2x \ne 1 \Leftrightarrow 2x \ne k2\pi \Leftrightarrow x \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \ne \pi$ vì $x \in (0; 2\pi)$.

$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x\sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sin 2x + \cos 2x$ (1)

Với $\sin x > 0$: (1) $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow 2x = \pm (2x - \frac{\pi}{4}) + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn nghiệm thuộc $(0, 2\pi)$ là : $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}$.

Thử lại điều kiện $\sin x > 0$ ta được các nghiệm : $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}$ (tm).

Với $\sin x < 0$: (1) $\Leftrightarrow -\cos 2x = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow \cos(\pi - 2x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \pi - 2x = \pm (2x - \frac{\pi}{4}) + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn nghiệm thuộc $(0, 2\pi)$ là : $\frac{5\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}$.

Thử lại điều kiện $\sin x < 0$ ta được các nghiệm : $\frac{21\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}$ (tm).

Vậy nghiệm phải tìm là : $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{21\pi}{16}, \frac{29\pi}{16}$.

Bài toán 2. 23: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$

b) $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình được viết lại :

$$\sqrt{3 - \cos x} = \sqrt{\cos x + 1} + 2 \qquad (1)$$

Ta có VP ≥ 2. Dấu " = " xảy ra khi $\cos x = -1$.

$3 - \cos x \leq 4 \Rightarrow$ VT ≤ 2. Dấu " = " xảy ra khi $\cos x = -1$;

Do đó phương trình đề bài tương đương với

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b) $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{4\cos^2 x} = 4|\cos x|$

$\Leftrightarrow \cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 2|\cos x| \quad (1)$.

Nếu $\cos x = 0$: (1) thỏa mãn nên có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Nếu cosx > 0 : (1) $\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ (loại, vì cosx < 0) .

Nếu cosx < 0 : (1) $\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ (loại, vì cosx > 0) .

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 2. 24: Giải các phương trình:

a) $\dfrac{\cos\frac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} = 0$.

b) $\sin^3x + \cos^3x + \sin^3x\cot x + \cos^3x\tan x = \sqrt{2\sin 2x}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện : $\tan^2x < 1 \Leftrightarrow |\tan x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi.$

PT $\Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3} - \cos^2x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3} - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 3\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow [\cos\left(\frac{2x}{3}\right) - 1].[4\cos^2\left(\frac{2x}{3}\right) - 3] = 0$

$\Leftrightarrow x = k3\pi$ hay $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp điều kiện, nghiệm của phương trình: $x = k3\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b) Điều kiện : $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \sin 2x \geq 0$ (1).

Ta có VT = $\sin^3x + \cos^3x + \sin^3x\cot x + \cos^3x\tan x$

$= \sin^3x(1 + \frac{\cos x}{\sin x}) + \cos^3x(1 + \frac{\sin x}{\cos x})$

$= \sin^2x(\sin x + \cos x) + \cos^2x(\sin x + \cos x)$

$= \sin x + \cos x$

Phương trình đề bài tương đương với

$\sin x + \cos x = \sqrt{2\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x \geq 0 \\ 1 + \sin 2x = 2\sin 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ (chọn).

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 2. 25: Giải các phương trình:

a) $\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x}=4\cos x$

b) $\dfrac{1}{\sin x}\sqrt{\dfrac{1}{1-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\left(\dfrac{1+3\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Phương trình được viết lại

$$|\sin x-\cos x|+|\sin x+\cos x|=4\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow |\sin x-\cos x|+|\sin x+\cos x|=2\sin 2x\ .$$

Điều kiện $\sin 2x \geq 0$.

PT $\Leftrightarrow 2+2|\sin^2 x-\cos^2 x|=4\sin^2 2x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+|\cos 2x|-1=0 \Leftrightarrow |\cos 2x|=\frac{1}{2}.$$

So với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình:

$$x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ;\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta rút gọn phương trình $\dfrac{1}{\sin x}\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2 x}}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\left(\dfrac{1+3\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\sin x|\sin x}+\frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{|\sin x|}+\frac{4\cos^2 x}{\sin x}=0\ (1).$$

Xét $\sin x>0$: (1) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x+1=0$: loại

Xét $\sin x<0$: (1) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\ ;\ x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi.$$

So với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình:

$$x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\ ;\ x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 2. 26: Xác định m sao cho phương trình

$3\cos^2 x+2|\sin x|=m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}]$.

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với

$$3(1-\sin^2 x)+2|\sin x|=m$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x-2|\sin x|+m-3=0.\ (1)$$

Với $x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. Để ý rằng, nếu x là nghiệm của (1) thì – x cũng là nghiệm. Nên để x là nghiệm duy nhất thì $x = 0$.

Thay $x = 0$ vào (1) $\Rightarrow m = 3$.

Ngược lại, với $m = 3$. Ta được phương trình

$3\sin^2 x - 2|\sin x| = 0$

$\Leftrightarrow |\sin x| = 0$ hay $|\sin x| = \frac{2}{3}$: có nhiều hơn 1 nghiệm.

Vậy không có m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất trong đoạn $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

Bài toán 2. 27: Tìm m để phương trình:

$(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0$.

có nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$.

Hướng dẫn giải:

Để ý rằng với cosx = 0 thì VT = $\pm 1 \neq 0$ = VP nên phương trình vô nghiệm.

Do đó chia hai vế cho $\cos^3 x \neq 0$, rút gọn rồi đặt t = tanx, thì được phương trình:

$t^3 - (2m+1)t^2 + (6m-3)t - (4m-3) = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0$ (1)

Với $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ thì $t = \tan x \in (0; 1)$.

Và (1) $\Leftrightarrow t = 1$ (loại) hay $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ (2)

Bài toán trở thành tìm m để (2) có nghiệm thuộc (0;1):

hoặc $0 \le t_1 \le t_2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} af(0) \ge 0,\ af(1) \ge 0 \\ \Delta \ge 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases}$: vô nghiệm

hoặc $\left[\begin{array}{l} 0 < t_1 < 1 < t_2 \\ t_1 < 0 < t_2 < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(0).f(1) < 0$

$\Leftrightarrow (4m-3)(m-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} < m < 1$.

Vậy $\frac{3}{4} < m < 1$.

Bài toán 2. 28: Tìm tham số để 2 phương trình tương đương

$2\cos x\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$ (1)

$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4-a)(1+\cos 2x)$ (2).

Hướng dẫn giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \cos x + \cos 3x = 1 + 2\cos^2 x - 1 + \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = \dfrac{1}{2}$

(2) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = a\cos x + 2(4 - a)\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + (4 - 2a)\cos^2 x + (a - 3)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1)[2\cos x - (a - 3)] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\cos x = \dfrac{a-3}{2}$

Hai phương trình đã cho tương đương khi

$\dfrac{a-3}{2} = 0$ hoặc $\dfrac{a-3}{2} = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\dfrac{a-3}{2} > 1$ hoặc $\dfrac{a-3}{2} < -1$

$\Leftrightarrow a = 3$ hoặc $a = 4$ hoặc $a > 5$ hoặc $a < 1$.

Vậy hai phương trình tương đương khi :

$a = 3$ hoặc $a = 4$ hoặc $a < 1$ hoặc $a > 5$.

Bài toán 2. 29: Tìm tham số để 2 phương trình tương đương

$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x.\cos 2x$ (1)

$\sin 3x - m\sin x = (4 - 2|m|)\sin^2 x$ (2).

Hướng dẫn giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sin 3x + \cos 2x = 1 + \sin 3x + \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sin x = \dfrac{1}{2}$

Nên (1) có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6}$ thế vào (2) thì $m = |m|$ nên $m \geq 0$.

Và (2) $\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - m\sin x = (4 - 2m)\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x[4\sin^2 x + (4 - m)\sin x + (m - 3)] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $4\sin^2 x + (4 - m)\sin x + m - 3) = 0$

Từ đó, giải được 2 phương trình đã cho tương đương khi

$0 \leq m < 1$, $m = 3$, $m = 4$, $m > 5$.

Bài toán 2. 30: Giải phương trình: $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Xét khoảng $(-1;1)$, đặt $x = \cos t$, $0 < t < \pi$ thì phương trình trở thành:

$8\cos^3 t - 4\cos^2 t - 4\cos t + 1 = 0$

hay $4\cos t(2\cos^2 t - 1) = 4(1 - \sin^2 t) - 1$

$4\cos t.\cos 2t = 3 - 4\sin^2 t$

hay $\sin 4t = \sin 3t$ (vì $\sin t > 0$)

Giải rồi chọn nghiệm $t_1 = \dfrac{\pi}{7}, t_2 = \dfrac{3\pi}{7}, t_3 = \dfrac{5\pi}{7}$

Vậy phương trình bậc 3 cho có 3 nghiệm

$x_1 = \cos\frac{\pi}{7}, x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}, x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$.

Bài toán 2. 31: Giải phương trình: $(8x^3 + 1)^3 = 162x - 27$.

Hướng dẫn giải:

Đặt u = 2x, phương trình:

$(u^3 + 1)^3 = 27(3u - 1) \Leftrightarrow u^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3u-1}$

Lại đặt $v = \sqrt[3]{3u-1} \Leftrightarrow v^3 + 1 = 3u$

Ta có hệ: $\begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ v^3 + 1 = 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ u^3 - v^3 = 3(v - u) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ (u-v)(u^2 + vu + v^2 + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 3v \\ u - v = 0 \end{cases}$

Do đó $u^3 + 1 = 3u$ hay $8x^3 - 6x + 1 = 0$

Xét $x \in [-1; 1]$ nên đặt x = cost

PT: $2(4\cos^3 t - 3\cos t) = -1 \Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$, $(k \in \mathbf{Z})$

Từ đó có 3 giá trị của x và cũng chính là 3 nghiệm của phương trình bậc 3:

$x = \cos\frac{2\pi}{9}$, $x = \cos\frac{8\pi}{9}$, $x = \cos\frac{14\pi}{9}$.

Bài toán 2. 32: Phương trình $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ có bao nhiêu nghiệm nằm trong [0; 1].

Hướng dẫn giải:

Đặt x = sint, với $0 < t < \frac{\pi}{2}$ thì phương trình trở thành

$8\sin t.\cos 2t(8\sin^4 t - 8\sin^2 t + 1) = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t\,[8\sin^2 t(\sin^2 t - 1) + 1] = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t\,(1 - 2\sin^2 2t) = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t.\cos 4t = 1$

$\Leftrightarrow 8\sin t.\cos 2t.\cos 4t\,.\cos t = \cos t$

$\Leftrightarrow \sin 8t = \cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9}$ hay $t = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}; k \in \mathbb{Z}$.

Từ điều kiện $0 < t < \frac{\pi}{2}$, suy ra có bốn nghiệm thích hợp là

$x = \sin\frac{\pi}{18}$; $x = \sin\frac{5\pi}{18}$; $x = \sin\frac{\pi}{14}$ và $x = \frac{5\pi}{14}$.

Bài toán 2. 33: Giải phương trình

$$(64x^3 - 112x^2 + 56x - 7)^2 = 4(1 - x)$$

Hướng dẫn giải:

$(64x^3 - 112x^2 + 56x - 7)^2 = 4(1 - x)$ nên $x \le 1$.

Nếu $x < 0$ thì đặt $x = -y$ thì $y > 0$, phương trình

$(64y^3 + 112y^2 + 56y + 7)^2 = 4(1 + y)$

Xét $y > 1$ thì VT > VP : vô nghiệm

Xét $0 < y \le 1$ thì VT > 49 > 8 ≥ VP : vô nghiệm

Nếu $x = 0$ thì không phải là nghiệm

Nếu $0 < x \le 1$ thì đặt $x = \cos^2 t$, với $0 \le t < \frac{\pi}{2}$

Phương trình trở thành

$$(64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7)^2 = 4\sin^2 t$$

$\Leftrightarrow (64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7)^2 \cos^2 t = \sin^2 2t$

$\Leftrightarrow \cos^2 7t = \sin^2 2t$

$\Leftrightarrow \cos 14t = -\cos 4t$

Chọn nghiệm $t = \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}$

Do đó phương trình cho có 6 nghiệm x là

$$\cos^2\frac{\pi}{18}, \cos^2\frac{\pi}{6}, \cos^2\frac{5\pi}{18}, \cos^2\frac{7\pi}{18}, \cos^2\frac{\pi}{10}, \cos^2\frac{3\pi}{10}.$$

Bài toán 2. 34: Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1 - x^2)^3} = x\sqrt{2(1 - x^2)}$.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện : $|x| \le 1$ nên đặt $x = \cos u, u \in [0; \pi]$.

Phương trình trở thành

$$\cos^3 u + \sin^3 u = \sqrt{2}\sin u \cos u \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin u + \cos u$, $|t| \le \sqrt{2}$.

(1) $\Leftrightarrow (\sin u + \cos u)(1 - \sin u\cos u) = \sqrt{2}\sin u\cos u$

$\Leftrightarrow t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = \sqrt{2}\,\frac{t^2 - 1}{2}$

$\Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hay $t = -\sqrt{2} \pm 1$

Chọn $t = \sqrt{2}$ thì có $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn $t = 1 - \sqrt{2}$ thì có $x = \dfrac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}$.

Vậy nghiệm: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \dfrac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 2. 1: Giải các phương trình

a) $\sin 11x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \dfrac{1}{2}\cos 7x = 0$

b) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$

Hướng dẫn

a) PT: $\sin(7x + \dfrac{\pi}{6}) = \sin(-11x)$

Kết quả $x = -\dfrac{\pi}{108} + \dfrac{k\pi}{9}, x = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) Kết quả $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 2. 2: Giải các phương trình

a) $4\cos^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin x + 3\sin^2\dfrac{x}{2} = 3$

b) $\cos^3 x - \sin^3 x = \sin x - \cos x$

Hướng dẫn

a) PT đẳng cấp bậc 2. Kết quả $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Kết quả $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 2. 3: Giải các phương trình

a) $\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

Hướng dẫn

a) đưa về tích số: $\sin 5x + (\sin 7x + \sin 3x) = 0$

b) đưa về tích số: $\sin 2x + (\sin 3x + \sin x) = \cos 2x + (\cos 3x + \cos x)$

Bài tập 2. 4: Giải các phương trình

a) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$

b) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$

Hướng dẫn

a) Tách và ghép: tanx – cot4x = cot4x – cot2x.

Kết quả $x = (3m \pm 1)\frac{\pi}{3}$ với m nguyên.

b) Kết quả $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 2. 5: Giải các phương trình

a) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$ b) $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$

Hướng dẫn

a) Kết quả $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Biến đổi thành tích.

Kết quả $x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi$;

$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ với $\sin\alpha = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Bài tập 2. 6: Giải các phương trình

a) $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$

b) $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$

Hướng dẫn

a) Điều kiện và bình phương. Kết quả $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện và bình phương. Kết quả vô nghiệm

Bài tập 2. 7: Giải các phương trình :

a) tanx + tan2x = tan3x b) 3tanx + 2cot3x = tan2x

Hướng dẫn

a) dùng công thức biến đổi tan a + tan b.

b) Tách và ghép: 2(tanx + cot3x) = tan2x – cot3x.

Bài tập 2. 8: Giải các phương trình :

a) $\frac{\sin 5x}{5} = \frac{\sin 3x}{3}$ b) $2\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}) = \sin(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2})$

Hướng dẫn

a) dùng tỉ lệ thức hoặc biến đổi 5x = 3x +2x

b) đặt $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}$

Bài tập 2. 9: Giải các phương trình :

a) $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2\cos 2x}$

b) $\cos\frac{\pi}{4}(3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}) = 1, x \in Z$

Hướng dẫn

a) Lập phương 2 vế và biến đổi tích số

b) Kết quả $x = -21$ và $x = -3$

Bài tập 2. 10: Tìm tham số để phương trình vô nghiệm

a) $(\tan x + \frac{1}{4}\cot x)^n = \cos^n x + \sin^n x$ với $n \in \mathbf{N}, n \ge 2$

b) $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + 7 + \sin 3x$

Hướng dẫn

a) đánh giá bất đẳng thức AM–GM. Kết quả $n \ge 3$

b) đánh giá VT ≤ 4.

Bài tập 2. 11: Giải các phương trình:

a) $\sin^{2014} x + \cos^{2014} x = 1$

b) $(\sin^3 x + \frac{1}{\sin^3 x})^2 + (\cos^3 x + \frac{1}{\cos^3 x})^2 = \frac{81}{4}\cos^2 y$

Hướng dẫn

a) đánh giá VT ≥ 1. Kết quả $x = k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

b) đánh giá VT $\ge \frac{81}{4} \ge$ VP.

Bài tập 2. 12: Giải các phương trình:

a) $8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0$

b) $64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1 - x^2}$

Hướng dẫn

a) biến đổi: $8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Kết quả $x = \cos\frac{5\pi}{18}, x = \cos\frac{17\pi}{18}, x = \cos\frac{29\pi}{18}$

b) Điều kiện $|x| \le 1$ nên đặt $x = \sin t$.

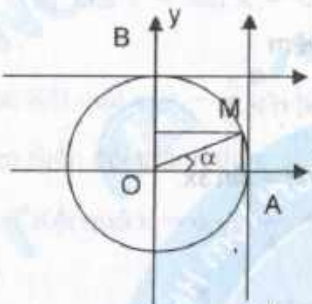
Kết quả $\cos\frac{\pi}{18}, \cos\frac{5\pi}{18}, \cos\frac{13\pi}{18}, \cos\frac{17\pi}{18}, \cos\frac{3\pi}{10}, \cos\frac{7\pi}{10}$

Chuyên đề 3: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Bất phương trình lượng giác:

– Bất phương trình cơ bản:



$\sin x > 0 \Leftrightarrow k2\pi < x < \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin x < 0 \Leftrightarrow -\pi + k2\pi < x < k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + k2\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\tan x > 0 \Leftrightarrow k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\tan x < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cot x > 0 \Leftrightarrow k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\cot x < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

– Biểu diễn trên đường tròn lượng giác để xác định cung góc là nghiệm của bất phương trình
– Biến đổi lương giác về bất phương trình cơ bản
– Đặt ẩn phụ, biến đổi thành tích, so sánh, ...

Hệ phương trình lượng giác:

– Khi có $x \pm y = \alpha$ sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích
– Đặt ẩn phụ, biến đổi tích,...
– Đưa về các hệ đại số, hệ có bậc nhất, hệ đối xứng, đối xứng loại II, hệ đẳng cấp,...
– Đánh giá 2 vế, dùng bất đẳng thức,...

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 3. 1: Giải các bất phương trình:

a) $\sin 3x < \sin x$ b) $\cos 4x + \cos 2x < 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sin 3x < \sin x \Leftrightarrow \sin 3x - \sin x < 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x \sin x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$ (I) hay $\begin{cases} \cos 2x < 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$ (II).

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi < 2x < \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ -\pi + k2\pi < x < k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ -\pi + k2\pi < x < k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \pi + k2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi \text{ hay } -\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + k2\pi < 2x < \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \\ k2\pi < x < \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + k\pi < 2x < \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ k2\pi < x < \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình: $\pi + k2\pi < x < \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi$

hay $-\dfrac{\pi}{4} + k2\pi < x < k2\pi$ hay $\dfrac{\pi}{4} + k2\pi < x < \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $\cos 4x + \cos 2x < 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x > 0, \cos x < 0 \\ \cos 3x < 0, \cos x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6},\ x \neq k\frac{\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài toán 3. 2: Giải các bất phương trình:

a) $\sin x + \sin 3x < \sin 2x$ b) $2\tan 2x \le 3\tan x$

Hướng dẫn giải:

a) $\sin x + \sin 3x < \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x - 2\sin 2x\cos x > 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x(1 - 2\cos x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x > 0 \\ \cos x < \dfrac{1}{2} \end{cases} (I) \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sin 2x < 0 \\ \cos x > \dfrac{1}{2} \end{cases} (II)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} k2\pi < 2x < \pi + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } \pi + k2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k2\pi.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi + k2\pi < 2x < k2\pi \\ -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < k2\pi.$$

Vậy nghiệm : $\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $-\pi + k2\pi < x < k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

và $x \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có $2\tan 2x \leq 3\tan x \Leftrightarrow \dfrac{4\tan x}{1 - \tan^2 x} \leq 3\tan x$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan x}{(\tan x + 1)(\tan x - 1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x > 1 \\ -1 < \tan x \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x \leq k\pi \end{array}\right., \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài toán 3. 3: Giải các bất phương trình:

a) $\cos^3 x \cos 3x - \sin 3x \sin^3 x \leq \frac{5}{8}$.

b) $2\sin x\cos x - (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} < 0$.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $\cos^3 x \cos 3x - \sin 3x \sin^3 x$

$$= \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\cos 3x - \sin 3x . \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$= \frac{3}{4}(\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) + \frac{1}{4}(\cos^2 3x + \sin^2 3x)$$

$$= \frac{3}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}.$$

Nên bất phương trình đã cho tương đương $\frac{3}{4}\cos 4x + \frac{1}{4} \leq \frac{5}{8}$

$$\Leftrightarrow \cos 4x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k2\pi \le 4x \le \frac{5\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

b) Ta có $2\sin x\cos x - (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} < 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x > \frac{1}{2}, \cos x < \frac{1}{2} \\ \sin x < \frac{1}{2}, \cos x > \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \end{array}\right.$$

Bài toán 3. 4: Giải các bất phương trình:

a) $\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0$ b) $\frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 2x + \cos x} \le 2$

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \ne \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x + \sin x)^2 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos x - \sin x)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x - \cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \cos x + \sin x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} > 0 \Leftrightarrow \tan(x + \frac{\pi}{4}) > 0$$

$$\Leftrightarrow k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b) BPT: $\frac{1 - 4(1 - \cos^2 x)}{2\cos^2 x + \cos x - 1} \le 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{1 - 4(1 - \cos^2 x)}{2\cos^2 x + \cos x - 1} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x+1}{2\cos^2 x+\cos x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x+\frac{1}{2}}{(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x\le -\frac{1}{2}, \cos x\ne -1\\ \cos x>\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{3}+k2\pi\le x\le \frac{4\pi}{3}+k2\pi,\ x\ne(2k+1)\pi\\ -\frac{\pi}{3}+k2\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$$

Bài toán 3. 5: Giải các bất phương trình:

a) $4\sin 3x + 5 \ge 4\cos 2x + 5\sin x$

b) $\tan\frac{x}{2}<\frac{\tan x-2}{\tan x+2}$.

Hướng dẫn giải

a) Bất phương trình: $4\sin 3x + 5 \ge 4\cos 2x + 5\sin x$

$\Leftrightarrow 4(3\sin x - 4\sin^3 x) + 5 \ge 4(1-2\sin^2 x) + 5\sin x$

$\Leftrightarrow -16\sin^3 x + 8\sin^2 x + 7\sin x + 1\ ) \ge 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(16\sin^2 x + 8\sin x + 1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(4\sin x + 1)^2 \ge 0$: đúng với mọi x.

Vậy S = **R**.

b) Đặt $t=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

BPT: $t<\frac{2t-2+2t^2}{2t+2-2t^2} \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2-t-1}<0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-t-1)<0$ vì $t^2+t+1>0, \forall t$

$\Leftrightarrow t<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hay $1<t<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Đặt $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\tan\alpha$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\tan\beta$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0<\beta<\frac{\pi}{2}$

thì nghiệm: $-\pi+k2\pi<x<2\alpha+k2\pi$, $\frac{\pi}{2}+k2\pi<x<2\beta+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Bài toán 3. 6: Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{5-2\sin x}\ge 6\sin x-1$

b) $4(x^3-2x+1)(\sin x+2\cos x)\ge 9\left|x^3-2x+1\right|$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu $\sin x<\frac{1}{6}$ thì VT <0 nên BPT được nghiệm đúng

Nếu $\sin x \ge \frac{1}{6}$ thì VT ≥ 0,

BPT $\Leftrightarrow 5 - 2\sin x \ge (6\sin x - 1)^2$

$\Leftrightarrow 36\sin^2 x - 10\sin x - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{9} \le \sin x \le \frac{1}{2}$

Chọn $\sin x \le \frac{1}{2}$. Do đó bất phương trình tương đương $\sin x \le \frac{1}{2}$.

Vậy $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $|\sin x + 2\cos x| = |1.\sin x + 2.\cos x| \le \sqrt{5}$

- Xét $x^3 - 2x + 1 > 0$ thì bất phương trình:
  $4(x^3 - 2x + 1)(\sin x + 2\cos x) \ge 9(x^3 - 2x + 1)$
  $\Leftrightarrow 4\sin x + 8\cos x \ge 9$: vô nghiệm.
- Xét $x^3 - 2x + 1 < 0$ thì bất phương trình:
  $4(x^3 - 2x + 1)(\sin x + 2\cos x) \ge -9(x^3 - 2x + 1)$
  $\Leftrightarrow 4\sin x + 8\cos x \le -9$: vô nghiệm.
- Xét $x^3 - 2x + 1 = 0$ thì bất phương trình $0 \ge 0$: đúng.
  Khi đó nghiệm x thỏa : $x^3 - 2x + 1 = 0$
  $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$
  $\Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hay $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hay $x = 1$.

Bài toán 3. 7: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x - y = \frac{2\pi}{3} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Từ phương trình thứ hai của hệ đã cho

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x + y = \pm\frac{\pi}{3} + k4\pi.$$

Với $\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} + k4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

Với $\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3} \\ x + y = -\dfrac{\pi}{3} + k4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi)$; $(\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{2} + k2\pi)$, $k \in Z$.

b) Từ phương trình thứ hai của hệ đã cho

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x - y = \pm\frac{2\pi}{3} + k4\pi.$$

Với $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ x - y = \dfrac{2\pi}{3} + k4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ y = k2\pi \end{cases}$.

Với $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ x - y = -\dfrac{2\pi}{3} + k4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình :

$(\frac{2\pi}{3} + k2\pi; k2\pi)$; $(k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi)$, $k \in Z$.

Bài toán 3. 8: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \tan x + \tan y = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3} \\ \tan x . \tan y = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

a) Điều kiện $x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ phương trình thứ nhất

$$y = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \tan y = \cot x.$$

Thay vào trong phương trình thứ hai

$$\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x \cos y} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} - k\pi\right); \left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} - k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện $x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x . \tan y}$ nên được hệ

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \\ \tan x . \tan y = 1 \end{cases}$$

Từ đó $\tan x$ và $-\tan y$ là nghiệm của phương trình

$$t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow t = -\sqrt{3} + 2$ hay $t = -\sqrt{3} - 2$.

Xét: $\begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} + 2 = \tan 15^\circ \\ \tan y = \sqrt{3} + 2 = \tan 75^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k360^\circ \\ y = 75^\circ + k360^\circ \end{cases}$

Vì $x - y = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + (k - p)\pi = \frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow k - p = 1 \Rightarrow k = p + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + (p+1)\pi \\ y = \frac{5\pi}{12} + p\pi, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Xét: $\begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} - 2 = \tan\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right) \\ \tan y = \sqrt{3} - 2 = \tan\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{12} + p\pi \end{cases}$

Vì $x - y = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{3} + (k-p)\pi = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow k - p = 1 \Rightarrow k = p + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{12} + (p+1)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{12} + p\pi,\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + (p+1)\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{12} + p\pi,\ p \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{12} + (p+1)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{12} + p\pi,\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Bài toán 3. 9: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x.\sin y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x.\cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

a) Phương trình thứ nhất của hệ được biến đổi như sau

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2y) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x+y).\sin(x-y) = 1$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\pi}{4}.\sin(x-y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - y = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Với $\left[\begin{array}{l} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ x - y = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Với $\left[\begin{array}{l} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ x-y=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \\ y=-\dfrac{\pi}{2}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình:

$$\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ y=\dfrac{\pi}{4}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \text{ và } \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \\ y=-\dfrac{\pi}{2}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

b) Cộng trừ ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=k2\pi \\ x+y=\pm\dfrac{\pi}{3}+m2\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình:

$(\dfrac{\pi}{6}+(k+m)\pi, -\dfrac{\pi}{6}+(k-m)\pi)$; $(-\dfrac{\pi}{6}+(k+m)\pi, \dfrac{\pi}{6}+(k-m)\pi)$.

Bài toán 3. 10: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \sin x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos^2 x+\sin^2 y=\dfrac{5}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x+6\sin y=3+12\sin^2 y \\ 4\sqrt{3}\cos x+2\sin y=7 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt u = sinx; v = cosy, $|u|, |v|\le 1$.

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-u^2+1-v^2=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ u^2+v^2=\dfrac{3}{4} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-u$, thay vào (2): $u^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-u)^2=\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 2u^2-\sqrt{3}u=0 \Leftrightarrow u=0$ hay $u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Với $u = 0;\ v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: ta được hệ $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = m\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases}.$$

Với $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ v = 0$: ta được hệ $\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình :

$(m\pi, -\dfrac{\pi}{6} + n2\pi)$; $(\dfrac{2\pi}{3} + m2\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

b) Đặt $u = \cos x$; $v = \sin y$, $|u|, |v| \le 1$.

Hệ phương trình tương đương: $\begin{cases} 2\sqrt{3}u + 6v = 3 + 12v^2 & (1) \\ 4\sqrt{3}u + 2v = 7 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow u = \dfrac{7 - 2v}{4\sqrt{3}}$, thay vào (1) : $(7 - 2v) + 12v = 6 + 24v^2$

$\Leftrightarrow 24v^2 - 10v - 1 = 0 \Leftrightarrow v = \dfrac{1}{2}$ hay $v = -\dfrac{1}{12}$

Với $v = \dfrac{1}{2}$; $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: ta có hệ $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$$

$$\text{hay} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases}.$$

Với $v = -\frac{1}{12} \Rightarrow u = \frac{43}{24\sqrt{3}} > 1$: vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ: $(\frac{\pi}{6} + m2\pi, \frac{\pi}{6} + n2\pi)$; $(-\frac{\pi}{6} + m2\pi, \frac{5\pi}{6} + n2\pi)$,

$(-\frac{\pi}{6} + m2\pi; \frac{\pi}{6} + n2\pi)$; $(\frac{\pi}{6} + m2\pi; \frac{5\pi}{6} + n2\pi)$; $m, n \in \mathbf{Z}$

Bài toán 3. 11: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 \\ \sin^3 y - \sin y + \cos x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin^2 x + \tan y = 1 \\ \tan^2 y + \sin x = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

a) Đặt $u = \cos x$, $v = \sin y$; $|u|, |v| \leq 1$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^3 - u + v = 0 & (1) \\ v^3 - v + u = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) : $(u - v)(u^2 + v^2 + uv) = 0$

$\Rightarrow u = v$ hay $u^2 + v^2 + uv = 0$.

Xét $u = v$: thay vào (1) $\Rightarrow u^3 = 0 \Rightarrow u = v = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ y = n\pi \end{cases}$$

Xét $u^2 + v^2 + uv = 0 \Leftrightarrow u = v = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm : $(\frac{\pi}{2} + m\pi; n\pi)$, $m, n \in \mathbf{Z}$.

b) Điều kiện $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $u = \sin x$; $v = \tan y$: $|u| \leq 1$. Hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2 + v = 1 & (1) \\ v^2 + u = 1 & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế $\Rightarrow (u - v)(u + v - 1) = 0$

$\Rightarrow u = v$ hay $u + v - 1 = 0$.

Với $u = v$: thay vào (2): $u^2 + u - 1 = 0$

$\Leftrightarrow u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hay $u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ (loại)

Do đó $\begin{cases} \sin x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sin\alpha \\ \tan y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \tan\beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi - \alpha + m2\pi \\ y = \beta + n\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \alpha + m2\pi \\ y = \beta + n\pi \end{cases}$.

Với $u + v = 1 \Rightarrow v = 1 - u$: thay vào (2):

$u^2 - u = 0 \Leftrightarrow u = 0$ hay $u = 1$

Do đó $\begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \tan y = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \tan y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ y = n\pi \end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm : $(m\pi; \dfrac{\pi}{4} + n\pi)$; $(\dfrac{\pi}{2} + m2\pi; n\pi)$, $(\alpha + m2\pi; \beta + n\pi)$; $(\pi - \alpha + m2\pi; \beta + n\pi)$, $m, n \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 3. 12: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \tan y - \tan x - \tan x \tan y = 1 \\ \cos 2y + \sqrt{3}\cos 2x = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ 3\tan x = \tan y \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x, y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình:

$$\tan y - \tan x = 1 + \tan x \tan y\ ,$$

Giả sử $1 + \tan x \tan y = 0 \Rightarrow \tan y = \tan x$

$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = 0$: vô lý nên $1 + \tan x \tan y \neq 0$.

Do đó phương trình trên tương đương với

$$\frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan y.\tan x} = 1 \Leftrightarrow \tan(y - x) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$\Leftrightarrow y - x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} + x + k\pi$,

Thay vào phương trình thứ hai :

$$\cos 2(\frac{\pi}{4} + x + k\pi) + \sqrt{3}\cos 2x = -1 \Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + m2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + m\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + (m+k)\pi \text{ (loại)} \\ x = \frac{3\pi}{4} + m\pi \Rightarrow y = \pi + (m+k)\pi \end{array}\right. ;$$

Vậy nghiệm của hệ $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + m\pi \\ y = \pi + (m+n)\pi \end{cases}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện : $x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ phương trình thứ hai

$$3\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} \Leftrightarrow 3\sin x\cos y = \sin y\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin y\cos x = \frac{3}{4}.$$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x.\cos y = \frac{1}{4} \\ \sin y.\cos x = \frac{3}{4} \end{cases}$

Cộng , trừ vế theo vế thì được

$$\sin(x + y) = 1 \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} + m2\pi.$$

$$\sin(x - y) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x - y = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \text{ hay } x - y = \frac{7\pi}{6} + n2\pi.$$

Vậy nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (m+n)\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + (m-n)\pi \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + (m+n)\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + (m-n)\pi \end{cases}, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 3. 13: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \tan x + \cot x = 2\sin(y + \frac{\pi}{4}) \\ \tan y + \cot y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện : $x, y \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Phương trình thứ nhất tương đương

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = 2\sin(y + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin 2x \sin(y + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + m\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + n2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \\ y = -\frac{3\pi}{4} + n2\pi \end{cases}.$$

Phương trình thứ hai tương đương: $\sin 2y \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = 1 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sin 2y = -1 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + m2\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + m2\pi \\ y = -\frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}$$

Kết hợp ta được nghiệm $(\frac{3\pi}{4} + m2\pi; -\frac{3\pi}{4} + n2\pi)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

b) Từ hệ suy ra $\sin x + \cos x + \sin y + \cos y = 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(y + \frac{\pi}{4}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + m2\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + n2\pi \end{cases}$$

Thử lại đúng nên đó là nghiệm của hệ phương trình .

Bài toán 3. 14: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 \\ x + y + z = \pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0 \\ x + y + z = \pi \\ \dfrac{\sin x}{1} = \dfrac{\sin y}{2} = \dfrac{\sin z}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

a) Để ý rằng, nếu x là nghiệm thì – x cũng là nghiệm.

Do đó ta có thể xét $x\ ,\ y\ ,\ z \geq 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$1 + 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = 0.$$

Phương trình thứ hai tương đương

$$1 - 2\cos x\cos y\cos z = 1 \Leftrightarrow \cos x\cos y\cos z = 0.$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = m2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ z = \dfrac{\pi}{2} - (n + 2m)\pi \end{cases}$

và các hoán vị của bộ ba này , $m, n \in \mathbf{Z}$.

b) Ta có $(\pi; 0; 0)$; $(0; \pi; 0)$; $(0; 0; \pi)$ là nghiệm của hệ.

Ta xét $x , y , z > 0$. Từ giả thiết ta có thể coi x , y , z lần lượt là ba góc một tam giác XYZ .

Xét tam giác ABC có $b = CA = 2$, $c = AB = \sqrt{3}$, và $a = BC = 1$.

Thế thì $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0 \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{2}$;

Tương tự, ta được : $C = \dfrac{\pi}{3}$; $A = \dfrac{\pi}{6}$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ thì $YZ = 2R\sin x$; $ZX = 2R\sin y$; $XY = 2R\sin z$.

Sau đó từ phương trình thứ ba của hệ suy ra

$$\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{2} = \frac{\sin z}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2R\sin x}{a} = \frac{2R\sin y}{b} = \frac{2R\sin z}{c}$$

Nên $\frac{YZ}{BC} = \frac{ZX}{CA} = \frac{XY}{AB}$.

Do đó hai tam giác ABC và XYZ đồng dạng nên $x = \frac{\pi}{6}$; $y = \frac{\pi}{2}$; $z = \frac{\pi}{3}$.

Vậy , nghiệm của hệ: $(\pi; 0; 0)$; $(0; \pi; 0)$; $(0; 0; \pi)$; $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3})$.

Bài toán 3. 15: Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} \sin x = \sin^3 y + \sin y + 1 \\ \sin y = \sin^3 z + \sin z + 1 \\ \sin z = \sin^3 x + \sin x + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt a =sinx, b = siny, c= sinz thì hệ: $\begin{cases} a = b^3 + b + 1 \\ b = c^3 + c + 1 \\ c = a^3 + a + 1 \end{cases}$

Vì hàm số $f(t) = t^3 + t + 1$ đồng biến trên trên $D = \mathbf{R}$

Nên hệ $\begin{cases} a = b^3 + b + 1 \\ b = c^3 + c + 1 \\ c = a^3 + a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = f(b) \\ b = f(c) \\ c = f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = f(a) \end{cases}$

Do đó: $a = a^3 + a + 1 \Leftrightarrow a = -1$ nên có $a = b = c = -1$.

Vậy nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $y = -\frac{\pi}{2} + m2\pi$, $z = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện sinx, cosx, siny, cosy $\neq 0$ và xy>0. Nhân 2 PT thì

$$\left(\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}}\right)\left(\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}}\right)$$
$$= 20\sqrt{\frac{20xy}{(x+y)^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và AM–GM:

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\ge\left(|\sin x\cos x|+\frac{1}{|\sin x\cos x|}\right)^2$$

$$\ge\left(\frac{|\sin 2x|}{2}+\frac{1}{2|\sin 2x|}+\frac{3}{2|\sin 2x|}\right)^2\ge\left(1+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Tương tự $\left(\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)\ge\left(\frac{5}{2}\right)^2$ nên

$$\left(\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}}\right).\left(\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}\right)$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}\right)\left(\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\left(\frac{5}{4}\right)^4}=10\ge 20\sqrt{\frac{20xy}{(x+y)^2}}$$

Dấu = xảy ra khi $|\sin 2x|=1$, $x=y$ nên nghiệm $x=y=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\, k\in\mathbb{Z}$.

Bài toán 3. 16: Xét bất phương trình

$$x^2+2x(\cos y-\sin y)+2\sin^2 y\ge 0.$$

a) Tìm y để bất phương trình đúng với mọi x.

b) Tìm y để bất phương trình đúng với mọi $x\ge 0$.

Hướng dẫn giải:

a) Vế trái của bất phương trình là tam thức bậc hai theo x có hệ số theo x^2 là $1>0$, bất phương trình đúng với mọi $x \Leftrightarrow \Delta'<0$

$\Leftrightarrow (\cos y-\sin y)^2-2\sin^2 y<0 \Leftrightarrow 1-\sin 2y-(1-\cos 2y)<0$

$\Leftrightarrow \sin 2y-\cos 2y>0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2y-\frac{\pi}{4})>0$

$\Leftrightarrow \sin(2y-\frac{\pi}{4})>0 \Leftrightarrow k2\pi<2x-\frac{\pi}{4}<\pi+k2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+k2\pi<2x<\frac{5\pi}{4}+k2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{8}+k\pi<x<\frac{5\pi}{8}+k\pi,\ k\in Z$.

b) Điều kiện đề bài được thỏa, ngoài trường hợp ở câu a), ta còn có trường hợp:

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ af(0)>0\\ \frac{S}{2}-0>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(2y-\frac{\pi}{4}\right)\le 0\\ \sin^2 y>0\\ \sin y-\cos y>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3\pi}{8} + k2\pi \le y \le \dfrac{\pi}{8}k2\pi \\ y \ne k\pi \\ \dfrac{\pi}{4} + k2\pi < y < \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{5\pi}{8} + k2\pi < y < \dfrac{9\pi}{8} + k2\pi$ và $y \ne \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 3. 17: Tìm a để bất phương trình

$$\sin^5x + \cos^5x - a(\sin x + \cos x) \ge \sin x\cos x(\sin x + \cos x)$$

nghiệm đúng với mọi x thuộc $[0; \dfrac{\pi}{4}]$.

Hướng dẫn giải:

Bất phương trình tương đương

$$(\sin x + \cos x)(1 - a - 2\sin x\cos x - \sin^2x\cos^2x) \ge 0. \ (1)$$

Với $x \in [0; \dfrac{\pi}{4}]$: $\sin x + \cos x > 0$. Do đó (1) trở thành

$$1 - a - 2\sin x\cos x - \sin^2x\cos^2x \ge 0$$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 4\sin 2x + 4a - 4 \le 0$ (2)

đặt $t = \sin 2x$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 4a - 4 \le 0, t \in [0;1]$

$\Leftrightarrow 4a \le -t^2 + 4t + 4$, $t \in [0; 1]$.

Xét hàm số bậc hai: $f(t) = -t^2 + 4t + 4$, $0 \le t \le 1$ có $a < 0$ và hoành độ đỉnh $t = 2 < 1$ nên điều kiện đề bài thỏa mãn khi :

$$4a \le \max_{[0;1]} f(t) = f(1) \Leftrightarrow 4a \le 4 \Leftrightarrow a \le 1.$$

Bài toán 3. 18: Tìm m để bất phương trình

$2\sin^2x - m\cos x - 3 \le 0$ được nghiệm đúng với mọi $x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$.

Hướng dẫn giải:

Bất phương trình đề bài tương đương với

$$2(1 - \cos^2x) - m\cos x - 3 \le 0$$

$\Leftrightarrow 2\cos^2x + m\cos x + 1 \ge 0$.

Đặt $t = \cos x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t < 1$

$$f(t) = 2t^2 + mt + 1 \ge 0, \ a = 2 > 0.$$

Điều kiện $f(t) \ge 0$ thỏa mãn với mọi $t \in (0; 1)$:

Xét $\Delta \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 \le 0 \Leftrightarrow |m| \le 2\sqrt{2}$;

Xét $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(0) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{2} \\ 1 > 0 \\ -\dfrac{m}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt{2}$;

Xét $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{2} \\ m + 3 > 0 \\ -\dfrac{m}{4} - 1 > 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy điều kiện: $m \ge -2\sqrt{2}$.

Bài toán 3. 19: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} \sin^2 x + m\tan y = m \\ \tan^2 y + m\sin x = m \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $y \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt u = sinx; v = tany, $|u| \le 1$.

Hệ trở thành $\begin{cases} u^2 + mv = m \ (1) \\ v^2 + mu = m \ (2) \end{cases}$.

Lấy (1) trừ (2) $\Rightarrow (u - v)(u + v - m) = 0$

$\Rightarrow u = v$ hay $u + v - m = 0$.

Với $u = v$: thay vào (1) $\Rightarrow u^2 + mu - m = 0$ (3) .

Hệ có nghiệm khi (3) có nghiệm $\in [-1; 1]$

$\Leftrightarrow f(1).f(-1) < 0$ hoặc $\begin{cases} af(1) \ge 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ \Delta \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} + 1 > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$ hoặc $\begin{cases} 1 \ge 0 \\ 1 - 2m \ge 0 \\ m^2 + 4m \ge 0 \\ 2 - m > 0 \\ -m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 0$.

Với $u + v - m = 0 \Rightarrow v = m - u$: thay vào (1) thì được phương trình
$$u^2 - mu + m^2 - m = 0.$$

$\Delta = -3m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{4}{3}$: hệ đã có nghiệm ở phần trên.

Vậy hệ có nghiệm khi $m \geq 0$.

Bài toán 3. 20: Tìm tham số để hệ phương trình có nghiệm
$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x = a \\ \cos x + \cos 2x = b \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} \sin x + \sin 2x = a \\ \cos x + \cos 2x = b \end{cases}$

Suy ra $(a - \sin 2x)^2 + (b - \cos 2x)^2 = 1$

Và $\begin{cases} \sin x + \sin 2x = a \\ \cos x + \cos 2x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x(1 + 2\cos x) = a & (1) \\ \cos x(1 + 2\cos x) = b + 1 & (2) \end{cases}$

Nếu $b = -1$ từ (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$

Với $\cos x = 0$ từ (1) $\Rightarrow a = \pm 1$; Với $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ từ (1) $\Rightarrow a = 0$

Vậy $(a = \pm 1; b = -1)$, $(a = 0; b = 0)$

Nếu $b + 1 \neq 0$:

Do đó $\tan x = \dfrac{a}{b+1}$ nên $\sin 2x = \dfrac{2a(b+1)}{a^2 + (b+1)^2}, \cos 2x = \dfrac{(b+1)^2 - a^2}{a^2 + (b+1)^2}$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{2a(b+1)}{a^2 + (b+1)^2}\right)^2 + \left(b - \frac{(b+1)^2 - a^2}{a^2 + (b+1)^2}\right)^2 = 1$$

hay $\left(\dfrac{a(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + (b+1)^2}\right)^2 + \left(\dfrac{(b+1)(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + (b+1)^2}\right)^2 = 1$

hay $(a^2 + b^2 - 1)^2 = a^2 + (b+1)^2$.

Đảo lại nếu a, b thỏa $(a^2 + b^2 - 1)^2 = a^2 + (b+1)^2$ thì chọn x thỏa mãn:

$$\sin x = \frac{a(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + (b+1)^2}, \cos x = \frac{(b+1)(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + (b+1)^2}$$

Nên có $\sin 2x = \dfrac{2a(b+1)}{a^2 + (b+1)^2}, \cos 2x = \dfrac{(b+1)^2 - a^2}{a^2 + (b+1)^2}$

Suy ra hệ thỏa mãn.

Vậy điều kiện của a và b để hệ phương trình có nghiệm :

$$(a^2 + b^2 - 1)^2 = a^2 + (b+1)^2 .$$

Bài toán 3. 21: Tìm tham số để hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} \cos x = a.\cos^3 y \\ \sin x = a.\sin^3 y \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Xét $a = 0$ thì hệ: $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ vô nghiệm .

Xét $a \neq 0$, từ hệ phương trình đã cho suy ra

$$\begin{cases} \cos^2 x = a^2 \cos^6 y \\ \sin^2 x = a^2 \sin^6 y \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 = \cos^2 x + \sin^2 x = a^2 (\cos^6 x + \sin^6 x)$

$\Leftrightarrow 1 = a^2 (1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2y) = a^2 (\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\cos 4y)$

$\Leftrightarrow \cos 4y = \dfrac{3a^2 - 4}{a^2}$.

Phương trình này có nghiệm khi $\left|\dfrac{3a^2 - 4}{a^2}\right| \le 1 \Leftrightarrow 1 \le |a| \le \sqrt{2}$.

Thử lại hệ cho có nghiệm.

Bài toán 3. 22: Giải bất phương trình $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \le x$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ nên đặt $x = \cos 2t,\ t \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$.

Bất phương trình trở thành

$$\sqrt{1 + \cos 2t} - \sqrt{1 - \cos 2t} \le \cos 2t$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|\cos t| - \sqrt{2}\,|\sin t| \le \cos^2 t - \sin^2 t$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\cos t - \sin t) \le (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)$

$\Leftrightarrow \cos(t + \dfrac{\pi}{4})(\cos(t - \dfrac{\pi}{4}) - 1) \ge 0 \Leftrightarrow \cos(t + \dfrac{\pi}{4}) \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} \le 2t \le \pi \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$.

Nghiệm của bất phương trình là: $-1 \le x \le 0$.

Bài toán 3. 23: Giải bất phương trình

$$\left|4(\sqrt{(1-x^2)^3}-x^3)+3(x-\sqrt{1-x^2})\right|\le\sqrt{2}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện xác định $-1 \le x \le 1$ nên đặt $x = \sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Do đó ta có $\left|4(\sqrt{(1-x^2)^3}-x^3)+3(x-\sqrt{1-x^2})\right|$

$=\left|4(\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}-\sin^3 t)+3(\sin t-\sqrt{1-\sin^2 t})\right|$

$=\left|4(\sqrt{\cos^6 t}-\sin^3 t)+3(\sin t-\sqrt{\cos^2 t})\right|$

$=\left|4(\cos^3 t-\sin^3 t)+3(\sin t-\sin^3 t)\right|$

$=\left|(4\cos^3 t-3\cos t)+3(\sin t-\sin^3 t)\right|$

$=\left|\cos 3t+\sin 3t\right|=\left|\sqrt{2}\sin(3t+\frac{\pi}{4})\right|\le\sqrt{2}$.

Vậy $\left|4(\sqrt{(1-x^2)^3}-x^3)+3(x-\sqrt{1-x^2})\right|\le\sqrt{2}$ nên bất phương trình có nghiệm $-1 \le x \le 1$.

Bài toán 3. 24: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(1+3y)=8 \\ x(y^3-1)=6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Do $x \ne 0$ nên hệ: $\begin{cases} \dfrac{8}{x^3}-3y=1 \\ y^3-3\dfrac{2}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3-3y=1 \\ y^3-3t=1 \end{cases}$ $(t=\dfrac{2}{x})$

suy ra $(t-y)(t^2+ty+y^2+3)=0$

nên $t = y$ do đó $y^3 - 3y = 1$ (1)

Xét $-2 \le y \le 2$, đặt $t = 2\cos a$, $a \in [0; \pi]$

(1): $8\cos^3 a - 6\cos a = 1$ hay $\cos 3a = \dfrac{1}{2}$

Từ đó giải và chọn 3 nghiệm a là $\dfrac{\pi}{9};\dfrac{5\pi}{9};\dfrac{7\pi}{9}$

Vì (1) là phương trình bậc 3 nên có đúng 3 nghiệm y

$$2\cos\frac{\pi}{9}; 2\cos\frac{5\pi}{9}; 2\cos\frac{7\pi}{9}$$

suy ra 3 nghiệm (x; y) của hệ.

Bài toán 3. 25: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 3z^2x - 3z + z^3 = 0 \\ y - 3x^2y - 3x + x^3 = 0 \\ z - 3y^2z - 3y + y^3 = 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Vì $x, y, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ không là nghiệm nên hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(1-3z^2) = 3z - z^3 \\ y(1-3x^2) = 3x - x^3 \\ z(1-3y^2) = 3y - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3z - z^3}{1 - 3z^2} \\ y = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \\ z = \dfrac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \end{cases}$$

Đặt $x = \tan\alpha$; $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $y = \tan 3\alpha$; $z = \tan 9\alpha$; $x = \tan 27\alpha$.

Từ đó, (x; y; z) là nghiệm của hệ thì $\tan\alpha = \tan 27\alpha$

$\Rightarrow 26\alpha = k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{26}; k \in [-12; 12], k \notin \mathbb{Z}$.

Thử lại, hệ có 25 nghiệm

$$x = \tan\frac{k\pi}{26}, \ y = \tan\frac{k3\pi}{26}, z = \tan\frac{k9\pi}{26}, k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 12 .$$

Bài toán 3. 26: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Từ các phương trình của hệ phương trình đã cho suy ra $x, y, z \neq \pm 1$.
Nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x = (1 - x^2)y \\ 2y = (1 - y^2)z \\ 2z = (1 - z^2)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}$$

Đặt $x = \tan t$ thì $y = \tan 2t$; $z = \tan 4t$; $x = \tan 8t$.

Ta được phương trình: $\tan 8t = \tan t \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{7}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$.

các nghiệm t này thích hợp nên suy ra các nghiệm x, y, z.

Bài toán 3. 27: Giải hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \geq 6, xz \max \end{cases}$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$; $z = 3\cos\beta$, $t = 3\sin\beta, \alpha, \beta \in [0; 2\pi]$ thì

$$xt + yz \geq 6 \Leftrightarrow 6(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 6\sin(\alpha + \beta) \geq 6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Lúc đó, $P = xz = 6\cos\alpha\cos\beta = 3[\cos s(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
$= 3\cos(\alpha - \beta)$

đạt giá trị lớn nhất khi $\cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$.

Suy ra $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$; $z = t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ: $x = y = \sqrt{2}$, $z = t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài toán 3. 28: Cho a, b, c là các số dương cho trước.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = a + b + c & (1) \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc & (2) \\ x, y, z > 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Ta có (2): $4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}$.

Đặt $\frac{a}{\sqrt{yz}} = x_1$; $\frac{b}{\sqrt{zx}} = y_1$; $\frac{c}{\sqrt{xy}} = z_1$ thì $4 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1$,

trong đó $0 < x_1 < 2$, $0 < y_1 < 2$, $0 < z_1 < 2$.

Bằng cách xem phương trình mới là phương trình bậc hai theo z_1, biệt số $(4 - x_1^2)(4 - y_1^2)$ gợi ý rằng ta đặt

$x_1 = 2\sin u$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$ và $y_1 = 2\sin v$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$ nên có

$$4 = 4\sin^2 u + 4\sin^2 v + z_1^2 + 4\sin u.\sin v.z_1$$

Như thế $(z_1 + 2\sin u \,.\, \sin v)^2 = 4(1 - \sin^2 u)(1 - \sin^2 v)$.

hay $|z_1 + 2\sin u \,.\, \sin v| = |2\cos u \,.\, \cos v|$.

Vì z_1, sinu, sinv đều dương nên bỏ dấu giá trị tuyệt đối thì:

$$z_1 = 2(\cos u \,.\, \cos v - \sin u \,.\, \sin v) = 2\cos(u+v).$$

do đó $2\sin u \,.\, \sqrt{yz} = a$, $2\sin v \,.\, \sqrt{zx} = b$,

$$2(\cos u \,.\cos v - \sin u \,.\sin v)\sqrt{xy} = c.$$

Từ (1): $x + y + z = a + b + c$ thì

$$(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u)^2 + (\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z})^2 = 0$$

nên $\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \sqrt{x}\dfrac{y_1}{2} + \sqrt{y}\dfrac{x_1}{2}$.

Vì thế $\sqrt{z} = \sqrt{x}\dfrac{b}{2\sqrt{zx}} + \sqrt{y}\dfrac{a}{2\sqrt{yz}}$ nên $z = \dfrac{a+b}{2}$.

Tương tự có $y = \dfrac{c+a}{2}$, $x = \dfrac{b+c}{2}$.

Rõ ràng bộ ba $(x; y; z) = (\dfrac{b+c}{2}; \dfrac{c+a}{2}; \dfrac{a+b}{2})$ thoả hệ phương trình đã cho. Vậy đó là nghiệm duy nhất.

Bài toán 3. 29: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y^2 - 2y = 0 \\ 36(x\sqrt{x} + 3y^3) - 27(4y^2 - y) + (2\sqrt{3} - 9)\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \geq 0$. Ta có

$$x + 3y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2 + (3y-1)^2 = 1$$

Nên tồn tại số $t \in [0; \pi]$ sao cho $\sqrt{3x} = \sin t$ và $3y - 1 = \cos t$.

Phương trình 2:

$$36(x\sqrt{x} + 3y^3) - 27(4y^2 - y) + (2\sqrt{3} - 9)\sqrt{x} - 1 = 0$$

Trở thành $4\cos^3 t - 3\cos t + 4\sqrt{3}\sin^3 t - 3\sqrt{3}\sin t + 2.\sin t = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(3t - \frac{\pi}{6}) = \sin t$$

Vì $t \in [0; \pi]$ nên chọn $t = \dfrac{\pi}{12}; \dfrac{7\pi}{24}; \dfrac{19\pi}{24}$.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ

$$(\frac{2-\sqrt{3}}{12}; \frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}); (\frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}; \frac{4+\sqrt{2(4+\sqrt{2}-\sqrt{6})}}{12})$$

và $(\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24}; \frac{4-\sqrt{2(4-\sqrt{2}+\sqrt{6})}}{12})$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 3. 1: Giải các bất phương trình sau

a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cot x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\cos x < \sin x$ d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x > 0$.

Hướng dẫn

a) Vẽ đường tròn lương giác và biểu diễn cung góc.

Kết quả $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Kết quả $k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) Kết quả $\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) Kết quả $-\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 3. 2: Giải các bất phương trình sau

a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 > 0$ b) $\cos^2 - 3\cos x + 2 \leq 0$

Hướng dẫn

a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin x < \frac{1}{2}$ hay $\sin x > 1$.

Kết quả $\frac{5\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Kết quả $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 3. 3: Giải các bất phương trình sau

a) $\cos x + \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{2}$ b) $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq \frac{5}{2}$

Hướng dẫn

a) Điều kiện $\cos x \neq 0$, chuyển vế và quy đồng phân số.

Kết quả $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Kết quả $k2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 3. 4: Giải các bất phương trình sau

a) $\sin x < \cos^2 x$ b) $\frac{1}{\cos 2x} \leq \sqrt{2}$

Hướng dẫn

a) Kết quả $-\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+(2k+1)\pi < x < \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+2(k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Xét $\cos 2x < 0$ thì BPT thỏa mãn.

Xét $\cos 2x > 0$ thì BPT $\Leftrightarrow \cos 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 3. 5: Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{2}{11} \leq \frac{2\sin x+\cos x+3}{2\cos x-\sin x+4} \leq 2$ b) $\left|\frac{\cos 3x+3\sin 3x+1}{\cos 3x+2}\right| \leq \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$.

Hướng dẫn

a) Mẫu thức luôn luôn dương. Kết quả mọi x

b) Đưa về bậc nhất theo sin3x và cos3x. Kết quả mọi x

Bài tập 3. 6: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}\cos 6x+\cos 8x=0\\ \cos 3x=2\sin^2 2x\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sin x.\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \cos x.\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

Hướng dẫn

a) PT(1) $\Leftrightarrow 2\cos 7x.\cos x = 0$. Kết quả $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Kết quả $x=(\frac{1}{6}+\frac{m}{2}+k)\pi; y=(\frac{1}{3}+\frac{m}{2}-k)\pi$, m, $k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 3. 7: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}\sin x.\sin y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \tan x.\tan y=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sin x+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos^2 x+\sin^2 y=\frac{5}{4}\end{cases}$

Hướng dẫn

a) Đưa về $\cos(x+y)=\sin 15^0$, $\cos(x-y)=\cos 15^0$

b) Kết quả $x=k\pi; y=\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi; y=\frac{\pi}{2}+n\pi$; $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi; y=\frac{\pi}{2}+n\pi$, k, $n \in \mathbb{Z}$

Bài tập 3. 8: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}\tan x + 3\tan y = 0\\ 4x + 2y = 5\pi\end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x + 6\sin y = 3 + 12\sin^2 y \\ 4\sqrt{3}\cos x + 2\sin y = 7 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Rút thế.

Kết quả $(\frac{\pi}{3} + k\pi, 11\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{2})$; $(-\frac{\pi}{3} + k\pi, 19\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{2})$.

b) Kết quả $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$

Bài tập 3. 9: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \sin x + \sin 2x = 0 \\ \cos x + \cos 2x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$.

Hướng dẫn

a) Biến đổi thành tích số.

Kết quả $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$; $x = \pi + k2\pi$

b) Kết quả $(\frac{\pi}{4} + (m+n)2\pi, \frac{\pi}{4} + m2\pi)$; $(\frac{5\pi}{4} + (m+n)2\pi, \frac{5\pi}{4} + m2\pi)$.

Bài tập 3. 10: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x\cos y \\ \cos^2 x = \sin x\sin y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos x = \cos y\cos z \\ \cos y = \cos x\cos z + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\sin z \\ \cos z = \cos x\cos y + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\sin y \end{cases}$.

Hướng dẫn

a) Cộng vế theo vế thì có $\cos(x - y) = 1$.

Trừ vế theo vế thì có $\cos(x + y) = -\cos 2x$.

Kết quả $(\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} + n2\pi)$.

b) Kết quả $(m2\pi; n2\pi; k2\pi)$.

Bài tập 3. 11: Với giá trị m nào thì hệ phương trình có nghiệm

a) $\begin{cases} x + y = m \\ 8\cos x.\cos y.\cos(x-y) + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin x + \sin 2x = m \\ \cos x + \cos 2x = m \end{cases}$

Hướng dẫn

a) PT(1) suy ra $y = m - x$ rồi thế vào PT(2).

Kết quả . $m = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Kết quả $m = 0$, $m = -1$, $m = (1 \pm \sqrt{3})/2$.

Bài tập 3. 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+\frac{1}{x}) = 4(y+\frac{1}{y}) = 5(z+\frac{1}{z}) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn

Nhận xét x,y,z cùng dấu nên xét x, y, z >0.

Dùng lượng giác hóa. Đặt $x = \tan\frac{A}{2}; y = \tan\frac{B}{2}; z = \tan\frac{C}{2}$

Kết quả $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1), (-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -1)$.

Chuyên đề 4: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Quy tắc cộng: Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Phương án A_i có thể thực hiện theo n_i cách, thì công việc có thể thực hiện theo tổng $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách.

Quy tắc nhân: Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Công đoạn A_i có thể thực hiện theo n_i cách, thì công việc có thể thực hiện theo tích $n_1n_2\ldots n_k$ cách.

Hoán vị: Cho tập hợp A có n phần tử, $n \geq 1$. Một hoán vị của n phần tử của A là một bộ sắp thứ tự n phần tử này, mỗi phần tử có mặt đúng 1 lần. Số hoán vị n phần tử: $P_n = n!$

Chỉnh hợp: Cho tập hợp A có n phần tử, $n \geq 1$ và số nguyên dương k, $1 \leq k \leq n$. Một chỉnh hợp n chập k phần tử của tập A là một bộ sắp thứ tự k phần tử từ n phần tử của A. Số chỉnh hợp n chập k:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Tổ hợp: Cho tập hợp A có n phần tử, $n \geq 1$ và số nguyên k: $0 \leq k \leq n$. Một tổ hợp n chập k phần tử của tập A là một tập hợp con của A có k phần tử. Số tổ hợp n chập k (số tập con k phần tử) :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Hoán vị lặp, chỉnh hợp lặp, tổ hợp lặp

Cho tập E có n phần tử, ta gọi n- tập E.

Hình thành từ tập $E = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$

Số các r– hoán vị lặp là $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$.

Số các r– chỉnh hợp lặp là n^r.

Số các r– tổ hợp lặp là $C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^{r}$.

Thiết lập ánh xạ, song ánh

- Ánh xạ f: $A \to B$ khi mỗi phần tử a thuộc A đều có 1 tương ứng duy nhất b thuộc B, b gọi là ảnh của a: $b = f(a)$.
- Đơn ánh f: $A \to B$ khi f là ánh xạ mà hai phần tử khác nhau bất kỳ thuộc A đều có hai ảnh khác nhau trong B.
- Toàn ánh f: $A \to B$ khi f là ánh xạ mà mỗi phần tử b thuộc B đều tồn tại phần tử a thuộc A để $b = f(a)$.
- Song ánh f: $A \to B$ khi f vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

Cho ánh xạ f từ tập hữu hạn A vào tập hữu hạn B

Nếu f đơn ánh thì số phần tử: $|A| \le |B|$

Nếu f toàn ánh thì số phần tử: $|A| \ge |B|$

Nếu f song ánh thì số phần tử: $|A| = |B|$.

Phương pháp gộp vào và loại đi: Cho một n– tập E các phần tử và một N– tập các tính chất $p_1, p_2, ..., p_N$ mà các phần tử của E có p_i hay không có $\overline{p_i}$ tính chất đó thì số phần tử:

$$n(\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_N}) = n - \sum_{i=1}^{N} n(p_i) + \sum_{1\le i<j\le N} n(p_i, p_j)$$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le N} n(p_i, p_j, p_k) + ... + (-1)^N . n(p_1, p_2, ..., p_N)$$

Đếm số phần tử của hợp các tập hợp

– Với 2 tập A, B thì: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

– Với 3 tập A, B, C thì:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

– Tổng quát với n tập:

Cho $A_1, ..., A_n$ là n tập hợp hữu hạn ($n \ge 2$) thì:

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<k\le n}^{n} |A_i \cap A_k| + \sum_{1\le i<k<\ell\le n}^{n} |A_i \cap A_k \cap A_\ell|$$

$$+ ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$$

Xác suất: Giả sử phép thử T có không gian mẫu là Ω và các kết quả của T là đồng khả năng.

Nếu A là một biến cố và Ω_A là tập hợp mô tả A với $\Omega_A \subset \Omega$ thì xác suất của A: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$.

Tính chất: $0 \le P(A) \le 1$ với mọi biến cố A, $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

Biến cố hợp $A \cup B$: Khi biến cố A hoặc biến cố B xảy ra.

Tập mô tả là $\Omega_A \cup \Omega_B$

Biến cố xung khắc: Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

$$\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$$

Quy tắc cộng hai biến cố xung khắc:

Nếu A và B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Tổng quát: Nếu n biến cố đôi một xung khắc $A_1, A_2, ..., A_n$ thì:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Biến cố đối của A: Là biến cố A không xảy ra, kí hiệu $\overline{A}$.

Kết quả: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Biến cố giao $A \cap B$ hoặc AB: Khi hai biến cố A và biến cố B cùng xảy ra. Tập mô tả: $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Biến cố độc lập: Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Quy tắc nhân 2 biến cố độc lập:
Nếu A và B độc lập thì P(AB) = P(A). P(B)
Tổng quát: Nếu k biến cố đôi một độc lập nhau $A_1, A_2, \ldots, A_k$ thì:

$$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1) \,.\, P(A_2) \ldots P(A_k).$$

Xác suất có điều kiện: Xác suất của biến cố A trong điều kiện biến cố B đã xảy ra: $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B) > 0$.

Suy ra $P(AB) = P(A|B).P(B)$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 4. 1: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu
a) Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?
b) Số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

Hướng dẫn giải

a) Gọi số lẻ đang xét gồm 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$ trong đó

$$d \in \{1, 3, 5\};\ a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},\ a \neq 0.$$

Ta có 3 cách chọn d lẻ. Khi d đã chọn thì a còn 5 – 1 = 4 cách chọn. Khi d, a đã chọn thì có 6 – 2 = 4 cách chọn b và khi d, a, b đã chọn thì c có 3 cách chọn. Vậy số số lẻ cần tìm là 3.4.4.3 = 144.

b) Gọi các số có 4 chữ số khác nhau được lập từ 5 số đã cho là $\overline{abcd}$. Có 5 cách chọn a. Khi a đã chọn thì có 5 cách chọn b. Khi a, b đã chọn thì có 6 – 2 = 4 cách chọn c và khi a, b, c đã chọn thì có 3 cách chọn d. Do đó có 5.5.4.3 = 300 số như vậy.
Vậy số số chẵn là 300 – 144 = 156.
Cách khác: xét d = 0 và $d \in \{2;4\}$.

Bài toán 4. 2: Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A và không bắt đầu bởi 125.

Hướng dẫn giải

Đặt $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, a_5 chẵn, $a_i \in A$ và đôi 1 khác nhau.

Vì $a_5 \in \{2,4,6,8\}$ nên có 4 cách chọn.

Do A không chứa số 0 nên $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ có $A_7^4 = 840$ cách.

Do đó có 4 x 840 = 3 360 số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ A.

Ta loại đi các số bắt đầu bởi 125 là các số a = $\overline{125a_4a_5}$ với a_4, a_5 thuộc {2,3,6,7,8} phân biệt và a_5 là số chẵn nên có 3.4 = 12 cách.

Vậy còn lại 3 360 – 12 = 3 348 số theo yêu cầu.

Bài toán 4. 3: Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số trong đó có 3 chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau, mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

Hướng dẫn giải

Gọi A là số các số có 9 chữ số thoả mãn điều kiện đề bài, tính cả các số có chữ số 0 đứng đầu. Có C_5^3 cách chọn 3 chữ số lẻ và có C_5^3 cách chọn 3 chữ số chẵn nên A = $C_5^3.C_5^3$ = 4536000.

Gọi B là số các số có 9 chữ số thoả mãn điều kiện đề bài với chữ số 0 đứng đầu. Có C_5^3 cách chọn 3 chữ số lẻ và có C_4^2 cách chọn 2 chữ số chẵn khác 0, mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần nên B = $C_5^3.C_4^2\dfrac{8!}{2!2!}$ = 604800.

Vậy số các số thoả mãn đề bài là A – B = 3931200

Bài toán 4. 4: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần.

Hướng dẫn giải

Số số tự nhiên có 4 chữ số là: 9.10.10.10 = 9 000

Ta loại đi các số mà có 1 chữ số lặp lại đúng 3 lần

- Xét chữ số 0 lặp lại đúng 3 lần.

  Vì số $\overline{abcd}$, $a \neq 0$ nên phải có dạng $\overline{a000}$ do đó có 9 số.

- Xét chữ số khác 0 lặp lại đúng 3 lần là a.

  Dạng $\overline{xaaa}$ có 8 số vì $x \neq 0$, $x \neq a$

  Dạng $\overline{axaa}, \overline{aaxa}, \overline{aaax}$ đều có 9 số

  Mà có 9 số a khác 0 nên có (8 + 9 .3)9 + 9 = 324 số

  Vậy còn lại: 9 000 – 324 = 8 676 số

Bài toán 4. 5: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau đôi một và chia hết cho 9.

Hướng dẫn giải

Đặt x = $\overline{abc}$ thì x chia hết cho 9 khi tổng các chữ số chia hết cho 9.

Xét {a,b,c} = {0, 4, 5} vì $a \neq 0$ nên có 2 cách chọn, $b \neq a$ nên có 2 cách còn lại là số c. Do đó có 2.2.1 = 4.

Xét {a,b,c} = {1,3,5} thì có 3! = 6 số

Xét {a,b,c} = {2,3,4} thì có 3! = 6 số

Vậy tổng cộng có 4+6+6 = 16 số theo yêu cầu

Bài toán 4. 6: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau đôi một và chia hết cho 15.

Hướng dẫn giải

Đặt x = $\overline{abc}$ thì x chia hết cho 15 ⇔ x chia hết cho 3 và x chia hết cho 5.

Xét c = 5 thì x = $\overline{ab5}$, vì trong 6 chữ số còn lại 0, 1, 2, 3, 7, 9 có 3 số chia hết cho 3, có 2 số chia cho 3 dư 1, có 1 số chia cho 3 dư 2.

– Nếu b chia hết cho 3 thì a chia cho 3 dư 1 nên có 3.2 = 6 số.
– Nếu b chia cho 3 dư 1 thì a chia hết cho 3 và a ≠ 0 nên có 2.2 = 4 số.
– Nếu b chia cho 3 dư 2 thì a chia cho 3 dư 2: loại.

Xét c = 0 thì x = $\overline{ab0}$, vì trong 6 chữ số còn lại 1, 2, 3, 5, 7, 9 có 2 số chia hết cho 3, có 2 số chia cho 3 dư 1, có 2 số chia cho 3 dư 2.

– Nếu b chia hết cho 3 thì a chia cho 3 nên có 2.1 = 2 số.
– Nếu b chia cho 3 dư 1 thì a chia cho 3 dư 2 nên có 2.2 = 4 số.
– Nếu b chia cho 3 dư 2 thì a chia cho 3 dư 1 nên cso 2.2 số.

Vậy tổng cộng có 20 số.

Bài toán 4. 7: Từ các chữ số 0, 2, 4, 5, 8, 9 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số chia hết cho 5 và lớn hơn 2000.

Hướng dẫn giải

Đặt x = $\overline{abcd}$ thì x chia hết cho 5 nên tận cùng là 5 hay 0.

Xét d = 0 thì x = $\overline{abc0}$

– Nếu a, b, c bằng nhau và a ≥ 2 thì có 5 số.
– Nếu a, b, c chỉ có 2 số bằng nhau, a ≥ 2 có $6.C_5^2+5.3-1=74$ số.
– Nếu a, b, c đôi một phân biệt và a ≥ 2 thì có $P_6^3-P_5^2=100$ số.

Xét d = 5 thì x = $\overline{abc5}$.

– Nếu a, b, c bằng nhau và và a ≥ 2 thì có 5 số.
– Nếu a, b, c chỉ có 2 số bằng nhau và a ≥ 2 có $6.C_4^2+3.5=75$ số.
– Nếu a, b, c đôi một phân biệt và a ≥ 2 thì có $P_6^3-P_5^2=100$ số.

Vậy tổng cộng có 359 số.

Bài toán 4. 8: Trong tập S = {1,2,...,280} có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số 2,3,5,7?

Hướng dẫn giải

Gọi A_1 = {k ∈ S / k chia hết cho 2}, A_2 = {k ∈ S / k chia hết cho 3}, A_3 = {k ∈ S / k chia hết cho 5}, A_4 = {k ∈ S / k chia hết cho 7}.

Bài toán yêu cầu tìm $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|$. Ta có:

$|A_1|=\dfrac{280}{2}=140;$ $|A_2|=\left[\dfrac{280}{3}\right]=93$

$|A_3| = \frac{280}{5} = 56$; $|A_4| = \frac{280}{7} = 40$

$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{280}{6}\right] = 46$; $|A_1 \cap A_3| = \frac{280}{10} = 28$

$|A_1 \cap A_4| = \frac{280}{14} = 20$; $|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{15}\right] = 18$

$|A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{21}\right] = 13$; $|A_3 \cap A_4| = \frac{280}{35} = 8$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{30}\right] = 9$; $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \frac{280}{42} = 6$;

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \frac{280}{70} = 4$; $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{105}\right] = 2$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{210}\right] = 1$

Thay vào công thức tổng quát ta tìm được:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 216$

Bài toán 4. 9: Hỏi từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được tất cả bao nhiêu số có 15 chữ số mà trong mỗi số mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần và không có chữ số nào chiếm 3 vị trí liên tiếp trong số?

Hướng dẫn giải

Gọi x là tập gồm tất cả các số thoả mãn yêu cầu đề bài.

A là tập gồm tất cả các số có 15 chữ số được lập nên bởi các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 mà mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần trong số.

Khi đó: $X = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)$

Với A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A mà chữ số i chiếm đúng 3 vị trí liên tiếp (i = 1, 2, 3, 4, 5)

Xét $1 \le k \le 5$ ta chứng minh được:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = \frac{(15-2k)!}{3^{5-k}} \text{ và có } |A| = \frac{15!}{3^5}.$$

Áp dụng công thức: $\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots i_k \le i_n} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|$

$$\Rightarrow |X| = \frac{15!}{3^5} - C_5^1\frac{13!}{3^4} + C_5^2\frac{11!}{3^3} - C_5^3\frac{9!}{3^2} + C_5^4\frac{7!}{3^1} - C_5^5\frac{5!}{3^0}.$$

Bài toán 4. 10: Từ 6 chữ số 1,3,4,5,7,8 lập các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Tính tổng tất cả các số đó.

Hướng dẫn giải

Nếu hàng đơn vị bằng 1 thì có A_5^4 cách lập.

Tương tự a_5 = 3,4,5,7,8 thì cũng có A_5^4 cách lập.

Do đó tổng các chữ số ở hàng đơn vị là:

$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8).A_5^4 = 28.A_5^4 = 3360$

Tương tự cho hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn và hàng vạn thì ta có tổng tất cả các số:

$T = (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)3360 = 11111.3360 = 3732960.$

Tổng quát: Với n chữ số a,b,c,..., ℓ từ 1 đến 9 phân biệt tạo ra các số cho k chữ số khác nhau thì tổng các hoán vị là:

$$T = (n-1)!(a + b + c + ... + \ell)\frac{10^k - \ell}{9}.$$

Bài toán 4. 11: Cho n số từ 1,2,...,n. Có bao nhiêu cách chọn ra m số mà có 2 số liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Nếu $m > \frac{n+1}{2}$ thì bất kì cách chọn m số trong n số 1,2,..,n luôn luôn có 2 số liên tiếp (hơn nửa số số). Vậy số cách chọn là: C_n^m.

Nếu $m \le \frac{n+1}{2}$ thì số cách chọn ra m số từ n số đó là: C_n^m

Ta loại đi số cách chọn m số: $a_1 < a_2 < ... < a_m$ mà không có 2 số liên tiếp. Đặt $b_i = a_i + 1 - i$ thì m số b_i phân biệt.

Vì: $a_m \le n \Leftrightarrow b_m \le n+1-m$. Do đó có C_{n+1-m}^m cách chọn m số b_i từ n+1−m số: 1,2,..., n+1−m. Vậy có: $C_n^m - C_{n+1-m}^m$ cách.

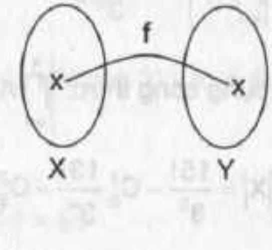
Bài toán 4. 12: Cho tập X có n phần tử và tập Y có m phần tử.

a) Có bao nhiêu ánh xạ f từ X và Y.

b) Có bao nhiêu đơn ánh f từ X vào Y.

c) Có bao nhiêu song ánh f từ X vào Y.

Hướng dẫn giải



a) Mỗi phần tử của X có đúng m cách chọn phần tử tương ứng trong Y. Mà X có n phần tử. Do đó số ánh xạ f từ X vào Y là số cách chọn m phần tử của n phần tử:

m.m...m (n lần) = m^n cách.

b) Để f là 1 đơn ánh thì 2 phần tử khác nhau của X lấy tương ứng 2 phần tử khác nhau của Y. Do đó ta phải có $n \ge m$.

Số đơn ánh f từ X vào Y là số chỉnh hợp n chập m bằng A_n^m.

c) Rõ ràng khi n = m thì đơn ánh f ở câu trên là toàn ánh nên f là song ánh. Vậy số song ánh là $A_n^n = P_n = n!$

Chú ý với $n \ge m$ thì số toàn ánh từ X vào Y: $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k.C_m^k.(m-k)^n$

Bài toán 4. 13: Phương trình

a) x + y + z = 16 có bao nhiêu bộ nghiệm (x,y,z) nguyên dương.

b) x + y + z + t = 20 có bao nhiêu bộ nghiệm (x,y,z,t) tự nhiên.

Hướng dẫn giải

a) Liệt kê 16 số 1 liên tiếp thì có 15 khoảng cách

1–1–1–1–............ –1–1

Mỗi bộ nghiệm (x,y,z) nguyên dương của phương trình

x + y + z = 16 tương ứng với mỗi cách chọn 2 dấu cách từ 15 khoảng cách để có các giá trị của x, y, z là số chữ số 1.

Vậy số bộ nghiệm cần tìm là C_{15}^2.

b) Đặt x = X –1, y = Y – 1, z = Z – 1, t = T – 1 thì X,Y,Z,T nguyên dương và phương trình trở thành :

X – 1 + Y – 1 + Z – 1 + T – 1 = 20

Hay X + Y + Z + T = 24, X,Y,Z,T nguyên dương.

Liệt kê 24 số 1 liên tiếp thì có 23 khoảng cạch

1–1–1–1–............ –1–1

Mỗi bộ nghiệm (X, Y, Z, T) nguyên dương tương ứng với mỗi cách chọn 3 dấu cách từ 23 khoảng cách để có các giá trị của X, Y, Z , T là số chữ số 1.

Vậy số bộ nghiệm cần tìm là C_{23}^3.

Bài toán 4. 14: Có 50 học sinh vào cửa hàng giải khát bán 3 loại : chè, kem và nước dừa, mỗi học sinh gọi một ly. Có bao nhiêu sự lựa chọn ?

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, z lần lượt là số ly chè, kem và nước dừa, ta có x,y,z nguyên và $x,y,z \ge 0$. Ta đưa về đếm phương trình x + y + z = 50 có bao nhiêu bộ nghiệm (x,y,z) tự nhiên.

Mỗi bộ nghiệm (x,y,z) tự nhiên tương ứng song ánh với mỗi dãy nhị phân 52 số gồm 50 số 1 và 2 số 0 xếp liên tiếp: x số 1, số 0, y số 1, số 0 và z số 1 mà x + y + z = 50.

Vì có C_{52}^2 dãy nhị phân như thế nên đó là số bộ nghiệm cần tìm.

Vậy có C_{52}^2 sự lựa chọn.

Bài toán 4. 15: Tìm các số bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên thoả mãn điều kiện

$0 \le a \le 5, 0 \le b \le 6; 0 \le c \le 7$ và $a + b + c = 15$.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu T là tập các bộ (a, b, c) thoả mãn điều kiện đề bài.

Với mỗi bộ $(a, b, c) \in T$. Ta đặt: $f(a, b, c) = (a', b', c')$

Trong đó $a' = 5 - a$, $b' = 6 - b$, $c' = 7 - c$.

Ta có (a', b', c') là bộ ba các số nguyên không âm với

$a' + b' + c' = 18 - (a + b + c) = 3$

Hiển nhiên f là đơn ánh. Ta chứng minh f toàn ánh:

Với mỗi bộ (a', b', c') các số nguyên không âm với $a' + b' + c' = 3$, ta xét bộ (a, b, c) với $a = 5 - a'$, $b = 6 - b'$, $c = 7 - c'$.

Ta có: $a + b + c = 18 - a' - b' - c' = 18 - 3 = 15$.

Vì $a' \ge 0$ nên $a \le 5$.

Vì $a' + b' + c' = 3$, $b', c' \ge 0$ nên $a' \le 3$, do đó $a \ge 0$.

Tương tự ta có $0 \le b \le 6; 0 \le c \le 7$.

Vậy $(a, b, c) \in T$ và $f(a, b, c) = (a', b', c')$, do đó f là song ánh.

Mà số các bộ (a', b', c') các số nguyên không âm có tổng bằng 3 là $C_5^2 = 10$ nên $|T| = 10$.

Bài toán 4. 16: Tìm số các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm có tổng của chúng bằng 15 và có ít nhất một số lớn hơn hay bằng 7.

Hướng dẫn giải

Gọi A, B, C lần lượt là tập tất cả các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm, $a + b + c = 15$ và lần lượt tương ứng với

$a \ge 7, b \ge 7, c \ge 7$. Ta cần tìm $|A \cup B \cup C|$. Ta có:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \quad (*)$$

Với mỗi bộ $(a, b, c) \in A$, ta đặt $f(a, b, c) = (a', b', c')$, trong đó $a' = a - 7$, $b' = b$, $c' = c$. Ta có (a', b', c') là bộ ba các số nguyên không âm với $a' + b' + c' = a + b + c - 7 = 15 - 7 = 8$.

Vì f song ánh nên $|A| = C_{10}^2 = 45$. Tương tự $|B| = |C| = 45$.

Với mỗi bộ $(a, b, c) \in A \cap B$, ta đặt $g(a, b, c) = (a', b', c')$.

Trong đó $a' = a - 7$, $b' = b - 7$, $c' = c$. Ta có (a', b', c') là bộ ba các số nguyên không âm $a + b + c - 14 = 15 - 14 = 1$.

Vì g là song ánh nên $|A \cap B| = C_3^2 = 3$.

Tương tự $|B \cap C| = |A \cap C| = 3$

Vì $A \cap B \cap C = \varnothing$, do đó $|A \cap B \cap C| = 0$

Vậy: $|A \cup B \cup C| = 45 + 45 + 45 - 3 - 3 - 3 + 0 = 126$.

Bài toán 4. 17: Cho trước số nguyên dương n và k. Phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ có bao nhiêu bộ nghiệm $(x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k)$ nguyên không âm.

Hướng dẫn giải

Gọi X là tập hợp tất cả các bộ nghiệm $(x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k)$ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, tức là $x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k$ là các số nguyên không âm và có tổng bằng n. Gọi Y là tập hợp các dãy nhị phân có n + k – 1 kí tự, trong đó có n kí tự 1 và k – 1 kí tự 0.

Ta thiết lập một song ánh từ X đến Y.

Với mỗi bộ $(x_1; x_2;\ldots; x_k) \in X$ được tương ứng với một dãy nhị phân có n + k –1 kí tự, trong đó có n kí tự 1 và k–1 kí tự 0, do đó là một phần tử của Y. Gọi f là phép tương ứng đó, thì f là một ánh xạ từ X đến Y, hơn nữa f là đơn ánh.

Với mỗi dãy n +k – 1 kí tự với n kí tự 1 và k – 1 kí tự 0, khi ta đếm từ trái sang phải có x_1 số 1, số 0, x_2 số 1, số 0, x_3 số 1,..., x_{k-1} số 1, số 0 và x_k số 1 thì dãy đó sẽ ứng với bộ $(x_1; x_2;\ldots; x_k) \in X$ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ nên f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Ta có mỗi dãy nhị phân có n + k – 1 kí tự, trong đó có n kí tự 1 và k – 1 kí tự 0, tương ứng với cách chọn k –1 vị trí trong n + k – 1 vị trí để ghi số 0. Do đó số phần tử $|Y| = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Vậy $|X| = |Y| = C_{n+k-1}^{k-1}$ tức là phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ có C_{n+k-1}^{k-1} bộ nghiệm $(a_1 ; a_2 ;\ldots; a_k)$ nguyên không âm.

Bài toán 4. 18: Cho trước số nguyên dương n và k. Phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ có bao nhiêu bộ nghiệm $(x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k)$ nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $n \geq k$. Gọi X là tập hợp tất cả các bộ nghiệm $(x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k)$ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, tức là $x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k$ là các số nguyên dương và có tổng bằng n. Gọi Y là tập hợp các dãy nhị phân có n +k –1 kí tự gồm n kí tự 1 và k –1 kí tự 0.

Ta thiết lập một song ánh từ X đến Y.

Với mỗi bộ nghiệm $(x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k) \in X$ được tương ứng với một dãy nhị phân có n + k –1 kí tự gồm n kí tự 1 và k –1 kí tự 0, do đó là một phần tử của Y. Gọi f là phép tương ứng đó, thì f là một ánh xạ từ X đến Y, hơn nữa f là đơn ánh.

Với mỗi dãy n +k –1 kí tự gồm n kí tự 1 và k –1 kí tự 0, khi ta đếm từ trái sang phải có x_1 số 1, x_2 số 1, x_3 số 1,..., x_{k-1} số 1 và x_k số 1 thì dãy đó sẽ ứng với bộ $(x_1 ; x_2 ;\ldots; x_k) \in X$ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ nên f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Ta có mỗi dãy nhị phân có n +k –1 kí tự gồm n kí tự 1 và k –1 kí tự 0, tương ứng với mỗi cách chọn k –1 vị trí khoảng cách nối trong n – 1 vị trí khoảng cách nối giữa 2 kí tự 1. Do đó số phần tử $|Y| = C_{n-1}^{k-1}$.

Vậy $|X| = |Y| = C_{n-1}^{k-1}$ tức là phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ có C_{n-1}^{k-1} bộ nghiệm $(a_1 ; a_2 ;...; a_k)$ nguyên dương.

Cách khác: đặt $a_1 = x_1 - 1$, $a_2 = x_2 - 1$,..., $a_k = x_k - 1$ thì a_1, a_2,..., a_k nguyên không âm và thỏa mãn phương trình $a_1 + a_2 + ... + a_k = n - k$ nên theo bài toán trên thì có $C_{n-k+k-1}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$ bộ nghiệm $(a_1 ; a_2 ;...; a_k)$ tự nhiên tức là có C_{n-1}^{k-1} bộ nghiệm $(x_1 ; x_2 ;...; x_k)$ nguyên dương.

Bài toán 4. 19: Cho trước số nguyên dương n và số nguyên dương r thỏa mãn $r < n - r + 1$. Có bao nhiêu tập con A của $S = \{1, 2, ..., n\}$, có r phần tử và A không chứa hai số nguyên liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Gọi Y là tập hợp các tập con có r phần tử của tập $\{1, 2, ..., n - r + 1\}$.

Ta thiết lập một song ánh từ X đến Y.

Giả sử $A \in X$, $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ với $a_1 < a_2 < ... < a_r$

Đặt $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 1$, ..., $b_i = a_i + i - 1$,..., $b_r = a_r + r - 1$

Vì $a_{i+1} - a_i \geq 2$ nên $b_1 < b_2 < .... < b_r \leq n - r + 1$

Tập $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ là một tập con có r phần tử của tập $\{1, 2, ..., n - r + 1\}$, do đó là một phần tử của Y.

Gọi f là phép đặt tương ứng tập $A \in X$ với tập $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\} \in Y$. Khi đó f là một đơn ánh. Giả sử $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\} \in Y$.

Đặt $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 + 1$, ..., $a_i = b_i + i - 1$, $a_r = b_r + r - 1$

Ta có: $a_{i+1} - a_i = b_{i+1} - b_i + 1 \geq 2$, do đó $A \in X$ và $f(A) = B$ nên f là toàn ánh.

Vậy f song ánh từ X vào Y nên số phần tử của X bằng số các tập con có r phần tử của tập $\{1, 2, ..., n - r + 1\}$.

Vậy số phần tử của X là C_{n-r+1}^{r}.

Bài toán 4. 20: Cho tập $S = \{1, 2, ..., 2n\}$. Một tập con A của S được gọi là *tập cân* nếu trong tập đó, số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau. Xác định số *tập cân* của S.

Hướng dẫn giải

Gọi X là tập hợp tất cả các *tập cân* của S và Y là họ tất cả các tập con của S có đúng n phần tử. Ta thiết lập một song ánh từ X đến Y.

Gọi $L = \{1, 3, ..., 2n-1\}$.

Giả sử $A \in X$ là *tập cân*. Gọi A_1 và A_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của A thì $|A_1| = |A_2|$ và

$$|A_1 \cup (L \setminus A_2)| = |A_1| + |L| - |A_2| = |L| = n$$

nên tập $A_1 \cup (L \setminus A_2)$ là một phần tử của Y.

Gọi f là phép đặt tương ứng tập $A \in X$ với tập $A_1 \cup (L \setminus A_2) \in Y$.

Ta có f là đơn ánh.

Giả sử M ∈ Y. Gọi M_1 và M_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của M. Đặt $A_1 = M_1$; $A_2 = L \setminus M_2$ và $A = A_1 \cup A_2$. Khi đó A là *tập cân* vì: $|A_1| = |M_1|$, $|A_2| = |L| - |M_2| = n - |M_2| = |M| - |M_2| = |M_1|$.

Vậy A ∈ X và f xác định bởi $f(A) = A_1 \cup (L \setminus A_2)$ nên f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Vì có một song ánh từ X vào Y nên số *tập cân* của S bằng số các tập con có n phần tử của S. Vậy S có C_{2n}^{n} *tập cân*.

Bài toán 4. 21: Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi 1 khác nhau gồm 5 sách Văn học, 4 sách Âm nhạc và 3 sách Hội hoạ. Thầy lấy 6 cuốn sách tặng đều cho 6 học sinh. Có bao nhiêu cách tặng mà sau khi tặng xong thì mỗi loại sách còn ít nhất 1 cuốn.

Hướng dẫn giải

Để ý tổng 2 loại sách nào cũng lớn hơn 6 nên sau khi cho 6 cuốn thì không thể hết tới 2 loại sách.Số cách chọn 6 sách từ 12 sách khác nhau cho 6 học sinh khác nhau là $A_{12}^{6} = 665280$.

Ta loại đi các trường hợp:

- Tặng hết sách Văn học : $A_6^5.A_7^1 = 5040$
- Tặng hết sách Âm nhạc : $A_6^4.A_8^2 = 20160$
- Tặng hết sách Hội hoạ : $A_6^3.A_9^3 = 60480$

Vậy tổng số cách tặng cần tìm là:

$665280 - (5040 + 20160 + 60480) = 579600$.

Bài toán 4. 22: Có bao nhiêu cách tặng 5 món quà khác nhau cho 3 người mà ai cũng có quà?

Hướng dẫn giải

Có 2 trường hợp nhận quà 3 + 1 + 1 và 1 + 2 +2.

- Xét trường hợp nhận quà 3 +1 +1:

Có 3 cách chọn ra 1 người để nhận 3 quà, số cách chọn 3 quà là C_5^3. Còn 2 người nên có 2 cách lựa chọn 2 quà còn lại.

Do đó số cách chọn là $3.C_5^3.2 = 60$.

- Xét trường hợp nhận quà 1 + 2 +2:

Có 3 cách chọn ra 1 người để nhận 3 quà, số cách chọn 1 quà là 5. Còn 2 người nên có C_4^2 cách lựa chọn 2 quà cho người thứ nhất và người còn lại thì nhận 2 quà cuối cùng.

Do đó số cách chọn là $3.5.C_4^2.1 = 90$.

Vậy tổng số cách tặng cần tìm là: 60 +90 =150.

Bài toán 4. 23: Cho p điểm trong không gian trong đó có $q \geq 4$ điểm đồng phẳng trên mặt phẳng (R) và không có 4 điểm không cùng thuộc (R) mà đồng phẳng.

a) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua 3 điểm trong số đó.

b) Có bao nhiêu tứ diện tạo bởi 4 đỉnh là 4 điểm trong số đó.

Hướng dẫn giải

a) Số cách chọn 3 điểm trong p điểm là C_p^3

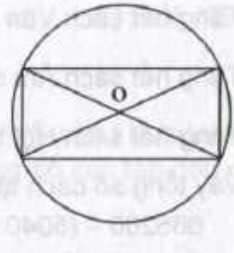
Số cách chọn 3 điểm trong q điểm nằm trên (R) là C_q^3. Tất cả các cách này chỉ xác định 1 mặt phẳng (R).Vậy số mặt phẳng tạo thành là: $C_p^3 - C_q^3 + 1$

b) Lập luận dạng như trên và theo giả thiết thì số tứ diện cần tìm là: $C_p^4 - C_q^4$.

Bài toán 4. 24: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n đỉnh cho nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n đỉnh cho.Tìm n.

Hướng dẫn giải

Số tam giác có các đỉnh chọn từ 2n đỉnh đã cho là C_{2n}^3.Vì đa giác đều có 2n đỉnh nên có n đường chéo là đường kính mà cứ 2 đường chéo loại này thì tạo ra 1 hình chữ nhật. Do đó số hình chữ nhật là C_n^2



Theo giả thiết: $C_{2n}^3 = 20.C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20.\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$\Leftrightarrow 2n(2n-1)(2n-2) = 60.n(n-1)$

Vì n nguyên và $n \geq 2$ nên rút gọn được: $n^2 - 9n + 8 = 0$

$\Leftrightarrow n = 1$ hoặc $n = 8$. Vậy chọn : $n = 8$.

Bài toán 4. 25: Cho p + q + r vật gồm p vật loại 1 giống hệt nhau, q vật loại 2 giống hệt nhau và r vật loại 3 đôi một khác nhau. Tính số các tổ hợp có thể nhận được.

Hướng dẫn giải

Ta có p vật loại 1 như nhau nên có thể lấy: 0, 1,..., p vật tức là có p + 1 cách lấy.Tương tự q vật loại 2 như nhau có q + 1 cách lấy.

Đối với r vật loại 3 khác nhau đôi một, mỗi vật có 2 cách lấy hoặc không lấy, do đó có 2^r cách lấy.

Vậy có: $(p + 1)(q + 1)2^r$ tổ hợp.

Bài toán 4. 26: Có bao nhiêu cách phân phối n quả cầu như nhau vào m hộp phân biệt:

a) hộp nào cũng có quả cầu

b) không nhất thiết hộp nào cũng có quả cầu.

Hướng dẫn giải

a) Với điều kiện $n \ge m$ thì số cách phân phối khác nhau mà hộp nào cũng có quả cầu là : C_{n-1}^{m-1}.

Thật vậy, ta biểu diễn n quả cầu A liên tiếp có n–1 vạch phân chia:

$$A - A - A - ... - A - A$$

Mỗi cách phân phối là một cách chọn m–1 vạch từ n–1 vạch.

Vậy số cách phân phối là : C_{n-1}^{m-1}.

b) Số cách phân phối mà có thể có hộp rỗng là C_{n+m-1}^{m-1}.

Thật vậy, ta biểu diễn n quả cầu A và m số 0 liên tiếp thì có m + n – 1 vạch phân chia, chẳng hạn:

$$A - 0 - A - A - 0 - ... - 0 - A - 0$$

Mỗi cách phân phối có thể có hộp rỗng là một cách chọn m–1 vạch từ m + n – 1 vạch.

Vậy số cách phân phối là C_{n+m-1}^{m-1}, không có điều kiện giữa m và n.

Bài toán 4. 27: Trong mặt phẳng cho 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 100 điểm đó, có không quá 70% các tam giác nhọn.

Hướng dẫn giải

Từ 4 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, nhiều lắm là có 3 tam giác nhọn. Từ kết quả này, suy ra với 5 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, ta nhận được 10 tam giác và có không quá 7 tam giác nhọn.

Với 10 điểm phân biệt không có 3 điểm nào thẳng hàng, số cực đại các tam giác nhọn tạo thành là: số các tập con 4 điểm nhân cho 3 rồi chia cho số các tập con 4 điểm chứa 3 điểm cho trước. Trong khi đó, số tất cả các tam giác tạo thành cũng có biểu thức tương tự như trên nhưng thay vì nhân 3 ta nhân cho 4. Do vậy số các tam giác nhọn chiếm không quá 3/4 số tất cả các tam giác (đối với 10 điểm).

Lí luận tương tự, ta xét 100 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số cực đại các tam giác nhọn tạo thành là: số các tập con 5 điểm nhân cho 7 rồi chia cho số các tập con 5 điểm chứa 3 điểm cho trước. Trong khi đó, số tất cả các tam giác tạo thành cũng có biểu thức tương tự như trên nhưng thay vì nhân 7 ta nhân cho 10.

Do vậy số các tam giác nhọn chiếm không quá 7/10 số tất cả các tam giác tạo thành, điều phải chứng minh.

Bài toán 4. 28: Cho các số nguyên dương k và n với $k \le n$. Hỏi tất cả có bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2,..., a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, ...,a_k)$ thoả mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau:

(i) Tồn tại $s, t \in \{1; 2;...;k\}$ sao cho $s < t$ và $a_s > a_t$

(ii) Tồn tại $s \in \{1; 2;...;k\}$ sao cho $(a_s - s)$ không chia hết cho 2.

Hướng dẫn giải

Gọi A là tập hợp tất cả chỉnh hợp chập k của n số nguyên dương đầu tiên và A_1 là tập hợp tất cả chỉnh hợp thoả mãn yêu cầu của bài ra.

Nếu kí hiệu $A_2 = \{$chỉnh hợp $(a_1, ..., a_k) \in A / a_i < a_{i+1}, i = 1, 2,...,k-1$ và $a_i = i \bmod 2, i = 1,2,...,k\}$ thì rõ ràng:

$A_2 \subset A$ và $A_1 = A \setminus A_2$. Suy ra: $|A_1| = |A| - |A_2|$

Bây giờ ta xét A_2. Với mỗi $(a_1,...,a_k) \in A_2$ ta đều có $a_i + i \ne a_j + j$ với mọi $i \ne j \in \{1,...,k\}$, $(a_i + i) \vdots 2$ và $a_i + i \in \{1, ..., n+k\}$ với mọi $i = 1, 2,...,k$.

Ta chứng minh: $|A_2| = C^k_{\left[\frac{n+k}{2}\right]}$ suy ra: $|A_1| = \dfrac{n!}{(n-k)!} - C^k_{\left[\frac{n+k}{2}\right]}$.

Bài toán 4. 29: Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất sau: Có thể chia tập hợp 6 số $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ thành hai tập hợp, sao cho tích tất cả các số của tập hợp này bằng tích tất cả các số của tập hợp kia

Hướng dẫn giải

Ta hãy để ý rằng trong 5 số nguyên liên tiếp phải có một số chia hết cho 5. Vì vậy nếu tập hợp 6 số $\{n, n+1, ..., n+5\}$ có tính chất đã nêu trong đầu bài, thì trong tập hợp ấy phải có đúng hai số chia hết cho 5, dĩ nhiên đó phải là các số n và n + 5, còn các số n + 1, n + 2, n + 3, n + 4 không chia hết cho 5.

Mặt khác, nếu trong 6 số của tập hợp trên chia hết cho một số nguyên tố $p \ge 7$, thì 5 số còn lại sẽ không chia hết cho p, và tập hợp không có tính chất đòi hỏi. Từ đây đặc biệt suy ra rằng các số n+1, n+2, n+3 và n+4 chỉ chứa các thừa số nguyên tố 2 và 3, tức là:

$$n + 1 = 2^{k_1}3^{l_1}$$

$$n + 2 = 2^{k_2}3^{l_2}$$

$$n + 3 = 2^{k_3}3^{l_3}$$

$$n + 4 = 2^{k_4}3^{l_4},$$

trong đó $k_1, l_1,...,k_4, l_4$ là những số nguyên không âm.

Nếu n+1 (và do đó n+4) chia hết cho 3, thì n+2 và n+3 không chia hết cho 3, vậy $l_2 = l_3 = 0$ và $n+2 = 2^{k_2}$, $n+3 = 2^{k_3}$ nhưng như thế thì n+2 và n+3 là hai số nguyên liên tiếp mà lại là hai số chẵn, điều này vô lí.

Lập luận tương tự, ta thấy rằng nếu n+2 chia hết cho 3, hoặc nếu n+3 chia hết cho 3, thì ta vẫn gặp mâu thuẫn.

Mâu thuẫn ấy chứng tỏ không có số nguyên dương n nào thoả mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 4. 30: Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho có thể phân chia tập hợp X = {1990, 1990 + 1, ..., 1990 + k} thành hai tập con A, B thoả mãn điều kiện: Tổng của tất cả các phần tử thuộc A bằng tổng của tất cả các phần tử thuộc B.

Hướng dẫn giải

Trước hết, ta quy ước: tập số M được gọi là có tính chất T nếu M có thể được chia thành hai tập con rời nhau sao cho tổng của tất cả các phần tử của tập con này bằng tổng của tất cả các phần tử của tập con kia.

Theo bài ra, ta cần tìm tất cả các số nguyên dương k để tập X có tính chất T. Dễ thấy nếu X có tính chất T thì tổng của tất cả các phần tử của x sẽ là một số chẵn. Mà tổng này bằng $1990(k + 1) + k(k + 1)/2$ nên $k(k + 1) \vdots 4$. Suy ra, k cần có dạng $k = 4t + 3$ hoặc $k = 4t$ với $t \in N$.

Xét trường hợp 1 : $k = 4t + 3 \in N$. Khi đó, số phần tử của X sẽ là $4(t + 1)$. Do đó, ta có thể chia tập X thành t + 1 tập con rời nhau sao cho mỗi tập con đều gồm 4 số tự nhiên liên tiếp. Dễ thấy, tập gồm 4 số tự nhiên liên tiếp là tập có tính chất T. Từ đó suy ra tập X sẽ có tính chất T.

Xét trường hợp 2: $k = 4t$, $t \in N$. Khi đó, tập X sẽ có 4t + 1 phần tử. Do đó, nếu X được chia thành hai tập con rời nhau A, B thì một trong hai tập con đó, không mất tổng quát giả sử là A, phải có không ít hơn 2t + 1 phần tử. Như vậy, tập B sẽ có không quá 2t phần tử. Suy ra, nếu kí hiệu a, b tương ứng là tổng của tất cả các phần tử của A, B thì:

$$a \geq 1990 + (1900+1) + ... + (1900+2t) = 1990(2t+1) + t(2t+1)$$

$$b \leq (1990 + 2t + 1) + ... + (1990 + 4t) = 1990 \times 2t + t(6t + 1)$$

Với giả thiết a = b ta có:

$$1990 \times 2t + t(6t + 1) \geq 1990(2t + 1) + t(2t + 1)$$

$\Leftrightarrow 4t^2 \geq 1990$ nên $t \geq 23$.

Với t = 23 ta có X = {1990, 1990 + 1,..., 1990 + 92} = AUB,

Với: A = {1990 + 1, 1990 + 2,..., 1990 + 46}.

B = {1990 ; 1990 + 47, 1990 + 48,..., 1990 + 92}

Hiển nhiên A, B rời nhau, và bằng tính toán trực tiếp dễ thấy a = b. Như vậy với t = 23 ($\Leftrightarrow$ k = 92) tập X có tính chất T.

Với t > 23 ta có : $X = X_1 U X_2$

Với X_1 = {1990, 1990 + 1, ..., 1990 + 92}

và X_2 = {1990 + 93, 1990 + 94, ...,1990 + 4t}.

Theo phần trên, tập X_1 có tính chất t. Hơn nữa, do tập X_2 có $4(t - 23)$, phần tử nên, vận dụng những lập luận đã trình bày khi xét trường hợp 1, ta sẽ được tập X_2 có tính chất T. Từ đó suy ra tập X cũng có tính chất T.

Vậy, tóm lại, tất cả các số nguyên dương k cần tìm là tất cả các số có dạng $k = 4t + 3$, $t \in N$ và $k = 4t$, $t \in N$, $t > 23$.

Bài toán 4. 31: Cho tập M = {1, 2, ...,n} ($n \in N, n \geq 2$). Tìm số m nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con chứa m phần tử của M đều tồn tại ít nhất 2 số mà 1 trong 2 số là bội của số kia.

Hướng dẫn giải

Ta có $C = \left\{\left[\frac{n}{2}\right]+1; \left[\frac{n}{2}\right]+2; ...n\right\}$ có $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ phần tử và không có phần tử nào là bội của ít nhất 1 phần tử khác thuộc C.

Suy ra: $m \geq \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$ phần tử.Ta chứng minh: $m = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$

Xét 1 tập con P bất kì chứa $\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$ phần tử của M. Với mỗi $p \in P$ đặt $p = 2^s q$; $s \geq 0$; $s \in N$ và q là số lẻ, vì $1 \leq p \leq n$ nên $1 \leq q \leq n$ mà từ 1 đến n có $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ số lẻ khác nhau nên trong biểu diễn các phần tử $p \in P$, phải có ít nhất 2 số q lẻ bằng nhau suy ra tồn tại ít nhất 2 số $a, b \in P$ sao cho:

$a = 2^{s_1} l$, $b = 2^{s_2} l$. Tức là trong 2 số a, b phải có 1 số là bội của số kia.

Bài toán 4. 32: Chứng minh rằng tập hợp {1, 2, 3,...,1989} có thể được viết thành hợp của các tập rời nhau $A_1, A_2, ..., A_{117}$ sao cho mọi A_i, i = 1, 2,...,117, đều có chứa 17 phần tử và tổng giá trị của các phần tử những A_i đều bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Trước hết, ta xây dựng 117 tập hợp gồm 3 số sao cho tổng của 3 số đó trong mỗi tập đều bằng 0 và chúng rời nhau từng đôi một như sau:
Từ tập {1, 2, 3,...,1989}, tạo thành tập M = {–994, –993,...,993, 994}, tập hợp này có được bằng cách lấy từng số hạng của tập hợp đã cho trừ đi 995.
Khi đó, ta tạo 116 tập hợp gồm 3 số nói trên là:

$N_1 = \{993, -496, -497\}$, $N_2 = \{-993, 496, 497\}$,

$N_{2k+1} = \{993-4k, 2k-496, 2k-497\}$,

$N_{2k+2} = \{-993+4k, -2k+496, -2k+497\}$,

....

$N_{115} = \{665, -382, -383\}$, $N_{116} = \{-665, 382, 383\}$

Ngoài ra, ta đặt $N_{117} = \{-1, 0, 1\}$

Tất cả 117 tập hợp trên đều rời nhau từng đôi một. Thật vậy, trong mỗi tập, do các phần tử thứ hai đều chẵn nên các phần tử thứ hai của các tập hợp $N_1, ..., N_{116}$ không thể trùng với các phần tử thứ nhất hoặc thứ ba của những tập hợp này, tất cả các phần tử thứ nhất của những tập hợp này có giá trị tuyệt đối lớn hơn tất cả phần tử thứ ba, thành thử các tập hợp N_i rời nhau từng đôi một.

Ngoài ra, nếu số x nào đó là phần tử của một trong các tập hợp N_i thì số $(-x)$ cũng là phần tử của một trong các tập hợp N_i.

Để ý rằng 14.117 phần tử của tập hợp M, không thuộc về một trong các tập hợp N_i, được chia thành 7.117 cặp số với dấu đối nhau. Bằng cách tuỳ ý ta thêm 7 cặp số phân biệt vào tập hợp N_i đã chọn ở trên, ta sẽ chia được tập hợp M thành 117 tập hợp con từng cặp không giao nhau. Cuối cùng để thoả mãn yêu cầu của bài toán, ta chỉ cần xây dựng 117 tập A_i bằng cách cộng 995 vào từng phần tử của các tập N_i tương ứng.

Bài toán 4. 33: Xét hoán vị $s_0, s_1, ..., s_n$ của các số 0, 1, 2,...,n, ta tác động một phép biến đổi lên hoán vị này nếu tìm được i, j sao cho $s_i = 0$ và $s_j = s_{i-1} + 1$. Hoán vị mới tạo thành nhận được bằng cách đổi chỗ hai phần tử s_i và s_j. Hỏi với số n nào thì xuất phát từ hoán vị (1, n, n–1, n–2,..., 3, 2, 0) ta có thể nhận được hoán vị (1,2,...,n,0) bằng cách lập lại nhiều lần phép biến đổi đó?

Hướng dẫn giải

Thử trực tiếp, ta thấy rằng có thể thực hiện yêu cầu của bài toán trong trường hợp n = 1, n = 2, 3, 7, 15, nhưng không thực hiện được khi n = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13,1 4.

Từ đó, ta dự đoán rằng các số dạng $n = 2^m - 1$ và số n = 2 sẽ thoả mãn điều kiện bài toán.

Ta để ý, nếu n = 2m, thì sau m–1 lần biến đổi ta sẽ có

1 n 0 n–2 n–1 n–4 n–3... 4 5 2 3

và không thể làm tiếp được. Vậy với n chẵn, n > 2 ta không thực hiện được

Nếu n = 15 ta có thể làm như sau:

1 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 0

(bắt đầu)

1 0 14 15 12 13 10 11 8 9 6 7 4 5 2 3

(sau 7 lần biến đổi)

1 2 3 0 12 13 14 15 8 9 10 11 4 5 6 7

(sau 8 lần biến đổi)

1 2 3 4 5 6 7 0 8 9 10 11 12 13 14 15

(sau 8 lần biến đổi)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 0

(sau 8 lần biến đổi)

Tổng quát, ta giả sử $n = 2^m - 1$. Gọi P_0 là hoán vị đầu tiên và P_r là hoán vị có dạng:

1 2 3...R–1 0, n–R+1, n–R+1 n–R+2 n–R+3...

n, n–2R+1 n–2R+2...n–R,..., R R+1 ... 2R–1

Ở đây R là kí hiệu cho số 2^r và dấu phẩy ngăn cách biểu thị rằng, sau hoán vị ban đầu 1, 2...R–1 0, tăng lên R số hạng. Nếu khởi đầu từ P_r, thì số 0 được chuyển đổi thành công với R, 3R, 5R,..., n–R+1, rồi với R+1, 3R+1..., n–R+2, tiếp tục với 2R–1, 4R–1,...,n. Điều này sẽ cho ta P_{r+1}. Dễ dàng kiểm tra được P_0 dẫn đến P_1 và sau đó đến P_m là vị trí kết thúc. Như thế, có thể thực hiện được theo yêu cầu đề bài cho trường hợp $n = 2^m - 1$.

Tiếp theo, giả sử n lẻ nhưng không có dạng $2^m - 1$. Lúc đó, ta có thể viết $n = (2a + 1)2^b - 1$ (lấy 2^b là luỹ thừa cao nhất của 2 sao cho nó chia hết n+1).

Ta có thể định nghĩa $P_0, P_1, \ldots, P_b$ như trên. Ta có thể đạt đến P_b như trên:

1 2... B–1 0, 2aB 2aB+1 ... (2a+1)B–1, (2a–1)B ... 2aB–1,...,

3B, 3B+1,... 4B–1, 2B, 2B+1,..., 3B–1, B, B+1,..., 2B–1

với $B = 2^b - 1$. Khi đó, 0 được chuyển với B, 3B, 5B..., (2a–1)B, và đặt nó ngay bên phải của (2a+1)B–1 = n, nên không thể tiếp tục được xa hơn, điều này có nghĩa không thể thực hiện được để thoả mãn điều kiện bài toán cho $n = (2a+1)2^b - 1$.

Bài toán 4. 34: Trong lần thi giao lưu, một số thí sinh là bạn bè của nhau, quan hệ bạn bè là quan hệ hai chiều. Gọi một nhóm các thí sinh là nhóm bạn bè nếu như hai người bất kì trong nhóm này là bạn bè của nhau, số lượng của một nhóm bạn bè được gọi là cỡ của nó.Biết rằng, cỡ của một nhóm bạn bè có nhiều người nhất là một số chẵn.

Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các thí sinh vào hai phòng sao cho cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng này cũng bằng cỡ của nhóm bạn bè có nhiều người nhất trong phòng kia

Hướng dẫn giải

Ta gọi cỡ của một tập hợp A, kí hiệu là c(A), là cỡ của nhóm bạn bè đông người nhất trong A. Gọi M là nhóm bạn bè đông người nhất trong tập hợp G tất cả các thí sinh, như vậy c(M) = c(G) = 2m là số chẵn.

Ta chỉ ra một cách phân hoạch G thành hai tập hợp có cùng cỡ như sau:

Trước hết A là một tập hợp m thí sinh của M và B = G – A. Như vậy $c(B) \geq m \geq c(A)$. Chừng nào $c(B) \geq c(A) + 2$ ta chuyển một thí sinh của M từ B sang A. Mỗi lần như vậy cỡ của B giảm không quá 1 và cỡ của A tăng đúng 1. Do đó, ta có thể thực hiện được việc điều chỉnh này cho tới khi c(B) = c(A) hoặc c(B) = c(A) + 1.

Trong trường hợp c(B) = c(A)+1 ta thực hiện tiếp việc điều chỉnh mới bằng cách xét tất cả nhóm bạn bè $B_1, B_2, \ldots, B_s$ gồm c(B) người trong B. Nếu tồn tại B_i và $m \in M-A$ sao cho $m \notin B_i$ thì tập hợp $A \cup \{m\}$ và $B - \{m\}$ là hai tập hợp có cùng cỡ c(A) + 1. Nếu $m \in B_i$ với mọi B_i và $m \in M-A$ thì $B_i - (M-A)$ luôn khác tập rỗng vì B_i có ít nhất m+1 phần tử còn M–A chỉ có nhiều nhất m phần tử. Xuất phát từ $C = \varnothing$ ta chọn một phần tử của $B_i - (M-A)$ vào C, với B_i là nhóm bạn bè nào đó có c(B) người trong tập hợp B–C. Quá trình kết thúc khi thu được một tập hợp C sao cho c(B – C) = c(B) – 1 = c(A).

Ta chứng minh $c(A \cup C) = c(A)$. Thật vật, xét một nhóm bạn bè Q tuỳ ý trong $A \cup C$. Do mỗi phần tử của C là bạn bè của mọi phần tử M–A cho nên $Q \cup (M-A)$ là một nhóm bạn bè trong G và do đó:

$$c(G) = 2m \geq |Q \cup (M-A)| = |Q| + (2m - |A|)$$

Suy ra: $|A| \geq |Q|$. Vậy B – C và $A \cup C$ là phân hoạch của G thành hai tập hợp có cùng cỡ (đpcm).

Bài toán 4. 35: Có 9 bi xanh, 5 bi đỏ, 4 bi vàng đều có kích thước khác nhau. Chọn ra 6 bi. Tính xác suất của biến cố

a) chọn đúng 2 bi đỏ   b) chọn bi đỏ bằng bi xanh

Hướng dẫn giải

Có 18 bi gồm 9 bi xanh, 5 bi đỏ, 4 bi vàng đều có kích thước khác nhau, chọn ra 6 bi thì không gian mẫu Ω có $C_{18}^6 = 18564$ phần tử.

a) Số cách chọn ra đúng 2 bi đỏ $C_5^2.C_{13}^4 = 7150$ (cách)

Vậy xác suất $P(A) = \dfrac{7150}{18564} \approx 38\,\%$.

b) Có 3 trường hợp :

Chọn 1 bi đỏ, 1 xanh : $C_5^1.C_9^1.C_4^4 = 45$ cách

Chọn 2 bi đỏ, 2 xanh : $C_5^2.C_9^2.C_4^2 = 2160$ cách

Chọn 3 đỏ, 3 xanh : $C_5^3.C_9^3 = 840$ cách

Có tất cả : $45 + 2160 + 840 = 3045$ cách

Vậy xác suất $P(B) = \dfrac{3045}{18564} \approx 16\,\%$.

Bài toán 4. 36: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong số bi lấy ra không có đủ cả ba màu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 4 bi trong 15 bi là : $C_{15}^4 = 1365$.

Các trường hợp chọn được 4 bi cả 3 màu là:

- 2 đỏ + 1 trắng + 1 vàng có : $C_4^2C_5^1C_6^1 = 180$ cách
- 1 đỏ + 2 trắng + 1 vàng có : $C_4^1C_5^2C_6^1 = 240$ cách
- 1 đỏ + 1 trắng + 2 vàng có : $C_4^1C_5^1C_6^2 = 300$ cách

Số cách chọn 4 bi có đủ 3 màu là: $180 + 240 + 300 = 720$

Do đó số cách chọn để 4 bi lấy ra không có đủ 4 màu là: $1365 - 720 = 645$.

Vậy xác suất cần tìm: $P = \dfrac{645}{1365} = \dfrac{43}{91}$.

Bài toán 4. 37: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên n gồm 3 chữ số khác nhau. Tính xác suất để n là một số chẵn.

Hướng dẫn giải

Gọi $n = \overline{n_1n_2n_3}$. Do n gồm 3 chữ số nên $n_1 \neq 0$.Vậy có 9 khả năng chọn n_1, 9 cho n_2, 8 cho n_3. Suy ra có $9 \times 9 \times 8 = 648$ cách chọn ra n.

Để n là số chẵn thì n_3 phải là 0 hoặc $n_3 \in \{2,4,6,8\}$

Xét $n_3 = 0$: có 9 khả năng cho n_1, 8 cho n_2. Do đó có 9. 8 = 72 khả năng.

Xét $n_3 \in \{2,4,6,8\}$: có 8 khả năng cho n_1, 8 cho n_2, 4 khả năng cho n_3. Do đó có 8. 8. 4 = 256 khả năng .

Vậy có: 72 + 4.64 = 328 khả năng chọn ra số chẵn n.

Xác suất cần tìm là $P = \dfrac{328}{648} \approx 0,51$.

Bài toán 4. 38: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau. Tính xác suất để được một số chia hết cho 9 và có mặt chữ số 9.

Hướng dẫn giải

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau thì không gian mẫu có $9.A_9^4 = 27216$ phần tử.

Gọi $n = \overline{n_1n_2n_3n_4n_5}$ là số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 9 và có mặt chữ số 9.

Đặt $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$ thì

$$9 + 0 + 1 + 2 + 3 \le S \le 9 + 8 + 7 + 6 + 5 \Rightarrow 15 \le S \le 35$$

Vì $n = \overline{n_1n_2n_3n_4n_5}$ chia hết cho 9 nên S chia hết cho 9 do đó

S = 18 hay S = 27.

- Xét S = 18 thì có 3 nhóm: {0;1;2;6;9}, {0;1;3;5;9} và {0;2;3;4;9}.
- Xét S = 27 thì có 10 nhóm: {0;3;7;8;9}, {0;4;6;8;9}, {1;2;7;8;9}, {1;3;6;8;9}, {1;4;5;8;9}, {1;4;6;7;9}, {2;3;6;7;9}, {2;4;5;7;9}, {3;4;5;6;9} và {0;5;6;7;9}

Trong 13 nhóm có 6 nhóm có chữ số 0 nên có 13.5! − 6.4! = 1416 số.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1416}{27256} \approx 5\%$.

Bài toán 4. 39: Có 5 đoạn thẳng có độ dài 1, 2, 3, 4, 5 (cm). Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn, tìm xác suất để 3 đoạn này làm 3 cạnh của 1 tam giác.

Hướng dẫn giải

Từ 5 đoạn lấy ra 3 đoạn thì không gian mẫu có: $C_5^3 = 10$ phần tử

Ba đoạn a < b < c lấy ra tạo thành tam giác khi a + b > c. Do đó chỉ có 3 khả năng chọn đoạn là {2,3,4}, {2,4,5} và {3,4,5}.

Vậy xác suất cần tìm: $P(A) = \dfrac{3}{10}$.

Bài toán 4. 40: Mỗi đề thi có 5 câu được chọn ra từ 100 câu có sẵn. Một học sinh học thuộc 80 câu. Tìm xác suất để học sinh đó rút ngẫu nhiên ra 1 đề thi có 4 câu đã học thuộc.

Hướng dẫn giải

Có C_{100}^5 cách lập đề thi gồm 5 câu hỏi.

Có C_{80}^4 cách chọn ra 4 câu đã học thuộc và có C_{20}^1 cách chọn ra 1 câu còn lại từ 20 câu không học thuộc. Vậy xác suất:

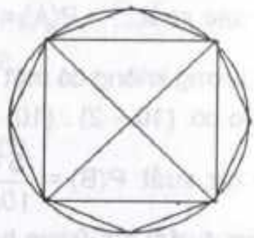
$$P(A) = \frac{C_{80}^4.C_{20}^1}{C_{100}^5} = \frac{395395}{941094} \approx 42\%.$$

Bài toán 4. 41: Cho bát giác đều nội tiếp trong 1 đường tròn. Chọn ngẫu nhiên ra 2 đỉnh, tìm xác suất để 2 đỉnh đó nối thành đường chéo có độ dài bé nhất.

Hướng dẫn giải

Có $C_8^2 = 28$ cách chọn 2 đỉnh tuỳ ý từ 8 đỉnh của bát giác đều.

Đường chéo ngắn nhất là đường nối 2 đỉnh gần nhất không liên tiếp chính là cạnh của hình vuông nội tiếp. Vì có 2 hình vuông nội tiếp như thế nên có 8 cạnh là 9 đường chéo ngắn nhất.



Vậy xác suất: $P = \frac{8}{28} = \frac{2}{7} \approx 29\%$.

Bài toán 4. 42: Một bảng vuông n x n ô vuông. Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật, tính xác suất để ô hình được chọn là hình vuông.

Hướng dẫn giải

Hình chữ nhật tạo bởi một cạnh ngang và một cạnh dọc.

Vì có n ô vuông nên có n+1 điểm biên, cứ 2 điểm thì chọn được một cạnh nên có C_{n+1}^2 cách chọn cạnh ngang, và có C_{n+1}^2 cách chọn cạnh dọc. Vậy số hình chữ nhật là $C_{n+1}^2.C_{n+1}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ta có số

hình vuông cạnh 1 có n.n hình

hình vuông cạnh 2 có (n–1).(n–1) hình

hình vuông cạnh 3 có (n–2).(n–2) hình

...

hình vuông cạnh n có 1.1 hình

Vậy tổng cộng có $1^1 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ hình vuông.

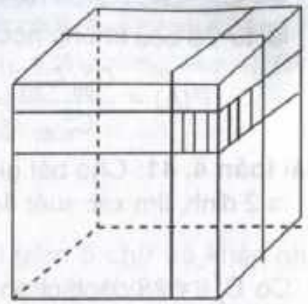
Do đó xác suất để hình được chọn là hình vuông:

$$P = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} : \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}.$$

Bài toán 4. 43: Cho 1 hình lập phương có 6 mặt sơn màu. Ta chia thành 10x10x10 = 1000 khối lập phương nhỏ như nhau. Lấy ra 1 khối nhỏ, tìm xác suất để :

a) Có 2 mặt sơn màu. b) Không có mặt nào được sơn.

Hướng dẫn giải



a) Không gian mẫu có 1.000 phần tử (chia cắt 10.10.10 phần tử đều nhau 3 mặt).

Để ý có 8 khối ở 8 đỉnh có 3 mặt được sơn.

Khối nhỏ có 2 mặt sơn màu nằm dọc theo mỗi cạnh trừ 2 khối đỉnh. Ta có khối lập phương có 12 cạnh

Do đó có $(10 - 2) \times 12 = 96$ khối nhỏ có 2 mặt sơn màu.

Vậy xác suất: $P(A) = \frac{96}{1000} = 0,096$

b) Khối lượng không có mặt nào được sơn nên thuộc khối ruột.

Do đó có: $(10 - 2) . (10 - 2) . (10 - 2) = 8^3 = 512$ khối

Vậy xác suất: $P(B) = \frac{512}{1000} = 0,512$

Bài toán 4. 44: Có 9 em học sinh cùng đi một chuyến tàu. Mỗi em chọn tuỳ ý và ngẫu nhiên một trong 3 toa tàu đã định. Tìm xác suất để của các biến cố:

a) Toa đầu có 3 em

b) Một toa có 4 em, một toa nữa có 3 em và toa còn lại có 2 em

Hướng dẫn giải

Không gian mẫu có $3^9 = 19683$ phần tử.

a) Trong 9 bạn ta chọn được C_9^3 tập hợp 3 bạn. Mặt khác, cứ 3 bạn lên toa đầu thì 6 bạn còn lại có tất cả 2^6 cách lên 2 toa sau, vì đây là một sự chọn 6 lần có hoàn lại đối với tập hợp 2 yếu tố là 2 toa sau. Như vậy số kết cục thuận lợi cho việc 3 bạn lên toa đầu là

$C_9^3 . 2^6 = 5376$. Vậy xác suất phải tìm là: $P_1 = \frac{5376}{19683} = \frac{1792}{6561}$.

b) Tương tự như trên ta có xác suất để cho 4 bạn lên toa đầu, 3 bạn lên toa thứ hai và hai bạn lên toa thứ 3 là: $\frac{C_9^4.C_5^3.C_2^2}{19683} = \frac{140}{2187}$.

Mặt khác theo đầu bài ta có thể hoán vị số thứ tự ba toa cho nhau nên xác suất dể cho một trong 3 toa có 4 bạn, một trong hai toa còn lại có 3 bạn và toa cuối cùng có 2 bạn là: $P_3 = \frac{280}{729}$.

Bài toán 4. 45: Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất để số trên vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố "không có chữ số 1", B là biến cố "không có chữ số 5".

Ta có : $P(A) = P(B) = (0,9)^5$ và $P(AB) = 0,8)^5$

Nên: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$= 2(0,9)^5 - (0,8)^5 = 0,8533.$

Bài toán 4. 46: Ba khẩu súng độc lập bắn vào 1 mục tiêu. xác suất bắn trúng của k.1 là 0,7, của k.2 là 0,8 và của k.3 là 0,5. Mỗi khẩu bán 1 viên, tìm xác suất để:

a) Có 1 khẩu bắn trúng

b) Có ít nhất 1 khẩu bắn trúng

Hướng dẫn giải

a) Gọi A_i là biến cố khẩu thứ i bắn trúng mục tiêu, $i = 1,2,3$.

Xác suất để có 1 khẩu bắn trúng là:

$$P = P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)$$
$$= 0,7.0,2.0,5 + 0,3.0,8.0,5 + 0,3.0,2.0,5 = 0,22$$

b) Ta giải theo biến cố đối

$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) . P(\overline{A_2}) . P(\overline{A_3}) = 0,3 . 0,2 . 0,5 = 0,03$

Vậy: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0,97$.

Bài toán 4. 47: Một câu lạc bộ trường học có 50% học sinh chơi bóng đá; 70% học sinh chơi bóng bàn; 60% học sinh chơi bóng chuyền; 30% học sinh chơi bóng đá và chơi bóng bàn; 40% học sinh chơi bóng bàn và chơi bóng chuyền; 20% học sinh chơi bong đá và chơi bóng chuyền; 10% học sinh chơi cả ba loại. Chọn ngẫu nhiên một học sinh, tính xác suất để em đó:

a) chơi bóng đá hoặc chơi bóng chuyền.

b) chơi ít nhất một trong ba loại trên.

c) chơi đúng hai trong ba loại trên.

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố "Em đó chơi bóng đá ", B là biến cố "Em đó chơi bóng bàn", C là biến cố "Em đó chơi bóng chuyền".

Từ điều kiện bài ra, ta có: $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,7$; $P(C) = 0,6$; $P(AB) = 0,3$; $P(BC) = 0,4$; $P(AC) = 0,2$ và $P(ABC) = 0,1$

a) Biến cố "Em đó chơi bóng đá hoặc chơi bóng chuyền." là biến cố $A \cup B$.

Ta có: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,5 + 0,7 - 0,3 = 0,9$

Vậy xác suất để em đó chơi bóng đá hoặc chơi bóng chuyền.

là $P = 0,9 = 90\%$.

b) Biến cố "Em đó chơi ít nhất một trong ba loại trên" là $A \cup B \cup C$. Ta có:

$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$= 0,5 + 0,7 + 0,6 - 0,3 - 0,4 - 0,2 + 0,1 = 1$.

Vậy xác suất để em đó chơi ít nhất một trong ba loại trên là $P = 1$.

c) Gọi H là biến cố "Em đó chơi đúng hai trong ba loại trên" thì

$H = AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

Theo quy tắc cộng: $P(H) = P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC)$

Ta có: $AB = AB\overline{C} \cup ABC$.

Theo quy tắc cộng xác suất: $P(AB) = P(AB\overline{C}) + P(ABC)$

Suy ra: $P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = 0,3 - 0,1 = 0,2$

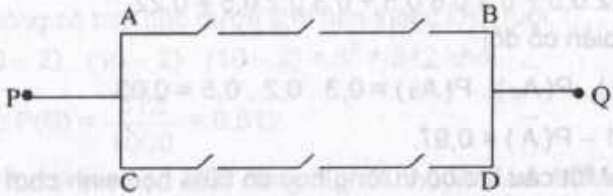
Tương tự: $P(A\overline{B}C) = P(AC) - P(ABC) = 0,2 - 0,1 = 0,1$

$P(\overline{A}BC) = P(BC) - P(ABC) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

Nên $P(H) = 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,6$.

Vậy xác suất để em đó chơi đúng hai trong ba loại trên là 0,6 = 60%

Bài toán 4. 48: Xét sơ đồ mạng điện có 6 công tắc khác nhau, trong đó mỗi công tắc có 2 trạng thái đóng và mở.



Tính xác suất để mạng điện thông mạch từ P đến Q?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách đóng – mở 6 công tắc của mạng điện được gọi là một trạng thái của mạng điện. Theo quy tắc nhân, mạng điện có $2^6 = 64$ trạng thái.

Trước hết, ta tìm có bao nhiêu trạng thái không thông mạch tức là không có dòng điện đi qua. Mạch gồm hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$. Trạng thái không thông mạch xảy ra khi và chỉ khi cả hai nhánh $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch.

Vì nhánh $A \to B$ có 8 trạng thái trong đó chỉ có duy nhất một trạng thái thông mạch, còn lại có 7 trạng thái không thông mạch. Tương tự ở nhánh $C \to D$ có 7 trạng thái không thông mạch.

Theo quy tắc nhân, ta có 7.7 = 49 trạng thái mà cả $A \to B$ và $C \to D$ đều không thông mạch.

Nên mạng điện có 64 – 49 = 15 trạng thái thông mạch từ P tới Q.

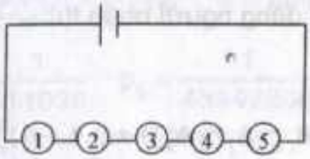
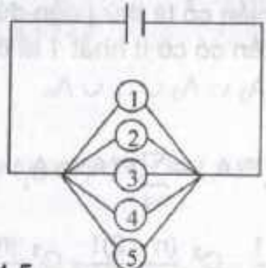
Vậy xác suất để mạng điện thông mạch là $P = \dfrac{15}{64} \approx 23\ \%$.

Bài toán 4. 49: Có 5 linh kiện điện tử xác suất hỏng tại 1 thời điểm là 0,01; 0,02; 0,02; 0,01 và 0,04 tương ứng. Tìm xác suất để có dòng điện chạy qua theo dạng mạch sau:

a) Mạch mắc nối tiếp

b) Mạch mắc song song

Hướng dẫn giải

a) Gọi A_i là biến cố linh kiện thứ i tốt: i = 1,2,3,4,5

A là biến cố dòng điện chạy qua theo kiểu mắc nối tiếp thì:

$A = A_1A_2A_3A_4A_5$. Vì các biến cố A_i độc lập nên:

$P(A) = P(A_1) . P(A_2) . P(A_3) . P(A_4). P(A_5)$

$= (1-0,01)(1-0,02)(1-0,02)(1-0,01)(1-0,04) \approx 0,904$

Vậy xác suất để có dòng điện chạy qua mạch mắc nối tiếp là $P(A) \approx 0,904$.

b) Gọi B là biến cố dòng điện chạy qua mạch mắc song song thì $\overline{B}$ là biến cố cả 5 linh kiện bị hỏng: $\overline{B} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}.\overline{A_4}.\overline{A_5}$

Ta có: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})P(\overline{A_5})$

$= 1 - 1,6.10^{-9}$

Vậy xác suất để có dòng điện chạy qua mạch mắc song song là

$P(B) \approx 0,999999998$.

Bài toán 4. 50: Bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư khác nhau vào 4 phong bì ghi sẵn địa chỉ khác nhau. Tìm xác suất để có ít nhất 1 lá thư đến đúng người nhận.

Hướng dẫn giải

Số cách bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 phong bì là 4!.

Ta ký hiệu (1;3;2;4) là lá thư 1 bỏ vào phong bì 1, lá thư 3 bỏ vào phong bì 2, lá thư 2 bỏ vào phong bì 3 và lá thư 4 bỏ vào phong bì 4.

Để có ít nhất 1 lá thư đến đúng người nhận ta xét các trường hợp:

- 1 lá thư đến đúng người nhận: nếu lá thư 1 đúng người nhận thì có 2 khả năng (1;3;4;2), (1;4;2;3), do đó có 2. 4 = 8 khả năng.
- 2 lá thư đến đúng người nhận: có $C_4^2 = 6$ khả năng.
- 3 lá thư đến đúng người nhận: không xảy ra
- 4 lá thư đến đúng người nhận: (1;2;3;4) có 1 khả năng.

Do đó tổng cộng có có 15 khả năng. Vậy xác suất để có ít nhất 1 lá thư đến đúng người nhận là $P = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Bài toán 4. 51: Bỏ ngẫu nhiên n lá thư khác nhau vào n phong bì ghi sẵn địa chỉ khác nhau. Tìm xác suất để có ít nhất 1 lá thư đến đúng người nhận.

Hướng dẫn giải

Gọi A_j là biến cố lá thứ j đến đúng người nhận, $j = 1,2,...,n$.

Và A là biến cố có ít nhất 1 lá thư đến đúng người nhận thì:

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$

Ta có:

$$P(A) = \sum P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - + ... + (-1)^{n-1}.P(\cap A_j)$$

$$= n.\frac{1}{n} - C_n^2.\frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3.\frac{(n-3)!}{n!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - C_n^2.\frac{1}{n(n-1)} + C_n^3.\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}.\frac{1}{n!}.$$

Bài toán 4. 52: Trong một trò chơi điện tử, xác suất để game thủ thắng trong một trận là 0,4 (không có hoà). Hỏi phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95?

Hướng dẫn giải

Gọi n là số trận mà game thủ thực hiện

Gọi A là biến cố "Thắng ít nhất một trận trong loạt chơi n trận".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố thua cả n trận thì $P(\overline{A}) = (0,6)^n$

Do đó: $P(A) = 1 - (0,6)^n$

Ta cần tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thoả mãn:

$P(A) \geq 0,95$ tức là $0,05 \geq (0,6)^n$

Vì $(0,6)^5 \approx 0,078$; $(0,06)^6 \approx 0,047$ nên n nhỏ nhất là 6.

Vậy game thủ phải chơi tối thiểu 6 trận.

Bài toán 4. 53: Có một trò chơi xổ số như sau: Từ 90 số Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 số. Người chơi được quyền đặt tiền cho một số bất kì hay cho một nhóm số. Nếu tất cả các số người chơi viết nằm trong 5 số của Ban tổ chức thì người chơi thắng số tiền bằng 15 lần số tiền đặt nếu người chơi viết một số; bằng 270 lần nếu người chơi viết hai số; bằng 5500 lần nếu người chơi viết ba số; bằng 75000 lần nếu người chơi viết bốn số; bằng 1000000 lần nếu anh ta viết năm số.

Tìm số lần thắng trung bình của người chơi khi viết một số, hai số, ..., năm số. Giả sử có 100000 người đặt tiền viết ba số. Tìm xác suất sao cho có hơn 10 người thắng trong số họ.

Hướng dẫn giải

Nếu người chơi viết k số, thì xác suất p_k sao cho tất cả các số anh ta viết nằm trong năm số của Ban tổ chức, bằng:

$$p_k = \frac{C_{90-k}^{5-k}}{C_{90}^{5}};\ p_1 = \frac{1}{18};\ p_2 = \frac{2}{801};\ p_3 = \frac{1}{11748}$$

$$p_4 = \frac{1}{511038};\ p_5 = \frac{1}{43949268}$$

Kí hiệu E_k là số lần thắng trung bình của người chơi khi viết k số và đặt a đồng, ta có:

$$E_1 = 15a.\frac{1}{18} - a.1 = -\frac{1}{6}a;\quad E_2 = -\frac{29}{89}a \approx -\frac{1}{3}a, \dots$$

Vì tất cả $E_k < 0$, nên rõ ràng là trò chơi xổ số này không có lợi cho người chơi dù viết mấy số. Xác suất sao cho có hơn 10 người thắng trong số những người viết 3 số bằng $\approx 0{,}24$.

Bài toán 4. 54: Hai đấu thủ A và B thi đấu trong một giải cờ vua. Người thắng một ván được một điểm và không có ván hoà. Xác suất thắng một ván của đấu thủ A là α và của B là β. Ai hơn đối thủ hai điểm thì thắng giải. Tính xác suất thắng giải của mỗi đấu thủ.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\alpha > \beta$. Kí hiệu $P_n(A)$ là xác suất thắng giải của A sau n ván; A_1 và B_1 là các biến số tương ứng A và B thắng ván đầu tiên. Khi đó:

$$P_n(A) = P(A_1)P_{n-1}(A/A_1) + P(B_1)P_{n-1}(A/B_1) =$$
$$= \alpha.P_{n-1}(A/A_1) + \beta P_{n-1}(A/B_1) \quad (*)$$

Trong đó $P_{n-1}(A/A_1)$ là xác suất A thắng giải sau n–1 ván còn lại, khi A đã thắng ván đầu tiên; $P_{n-1}(A/B_1)$ là xác suất A thắng giải sau n–1 ván còn lại, khi B đã thắng ván đầu tiên.

Xét n > 2. Để A thắng giải sau n–1 ván còn lại, khi A đã thắng ván đầu, thì B phải thắng ván thứ hai, nghĩa là:

$$P_{n-1}(A/A_1) = P(B_1)P_{n-2}(A) = \beta P_{n-2}(A)$$

Tương tự: $P_{n-1}(A/B_1) = P(A_1)P_{n-2}(A) = \alpha P_{n-2}(A)$

Từ đó và (*) ta có $P_n(A) = 2\alpha\beta P_{n-2}(A)$, và suy ra:

$P_4(A) = 2\alpha\beta\alpha^2, \dots, P_{2n}(A) = 2\alpha\beta)^{n-1}\alpha^2$

Khi n = 2 ta có $P_2(A) = \alpha^2$

Vì không có ván hoà nên $\alpha + \beta = 1$, do đó xác suất thắng giải của A là:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}(A) = \alpha^2\left[1 + 2\alpha\beta + (2\alpha\beta)^2 + \dots\right]$$

$$= \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Bài toán 4. 55: Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu.

Hướng dẫn giải

Xác suất để 2 viên bi được lấy ra cùng là bi đỏ là : $\frac{4}{7}.\frac{2}{6}=\frac{4}{21}$

Xác suất để 2 viên bi được lấy ra cùng là bi trắng là : $\frac{3}{7}.\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$

Xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu là : $\frac{4}{21}+\frac{2}{7}=\frac{10}{21}$.

Bài toán 4. 56: Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

Hướng dẫn giải

Số cách gọi số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt là: 5.6.7=210

Vậy số phần tử S là 210.

Số cách gọi số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt là số chẵn:

$$3.6.5= 90 .$$

Vậy xác suất để chọn 3 số tự nhiên phân biệt là số chẵn từ 7 số đã cho là:

$$P=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}.$$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 4. 1: Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau, bé hơn 10 000 được tạo ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4.

Hướng dẫn

Chú ý có chữ số 0. Kết quả 625 số

Bài tập 4. 2: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi 1 khác nhau trong đó có mặt số 0 nhưng không có chữ số 1.

Hướng dẫn

Xét các chữ số 0;2;3;4;5;6;7;8 và 9.Kết quả 33 600 số

Bài tập 4. 3: Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau. Có bao nhiêu cách xếp n học sinh lớp A và n học sinh lớp B mà 2 học sinh đối diện nhau khác lớp và hai học sinh liên tiếp cũng khác lớp.

Hướng dẫn

Lập sơ đồ

X	Y	X	Y	...
Y	X	Y	X	...

Kết quả 2.n!n!

Bài tập 4. 4: Một tổ bộ môn của một trường có 10 giáo viên nam và 15 giáo viên nữ. Có bao nhiêu cách thành lập một hội đồng gồm 6 uỷ viên của tổ bộ môn, trong đó số uỷ viên nam ít hơn số uỷ viên nữ?

Hướng dẫn

Xét các trường hợp 0 nam và 6 nữ, 1 nam và 5 nữ, 2 nam và 4 nữ.

Kết quả 96460 cách

Bài tập 4. 5: Có n dấu – và m dấu +. Đặt chúng lên 1 hàng sao cho không có dấu + nào liền nhau. Có bao nhiêu cách đặt?

Hướng dẫn

Điều kiện $n+1 \geq m$. Đặt n dấu – trừ thành hàng thì có n –1 khoảng cách và 2 vị trí biên thành ra có n +1 vị trí có thể đặt dấu +:

_ – – – – .... – –

Kết quả C_{n+1}^{m}.

Bài tập 4. 6: Cho n điểm trong đó có m điểm nằm trên đường thẳng d và không có 3 điểm nào không cùng thuộc d mà chúng thẳng hàng.

Giả sử $n > m \geq 3$.

a) Nối chúng lại thì có bao nhiêu đường thẳng?

b) Nối chúng lại thì có bao nhiêu tam giác?

Hướng dẫn

a) Một đường thẳng xác định bởi 2 điểm M và N phân biệt.

Xét M, N cùng thuộc d và M thuộc d còn N không thuộc d.

Kết quả $C_n^2 - C_m^2 + 1$

b) Kết quả $C_n^3 - C_m^3$.

Bài tập 4. 7: Phương trình x + y + z + t = 2014 có bao nhiêu bộ nghiệm

a) (x,y,z,t) nguyên dương. b) (x,y,z,t) tự nhiên.

Hướng dẫn

a) Đưa về đếm số ánh xạ hay chọn 2013 vị trí khoảng cách giữa 2 chữ số 1 của dãy 2014 chữ số 1. Kết quả C_{2013}^3.

b) Đặt X = x +1, Y = y +1, Z = z +1, T = t +1 thì X,Y,Z,T nguyên dương. Kết quả C_{2017}^3

Bài tập 4. 8: Từ các chữ số từ 0 đến 9 lập các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau.

a) Có bao nhiêu số. b) Tính tổng các số đó.

Hướng dẫn

a) Kết quả 359 640

b) Dùng dạng số $x = a_1.100 + a_2.10 + a_3$.

Bài tập 4. 9: Ba kì thủ dự giải cờ đấu vòng tròn theo cách thức như sau: đầu tiên A đấu với B, người thắng sẽ đấu với C, tiếp theo người thắng mới sẽ đấu với người đã thua,.... Giải sẽ kết thúc nếu có ai đó thắng liên tiếp hai ván.

a) Tính xác suất thắng cuộc của mỗi kì thủ nếu tất cả đều ngang tài.

b) Tính xác suất thắng cuộc của mỗi kì thủ nếu ván đầu tiên A thắng.

Hướng dẫn

a) Kết quả $\frac{5}{14}, \frac{5}{14}, \frac{4}{14}$

b) Kết quả $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$

Bài tập 4. 10: Một hoán vị $\{x_1, x_2, ..., x_{2n}\}$ của tập hợp $\{1, 2,...,2n\}$ được gọi là có tính chất P, trong đó n là một số nguyên dương, nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một i thuộc $\{1, 2,...,2n-1\}$.

Chứng minh rằng với mỗi n, số các hoán vị có tính chất P lớn hơn số các hoán vị không có tính chất đó.

Hướng dẫn

Lập ánh xạ f từ tập không có tính chất P vào tập có tính chất P.

Chứng minh f không toàn ánh hoặc chứng minh: $|A| > \frac{1}{2}(2n)!$

Bài tập 4. 11: Gọi S là tập hợp tất cả các n–bộ $(X_1, X_2,...,X_n)$ với mỗi X_i là một tập con của tập {1, 2,...,1998}. Với mọi k thuộc S (tức là k là một n–bộ như trên), ta gọi f(k) là số tất cả các phần tử trong hội của n tập hợp của k. Tìm tổng tất cả các f(k) khi k chạy trong khắp S.

Hướng dẫn

Kết quả X_i là một tập con của tập {1, 2, 3, ..., m} thì tổng cần tính là $s(n, m) = m(2^{nm} - 2^{n(m-1)})$

Bài tập 4. 12: Cho S = {1, 2, 3...,280}. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn

Kết quả n = 217

Chuyên đề 5: CÁC ĐẠI LƯỢNG TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NEWTON

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các đại lượng tổ hợp A, P, C: DFG

Giai thừa: $n! = 1.2.3...(n-1).n$ và $0! = 1$

Số hoán vị n phần tử của 1 tập: $P_n = n!$

Số chỉnh hợp chập k của 1 tập có n phần tử: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Số tổ hợp chập k của 1 tập có n phần tử: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Các hằng đẳng thức (tam giác hệ số Pascal)

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, ...$

Nhị thức Newton(Niutơn)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Kết quả: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n . x^n$

$$(a-b)^n = \left[a + (-b)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$; $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n . C_n^n = 0$

Chú ý:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$, $A_n^k = C_n^k . P_k$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ (Pascal),

2) Khai triển tổng quát $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^n = \sum \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$

Với tổng $\sum$ lấy theo $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$

3) Hệ số của x^k trong khai triển của tích: P(x). Q(x) là tổng các hệ số sau khi phân tích đầy đủ (nếu có) dạng:

$$x^k = x^k . x^0 = x^{k-1} . x^1 = x^{k-2} . x^2 = ... = x^0.x^k$$

4) Tổng các hệ số sau khai triển là P(1)

Tổng các hệ số theo luỹ thừa lẻ : $\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$

Tổng các hệ số theo luỹ thừa chẵn : $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$

5) Đánh giá các hệ số: so sánh liên tiếp các hệ số a_k và a_{k+1}

6) Các hướng giải toán về hệ thức tổ hợp:

– Dùng công thức, tính gọn, dùng quy nạp

– Đếm bằng 2 cách khác nhau

– Chọn giá trị cặp số a, b của nhị thức. Để khử các tổ hợp chập lẻ hay chẵn thì ta chọn 2 giá trị x đối nhau rồi cộng hay trừ hai hệ thức.

– So sánh đồng nhất $(1 + x)^n . (1 + x)^m = (1 + x)^{n+m}$

– Đạo hàm: mỗi cấp đạo hàm của 2 vế và chọn giá trị của x cho ta một hệ thức tổ hợp.

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^kx^k + ... + C_n^n.x^n$$

$$\Rightarrow n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + ... + kC_n^k.x^{k-1} + ... + nC_n^n.x^{n-1}$$

$$\Rightarrow n(n-1)(1+x)^{n-2} = 1.2.C_n^2 + 2.3C_n^3x + ... + n(n-1)C_n^n.x^{n-2}$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} = 1.2.3.C_n^3 + 2.3.4C_n^4 + ... + n(n-1)(n-2)C_n^n.x^{n-3}, \quad ...$$

Có khi ta nhân chia biến x, x^2, ... vào 2 vế trước khi đạo hàm để tạo hệ thức mới.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 5. 1: Giải các phương trình:

a) $\dfrac{m!-(m-1)!}{(m+1)!} = \dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}.P_3} = 210$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện m nguyên dương.

$$\frac{m(m-1)!-(m-1)!}{(m-1)!.m.(m+1)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{m-1}{m(m+1)} = \frac{1}{6}$$

$\Leftrightarrow 6m - 6 = m^2 + m \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = 3$.

b) ĐK : $x \in \mathbf{N}$, $x \geq 4$, $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}.P_3} = 210 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)!}{\dfrac{(x-1)!}{3!}.3!} = 210$

$\Leftrightarrow x.(x+1)(x+2) = 210.$

Vì 210 = 5.6.7 nên suy ra x = 5 (chọn)

Bài toán 5. 2: Giải các phương trình 2 ẩn k, n:

a) $\dfrac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240.A_{n+3}^{k+3}$; b) $C_{3n}^{n} = (3n)^k$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $0 \le k \le n$. Phương trình: $\dfrac{(n+5)!}{(n-k)!} = 240.\dfrac{(n+3)!}{(n-k)!}$

$\Leftrightarrow (n+3)!\,(n+4)\,(n+5) = 240(n+3)!$

$\Leftrightarrow n^2 + 9n - 220 = 0 \Leftrightarrow n = 11$ hoặc $n = -20$ (loại)

Vậy nghiệm là (11; k) với k nguyên, $0 \le k \le 11$

b) Ta có: $C_{3n}^{n} = (3n)^k$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!} = (3n)^k \Leftrightarrow \dfrac{(3n-2)!(3n-1)(3n)}{(n-1)!n(2n-1)!(2n)} = (3n)^k$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} = \dfrac{(3n)^{k-1}.2n^2}{(3n-1)} \Leftrightarrow C_{3n-1}^{n-1} = \dfrac{3^{k-1}.2n.n^k}{3n-1}$

Vì $C_{3n-1}^{n-1} \in \mathbf{Z}\ \forall n \ge 1$ nên $3^{k-1}.2n.n^k \,\vdots\, (3n-1)$ (1)

Mà $(3, 3n-1) = 1$, $(n, 3n-1) = 1$

Nên (1) xảy ra $\Leftrightarrow 2n \,\vdots\, (3n-1)$

Do đó $2n \ge 3n-1 \Leftrightarrow n \le 1 \Leftrightarrow n = 1$

Thử lại $C_3^1 = 3^k \Leftrightarrow k = 1$. Vậy (n; k) = (1; 1).

Bài toán 5. 3: Giải các bất phương trình:

a) $C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^{n} > \dfrac{5}{2}A_n^2$ b) $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện n nguyên, $n \ge 2$. BPT: $\dfrac{(n+3)!}{n!3!} > \dfrac{5}{2}.\dfrac{n!}{(n-2)!}$

$\Leftrightarrow n^3 - 9n^2 + 26n + 6 > 0 \Leftrightarrow n(n^2 - 9n + 26) + 6 > 0$: Đúng

Vậy nghiệm n nguyên, $n \ge 2$

b) Điều kiện n nguyên dương.

$\dfrac{(n+4)!}{n!(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{(n+2)!(n+3)(n+4)}{(n-1)!n(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$

$\Leftrightarrow (n+3)(n+4) < 15n \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0$

$\Leftrightarrow 2 < n < 6$. Vậy: n = 3; 4; 5

Bài toán 5. 4: : Giải bất phương trình với hai ẩn n, k:

$$\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} \le 60.A_{n+3}^{k+2}.$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện n, k nguyên, $n \ge k \ge 0$. BPT biến đổi thành:

$(n + 5)(n + 4)(n - k + 1) \le 60$

Xét $n \ge 4$ thì vô nghiệm. Xét n = 3 thì chọn k = 3

Xét n = 2 thì chọn k = 2. Xét n = 1 thì chọn k = 0; 1

Xét n = 0 thì chọn k = 0.

Vậy 5 bộ nghiệm (n,k) là: (0; 0), (1; 0), (1; 1), (2; 2) và (3; 3).

Bài toán 5. 5: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$ b) $\frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện x, y nguyên và $x \ge y \ge 0$. Đặt $u = A_x^y$, $v = C_x^y$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 2u + 5v = 90 \\ 5u - 2v = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 20 \\ v = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x! = 20(x-y)! \\ y! = 2 \end{cases}$$

Nên $y = 2 \Rightarrow x = 5$ (thoả mãn). Vậy: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

b) Điều kiện x, y nguyên dương và $2 \le y + 1 \le x$, ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} \\ \dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)!}{6y!(x+1-y)!} = \dfrac{x!}{5(y+1)!(x-y-1)!} \\ \dfrac{(x+1)!}{6y!(x+1-y)!} = \dfrac{x!}{2(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{6(x-y)(x+1-y)} = \dfrac{1}{5(y+1)} \\ \dfrac{x+1}{6y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó $x + 1 = 3y \quad \Leftrightarrow x = 3y - 1$

Thế vào ta có: y = 3. Vậy nghiệm $\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$.

Bài toán 5. 6 Chứng minh:

a) $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$, với các số tự nhiên $1 \le k \le n$

b) $nC_n^r = (r+1)C_n^{r+1} + rC_n^r$, với các số tự nhiên $n \ge r+1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = \frac{n-k+1}{k}$

Vậy: $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$

b) Ta có $nC_n^r = (n-r+r)C_n^r = (n-r)C_n^r + rC_n^r$

$= (n-r)\frac{n!}{r!(n-r)!} + rC_n^r = (r+1)\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} + r.C_n^r$

$= (r+1)C_n^{r+1} + rC_n^r$.

Bài toán 5. 7: Cho các số nguyên dương k, n. Chứng minh:

a) $T = (k+1)(k+2)...(k+n)$ chia hết cho n!.

b) (4n)! chia hết cho $2^{3n}.3^n$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $T = (k+1)(k+2)...(k+n) = \frac{(k+n)!}{k!} = \frac{(k+n)!}{k!n!}.n! = C_{k+n}^k.n!$

Vì số tổ hợp là số nguyên nên T chia hết cho n!.

Kết quả: Tích n số nguyên liên tiếp chia hết cho n!

$n(n+1) \vdots 2$; $n(n+1)(n+2) \vdots 6$; $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 24$

b) Ta có $2^{3n}.3^n = 24^n = (4!)^n$

Xét số cách phân phối 4n người vào n phòng, mỗi phòng 4 người thì có

$$T = C_{4n}^4.C_{4n-4}^4.C_{4n-8}^4...C_4^4 = \frac{(4n)!}{(4!)^n} = \frac{(4n)!}{(24)^n} \text{ cách.}$$

Vì số cách T là số nguyên nên (4n)! chia hết cho $2^{3n}.3^n$.

Bài toán 5. 8: Chứng minh:

a) $t = \sqrt{10}\left((1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}\right)$ là số tự nhiên và là bội 20.

b) phần nguyên của $u = (2+\sqrt{3})^n$, n nguyên dương là số tự nhiên lẻ.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $t = \sqrt{10}\left((1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}\right)$

$= \sqrt{10}\left(\sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}.(\sqrt{10})^{k} - \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}.(-\sqrt{10})^{k}\right)$

$= \sqrt{10}\left(2\sum_{i=0}^{100} C_{100}^{2i+1}.(\sqrt{10})^{2i+1}\right) = \sqrt{10}\left(2\sum_{i=0}^{100} C_{100}^{2i+1}.10^{i}(\sqrt{10})\right)$

$= 20\sum_{i=0}^{100} C_{100}^{2i+1}.10^{i}$ là số tự nhiên và là bội 20.

b) Ta có $u = \left((2+\sqrt{3})^{n} + (2-\sqrt{3})^{n}\right) - (2-\sqrt{3})^{n}$

Vì $0 < 2-\sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 < (2-\sqrt{3})^{n} < 1$

Và $(2+\sqrt{3})^{n} + (2-\sqrt{3})^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}.2^{n-k}.(\sqrt{3})^{k} + \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}.2^{n-k}.(-\sqrt{3})^{k}$

$= 2\sum_{i=0} C_{n}^{2i}.2^{n-2i}.3^{i}$ là số tự nhiên chẵn

Nên phần nguyên $\left[u\right] = (2+\sqrt{3})^{n} + (2-\sqrt{3})^{n} - 1$ là số tự nhiên lẻ.

Bài toán 5. 9: Chứng minh với các số nguyên:

a) $C_{n}^{r} + 2C_{n}^{r-1} + C_{n}^{r-2} = C_{n+2}^{r}$, $2 \le r \le n$

b) $C_{n}^{r} + 3C_{n}^{r-1} + 3C_{n}^{r-2} + C_{n}^{r-3} = C_{n+3}^{r}$, $3 \le r \le n$

Hướng dẫn giải

Ngoài cách chứng minh trực tiếp từ công thức tổ hợp: $C_{n}^{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ta sử dụng hệ thức Pascal: $C_{n}^{k} + C_{n}^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ như sau:

a) Ta có: $C_{n}^{r} + 2C_{n}^{r-1} + C_{n}^{r-2} = \left(C_{n}^{r-1} + C_{n}^{r}\right) + \left(C_{n}^{r-2} + C_{n}^{r-1}\right)$

$= \left(C_{n+1}^{r} + C_{n+1}^{r-1}\right) = C_{n+2}^{r}$

b) Ta có: $C_{n}^{r} + 3C_{n}^{r-1} + 3C_{n}^{r-2} + C_{n}^{r-3}$

$= \left(C_{n}^{r} + 2C_{n}^{r-1} + C_{n}^{r-2}\right) + \left(C_{n}^{r-1} + 2C_{n}^{r-2} + C_{n}^{r-3}\right)$

$= C_{n+2}^{r} + C_{n+2}^{r-1} = C_{n+3}^{r}$.

Bài toán 5. 10: Chứng minh :

a) $C_{n}^{k} = C_{n}^{n-k}$ với các số tự nhiên $n \ge k$.

b) $C_{n-2}^{k} + 2.C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} = C_{n}^{k}$ với các số tự nhiên $n-2 \ge k$.

Hướng dẫn giải

Ngoài cách dùng công thức, hệ thức Pascal, ta có thể đếm 2 cách

a) Xét tập E có n phần tử.

Số tập con k phần tử là C_n^k. Mỗi cách tạo ra một tập con k phần tử tương ứng duy nhất một tập con n – k phần tử còn lại của E.

Số tập con n –k phần tử là C_n^{n-k} nên có $C_n^k = C_n^{n-k}$.

b) Xét tập E có n phần tử, có 2 phần tử a và b.

Số tập con k phần tử là C_n^k.

Ta chia các tập con k phần tử thành 3 loại khác nhau:

- Các tập con không chứa a và b tức là tập con k phần tử của F = E \ {a;b} nên có C_{n-2}^k tập con k phần tử.
- Các tập con không chứa a hoặc chứa b: lấy tập con k – 1 phần tử của F = E \ {a;b} nên có C_{n-2}^{k-1} tập con rồi bổ sung a hoặc b thì có $2.C_{n-2}^{k-1}$ tập con k phần tử.
- Các tập con chứa a và chứa b: lấy tập con k – 2 phần tử của F = E \ {a;b} nên có C_{n-2}^{k-2} tập con rồi bổ sung a và b thì có C_{n-2}^{k-2} tập con k phần tử.

Vì cách phân chia tập rời nhau nên có $C_{n-2}^k + 2.C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} = C_n^k$.

Bài toán 4. 11: Chứng minh với n, k nguyên dương.:

a) $2^{n-1}\left(x^n + y^n\right) = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i}\left(x+y\right)^{n-2i}\left(x-y\right)^{2i}$ (1) hai số thực x, y.

b) $\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^k = C_{n+r+1}^r$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ thì $x = \dfrac{u+v}{2}$ vaø $y = \dfrac{u-v}{2}$.

Khi đó (1) trở thành: $(u+v)^n + (u-v)^n = 2\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i}u^{n-2i}v^{2i}$

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$(u+v)^n + (u-v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k}v^k\left[1+(-1)^k\right].$$

Và chú ý thêm $\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k}v^k\left[1+(-1)^k\right] = 2\sum_{k:2,k=0}^{n} C_n^k u^{n-k}v^k = 2\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i}u^{n-2i}v^{2i}$,

ta có đpcm.

b) Xét dãy $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+r+1})$ gồm n +1 chữ số 1 và r chữ số 0. Bằng cách chọn r vị trí cho số 0 trong n +r +1 vị trí nên có C^r_{n+r+1} dãy.

Mặt khác, ta xét vị trí chữ số 1 cuối cùng của dãy, vị trí có thể có là n +1, n+2, .., n + r +1. Ta gọi một dãy loại k nếu vị trí chữ số 1 cuối cùng là n + k +1. Trong mỗi dãy loại k thì sau chữ số 1 cuối cùng là r –k chữ số 0 và trước đó là n +k chữ số gồm k chữ số 0 và n chữ số 1 nên có C^k_{n+k} dãy loại k. Suy ra số dãy là tổng các loại dãy số k = 0, k= 1,.., k = r: $\sum_{k=0}^{r} C^k_{n+k}$. Vậy ta có được $\sum_{k=0}^{r} C^k_{n+k} = C^r_{n+r+1}$.

Bài toán 4. 12: Cho S là tập hợp {1, 2,...,n}, n ≥ 1. Ta gọi $p_n(k)$ là số các hoán vị của S có đúng k điểm cố định.

Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $nC^{k-1}_{n-1} = kC^k_n \Rightarrow \frac{n}{k}C^{k-1}_{n-1} = C^k_n$ nếu $k \neq 0$

Để ý: $p_n(k) = C^k_n p_{n-k}(0)$, $\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!$ nên

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k.C^k_n p_{n-k}(0) = n\sum_{k=0}^{n} C^{k-1}_{n-1}p_{n-k}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} C^k_{n-1}p_{n-k-1}(0)$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1}(k) = n(n-1)! = n!$$

Cách khác: ta đếm bằng 2 cách

Ứng với mỗi hoán vị ta viết bộ thứ tự $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ sao cho $d_i = 1$ nếu i thuộc S là điểm cố định của hoán vị đã cho và sao cho $d_i = 0$ trong trường hợp trái lại. Vì số hoán vị là n! nên ta viết được n! bộ thứ tự . Ta đếm số đơn vị tổng quát trong tất cả các bộ thứ tự này bằng hai cách khác nhau.

Số bộ thứ tự , trong cách viết mà có đúng k đơn vị, bằng $p_n(k)$ vì thế số đơn vị tổng quát trong tất cả các vectơ bằng: $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k)$

Mặt khác, số bộ thứ tự trong đó có đơn vị ở vị trí thứ i, bằng (n – 1)!. Vậy số đơn vị ở vị trí thứ i trong tất cả các bộ thứ tự bằng (n–1)! và số tổng quát tất cả đơn vị trong tất cả các bộ thứ tự sẽ bằng n(n–1)! = n!.

Vậy $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$.

Bài toán 5. 13: Chứng minh:

a) $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

b) $C_{2n}^0.3^0 + C_{2n}^2.3^2 + C_{2n}^4.3^4 + ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$.

Hướng dẫn giải

a) Xét nhị thức $(1 + x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.x^k$

Chọn $x = -1$ thì: $0 = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.(-1)^k$

$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + -... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

$\Rightarrow A = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = B$

Chọn $x = 1$ thì có: $2^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i = A + B = 2A$

Vậy: $C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = \frac{1}{2}.2^{2n} = 2^{2n-1}$

b) Ta có 2 khai triển:

$(1 + 3)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1.3^1 + C_{2n}^2.3^2 + ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n}$

$(1 - 3)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1.3^1 + C_{2n}^2.3^2 - ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n}$

Cộng vế theo vế: $4^{2n} + 2^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n}\right)$

Do đó: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n} = \frac{4^{2n} + 2^{2n}}{2}$

$= 2^{4n-1} + 2^{2n-1} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$.

Bài toán 5. 14: Chứng minh

a) $C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + ... + 2^k.C_n^{2k} + ... = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$

b) $C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + ... + 2^k.C_n^{2k+1} + ... = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(1+\sqrt{2})^n = C_n^0 + 2^{1/2}C_n^1 + 2C_n^2 + 2^{3/2}C_n^3 + 2^2C_n^4 + ...$

$(1-\sqrt{2})^n = C_n^0 - 2^{1/2}C_n^1 + 2C_n^2 - 2^{3/2}C_n^3 + 2^2C_n^4 + ...$

Cộng lại 2 vế theo vế:

$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = 2(C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + ... + 2^k.C_n^{2k} + ...)$

Suy ra đpcm.

b) Ta có: $\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{2}C_n^0 + 2C_n^1 + 2\sqrt{2}C_n^2 + 4C_n^3 + ...$

$\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n = \sqrt{2}C_n^0 - 2C_n^1 + 2\sqrt{2}C_n^2 - 4C_n^3 + ...$

Trừ vế theo vế:

$\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n - \sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n = 4\,(C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + ... + 2^k.C_n^{2k+1} + ...)$

Suy ra đpcm.

Bài toán 5. 15: Chứng minh

a) $C_n^k + 4.C_n^{k-1} + 6.C_n^{k-2} + 4.C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$

b) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(1 + x)^4 . (1 + x)^n = (1 + x)^{n+4}$

nên $\sum_{i=0}^{4} C_4^i.x^i.\sum_{j=0}^{n} C_n^j.x^j = \sum_{m=0}^{n+4} C_{n+4}^m.x^m$

Hệ số theo x^k của vế phải là C_{n+4}^k và của vế trái là:

$$C_4^0.C_n^k + C_4^1.C_n^{k-1} + C_4^2.C_n^{k-2} + C_4^3.C_n^{k-3} + C_n^4.C_n^{k-4}$$

$$= 1.C_n^k + 4.C_n^{k-1} + 6.C_n^{k-2} + 4.C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$$

So sánh đồng nhất 2 vế : $C_n^k + 4.C_n^{k-1} + 6.C_n^{k-2} + 4.C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$

Ta có thể dùng trực tiếp hệ thức Pascal: $C_n^r + C_n^{r+1} = C_{n+1}^{r+1}$

b) Ta có $(1 + x)^n . (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$

nên $\sum_{i=0}^{n} C_n^i.x^i.\sum_{j=0}^{n} C_n^j.x^j = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k.x^k$

Để ý: $x^n = x^0 . x^n = x^1 . x^{n-1} = ... = x^n . x^0$ và $C_n^r = C_n^{n-r}$

Do đó hệ số của x^n của vế phải là C_{2n}^n và của vế trái là:

$$C_n^0.C_n^n + C_n^1.C_n^{n-1} + ... + C_n^n.C_n^0$$

$$= C_n^0.C_n^0 + C_n^1.C_n^1 + ... + C_n^n.C_n^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$$

So sánh đồng nhất, ta có: $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

Bài toán 5. 16: Chứng minh hệ thức:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + ... + kC_n^k + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$

b) $1.2.3.C_n^3 + 2.3.4C_n^4 7 + ... + n(n-1)(n-2)C_n^n.7^{n-3} = n(n-1)(n-2)8^{n-3}$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n.x^n$

a) Đạo hàm cấp 1

$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + kC_n^k.x^{k-1} + ... + nC_n^n.x^{n-1}$

Chọn x =1 thì $C_n^1 + 2C_n^2 + ... + kC_n^k + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$

b) Đạo hàm cấp 2

$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 1.2.C_n^2 + 2.3C_n^3 x + ... + n(n-1)C_n^n.x^{n-2}$

Đạo hàm cấp 3

$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} = 1.2.3.C_n^3 + 2.3.4C_n^4 x + ... + n(n-1)(n-2)C_n^n.x^{n-3}$

Chọn x = 7 thì có đpcm.

Bài toán 5. 17: Chứng minh hệ thức:

a) $1.C_n^0 + 2C_n^1 + ... + (n-1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}$.

b) $(-1)^k.C_k^k.C_n^k + (-1)^{k+1}.C_{k+1}^k.C_n^{k+1} + ... + (-1)^n.C_n^k.C_n^n = 0$ với $k \le n$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k$

Nhân 2 vế cho x: $x.(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{k+1}$

Lấy đạo hàm 2 vế: $(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.(k+1)x^k$

Chọn x = 1 thì được kết quả cần chứng minh.

b) Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1.x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n.x^n$

Lấy đạo hàm liên tiếp k lần 2 vế:

$n(1+x)^{n-1} = 1.C_n^1 + 2.C_n^2.x + ... + kC_n^k x^{k-1} + ... + C_n^n nx^{n-1}$

$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n.x^{n-2}$

...

$n(n-1)...(n-k+1)(1+x)^{n-k} = \sum_{i=k}^{n} i(i-1).(i-k+1).C_n^i x^{i-k}$

Chọn x = −1 và chia 2 vế cho k! thì có đpcm.

Bài toán 5. 18: Tính tổng

a) $T_n = \frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + ... + \frac{1}{A_n^2}$ với n nguyên, $n \ge 2$.

b) $S_n = \frac{1}{A_n^3} + \frac{1}{A_{n+1}^3} + ... + \frac{1}{A_{n+m}^3}$ với n nguyên, $n \ge 3$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{1}{A_k^2} = \frac{(k-2)!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Do đó: $T_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$

b) Ta có : $\frac{1}{A_k^3} = \frac{(k-3)!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$

$= \frac{1}{k-1} \frac{1}{k(k-2)} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k-1)(k-2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{2}{k-1} + \frac{1}{k}\right)$

Do đó: $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right)$.

Bài toán 5. 19: Tính tổng:

a) $S = C_n^p + C_{n-1}^{p-1}.C_n^1 + C_{n-2}^{p-2}.C_n^2 + ... + C_{n-p+1}^1.C_n^{p-1} + C_n^p$

b) $T = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $C_{n-k}^{p-k}.C_n^k = \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$= \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{p!}{k!(p-k)!} = C_n^p.C_p^k$

Do đó: $S = C_n^p\left(C_p^0 + C_p^1 + ... + C_p^p\right) = C_n^p.2^p$

Vậy: $S = C_n^p.2^p = \frac{n!2^p}{p!(n-p)!}$.

b) Vì: $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên: $T = 1C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$

hay $T = 1C_n^n + 2C_n^{n-1} + 3C_n^{n-2} + ... + (n+1)C_n^0$

Cộng vế theo vế: $2T = (n+2)\left(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n\right) = (n+2).2^n$

Vậy $T = (n+2)2^{n-1}$

Bài toán 5. 20: Tính các tổng :

$$P = 1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + ... + n.C_n^n$$

$$Q = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$:

$kC_n^k = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$. Áp dụng thì có

$$P = 1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + ... + n.C_n^n$$

$$= n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-1}) = n.2^{n-1}$$

và $k(k-1)C_n^k = k.nC_{n-1}^{k-1} = n.kC_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ nên

$$Q = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n$$

$$= n(n-1)(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{n-2}^{n-2}) = n(n-1).2^{n-2}.$$

Bài toán 5. 21: Tính các tổng :

$$E = \frac{1}{1}.C_n^0 + \frac{1}{2}.C_n^1 + \frac{1}{3}.C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}.C_n^n$$

$$F = \frac{1}{1.2}.C_n^0 + \frac{1}{2.3}.C_n^1 + \frac{1}{3.4}.C_n^2 + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.C_n^n$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$:

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{k+1}.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

Áp dụng thì có

$$E = \frac{1}{1}.C_n^0 + \frac{1}{2}.C_n^1 + \frac{1}{3}.C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}.C_n^n$$

$$= \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + ... + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

và ta có

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k = \frac{1}{k+2}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}C_{n+2}^{k+2}$$

Nên $F = \frac{1}{1.2}.C_n^0 + \frac{1}{2.3}.C_n^1 + \frac{1}{3.4}.C_n^2 + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.C_n^n$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + ... + C_{n+2}^{n+2}) = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}.$$

Bài toán 5. 22: Tính tổng

$$T = \frac{1}{1991}C_{1991}^0 - \frac{1}{1990}C_{1990}^1 + \frac{1}{1989}C_{1989}^2 - ...$$

$$... + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m + ... - \frac{1}{996}C_{996}^{995}$$

Hướng dẫn giải

Với n = 1, 2,..., ta đặt $S(n) = \sum_m (-1)^m C_{n-m}^m$, trong đó tổng được lấy từ m = 0 cho đến hết những số hạng khác 0.

Ta có tổng: $\sum_{k=m}^{n} C_m^k = C_{n+1}^{k+1}$ nên:

$$\sum_{k=m}^{n-2} S(k) \sum_{k=0}^{n-2} \sum_m (-1)^m C_{k-m}^m = \sum_m (-1)^m \sum_{k=2m}^{n-2} C_{k-m}^m$$

$$= \sum_m (-1)^m C_{n-1-m}^{m+1} = 1 - S(n)$$

Ta có $S(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-2} S(k)$, suy ra S(n + 1) = S(n) – S(n – 1) (1)

Ta có S(0) = S(1) = 1, từ đó

S(2) = 0, S(3) = –1, S(4) = –1, S(5) = 0, S(6) = 1, S(7) = 1

Từ (1) ta có S(m) = S(n) nếu m ≡ n (mod 6).

Do $\frac{n}{n-m}C_{n-m}^m = C_{n-m}^m + C_{n-m-1}^{m-1}$ nên ta được:

$$1991.\left[\frac{1}{1991}C_{1991}^0 - \frac{1}{1990}C_{1990}^1 + \frac{1}{1989}C_{1989}^2 - ... + \frac{(-1)^m}{1991-m}C_{1991-m}^m + ... - \frac{1}{996}C_{996}^{995}\right] = 1$$

Suy ra $T = \frac{1}{1991}$.

Bài toán 5. 23: Khai triển:

a) $P(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^7$ b) $Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)^6$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng công thức nhị thức :

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k.x^{7-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$= C_7^0.x^7 + C_7^1.x^6\left(\frac{1}{x}\right)^1 + C_7^2.x^5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_7^3.x^4\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$+ C_7^4.x^3\left(\frac{1}{x}\right)^4 + C_7^5.x^2\left(\frac{1}{x}\right)^5 + C_7^6.x\left(\frac{1}{x}\right)^6 + C_7^7\left(\frac{1}{x}\right)^7$$

$$= x^7 + 7x^5 + 21x^3 + 35x + \frac{35}{x} + \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^7}.$$

b) Ta có $(x^2-1)^6 = C_6^0(x^2)^6.1 + C_6^1(x^2)^5(-1)^1 + C_6^2x^4(-1)^2 + C_6^3x^3(-1)^3$

$$+ C_6^4x^2.(-1)^4 + C_6^5x(-1)^5 + C_6^6(-1)^6$$

$= x^{12} - 6x^{10} + 15x^8 - 20x^6 + 15x^4 - 6x^2 + 1$

Do đó: $Q(x) = (x^2+1)(x^{12} - 6x^{10} + 15x^8 - 20x^6 + 15x^4 - 6x^2+1)$

$= x^{14} - 5x^{12} + 9x^{10} - 5x^8 - 5x^6 + 9x^4 - 5x^2 + 1.$

Bài toán 5. 24: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển:

a) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{15}$, $x \neq 0$ b) $\left(x.\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$, biết $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

Hướng dẫn giải

a) Số hạng tổng quát:

$$a_k = C_{15}^k(x^2)^{15-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{15}^k.x^{2(15-k)}.x^{-k} = C_{15}^k x^{30-3k}$$

Số hạng không chứa x ứng $30-3k = 0 \Leftrightarrow k = 10$ là $C_{15}^{10} = 3003$

b) Ta có: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$ (n nguyên, $n \geq 2$)

$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0$

$\Leftrightarrow n = -13$ hay $n = 12$. Chọn $n = 12$

Với $n = 12$ số hạng tổng quát của khai triển:

$$a_k = C_{12}^k.\left(x.\sqrt[3]{x}\right)^{12-k}.\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k = C_{12}^k.\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-k}.\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k = C_{12}^k.x^{\frac{240-48k}{15}}$$

Số hạng không chứa x ứng: $240 - 48k = 0 \Leftrightarrow k = 5$

Vậy số hạng không chứa x là: $C_{12}^5 = 792$.

Bài toán 5. 25: Tìm các số hạng nguyên của khai triển:

a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5$ b) $\left(\sqrt{5}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^7$.

Hướng dẫn giải

a) Số hạng tổng quát của khai triển: $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5$ là:

$$T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{2}\right)^{5-k}(\sqrt[3]{3})^k=C_5^k2^{\frac{5-k}{2}}.3^{\frac{k}{3}}$$

Để T_{k+1} nguyên thì $\dfrac{5-k}{2}$ và $\dfrac{k}{3}$ nguyên, $k = 0, 1,\dots,5$

Do đó $k = 3$. Vậy số hạng nguyên là $T_4=C_5^3.2.3=60$

b) Số hạng thứ k là:

$$T_{k+1}=C_7^k\left(\sqrt{5}\right)^{7-k}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^k=C_7^k.5^{\frac{7-k}{2}}.2^{\frac{5k}{3}} \text{ với } k=0,1,\dots,7$$

Số hạng nguyên thì $\dfrac{7-k}{2}$ và $\dfrac{5k}{3}$ là số nguyên nên $k = 3$

Vậy số hạng nguyên là: $T_4=C_3^7.5^2.2^5=28\,000$.

Bài toán 5. 26: Tìm hệ số của :

a) x^k trong khai triển $P(x) = (1 + x)^3 . (1 + x)^n$

b) x^4 của khai triển: $Q(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}$

Hướng dẫn giải

a) $P(x) = (1 + x)^3 . (1 + x)^n = (1 + 3x + 3x^2 + x^3)\left(\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k\right)$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k+3\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{k+1}+3\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{k+2}+\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{k+3}$$

Với $n\ge k\ge 3$ thì hệ số của x^k: $C_n^k+3C_n^{k-1}+3.C_n^{k-2}+C_n^{k-3}$.

b) Ta có $Q(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10} = ((1 + 2x) + 3x^2)^{10}$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(1+2x)^{10-k}(3x^2)^k=\sum_{k=0}^{10}3^k.C_{10}^k(1+2x)^{10-k}.x^{2k}$$

Hệ số của x^4 chỉ có khi $k\le 2$

Với $k = 0$ thì có đa thức: $3^0.C_{10}^0(1+2x)^{10}$

Với $k = 1$ thì có đa thức: $3^1.C_{10}^1(1+2x)^9.x^2$

Với k = 2 thì có đa thức: $3^2.C_{10}^2(1+2x)^8.x^4$

Vậy hệ số theo x^4 là:

$$3^0.C_{10}^0.C_{10}^4.2^4 + 3^1.C_{10}^1.C_9^2.2^2 + 3^2.C_{10}^2.C_8^0.2^0 = 8085.$$

Bài toán 5. 27: Tìm hệ số của

a) x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

b) x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết suy ra: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + .. + C_{2n+1}^n = 2^{20}$ (1)

Vì $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$, $\forall k$, $0 \le k \le 2n + 1$ nên:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^n = \frac{1}{2}(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}) \quad (2)$$

Từ khai triển nhị thức Niutơn của $(1 + 1)^{2n+1}$ suy ra:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $2^{2n} = 2^{20}$ hay n = 10

Ta có: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^{10-k}(x^7)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thoả mãn: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hệ số của x^{26} là: $C_{10}^6 = 210$.

b) Ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \left(C_{n+3}^{n+1} + C_{n+3}^n\right) - C_{n+3}^n = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2!} = 7(n+3) \Leftrightarrow n + 2 = 7.2! = 14 \Leftrightarrow n = 12$

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_{12}^k(x^{-3})^k.\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k} = C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$

Ta có: $\frac{60-11k}{2} = 8$ nên k = 4. Do đó hệ số của x^8 là C_{12}^4.

Bài toán 5. 28: Trong khai triển: $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2^2}\right)...\left(x + \frac{1}{2^n}\right)$.

a) Tìm hệ số của x^{n-1} b) Tìm hệ số của x^{n-2}.

Hướng dẫn giải

Ta có $P(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2^2}\right)...\left(x+\frac{1}{2^n}\right)$

$= x^n + A.x^{n-1} + B.x^{n-2} + ...$

a) Hệ số của x^{n-1} là :

$$A = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}.$$

b) Hệ số của x^{n-2} là : $B = \frac{1}{2}.\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}.\frac{1}{2^n}$ $\frac{4^n-3.2^n+2}{3.4^n}$

Ta có $A^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}+2B$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} + 2B = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n}) + 2B$$

Suy ra $B = \frac{1}{2}\left(A^2 - \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^n})\right) = \frac{4^n-3.2^n+2}{3.4^n}$.

Bài toán 5. 29: Tìm hệ số của x^{50} trong khai triển:

a) $P(x) = (1+x)^{1000} + (1+x)^{999} + (1+x)^{998} + ... + x + 1$

b) $Q(x) = (1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + ... + x^{1000}$.

Hướng dẫn giải

a) $P(x) = (1+x)^{1000} + (1+x)^{999} + (1+x)^{998} + ... + (1+x) + 1$

$$= \sum_{k=0}^{1000} C_{1000}^k.x^k + \sum_{k=0}^{999} C_{999}^k.x^k + ... + \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k.x^k + \sum_{k=0}^{49} C_{49}^k.x^k + ... + 1$$

Hệ số của x^{50} trong khai triển ứng với k =50 là: $C_{1000}^{50} + C_{999}^{50} + ... + C_{50}^{50}$

b) Ta có $(x+1)^{1000} - x^{1000} = (x+1-1).Q(x) = Q(x)$ nên hệ số của x^{50} trong khai triển Q(x) là hệ số của x^{50} trong khai triển $(x+1)^{1000}$.

Mà ta có $(x+1)^{1000} = (x+1)^{1000} = \sum_{k=0}^{1000} C_{1000}^k.x^k$.

Vậy hệ số của x^{50} trong khai triển Q(x) là C_{1000}^{50}.

Bài toán 5. 30: Tìm hệ số của x^{50} trong khai triển:

$$P(x) = (1+x)^1 + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + ... + 1000(1+x)^{1000}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $P(x) = (1+x).\sum_{i=1}^{999} i(1+x)^{i-1} = (1+x).\left(\sum_{i=1}^{1000}(1+x)^i\right)'$

$$= (1+x).\left((1+x)\frac{1-(1+x)^{1000}}{1-(1+x)}\right)'$$

$$= \frac{1000(1+x)^{1001}}{x} - \frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}$$

Suy ra hệ số của x^{50} trong khai triển là $1000C_{1001}^{51} - C_{1001}^{52}$.

Bài toán 5. 31: Xác định hệ số của x^2 của khai triển

$P(x) = ...(((x-2)^2-2)^2 - ... - 2)^2$, k lần mở đóng ngoặc.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$P(0) = (...(((-2)^2-2)^2 - 2)^2 - ... - 2)^2$, k lần mở đóng ngoặc

$= (... ((4-2)^2-2)^2 - ... - 2)^2$, k– 1 lần mở đóng ngoặc

$= (... ((4-2)^2-2)^2 - ... - 2)^2$, k – 2 lần mở đóng ngoặc

$= ...$

$= ((4-2)^2-2)^2 = (4-2)^2 = 4.$

Đặt A_k là hệ số của x, B_k là hệ số của x^2 và $P_k.x^3$ là tổng các số hạng chứa các lũy thừa lớn hơn 2 của x.

Ta có thể viết:

$P(x) = (...(((x-2)^2-2)^2 - ... - 2)^2$, k lần mở đóng ngoặc.

$= P_kx^3 + B_kx^2 + A_kx + 4$

$= [(...((x-2)^2-2)^2 ...)2-2]^2$, k– 1 lần mở đóng ngoặc.

$= [(P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}.x + 4) - 2]^2$

$= P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}.x + 2)^2$

$= P_{k-1}^2x^6 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^5 + (2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2)x^4$

$\qquad + (4P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1})x^3 + (4B_{k-1} + A_{k-1}^2)x^2 + 4A_{k-1}x + 4$

$= \Big[P_{k-1}^2x^3 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^2 + (2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2)x +$

$\qquad + 4(P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1}\Big]x^3 + (4B_{k-1} + A_{k-1}^2)x^2 + 4A_{k-1}x + 4$

Từ đó $A_k = 4A_{k-1}$, $B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}$

Ta tính A_k:

Vì $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, nên ta có $A_1 = -4$.

Do đó $A_2 = -4.4 = -4^2$, $A_3 = -4^3$, ... và một cách tổng quát $A_k = -4^k$.

Ta tính B_k: $B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}$

$= A_{k-1}^2 + 4(A_{k-2}^2 + 4B_{k-2})$

$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2(A_{k-3}^2 + 4B_{k-3})$

$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + 4^3(A_{k-4}^2 + 4B_{k-4})$

$= \dots$

$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + \dots + 4^{k-3}A_2^2 + 4^{k-2}A_1^2 + 4^{k-1}B_1$

Thế $B_1 = 1$, $A_1 = -4$, $A_2 = -4^2$, $A_3 = -4^3$, ..., $A_{k-1} = -4^{k-1}$ vào biểu thức ta được: $B_k = 4^{2k-2} + 4.4^{2k-4} + 4^2 . 4^{2k-6} + \dots + 4^{k-2} . 4^2 + 4^{k-1} . 1$

$= 4^{2k-2} + 4^{2k-3} + 4^{2k-4} + \dots + 4^{k+1} + 4^k + 4^{k-1}$

$= 4^{k-1}(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k-2} + 4^{k-1})$

$= 4^{k-1}\dfrac{4^k - 1}{4 - 1}$

Vậy hệ số theo x^2 là $B_k = \dfrac{4^{2k-1} - 4^{k-1}}{3}$.

Bài toán 5. 32: Tìm hệ số của :

a) $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x - 3y)^{200}$

b) $x^6y^5z^4$ trong khai triển $(2x - 5y + z)^{15}$

Hướng dẫn giải

a) $(2x - 3y)^{200} = \sum\limits_{k=0}^{200}(2x)^{200-k}(-3y)^k = \sum\limits_{k=0}^{200}(-1)^k 2^{200-k}.3^k x^{200-k}.y^k$

Nên hệ số của $x^{101}y^{99}$ ứng với k = 99 là $-C_{200}^{99}2^{101}3^{99}$.

b) Ta có $(2x - 5y + z)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k(2x - 5y)^{15-k}z^k$

$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \sum_{i=0}^{15-k} C_{15-k}^i(2x)^{15-k-i}(-5y)^i z^k$$

Nên hệ số của $x^6y^5z^4$ ứng với k = 4, i= 5 là $2^6(-5)^5 . \dfrac{15!}{6!5!4!}$.

Bài toán 5. 33: Trong khai triển của

a) $(1 + x)^{2n}$, tìm số hạng chính giữa.

b) $\left(a^{-1/6}.\sqrt{b} + b^{-1/6}.\sqrt[3]{a}\right)^{21}$, xác định số hạng thứ k mà luỹ thừa của a và b bằng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k . x^k$ .Vì 2n chẵn nên số hạng chính giữa ứng với $k = n$ là: $C_{2n}^n . x^n = \frac{(2n)!}{n!n!} x^n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} . 2^n . x^n$

b) Ta có $\left(a^{-1/6}\sqrt{b} + b^{-1/6}\sqrt[3]{a}\right)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k (a^{-1/6}.b^{1/2})^k . (b^{-1/6}.a^{1/3})^{21-k}$

$= \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k a^{\left(\frac{21-k}{3} - \frac{k}{6}\right)} b^{\left(\frac{k}{2} - \frac{21-k}{6}\right)} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k a^{\left(\frac{42-3k}{6}\right)} b^{\left(\frac{4k-21}{6}\right)}$

Luỹ thừa của a và b giống nhau khi: $\frac{42-3k}{6} = \frac{4k-21}{6} \Leftrightarrow 63 = 7k \Leftrightarrow k = 9$.

Bài toán 5. 34: Sau khi khai triển: $P(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}$ và $Q(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1000}$ thì hệ số của x^{20} của đa thức nào lớn hơn?

Hướng dẫn giải

Ta có $P(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}$ và $H(x) = (1 + x^2 + x^3)^{1000} = P(-x)$ nên hệ số của x^{20} hai đa thức bằng nhau, kí hiệu a_{20}.

Ta có $Q(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1000}$ và $K(x) = (1 - x^2 - x^3)^{1000} = Q(-x)$ nên hệ số của x^{20} hai đa thức bằng nhau, kí hiệu b_{20}.

Trong khai triển $H(x) = (1 + x^2 + x^3)^{1000}$ toàn hệ số dương nên hệ số của x^{20} của H(x) lớn hơn hệ số của x^{20} của K(x).

Vậy $a_{20} > b_{20}$ nên sau khi khai triển hệ số của x^{20} của $P(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}$ lớn hơn hệ số của x^{20} của $Q(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1000}$.

Bài toán 5. 35: Cho n là một số nguyên dương. Tìm số các hệ số lẻ của đa thức $U_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$

Hướng dẫn giải

Xét các đa thức có hệ số nguyên P(x) và Q(x). Ta kí hiệu P(x) ~ Q(x) nếu P(x) – Q(x) chỉ gồm các hệ số chẵn (do đó số các hệ số lẻ của P(x) và Q(x) bằng nhau). Quan hệ này có những tính chất:

1) Nếu P(x) ~ Q(x); Q(x) ~ G(x) thì P(x) ~ G(x)

2) Nếu P(x) ~ Q(x); G(x) ~ H(x) thì P(x) . G(x) ~ Q(x) . H(x)

3) Nếu $P(x)(x^2 + x + 1) \sim 0$ thì $P(x) \sim 0$.

Bằng qui nạp dễ dàng chứng minh được với $n = 2^s$ thì $(x^2 + x + 1)^{2s} \sim x^{2^{S+1}} + x^{2^S} + 1$ do đó số cần tìm, kí hiệu là $T(U_n(x))$ bằng 3.

Xét $n = 2^m - 1$. Ta phân biệt hai trường hợp:

Với $m = 2k+1$ khi đó $m \equiv 1 \pmod 3$ xét đa thức:

$$R(x) = (x+1)(x^{2n-1} + x^{2n-4} + ... + x^{n+3}) + x^{n-1} + x^n + x^{n-1} + (x+1)(x^{n-4} + x^{n-7} + ... + x^3 + 1).$$

Từ các nhận xét suy ra: $R(x)(x^2+x+1)$

$\sim (x+1)(x^{2n+1}+x^{2n}+...+x^{n+4}+x^{n+3})+2^{n-1}(x^4+x^2+1)$

$+ (x+1)(x^{n-2}+x^{n-3}+...+x+1)$

$\sim (x^{2n+2}+...+xn^{+3}) + (x^{n+3}+x^{n+1}+x^{n-1})+(x^{n-1}+1)$

$\sim x^{2n+2}+xn^{+1}+1/n$

Mặt khác $U_n(x)(x^2+x+1) \sim (x^2+x+1)^2 \sim x^{2n+2}+xn^{+1}+1$

Vậy: $(U_n(2) . R(x))(x^2+x+1) \sim 0 \Rightarrow U_n(x) \sim R(x)$.

$$\Rightarrow T(U_n(x)) = T(R(x)) = \frac{2^{m+2}+1}{3}$$

Với $m = 2k$, $n \equiv 0 \pmod 3$

Khi đó lập luận tương tự với đa thức:

$R(x) = (x+1)(x^{2n-1}+x^{2n-4}+...+x^{n+5}+x^{n+2})+x^n$

$+ (x+1)(x^{n-3}+x^{n-6}+...+x^3+1)$

Ta được: $T(U_n(x)) = T(R(x)) = \dfrac{2^{m+2}-1}{3}$

Tóm lại với $n = 2^m - 1$ thì $T(U_n(x)) = \dfrac{2^{m+2}-(-1)^m}{3}$

Xét trường hợp tổng quát. Viết n trong hệ nhị phân:

$$n = \underbrace{1...1}_{a_k}\ \underbrace{0...0}_{b_k}\ \underbrace{1...1}_{a_{k-1}}\ \underbrace{000...0}_{b_{k-1}}\ \underbrace{1...1}_{a_1}\ \underbrace{0...0}_{b_1}$$

Đặt $S_1 = b_1$; $S_2 = b_1 + a_1 + b_2$

$S_k = b_1 + a_1 + ... + a_{k-1} + b_k$

thì $n = \sum_{i=1}^{k} 2^{S_i}(2^{a_i}-1)$ Do đó:

$$Un(x) = \prod_{i=1}^{k}(x^2+x+1)^{2^{S_i}}(2^{a_i}-1) \sim \prod_{i=1}^{k}(x^{2^{S_i+1}}+x^{2^{S_i}}+1)^{2^{a_i-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\theta_{a_i}(x^2)^{Si} \text{ với } \theta_j(x) = U^j_{2-1}(x)$$

Do đa thức $\left(x^{2^{Si+1}}+x^{2^{Si}}+1\right)^{2^{ai-1}}$ có hệ số khác không đứng trước 2^v ($v > 0$).

Rõ ràng 2^{Si} chia hết cho v và:

$$v < 2^{Si+1}.(2^{a_i}-1) < 2^{S_i+a_i+1} \le 2^{S_i+a_i+b_i} = 2^{Si+1}.$$

Do đó số các chữ số 1 trong khai triển nhị phân của v chỉ có thể chiếm vị trí với $S_i \le t \le S_{i+1} - 1$.

Vậy: $\prod_{i=1}^{k}\theta a_i(x^{2^{S_i}}) \sim \prod_{i=1}^{k}(x^{r_i-1}+x^{r_i-2}+...+x^{r_i-d_i})$

Ở đây d_i là số các hệ số lẻ của $\theta_{a_i}\left(x^{2^{S_i}}\right)$ tức là $d_i = \dfrac{2^{a_i+2}-(-1)^{a_i}}{3}$

Hơn nữa: $\prod_{i=1}^{k}(x^{r_i-1}+x^{r_i-2}+...+x^{r_i-d_i}) = \sum_{\substack{0\le p_i\le d_i\\ 1\le i\le k}} x^{r_1p_1+r_2p_2+...+r_kp_k}$

Tất cả các số này là phân biệt do sự giải thích ở trên.

Vậy: $T(U_n(x)) = \prod_{i=1}^{k}\dfrac{2^{a_i+2}-(-1)^{a_i}}{3}$

Bài toán 5. 36: Giả sử Q(x) là đa thức khác không. Chứng minh với mỗi $n \in \mathbf{Z}^+$ đa thức $P(x) = (x-1)^n Q(x)$ có không ít hơn n+1 hệ số khác không.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng qui nạp theo $n \in \mathbf{Z}^+$. Với n = 0 đa thức

$P(x) = Q(x)$ có ít nhất một hệ số khác không, vì Q(x) không $\equiv 0$.

Giả sử $n \ge 1$, đã chứng minh được rằng nếu đa thức R(x) khác không thì đa thức $(x-1)^{n-1}R(x)$ có không ít hơn n hệ số khác không.

Giả thiết rằng với đa thức khác không $Q(x) = x^r.Q_0(x)$, $r \in \mathbf{Z}+$, $Q_0(0) \ne 0$, đa thức $P(x) = (x-1)^n Q(x) = x^r(x-1)^n . Q_0(x)$ có không nhiều hơn n hệ số khác không.

Khi đó đa thức $P_0(x) = (x-1)^n . Q_0(x)$ cũng không nhiều hơn n hệ số khác không, còn $P'_0(x)$ có không nhiều hơn n−1 hệ số khác không.

Nhưng $P'_0(x) \equiv (x-1)^n Q'_0(x) + n(x-1)^{n-1}Q_0(x)$

$\equiv (x-1)^{n-1}R(x)$ với R(x) không $\equiv 0$ (vì $P_0(x)$ không phải hằng số). Điều này mâu thuẫn với giả thiết qui nạp.

Vậy khẳng định được chứng minh xong.

Bài toán 5. 37: Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{n+2}$. Chứng minh rằng với mọi đa thức $Q(x) \in R[x]$ bậc n thì đa thức: $P(x) = (x^2 - 2x\cos x + 1).Q(x)$ không thể có tất cả các hệ số đều không âm.

Hướng dẫn giải

Giả sử: $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$

và $P(x) = b_0x^{n+2} + b_1x^{n+1} + ... + b_{n+1}x + b_{n+2}$.

Khi đó: $P(x) = (x^2 - 2x.\cos\alpha + 1).Q(x)$ cho ta:

$b_0 = a_0$

$b_1 = a_1 - 2a_0\cos\alpha$

$b_2 = a_2 + a_0 - 2a_1\cos\alpha$

...

$b_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n\cos\alpha$

$b_{n+2} = a_n$

Suy ra: $b_k = a_k + a_{k-2} - 2a_{k-1}\cos\alpha$, $a_{n+2} = a_{n+1} = 0$, $a_1 = a_2 = 0$

và $\sum\limits_{k=0}^{n+2} b_k \sin k\alpha = 0$

Mà $\sin k\alpha > 0$ vì $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{n+2}\right)$ nên tồn tại hệ số $b_j < 0$.

Bài toán 5. 38: Tìm hệ số lớn nhất của khai triển: $(1 + 2x)^{12}$

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát của khai triển: $(1 + 2x)^{12}$ là $a_k = C_{12}^k.(2x)^k$

có hệ số $b_k = C_{12}^k.2^k$. Xét $b_k < b_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k.2^k < C_{12}^{k+1}.2^{k+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{12!}{k!(12-k!)}.2^k < \frac{12!}{(k+1)!(11-k)!}.2^{k+1} \Leftrightarrow k + 1 < 2(12 - k) \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$$

Do đó: $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_7 < b_8 > b_9 > b_{10} > b_{11} > b_{12}$

Vậy hệ số lớn nhất là $b_8 = C_{12}^8.2^8 = 126\,720$.

Bài toán 5. 39: Trong khai triển: $P(x) = (2 - 3x + 5x^2)^{123}$

a) Tính tổng tất cả hệ số.

b) Tính tổng tất cả hệ số của các luỹ thừa lẻ của x.

c) Tính tổng tất cả hệ số của các luỹ thừa chẵn của x.

Hướng dẫn giải

Ta có $P(x) = (2 - 3x + 5x^2)^{123} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{246}x^{246}$

Nên $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{246}$

$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{246}$

a) Tổng tất cả hệ số là $P(1) = (2 - 3 + 5)^{123} = 4^{123}$

b) Tổng tất cả hệ số của các luỹ thừa lẻ của x:

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{4^{123} - 10^{123}}{2}$$

c) Tổng tất cả hệ số của các luỹ thừa chẵn của x:

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{4^{123} + 10^{123}}{2}.$$

Bài toán 5. 40: Cho dãy đa thức $P_n(x)$ xác định định theo $f_n(x)$:

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{P_0(x)}{1-x}, f_n(x) = x.f'_{n-1}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Tính tổng các hệ số của $P_n(x)$.

Hướng dẫn giải

Tổng các hệ số của $P_n(x)$ là $P_n(1)$.

Ta có $P_{n+1}(x) = (1-x)^{n+2}.f_{n+1}(x) = (1-x)^{n+2}.x.f'_{n-1}(x)$

$$= (1-x)^{n+2}.x\left(P_n'(x).\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(n+1).P_n(x)}{(1-x)^{n+2}}\right)$$

$$= x\left((1-x).P_n'(x) + (n+1).P_n(x)\right)$$

Do đó $P_{n+1}(1) = (n+1).P_n(1)$

Nên $P_n(1) = n.P_{n-1}(1) = n(n-1).P_{n-2}(1) = \ldots$

$= n(n-1)(n-2)\ldots1.P_0(1) = n(n-1)(n-2)\ldots1.1 = n!$

Vậy tổng các hệ số của $P_n(x)$ là $P_n(1) = n!$.

Bài toán 5. 41: Tìm số nguyên dương n biết rằng hệ số :

a) của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31.

b) của x^{3n-3} trong khai triển $(x^2+1)^n(x+2)^n$ là: $a_{3n-3} = 26n$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$ nên hệ số của x^2 là $C_n^2.\left(-\frac{1}{4}\right)^2$

Từ điều kiện $C_n^2.\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 31$ ta suy ra n = 32

b) Để ý $(x^2 + 1)^n.(x + 2)^n$ là tích 2 đa thức có bậc 2n và bậc n nên có bậc khai triển là 3n.

Ta có $(x^2 + 1)^n.(x + 2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2(n-k)}.\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i}.2^i$

Vì $3n - 3 = 2n + (n-3) = (2n-2) + (n-1)$

nên hệ số của x^{3n-3} là $a_{3n-3} = C_n^0.C_n^3.2^3 + C_n^1.C_n^1.2$.

Theo giả thiết $a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow C_n^0.C_n^3.2^3 + C_n^1.C_n^1.2 = 26n$

$\Leftrightarrow 2n(2n^2 - 3n + 4) = 3.26n \Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0$

Chọn nghiệm n = 5.

Bài toán 5. 42: Cho khai triển $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$ có số hạng thứ tư bằng 20n và $C_n^3 = 5C_n^1$. Tìm số nguyên dương n và x.

Hướng dẫn giải

Với n nguyên, $n \geq 3$, ta có $C_n^3 = 5C_n^1 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5\frac{n!}{1!(n-1)!}$

$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 30 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$

Chọn n = 7 nên có $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = \left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^7$

Số hạng thứ tư bằng 20n = 140 nên $C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 140$

$\Leftrightarrow 35.2^{2x-2}.2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$ (chọn).

Vậy n = 7 và x = 4.

Bài toán 5. 43: Tìm số nguyên dương n sao cho:

a) $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n.C_n^n = 243$

b) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.2^k$ hay $3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + ... + 2^n.C_n^n$

Do đó: $3^n = 243 = 3^5$. Vậy n = 5.

b) Dùng các khai triển nhị thức $(1-1)^{2n}$ và $(1+1)^{2n}$

Ta có $(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n-1}$

Và $(1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - ..... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n-1}$

Trừ vế theo vế thì được: $2^{2n} - 0 = 2[C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}]$

$\Rightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$ nên $2^{2n-1} = 2048 = 2^{11}$

Do đó 2n − 1 = 11 $\Leftrightarrow$ 2n = 12. Vậy: n = 6.

Bài toán 5. 44: Tìm số nguyên dương n sao cho:

a) $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + ... + n.C_n^n = 11264$

b) $1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2C_n^n = n(n+1)2^{1234}$

Hướng dẫn giải

a) Xét: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k$ lấy đạo hàm 2 vế và cho x = 1 thì:

$n.2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k.C_n^k$ hay $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + ... + n.C_n^n = n.2^{n-1}$

Do đó: $n.2^{n-1} = 11264$

Vì dãy $u_n = n.2^{n-1}$ tăng và $u_{11} = 11.2^{10} = 11264$ nên n = 11.

b) Xét: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k$

Lấy đạo hàm 2 vế và nhân x vào 2 vế rồi đạo hàm tiếp lần nữa, cho $x = 1$ thì được: $1^2.C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2.C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$

Do đó $n(n+1)2^{1234} = n(n+1)2^{n-2} \Leftrightarrow 2^{n-3} = 2^{1234} \Leftrightarrow n = 1237$.

Bài toán 5. 45: Tìm số nguyên dương n sao cho:

a) $1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n = 105.2^{23}$

b) $\frac{1}{1}.C_n^0 + \frac{1}{2}.C_n^1 + \frac{1}{3}.C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}.C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{2020}$

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh

$$1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n = n(n-1).2^{n-2}.$$

Do đó $n(n-1).2^{n-2} = 105.2^{23} = 21.20.2^{19}$

Xét $n < 21$ thì $n(n-1).2^{n-2} < 21.20.2^{19}$: loại

Xét $n > 21$ thì $n(n-1).2^{n-2} > 21.20.2^{19}$: loại

Xét $n = 21$ thì thỏa mãn. Vậy $n = 21$.

b) Ta chứng minh $\frac{1}{1}.C_n^0 + \frac{1}{2}.C_n^1 + \frac{1}{3}.C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}.C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Do đó $\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2020} \Leftrightarrow n+1 = 2020 \Leftrightarrow n = 2019$.

Bài toán 5. 46: Cho các số tự nhiên thoả $0 \le k \le n$.

Chứng minh: $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$

Hướng dẫn giải

Đặt $u_i = C_{2n+i}^n.C_{2n-i}^n$ với $i = 0, 1, ..., n$

Ta chứng minh dãy (u_i) giảm. Thật vậy với $i \ge 1$:

$u_i \le u_{i-1} \Leftrightarrow C_{2n+i}^n.C_{2n-i}^n \le C_{2n+i-1}^n.C_{2n-i+1}^n$

$\Leftrightarrow \frac{(2n+i)!}{n!(n+i)!}.\frac{(2n-i)!}{n!(n-i)!} \le \frac{(2n+i-1)!}{n!(n+i-1)!}.\frac{(2n-i+1)}{n!(n-i+1)!}$

$\Leftrightarrow (2n+i)(n-i+1) \le (2n-i+1)(n+i) \Leftrightarrow (2i-1).n \ge 0$: đúng.

Do đó: $u_k \le u_{k-1} \le u_{k-2} \le ... \le u_0$

$\Rightarrow C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le C_{2n}^n.C_{2n}^n = \left(C_{2n}^n\right)^2$.

Bài toán 5. 47: Cho n nguyên, $n \ge 2$.

Chứng minh bất đẳng thức : $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Hướng dẫn giải

Khai triển nhị thức:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k = C_n^0\left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + ... = 1 + 1 + ...$$

Vì các số hạng còn lại dương nên: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$

Và với n nguyên, $n \ge 2$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k$

$$= 1+1+\frac{n!}{2!(n-2)!}.\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!}.\left(\frac{1}{n}\right)^3 + ...$$

$$= 2+\frac{1}{2!}.\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}.\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+ ... < 2 + \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$$

$$< 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 2+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 3-\frac{1}{n} < 3$$

Tóm lại, ta đã chứng minh $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Bài toán 5. 48: Cho n nguyên dương, $n \ge 2$ và $a, b > 0$.

Chứng minh: $\frac{(a+b)^n - a^n - b^n}{2^n - 2} \ge \sqrt{(ab)^n}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ và khai triển nhị thức:

$$\frac{(a+b)^n - a^n - b^n}{2^n-2} = \frac{\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i}.b^i - a^n - b^n}{2^n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i.a^{n-i}.b^i}{2^n-2}$$

$$= \frac{1}{2^n-2}.\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i\left(a^{n-i}b^i + \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i.b^{n-i}.a^i\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{2^n - 2}.\sum_{i=1}^{n} C_n^i \sqrt{a^n.b^n} \text{ (Cauchy)}$$

$$= \frac{1}{2^n - 2}(2^n - 2).\sqrt{a^n b^n} = \sqrt{(ab)^n}.$$

Bài toán 5. 49: Cho các số nguyên dương m và n sao cho $n \leq m$. Chứng minh rằng: $2^n.n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 + m)^n$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{(m+n)!}{(m-n)!} = (m + n)(m + n - 1)...(m - n + 2)(m - n + 1)$

$$= \prod_{i=1}^{n}(m+1-i)(m+i)$$

Ngoài ra $2^n . n! = 2^n.1.2.3.n = (2.1)(2.2)...(2n) = \prod_{i=1}^{n} 2i$ và

$$(m^2 + m)^n = (m^2 + m)(m^2 + m)...(m^2 + m) = \prod_{i=1}^{n}(m^2 + m).$$

Do đó, các bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\prod_{i=1}^{n} 2i \leq \prod_{i=1}^{n}(m+1-i)(m+i) \leq \prod_{i=1}^{n}(m^2 + m)$$

Ta có: $2i = i^2 + i - i^2 + i \leq m^2 + m - i^2 + i = (m + 1 - i)(m + i)$

$\leq m(m + 1) = m^2 + m$

vì i là số nguyên nằm giữa 1 và n. Suy ra:

$2i \leq (m + 1 - i)(m + i) \leq m^2 + m$

do đó ta được: $\prod_{i=1}^{n} 2i \leq \prod_{i=1}^{n}(m+1-i)(m+i) \leq \prod_{i=1}^{n}(m^2 + m)$

Vậy các bất đẳng thức đã cho là đúng.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 5. 1: Khai triển:

a) $P(x) = (2x + 1)^5$ b) $(a + b)^7$

Hướng dẫn

a) Dùng công thức Nhị thức

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Kết quả $P(x) = 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$.

b) Kết quả $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Bài tập 5. 2: Tìm số hạng chính giữa của khai triển:

a) $(1 + x)^{10}$ b) $P(x) = \left(x + \frac{4}{x^2}\right)^{2014}$

Hướng dẫn

a) Số hạng chính giữa của khai triển là số hạng thứ 6.

Kết quả $252x^5$

b) Kết quả $C_{2014}^{1007}.x^{1007}\left(\frac{4}{x^2}\right)^{1007} = C_{2014}^{1007}.4^{1007}.\frac{1}{x^{1007}}$.

Bài tập 5. 3: Tìm hệ số của :

a) x^9 trong khai triển: $P(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + ... + (1 + x)^{14}$

b) x^3 trong khai triển $P(x) = (x + 1)^2.(3-x)^{10}$.

Hướng dẫn

a) Dùng Nhị thức Newton

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k = C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^n.x^n$$

Kết quả $C_9^9 + C_{10}^9 + ... + C_{14}^9 = 3003$

b) Kết quả $-C_{10}^1.3^9 + 2.C_{10}^2.3^8 - C_{10}^3.3^7 = 131220$.

Bài tập 5. 4: Tìm số hạng không chứa x của khai triển:

a) $P(x) = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, với $x > 0$ b) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$

Hướng dẫn

a) Dùng công thức Nhị thức $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$. Kết quả $C_{12}^8 = 495$

b) Kết quả $C_7^4 = 35$.

Bài tập 5. 5: Tìm các số hạng nguyên của khai triển:

a) $\left(\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^8$ b) $\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}\right)^9$.

Hướng dẫn

a) Dùng công thức Nhị thức $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$.

Kết quả 625 và 143360.

b) Kết quả 4536 và 8

Bài tập 5. 6:

a) Tính giá trị $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$ biết rằng:

$$C_{n+1}^2 + 2.C_{n+2}^2 + 2.C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$

b) Tìm các số hạng dương của dãy $x_n = \dfrac{5}{4}A_{n-2}^2 - C_{n-1}^4 + C_{n-1}^3$, $n \geq 4$

Hướng dẫn

a) Dùng công thức $n! = 1.2.3...(n-1).n$ và $0! = 1$

$P_n = n!$; $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ và $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Kết quả $n = 5$, $M = \dfrac{3}{4}$

b) Kết quả có 7 số hạng dương là $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ và x_{10}.

Bài tập 5. 7: Tính tổng:

a) $T = \dfrac{C_n^1}{1} + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + ... + p\dfrac{C_n^p}{C_n^{p-1}} + ... + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$

b) $T = \dfrac{1}{2}P_2 + \dfrac{2}{2^2}P_3 + ... + \dfrac{n}{2^n}P_{n+1}$

Hướng dẫn

a) Tính số hạng tổng quát trước. Kết quả $\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) Kết quả $\dfrac{(n+2)!}{2^n} - 2$.

Bài tập 5. 8: Cho số nguyên k: $0 \leq k \leq 2014$. Chứng minh:

$$C_{2015}^k + C_{2015}^{k+1} \leq C_{2015}^{1007} + C_{2015}^{1008}$$

Hướng dẫn

Dùng nhị thức và các tổng tổ hợp.

Bài tập 5. 9: Cho nhị thức $P(x) = (3-2x)^n$, n nguyên dương. Sau khi khai triển.

a) Tính tổng tất cả các hệ số

b) Tính tổng tất cả các hệ số theo luỹ thừa lẻ.

c) Tính tổng tất cả các hệ số theo luỹ thừa chẵn.

Hướng dẫn

Khai triển tổng quát từ bậc thấp lên bậc cao

Tính $P(-1)$ và $P(1)$ thì tổng các hệ số sau khai triển là $P(1)$

Tổng các hệ số theo luỹ thừa lẻ : $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$ và tổng các hệ số theo luỹ thừa chẵn: $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$

a) Kết quả 1

b) Kết quả $\frac{1-5^n}{2}$

c) Kết quả $\frac{1+5^n}{2}$

Bài tập 5. 10: Giải bất phương trình:

a) $A_n^3+5A_n^2>21n$ b) $C_{18}^{n-2}>C_{18}^{n}$

Hướng dẫn

Dùng công thức $P_n = n!$; $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$ và $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

a) Kết quả $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$

b) Kết quả n =11, 12,...,18

Bài tập 5. 11: Cho n là một số nguyên dương.

Chứng minh $7<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}\leq 8$.

Hướng dẫn

Đặt $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$, chứng minh: $a_k < a_{k-1}$ thì được $a_n \leq 8$

Và chứng minh: $(1 + a)^m \geq 1 + ma + (m-1)^2a^2$.

Bài tập 5. 12: Với mọi số nguyên dương n, tính tổng $T=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-i+1}^{i}$

Hướng dẫn

Đặt $a_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_{n-i+1}^{i}$ thì có $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Kết quả $T=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Chuyên đề 6: CẤP SỐ VÀ TỔNG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương pháp quy nạp

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của n, ta thực hiện hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh A(n) là một mệnh đề đúng khi $n = 1$.

Bước 2: Với k là một số nguyên dương tuỳ ý, từ giả thiết A(n) là một mệnh đề đúng khi $n = k$, chứng minh A(n) cũng là một mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

Nếu A(n) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq n_o$ thì ta kiểm chứng A(n) đúng khi $n = n_o$, còn ở phần sau, với giả thiết quy nạp là A(n) đúng khi $n = k \geq n_o$.

Cấp số cộng

- Cấp số cộng là một dãy số hữu hạn hay vô hạn mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, gọi là công sai:

  (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + d$.

- Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì : $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$
- Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$.
- Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng:

  Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ thì

  $$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} \text{ hoặc : } S_n = \frac{\left[2u_1 + (n-1)d\right]n}{2}$$

Cấp số nhân

- Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, gọi là công bội:

  (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \geq 1,\ u_n = u_{n-1} .q$

- Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì : $u_k^2 = u_{k-1} . u_{k+1}$.
- Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát $u_n = u_1.q^{n-1}$.
- Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân:

  Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$.

- Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q với $|q| < 1$:

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}.$$

Các tổng với mọi số nguyên dương n

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 6. 1: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp

Khi n = 1 thì VT = 1, VP = $\frac{1.2.3.5}{30} = 1$ nên đẳng thức đúng khi n = 1.

Giả sử đẳng thức đúng khi $n = k \geq 1$:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + k^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng khi n = k + 1:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + k^4 + (k+1)^4 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+9k+5)}{30}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + k^4 + (k+1)^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30} + (k+1)^4$$

$$= (k+1).\frac{k(2k+1)(3k^2+3k-1)+30(k+1)^3}{30}$$

$$= (k+1).\frac{6k^4+39k^3+91k^2+89k+30}{30}$$

$$= (k+1).\frac{(2k^2+7k+6)(3k^2+9k+5)}{30}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+9k+5)}{30}: \text{đpcm.}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương.

Bài toán 6. 2: Chứng minh với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + ... + \frac{n+2}{n(n+1).2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1).2^n} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì VT = $\frac{3}{1.2.2} = \frac{3}{4}$, VP = $1 - \frac{1}{2.2} = \frac{3}{4}$

Do đó (1) đúng khi n = 1.

Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh (1) đúng khi n = k + 1. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp:

$$\frac{3}{1.2.2} + ... + \frac{k+2}{k(k+1)2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2)2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2)2^{k+1}} = 1 - \frac{2(k+2)-(k+3)}{(k+1)(k+2)2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+2)2^{k+1}}: \text{đpcm.}$$

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 6. 3: Chứng minh với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k \quad (1)$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì $(1+x)^1 = C_1^0 + C_1^1.x = 1 + x$ nên (1) đúng khi n =1.

Giả sử khẳng định (1) đúng với n nguyên dương. Ta chứng minh (1) đúng với n + 1. Thật vậy:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{k+1}$$

Ta có: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k.x^k$, $\quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1}.x^k + x^{n+1}$

Thay vào đẳng thức trên ta được:

$$(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)x^k + x^{n+1}$$

$= C_{n+1}^0x^0 + \sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^kx^k + C_{n+1}^{n+1}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^kx^k$:đpcm

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 6. 4: Chứng minh với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có:

$$\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}} \text{ (n – 1 dấu căn).}$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 2 thì $\cos\frac{\pi}{2^2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: đúng

Giả sử công thức đúng khi n = k, k nguyên, $k \geq 2$. Ta chứng minh công thức đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

$$2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}} = 1 + \cos\frac{\pi}{2^k} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}\right), \text{n – 1 dấu căn}$$

Do đó $\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}\right)$, n–1 dấu căn

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{2}}}}\right)$, n dấu căn: đpcm.

Bài toán 6. 5: Chứng minh với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì BĐT: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \Leftrightarrow \frac{13}{12} > 1$

Do đó BĐT đúng khi n = 1.

Giả sử BĐT đúng khi n = k, $k \in \mathbf{N}^*$: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{3k+1} > 1$.

Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$VT = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{3k+1}\right) + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$> 1+\frac{1}{3k+2}-\frac{2}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}=1+\frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>1.$

Vậy BĐT đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 6. 6: Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

$$1!3!\ldots(2n+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1} \quad (1).$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì (1) $\Leftrightarrow 1!3! \geq (2!)^2 \Leftrightarrow 6 \geq 4$: đúng

Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh (1) đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

$1!.3!\ldots(2k+1)!\,.\,(2k+3)! \geq ((k+1)!)^{k+1}\,.\,(2k+3)!.$

Ta cần chứng minh: $((k+1)^{k+1}\,.\,(2k+3)! \geq ((k+2)!)^{k+2}$

$\Leftrightarrow (2k+3)! \geq (k+2)!\,(k+2)^{k+1}.$

$\Leftrightarrow (k+3)(k+4)\ldots(2k+3) \geq (k+2)^{k+1}.$

BĐT này đúng với mọi m > 2 thì k + m > k + 2.

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương k.

Bài toán 6. 7: Cho a + b > 0. Chứng minh với mọi số nguyên dương n:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2} \quad (1).$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1: (1) $\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+b}{2}$: đúng

Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k+b^k}{2}$ (2)

Ta chứng minh (1) đúng khi n = k + 1. Thật vậy, vì a + b > 0.

nên (2) $\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^k\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a^k+b^k}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}.$$

Ta chứng minh: $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

$\Leftrightarrow ab^k + a^kb \leq a^{k+1} + b^{k+1}$ (3)

Không mất tính tổng quát, giả sử a ≥ b.

Vì a + b > 0 nên a > –b, do đó $a \geq |b| \Rightarrow a^m \geq |b|^m \geq b^m$ với mọi m nguyên dương.

Ta có (3) $\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^k(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^k-b^k) \geq 0$: đúng.

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 6. 8: Cho 2n số tuỳ ý: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$.

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì BĐT: $\sqrt{a_1^2+b_1^2} \le \sqrt{a_2^2+b_2^2}$: đúng.

Khi n = 2 thì BĐT: $\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}$

$\Leftrightarrow (a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2 \le a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}$

$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 \le \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}$

Nếu VT < 0 thì BĐT đúng, còn nếu VT ≥ 0 thì BĐT

$\Leftrightarrow (a_1a_2 + b_1b_2)^2 \le (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$

$\Leftrightarrow 2a_1a_2b_1b_2 \le a_1^2+b_2^2+a_2^2+b_1^2 \Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \ge 0$: đúng

Giả sử BĐT đúng khi n = k, k nguyên dương. Ta chứng minh BĐT đúng khi n = k + 1. Thật vậy.

$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1})^2+(b_1+b_2+...+b_k+b_{k+1})^2}$

$= \sqrt{((a_1+a_2+...+a_k)+a_{k+1})^2+((b_1+b_2+...+b_k)+b_{k+1})^2}$

$\le \sqrt{(a_1+a_2+...+a_k)^2+(b_1+b_2+...+b_k)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$

$\le \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_k^2+b_k^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$: đpcm

Vậy BĐT đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 6. 9: Với mỗi số nguyên dương n, chứng minh dãy $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ luôn chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 ta có: $u_1 = 7.2^{2-2} + 3^{2-1} = 7 + 3 = 10 \vdots 5$.

Do đó (1) đúng khi n = 1.Giả sử (1) đúng khi n = k, $k \in \mathbf{N}^*$, ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi n = k + 1.

Thật vậy, ta có: $u_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)} - 1 = 4.7.2^{2k-2} + 9.3^{2k-1}$

$= 4(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5.3^{2k-1} = 4.u_k + 5.3^{2k-1}$.

Vì $u_k \vdots 5$ (theo giả thiết quy nạp) nên $u_{k+1} \vdots 5$ (đpcm).

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 6. 10: Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì dãy:

$u_n = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

Khi n = 1 thì $u_1 = 6^2 + 3^3 + 3 = 66 \vdots 11$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng khi n = k, k nguyên dương. Ta chứng minh mệnh đề đúng khi n = k+1. Thật vậy:

$u_{k+1} = 6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = 36.6^{2k}\ 3.3^{k+2} + 3.3^{k}$

$= 36(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^{k}) - 33(^{3k+2} + 3^{k})$

$= 36u_k - 33(3^{k+2} + 3^{k})\ \vdots\ 11$ (đúng).

Vậy u_n chia hết cho 11 với mọi n nguyên dương.

Bài toán 6. 11: Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng:

a) $\begin{cases} u_2 - u_1 > 0 \\ u_{31} + u_{34} = 11 \\ u_{31}^2 + u_{34}^2 = 101 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_5 + u_{17} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $d = u_2 - u_1 > 0$ nên $u_{34} > u_{31}$, và

$u_{31}^2 + u_{34}^2 = \frac{1}{2}[(u_{31} + u_{34})^2 + (u_{31} - u_{34})^2] \Rightarrow 101 = \frac{1}{2}(121 + 9d^2)$.

Do đó: $9d^2 = 202 - 121 = 81$, chọn d = 3.

Và $11 = u_{31} + u_{34} = (u_1 + 30d) + (u_1 + 33d) = 2u_1 + 63d$

$\Rightarrow u_1 = -89$. Vậy $u_1 = -89$ và d = 3.

b) $\begin{cases} u_5 + u_{17} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 4d) + (u_1 + 16d) = 60 & (1) \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 & (2) \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2u_1 + 20d = 60$ nên $u_1 = 30 - 10d$

Thế (2): $(30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170$

$\Leftrightarrow 50d^2 - 360d - 630 = 0 \Leftrightarrow 5d^2 - 36d - 63 = 0$

Do đó d = 3 hoặc $d = \frac{21}{5}$.

Khi d = 3 thì $u_1 = 0$, khi $d = \frac{21}{5}$ thì $u_1 = -12$.

Bài toán 6. 12: Tìm 4 số hạng của cấp số cộng có tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 166.

Hướng dẫn giải

Gọi 4 số lập cấp số cộng là x – 3y, x – y, x + y, x + 3y.

Ta có hệ: $\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 22 \\ (x - 3y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + (x + 3y)^2 = 166 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 22 \\ 4x^2 + 20y^2 = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = \pm\frac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy 4 số phải tìm là 1, 4, 7, 10 hay 10, 7,4, 1.

Bài toán 6. 13: Một cấp số cộng hữu hạn u_n có tổng các số hạng trừ số hạng đầu tiên bằng –36; tổng các số hạng trừ số hạng cuối cùng bằng 0. Tìm số hạng đầu tiên và công sai biết $u_{12} - u_4 = -16$.

Hướng dẫn giải

Gọi d là công sai. Ta có:

$$\begin{cases} S_n - u_1 = -36 \\ S_n - u_n = 0 \\ u_{12} - u_4 = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n - u_1 = -36 \\ (u_1 + 11d) - (u_1 + 3d) = -16 \end{cases}$$

Do đó $4d = -16 \Rightarrow d = -4$, và $u_n - u_1 = (n-1)d = -36 \Rightarrow n = 10$.

Ta có $S_n - u_1 = \dfrac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) - u_1 = -36 \Rightarrow u_1 = 16$.

Vậy $u_1 = 16$ và $d = -4$.

Bài toán 6. 14: Cho dãy (u_n) xác định: $u_1 = a$, $u_{n+1} = 8 - u_n$, $n \ge 1$.
Tìm a để dãy (u_n) lập cấp số cộng.

Hướng dẫn giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì:
$u_{n+1} = u_n + d$ mà $u_{n+1} = 8 - u_n$ nên có:

$u_n + d = 8 - u_n \Rightarrow u_n = \dfrac{8-d}{2}$ với mọi $n \ge 1$.

Do đó u_n là dãy không đổi nên $u_{n+1} = u_n = u_1 = a$.

Ta có $a = 8 - a \Rightarrow a = 4$. Đảo lại với $a = 4$ thì $u_n = 4$ với mọi $n \ge 1$ nên dãy không đổi hãy lập cấp số cộng có công sai $d = 0$.

Vậy $a = 4$.

Bài toán 6. 15: Với giá trị nào của a để tìm được x sao cho 3 số

$$5^{1+x} + 5^{1-x};\ \frac{a}{2};\ 25^x + 25^{-x} \text{ lập thành cấp số cộng.}$$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có: $(5^{1+x} + 5^{1-x}) + (25^x + 25^{-x}) = 2.\dfrac{a}{2}$ nên

$a = (5^{1+x} + 5^{1-x}) + (25^x + 25^{-x}) \ge 2\sqrt{5^{1+x}5^{1-x}} + 2\sqrt{25^x.25^{-x}}$

$\Rightarrow a \ge 2\sqrt{5^2} + 2\sqrt{25^0} = 10 + 2 = 12$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Vậy với $a \ge 12$ thì 3 số đó lập thành cấp số cộng.

Bài toán 6. 16: Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng u_n
Cho $S_p = q$ và $S_q = p$. Tính S_{p+q}.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_{p+1} = u_1 + pd$; $u_{p+2} = u_2 + pd$; ...; $u_{p+q} = u_q + pd$.

Cộng lại q đẳng thức thì được:

$u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{p+q} = u_1 + u_2 + ... + u_q + pqd.$

$\Rightarrow S_{p+q} - S_p = S_q + pqd. \Rightarrow S_{p+q} = S_p + S_q + pqd \quad (1)$

Mặt khác $S_p = \frac{p}{2}(u_1 + u_p)$, $S_q = \frac{q}{2}(u_1 + u_q)$

$$\Rightarrow \frac{2S_p}{p} - \frac{2S_q}{q} = u_p - u_q = (p-q)d \Rightarrow pqd = \frac{2(qS_p - pS_q)}{p-q}$$

Thế vào (1) thì được $S_{p+q} = \frac{(p+q)(S_q - S_p)}{p-q} = -(p+q).$

Bài toán 6. 17: Cho đồ thị hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng. Tìm hệ thức giữa a và b.

Hướng dẫn giải

Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^4 + ax^2 + b = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$, $t \ge 0$ thì có phương trình: $t^2 + at + b = 0$ (2)

Vì đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập cấp số cộng nên (2) có 3 nghiệm $0 < t_1 < t_2$, $t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Do đó (1) có 4 nghiệm $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$ lập cấp số cộng nên $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

$\Rightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \Rightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1$.

$$\Rightarrow \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = 9.\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \Rightarrow 10\sqrt{a^2 - 4b} = 8a$$

$\Rightarrow 5\sqrt{a^2 - 4b} = -4a \Rightarrow 25(a^2 - 4b) = 16a^2 \Rightarrow 9a^2 - 100b = 0.$

Bài toán 6. 18: Tìm m để phương trình $x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2$, $t \ge 0$ thì (1) trở thành: $t^2 - (3m + 5)t + (m + 1)^2 = 0 \quad (2)$

Vì (1) có 4 nghiệm phân biệt nên (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $0 < t_1 < t_2$.

Lúc đó (1) có 4 nghiệm:

$$x_1 = \sqrt{t_2},\ x_2 = -\sqrt{t_1},\ x_3 = \sqrt{t_1},\ x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Bốn nghiệm này lập cấp số cộng khi $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$

$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1.$

Ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 5 \\ t_1 t_2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t_1 = 3m + 5 \\ 9t_1^2 = (m+1)^2 \end{cases}$

Do đó $9\left(\dfrac{3m+5}{10}\right)^2 = (m+1)^2 \Leftrightarrow 19m^2 - 70m - 125 = 0$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{25}{19}$ hoặc $m = 5$.Thử lại với $m = -\dfrac{25}{19}$ và $m = 5$ thì (2) đều có 2 nghiệm dương phân biệt. Vậy $m = -\dfrac{25}{19}$ hoặc $m = 5$.

Bài toán 6. 19: Tìm a sao cho các nghiệm không âm của phương trình:

$(2a - 1)\sin x + (2 - a)\sin 2x = \sin 3x$ tạo thành một cấp số cộng.

Hướng dẫn giải

PT : $(2a - 1)\sin x + 2(2 - a)\sin x\cos x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\Leftrightarrow \sin x[2\cos^2 x - (2 - a)\cos x - a] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ \cos x = 1 & (2) \\ \cos x = \dfrac{a}{2} & (3) \end{array}\right.$$

Từ (1) và (2) ta có: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$ (do chỉ xét $x \ge 0$).

Nếu $|a| > 2$ thì (3) vô nghiệm. Vậy các nghiệm của phương trình tạo thành một cấp số cộng.

Nếu $|a| \le 2$: Phương trình (3) có nghiệm. Gọi x_o là nghiệm của phương trình này với $0 \le x_o \le \pi$ thì:

(3) $\Leftrightarrow x = \pm x_o + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Nếu các nghiệm của phương trình cho tạo thành một cấp số cộng thì phải có hoặc $x_o = 0 \Rightarrow a = -2$; hoặc $x_o = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow a = 0$; hoặc $x_o = \pi \Rightarrow a = 2$. Thử lại đúng nên các giá trị cần tìm $a = 0$ hoặc $|a| \ge 2$.

Bài toán 6. 20: Cho 2 cấp số cộng hữu hạn, mỗi cấp số có 100 số hạng: 4, 7, 10, 13, 16, ... và 1, 6, 11, 16, 21... Hỏi có tất cả bao nhiêu số có mặt trong cả 2 cấp số trên.

Hướng dẫn giải

Gọi cấp số cộng thứ nhất là (u_n) và cấp số cộng thứ hai là (v_n).

Ta có: $u_n = u_1 + (n - 1)d = 4 + 3(n - 1) \Rightarrow u_n = 3n + 1$

$v_k = v_1 + (k - 1)d = 1 + 5(k - 1) \Rightarrow v_k = 5k - 4$.

Với $k, n \in \mathbf{Z}$, , $1 \le k \le 100$, $1 \le n \le 100$.

Ta có $u_n = v_n \Leftrightarrow 3n + 1 = 5k - 4 \Leftrightarrow 5k - 3n = 5 \Leftrightarrow 3n = 5(k - 1)$ nên n chia hết cho 5.

Đặt $n = 5t$, $t \in \mathbf{Z} \Rightarrow k = 3t + 1$.Do $1 \le k \le 100$, $1 \le n \le 100$ nên $t \in \{1; 2; ...; 20\}$. Vậy có 20 số đồng thời có mặt trong cả 2 cấp số cộng trên: 16, 31, 46, ..., 301.

Bài toán 6. 21: Chứng minh dãy (u_n) xác định bởi:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n(7-3n)}{2}$$ lập thành cấp số cộng.

Hướng dẫn giải

Ta có $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n$; $S_{n-1} = u_1 + u_2 + ... u_{n-1}$ nên:

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(7-3n)}{2} - \frac{(n-1)(7-3(n-1))}{2} = 5 - 3n$$

Vì $u_{n+1} - u_n = 5 - 3(n+1) - (5-3n) = -3$: không đổi với mọi $n \geq 1$. Vậy dãy u_n lập cấp số cộng có công sai $d = -3$.

Bài toán 6. 22: Chứng minh không tồn tại một cấp số cộng nào chứa 3 số hạng $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, và $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ là 3 số hạng thứ $m + 1$, $n + 1$, $k + 1$ phân biệt của cấp số cộng u_n có công sai d, số hạng đầu u_1.

Ta có: $\sqrt{2} = u_1 + md$, $\sqrt{3} = u_1 + nd$, $\sqrt{5} = u_1 + kd$

$\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} = (m-n)d$, $\sqrt{3} - \sqrt{5} = (n-k)d$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{m-n}{n-k} = t$, với t hữu tỉ

$\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} = t(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{2} + t\sqrt{5} = (t+1)\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2 + 5t^2 + 2t\sqrt{10} = 3(t+1)^2 \Rightarrow 2t\sqrt{10} = -2t^2 + 6t + 1$.

$\Rightarrow \sqrt{10} = \dfrac{-2t^2 + 6t + 1}{2t}$ là số hữu tỉ: vô lý $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6. 23: Chứng minh a, b, c là 3 số hạng của cấp số cộng, điều kiện cần và đủ là: $\begin{cases} pa + qb + rc = 0 \\ p + q + r = 0 \end{cases}$ với p, q, z nguyên.

Hướng dẫn giải

Giả sử a, b, c là số hạng thứ $k + 1$, $n + 1$, $m + 1$ của một cấp số cộng có u_1 là số hạng đầu, d là công sai.

Ta có hệ : $\begin{cases} a = u_1 + kd \\ b = u_1 + nd \\ c = u_1 + md \end{cases} \Rightarrow b - a = (n-k)d \Rightarrow d = \dfrac{b-a}{n-k}$

Do đó $u_1 = a - kd = a - \dfrac{b-a}{n-k} = \dfrac{an-kb}{n-k}$

Nên $c = \dfrac{an-kb}{n-k} + m\dfrac{b-a}{n-k} \Rightarrow c(n-k) = a(n-m) + b(m-k)$

$\Rightarrow a(n-m) + b(m-k) + c(k-n) = 0$. Đặt $p = n - m$, $q = m - k$,

$r = k - n$ thì $\begin{cases} ap + qb + rc = 0 \\ p + q + r = 0 \end{cases}$ với p, q, r nguyên .

Đảo lại, giả sử tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c thoả mãn:

$\begin{cases} pa + qb + rc = 0 \\ p + q + r = 0 \end{cases}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta có $q = -(p + r) \Rightarrow pa - b(q + r) + rc = 0 \Rightarrow p(a - b) = r(b - c)$.
Do đó p và r cùng dấu, giả sử $p, r > 0$.

Đặt $d = \dfrac{a-b}{r}$ thì $\dfrac{b-c}{p} = d \Rightarrow a - b = rd$, $b - c = pd$.

hay $b = c + qd$ và $a = b + rd = c + (p + r)d$.

Do đó 3 số a, b, c nằm trong cấp số cộng có $u_1 = c$, công sai $d = \dfrac{a-b}{r}$ với

$b = u_{p+1}$ và $a = u_{p+r+1}$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 6. 24: Cho tam giác ABC. Chứng minh 3 cạnh a, b, c lập cấp số cộng

khi và chỉ khi $\tan\dfrac{A}{2} \,.\, \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có a, b, c lập thành cấp số cộng.

$\Leftrightarrow a + c = 2b \Leftrightarrow 2R\sin A + 2R\sin C = 4R\sin B$.

$\Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2\sin B \Leftrightarrow 2\sin\dfrac{A-C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2} = 4\sin^2\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A-C}{2} = 2\sin\dfrac{B}{2} \Leftrightarrow \cos(\dfrac{A}{2} - \dfrac{C}{2}) = 2\cos(\dfrac{A}{2} + \dfrac{C}{2})$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} = 2(\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2})$

$\Leftrightarrow 3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$

Bài toán 6. 25: Cho 3 góc x, y, z lập cấp số cộng có công sai $d = \dfrac{\pi}{3}$.

a) Chứng minh: $\tan x.\tan y + \tan y.\tan z + \tan z.\tan x = -3$

b) Chứng minh: $4\cos x.\cos y.\cos z = \cos 3y$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\tan\dfrac{\pi}{3} = \tan(y - x) = \dfrac{\tan y - \tan x}{1 + \tan x \tan y}$

$\Rightarrow 1 + \tan x.\tan y = \dfrac{\tan y - \tan x}{\sqrt{3}}$.

Tương tự thì: $3 + \tan x.\tan y + \tan y.\tan z + \tan z.\tan x$

$= \dfrac{\tan y - \tan x}{\sqrt{3}} + \dfrac{\tan z - \tan y}{\sqrt{3}} + \dfrac{\tan y - \tan x}{-\sqrt{3}} = 0$

Vậy $\tan x.\tan y + \tan y.\tan z + \tan z.\tan x = -3$

b) Ta cos: $4\cos x.\cos y.\cos z = 4\cos(y - \dfrac{\pi}{3}).\cos y.\cos(y + \dfrac{\pi}{3})$

$= 4\cos y \cdot \dfrac{1}{2}(\cos 2y + \cos 2\dfrac{\pi}{3}) = 2\cos y\,(2\cos^2 y - 1 - \dfrac{1}{2})$

$= 4\cos^3 y - 3\cos y = \cos 3y$.

Bài toán 6. 26: Cho cấp số cộng (u_n). Chứng minh:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}; u_n > 0\ (1)$.

b) $\dfrac{1}{u_1.u_n} + \dfrac{1}{u_2u_{n-1}} + \ldots + \dfrac{1}{u_nu_1} = \dfrac{2}{u_n + u_n}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}\right); u_n \neq 0$

Hướng dẫn giải

a) Gọi d là công sai của cấp số cộng.

Xét $d = 0$ thì $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$ nên (1) đúng.

Xét $d \neq 0$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_k}} = \dfrac{\sqrt{u_k} - \sqrt{u_{k-1}}}{u_k - u_{k-1}} = \dfrac{\sqrt{u_k} - \sqrt{u_{k-1}}}{d}$

Áp dụng ta có:$VT = \dfrac{\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}}{d} + \dfrac{\sqrt{u_3} - \sqrt{u_2}}{d} + \ldots + \dfrac{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}}{d}$

$= \dfrac{\sqrt{u_n} - \sqrt{u_1}}{d} = \dfrac{u_n - u_1}{d(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_1})} = \dfrac{(n-1)d}{d(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_1})} = VP$

b) Ta có $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = \ldots = u_n + u_1$

Do đó $\dfrac{u_1 + u_n}{u_k.u_{n-k+1}} = \dfrac{u_k + u_{n-k+1}}{u_k.u_{n-k+1}} = \dfrac{1}{u_k} + \dfrac{1}{u_{n-k+1}}$

Áp dụng ta có: $\dfrac{u_1 + u_n}{u_1.u_n} + \dfrac{u_1 + u_n}{u_2.u_{n-1}} + \ldots + \dfrac{u_n + u_1}{u_n.u_1}$

$= \left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_n}\right) + \left(\dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_{n-1}}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{1}{u_1}\right) = 2\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}\right) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6. 27: Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng u_n.

a) Chứng minh: $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0$ (1)

b) Chứng minh: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$ (2)

Hướng dẫn giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow S_{n+3} - S_{n+2} - 2(S_{n+2} - S_{n+1}) + (S_{n+1} - S_n) = 0$

$\Leftrightarrow u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow u_{n+2} = \dfrac{u_{n+3} + u_{n+1}}{2}$: đúng.

b) Ta có $3(S_{2n} - S_n) = 3(u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n}) = 3.\dfrac{n}{2}(u_{n+1} + u_{2n})$

Và $S_{3n} = (u_1 + ... + u_n) + (u_{n+1} + ... + u_{2n}) + (u_{2n+1} + ... + u_{3n})$

$= (u_1 + u_{3n}) + (u_2 + u_{3n-1}) + ... + (u_n + u_{2n+1}) + \dfrac{n}{2}(u_{n+1} + u_{2n})$

$= n(u_{n+1} + u_{2n}) + \dfrac{n}{2}(u_{n+1} + u_{2n})$

$= \dfrac{3}{2}(u_{n+1} + u_{2n}) = 3(S_{2n} - S_n)$ nên (2): đúng.

Bài toán 6. 28: Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng u_n. Chứng minh nếu $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, $n \neq m$ thì $\dfrac{u_m}{u_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2} \Rightarrow \dfrac{m}{2}(2u_1 + (m-1)d : \dfrac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = \dfrac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow n(2u_1 + (m-1)d) = m(2u_1 + (n-1)d)$

$\Rightarrow 2(n-m)u_1 + (m-n)d = 0 \Rightarrow (n-m)(2u_1 - d) = 0 \Rightarrow u_1 = \dfrac{d}{2}$.

Do đó $u_m = u_1 + (m-1)d = \dfrac{2m-1}{2}d$; $u_n = u_1 + (n-1)d = \dfrac{2n-1}{2}d$

Vậy $\dfrac{u_m}{u_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

Bài toán 6. 29: Tìm số nguyên dương n bé nhất thoả mãn tính chất sau: Không tồn tại bất cứ một cấp số cộng nào gồm 1999 số hạng mà cấp số cộng đó có chứa đúng n số nguyên.

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại một cấp số cộng gồm 1999 số hạng mà cấp số cộng đó có chứa đúng n số nguyên. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử rằng cấp số cộng đó có chứa n số nguyên 1, 2, 3, ..., n và có công sai là $\frac{1}{k}$. Từ 1 đến n, kể cả hai số đó, ta có (n – 1)k + 1 số hạng. Tại mỗi đầu mút, có nhiều lắm là (k – 1) số hạng nữa thêm vào để cho cấp số này không thể chứa số hạng nguyên nào khác nữa. Suy ra $(n-1)k + 1 \le 1999 \le (n-1)k + 1 + 2(k-1)$,

hay $\frac{2000}{n+1} \le k \le \frac{1998}{n-1}$

Như thế, nếu một cấp số cộng như vậy tồn tại, thì phải tồn tại một số nguyên k nằm giữa $\frac{2000}{n+1}$ và $\frac{1998}{n-1}$.

Nếu $n \le 63$ thì $\frac{1998}{n-1} \ge \frac{1998}{62}$ nên: $1998 = q(n-1) + r$

với q là một số nguyên và $0 \le r < n-1$. Lúc đó $q \ge 32$ và

$2000 = q(n-1) + r + 2 = q(n+1)(r + 2 - 2q)$

trong đó, $r + 2 - 2q < n + 1 - 64 \le 0$. Suy ra: $\frac{2000}{n+1} < q \le \frac{1998}{n-1}$

vì vậy giá trị q này có thể được dùng như k ở trên để tạo nên một cấp số cộng.

Với n nằm giữa 64 và 69 (tính luôn 2 số đầu), ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng k tồn tại.

Tuy nhiên, với n = 70, k không thể tồn tại được vì cả hai số $\frac{2000}{71}$ và $\frac{1999}{69}$ đều nằm trong khoảng (28; 29).

Vậy số n phải tìm là 70.

Bài toán 6. 30: Hai cấp số cộng có cùng số phần tử. Tỉ giữa số hạng cuối của cấp số đầu và số hạng đầu của cấp số thứ hai bằng tỉ giữa số hạng cuối của cấp số thứ hai và số hạng đầu của cấp số thứ nhất và bằng 4. Tỉ giữa tổng các số hạng của cấp số thứ nhất và tổng các số hạng của cấp số thứ hai bằng 2. Tìm tỉ giữa hai công sai của cấp số.

Hướng dẫn giải

Giả sử hai cấp số cộng có n số hạng với số hạng đầu là a_1, công sai d_1, và số hạng đầu là b_1, công sai d_2

Ta có: $\frac{a_n}{b_1} = \frac{b_n}{a_1} = 4$, $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = 2$

nên $\frac{a_1 + (n-1)d_1}{b_1} = \frac{b_1 + (n-1)d_2}{a_1} = 4$ và $\frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2b_1 + (n-1)d_2} = 2$

Rõ ràng $d_1, d_2 \ne 0$. Từ phương trình thứ nhất suy ra

$(n-1)d_1 = 4b_1 - a_1$ và $(n-1)d_2 = 4a_1 - b_1$

Nên: $\dfrac{2a_1 + (4b_1 - a_1)}{2b_1 + (4a_1 - b_1)} = 2 \Rightarrow b_1 = \dfrac{7}{2}a_1$

Do đó: $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{(n-1)d_1}{(n-1)d_2} = \dfrac{4b_1 - a_1}{4a_1 - b_1} = 26$.

Bài toán 6. 31: Hãy tìm một cấp số cộng (u_n) lập bởi 2n+1 số tự nhiên liên tiếp thoả mãn 2 điều kiện sau:

(i) $u_1^2 + u_2^2 + ...+ u_{n+1}^2 = u_{n+2}^2 + u_{n+3}^2 + ... + u_{2n+1}^2$

(ii) Số 1996 là một số hạng của dãy

Hướng dẫn giải

Gọi số hạng đầu tiên của dãy là m, thì số hạng thứ 2n+1 của nó là 2n+m. Theo đề ta có:

$$m^2 + (m+1)^2 + ... + (m+n)^2 = (m+n+1)^2 + ... + (m + 2n)^2 \quad (1)$$

Đặt: $S_k = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 \Rightarrow S_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (2)

Đẳng thức (1) viết lại dưới dạng sau:

$$S_{m+n} - S_{m-1} = S_{m+2n} - S_{m+n} \Rightarrow S_{m-1} + S_{m+2n} = 2S_{m+n} \quad (3)$$

áp dụng công thức (2) vào (3) ta có:

$$(m-1)m(2m-1) + (m+2n)(m+2n+1)(2m+4n+1)$$
$$= 2(m+n)(m+n+1)(2m+2n+1)$$

$\Leftrightarrow m^2 - 2n^2m - 2n^3 - n^2 = 0 \Leftrightarrow (m+n)[m - n(2n+1)] = 0$

$\Leftrightarrow m = n(2n+1)$ (do $m + n > 0$)

Vậy cấp số cộng có dạng:

$m, m+1, m+2, ..., m+2n$ với $m = n(2n+1)$

Điều kiện để 1996 là số hạng của dãy trên là: $m \le 1996 \le m + 2n$

$\Leftrightarrow n(2n+1) \le 1996 \le n(2n+1) + 2n \Leftrightarrow \begin{cases} 2n^2 + n - 1996 \le 0 \\ 2n^2 + 3n - 1996 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3 + \sqrt{15977}}{4} \le n \le \dfrac{-1 + \sqrt{15969}}{4}$

Do $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow n = 31$. Vậy có duy nhất 1 cấp số cộng thoả mãn điều kiện của đề bài đó là: 1953, 1954, ..., 2015.

Bài toán 6. 32: Xác định 4 số hạng của cấp số nhân u_n biết rằng:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân u_n thì u_n^2 lập cấp số nhân có số hạng đầu u_1^2 và công bội q^2.

Xét q = 1 thì hệ $\begin{cases} 4u_1 = 15 \\ 4u_1^2 = 15 \end{cases}$ (loại)

Xét $q \neq 1$ thì hệ tương đương: $\begin{cases} \dfrac{u_1(q^4-1)}{q-1} = 15 & (1) \\ \dfrac{u_1^2(q^8-1)}{q^2-1} = 85 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow u_1 = \dfrac{15(q-1)}{q^4-1}$. Thay vào (2) ta có:

$$\frac{225.(q-1)^2}{(q^4-1)^2} \times \frac{(q^4-1)(q^4+1)}{(q-1)(q+1)} = 85 \Leftrightarrow \frac{225.(q-1)(q^4+1)}{(q+1)(q^4-1)} = 85$$

$$\Leftrightarrow \frac{(q^4+1)}{(q^2+1)(q+1)^2} = \frac{17}{45} \Leftrightarrow 14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0$$

Vì q = 0 không là nghiệm của phương trình nên chia 2 vế cho $q^2 \neq 0$

$$14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \Leftrightarrow 14\left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q + \dfrac{1}{q} = \dfrac{5}{2} \\ q + \dfrac{1}{q} = -\dfrac{9}{7} \text{(VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với $q = 2$ thì $u_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$ thì $u_1 = 8$.

Vậy, có 2 cấp số nhân là 1, 2, 4, 8 và 8, 4, 2, 1.

Bài toán 6. 33: Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân u_n

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 35 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} + \dfrac{1}{u_5}\right) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện các số hạng $u_n \neq 0$. Gọi q là công bội.

Xét q = 1 thì $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_4$ nên hệ:

$$\begin{cases} 2u_1 = 35 \\ 5u_1 = \dfrac{49.5}{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{35}{2} \quad \text{(loại)} \\ u_1^2 = 49 \end{cases}$$

Xét $q \neq 1$, vì dãy $u_n \neq 0$ lập cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q nên dãy $\dfrac{1}{u_n}$ lập cấp số nhân có số hạng đầu $\dfrac{1}{u_1}$ và công bội $\dfrac{1}{q}$. Ta có hệ

tương đương: $\begin{cases} u_1 + u_1q^2 = 35 \\ u_1\dfrac{1-q^5}{1-q} = 49.\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^5}{1-\dfrac{1}{q}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^2 = 35 \\ u_1^2.q^4 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1q^2 = 7, u_1 = 28 \\ u_1q^2 = -7, u_1 = 28 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 28, q^2 = \dfrac{1}{4} \\ u_1 = 28, q^2 = -\dfrac{1}{4} \text{(VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow u_1 = 28,\ q = \pm\dfrac{1}{2}.$$

Bài toán 6. 34: Tìm tất cả các số thực x sao cho $\tan\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right)$, $\tan\dfrac{\pi}{12}$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right)$ tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự nào đó.

Hướng dẫn giải

Đặt $a = \tan\dfrac{\pi}{12}$ và $y = \tan x$. Xét ba trường hợp của 3 thứ tự:

Trường hợp 1: $\tan\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right).\tan\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right) = \tan^2\dfrac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a-y}{1+ay}.\dfrac{a+y}{1-ay} = a^2 \Leftrightarrow a^2 - y^2 = a^2(1 - a^2y^2)$

$\Leftrightarrow (a^4 - 1)y^2 = 0$. Vì $a \neq \pm 1$ ta có $y = 0$.

Do đó $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của bài toán.

Trường hợp 2: $\tan\dfrac{\pi}{12}.\tan\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right) = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right)$

$\Leftrightarrow a\dfrac{a+y}{1-ay} = \left(\dfrac{a-y}{1+ay}\right)^2 \Leftrightarrow (a^2 + 1)y[ay^2 + (a^2 - 1)y + 3a] = 0$

Ta có: $y = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi $ay^2+(a^2-1)y + 3a = 0$, vì $a = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = 2-\sqrt{3}$

nên $y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$, suy ra $y_1 = y_2 = \sqrt{3}$.

Do đó $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ là nghiệm của bài toán.

Trường hợp 3: $\tan\frac{\pi}{12}.\tan\left(\frac{\pi}{12}-x\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$

Thay x bởi –x, dựa vào kết quả trên thì nghiệm bài toán là:

$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Vậy các số cần tìm là $x = k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 6. 35: Cho x_1 và x_2 là 2 nghiệm của phương trình:
$x^2 - 3x + a = 0$, x_3 và x_4 là 2 nghiệm phương trình : $x^2 - 12x + b = 0$.
Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự trên lập thành cấp số nhân. Tìm a, b.

Hướng dẫn giải

Gọi q là công bội thì $x_2 = x_1.q$; $x_3 = x_1.q^2$; $x_4 = x_1.q^3$. áp dụng định lý Viet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = a \\ x_3 + x_4 = 12 \\ x_3x_4 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(1+q) = 3 & (1) \\ x_1x_2 = a & (2) \\ x_1q^2(1+q) = 12 & (3) \\ x_3x_4 = b & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) $\Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

Nếu q = 2 thì (1) $\Rightarrow x_1 = 1$. Thay vào (2), (4):

$$a = x_1x_2 = x_1^2.q = 2 \text{ và } b = x_3x_4 = x_1^2.q^5 = 32.$$

Nếu q = –2 thì (1) $\Rightarrow x_1 = -3$. Thay vào (2), (4):

$$a = x_1^2q = -18 \text{ và } b = x_1^2q^5 = -288$$

Vậy $\begin{cases} a = 2 \\ b = 32 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -18 \\ b = -288 \end{cases}$.

Bài toán 6. 36: Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $u_1 = a$, $u_{n+1} = \frac{9}{u_n}$ với $n \geq 1$.

Tìm a khác 0 để dãy (u_n) lập cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

Vì $a \neq 0$ và $u_{n+1} = \frac{9}{u_n}$ nên các số hạng của dãy đều cùng dấu.

Do đó công bội q > 0. Ta có $u_{n+1} = u_n.q$ mà $u_{n+1} = \frac{9}{u_n}$ nên có:

$$u_n.q = \frac{9}{u_n} \Rightarrow u_n^2 = \frac{9}{q} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Xét a > 0 thì $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$, do đó:

$u_n = \sqrt{\frac{9}{q}}$ là dãy không đổi nên $u_{n+1} = u_n = u_1 = a$.

Ta có $a = \frac{9}{a} \Leftrightarrow a^2 = 9$, chọn a = 3 > 0.

Xét a < 0 thì $u_n < 0$ với mọi $n \geq 1$, do đó

$u_n = -\sqrt{\frac{9}{q}}$ là dãy không đổi nên $u_{n+1} = u_n = a$.

Ta có $a = \frac{9}{a} \Leftrightarrow a^2 = 9$. Chọn a = –3 < 0.

Đảo lại, với a = 3 thì $u_n = 3$ với mọi $n \geq 1$ còn với a = –3 thì $u_n = -3$ với mọi $n \geq 1$. Hai dãy không đổi này đều lập cấp số nhân có công bội q = 1.

Vậy a = –3 hoặc a = 3.

Bài toán 6. 37: Chứng minh không tồn tại một cấp số nhân nào chứa các số hạng 2, 3 và 5.

Hướng dẫn giải

Giả sử có cấp số nhân u_n chứa các số hạng 2, 3, 5 là các số hạng chứa k + 1, n + 1, m + 1 khác nhau.

Ta có $2 = u_1.q^k$, $3 = u_1.q^l$, $5 = u_1.q^m \Rightarrow \frac{3}{2} = q^{n-k}, \frac{5}{2} = q^{m-n}$

$$\Rightarrow (\frac{3}{2})^{m-k} = (\frac{5}{2})^{n-k} \Rightarrow (\frac{3}{2})^m . (\frac{5}{2})^k = (\frac{5}{2})^n . (\frac{3}{2})^k$$

Do đó $2^n . 3^m . 5^k = 2^m.3^k.5^n$

Xét n > m thì có $2^{n-m} . 3^m . 5^k = 3^k.5^n$, vế trái là số chẵn còn vế phải là số lẻ: vô lý.

Xét n < m thì có $3^m . 5^k = 2^{m-n} . 3^k . 5^n$, vế trái là số lẻ còn vế phải là số chẵn: vô lý.

Vậy không tồn tại cấp số nhân chứa các số hạng 2, 3 và 5.

Bài toán 6. 38: Chứng minh a, b, c là 3 số hạng của cấp số nhân thì điều kiện cần và đủ là: $\begin{cases} a^p.b^q.c^r = 1 \\ p + q + r = 0 \end{cases}$ với p, q, r nguyên.

Hướng dẫn giải

Giả sử a, b, c lần lượt là thứ hạng k + 1, n + 1, m + 1 của một cấp số nhân có số hạng đầu tiên là u_1 và công bội là q. Ta có:

$a = u_1 . q^k$, $b = u_1.q^n$, $c = u_1 . q^m$.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = q^{k-n}, \frac{b}{c} = q^{n-m} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-n} = q^{(k-n)(n-m)}$$

$$\Rightarrow a^{n-m} . b^{m-k} . c^{k-n} = 1 \qquad (1)$$

Đặt p = m − m, q = m − k, r = k − n thì từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} a^p.b^q.c^r = 1 \\ p+q+r=0 \end{cases}$:đpcm.

Đảo lại, giả sử tồn tại các số nguyên p, q, r thoả mãn đề bài.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

$p + q + r = 0 \Rightarrow q = -(p + r)$. Do đó từ $a^p . b^q . c^r = 1$ suy ra

$$a^p . q^{-(p+r)} . c^r = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^p . \left(\frac{c}{b}\right)^r = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^p = \left(\frac{c}{b}\right)^r \qquad (2)$$

Vì $\frac{b}{a} \ge 1$ và $\frac{c}{b} \ge 1$ nên p và r cùng dấu.

Đặt $t = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{r}} \Rightarrow b = at^r$ và (2) $\Rightarrow \frac{c}{b} = t^p \Rightarrow c = bt^p = at^{p+r}$

Điều đó chứng tỏ a, b, c lần lượt là số hạng thứ 1, r + 1 và p + r + 1 trong một cấp số nhân với công bội t.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 6. 39: Hãy xác định các giá trị của a sao cho phương trình: $16x^4 - a x^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$ có 4 nghiệm lập thành cấp số nhân

Hướng dẫn giải

Giả sử $a \in R$ là giá trị mà phương trình đã cho có 4 nghiệm lập thành cấp số nhân với công bội q.

Dễ thấy x = 0 không là nghiệm PT, nên $q \neq 0$.

Nếu q = 1 thì (1) có 4 nghiệm bằng nhau và bằng 1 (hoặc −1)

Ta có: $\begin{cases} a = 4 \\ 2a+1 = 6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -4 \\ 2a+1 = 6 \end{cases}$

cả hai đều không xảy ra. Vậy $q \neq 1$

Nếu q = −1: PT đã cho có nghiệm là: x, − x, x, −.x $\Rightarrow$ a = 0

(1) $\Leftrightarrow 16x^4 + 17x^2 + 16 = 0$ vô nghiệm

Nếu $q \neq +-1$, $q \neq 0$: không mất tính tổng quát, ta gọi 4 nghiệm là: α, αq, αq^2, αq^3 ($\alpha \neq 0$, $|q| > 1$)

$\Rightarrow |\alpha| < |\alpha||q| < |\alpha q^2| < |\alpha q^3|$

Mặt khác $\frac{1}{\alpha q^i}$ cũng là nghiệm (1), ($i = \overline{0, 3}$) và:

$$\frac{1}{|\alpha|} > \frac{1}{|\alpha q|} > \frac{1}{|\alpha q^2|} < \frac{1}{|\alpha q^3|} \Rightarrow \alpha q^3 = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow q = \alpha^{-\frac{2}{3}}$$

Do đó 4 nghiệm phương trình là: $\alpha, \alpha^{\frac{1}{3}}, \alpha^{-\frac{1}{3}}, \alpha^{-1}$. Theo Định lí Viet, ta có:

$$\begin{cases} \alpha + \alpha^{\frac{1}{3}} + \alpha^{-\frac{1}{3}} + \alpha^{-1} = \dfrac{a}{16} \\ \alpha^{\frac{4}{3}} + \alpha^{\frac{2}{3}} + 1 + 1 + \alpha^{-\frac{2}{3}} + \alpha^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{2a+17}{16} \end{cases}$$

Đặt $z = \alpha^{\frac{1}{3}} + \alpha^{-\frac{1}{3}}$, $z \geq 2$, ta có:

$$\begin{cases} z^3 - 2z = \dfrac{a}{16} \\ z^4 - 3z^2 = \dfrac{2a-15}{16} \end{cases} \Rightarrow z^4 - 3z^2 = 2(z^3 - 2z) - \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow z^4 - 2z^3 - 3z^2 + 4z + \frac{15}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{3}{2}\right)\left(z - \frac{5}{2}\right)\left(z - \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

mà $|z| \geq 2$ nên $z = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 170$

Ngược lại a = 170 thì phương trình trở thành:

$16x^4 - 170x^3 + 357x^2 - 170x + 16 = 0$ có 4 nghiệm $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, 8\right\}$ lập thành cấp số nhân có q = 4.

Vậy: a = 170

Bài toán 6. 40: Cho 4 số a, b, c, d theo thứ tự lập cấp số nhân.

Chứng minh $(d-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = (d-a)^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi q là công bội cấp số nhân, ta có: $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$ nên

$(d-a)^2 = (aq^3 - a)^2 = a^2(q^3 - 1)^2$ và:

$(d-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = (aq^3 - qa)^2 + (aq - aq^2)^2 + (aq^2 - a)^2$

$= a^2[(q^3 - q)^2 + (q - q^2)^2 + (q^2 - 1)^2]$

$= a^2(q^6 - 2q^4 + q^2 + q^2 - 2q^3 + q^4 + q^4 - 2q^2 + 1)$

$= a^2(q^6 - 2q^3 + 1) = a^2(q^3 - 1)^2 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6. 41: Cho 3 cạnh của tam giác lập thành cấp số nhân. Chứng minh công bội q thoả mãn: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi 3 cạnh lập cấp số nhân là x, xq, xq^2 $(x > 0, q > 0)$.

Vì tổng 2 cạnh lớn hơn cạnh thứ 3 nên:

$$\begin{cases} x + xq > xq^2 \\ xq + xq^2 > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \\ q^2 + q - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ q < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ hay } q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 6. 42: Cho 3 số x, y, $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ thoả mãn tanx.tanz = 1. Chứng minh nếu $\sin^2 x$, $\sin^2 y$, $\sin^2 z$ lập cấp số cộng thì tanx, tany, tanz lập cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin^2 x$, $\sin^2 y$, $\sin^2 z$ lập cấp số cộng

$\Rightarrow \sin^2 y - \sin^2 x = \sin^2 z - \sin^2 y \Rightarrow \cos^2 y - \cos^2 x = \cos^2 z - \cos^2 y$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\tan^2 y} - \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 z} - \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1+\tan^2 y} = \frac{2+\tan^2 x+\tan^2 z}{1+\tan^2 x+\tan^2 z+\tan^2 x.\tan^2 z} = 1$$

$\Rightarrow \tan^2 y = 1$ thì tanx.tanz = 1 nên

$\tan^2 y = \tan x.\tan z$. Vậy tanx, tany, tanz lập cấp số nhân.

Bài toán 6. 43: Tìm 3 số vừa lập cấp số cộng vừa lập cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z. Theo giả thiết:

$x + z = 2y$, $y^2 = xz \Rightarrow z = 2y - x$ nên $y^2 = x(2y - x)$

Do đó $y^2 = 2xy - x^2 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$ nên $z = x$.

Đảo lại với 3 số $x = y = z$ thì chúng lập cấp số cộng có công sai $d = 0$ và đồng thời lập cấp số nhân có công bội $q = 1$.

Vậy 3 số cần tìm là 3 số bằng nhau bất kì.

Bài toán 6. 44: Tìm 3 số lập thành cấp số cộng, có tổng bằng 15. Biết rằng nếu thêm lần lượt vào 1, 1, 4 thì 3 số mới lập cấp số nhân.

Hướng dẫn giải

Gọi cấp số cộng u_1, u_2, u_3 có công sai d.

Ta có $u_1 + u_2 + u_3 = 15 \Rightarrow 3u_2 = 15 \Rightarrow u_2 = 5$.

Do đó $u_1 = 5 - d$, $u_3 = 5 + d$.

Theo giả thiết thì $u_1 + 1$, $u_2 + 1$, $u_3 + 4$ lập cấp nhân nên:

$(u_2 + 1)^2 = (u_1 + 1)(u_3 + 4)$.

$\Rightarrow 36 = (6 - d)(9 + d) \Rightarrow d^2 + 3d - 18 = 0 \Rightarrow d = -18$ hoặc $d = 3$.

Vậy 3 số cần tìm là 23, 5, −13 hoặc 2, 5, 8.

Bài toán 6. 45: Cho cấp số cộng (u_n) với công sai khác 0. Biết rằng các số u_1u_2, u_2u_3 và u_3u_1 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q \neq 0$. Hãy tìm q.

Hướng dẫn giải

Vì cấp số cộng (u_n) có công sai khác 0 nên các số u_1, u_2, u_3 đôi một khác nhau. Suy ra $u_1.u_2 \neq 0$ và $q \neq 1$.

Ta có $u_2u_3 = u_1u_2.q$ và $u_3u_1 = u_1u_2.q^2$. Do đó $u_3 = u_1q = u_2q^2$

Vì u_1, u_2, u_3 là một cấp số cộng nên $u_1 + u_3 = 2u_2$.

Từ kết quả trên, suy ra: $u_2(q + q^2) = 2u_2 \Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0$. Chọn $q = -2$.

Bài toán 6. 46: Hai cấp số cộng và nhân với các số hạng dương có cùng một số các số hạng, trong đó các số hạng đầu và cuối tương ứng như nhau. Tổng các số hạng của cấp số nào sẽ lớn hơn.

Hướng dẫn giải

Gọi cấp số cộng là a_n và cấp số nhân là b_n

Theo đề: $b_1 = a_1$, $a_n = b_n = b_1.q^{n-1}$

Đặt: $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$; $B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$.

Ta có: $A_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}.n = \dfrac{a_1(1 + q^{n-1})}{2}.n$; $B_n = a_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Mặt khác: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

$$\Rightarrow \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{2}[(1 + q^{n-1}) + (q + q^{n-2}) + ... + (q^k + q^{n-k+1}) + ... + (q^{n-1} + 1)]$$

Ta có $q^k + q^{n-k+1} \geq 1 + q^{n-1}$

Bởi vì: $q^k + q^{n-k+1} - 1 - q^{n-1} = (q^k - 1)(1 - q^{n-k-1}) \leq 0$.

nên: $\dfrac{q^n - 1}{q - 1} \leq \dfrac{1 + q^{n-1}}{2}.n$. Do đó $\dfrac{a_1.(1 + q^{n-1}).n}{2} \geq \dfrac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$ (vì $a_1 > 0$)

Vậy $A_n \geq B_n$.

Bài toán 6. 47: Cho cấp số cộng: 308, 973, 1638, 2302, 2968, 3633, 4298.

Hãy xác định cấp số nhân b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 sao cho:

$308 < b_1 < 973 < b_2 < 1638 < b_3 < 2302 < b_4 < 2968 < b_5 < 3633 < b_6 < 4298$.

Hướng dẫn giải

Đầu tiên, ta tìm công bội x .Ta có: $b_6 = b_1.x^5$. Giá trị lớn nhất cho b_1 là 972, và giá trị nhỏ nhất cho b_6 là 3634. Như thế ta được:

$3634 \le 972.x^5 \Rightarrow 1,301 \le x$

Mặt khác, từ giá trị nhỏ nhất là 2304 của b_4 và giá trị lớn nhất là 4297 của b_6, ta cũng có: $4297 \ge 2304.x^2 \Rightarrow x \le 1,37$

Vậy: $1,301 \le x \le 1,37$ nên được: $x = \dfrac{4}{3}$.

Khi đó $b_6 = b_1\left(\dfrac{4}{3}\right)^5$. Mà $3^5 = 243$ nên b_1 phải là bội của 243, nhưng b_1 nằm giữa 309 và 972 nên $b_1 = 486, 729$ hay 972. Kết hợp với $b_1.x = b_2 > 973$, ta tìm được $b_1 = 972$.

Vậy cấp số nhân: 972, 1296, 1728, 2304, 3072, 4096.

Bài toán 6. 48: Cho cấp số cộng (u_n) và cấp số nhân (v_n) đều có các số hạng dương. Lập dãy mới $\{x_n\}$: $u_1, v_1, u_2, v_2,...$ Viết công thức tổng quát của dãy x_n theo các số hạng đầu và công sai, công bội.

Hướng dẫn giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $u_n = u_1 + (n-1)d$ (1)

Xét cấp số cộng mới: $a_1, a_2, ...,$ có $a_1 = u_1$ có $d' = \dfrac{d}{2}$ là công sai.

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d' = u_1 + (n-1)\frac{d}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thì $u_k = a_{2k-1}$, $k = 1, 2, ...$

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho thì $v_n = v_1.q^{n-1}$ (3)

Xét cấp số nhân mới: $b_1, b_2,...$ với $b_1 = v_1$ có $q' = \sqrt{q}$ là công bội

$$\Rightarrow b_n = b_1(q')^{n-1} = v_1 q^{\frac{n-2}{2}} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) thì $v_{2k} = v_1.q^{n-1} = b_k$, $k = 1, 2m...$

Từ bốn cấp số nói trên và các kết quả thì dãy $\{x_n\}$: $u_1, v_1, u_2, v_2,....$ chính là dãy $a_1, b_2, a_3, b_4,...$ nên: $x_n = \begin{cases} a_n \text{ khi } n = 2k-1 \\ b_n \text{ khi } n = 2k \end{cases}$

Do đó $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} + (-1)^n.\dfrac{b_n - a_n}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(a_1 + (n-1)\frac{d}{2} + b_1.(q)^{n-1} + (-1)^n\left[b_1.q^{\frac{n-2}{2}} - a_1 - (n-1)\frac{d}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((n-1)\frac{d}{2} + u_1 + v_1.q^{\frac{n-2}{2}} + (-1)^n\left[u_1.q^{\frac{n-2}{2}} - u_1 - (n-1)\frac{d}{2}\right]\right)$$

Vậy: $x_n = \frac{1}{2}\left(u_1 + (n-1)\frac{d}{2} + v_1.q^{\frac{n-2}{2}} + (-1)^n\left[u_1.q^{\frac{n-2}{2}} - u_1 - (n-1)\frac{d}{2}\right]\right)$.

Bài toán 6. 49: Chứng minh trong cấp số cộng gồm 1999 số hạng liên tiếp không thể chọn được 12 số lập thành cấp số nhân có công bội $q > 1$.

Hướng dẫn giải

Bằng cách chia tất cả các số hạng của cấp số cộng cho số hạng đầu của cấp số nhân, giả sử cấp số cộng chứa các số $1, q, q^2, \ldots, q^{11}$ $(q > 1)$.

$q^{11} = 1 + (n-1)d$. Với d là công sai cấp số cộng, ta chứng minh $n > 1999$

Vì q^m là các số hạng của cấp số cộng chứa số 1 nên $\frac{q^m - 1}{d}$ là số tự nhiên

Do đó $\frac{q^2-1}{d} : \frac{q-1}{d} = q + 1$ là số hữu tỉ $\Rightarrow$ q hữu tỉ $\Rightarrow$ d hữu tỉ

Đặt $q = \frac{u}{v}, d = \frac{a}{b}$ là các phân số tối giản.

Ta có: $\frac{u-1}{d} = \frac{u-v}{a}; \frac{q^{11}-1}{d} = \frac{u^{11}-v^{11}}{a}.\frac{b}{v^{11}}$

Vì $(u, v) = 1, (a, b) = 1 \Rightarrow u - v \vdots a, b \vdots v^{11}$

$\Rightarrow u - v \geq a, b \geq v^{11}$. Từ $u > v \geq 1 \Rightarrow u \geq 2$.

$$n = 1 + \frac{u^{11}-v^{11}}{v^{11}}.\frac{b}{a} \geq 1 + \frac{u^{11}-v^{11}}{u-v}$$

$= 1 + (u^{10} + u^9v + \ldots + v^{10}) \geq 1 + (2^{10} + 2^9 + \ldots + 2 + 1) = 2^{11}$

$\Rightarrow n \geq 2^{11} = 2048 > 1999$.

Vậy cấp số cộng gồm 1999 số hạng không thể chứa 12 số hạng của một cấp số nhân có $q > 1$.

Bài toán 6. 50: Tìm công thức tính các tổng sau:

a) $S = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2$ b) $T = 1.2 + 2.3 + \ldots + (n-1)n$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $S = (2.1-1)^2 + (2.2-1)^2 + \ldots + (2n-1)^2$.

$= 4(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 4(1 + 2 + \ldots + n) + n$

$= 4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4.\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

b) $3T = \sum_{k=1}^{n-1} 3k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1))$

$= (n-1)n(n+1)$. Vậy $T = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

Cách khác $T = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{n(n+1)\left[2n+1-3\right]}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Bài toán 6. 51: Tìm công thức tính các tổng sau:

a) $S = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n}$ b) $T = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n}$.

Hướng dẫn giải

a) $S = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$

b) Ta có: $\dfrac{1}{2}T = T - \dfrac{1}{2}T = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \ldots + \dfrac{n}{2^n}\right) - \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^{n+1}}\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2-1}{2^2} + \frac{3-2}{2^3} + \ldots + \frac{n-(n-1)}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{2^n} - 1 - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}. \text{ Vậy } T = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Bài toán 6. 52: Hãy tìm đa thức F(x) sao cho $F(x) - F(x-1) = x^3$ với mọi x. Từ đó lập công thức tính tổng $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

Hướng dẫn giải

Ta thấy hàm: $F(x) = \dfrac{1}{4}(x+1)^4 - \dfrac{1}{2}(x+1)^3 + \dfrac{1}{4}(x+1)^2 = \dfrac{1}{4}x^2(x+1)^2$ thỏa mãn điều kiện $F(x) - F(x-1) = x^3$. Suy ra:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}(F(k) - F(k-1)) = F(n) - F(0) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Bài toán 6. 53: Tính tổng

a) $S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots11$ (n chữ số 1)

b) $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \ldots + (n+1)a^n$, a là số cho trước.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $S_n = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + ... + \frac{10^n-1}{9}$

$$= \frac{1}{9}(10 + 10^2 + ... + 10^n) - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\left(10.\frac{10^n-1}{9}\right) - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1}-10-9n}{81}.$$

b) Xét a = 0: $S_n = 1$

Xét a = 1: $S_n = 1 + 2 + ... + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Xét $a \neq 0$, $a \neq 1$, ta có:

$aS_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + ... + (n + 1)a^{n+1}$

$\Rightarrow S_n - aS_n = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n - (n + 1)a^{n+1}$

$S_n(1-a) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} - (n+1)a^{n+1}$

$S_n = \frac{1}{1-a}\left[\frac{a^{n+1}-1-(n+1)a^{n+1}(a-1)}{a-1}\right] = \frac{(n+1)a^{n+2}-(n+2)a^{n+1}+1}{(1-a)^2}$

Bài toán 6. 54: Cho $|q| < 1$. Tính tổng vô hạn:

a) $A = 1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} + ...$

b) $B = 1 + 4q + 9q^2 + ... + n^2q^{n-1} + ...$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $A = 1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} + ...$

nên $Aq = q + 2q^2 + 3q^3 + ... + nq^n + ...$

Do đó $A - Aq = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$

nên $A(1-q) = \frac{1}{1-q}$. Vậy $A = \frac{1}{(1-q)^2}$

b) Ta có $B = 1 + 4q + 9q^2 + ... + n^2q^{n-1} + ...$

$Bq = q + 4q^2 + 9q^3 + ... + n^2q + ...$

nên $B(1-q) = 1 + 3q + 5q^2 + ... + (2n + 1)q^n + ...$

Do đó $B(1-q)q = q + 3q^2 + 5q^3 + ... + (2n + 1)q^{n+1} + ...$

nên $B(1-q) - B(1-q)^q = 1 + 2q + 2q^2 + ... + 2q^n + ...$

$B(1-q)^2 = 1 + 2q(1 + q + q^2 + ...) = 1 + 2q.\frac{1}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$

Vậy $B = \frac{1+q}{(1-q)^3}$.

Bài toán 6. 55: Cho $|a| < 1$, $|b| < 1$.

Đặt $A = 1 + a + a^2 + ...$; $B = 1 + b + b^2 + ...$

Tính tổng vô hạn $T = 1 + ab + a^2b^2 + ...$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$A = 1 + a + a^2 + ... = \frac{1}{1-a} \Rightarrow a = \frac{A-1}{A}$$

$$B = 1 + b + b^2 + ... = \frac{1}{1-b} \Rightarrow b = \frac{B-1}{B}$$

Ta có $T = 1 + ab + a^2b^2 + ... = \dfrac{1}{1-ab}$ (vì $|ab| < 1$)

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{A-1}{A}\right)\left(\frac{B-1}{B}\right)} = \frac{AB}{AB-(A-1)(B-1)} = \frac{AB}{A+B-1}$$

Bài toán 6. 56: Cho cấp số nhân $u_1, u_2, ..., u_n$; $u_1 > 0$, công bội $q > 0$ và $q \neq 1$

biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + ... + u_n = a \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + ... + \dfrac{1}{u_n} = b \end{cases}$. Tính $P = u_1u_2...u_n$ theo a và b.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P = u_1u_2...u_n = u_1.u_1q.u_1q^2...u_1q^{n-1} = u_1^n.q^{1+2+...+(n-1)} = u_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\Rightarrow P^2 = u_1^{2n}.q^{n(n-1)}$. Theo giả thiết:

$$\begin{cases} u_1(1+q^1+q^2+...+q^{n-1}) = a \\ \dfrac{1}{u_1}\left(1+\dfrac{1}{q^1}+\dfrac{1}{q^2}+...+\dfrac{1}{q^{n-1}}\right) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = u_1\dfrac{q^n-1}{q-1} \\ b = \dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{q}-1} \end{cases}$$

Do đó: $\dfrac{a}{b} = a^2.q^{n-1} > 0$ do $q > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = u_1^{2n}q^{n(n-1)}$

Suy ra $P^2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \Leftrightarrow |P| = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}$. Vì $u_1 > 0$ và $q > 0$ nên $P = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Bài toán 6. 57: Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn làm dưới dạng phân số:

a) 0,32111...

b) 5,616161...

Hướng dẫn giải

a) $0,32111... = 0,32 + 0,001 + 0,0001 + 0,00001 + ...$

$$= \frac{32}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}.\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{1000}.\left(\frac{1}{10}\right)^2 + ...$$

$$= \frac{32}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{32}{100} + \frac{1}{900} = \frac{289}{900}$$

b) $5,616161... = 5 + 0,61 + 0,0061 + 0,000061 + ...$

$$= 5 + 0,61 + 0,61\frac{1}{10^2} + 0,61\frac{1}{10^4} + ...$$

$$= 5 + 0,61\,.\,\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} = 5 + \frac{61}{99} = \frac{556}{99}.$$

Bài toán 6. 58: Cho cấp số cộng $u_1, u_2,..., u_n$ $(n \geq 4)$, mà mọi số hạng đều dương. Chứng minh: $\dfrac{u_1 + u_n}{\sqrt[n]{u_1u_2...u_n}} \geq \dfrac{2}{n}\left(\sqrt[n]{\dfrac{u_1^3}{u_2u_3u_4}} + \sqrt[n]{\dfrac{u_2^3}{u_3u_4u_5}} + ... + \sqrt[n]{\dfrac{u_n^3}{u_1u_2u_3}}\right)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{(u_1 + u_n)n}{2}$. BĐT tương đương:

$$\frac{2}{n}.\frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{\sqrt[n]{u_1u_2...u_n}} \geq \frac{2}{n}\left(\sqrt[n]{\frac{u_1^3}{u_2u_3u_4}} + \sqrt[n]{\frac{u_2^3}{u_3u_4u_5}} + ... + \sqrt[n]{\frac{u_n^3}{u_1u_2u_3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_1+u_2+...+u_n \geq \sqrt[n]{u_1u_2...u_n}\left(\sqrt[n]{\frac{u_1^3}{u_2u_3u_4}} + \sqrt[n]{\frac{u_2^3}{u_3u_4u_5}} + ... + \sqrt[n]{\frac{u_n^3}{u_1u_2u_3}}\right)$$

Áp dụng BĐT AM–GM cho n số dương:

$$\sqrt[n]{u_1u_2...u_n}.\sqrt[n]{\frac{u_1^3}{u_2u_3u_4}} = \sqrt[n]{u_1^4u_5u_6...u_n} \leq \frac{4u_1 + u_5 + u_6 + ... + u_n}{n}$$

...

$$\sqrt[n]{u_1u_2...u_n}.\sqrt[n]{\frac{u_2^3}{u_3u_4u_5}} = \sqrt[n]{u_2^4u_1u_6u_7...u_n} \leq \frac{4u_2 + u_1 + u_6 + ... + u_n}{n}$$

$$\sqrt[n]{u_1u_2...u_n}.\sqrt[n]{\frac{u_n^3}{u_1u_2u_3}} = \sqrt[n]{u_n^4u_4u_5...u_n} \leq \frac{4u_n + u_4 + u_5 + ... + u_{n-1}}{n}$$

Cộng lại n bất đẳng thức, ta có:

$$\sqrt[n]{u_1u_2...u_n}\left(\sqrt[n]{\frac{u_1^3}{u_2u_3u_4}}+\sqrt[n]{\frac{u_2^3}{u_3u_4u_5}}+...+\sqrt[n]{\frac{u_n^3}{u_1u_2u_3}}\right)\le u_1+u_2+...+u_n$$

$\Rightarrow$ đpcm. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow u_1 = u_2 = ... = u_n$.

Bài toán 6. 59: Cho cấp số cộng $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ có tất cả các số hạng không âm. Chứng minh $\sqrt{a_1.a_n} \le \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \le \frac{a_1+a_n}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho n số không âm:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{2}=\frac{a_1+a_n}{2}\quad(1)$$

Bổ đề: $a_1.a_n \le a_2.a_{n-1} \le a_3.a_{n-2} \le ... \le a_k.a_{k+1}$ với $2 \le k \le \frac{n+1}{2}$

Ta phải chứng minh rằng nếu $2\le k\le\frac{n+1}{2}$ thì $a_{k-1}.a_{n-k+2} \le a_k.a_{n-k+1}$.

Thật vậy, gọi d là công sai ta có:

$a_{k-1}.a_{n-k+2} = [a_1 + (k-2)d].[a_1 + (n-k+1)d]$

$= a_1^2 + (n-1)a_1.d + (k-2)(n-k+1)d^2$

$a_k.a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)d].[a_1 + (n-k)d]$

$= a_1^2 + (n-1)a_1.d + (k-1)(n-k)d^2$

Mà: $(k-2)(n-k+1) = (k-1)(n-k) + 2k - n - 2$

Và $2\le k\le\frac{n+1}{2}$ nên $2k - n - 2 < 0$.

Do đó: $(k-2)(n-k+1) < (k-1)(n-k)$

nên $a_{k-1}.a_{n-k+2} \le a_k.a_{n-k+1}$ (đpcm).

Áp dụng ta có: $(a_1.a_2...a_n)^2 = (a_1.a_n)(a_2.a_{n-1})...(a_na_1) \ge (a_1.a_n)^n$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\ge\sqrt{a_1.a_n}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ đpcm.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 6. 1: Chứng minh với mọi n nguyên dương:

a) $2^2+4^2+...+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{...-\sqrt{2}}}} = 2.\cos\frac{\pi}{3}(1-\frac{1}{(-2)^{n+1}})$, n dấu căn.

Hướng dẫn

a) Dùng quy nạp trực tiếp hay tách thừa số 4 cho gọn.

b) Dùng quy nạp

Bài tập 6. 2: Chứng minh với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, ta có:

a) $n^{n+1} > (n+1)^n$ b) $\frac{3}{5}.\frac{7}{9}...\frac{4n-1}{4n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Hướng dẫn

a) Dùng quy nạp và biến đổi tương đương.

b) Dùng quy nạp

Bài tập 6. 3: Chứng minh dãy $u_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1} \vdots 133$

Hướng dẫn

Dùng quy nạp và tách số mũ theo giả thiết quy nạp.

Bài tập 6. 4: Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) 0,444... b) 0,212121

Hướng dẫn

a) 0,444... = 0,4 + 0,04 + 0,004 + ...Kết quả $\frac{4}{9}$

b) 0,212121 = 0,21+ 0,0021 + 0, 000021 + ... Kết quả $\frac{7}{33}$

Bài tập 6. 5: Cho tam giác ABC có ba cạnh theo thứ a, b, c lập cấp số cộng. Chứng minh:

a) $ac = 6Rr$ b) công sai $d = \frac{3r}{2}(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2})$.

Hướng dẫn

a) Dùng $a + c = 2b$ và dùng công thức diện tích $S = pr = \frac{abc}{4R}$

b) Dùng $a + c = 2b$ và công sai $d = \frac{1}{2}(c - a)$.

Bài tập 6. 6: Cho 2 cấp số cộng 17, 21, 25, ... và 16, 21, 26,..... Chứng minh các số có mặt chung trong 2 cấp số cộng đó cũng lập thành cấp số cộng.

Hướng dẫn

Cấp số cộng 17, 21, 25, ... có số hạng tổng quát $u_n = 17 + 4n$

Cấp số cộng 16, 21, 26,..... có số hạng tổng quát $v_m = 16 + 5m$

Kết quả $u_1 = 21$ và $d = 20$.

Bài tập 6. 7: Hai cấp số cộng và nhân có cùng số hạng đầu bằng 5, cùng số hạng thứ ba như nhau, số hạng thứ hai của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ hai của cấp số nhân 10. Xác định 2 cấp số đó.

Hướng dẫn

Gọi cấp số cộng 5, 5 + a, 5 + 2a thì cấp số nhân là 5, 5 +a – 10, 5 + 2a.

Kết quả 5, 5,5 ... và 5, –5, 5... hoặc 5, 25, 45, ... và 5, 15, 45,...

Bài tập 6. 8: Cho dãy $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$.

Tính tổng $S_k = \dfrac{1}{u_1 - 1} + \dfrac{1}{u_2 - 1} + ... + \dfrac{1}{u_k - 1}$

Hướng dẫn

Ta có $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n} \Rightarrow u_n - 1 = \dfrac{-2.5^n}{2^n + 5^n} \Rightarrow \dfrac{1}{u_n - 1} = -(\dfrac{2}{5})^n - \dfrac{1}{2}$.

Kết quả $\dfrac{(2+3k).5^k - 2^{k+1}}{6.5^k}$

Bài tập 6. 9: Cho cấp số cộng vô hạn a, a + d, a +2d, ...Tìm điều kiện của a và d để trích ra được một dãy vô hạn lập thành cấp số nhân.

Hướng dẫn

Kết quả d = 0 hoặc $\dfrac{a}{d}$ là số hữu tỉ

Bài tập 6. 10: Hãy tìm cấp số nhân được lập bởi 16 số tự nhiên, sao cho:
– 5 số hạng đầu là số có 9 chữ số.

- 5 số hạng tiếp theo là số có 10 chữ số.
- 4 số hạng tiếp theo là số có 11 chữ số.
- 2 số hạng sau cùng là số có 12 chữ số.

Hướng dẫn

Trước hết chứng minh công bội q < 2, cuối cùng là $q = \dfrac{5}{3}$

Kết quả $u_1 = 7.3^{15}$, $q = \dfrac{5}{3}$

Bài tập 6. 11: Chứng minh rằng với mọi số thực M, tồn tại một cấp số cộng vô hạn sao cho: tổng các chữ số của mỗi số hạng (trong biểu diễn thập phân) lớn hơn M, mỗi số hạng là một số nguyên dương và công sai không chia hết cho 10.

Hướng dẫn

Chọn công sai dạng $10^m + 1$

Chuyên đề 7: DÃY SỐ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Dãy số : Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbf{N}^*$ (hay mở rộng **N**) được gọi là một dãy số. Kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), và gọi là u_n là số hạng tổng quát của dãy số đó.

Dãy số (u_n) viết dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Các cách cho một dãy số:

- Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát u_n.
- Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi hay bằng quy nạp u_1 và u_{n+1} theo u_n; u_1, u_2 và u_{n+2} theo u_n, u_{n+1};...
- Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Các dãy số đặc biệt:

- Dãy cấp số cộng: $u_n = u_{n-1} + d$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$
- Dãy cấp số nhân: $v_n = v_{n-1}.q$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$
- Dãy Fibonaci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ và $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \ge 1$

Công thức Binet $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

- Dãy Lucas: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ và $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ với $n \ge 2$

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Dãy Farey bậc n: dãy f_n gồm các phân số tối giản nằm giữa 0 và 1, có mẫu số không lớn hơn n , sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

$$f_1 = (\frac{0}{1}; \frac{1}{1}); \; f_2 = (\frac{0}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{2}); \; f_3 = (\frac{0}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}); \ldots$$

Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) là dãy số tăng nếu $u_n \le u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$
- Dãy số (u_n) là dãy số tăng nghiêm ngặt nếu $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$
- Dãy số (u_n) là dãy số giảm nếu $u_n \ge u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$
- Dãy số (u_n) là dãy số giảm nghiêm ngặt nếu $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

Các dãy tăng, dãy giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

Dãy số tuần hoàn

Dãy số (u_n) tuần hoàn chu kỳ k nếu $u_{n+k} = u_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

Dãy số bị chặn:

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \le M$.

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \geq m$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho: $\forall n \in \mathbf{N}^*, m \leq u_n \leq M$.

Xác định các dãy số bằng dãy phụ:

- Dạng $u_{n+1} = u_n + f(n)$ thì đặt dãy phụ $x_n = u_{n+1} - u_n$ hoặc viết liên tiếp $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_2 - u_1) + u_1$.

Hoặc cộng n đẳng thức từ n = 1, 2 , ... đến n để tính.

- Dạng $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + a$, đặt dãy phụ $v_n = u_n - u_{n-1}$ thì được: $v_{n+1} = v_n + a$ là dãy cấp số cộng.
- Dạng $u_{n+1} - u_n = b(u_n - u_{n-1})$, đặt dãy phụ $v_n = u_n - u_{n-1}$ thì được $v_{n+1} = b.v_n$ là dãy cấp số nhân.
- Dạng $u_{n+1} = au_n + b$ với $a \neq 0$, đặt dãy phụ $u_n = v_n + c$ thì được $v_{n+1} = a.v_n + (ac + b - c)$, ta chọn hằng số c sao cho $ac + b - c = 0$ thì được $v_{n+1} = a.v_n$ là dãy cấp số nhân.
- Dạng: $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ thì tìm 2 số α và β sao cho $\alpha + \beta = a$, $\alpha.\beta = -b$, khi đó: $u_{n+2} = (\alpha + \beta)u_{n+1} - \alpha.\beta u_1 \Rightarrow u_{n+2} - \beta u_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - \beta.u_n)$

Đưa về dãy phụ $x_n = u_{n+1} - \beta u_1$ thoả mãn $x_{n+1} = \alpha.\ x_n$ dãy cấp số nhân.

Xác định các dãy số bằng phương trình sai phân:

Cho dãy số (x_n). Xét phương trình

$$a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + ... + a_kx_n = g(n) \quad (1).$$

Ta gọi phương trình

$$a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + ... + a_kx_n = 0 \quad (2)$$

là phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (1).

Và gọi phương trình ẩn λ

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k\lambda = 0 \quad (3)$$

là phương trình đặc trưng của phương trình (1) và của (3).

Nghiệm tổng quát của (1) có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*$, $n = 1;2;...$

trong đó $\overline{x_n}$ là nghiệm tổng quát của (2) và x_n^* là nghiệm riêng bất kỳ của (1).

- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2)

Nếu phương trình đặc trưng có k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ (nghiệm đơn cả) thì (2) có nghiệm tổng quát

$$\overline{x_n} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_k\lambda_k^n,\ n = 1;2;...$$

Từ $x_1, x_2, ..., x_k$ ta tìm được k hằng số $c_1, c_2, ..., c_k$.

Nếu phương trình đặc trưng có q < k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q$ trong đó λ_1 là nghiệm bội s, λ_2 là nghiệm bội h, còn lại $\lambda_3, \lambda_4, ..., \lambda_q$ là k– (s+h) nghiệm đơn, thì (2) có nghiệm tổng quát

$$\overline{x_n} = c_3\lambda_3^n + c_4\lambda_4^n + ... + c_q\lambda_q^n + (c_{11} + c_{12}n + ... + c_{1s}n^{s-1})\lambda_1^n$$
$$+ (c_{21} + c_{22}n + ... + c_{2h}n^{h-1})\lambda_2^n,\ n = 1;2;...$$

Nếu phương trình đặc trưng có s < k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ và $\lambda_q = x + yi = r(\cos\phi + i.\sin\phi)$ là nghiệm bội h thì số phức liên hiệp $\overline{\lambda_q}$ cũng là nghiệm bội h, thì (2) có nghiệm tổng quát

$$\overline{x_n} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_s\lambda_s^n + r^n(A_1 + A_2n + ... + A_hn^{h-1})\cos n\phi$$
$$+ r^n(B_1 + B_2n + ... + B_hn^{h-1})\sin n\phi,\ n = 1;2;...$$

– Phương trình sai phân tuyến tính cấp 1:

$x_1 = \alpha,\ ax_{n+1} + bx_n = P(n)$, P(n) là đa thức theo n.

Phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ có nghiệm $\lambda = \frac{-b}{a}$

Nghiệm tổng quát có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*$, n = 1;2;... với nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = c\lambda^n$, n = 1;2;...

Nếu $\lambda \neq 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ x_n^* là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

– Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2:

$x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = P(n)$, P(n) là đa thức theo n.

Phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ có 2 nghiệm λ_1, λ_2

Nghiệm tổng quát có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*$, n = 1;2;...

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm thực phân biệt thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, n = 1;2;...

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm thực bằng nhau thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = (A + Bn)\lambda_2^n$, n = 1;2;...

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm phức thì đưa về dạng lượng giác $x + yi = r(\cos\phi + i.\sin\phi)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = r^n(A\cos n\phi + B\sin n\phi)$, n = 1;2;...

Nếu $\lambda_1 \neq 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ x_n^* là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu λ_1 hay $\lambda_2 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n^2.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

- Phương trình sai phân tuyến tính cấp 3:

$x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma, ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = P(n)$, P(n) là đa thức theo n.

Phương trình đặc trưng $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ có 3 nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Nghiệm tổng quát có dạng: $x_n = \overline{x_n} + x_n^*$, $n = 1;2;...$

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là 3 nghiệm thực phân biệt thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n$, $n = 1;2;...$

Nếu λ_1, λ_2 là 2 nghiệm thực bằng nhau và λ_3 là nghiệm đơn thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = (A + Bn)\lambda_2^n + C\lambda_3^n$, $n = 1;2;...$

Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là 3 nghiệm thực bằng nhau thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = (A + Bn + Cn^2)\lambda_3^n$, $n = 1;2;...$

Nếu λ_1 là nghiệm thực và λ_2, λ_3 là 2 nghiệm phức liên hợp $x \pm yi = r(\cos\phi \pm i.\sin\phi)$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{x_n} = A\lambda_1^n + r^n(B\cos n\phi + C\sin n\phi)$, $n = 1;2;...$

Nếu $\lambda_1 \neq 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ x_n^* là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu λ_1 hay λ_2 hay $\lambda_3 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n^2.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ thì nghiệm riêng bất kỳ $x_n^* = n^3.Q(n)$ với Q(n) là đa thức cùng bậc với P(n).

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 7. 1: Tìm 6 số hạng đầu của dãy: $v_n = \sin^2\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{2n\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Thế n = 1 thì $v_1 = \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

n = 2 thì $v_2 = \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos\frac{4\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

n = 3 thì $v_3 = \sin^2\frac{3\pi}{4} + \cos 2\pi = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

n = 4 thì $v_4 = \sin^2\pi + \cos\frac{8\pi}{3} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

n = 5 thì $v_5 = \sin^2\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{10\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

n = 6 thì $v_6 = \sin^2\frac{3\pi}{2} + \cos 4\pi = 1 + 1 = 2$.

Bài toán 7. 2: Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau:

a) $u_1 = 0$ và $u_n = \frac{2}{u_{n-1}^2 + 1}$, với mọi $n \geq 2$.

b) $u_1 = 1$, $u_2 = -2$ và $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2}$ với mọi $n \geq 3$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_1 = 0$ và $n \geq 2$, $u_n = \frac{2}{u_{n-1}^2 + 1} \Rightarrow u_2 = \frac{2}{u_1^2 + 1} = 2$

$$u_3 = \frac{2}{u_2^2 + 1} = \frac{2}{5}\ ;\ u_4 = \frac{2}{u_3^2 + 1} = \frac{2}{\frac{4}{25} + 1} = \frac{50}{29}$$

$$u_5 = \frac{2}{u_4^2 + 1} = \frac{2}{\frac{2500}{841} + 1} = \frac{1682}{3341}$$

b) Ta có $u_1 = 1$; $u_2 = -2$ và $n \geq 3$; $u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2}$.

Do đó $u_3 = u_2 - 2u_1 = -2 - 2 = -4$, $u_4 = u_3 - 2u_2 = -4 + 4 = 0$

$u_5 = u_4 - 2u_3 = 0 + 8 = 8$.

Bài toán 7. 3: Tìm 6 số hạng đầu của dãy các đôi thỏ trong tháng thứ n, theo quy luật: "Một đôi thỏ gồm một thỏ đực và một thỏ cái cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con cũng gồm một thỏ đực và một thỏ cái; mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn".

Hướng dẫn giải

Gọi F_n là dãy các đôi thỏ trong tháng thứ n.

Tháng 1 có $F_1 = 1$.

Tháng 2, đôi thỏ chưa đẻ con nên có $F_2 = 1$

Tháng 3, đôi thỏ bắt đầu đẻ con nên có $F_3 = 1 + 1 = 2$.

Tháng 4, đôi thỏ tiếp tục đẻ con nên có $F_4 = 2 + 1 = 3$.

Tháng 5, đôi thỏ tiếp tục đẻ con và đôi thỏ con đầu tiên bắt đầu đẻ con nên có $F_5 = 3 + 1 + 1 = 5$.

Tháng 6, đôi thỏ tiếp tục đẻ con và hai đôi thỏ con đầu tiên cũng đẻ con nên có $F_6 = 5 + 1 + 1 + 1 = 8$.

Bài toán 7. 4: Tìm số hạng thứ 1000 của dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ b) $u_1 = 4, u_{n+1} = 5u_n$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ nên thế n =1000 thì có $u_{1000} = \dfrac{1001}{1999}$

b) $u_1 = 4, u_{n+1} = 5u_n$ nên

$u_{1000} = 5u_{999} = 5^2u_{998} = 5^3u_{997} = ... = 5^{999}u_1 = 4.5^{999}$.

Bài toán 7. 5: Cho dãy số (a_n): 1, 8, 22, 43, 71,... Chứng minh số 35351 là một số hạng của dãy a_n.

Hướng dẫn giải

Ta có các hiệu số của số đứng sau và số đứng ngay trước nó lập thành cấp số cộng: 7, 14, 21, 28,...

Theo giả thiết $a_2 = a_1 + 7.1$; $a_3 = a_2 + 7.2$;...; $a_n = a_{n-1} + 7(n-1)$

Cộng n–1 đẳng thức thì $a_n = a_1 + 7(1 + 2 + ... + (n-1))$

$$= 1 + 7\frac{(n-1)n}{2}$$

Xét $1 + 7\dfrac{(n-1)n}{2} = 35351 \Leftrightarrow 7n^2 + 7n - 70700 = 0,\ n \geq 1$.

Chọn n = 101. Vậy số 35351 là số hạng thứ 101 của dãy (a_n).

Bài toán 7. 6: Cho dãy số (u_n) được xác định:

$$u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2},\ n \geq 3.$$

Số 16385 có nằm trong dãy u_n không?

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \Rightarrow u_n - u_{n-1} = 2(u_{n-1} - u_{n-2})$.

Đặt $v_n = u_n - u_{n-1}$, $n \geq 2$, thì $v_2 = 1$.

Ta có $v_n = 2v_{n-1}$ nên $v_n = 2.v_{n-1} = 2^2.v_{n-2} = 2^3.v_{n-3}$

$$= ... = 2^{n-2}.v_2 = 2^{n-2}.$$

Do đó $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_2 - u_1) + u_1$

$= v_n + v_{n-1} + ... + v_1 + 2 = (2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 1) + 2$

$= \dfrac{2^{n-1} - 2}{2 - 1} + 2 = 1 + 2^{n-1}$

Xét $u_n = 16385 \Leftrightarrow 1 + 2^{n-1} = 16385 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 16384 = 2^{14}$

$\Leftrightarrow n = 15$. Vậy 16385 là số hạng thứ 15 của dãy u_n.

Bài toán 7. 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1}, \text{ với mọi } n \ge 1.$$

Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số không đổi.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{2}{1+1} = 1$, $u_3 = \dfrac{2}{1+1} = 1$

Ta chứng minh quy nạp $u_n = 1$, $n \ge 1$ (1).

Khi $n = 1$ thì $u_1 = 1$: đúng

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, k nguyên dương.

Ta chứng minh (1) đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy: $u_{k+1} = \dfrac{2}{u_k^2 + 1} = \dfrac{2}{1+1} = 1$: đpcm.

Vậy $u_n = 1$ với mọi n nguyên dương.

Bài toán 7. 8: Cho dãy số $u_n = \sin(2n - 1)\dfrac{\pi}{3}$. Chứng minh dãy tuần hoàn. Tìm tập các giá trị của dãy.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $u_2 = \sin\pi = 0$, $u_3 = \sin\dfrac{5\pi}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$u_4 = \sin\dfrac{7\pi}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $u_5 = \sin 3\pi = 0$, $u_6 = \sin\dfrac{11\pi}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\forall n \ge 1$, $u_{n+3} = \sin(2(n + 3) - 2)\dfrac{\pi}{3} = \sin((2n-1)\dfrac{\pi}{3} + 2\pi)$

$= \sin(2n - 1)\dfrac{\pi}{3} = u_n$.

Vậy dãy tuần hoàn nên các giá trị khác nhau của u_n là hữu hạn và tập giá trị của u_n là $\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$.

Bài toán 7. 9: Cho dãy số u_n xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n + 1$, $n \geq 1$.

Chứng minh dãy tuần hoàn.Tính tổng 18 số hạng đầu tiên.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$,...

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+3} = u_n$, $n \geq 1$ (1).

Khi n = 1 thì $u_4 = 1 = u_1$: đúng.

Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh (1) đúng khi n = k + 1. Thật vậy:

$u_{k+4} = -\frac{3}{2}u_{k+3}^2 + \frac{5}{2}u_{k+3} + 1 = -\frac{3}{2}u_k^2 + \frac{5}{2}u_k + 1 = u_{k+1}$: đpcm.

Tổng 18 số hạng đầu tiên

$S_{18} = (u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + ... + (u_{16} + u_{17} + u_{18})$

$= 6(u_1 + u_2 + u_3) = 6(1 + 2 + 0) = 18.$

Bài toán 7. 10: Cho dãy số: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = au_n - u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$

a) Chứng minh với $a = \sqrt{3}$ thì dãy số (u_n) tuần hoàn

b) Chứng minh với $a = \frac{3}{2}$ thì dãy số (u_n) không tuần hoàn

Hướng dẫn giải

a) Với $a = \sqrt{3}$ thì $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{3}\, u_n - u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2\sqrt{3} - 1$, $u_4 = 4 - \sqrt{3}$, $u_5 = 2\sqrt{3} - 2$,

$u_6 = 2 - \sqrt{3}$, $u_7 = -1 = -u_1$, $u_8 = -2 = -u_2$

$u_9 = -u_3$, ..., $u_{12} = -u_6$

$\Rightarrow u_{13} = -u_7 = 1$, u_1, $u_{14} = -u_8 = u_2$, ... $\Rightarrow u_{n+12} = u_n$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy (u_n) là dãy tuần hoàn chu kì 12.

b) Với $a = \frac{3}{2}$ thì : $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$

Ta có $u_5 = -\frac{1}{2}$, $u_6 = -\frac{7}{4}$.

Xét biểu diễn $u_n = \frac{q_n}{2^{s_n}}$ với q_n lẻ, $s_n \in N$, $n \geq 5$. Để chứng minh dãy số (u_n) không tuần hoàn, ta chứng minh

$s_n = n - 4$ với mọi $n \geq 5$ bằng quy nạp theo n.

Với n = 5, 6 thì khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với mọi $5 \leq n \leq k$, $k \geq 6$. Ta sẽ chứng minh khẳng định cũng đúng cho n = k + 1.

Thật vậy, từ công thức $u_{k+1} = \dfrac{3}{2}u_k - u_{k-1}$

Ta có: $\dfrac{q_{k+1}}{2^{s_{k+1}}} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{q_k}{2^{s_k}} - \dfrac{q_{k-1}}{2^{s_{k-1}}} = \dfrac{3q_k - 4q_{k-1}}{2^{k-3}}$

Do $3q_k - 4q_{k-1}$ lẻ nên ta có $s_{k+1} = (k + 1) - 4$: đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7. 11: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_n = 1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2$ b) $v_n = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + (n-1)n^2$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = 1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2$

$= 4(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 4(1 + 2 + ..+ n) + n$

$= 4\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\dfrac{n(n+1)}{2} + n = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

b) $v_n = 1.2^2 + 2.3^2 + ... + (n-1)n^2$

$= (1^3 + 2^3 + ... + n^3) - (1^2 + 2^2 + ... + n^2)$

$= \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

Bài toán 7. 12: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_n = \dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + ... + \dfrac{1}{(3n-2).(3n+1)}$

b) $v_n = \dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{2.5} + ... + \dfrac{1}{n(n+3)}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + ... + \dfrac{1}{(3n-2).(3n+1)}$

$= \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{7}) + ... + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}) = \dfrac{1}{3}(1 - \dfrac{1}{3n+1}) = \dfrac{n}{3n+1}$

b) $v_n = \dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{2.5} + ... + \dfrac{1}{n(n+3)}$

$= \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{7}) + ...$

$+ \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n-3} - \dfrac{1}{n}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n+1}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+2}) + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+3})$

$= \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) - \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}) = \dfrac{11}{18} - \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3})$.

Bài toán 7. 13: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_1 = 2$, $u_n = u_{n-1} + 7$, $n \geq 2$. b) $v_1 = 3$, $v_n = 5v_{n-1}$, $n \geq 2$.

Hướng dẫn giải

a) Với $n \geq 2$: $u_n = u_{n-1} + 7$ nên:

$u_n = u_{n-1} + 7 = (u_{n-2} + 7) + 7 = u_{n-2} + 2.7 = (u_{n-3} + 7) + 2.7$

$= u_{n-3} + 3.7 = u_1 + (n-1)7 = 2 + (n-1)7 = 7n - 5.$

b) Với $n \geq 2$, $v_n = 5v_{n-1}$ nên:

$v_n = 5v_{n-1} = 5(5v_{n-2}) = 5^2.v_{n-2} = 5^2(5v_{n-3}) = 5^3.v_{n-3} = \ldots$

$= 5^{n-1}.v_1 = 5^{n-1}.3 = 3.5^{n-1}.$

Bài toán 7. 14: Xác định số hạng tổng quát của dãy:

a) $u_1 = 2$, $u_{n+1} = u_n + n$; $n \geq 1$. b) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 2n-1$, $n \geq 1$.

Hướng dẫn giải

a) Với $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n + n$ nên:

$u_n = u_{n-1} + (n-1) = (u_{n-2} + n - 2) + (n-1)$

$= (u_{n-3} + n - 3) + (n-2) + (n-1) = \ldots$

$= (u_1 + 1) + \ldots + (n-2) + (n-1)$

$= 2 + (1 + 2 + \ldots + (n-1)) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

b) Xét dãy $v_n = u_{n+1} - u_n$, $n \geq 1$.

Ta có: $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$, $n \geq 1 \Rightarrow v_n = u_{n+1} - u_n = 2n - 1$

Do đó $v_{n+1} = 2(n+1) - 1 \Rightarrow v_{n+1} - v_n = 2$: không đổi nên dãy (v_n) lập cấp số cộng có công sai $d = 2$ và số hạng đầu $v_1 = u_2 - u_1 = 1$.

Ta có $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1$

$= v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots + v_1 + 1$

$$= S_{n-1} + 1 = \frac{n-1}{2}(2v_1 - (n-2)d) + 1$$

$$= \frac{n-1}{2}(2 + (n-2)2) + 1 = n^2 - 2n + 2$$

Vậy số hạng tổng quát $u_n = n^2 - 2n + 2$.

Bài toán 7. 15: Xác định số hạng tổng quát của dãy:

a) $u_1 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n}$, $n \geq 1$. b) $v_1 = 5$, $v_{n+1}.v_n = 1$, $n \geq 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_1 = 3$, $u_2 = \dfrac{9}{3} = 3$, $u_3 = \dfrac{9}{3} = 3$, $u_4 = \dfrac{9}{3} = 3$,...

Vậy tổng quát $u_n = 3$ với mọi n.

b) Với $n \geq 1$: $v_{n+1} . v_n = 1 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{5}, v_3 = \frac{1}{v_2} = 5$,

$v_4 = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{5}$, $v_5 = \frac{1}{v_4} = 5$, ... Vậy $v_n = \begin{cases} 5 & \text{khi } n = 2k+1 \\ \frac{1}{5} & \text{khi } n = 2k \end{cases}$.

Bài toán 7. 16: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) xác định bởi:

a) $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 5u_n + 8$ với mọi $n \geq 1$.

b) $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 3$ với mọi $n \geq 2$.

Hướng dẫn giải

a) Xét dãy số (v_n), với $v_n = u_n + 2$.

Ta có $u_{n+1} = 5u_n + 8$, $n \geq 1$, nên với $v_n = u_n + 2$ thì

$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 5u_n + 10 = 5(u_n + 2) = 5v_n$, $n \geq 1$.

Do đó dãy v_n lập cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = 2$, công bội $q = 5$.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân v_n là $v_n = v_1.q^{n-1} = 2.5^{n-1}$

Vậy số hạng tổng quát $u_n = v_n - 2 = 2.5^{n-1} - 2$.

b) Đặt $v_n = u_n + a$ thì $u_n = v_n - a$

Do đó $u_{n+1} = 2u_n + 3 \Leftrightarrow v_{n+1} - a = 2(v_n - a) + 3$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = 2v_n + (3 - a)$.

Chọn $3 - a = 0$ nên $a = 3$ thì dãy v_n lập cấp số nhân có số hạng đầu

$v_1 = u_1 + a = 4$, công bội $q = 2$ nên

$v_n = v_1.q^{n-1} = 4.2^{n-1} = 2^{n+1}$.

Vậy số hạng tổng quát $u_n = 2^{n+1} - 3$.

Bài toán 7. 17: Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) xác định bởi:

a) $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $n \geq 1$

b) $u_{n+1} = (a + b)u_n - abu_{n-1}$ với $n \geq 1$, theo a, b, u_0, u_1 cho trước.

Hướng dẫn giải

a) $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$.

Phương trình đặc trưng $x^2 - x + 1 = 0$ có 2 nghiệm phức $x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Ta có dạng lương giác $x = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ nên công thức tổng quát

$u_n = A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}$, $n = 1; 2; ...$

Mà $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ nên $A = 1$ và $B = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy số hạng tổng quát $u_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}$.

b) Giả thiết $\Rightarrow u_{n+1} - au_n = b(u_n - au_{n-1})$

Đặt $v_n = u_n - au_{n-1} \Rightarrow v_{n+1} = b.v_n \Rightarrow v_n = b^{n-1}.v_1$

Do đó: $u_n - au_{n-1} = v_1 b^{n-1}$

Nên: $u_n = u_n - au_{n-1} + a(u_{n-1} - au_{n-2}) + ... + a^{n-1}(u_1 - a.u_0) + a^n u_0$

$= a^n a_0 + (b^{n-1} + ab^{n-2} + ... + a^{n-1})v_1$

$= a^n u_0 + (a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})(u_1 - au_0)$

$= (a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})u_1 - ab(a^{n-2} + a^{n-3}b + ... + ab^{n-3} + b^{n-2})u_0$

Vậy, khi $n \geq 2$

Nếu $a \neq b$ thì $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a-b}.u_1 - ab\dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}u_0$

Nếu $a = b$ thì $u_n = na^{n-1}u_1 - (n-a)a^n u_0$

Cách 2: $u_{n+1} = (a+b)u_n - abu_{n-1}$ có phương trình đặc trưng

$x^2 - (a+b)x + ab = 0 \Leftrightarrow x_1 = a, x_2 = b$

nên $u_n = \alpha.a^n + \beta.b^n$

Ta có: $u_0 = \alpha + \beta$, $u_1 = \alpha.a + \beta.b$

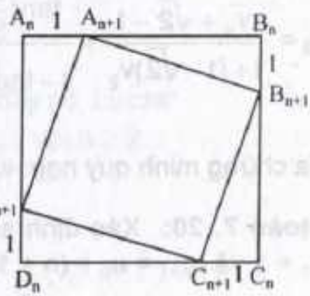
Từ đó xác định được α, β.

Bài toán 7. 18: Từ hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 6cm, dựng các hình vuông $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, ..., $A_nB_nC_nD_n$,... theo cách sau:

Với mỗi n = 2, 3, 4,... lấy các điểm A_n, B_n, C_n và D_n tương ứng trên các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}$ và $D_{n-1}A_{n-1}$ sao cho $A_{n-1}A_n$ = 1cm và $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông. Lập dãy số (u_n) với u_n là độ dài cạnh của hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ bởi hệ thức truy hồi.

Hướng dẫn giải

Với mỗi n nguyên dương, xét hai hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ cạnh u_n và $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ cạnh u_{n+1}.



Ta có: $u_{n+1} = A_{n+1}B_{n+1}$

$= \sqrt{(A_{n+1}B_n)^2 + (B_nB_{n+1})^2}$

$= \sqrt{(A_nB_n - 1)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{(u_n - 1)^2 + 1}$

Vậy $u_1 = 6$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 2}$, $n \geq 1$.

Bài toán 7. 19: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_1 = \sqrt{2}$, $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + +\sqrt{.. + \sqrt{2}}}}$ (n dấu căn)

b) $v_1 = \sqrt{3}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})v_n}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} = u_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$

và $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}} = u_2 = 2\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$

Ta chứng minh quy nạp: $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

b) Ta có $\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ nên $v_{n+1} = \frac{v_n + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - v_n.\tan\frac{\pi}{8}}$

$$v_2 = \frac{v_1+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})v_1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{8}} = \tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8})$$

$$v_3 = \frac{v_2+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})v_2} = \frac{\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8})+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}).\tan\frac{\pi}{8}} = \tan(\frac{\pi}{3}+2.\frac{\pi}{8})$$

Ta chứng minh quy nạp: $v_n = \tan(\frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{8})$.

Bài toán 7. 20: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n$ với mọi $n \ge 1$.

Hướng dẫn giải

Ta sẽ chứng minh: $u_n = 1 + (n-1).2^n$ với mọi $n \ge 1$ (1), bằng phương pháp quy nạp.

Với n = 1, ta có $u_1 = 1 = 1 + (1-1).2^1$. Do đó (1) đúng khi n = 1.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp, ta có:

$u_{k+1} = u_k + (k+1).2^k = 1 + (k-1).2^k + (k+1).2^k = 1 + k.2^{k+1}$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \ge 1$.

Bài toán 7. 21: Xác định số hạng tổng quát của dãy số Fibônaxi :

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, n \geq 0.$

Hướng dẫn giải

Xét 2 số a > b sao cho a + b = 1, ab = −1, thì a, b là nghiệm phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ nên a, b = $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Do đó $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} = -abF_n + (a + b)F_{n+1}$

$\Rightarrow \quad F_{n+2} - aF_{n+1} = b(F_{n+1} - aF_n)$.

Đặt $v_n = F_{n+1} - aF_n$ thì $v_{n+1} = bv_n$ lập cấp số nhân.

Từ đó tính được v_n rồi suy ra:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Cách khác: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \Leftrightarrow F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$

Phương trình đặc trưng

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

nên $u_n = A.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

mà ta có $F_0 = 0$ và $F_1 = 1$ nên tìm được 2 hệ số A, B.

Suy ra $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Bài toán 7. 22: Xác định số hạng tổng quát của dãy số Lucas:

$L_1 = 1, L_2 = 3$ và $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ với $n \geq 2$

Hướng dẫn giải

Ta có $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \Leftrightarrow L_{n+1} - L_n - L_{n-1} = 0$.

Phương trình đặc trưng

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

nên: $L_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Thay $L_1 = 1, L_2 = 3$ thì $\alpha = \beta = 1$. Vậy $L_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Bài toán 7. 23: Cho dãy (a_n): $a_n = \dfrac{2}{n^2+4n+3}$. Xác định số hạng tổng quát của dãy số (b_n): $b_1 = a_1$, $b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$, $n \geq 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $b_1 = a_1$, $b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = b_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Ta có $a_k = \dfrac{2}{k^2+4k+3} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+3}$ nên:

$$b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

$= \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$. Vậy $b_n = \dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$

Bài toán 7. 24: Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi:

$x_0 = 1$, $x_{n+1} = 2+\sqrt{x_n}-2\sqrt{1+\sqrt{x_n}}$, với mọi $n \in \mathbf{N}$. Tìm công thức tổng quát của dãy (y_n) xác định bởi công thức $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i 2^i$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x_{n+1} = 2+\sqrt{x_n}-2\sqrt{1+\sqrt{x_n}} = \left(\sqrt{1+\sqrt{x_n}}-1\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x_{n+1}}+1 = \sqrt{1+\sqrt{x_n}}$. Từ đó tính được:

$$x_1 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2, x_2 = \left(\sqrt{\sqrt{2}}-1\right)^2, \ldots, x_n = \left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^2 \text{ nên}$$

$$x_1 = 1+2-2\sqrt{2};\quad x_2 = 1+\sqrt{2}-2.2^{\frac{1}{4}}$$

$$x_3 = 1+2^{\frac{1}{4}}-2.2^{\frac{1}{8}};\ \ldots;\ x_n = 1+2^{\frac{1}{2^{n-1}}}-2.2^{\frac{1}{2^n}}$$

Do đó: $y_n = 2+4+\ldots+2^n+4-2^{n+1}.2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{n+1}\left(1-2^{\frac{1}{2^n}}\right)+2$

Bài toán 7. 25: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = \frac{2}{3} \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1} \Leftrightarrow x_{n+1}\left[2(2n+1)x_n + 1\right] = x_n$

Suy ra: $2(2n+1) = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n.x_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$

Đặt $v_n = \frac{1}{x_n} \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 4n + 2$

Suy ra: $v_n = v_1 + 2n(n-1) + 2(n-1) = 2n^2 - \frac{1}{2}$. Vậy $x_n = \frac{2}{4n^2 - 1}$.

Bài toán 7. 26: Xác định tất cả các dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_{2015}$ thoả mãn điều kiện $2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1)$ với $n = 1,2,...,2014$ và $2\sqrt{a_{2015} - 2014} \geq a_1 + 1$.

Hướng dẫn giải

Cộng các bất đẳng thức đã cho ta có:

$$\sum_{n=1}^{2015} 2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq \left[\sum_{n=1}^{2014}(a_{n+1} - (n-1))\right] + a_1 + 1 = \sum_{n=1}^{2015}\left[a_n - (n-1) + 1\right]$$

Suy ra: $0 \geq \sum_{n=1}^{2015}\left[a_n - (n-1) + 1 - 2\sqrt{a_n - (n-1)}\right] = \sum_{n=1}^{2015}\left[\sqrt{a_n - (n-1)} - 1\right]^2$ với $n = 1,2,...,2015$. Từ đó, với $n = 1, 2,...,2015$ ta được:

$\sqrt{a_n - (n-1)} - 1 = 0$ hay $a_n = n$

Cuối cùng, dễ dàng kiểm tra được rằng dãy $a_n = n$ thoả mãn các tính chất đòi hỏi, vì $2\sqrt{n - (n-1)} = (n+1) - (n-1)$ với $n = 1, 2,...,2014$ và $2\sqrt{2015 - 2014} = 1 + 1 \Rightarrow$ đpcm.

Cách khác: Đặt $a_{2015} = 2015 + k$. Ta sẽ dùng phương pháp quy nạp lùi theo n (bắt đầu từ 2015 trở xuống) để chứng minh rằng $a_n \geq n + k$

Giả sử $a_{n+1} \geq n + k + 1$, khi đó:

$4(a_n - n + 1) \geq (a_{n+1} - n + 1)^2 \geq (k+2)^2 \geq 4k + 4$, do đó $a_n \geq n + k$. Kết quả đúng với mọi n mà $2015 \geq n \geq 1$

Nói riêng, $a_1 \geq 1 + k$. Suy ra:

$4(a_{2015} - 2014) = 4(1 + k) \geq (2 + k)^2 = 4 + 4k + k^2$, từ đó $k^2 \leq 0$, tức là $k = 0$. Như thế, $a_n \geq n$ với $n = 1, 2,...,2014$.

Bây giờ, nếu $a_n = n + k$, với $k > 0$, với n nào đó < 2015, thì lí luận tương tự như trên ta cũng có $a_1 \geq 1 + k$, suy ra:

$$4 = 4(a_{2015} - 2014) \geq (a_1 + 1)^2 \geq (2 + k)^2 = 4 + 4k + k^2 > 4$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy $a_n = n$ với mọi $n \leq 2015$.

Bài toán 7. 27: Hỏi có tồn tại hay không một dãy vô hạn tăng các số nguyên tố (p_k) thoả mãn: $|p_{k+1} - 2p_k| = 1\ \forall k \geq 1$

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại dãy các số nguyên tố (p_k) thoả mãn các yêu cầu của đề bài.

Không mất tổng quát có thể coi $p_1 > 3$. Xét p_k $(k \geq 1)$ bất kì.

Nếu $p_k \equiv -1 \pmod 3$ thì phải có $p_{k+1} = 2p_k + 1$ (vì $2p_k - 1 \equiv 0 \pmod 3$) và do đó $p_{k+1} \equiv -1 \pmod 3$.

Nếu $p_k \equiv 1 \pmod 3$ thì phải có $p_{k+1} = 2p_k - 1$ (vì $2p_k + 1 \equiv 0 \pmod 3$) và do vậy $p_{k+1} \equiv 1 \pmod 3$. Từ đó suy ra:

Nếu $p_1 \equiv -1 \pmod 3$ thì $p_{k+1} = 2p_k + 1\ \forall\ k \geq 1$.

Do vậy $\forall k > 1$ ta có $p_k = 2^{k-1} p_1 + (2^{k-1} - 1)$.

Suy ra $p_k \equiv (2^{k-1} - 1) \pmod{p_1}\ \forall\ k > 1 \Rightarrow p_{p_1} \equiv (2^{p-1} - 1) \pmod{p_1} \equiv 0$ (mod p_1) theo định lí nhỏ Fecma) mâu thuẫn với p_{p_1} là số nguyên tố.

Nếu $p_1 \equiv 1 \pmod 3$ thì $p_{k+1} = 2p_k - 1\ \forall k \geq 1$.

Do vậy $p_k = 2^{k-1}p_1 - (2^{k-1} - 1)\ \forall k > 1 \Rightarrow p_k \equiv -(2^{k-1} - 1) \pmod{p_1}\ \forall k > 1$

$\Rightarrow p_{p_1} \equiv -(2^{p_1-1} - 1) \pmod{p_1} \equiv 0 \pmod{p_1}$ (theo định lí nhỏ Fecma) mâu thuẫn với p_{p_1} là số nguyên tố.

Từ các mâu thuẫn nhận được ta có đpcm.

Bài toán 7. 28: Xác định số hạng tổng quát của 2 dãy số (u_n); (v_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_0 = 0\ ;\ v_0 = \cos\alpha \\ u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}\sin^2\alpha \\ v_n = v_{n-1} + 2u_{n-1}\cos^2\alpha \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $u_n + \tan\alpha\ v_n = (1 + 2\tan\alpha\cos^2\alpha)(u_{n-1} + \tan\alpha v_{n-1})$

Áp dụng liên tiếp n lần ta có được:

$$u_n + \tan\alpha v_n = (1 + 2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n(u_0 + \tan\alpha v_0) \qquad (1)$$

Tương tự thì ta cũng có được:

$$u_n - \tan\alpha v_n = (1 - 2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n(u_0 - \tan\alpha v_0) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) kết hợp với $u_0 = 0$, $v_0 = \cos\alpha$ ta có hệ sau:

$$\begin{cases} u_n + \tan\alpha v_n = (1 + 2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n \sin\alpha \\ u_n - \tan\alpha v_n = -(1 - 2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n \sin\alpha \end{cases}$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & \tan\alpha \\ 1 & -\tan\alpha \end{vmatrix} = -2\tan\alpha$

$$Du_n = \begin{vmatrix} (1+2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n\sin\alpha & \tan\alpha \\ (1-2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n\sin\alpha & -\tan\alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\sin\alpha\tan\alpha[(1-2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n + (1+2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n]$$

$$Dv_n = \begin{vmatrix} 1 & (1+2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n\sin\alpha \\ 1 & -(1-2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$= -\sin\alpha[(1-2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n + (1+2\tan\alpha\cos^2\alpha)^n]$$

Từ đó suy ra: $u_n = \dfrac{Du_n}{D} = \dfrac{1}{2}\sin\alpha\left[(1+\sin2\alpha)^n + (1-\sin2\alpha)^n\right]$

$$v_n = \frac{Dv_n}{D} = \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\left[(1+\sin2\alpha)^n - (1-\sin2\alpha)^n\right]$$

Bài toán 7. 29: Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$ b) $u_n = \dfrac{5n-1}{2n+3}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $u_{n+1} = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 5(n+1) - 7 = n^3 + 2n - 4$

Lập hiệu $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 3 = 3n(n-1) + 3 > 0$, $\forall n \ge 1$.

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$, $\forall n \ge 1$. Vậy dãy số tăng.

b) Ta có $u_{n+1} = \dfrac{5(n+1)-1}{2(n+1)+3} = \dfrac{5n+4}{2n+5}$.

Lập hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5n+4}{2n+5} - \dfrac{5n-1}{2n+3} = \dfrac{17}{(2n+3)(2n+5)} > 0, \forall n \ge 1$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$, $\forall n \ge 1$. Vậy dãy số tăng.

Bài toán 7. 30: Xét tính tăng, giảm của dãy số.

a) $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+5}$ b) $u_1 = 9$, $u_{n+1} = u_n - 2 + \sin n$, $n \ge 1$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $u_1 = -\dfrac{1}{6}$, $u_2 = \dfrac{2}{7}$, $u_3 = -\dfrac{3}{8}$

Vì $u_1 < u_2$, $u_2 > u_3$ nên hằng số không tăng, không giảm.

b) Ta có $u_{n+1} = u_n - 2 + \sin n$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sin n - 2 < 0$, $\forall n$ (vì $\sin n \le 1$, $\forall n$).

Vậy dãy số giảm.

Bài toán 7. 31: Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{3^n}$ b) $y_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x_n > 0$ và $x_{n+1} = \dfrac{n+2}{3^{n+1}}$

Lập tỉ số $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+2}{3^{n+1}} : \dfrac{n+1}{3^n} = \dfrac{n+2}{3(n+1)} = \dfrac{n+2}{3n+3} < 1, \forall n \geq 1$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số giảm.

b) Ta có $y_n > 0$ và $y_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

Lập tỉ số: $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!} : \dfrac{2^n}{(n+1)!} = \dfrac{2}{n+2} < 1, \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow y_{n+1} < y_n, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số giảm.

Bài toán 7. 32: Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ b) $b_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = a_n, \forall n \geq 1.$

Vậy dãy số giảm.

b) Ta có $b_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$. Do đó $b_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1}$

Lập hiệu số: $b_{n+1} - b_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) < 0, \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow b_{n+1} < b_n, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số giảm.

Bài toán 7. 33: Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n . \sqrt{n}$ b) $u_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{3}}}}$, n dấu căn.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_n > 0$ và $u_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} . \sqrt{n+1}$

Lập tỉ số: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.\sqrt{n+1} : \left(\frac{2}{3}\right)^n.\sqrt{n}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\frac{4n+4}{9n+4}} = \sqrt{\frac{4n+4}{4n+4+(5n-4)}} < 1, \forall n \geq 1.$

Do đó $u_{n+1} < u_n, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số giảm.

b) Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$ (1).

Khi n = 1 thì $u_2 > u_1 \Leftrightarrow \sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3}$: đúng.

Do đó (1) đúng khi n = 1.Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương: $u_{n+1} > u_k$

$\Rightarrow 3 + u_{k+1} > 3 + u_k \Rightarrow \sqrt{3+u_{k+1}} > \sqrt{3+u_k}$

$\Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}$. Do đó (1) đúng khi n = k + 1.

Vậy (1) đúng với mọi n nguyên dương, do đó dãy số tăng.

Bài toán 7. 34: Xét tính tăng, giảm của dãy số:

a) $u_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

b) $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_n > 0, \forall n \geq 1$, và

$u_{n+1} = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

Do đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{3^{n+1}} < 1, \forall n \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n$.Vậy dãy số giảm.

b) Ta có: $v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3}$

Do đó $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3n+3} = \frac{9n+5}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} > 0$

nên $v_{n+1} > v_1, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số tăng.

Bài toán 7. 35: Cho dãy (u_n): $0 < u_n < 1$, $u_n \neq \frac{1}{2}$ và $u_{n+1}(1-u_n) = \frac{1}{4}$, $n \geq 1$.

Chứng minh dãy tăng.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 2 số dương:

$u_{n+1} + (1 - u_n) \geq 2\sqrt{u_{n+1}(1 - u_n)}$

$\Rightarrow u_{n+1} + (1 - u_n) \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n, \forall n.$

Dấu = xảy ra khi $u_{n+1} = u_n$. Do đó:

$u_{n+1}(1 - u_n) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow u_n(1 - u_n) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4u_n^2 - 4u_n + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2u_n - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}$ (loại).

Vậy $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} > u_n$ nên dãy số tăng.

Bài toán 7. 36: Tìm a để dãy $u_n = \frac{an^2 + 1}{2n^2 + 3}$ là:

a) dãy số giảm	b) dãy số tăng

Hướng dẫn giải

Ta có $u_n = \frac{a}{2} + \frac{2 - 3a}{2(2n^2 + 3)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{2 - 3a}{2\left[2(n+1)^2 + 3\right]}$

Do đó $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - 3a}{2}\left(\frac{1}{2(n+1)^2 + 3} - \frac{1}{2n^2 + 3}\right)$

Vì $2(n + 1)^2 + 3 > 2n^2 + 3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)^2 + 3} - \frac{1}{2n^2 + 3} < 0, \forall n \geq 1.$

Do đó: a) Dãy u_n giảm $\Leftrightarrow \frac{2 - 3a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}$

b) Dãy u_n tăng $\Leftrightarrow \frac{2 - 3a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > \frac{2}{3}$

Bài toán 7. 37: Chứng minh dãy:

a) $u_n = n^2 - 4n$ bị chặn dưới	b) $v_n = \frac{n + 1}{n + 3}$ bị chặn trên.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_n = n^2 - 4n = (n - 2)^2 - 4 = -4 + (n - 2)^2 \geq -4, \forall n.$
Vậy dãy số bị chặn dưới.

b) Ta có $\forall n \geq 1$ thì $n + 1 < n + 3$ nên $v_n = \frac{n + 1}{n + 3} < 1, \forall n.$

Vậy dãy số bị chặn trên.

Bài toán 7. 38: Chứng minh dãy số bị chặn:

a) $u_n = \frac{6n^3 - 2n + 1}{n^3 + 2n}$	b) $v_n = 6\sin n + 7\cos 2n.$

Hướng dẫn giải

a) $\forall n \geq 1$: $u_n = \dfrac{2n(3n^2 - 1) + 1}{n^3 + 2n} > 0$: bị chặn dưới

Vì $u_n = \dfrac{(6n^3 + 12n) - 14n + 1}{n^3 + 2n} = 6 - \dfrac{14n - 1}{n^3 + 2n} < 6$: bị chặn trên

Vậy dãy số bị chặn.

b) Ta có $-6 \leq 6\sin n \leq 6$, $-7 \leq 7\cos 2n \leq 7$

Do đó: $-13 \leq v_n \leq 13$, $\forall n$. Vậy dãy số bị chặn.

Bài toán 7. 39: Chứng minh dãy:

a) $u_n = n^2 + 4n + 7$ không bị chặn trên.

b) $v_n = (-1)^n.n$ không bị chặn dưới.

Hướng dẫn giải

Ta dùng phương pháp phản chứng

a) Giả sử dãy u_n bị chặn trên nên tồn tại số M sao cho $u_n \leq M$, $\forall n$

$\Rightarrow n^2 + 4n + 7 \leq M$, $\forall n$

$\Rightarrow 4n \leq M$, $\forall n \Rightarrow n \leq \dfrac{M}{4}$, $\forall n$: vô lý.

Vậy dãy số không bị chặn trên.

b) Giả sử dãy v_n bị chặn dưới nên tồn tại số m sao cho $v_n \geq m$, $\forall n$

$\Rightarrow (-1)^n.n \geq m$, $\forall n$.

Chọn $n = 2k + 1$, k nguyên dương thì có:

$$-(2k + 1) \geq m, \forall k \Rightarrow k \leq \frac{m + 1}{2}, \forall k\text{: vô lý.}$$

Vậy dãy số không bị chặn dưới.

Bài toán 7. 40: Chứng minh dãy bị chặn:

a) $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

b) $v_n = \dfrac{n + (-1)^n}{4n + 3}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \ldots + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{n}{2n+1}$

Do đó $0 < u_n < 1$, $\forall n$ nên dãy số bị chặn.

b) Ta có $(-1)^n$ bằng 1 hoặc -1 nên $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$

Do đó $\frac{n-1}{4n+3} \le v_n \le \frac{n+1}{4n+3} \Rightarrow 0 \le v_n \le 1$, $\forall n$. Vậy dãy số bị chặn.

Bài toán 7. 41: Xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy:

a) $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$ b) $v_n = \frac{n^2}{2^n}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $u_1 = -2$, $u_2 = 1$, $u_3 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Do đó $u_1 < u_2$, $u_2 > u_3$ nên dãy số không tăng, không giảm

Ta có: $u_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)}$.

Vì $\forall n \ge 1, -1 \le \frac{1}{2n^2-3} \le \frac{1}{5}$ nên $-2 \le u_n \le 1$. Vậy dãy số bị chặn.

b) Ta có $v_n > 0$ với mọi n nguyên dương

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{n^2}{2^n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

Xét $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{2n^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n\sqrt{2}} < 1$

$$\Leftrightarrow n+1 < n\sqrt{2} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow n \ge 3$$

Xét $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1 \Rightarrow n < \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow n \le 2$

Do đó $u_1 < u_2 < u_3$ và $u_3 > u_4 > u_5 > \ldots$

Vậy dãy số không tăng, không giảm và $0 < u_n < u_3 = \frac{9}{8}$, $\forall n \ge 1$ nên dãy số bị chặn.

Bài toán 7. 42: Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số giảm và bị chặn.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_n = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+2)}$ nên $u_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+5)}$

Do đó $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+2}\right) < 0$, với mọi $n \ge 1$.

Vậy (u_n) là một dãy số giảm.

Vì u_n là một dãy giảm nên bị chặn trên bởi $M = u_1 = 1$.

và $\forall n \geq 1$: $\dfrac{5}{3(3n+2)} > 0$ nên $u_n > \dfrac{2}{3}$, $\forall n \geq 1$: bị chặn dưới.

Vậy dãy (u_n) bị chặn.

Bài toán 7. 43: Chứng minh dãy $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tăng và bị chặn.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_n > 0$ và $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ nên

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} . \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} . \frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right) . \frac{n+1}{n} = 1$$

Do đó $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} > u_n$: dãy số tăng.

Vì dãy số tăng nên bị chặn dưới bởi $u_1 = 2$.

Khai triển nhị thức: $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...1}{1.2...n}.\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$= 2 + 1 - \dfrac{1}{n} = 3 - \dfrac{1}{n} < 3$: bị chặn trên. Vậy dãy số bị chặn.

Bài toán 7. 44: Cho số $a \in (0; 1)$. Chứng minh dãy u_n:

$u_1 = \dfrac{a}{2}$, $u_n = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2}u_{n-1}^2$, $n \geq 2$, tăng và bị chặn.

Hướng dẫn giải

Vì $0 < a < 1$ nên $u_n > 0$, $\forall n$

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+1} > u_n$, $n \geq 1$ (1)

Khi n = 1: $u_2 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} > \frac{a}{2} = u_1$: đúng

Giả sử (1) đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh (1) đúng khi n = k + 1. Thật vậy: $u_{k+1} > u_k \Rightarrow u_{k+1}^2 > u_k^2$.

$\Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{1}{2}u_{k+1}^2 > \frac{a}{2} + \frac{1}{2}u_k^2 \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}$: đpcm.

Ta chứng minh quy nạp: $u_n < 1, n \geq 1$ (2)

Khi n = 1: $u_1 = \frac{a}{2} < 1$: đúng.

Giả sử (2) đúng khi n = k, k nguyên dương.

Ta chứng minh (2) đúng khi n = k + 1. Thật vậy.

$u_{k+1} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot u_k^2 < \frac{a}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$: đpcm.

Vậy dãy số tăng và bị chặn.

Bài toán 7. 45: Cho dãy Fibônaxi (u_n): $u_1 = u_2 = 1$; $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Chứng minh các tính chất sau của dãy:

a) $u_{n+2} = 1 + u_1 + u_2 + ... + u_{2n}$.

b) $u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$.

c) $u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$

d) $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = u_n.u_{n+1}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $u_1 = u_2$

$u_1 + u_2 = u_3$

$u_2 + u_3 = u_4$

...

$u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$

Cộng từng vế thì có: $u_1 + (u_1 + u_2 + ... + u_n) = u_{n+2}$

Mà $u_1 = 1$ nên $1 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2}$

b) Ta có: $u_1 = u_2$; $u_2 + u_3 = u_4$; $u_4 + u_5 = u_6$; ...; $u_{2n-2} + u_{2n-1} = u_{2n}$.

Cộng từng vế thì có: $u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$.

c) Ta có: $u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{2n} = (u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{2n}) - (u_1 + u_3 + ... + u_{2n-1})$

Theo phần trên thì $u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = (u_{2n+2} - 1) - u_{2n}$

$= u_{2n+2} - u_{2n} - 1 = u_{2n+1} - 1$.

d) $u_1.u_2 = u_1^2$ (vì có $u_1 = u_2 = 1$)

$u_2.u_3 = u_2(u_1 + u_2) = u_1u_2 + u_2^2$

$u_3.u_4 = u_3(u_2 + u_3) = u_2u_3 + u_3^2$

...

$u_n.u_{n+1} = u_n(u_{n-1} + u_n) = u_n.u_{n-1} + u_n^2$

Cộng từng vế thì có: $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$.

Bài toán 7. 46: Giả sử F_n là số hạng thứ n của dãy Fibonacci, xác định bởi: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n \ge 1$.Chứng minh rằng:

a) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ với $n \in \mathbf{N}$

b) $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$ với mọi $m, n \in \mathbf{N}$

c) $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$, với mọi $n \in \mathbf{N}$

Hướng dẫn giải

Dùng phương pháp quy nạp toán học và sử dụng hệ thức truy hồi:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Cách khác :Dùng công thức tổng quát của dãy Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Bài toán 7. 47: Giả sử F_n, L_n tương ứng là số hạng thứ n của dãy Fibonacci và dãy Lucas. Chứng minh rằng $F_{2n} = F_n.L_n$ với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

Ta có $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ và $L_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Nên $F_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$\Rightarrow F_{2n} = F_n.L_n$.

Bài toán 7. 48: Cho a , b là các số thực thoả mãn $4b > a^2$ và hai dãy số (u_n); (v_n) được xác định như sau: $u_0 = a$; $v_0 = b$;

$v_{n+1} = v_n^2$; $u_{n+1} = 2v_n - u_n^2$, $\forall n = 0, 1, ...$

Chứng minh rằng tồn tại một số $n \ge 0$ mà $u_n > 0$.

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết suy ra $v_n > 0$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{2v_n} = 1 - \frac{u_n^2}{2v_n} = 1 - 2\left(\frac{u_n}{2v_{n-1}}\right)^2.$$

Đặt $w_n = \dfrac{u_{n+1}}{2v_n}$ thì $w_{n+1} = 1 - 2w_n^2$ và $w_0 = \dfrac{2b - a^2}{2b}$.

và $4b > a^2 \Rightarrow 2b \geq 2b - a^2 > -2b$ nên $-1 < \dfrac{2b-a^2}{2b} \leq 1$.

Đặt $\dfrac{2b-a^2}{2b} = -\cos\varphi,\ \varphi \in (0;\pi]$.

Với $w_0 = -\cos\varphi$, bằng quy nạp ta có $w_n = -\cos(2^n\varphi)$.

Do $\varphi \in (0;\pi]$ nên có $k \in \mathbf{N}$ sao cho $2^k.\varphi \in (\frac{\pi}{2};\pi]$.

Khi đó $w_k = -\cos(2^k\varphi) \Rightarrow u_{k+1} > 0$.

Bài toán 7. 49: Cho dãy (a_n): $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$, $n \geq 3$.

a) Chứng minh a_n nguyên với mọi n.

b) Tìm số hạng tổng quát a_n.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\begin{cases} a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2 \\ a_{n-1}a_{n-3} = a_{n-2}^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow a_n a_{n-2} - a_{n-1}.a_{n-3} = a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2$

$\Rightarrow a_{n-2}(a_n + a_{n-2}) = a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n-3})$

$\Rightarrow \dfrac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \ldots = \dfrac{a_3 + a_1}{a_2} = \dfrac{3+1}{1} = 4$

Do đó: $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$

Vì $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ nguyên nên a_n nguyên với mọi n.

b) Xét 2 số $\alpha > \beta$ sao cho $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 1$ thì α, β là nghiệm phương trình:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ do đó } \alpha, \beta = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Ta có $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} = (\alpha + \beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2}$.

$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2})$. Đặt $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ thì $b_n = \beta b_{n-1}$

Từ đó tính được $b_n = -(1 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{n-1}$.

Suy ra: $a_n = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(2+\sqrt{3})^{n-1} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(2-\sqrt{3})^{n-1}$.

Bài toán 7. 50: Cho các số nguyên a, b, c thoả mãn $a^2 = b + 1$. Xét dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 0$, $u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c^2}$, $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy các số nguyên.

Hướng dẫn giải

Từ các giả thiết của bài toán ta có:

$$u_{n+2}^2 - 2au_{n+2}.u_{n+1} + u_{n+1}^2 - c^2 = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

và $u_n^2 - 2au_{n+1}u_n + u_{n+1}^2 - c^2 = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Trừ vế theo vế, ta được: $(u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_n - 2a.u_{n+1}) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Do đó $\forall n \in \mathbf{N}^*$, nếu $u_n \in Z$ và $u_{n+1} \in Z$ thì $u_{n+2} \in \mathbf{Z}$.

Mà $u_1 = 0 \in Z$ và $u_1 = |c| \in Z$ nên suy ra $u_n \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

Bài toán 7. 51: Cho $a \in \mathbf{Z}$, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = (u_n + 1) + (a + 1)u_n + 2\sqrt{a(a + 1)u_n(u_n + 1)} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $u_n \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Ta có $[u_{n+1} - (2a + 1)u_n - a]^2 = 4a(a + 1)u_n(u_n + 1)$

$\Rightarrow u_{n+1}^2 + u_n^2 + a^2 - 2(2a + 1)u_nu_{n+1} - 2a(u_n + u_{n+1}) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

Xét phương trình: $X^2 + u_n^2 + a^2 - 2(2a + 1)u_nX - 2a(u_n + X) = 0$.

$\Leftrightarrow X^2 - 2[(2a + 1)u_n + a]X + (u_n - a)^2 = 0$.

Theo trên, phương trình này có 2 nghiệm là u_{n+1} và u_{n-1} nên theo định lí Viet ta có:

$$u_{n+1} + u_{n-1} = (4a + 2)u_n + 2a, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Mà $u_1 = 0$, $u_2 = a \in \mathbf{Z}$, ta suy ra $u_n \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài toán 7. 52: Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)x_n + 2 - \frac{3}{n},\ n \geq 1 \text{ và } n \in N$$

Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy là số nguyên.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta viết lại công thức truy hồi dưới dạng

$$x_{n+1} = x_n + 2 + \frac{3(x_n - 1)}{n}$$

Ta có $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 8$, $x_4 = 17$, $x_5 = 31$, $x_6 = 51$,... nên $\frac{3(x_n - 1)}{n}$ lần lượt là 0, 3, 7, 12, 18, 25... với quy luật : "Số thứ n bằng số thứ n–1 cộng n+1".

Ta chứng minh bằng quy nạp $x_n = 1 + \frac{(n-1)n(n+4)}{6}$

Thật vậy, điều này đúng với n = 1. Giả sử ta đã chứng minh được

$$x_k = 1 + \frac{(k-1)k(k+4)}{6}$$

Khi đó: $x_{k+1} = \left(1 + \frac{3}{k}\right)x_k + 2 - \frac{3}{k}$

$$= \left(1 + \frac{3}{k}\right)\left[1 + \frac{(k-1)k(k+4)}{6}\right] + 2 - \frac{3}{k}$$

$$= 1 + \frac{(k-1)k(k+4)}{6} + \frac{(k-1)(k+4)}{2} + 2 = 1 + \frac{k(k+1)(k+5)}{6}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Để chứng minh khẳng định của bài toán, ta chỉ cần chứng minh $(n-1)n(n+4)$ luôn chia hết cho 6. Thật vậy

$(n-1)n$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

$(n-1)n(n+4) = (n-1)n(n+1) + 3(n-1)n$ chia hết cho 3.

Bài toán 7. 53: Cho dãy các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n...$ thoả mãn

$$(n-1)a_{n+1} = (n+1)a_n - 2(n-1) \text{ với mọi } n \ge 1.$$

Nếu 2000 chia hết a_{1999}, hãy tìm số n nhỏ nhất, với $n \ge 2$ sao cho 2000 chia hết a_n.

Hướng dẫn giải

Hiển nhiên, từ đẳng thức ở đề bài, ta có $a_1 = 0$, và khi $n \ge 2$ thì:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n-1}a_n - 2$$

Do đó, dãy đã cho được xác định một cách duy nhất bởi a_2

Ngoài ra, ta có $a_n = (n-1)(cn+2)$, với $c = \frac{a_2}{2} - 1$ là một số thực tuỳ ý, dãy a_n thoả mãn đẳng thức ở điều kiện của bài toán.

Tất cả các dãy a_n thoả mãn điều kiện của bài toán đều có dạng như thế. Vì tất cả các số hạng của dãy đều là các số nguyên và 2000 chia hết a_{1999} nên ta dễ thấy rằng c là số nguyên và c = 1000m + 2. Như thế, suy ra 2000 chia hết a_n khi và chỉ khi 1000 chia hết $(n-1)(n+1)$. Từ đó $n = 2k+1$ và $k(k+1)$ chia hết cho $250 = 5^3.2$. Vì k và (k + 1) nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra số n nhỏ nhất, $n \ge 2$, là:

$$2 \times 124 + 1 = 249.$$

Bài toán 7. 54: Cho dãy số $u_n = 1 + 2^n(n-1)$. Tính tổng:

$$A = 1 + 2.2^1 + 3.2^2 + 4.2^3 + ... + 2018.2^{2017}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_n = 1 + 2^n(n-1)$ suy ra :

$$u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}(n+1-1) = 1 + 2^n . 2n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n.$$

Do đó: $2 . 2^1 = u_2 - u_1$; $3.2^2 = u_3 - u_2$; $4.2^3 = u_4 - u_3$;....

$$2018.2^{2017} = u_{2018} - u_{2017}$$

Vậy $A = 1 + u_{2018} - u_1 = u_{2018} = 1 + 2^{2018}.2017$.

Bài toán 7. 55: Cho dãy (u_n) được xác định:

$$u_1 = 2000;\ u_2 = 2001;\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3,\ n = 1, 2, 3...$$

Tính tổng n số hạng đầu tiên S_n.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3$

Do đó $u_3 - 2u_2 + u_1 = 3$; $u_4 - 2u_3 + u_2 = 3$;...;$u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 3$.

Cộng từng vế $n-2$ đẳng thức trên thì được:

$$u_n - u_{n-1} - u_2 + u_1 = 3(n-2).$$

$$u_n - u_{n-1} = 3(n-2) + u_2 - u_1 = 3n - 5.$$

Do đó $u_3 - u_2 = 3.3 - 5$;$u_4 - u_3 = 3.4 - 5$;...;$u_n - u_{n-1} = 3.n - 5$.

Cộng từng vế $n-2$ đẳng thức trên:

$$u_n - u_2 = 3(3 + 4 + ... + n) - 5(n-2)$$

$$u_n = \frac{3.(n+3)(n-2)}{2} - 5n + 2011 \text{ nên } u_n = \frac{3n^2 - 7n}{2} + 2002$$

Do đó $S_n = \frac{3}{2}(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - \frac{7}{2}(1 + 2 + ... + n) + 2002.n$

Vậy $S_n = n(n-3)(n+1) + 2002.n$.

Bài toán 7. 56: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{2n-3}{2n}u_{n-1}\ ,n = 2, 3,... \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}^*$, ta có: $u_1 + u_2 + ... + u_n < 1$.

Hướng dẫn giải

Với $k \geq 2$, theo quy tắc xác định dãy ta có:

$$2k.u_k = (2k-3).u_{k-1} \text{ hay } 2(k-1)u_{k-1} - 2k.u_k = u_{k-1}.$$

Thay lần lượt $k = 2, 3,..., n+1$, ta có:

$$u_1 = 2u_1 - 4u_2;\ u_2 = 4u_2 - 6u_3;...;\ u_{n-1} = 2(n-1)u_{n-1} - 2nu_n$$

$$u_n = 2nu_n - 2(n+1)u_{n+1}$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên, ta có:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = 2u_1 - 2(n+1)u_{n+1} = 1 - 2(n+1)u_{n+1}$$

Theo cách xác định dãy, ta có $u_n > 0$, $\forall n$ nguyên dương nên

$$u_1 + u_2 + ... + u_n < 1,\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Bài toán 7. 57: Dãy (a_n) được thành lập theo quy tắc sau:

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1},\ \dots,\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Chứng minh $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$, $n > 1$

Hướng dẫn giải

Với mọi k > 1 ta có $a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + \dfrac{1}{a_{k-1}^2}$.

Để ý rằng $a_k > 1$, $\forall k > 1$ nên $a_{k-1}^2 + 2 < a_k^2 < a_{k-1}^2 + 3$

Từ đó ta có: $a_{n-1}^2 + 2 < a_n^2 < a_{n-1}^2 + 3$; $a_{n-2}^2 + 2 < a_{n-1}^2 < a_{n-2}^2 + 3$;...

$$a_2^2 + 2 < a_3^2 < a_2^2 + 3;\quad a_1^2 + 2 < a_2^2 \le a_1^2 + 3$$

Suy ra: $2n - 1 < a_n^2 < 3n - 2$, $\forall n > 1$

Vậy $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$, $\forall n > 1$ (đpcm).

Bài toán 7. 58: Giả sử các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ thoả mãn các điều kiện:

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2, \text{ với mọi } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Chứng minh rằng $1 - \dfrac{1}{n} < a_n < 1$.

Hướng dẫn giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo k:

$$\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}, \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi k = 1, ta có: $a_1 = a_0 + \dfrac{1}{n}a_0^2 = \dfrac{2n+1}{4}$

Suy ra $\dfrac{n+1}{2n+1} < a_1 < \dfrac{n}{2n-1}$. Do đó bất đẳng thức đúng khi k = 1.

Giả sử bất đẳng thức đúng với mọi k = r < n, ta có:

$$a_{r+1} = a_r + \frac{1}{n}a_r^2 = a_r\left(1 + \frac{1}{n}a_r\right)$$

Suy ra: $a_{r+1} > \dfrac{n+1}{2n-r+2}\left(1 + \dfrac{1}{n}.\dfrac{n+1}{2n-r+2}\right) > \dfrac{n+1}{2n-r+1} = \dfrac{n+1}{2n-(r+1)+2}$

Mặt khác, vì $(2n-r)^2 > (2n-r+1)(2n-(r+1))$ nên ta lại có:

$$a_{r+1} < \frac{n}{2n-r}\left(1 + \frac{1}{n}.\frac{n}{2n-r}\right) = \frac{n(2n-r+1)}{(2n-r)^2} < \frac{n}{2n-(r+1)} \text{ : đpcm.}$$

Khi k = n, ta nhận được: $1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}<a_n<\frac{n}{2n-n}=1$

Cách khác: Từ giả thiết suy ra dãy tăng và biến đổi:

$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{n+a_k}\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{n}$$

Bài toán 7. 59: Với n = 1, 2,..., ta gọi (u_n) là dãy được xác định bởi:

$u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

Chứng minh $u_{n+2} + u_n \geq 2 + \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$, với mọi n.

Hướng dẫn giải

Bằng quy nạp ta chứng minh $u_nu_{n+2} = u_{n+1}^2 + 1$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có $u_3 = 5$ nên công thức đúng khi n = 1.

Giả sử công thức trên đúng khi $n = k \geq 1$. Ta chứng minh công thức đúng khi n = k + 1: $u_{k+1}u_{k+3} - u_ku_{k+2} = u_{k+2}^2 - u_{k+1}^2$ (1)

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow u_{k+1}(u_{k+1} + u_{k+3}) = u_{k+2}(u_k + u_{k+2})$

$\Leftrightarrow u_{k+1}.3u_{k+2} = u_{k+2}.3u_k$: đúng

Do đó $u_nu_{n+2} = u_{n+1}^2 + 1$, với mọi $n \geq 1$.

Ta có, nếu $u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$ với mọi $n \geq 1$ thì: $_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2+1}{u_n} > 0$

Từ đây suy ra, vì $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ là các số dương nên $u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $u_n + \frac{1}{u_n} \geq 2$

Suy ra: $u_{n+2}+u_n=\frac{u_{n+1}^2+1}{u_n}+u_n=\frac{u_{n+1}^2}{u_n}+\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)\geq 2+\frac{u_{n+1}^2}{u_n}$.

Bài toán 7. 60: Cho dãy (u_n) được xác định như sau:

$$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)u_n=\frac{2}{2n+1};n=1,2,3...$$

Chứng minh rằng $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{2015} < \frac{2015}{2017}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_k=\frac{2}{(2k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{2k+1}$

$\Rightarrow\ u_k<\frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{2\sqrt{k(k+1)}}$ do $\sqrt{k(k+1)}<\frac{k+(k+1)}{2}=\frac{2k+1}{2}$

$\Rightarrow\ u_k < \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

Do đó: $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n < \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$\Rightarrow\ u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

Vì: $1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{4k+4}} < 1 - \dfrac{2}{\sqrt{k^2+4k+4}} = 1 - \dfrac{2}{k+2} = \dfrac{k}{k+2}$

Như vậy ta đi đến: $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k < \dfrac{k}{k+2}$

Với k = 2015 ta có điều phải chứng minh.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 7. 1: Tìm 6 số hạng đầu của dãy:

a) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n}$ b) $u_n = (-1)^n.\sqrt{4^n}$

Hướng dẫn

a) Tính trực tiếp với n = 1,2,3,4,5 và 6.

Kết quả $u_1 = -1$, $u_2 = \dfrac{5}{2}$, $u_3 = 5$; $u_4 = \dfrac{29}{4}$, $u_5 = \dfrac{47}{5}$; $u_6 = \dfrac{23}{2}$

b) Kết quả $u_1 = -2$; $u_2 = 4$, $u_3 = -8$; $u_4 = 16$, $u_5 = -32$, $u_6 = 64$.

Bài tập 7. 2: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_1 = \dfrac{1}{1.2}$; $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$

b) $v_1 = 1 - \dfrac{1}{2}$; $v_n = (1 - \dfrac{1}{2})(1 - \dfrac{1}{3})...(1 - \dfrac{1}{n})$.

Hướng dẫn

a) Dùng sai phân. Kết quả $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) Tính gọn phân số. Kết quả $v_n = \dfrac{1}{n}$

Bài tập 7. 3: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ b) $v_n = 1.2 + 2.3 + ... + n(n + 1)$

Hướng dẫn

a) Cấp số cộng có $u_1 = 1$ và d =2. Kết quả $u_n = n^2$

b) Tách ra 2 tổng. Kết quả $v_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Bài tập 7. 4: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

a) (u_n) xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \ge 1$.

b) (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n + 10$, $n \ge 1$.

Hướng dẫn

a) Viết liên tiếp rồi cộng lại vế theo vế. Kết quả $u_n = 5n - 2$

b) Dùng dãy phụ $u_n = v_n + a$. Kết quả $u_n = 2.3^n - 5$, $n \ge 1$.

Bài tập 7. 5: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

$$u_1 = 2,\ u_2 = 5,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n,\ n \ge 1.$$

Hướng dẫn

Biến đổi $u_{n+2} - u_{n+1} = 6(u_{n+1} - u_n)$ rồi đặt dãy phụ.

Kết quả $u_n = \dfrac{3.5^{n-1} + 5}{4}$.

Bài tập 7. 6: Xác định số hạng tổng quát của dãy số:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^2 + 1} \quad ; n \in N \end{cases}$$

Hướng dẫn

Đưa về $u_{n+1} = 6u_n - u_{n-1}$

Kết quả $u_n = \left(\dfrac{8+\sqrt{66}}{8}\right)(3+\sqrt{8})^n + \left(\dfrac{8-\sqrt{66}}{8}\right)^n (3-\sqrt{8})^n$

Bài tập 7. 7: Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) xác định bởi:

a) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n + 10$, $n \ge 1$.

b) $u_1 = 3$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 9}{6}$, $n \ge 1$.

Hướng dẫn

a) Nhận xét $u_n > 0$ với mọi n. Kết quả dãy số tăng

b) Kết quả dãy số không đổi nên không tăng, không giảm

Bài tập 7. 8: Cho dãy số thực x_0, x_1, x_2 ... được xác định bởi

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ n(n+1)x_{n+1} = n(n-1)x_n - (n-2)x_{n-1}$$

Hãy tìm $T = \dfrac{x_0}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2} + \ldots + \dfrac{x_{50}}{x_{51}}$.

Hướng dẫn

Biến đổi về $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = n + 1$, $\forall n \ge 2$. Kết quả $T = 1326$.

Bài tập 7. 9: Xét dãy tất cả các số lẻ và lập nhóm (1), (3,5), (7,9,11),... sao cho nhóm thứ n có n chữ số. Tính tổng các số của nhóm thứ k.

Hướng dẫn

Nhóm thứ k có k chữ số lập cấp số cộng nên chỉ cần tìm quy luật của chữ số đầu tiên của nhóm.Kết quả $T = k^3$

Bài tập 7. 10: Cho dãy số (s_n) với $s_n = \sin(4n-1)\dfrac{\pi}{6}$. Chứng minh dãy tuần hoàn. Hãy tính tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Hướng dẫn

Tính liên tiếp $s_1, s_2, s_3, s_4,..$ hay dựa vào biểu thức lương giác

$$\sin(4n-1)\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}).$$

Kết quả $s_{n+3} = s_n$; $S_{15} = 0$.

Bài tập 7. 11: Cho dãy Fibonaxi (a_n):

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{ với } \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Và cho đa thức f(x) bậc n với hệ số nguyên biết:

$$f(k) = a_k \text{ với } \forall k = 1002; 1003;...; 2014. \text{ Tìm } f(2015)$$

Hướng dẫn

Dùng $f(2n+3) = a_{2n+1} - 1 + f(2n+2) = a_{2n+1} + a_{2n+2} - 1 = a_{2n+3} - 1$

Kết quả $f(2015) = a_{2015} - 1$.

Bài tập 7. 12: Giả sử F_k là số hạng thứ k của Fibonaci 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Chứng minh với mọi n thì: $4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4}$ là số chính phương.

Hướng dẫn

Dãy Phibonaxi (F_k) thì có: $|F_{n+4} . F_{n-2} - F_{n+2}F_n| = 3$

Kết quả số chính phương $(2F_nF_{n+2} \pm 3)^2$.

Chuyên đề 8: GIỚI HẠN DÃY SỐ

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Giới hạn dãy số

$\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^* : n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$

$\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^* : n > n_0 \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$

$\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$

$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^* : n > n_0 \Rightarrow u_n > A$.

$\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

$\Leftrightarrow \forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^* : n > n_0 \Rightarrow u_n < A$.

Nếu dãy có giới hạn hữu hạn thì gọi là dãy hội tụ, còn dãy không có giới hạn hay có giới hạn không hữu hạn ($-\infty$ hoặc $+\infty$) thì gọi là dãy phân kỳ.

Các định lý cơ bản giới hạn dãy số:

- Giới hạn nếu có của 1 dãy là duy nhất.
- Nếu $\lim u_n = A$, $\lim v_n = B$ và c là một hằng số thì

  $\lim(u_n + v_n) = A + B$; $\lim(u_n - v_n) = A - B$

  $\lim(u_n . v_n) = AB$; $\lim(cu_n) = cA$; $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{A}{B}$ (nếu $B \neq 0$).
- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.
- Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Nếu $a \leq u_n \leq b$ với mọi $n \geq N_0$ và $\lim u_n = L$ thì $a \leq L \leq b$.
- Nếu $v_n \leq u_n \leq w_n$ với mọi $n \geq N_0$ và $\lim v_n = \lim w_n = L$ thì $\lim u_n = L$.

Khử dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$:

- Chia tử và mẫu của phân thức cho n với luỹ thừa lớn nhất của tử hoặc mẫu, cho a^n với a có cơ số lớn nhất ở tử hoặc mẫu, việc này cũng như đặt thừa chung
- Đặt thừa chung, nhân, chia lượng liên hiệp bậc hai, bậc ba,....

  Đặc biệt là thêm bớt đại lượng đơn giản nhất để các giới hạn mới có cùng dạng và vô định, ...

Các định lý mở rộng giới hạn dãy số:

- Nếu dãy hội tụ thì dãy đó bị chặn.
- Định lý **Bolzano– Weierstrass** : Từ một dãy bị chặn luôn trích ra được một dãy con hội tụ.
- Nếu dãy đơn điệu và bị chặn thì dãy hội tụ.
- Dãy (u_n) được gọi là dãy **Cauchy** nếu

  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^* : \forall\ m, n > n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$

– Dãy (u_n) hội tụ khi và chỉ khi dãy (u_n) là dãy Cauchy.
– Nếu dãy (u_n) có dãy con (u_{2n}) tăng và bị chặn trên và dãy con (u_{2n+1}) giảm và bị chặn dưới, hơn nữa 2 dãy này cùng có giới hạn L thì dãy u_n có giới hạn L.
– Định lý trung bình **Cesaro**:

Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} = L$.

Hay $\lim (u_{n+1} - u_n) = L$ thì $\lim \dfrac{u_n}{n} = L$.

– Định lý **Stolz**: Nếu 2 dãy (u_n), (v_n) trong đó dãy (v_n) là dãy số dương tăng và

$\lim \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$ tồn tại thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \lim \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 8. 1: Dùng định nghĩa chứng minh các dãy số sau có giới hạn bằng 0:

a) $u_n = \dfrac{5n-3}{n+1}$ có giới hạn bằng 5

b) $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}}$ có giới hạn bằng 0.

Hướng dẫn giải

a) Với mọi số $\varepsilon > 0$ tuỳ ý cho trước:

Xét $|u_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{5n-3}{n+1} - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{8}{n+1} < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow n + 1 > \frac{8}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow n > \frac{8}{\varepsilon} - 1.$$

Chọn $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n_o > \dfrac{8}{\varepsilon} - 1$.

Ta có $\forall n \in \mathbf{N}^*, n > n_o \Rightarrow n > \dfrac{8}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow |u_n - 5| < \varepsilon$

Vậy theo định nghĩa thì $\lim u_n = 5$.

b) Với mọi số $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước

Xét $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{9}{\varepsilon^2}$.

Chọn $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n_o > \dfrac{9}{\varepsilon^2}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_o \Rightarrow n = \dfrac{9}{\varepsilon^2} \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$: đpcm.

Bài toán 8. 2: Chứng minh:

a) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

b) Nếu $q > 1$ thì $\lim \dfrac{n}{q^n} = 0$, $\lim \dfrac{n^2}{q^n} = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu q = 0 thì hiển nhiên điều khẳng định là đúng.

Nếu $0 < |q| < 1$ thì $\left|\dfrac{1}{q}\right| = \dfrac{1}{|q|} > 1$ nên $\left|\dfrac{1}{q}\right| = 1 + h$ với $h > 0$

Ta có: $\left|\dfrac{1}{q^n}\right| = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh$ và $|q^n| < \dfrac{1}{h}.\dfrac{1}{n}$ với mọi n.

Vì $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{1}{h}.\dfrac{1}{n} = 0$. Từ đó suy ra $\lim q^n = 0$.

b) Với $q > 1$ nên đặt $q = 1 + h$ với $h > 0$.

Ta có $q^n = (1 + h)^n = C_n^0 + C_n^1 h + C_n^2 h^2 + \ldots + C_n^n h^n$

Vì $h > 0$ và $C_n^k \geq 0$ nên:

$$q^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k \geq C_n^2 h^2 \Rightarrow q^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

Do đó $\dfrac{n}{q^n} \leq \dfrac{2n}{n(n-1)h^2} = \dfrac{2}{(n-1)h^2}$

Vì $\lim \dfrac{2}{n-1} = 0$ nên $\lim \dfrac{2}{(n-1)h^2} = 0$ suy ra $\lim \dfrac{n}{q^n} = 0$

Ta có $\dfrac{n^2}{q^n} = \dfrac{n}{\left(\sqrt{q}\right)^n}.\dfrac{n}{\left(\sqrt{q}\right)^n}$.

Vì $q > 1$ nên $\sqrt{q} > 1$ do đó $\lim \dfrac{n}{\left(\sqrt{q}\right)^n} = 0$. Vậy $\lim \dfrac{n^2}{q^n} = 0$.

Bài toán 8. 3: Chứng minh:

a) Nếu $a > 0$ thì $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$ b) Nếu $a > 1$, k tuỳ ý thì $\lim \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Cho $a > 0$ nên tồn tại số nguyên dương m sao cho $m+1 > a$.

Với n khá lớn, $\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}.\frac{a}{2}...\frac{a}{m}.\frac{a}{m+1}.\frac{a}{m+2}...\frac{a}{n} < \frac{a^m}{m!}.\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}$.

Vì $\frac{a^m}{m!}$ là hằng số dương, $0 < \frac{a}{m+1} < 1$ nên $\lim\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m} = 0$

Do đó $\lim\frac{a^n}{n!} = 0$.

b) Cho k tuỳ ý nên tồn tại số nguyên dương m sao cho m > k.

Ta có $\left|\frac{n^k}{a^n}\right| = \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^m}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[m]{a})^n}\right)^m$

Vì a > 1 nên $\sqrt[m]{a} > 1$ thì $\lim\frac{n}{(\sqrt[m]{a})^n} = 0$ nên $\lim\left(\frac{n}{(\sqrt[m]{a})^n}\right) = 0$.

Vậy $\lim\frac{n^k}{a^n} = 0$.

Bài toán 8. 4: Chứng minh rằng

a) $\lim\sqrt[n]{2} = 1$ b) $\lim\sqrt[n]{n} = 1$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $q = \sqrt[n]{2} - 1 > 0 \Rightarrow 2 = (1+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^k \ge C_n^1 q = nq$

$\Rightarrow \frac{2}{n} \ge q = \sqrt[n]{2} - 1 \Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{2} \le 1 + \frac{2}{n} \Rightarrow$ đpcm.

b) Với $n \ge 3$, theo bất đẳng thức AM–GM, ta có:

$$1 < \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1...1\sqrt{n}\sqrt{n}} \le \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Như vậy $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim\sqrt[n]{n} = 1$

Cách khác: $q = \sqrt[n]{n} - 1 \ge 0 \Rightarrow n = (q+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^k \ge C_n^2 q^2 = \frac{n(n-1)}{2}q^2$

$\Rightarrow 0 < q \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Rightarrow 1 \le \sqrt[n]{n} \le 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

Bài toán 8. 5: Chứng minh các dãy sau không có giới hạn :

a) $u_n = \cos n\pi$ b) $v_n = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2})$

Hướng dẫn giải

a) Xét n = 2m thì $u_n = u_{2m} = \cos 2m\pi = 1 \to 1$

Xét n = 2m+1 thì $u_n = u_{2m+1} = \cos(2m+1)\pi = -1 \to -1 \neq 1$.

Vậy dãy u_n không có giới hạn.

b) Xét n = 2m thì $v_n = v_{2m} = \sin(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$.

Xét n = 2m+1 thì $v_n = v_{2m+1} = \sin((2m+1)\pi + \frac{\pi}{2}) = -1 \to -1 \neq 1$.

Vậy dãy v_n không có giới hạn.

Bài toán 8. 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{(2n+1)^2(4-n)}{(3n+5)^3}$ b) $\lim \frac{3n^2-n+1}{n^3+4n^2+6}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim \frac{(2n+1)^2(4-n)}{(3n+5)^3} = \lim \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}-1\right)}{\left(3+\frac{5}{n}\right)^3} = \frac{2^2(-1)}{3^3} = -\frac{4}{27}$.

b) $\lim \frac{3n^2-n+1}{n^3+4n^2+6} = \lim \frac{n^2\left(3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(n+4+\frac{6}{n^2}\right)} = \lim \frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{n+4+\frac{6}{n^2}} = 0$.

Bài toán 8. 7: Tính giới hạn của các dãy sau:

a) $u_n = \frac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3}$ b) $u_n = \frac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \frac{\sqrt{n^4\left(2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}}{2n^2-n+3} = \frac{n^2\sqrt{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}}{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}}{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}$

nên $\lim u_n = \lim \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}}{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^6\left(1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}\right)}}{n+12} = \dfrac{\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{12}{n^2}}$

Vì $\lim \sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}} = \sqrt[3]{1} = 1 > 0$, $\lim\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{12}{n^2}\right) = 0$.

và $\dfrac{1}{n}+\dfrac{12}{n^2} > 0$ với mọi n nên $\lim u_n = +\infty$.

Bài toán 8. 8: Tính giới hạn của các dãy sau:

a) $u_n = \dfrac{3.2^{n+1} - 2.3^{n+1}}{4+3^n}$ b) $u_n = \dfrac{2^{2n}+5^{n+2}}{3^n+5.4^n}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{6.2^n - 6.3^n}{5+3^n} = \dfrac{6\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 6}{4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1}$ nên $\lim u_n = \dfrac{0-6}{0+1} = -6$.

b) $u_n = \dfrac{4^n + 25.5^n}{3^n+5.4^n} = \dfrac{1+25\left(\dfrac{5}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 5}$

Vì $\lim(\dfrac{5}{4})^n = +\infty$, $25 > 0$, $\lim(\dfrac{3}{4})^n = 0$ nên $\lim u_n = +\infty$.

Bài toán 8. 9: Tính giới hạn của các dãy sau:

a) $u_n = \dfrac{n!+(n+1)!}{2(n+1)!+7n!}$ b) $u_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-5(n+3)!}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \dfrac{n!+n!(n+1)}{2n!(n+1)+7n!} = \dfrac{1+(n+1)}{3(n+1)+7} = \dfrac{n+2}{2n+9} = \dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{9}{n}}$

Do đó $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

b) $u_n = \dfrac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)-5(n+1)!(n+2)(n+3)} = \dfrac{(n+2)+1}{(n+2)-5(n+2)(n+3)}$

$$= \frac{n+3}{(n+2)(-5n-14)} = \frac{1+\frac{3}{n}}{(n+2)(-5-\frac{14}{n})} \text{ nên } \lim u_n = 0.$$

Bài toán 8. 10: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$ b) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+1} = \dfrac{n^3+n^2-(n^3+1)}{\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3+n^2}.\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{(n^3+1)^2}}$

$$= \frac{n^2-1}{n^2.\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + n^2.\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}.\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + n^2.\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}.\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2}}$$

nên $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right) = \dfrac{1}{3}$.

b) $\lim(\sqrt[3]{n^3+1} - n) = \lim \dfrac{n^3+1-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + \sqrt[3]{n^3+1}.n + n^2}$

$$= \lim \frac{1}{n^2\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right]} = 0.$$

Bài toán 8. 11: Tính các giới hạn sau:

a) $A = \lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+3n}\right)$ b) $B = \lim \dfrac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3+n^2}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+3n} = \sqrt[3]{n^3+n^2} - n + n - \sqrt{n^2+3n}$

$$\sqrt[3]{n^3+n^2} - n = \frac{n^3+n^2-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3+n}.n + n^2}$$

$$= \frac{n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2}.n + n^2} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

và $n - \sqrt{n^2+3n} = \dfrac{n^2-(n^2+3n)}{n+\sqrt{n^2+3n}} = \dfrac{-3n}{n+\sqrt{n^2+3n}} = \dfrac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$

nên $A = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-7}{6}$.

b) Ta có: $\dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt[3]{n^3+n^2}} = \dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n} \cdot \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt[3]{n^3+n^2}}$

$$\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n} = \frac{n^2+2-(n^2+1)}{n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right)} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1})}$$

và $\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt[3]{n^3+n^2}} = \dfrac{n\left[\sqrt[3]{(n^3+2)^2} + \sqrt[3]{n^3+2}.\sqrt[3]{n^3+n^2} + \sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}\right]}{2-n^2}$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}.\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})^2}}{\frac{2}{n^2}-1}$$

nên $B = 0.(-3) = 0$.

Bài toán 8. 12: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\sqrt{2.3^n - n + 2}$ b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt{2.3^n-n+2} = \left(\sqrt{3}\right)^n.\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}}$ với mọi n.

Vì $\lim\dfrac{n}{3^n} = 0$ và $\lim\dfrac{2}{3^n} = 0$ nên $\lim\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}} = \sqrt{2} > 0$.

Mà $\lim\left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$. Do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2} = +\infty$.

b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3+\dfrac{2}{n}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)}$

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$, $\lim\left(\sqrt{3+\dfrac{2}{n}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}\neq 0$

nên $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}=0.$

Bài toán 8. 13: Tính giới hạn của các dãy sau:

a) $u_n=\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{(7n+2)^2}$

b) $u_n=\dfrac{1^3+4^3+...+(3n-2)^3}{(1+4+...+(3n-2))^2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có tổng $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Do đó: $u_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6(7n+2)^3}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{6\left(7+\dfrac{2}{n}\right)^3}$

nên $\lim u_n=\dfrac{1.2}{6.7^3}=\dfrac{1}{2058}$.

b) Ta có: $(3k-2)^3=27k^3-54k^2+36k-8$ nên tử thức bằng :

$27\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}-54.\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+36.\dfrac{n(n+1)}{2}-8n$

Và dãy 1, 4, ..., 3n–2 lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$, công sai $d=3$ và gồm n số hạng nên mẫu thức bằng

$\left(\dfrac{n}{2}(u_1+u_n)\right)^2=\left(\dfrac{n}{2}(1+3n-2)\right)^2=\dfrac{n^2(3n-1)^2}{4}$

Do đó $u_n=\dfrac{\dfrac{27}{4}n^2(n+1)^2-9n(n+1)(2n+1)+18n(n+1)-8n}{\dfrac{1}{4}n^2(3n-1)^2}$

Vì tử và mẫu cùng bậc 4 với hệ số $\dfrac{27}{4}$ và $\dfrac{9}{4}$ nên suy ra $\lim u_n=3$.

Bài toán 8. 14: Tìm giới hạn của các dãy số sau :

a) $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$ b) $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{5^n}}$

Hướng dẫn giải

a) Với mỗi số nguyên dương k, ta có: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Do đó: $\lim u_n = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

b) Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 1.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{5^n} = 1.\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right).$$

Vì $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, $\lim\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = \dfrac{8}{5}$.

Bài toán 8. 15: Tính giới hạn của các dãy sau:

a) $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1}}$

b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)...\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1}\right)}$

Vì $\lim(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)=+\infty$ nên $\lim u_n = 1 - 0 = 1$.

b) Ta có $u_n = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}...\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ nên $\lim u_n = 0$.

Bài toán 8. 16: Tính giới hạn của các dãy sau:

a) $u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ b) $u_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}...\frac{n^3-1}{n^3+1}$

Hướng dẫn giải

a) Với $k \geq 2$ ta có $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, nên:

$$u_n = \frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}...\frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)^2}.\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}.\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ nên } \lim u_n = \frac{1}{2}.$$

b) Với $k \geq 2$ ta có: $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)\left[(k-1)^2+(k-1)+1\right]}$

Nên: $u_n = \frac{2}{3}.\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}=\frac{2}{3}.\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$, do đó $\lim u_n = \frac{2}{3}$.

Bài toán 8. 17: Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho

$u_n = \frac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(n) = [(n^2+1)+n]^2 + 1 = (n^2+1)^2 + 2n(n^2+1) + n^2 + 1$

$= (n^2+1)(n^2+2n+2) = (n^2+1)[(n+1)^2+1]$.

Do đó $\frac{f(2k-1)}{f(2k)}=\frac{(4k^2-4k+2)(4k^2+1)}{(4k^2+1)(4k^2+4k+2)}=\frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)^2+1}$

Suy ra $u_n = \frac{1^2+1}{3^2+1}.\frac{3^3+1}{5^2+1}.\frac{5^2+1}{7^2+1}...\frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$

$\Rightarrow n\sqrt{u_n}=\frac{n}{\sqrt{2n^2+2n+1}}$

Vậy $\lim n\sqrt{u_n} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài toán 8. 18: Tính giới hạn dãy

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+2015)},\ n \in \mathbf{N}^*$$

Hướng dẫn giải

Dùng phương pháp quy nạp, tính

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+a)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{n!}{(n+a)!}\right],\ \text{với } a \in \mathbf{N}^*$$

Ta có: $u_1 = \dfrac{1}{1.2.3\ldots(a+1)} = \dfrac{1}{(a+1)!} = \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{a+1-1}{(a+1)!}\right] = \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{a!} - \dfrac{1!}{(a+1)!}\right]$

Giả sử: $u_k = \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{a!} - \dfrac{k!}{(a+k)!}\right]$

Ta có: $u_{k+1} = u_k + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+1+a)}$

$$= \frac{1}{a.a!} - \frac{k!}{a.(k+1+a)!}(k+1+a-a) = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{(k+1)!}{(k+1+a)!}\right]$$

Vậy $\forall a \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+a)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a!} - \frac{n!}{(n+a)!}\right]$

Do đó: $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+2015)} = \frac{1}{2015}\left[\frac{1}{(2015)!} - \frac{n!}{(n+2015)!}\right]$

Ta có: $\lim u_n = \dfrac{1}{2001.(2001)!} - \lim \dfrac{n!}{(n+2001)!}$

mà $\lim \dfrac{n!}{(n+2015)!} = \lim \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+2015)} = 0$

Vậy $\lim u_n = \dfrac{1}{2015.(2015)!}$.

Bài toán 8. 19: Tính giới hạn sau:

$$\lim\left[\cos\left(\pi.n.\sqrt[3]{n^3+3n^2+n+1}\right) + \sin\left(\pi n.\sqrt[3]{n^3+3n^2+n+1}\right)\right]$$

Hướng dẫn giải

Đặt $y_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2+n+1}$ nên ta cần tính

$\lim[\cos(\pi n.y_n) + \sin(\pi.n.y_n)]$

Do n(n + 1) là số chẵn nên ta có:

$\cos(\pi n.y_n) = \cos[-n\pi y_n + n(n+1)\pi] = \cos\pi n(n+1-y_n)$

$$= \cos\pi n.\frac{(n+1)^3 - y_n^3}{(n+1)^2 + y_n(n+1) + y_n^2} = \cos\frac{2\pi n^2}{(n+1) + y_n(n+1) + y_n^2}$$

$$= \cos\frac{2\pi}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{y_n}{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{y_n}{n}\right)^2}$$

Tương tự: $\sin(\pi n.y_n) = -\sin\dfrac{2\pi}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{y_n}{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{y_n}{n}\right)^2}$

Ta có: $\lim\dfrac{y_n}{n} = 1$ nên $\lim\cos(\pi n.y_n) = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

và $\lim\sin(\pi n.y_n) = -\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\lim\left[\cos(\pi n.y_n) + \sin(\pi n.y_n)\right] = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Bài toán 8. 20: Tính giới hạn của dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 10 \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 3 \text{ với } n \geq 1.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $v_n = u_n - \dfrac{15}{4}$. Ta có:

$v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{15}{4} = \dfrac{u_n}{5} + 3 - \dfrac{15}{4} = \dfrac{u_n}{5} - \dfrac{3}{4}$.

$= \dfrac{1}{5}\left(v_n + \dfrac{15}{4}\right) - \dfrac{3}{4}$ nên $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}v_n$, với mọi n.

Do đó dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{1}{5}$.

Ta có $v_n = v_1 : q^{n-1}$ với $v_1 = u_1 - \dfrac{15}{4} = \dfrac{25}{4}$, $q = \dfrac{1}{5}$

nên $v_n = \dfrac{25}{4}.(\dfrac{1}{5})^{n-1}$, do đó $\lim v_n = 0$

Vậy $\lim u_n = \lim(v_n + \dfrac{15}{4}) = \dfrac{15}{4}$.

Bài toán 8. 21: Tính giới hạn của dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6} \text{ với } n \ge 1.$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp $u_n \neq -4$ với mọi n. Đặt $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 4}$.

Ta có $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \dfrac{\dfrac{u_n - 4}{u_n + 6} + 1}{\dfrac{u_n - 4}{u_n + 6} + 4} = \dfrac{2u_n + 2}{5u_n + 20}$

$= \dfrac{2}{5}.\dfrac{u_n + 1}{u_n + 4} = \dfrac{2}{5}\, v_n$, với mọi n

Do đó v_n lập thành cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{2}{5}$.

nên $v_n = v_1.q^{n-1} = v_1.(\dfrac{2}{5})^{n-1} \Rightarrow \lim v_n = 0$

Mà $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 4} \Rightarrow u_n = \dfrac{4v_n - 1}{1 - v_n}$ nên $\lim u_n = -1$.

Bài toán 8. 22: Cho dãy (x_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1} \end{cases}$$

Đặt $y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + 2}$. Tìm $\lim y_n$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $x_{n+1} = \sqrt{(x_n^2 + 3x_n)(x_n^2 + 3x_n + 2) + 1} = x_n^2 + 3x_n + 1$

Ta chứng minh qui nạp được: $x_{n+1} > 3^n$ nên suy ra $\lim x_n = +\infty$

Ta lại có: $x_{n+1} + 1 = (x_n + 1)(x_n + 2)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_n + 2} = \dfrac{1}{x_n + 1} - \dfrac{1}{x_{n+1} + 1}$

$\Rightarrow y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x_{n+1} + 1}$ Vậy $\lim y_n = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 8. 23: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{n+2\sin(n+1)}{n\sqrt[3]{n}+2\sqrt[3]{n}}$ b) $\lim\dfrac{(-2)^n}{3^{3n}+4}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $u_n=\dfrac{n+2\sin(n+1)}{n\sqrt[3]{n}+2\sqrt[3]{n}}$ thì $|u_n|\le\dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n}(n+2)}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$

vì $\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$ nên $\lim u_n=0$.

b) Đặt $u_n=\dfrac{(-2)^n}{3^{3n}+4}$ thì $|u_n|=\left|\dfrac{(-2)^n}{3^{3n}+4}\right|\le\left|\dfrac{(-2)^n}{3^{3n}}\right|=\left(\dfrac{2}{27}\right)^n$.

Vì $0<\dfrac{2}{27}<1$ nên $\lim\left(\dfrac{2}{27}\right)^n=0$.

Theo nguyên lí kẹp, ta có $\lim u_n=0$.

Bài toán 8. 24: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2^n+5^{n+1}}{5^n}$ b) $\lim\dfrac{3.7^n-\cos(n+1)}{7^n}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\dfrac{2^n+5^{n+1}}{5^n}=\lim\left(\dfrac{2^n}{5^n}+5\right)=\lim\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+5\right)$

Vì $0<\dfrac{2}{5}<1$ nên $\lim(\dfrac{2}{5})^n=0$, do đó $\lim\dfrac{2^n+5^n}{5^n}=5$.

b) $\lim\dfrac{3.7^n-\cos(n+1)}{7^n}=\lim\left(3-\dfrac{\cos(n+1)}{7^n}\right)$

Ta có $\left|\dfrac{\cos(n+1)}{7^n}\right|\le\dfrac{1}{7^n}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

Vì $0<\dfrac{1}{7}<1$ nên $\lim(\dfrac{1}{7})^n<0$, do đó $\lim\dfrac{\cos(n+1)}{7^n}=0$.

Vậy $\lim\dfrac{3.7^n-\cos(n+1)}{7^n}=3$.

Bài toán 8. 25: Tính giới hạn của dãy số:

a) $u_n=\dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}$ b) $u_n=\dfrac{n}{3^n}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $u_n = \frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\ldots\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2} \le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ (n thừa số).

Do đó $|u_n| \le (\frac{2}{3})^n$ với mọi n.

Vì $0 < \frac{2}{3} < 1$ nên $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$, do đó $\lim u_n = 0$.

b) Ta chứng minh rằng $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$ với mọi n.

$u_n = \frac{n}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$, với mọi n

$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{2}{3}$

Ta có $u_n > 0, \forall n$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$ nên $u_{n+1} \le \frac{2}{3}.u_n$.

Do đó $u_n \le \frac{2}{3}.u_{n-1} \le (\frac{2}{3})^2.u_{n-2} \le \ldots \le (\frac{2}{3})^{n-1}.u_1$

Mà $u_n = \frac{1}{3}$ nên $u_n \le (\frac{2}{3})^{n-1}.\frac{1}{3} \le (\frac{2}{3})^n$.

Vì $0 < \frac{2}{3} < 1$ nên $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$. Ta có $\lim u_n = 0$.

Bài toán 8. 26: Cho số $\alpha \in (0; 2)$. Tính giới hạn của dãy (u_n):

$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1-\alpha)u_n$, $n = 0, 1, 2,\ldots$ theo các giá trị u_0, u_1.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_{n+1} - u_n = (\alpha-1)(u_n - u_{n-1}) = \ldots = (\alpha-1)^n(u_1 - u_0)$

Suy ra $u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=1}^{n+1}(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha-1)^k(u_1-u_0)$

$$= (u_1 - u_0)\sum_{k=0}^{n}(\alpha-1)^k = (u_1-u_0).\frac{1-(\alpha-1)^{n+1}}{1-(\alpha-1)}$$

Từ $\alpha \in (0; 2) \Rightarrow |\alpha - 1| < 1 \Rightarrow \lim[(\alpha-1)^n] = 0$

Do đó: $\lim(u_{n+1} - u_0) = \lim\left[(u_1-u_0).\frac{1-(\alpha-1)^{n+1}}{1-(\alpha-1)}\right] = \frac{u_1-u_0}{2-\alpha}$

Vậy $\lim u_n = \frac{u_1-u_0}{2-\alpha} + u_0 = \frac{(1-\alpha)u_0 + u_1}{2-\alpha}$.

Bài toán 8. 27: Tính giới hạn dãy:

a) $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$

b) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{2k-1}{2k} = \frac{2k-1}{\sqrt{4k^2}} \le \frac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}} = \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$

Áp dụng: $u_n \le \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdots \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Do đó $|u_n| \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, với mọi n.

Vì $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

b) Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, với $k = 1,2,\ldots,n$.

$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Vì $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ nên có $\lim u_n = 1$.

Bài toán 8. 28: Tính:

a) $\lim \frac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ b) $\lim \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh $\frac{3}{2}\sqrt{n} < (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} < \frac{3}{2}\sqrt{n+1}$

Áp dụng với $n = 1,2,\ldots,n$:

$\Rightarrow 1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} < \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\sqrt{k+1} - k\sqrt{k}\right]$

$= \frac{2}{3}\left[(n+1)\sqrt{n+1} - 1\right]$

và $1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} > \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[k\sqrt{k} - (k-1)\sqrt{k-1}\right] > \frac{2}{3}n\sqrt{n}$

Nên: $\frac{2}{3} < \frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} < \frac{2}{3}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}}$

Mà $\lim\frac{2}{3}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$ nên $\lim\frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$.

b) Ta chứng minh: $\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}$, với $x > 0$.

Thay x bởi $\frac{k}{n^2}$ và tính tổng hai vế từ 1 đến n, ta được:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) < \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

Ta có: $\lim\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \lim\frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}$;

Và: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$

$< \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4} = = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24n^4} \to 0$. Suy ra:

$$\lim\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} = \lim\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{1}{4}$$

Theo nguyên lí kẹp, ta có: $\lim\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{4}$.

Bài toán 8. 29: Cho (a_n) là một dãy vô hạn các số nguyên dương

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n^2 > a_{n-1}.a_{n+1} \quad ,n \ge 2 \end{cases}$$

Đặt $u_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+...+\frac{n}{a_n}\right)$. Tìm $\lim u_n$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh $a_n > n$ với mọi n nguyên dương, $n \ge 2$ bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $n \in \mathbf{N}^*$ sao cho $a_n \le n$.

Với mỗi $n \ge 2$ đặt $x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Theo giả thiết ta có $x_n > x_{n-1}$ với mọi $n \ge 2$. Vì $a_1 = 1$ nên $n \ge 1$. Gọi n là số nhỏ nhất có tính chất trên thì $a_{n-1} \ge n \ge a_n$.

Do đó $x_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \le 1$. Từ $1 \ge x_n > x_{n-1}$... suy ra rằng với mọi $i > n$ thì $x_i < 1$.

Từ đây suy ra $a_i = x_i a_{i-1} < a_{i-1}$ với mọi $i > n$ nên $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \dots$ Suy ra (a_n) không thể là một dãy số vô hạn các số nguyên dương. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Do đó $a_n > n$ với mọi $n \ge 2$, nên:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n} < 1 + 1 + 1 \dots + 1 = n.$$

Suy ra $|u_n| \le \dfrac{1}{n}$. Vì $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

Bài toán 8. 30: Cho số a> 1. Tính giới hạn của dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n},\ n \ge 1.$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp $u_n > 1$, với mọi n.

Và có $u_{n+1} - 1 = \sqrt{u_n} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{u_n} + 1}$

Vì $\sqrt{u_n} > 1$ nên $\sqrt{u_n} + 1 > 2$, do đó $u_n - 1 \le \dfrac{u_n - 1}{2}$

Do đó $u_n - 1 \le \dfrac{u_{n-1} - 1}{2} \le \dfrac{u_{n-2} - 2}{2^2} \le \dots \le \dfrac{u_1 - 1}{2^{n-1}} = \dfrac{a-1}{2^{n-1}}$

Suy ra $0 < u_n - 1 \le \dfrac{a-1}{2^{n-2}}$.

Vì $\lim \dfrac{a-1}{2^{n-2}} = 0$ nên $\lim(u_n - 1) = 0$. Vậy $\lim u_n = 1$.

Bài toán 8. 31: Tính giới hạn của dãy số (u_n):

$u_1 = \dfrac{1}{4},\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{u_n}{2},\ n \ge 1.$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp $0 < u_n \le \dfrac{1}{4}$.

Ta có $u_{n+1} = u_n(u_n + \dfrac{1}{2}) \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le u_n + \dfrac{1}{2}$

Vì $0 \le u_n \le \frac{1}{4}$, $\forall n$ nên $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Do đó với mọi n: $u_{n+1} \le \frac{3}{4} u_n$ nên:

$u_n \le \frac{3}{4} . u_{n-1} \le (\frac{3}{4})^2 . u_{n-2} \le ... \le (\frac{3}{4})^{n-1} . u_1$.

Mà $u_1 = \frac{1}{4} \le \frac{3}{4}$ nên $u_n \le (\frac{3}{4})^n$, $\forall n$.

Vì $0 < \frac{3}{4} < 1$ nên $\lim(\frac{3}{4})^n = 0$. Vậy $\lim u_n = 0$.

Bài toán 8. 32: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1}, \text{ với mọi } n \ge 2.$$

Chứng minh rằng với mọi số thực $a > \sqrt{5}$, ta đều có $\lim \frac{u_n}{a^n} = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - 4u_n + 5u_{n-1} = 0$.

Phương trình đặc trưng $x^2 - 4x + 5 = 0$, $\Delta' = -1 < 0$ nên có 2 nghiệm phức liên hiệp $x_{1,2} = 2 \pm i$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy đã cho là:

$$u_n = (\sqrt{5})^n \left(\frac{3}{5}\cos n\alpha - \frac{1}{5}\sin n\alpha\right), \forall n$$

Vì $\left|\frac{3}{5}\cos n\alpha - \frac{1}{5}\sin n\alpha\right| < 1$ nên $u_n < (\sqrt{5})^n$, $\forall n = 1,2,3,...$

Suy ra : $0 < \frac{u_n}{a^n} < \left(\frac{\sqrt{5}}{a}\right)^n$ nên $\lim \frac{u_n}{a^n} = 0$.

Bài toán 8. 33: Cho dãy (x_n) được xác định như sau:

$$x_1 = 3,\ x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4.$$

a) Chứng minh rằng (x_n) là một dãy không bị chặn trên.

b) Xét dãy (y_n): $y_n = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + ... + \frac{1}{x_n - 1}$. Tìm $\lim y_n$.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n \ge n + 2$.

Hiển nhiên bất đẳng thức đúng khi n = 1.

Giả sử bất đẳng thức với $n = k \ge 1$ thì:

$x_{k+1} = x_k(x_k - 3) + 4 \ge (k + 2)(k - 1) + 4 \ge k + 3$.

Vậy $x_n \geq n + 2$ khi n = 1, 2, 3, ... Do đó dãy không bị chặn trên.

b) Ta có $\frac{1}{x_{k+1}-2} = \frac{1}{(x_k-1)(x_k-2)} = \frac{1}{x_k-2} - \frac{1}{x_k-1}$

nên $\frac{1}{x_k-1} = \frac{1}{x_k-2} - \frac{1}{x_{k+1}-2}$

Cộng các đẳng thức trên, với k = 1, 2,..., n ta được:

$$y_n = \frac{1}{x_1-2} - \frac{1}{x_{n+1}-2} = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-2}$$

Vì $0 \leq \frac{1}{x_{n+1}-2} \leq \frac{1}{n}$ suy ra $\lim \frac{1}{x_{n+1}-2} = 0$. Vậy: $\lim y_n = 1$.

Bài toán 8.34: Chứng minh các dãy sau hội tụ:

a) $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

b) $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$

nên $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$: dãy tăng

Vì dãy số tăng nên bị chặn dưới bởi $m = u_1 = 1$

Ta có: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$

$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$= 2 - \frac{1}{n} < 2, \forall n \geq 1$: bị chặn trên.

Vậy dãy số tăng và bị chặn nên hội tụ.

b) Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}$. Do đó:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0 \text{: dãy giảm}$$

Vì dãy số giảm nên bị chặn trên bởi $u_1 = -1$.

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$, áp dụng:

$u_n = 2(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + ... + 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) - 2\sqrt{n}$

$= -2 + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = -2 + 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) > -2$.

Do đó dãy số bị chặn dưới. Vậy dãy số hội tụ.

Bài toán 8. 35: Cho a > 0. Chứng minh dãy hội tụ

$$u_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{...+\sqrt{a}}}} \text{ (n dấu căn).}$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh quy nạp: $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \geq 1$ (1)

Khi n = 1: $u_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} > \sqrt{a} = u_1$: đúng.

Giả sử $u_{k+1} > u_k \Rightarrow a + u_{k+1} > a + u_k$

$\Rightarrow \sqrt{a+u_{k+1}} > \sqrt{a+u_k} \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}$: đpcm.

Vậy dãy số u_n tăng.

Ta có $u_n > 0$ và từ (1) nên $\sqrt{a+u_n} > u_n$

$\Rightarrow a + u_n > u_n^2 \Rightarrow u_n^2 - u_n - a < 0$

$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2} < u_n < \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ nên dãy bị chặn.

Vậy dãy số tăng và bị chặn nên hội tụ.

Bài toán 8. 36: Chứng minh 2 dãy sau hội tụ:

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{n} < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\sqrt[n]{\dfrac{n+2}{n+1}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\dfrac{n+2}{n+1}} < \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho n số dương phân biệt:

$$\sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}} = \sqrt[n]{1.1...\frac{n+1}{n+2}} < \frac{1}{n}\left(1+1+...+1+\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$= \dfrac{n^2+2n-1}{n(n+2)} < \dfrac{n(n+2)}{n^2+2n+1}$. Vậy (u_n) là dãy tăng

Tương tự, ta chứng minh được $v_n < v_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

Vậy dãy (v_n) giảm

Ta có $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = u_n$

Do (u_n) là dãy tăng, (v_n) là dãy giảm nên $2 = u_1 \le u_n < v_n \le v_1 = 4$

nên các dãy số bị chặn.

Vậy dãy số (u_n) tăng và bị chặn nên hội tụ, dãy số (v_n) giảm và bị chặn nên hội tụ.

Bài toán 8. 37: Cho a, b dương và phân biệt. Xét 2 dãy (u_n), (v_n)

$$\begin{cases} u_1 = a, v_1 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n.v_n},\ n \ge 1 \end{cases}$$

Chứng minh 2 dãy hội tụ và có cùng giới hạn

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 = a > 0$, $v_1 = b > 0$ nên chứng minh quy nạp được với mọi n thì $u_n > 0$ và $v_n > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ge \sqrt{u_n.v_n} = v_{n+1},\ n \ge 1.$$

Suy ra với mọi $n \ge 2$ thì $u_n \ge v_n$.

Do đó $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \le \dfrac{u_n + u_n}{2} = u_n$, $n \ge 2$ nên dãy u_n giảm và

$v_{n+1} = \sqrt{u_n.v_n} \ge \sqrt{v_n.v_n} = v_n$, $n \ge 2$ nên dãy v_n tăng.

Hơn nữa $u_n \ge v_n$, $n \ge 2$ nên có được:

$$u_2 = \frac{a+b}{2} \ge u_n \ge v_n \ge v_2 = \sqrt{ab}$$

Vậy dãy u_n giảm và bị chặn dưới còn dãy v_n tăng và bị chặn nên cả 2 dãy đều có giới hạn hữu hạn: $\lim u_n = A$, $\lim v_n = B$.

Chuyển $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ qua giới hạn thì được:

$A = \dfrac{A+B}{2}$ nên $A = B$: đpcm.

Bài toán 8. 38: Tính giới hạn của dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1},\ n \ge 1.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n + 1}$

Ta chứng minh quy nạp $0 < u_n < 2$ nên dãy bị chặn.

Và $u_{n+1} - u_n = \left(2 - \frac{1}{u_n + 1}\right) - \left(2 - \frac{1}{u_{n-1} + 1}\right) = \frac{1}{u_{n-1} + 1} - \frac{1}{u_n + 1}$.

Ta chứng minh quy nạp dãy tăng:

Khi n = 1 thì $u_2 = \frac{3}{2} > u_1 = 1$: Đúng.

Giả sử $u_n > u_{n-1}$, từ các kết quả trên thì có $u_{n+1} > u_n$: đpcm.

Dãy u_n tăng và bị chặn nên có giới hạn hữu hạn.

Đặt $L = \lim u_n$ thì $0 \le L \le 2$ và $\lim u_{n+1} = L$.

Chuyển $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ qua giới hạn thì được:

$L = \frac{2L + 1}{L + 1} \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0$. Chọn $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 8. 39: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}, n = 1, 2, 3, ...$$

Đặt $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, n = 1, 2, 3,... Tính giới hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng:

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} - \frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - 2\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

Vì dãy (u_n) tăng và không có chặn trên nên $\lim u_n = +\infty$

Ta có dãy $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, n = 1,2,3, ... tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn

đặt giới hạn đó là L.Chuyển qua giới hạn suy ra:

$L^2 - 2L - 1 = 0 \Leftrightarrow L = 1 + \sqrt{2}$ hoặc $L = 1 - \sqrt{2}$.

Vì $u_n \ge 1$ nên chọn $L = 1 + \sqrt{2}$. Vậy $\lim x_n = 1 + \sqrt{2}$.

Bài toán 8. 40: Giả sử x_n thuộc khoảng (0; 1) là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + ... + \frac{1}{x-n} = 0.$$

Chứng minh dãy (x_n) hội tụ. Tìm giới hạn đó

Hướng dẫn giải

Ta thấy $0 < x_n < 1$ nên: $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \dfrac{1}{x_n - n - 1} = \dfrac{1}{x_n - n - 1} < 0$

Trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0; x_n)$ có ít nhất một nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Suy ra $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số (x_n) giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta chứng minh giới hạn nói trên bằng 0.

Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy (x_n) giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n.

Do $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \to +\infty$ khi $n \to +\infty$, nên tồn tại **N** sao cho với mọi $n \geq$ **N**

ta có: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{a}$

Khi đó với $n \geq$ **N** thì:

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \ldots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Mâu thuẫn. Vậy phải có $\lim x_n = 0$

Bài toán 8. 41: Cho số thực $a > 2$.

Đặt $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \ldots + x + 1$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Chứng minh rằng với mỗi n phương trình $f_n(x) = a$ có đúng một nghiệm $x_n \in (0; +\infty)$ và dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Hướng dẫn giải

Với mỗi n, đặt $g_n(x) = f_n(x) - a$; khi đó $g_n(x)$ là hàm liên tục, tăng trên $[0, +\infty)$. Ta có $g_n(0) = 1 - a < 0$; $g_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0$, nên $g_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n trên $(0; +\infty)$.

Để chứng minh tồn tại giới hạn $\lim x_n$, ta chứng minh dãy (x_n) tăng và bị chặn.

Ta có: $$g_n\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a^{10}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a}} - a$$

$$= a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}\left(a^9\left(1 - \frac{1}{a}\right)^9 - 1\right) = a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}.((a-1)^9 - 1) > 0$$

Suy ra: $x_n < 1 - \dfrac{1}{a}$, $n = 1, 2, \ldots$

Mặt khác, từ $g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \ldots + 1 - a = 0$, suy ra

$x_n g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + ... + x_n - ax_n = 0$

$\Rightarrow g_{n+1}(x_n) = x_n g_n(x_n) + 1 + ax_n - a = ax_n + 1 - a < 0$

Do $x_n < 1 - \frac{1}{a}$

Vì g_{n+1} là hàm tăng và $0 = g_{n+1}(x_{n+1}) > g_{n+1}(x_n)$ nên $x_n < x_{n+1}$.

Vậy dãy (x_n) (n = 1, 2,..) tăng và bị chặn, nên tồn tại $\lim x_n$.

Bài toán 8. 42: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi:

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0 \text{ và } a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}},\ n \geq 2.$$

Xét dãy số (M_n) với $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, 4\}$. Chứng minh rằng dãy số (M_n) hội tụ, suy ra giới hạn của dãy số (a_n) .

Hướng dẫn giải

Dãy số (M_n) với $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, 4\}$

Nếu $M_n = 4$ thì $a_n, a_{n+1} \leq 4$, suy ra $a_{n+2} \leq 4$. Từ đó $M_{n+1} = 4$

Nếu $M_n = a_{n+1}$ thì $a_{n+1} \geq a_n$, $a_{n+1} \geq 4$. Khi đó:

$$\sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1} - \sqrt{a_n} \geq a_{n+1} - \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}}$$

Suy ra $a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1}$

suy ra $M_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}, 4\} = a_{n+1} = M_n$

Nếu $M_n = a_n$ thì $a_n \geq a_{n+1}$, $a_n \geq 4$. Khi đó:

$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq 2\sqrt{a_n} \leq a_n$

Suy ra $M_{n+1} \leq a_n = M_n$

Vậy trong mọi trường hợp thì $M_{n+1} \leq M_n$, tức (M_n) là dãy số giảm và dãy (M_n) bị chặn dưới bởi 4 nên dãy này có giới hạn $M \geq 4$. Ta chứng minh giới hạn $M = 4$.

Thật vậy, giả sử giới hạn là $M > 4$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ thì $M - \varepsilon < M_n < M + \varepsilon$.

Chọn $n \geq N$ sao cho $M_{n+2} = a_{n+2}$.

Ta có: $M - \varepsilon < M_{n+2} = a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} < 2\sqrt{M + \varepsilon}$

$\Leftrightarrow M(M-4) - \varepsilon(2M + 4 - \varepsilon) < 0$

Mâu thuẫn vì $M > 4$ và ε có thể chọn nhỏ tuỳ ý

Do đó $\lim M_n = 4$ suy ra $\lim a_n = 4$.

Bài toán 8. 43: Cho dãy số (a_n) thoả mãn: $\lim a_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

Chứng minh $\lim \sqrt[3]{3n}.a_n = 1$

Hướng dẫn giải

Đặt $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

Ta có $\lim s_n.a_n = 1 \Rightarrow \lim a_n = 0$, $\lim s_n = +\infty$ và $\lim a_n s_{n-1} = 1$.

Do đó: $\lim\left(s_n^3 - s_{n-1}^3\right) = \lim a_n^2(s_n^2 + s_n s_{n-1} + s_{n-1}^2) = 3$

Theo định lí trung bình Cesaro, ta có: $\lim \frac{s_n^3}{n} = 3$

$$\Rightarrow \lim \frac{\sqrt[3]{n^2}}{s_n^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \text{ nên } \lim \frac{s_n^3}{n}.\frac{\sqrt[3]{n^2}}{s_n^2} = 3.\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$$

Do đó $\lim \sqrt[3]{3n}.a_n = \lim s_n.a_n = 1$.

Bài toán 8. 44: Cho dãy số (a_n) thoả mãn:

$a_1 \in (0; 1)$ và $a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $n = 1,2,3,\ldots$. Tính $\lim na_n$.

Hướng dẫn giải

Bằng quy nạp, ta chứng minh được: $a_n < \frac{1}{n+1}$, $\forall n$

Ta cũng có: $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 < 0$, $\forall n$, suy ra dãy (a_n) giảm, đồng thời nó bị chặn dưới nên có giới hạn L.

Chuyển qua giới hạn thì $L = L - L^2 \Rightarrow L = 0$.

Đặt $c_n = \frac{1}{a_n}$. Ta có:

$$\lim(c_{n+1} - c_n) = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n.a_{n+1}} = \lim \frac{a_n^2}{a_n^2(1-a_n)} = \lim \frac{1}{1-a_n} = 1$$

Theo định lí trung bình Cesaro, ta được:

$$\lim \frac{c_n}{n} = 1 \Rightarrow \lim n.a_n = 1.$$

Bài toán 8. 45: Cho dãy số (u_n) thoả mãn

$\lim(u_{2n} + u_{2n+1}) = A$ và $\lim(u_{2n} + u_{2n-1}) = B$.

Tính $\lim \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $a_n = u_{2n}$, $b_n = u_{2n+1}$, $n = 1,2,3,\ldots$ ta có:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{u_{2n+2} - u_{2n}}{u_{2n+3} - u_{2n+1}} = \frac{(u_{2n+2} + u_{2n+1}) - (u_{2n+1} + u_{2n})}{(u_{2n+3} + u_{2n+2}) - (u_{2n+2} + u_{2n+1})}$$

$$\Rightarrow \quad \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{(u_{2n+2} + u_{2n+1}) - (u_{2n+1} + u_{2n})}{(u_{2n+3} + u_{2n+2}) - (u_{2n+2} + u_{2n+1})}$$

$$= \frac{2B - 2A}{2A - 2B} = -1.$$

Theo định lí trung bình Cesaro, ta có $\lim \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}} = -1$.

Bài toán 8. 46: Tính giới hạn sau: $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Hướng dẫn giải

Đặt $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = \sqrt{n}$, $\forall n$

Ta có dãy y_n tăng thực sự và $\lim y_n = +\infty$

và $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2$

Theo định lí Stolz thì: $\lim \frac{x_n}{y_n} = 2$.

Vậy $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$.

Bài toán 8. 47: Cho a là số thực dương bất kì lớn hơn 1.

Tính $\lim \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right)$

Hướng dẫn giải

Đặt $x_n = a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}$, $y_n = \frac{a^{n+1}}{n}$, $\forall n$

Ta có: $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{na}{n+1} > 1$, với mọi $n > \frac{1}{a-1}$

tức là với n đủ lớn thì dãy (y_n) tăng. Hơn nữa

$$y_n = \frac{a^{n+1}}{n} > \frac{a^n}{n} = \frac{\left[1 + (a-1)\right]^n}{n} > \frac{C_n^2 (a-1)^2}{n} = \frac{(n-1)(a-1)^2}{2} \to +\infty$$

Ta có: $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^{n+2}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n}} = \frac{1}{a-1}$

Theo định lí Stolz thì $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{a-1}$.

Bài toán 8. 48: Với các số thực dương x_0, y_0, α, β ta xét hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$

$$: \begin{cases} x_{n+1} = \alpha y_n + \dfrac{\beta}{x_n} \\ y_{n+1} = \alpha x_n + \dfrac{\beta}{y_{n n}} \end{cases}, \quad n = 0,1,2,... \qquad (1)$$

Tìm điều kiện cần và đủ đối với α, β để ta có $x_n \to +\infty$ và $y_n \to +\infty$ với mọi $x_0, y_0 > 0$

Hướng dẫn giải

Cho $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$

Giả sử $0 < \alpha < 1$. Đặt $\dfrac{x_0}{y_0} = c$. Từ giả thiết (1) ta có: $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \dfrac{y_n}{x_n}$

Do vậy: $x_{2n+1} = \alpha y_{2n} + \dfrac{\beta}{x_{2n}} = \dfrac{\alpha}{c} x_{2n} + \dfrac{\beta}{x_{2n}}$

$$= \frac{\alpha}{c}(\alpha c x_{2n-1} + \frac{\beta}{x_{2n-1}}) + \frac{\beta}{\alpha c x_{2n-1} + \dfrac{\beta}{x_{2n-1}}}$$

$$= \alpha^2 x_{2n-1} + A_{2n-1} \qquad (2)$$

Trong đó: $A_{2n-1} \to 0$ khi $n \to \infty$ (do $x_n \to \infty$)

Từ (2), với n đủ lớn thì $x_{2n+1} \to 0$ (do $0 < \alpha < 1$), điều này mâu thuẫn với giả thiết dãy $x_n \to +\infty$. Vậy $\alpha \geq 1$.

Từ (1) ta có: $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 > \alpha^2(x_n^2 + y_n^2) + 2\alpha\beta$

Do đó $x \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ với mọi điều kiện ban đầu $x_0, y_0 > 0$

Vậy: $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ tuỳ ý.

Bài toán 8. 49: Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau:

$$x_1 = 1; x_n = \frac{-14x_{n-1} - 51}{5x_{n-1} + 18}, n \geq 2$$

Tính x_{2013} và tính $\lim x_n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u_n = x_n + 3$ thì $x_1 = 1; x_n = \dfrac{-14x_{n-1} - 51}{5x_{n-1} + 18}, n \geq 2$

suy ra $u_1 = 4;\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{5u_{n-1}+3}, n \geq 2$

Do đó $\dfrac{1}{u_n} = 5 + \dfrac{3}{u_{n-1}}, n \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{5}{2} = 3(\dfrac{1}{u_{n-1}} + \dfrac{5}{2}), n \geq 2$

Suy ra $\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{5}{2} = 3^{n-1}(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{5}{2}) \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{4}{11.3^{n-1} - 10}$

Nên $x_n = u_n - 3 = \dfrac{4}{11.3^{n-1} - 10} - 3$

Vậy $x_{2013} = \dfrac{4}{11.3^{2012} - 10} - 3$ và $\lim x_n = 0$

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 8. 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{n\sqrt{1+2+3+...+n}}{3n^2+n-2}$ b) $\lim \dfrac{1-2+3-4+...+(2n-1)-2n}{2n+1}$

Hướng dẫn

a) Dùng tổng 1 +2 +3+...+n = $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Kết quả $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

b) Dùng tổng 1 –2 +3 –4 +...+(2n–1)–2n = –1 –1– ...– 1 = –n.

Kết quả $-\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 8. 2: Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{\cos 3n}{\sqrt{n}+1}$. b) $u_n = \dfrac{\sin(n+3)}{n(n+3)}$

Hướng dẫn

a) Dùng định lý kẹp 0. Kết quả $\lim u_n = 0$.

b) Kết quả $\lim u_n = 0$

Bài tập 8. 3: Cho số tự nhiên $c \geq 3$. Tính giới hạn dãy số tự nhiên (a_n) như sau: $a_1 = c$, $a_n = a_{n-1}.\left[\dfrac{a_{n-1}}{2}\right] + 1$; n = 2, 3,...

Hướng dẫn

Dùng phương pháp qui nạp chứng minh dãy a_n giảm và bị chặn dưới bởi 3. Kết quả $\lim a_n = 3$.

Bài tập 8. 4: Chứng minh các dãy số sau không có giới hạn :

a) $u_n = \cos \dfrac{n}{2}\pi$ b) $v_n = \sin(n\pi + \dfrac{3\pi}{2})$

Hướng dẫn

a) Chọn 2 dãy của n mà u_n có giới hạn khác nhau, chẳng hạn :

$n = 4m$ và $n = 4m + 2$.

b) Chọn 2 dãy của n mà u_n có giới hạn khác nhau

Bài tập 8. 5: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{(5n+2)(2n^2+1)^4}{n^3(3n-1)^6}$ b) $\lim\dfrac{(n^5+n^4)(-3n-2)^{45}}{4n^3(n^2+9)^{23}}$

Hướng dẫn

a) Tử thức và mẫu thức cùng bậc 9. Kết quả $\dfrac{80}{729}$

b) Tử thức có bậc lớn hơn bậc mẫu thức. Kết quả $-\infty$

Bài tập 8. 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2})$ b) $\lim\dfrac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{1+n}-\sqrt[3]{n}}$

Hướng dẫn

a) Thêm bớt n. Kết quả 0

b) Nhân chia lượng liên hiệp cho tử và mẫu. Kết quả $+\infty$

Bài tập 8. 7: Cho dãy (U_n) : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2015}(U_n^2 - U_n), n \ge 1 \end{cases}$

Tính: $\lim\sum_{i=1}^{n}\dfrac{U_i}{U_{i+1}-1}$

Hướng dẫn

Dãy u_n tăng và không bị chặn trên nên $u_n \to +\infty$

Kết quả 2015

Bài tập 8. 8: Tính giới hạn của dãy:

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{2n^{2014}-n}}{1-3n^{2013}}$ b) $u_n = \dfrac{\sqrt{6n^7-n^5+n+1}}{3n^3-2n^2+1}$

Hướng dẫn

a) Tử thức có bậc bé hơn bậc mẫu thức. Kết quả 0

b) Kết quả $+\infty$

Bài tập 8. 9: Cho dãy số $\{u_n\}$ được định bởi:

$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1} \end{cases}$ $(n \in Z^+)$. Tính: $\lim\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Hướng dẫn

Chứng minh qui nạp $(u_{n+1})^2 - u_n \, . \, u_{n+2} = (-1)^n$

Kết quả $L = 1 + \sqrt{2}$

Bài tập 8. 10: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2^{n+2014} + 5.3^n - 2.5^n}{1 + 3^n + 4.5^n}$ b) $\lim \dfrac{5.2^n - 3^n}{2^{n+2014} + 3^{n+3} + 1}$

Hướng dẫn

a) Chia tử và mẫu cho a^n có cơ số lớn nhất là 5^n

b) Chia tử và mẫu cho a^n có cơ số lớn nhất là 3^n. Kết quả $\dfrac{1}{27}$.

Bài tập 8. 11: Tính giới hạn của dãy (u_n) xác định bởi:

a) $\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 2003 \\ 2^n.u_{n+1} = \left|2^n.u_n - 1\right| \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Dãy u_n giảm và bị chặn dưới nên $u_n \to L$. Kết quả $\lim u_n = 1$

b) Kết quả $\lim u_n = 2001$

Bài tập 8. 12: Chứng minh các dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó:

a) $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \ldots + \dfrac{n}{3^n}$ b) $u_n = \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1}$

Hướng dẫn

a) Xác định u_n nhờ hiệu số $u_n - 3u_n$. Kết quả $\dfrac{3}{4}$

b) Kết quả $\dfrac{1}{2}$

Chuyên đề 9: GIỚI HẠN HÀM SỐ VÀ LIÊN TỤC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Giới hạn của hàm số

- Giả sử (a; b) là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \neq x_0, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to L$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \neq x_0, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \neq x_0, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to -\infty$$

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \to +\infty \Rightarrow f(x_n) \to L$$

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(-\infty; b)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \to -\infty \Rightarrow f(x_n) \to L$$

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > x_0, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to L$$

Hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n < x_0, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to L$$

Các định lý về giới hạn

- Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$ ($A, B \in \mathbf{R}$).

Khi đó: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$; $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B$

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = AB$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (khi $B \neq 0$)

Định lý vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

– Hàm số lượng giác $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ suy ra dãy $\lim\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=0$.

Khử dạng vô định

– Nếu có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x\to x_0$ thì phân tích tử thức và mẫu thức ra thừa số $(x - x_0)$, hay nhân chia lượng liên hợp, biến đổi lượng giác về $\frac{\sin u}{u}, u\to 0$,...

– Nếu có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x\to +\infty$, $x\to -\infty$ thì chia tử thức và mẫu thức cho luỹ thừa cao nhất của x, hay nhân chia lượng liên hiệp để khử căn thức, ...

– Nếu có dạng vô định $\infty - \infty$, $0.\infty$ thì đặt nhân tử chung là luỹ thừa cao nhất của x, quy đồng phân số, nhân chia lượng liên hợp để khử căn,....chuyển qua dạng khác. Chú ý thêm bớt, chia tách, đặt ẩn phụ,...

Hàm số liên tục

– Giả sử hàm số f xác định trên khoảng (a; b) và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0.

Hàm f được gọi là liên tục bên phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

Hàm f được gọi là liên tục bên trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

Do đó hàm f liên tục tại $x_0 \in (a; b)$ nếu f liên tục bên phải và liên tục bên trái tại x_0.

– Hàm số f liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.Hàm số f xác định trên đoạn [a; b] được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó liên tục trên khoảng (a; b) và ,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

– Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

– Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng. Các hàm số lượng giác y = sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx liên tục trên tập xác định của chúng.

- Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] thì tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục

- Nếu f là một hàm liên tục trên [a,b] thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó trên đoạn đó.
- Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn [a; b]. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa f(a) và f(b), tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho f(c) = M.
- Hệ quả: Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và tích f(a) f(b) < 0 tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho f(c) = 0, tức là phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm x = c thuộc khoảng (a; b).

Ý nghĩa hình học: Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và có tích f(a).f(b) < 0 thì đồ thị của hàm số y = f(x) cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a; b)$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 9. 1: Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

Hướng dẫn giải

a) Với $x \neq -1$, ta có: $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1} = x-4$

Với mọi dãy số (x_n) trong $R \setminus \{-1\}$ sao cho $\lim x_n = -1$, ta có:

$\lim f(x_n) = \lim(x_n - 4) = -1 - 4 = -5$. Vậy $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1} = -5$.

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ xác định trên khoảng $(-\infty; 5)$

Với mọi dãy số (x_n) trong $(-\infty; 5) \setminus \{1\}$ sao cho $\lim x_n = 1$, ta có:

$\lim f(x_n) = \lim\dfrac{1}{\sqrt{5-x_n}} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{5-x}} = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 9. 2: Dùng định nghĩa, tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{7}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-5}{(x-5)^2}$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = x\sin\dfrac{7}{x}$. Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 0$, với mọi n và $\lim x_n = 0$

ta có $f(x_n) = x_n\sin\dfrac{7}{x_n}$ nên:

$$|f(x_n)| = \left|x_n \sin\frac{7}{x_n}\right| \le |x_n| \text{ và } \lim|x_n| = 0$$

Do đó $\lim f(x_n) = 0$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{7}{x}\right) = 0$.

b) Xét hàm số $f(x) = \frac{-5}{(x-5)^2}$. Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 5$ với mọi n và $\lim x_n = 5$ ta

có $f(x_n) = \frac{-5}{(x_n-5)^2}$. Vì $\lim(-3) = -3 < 0$, $\lim(x_n - 5)^2 = 0$ và $(x_n - 5)^2 > 0$ với mọi n

nên $\lim f(x_n) = -\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to 5}\frac{-5}{(x-5)^2} = -\infty$.

Bài toán 9. 3: Chứng minh các giới hạn sau không tồn tại:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos 2x$

Hướng dẫn giải

a) Lấy 2 dãy $x_n = n\pi$, $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ thì $\lim x_n = +\infty$, $\lim x'_n = +\infty$.

Đặt $f(x) = \sin x$ thì $\lim f(x_n) = \lim\sin(n\pi) = \lim 0 = 0$

$\lim f(x'_n) = \lim\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \lim 1 = 1$.

Vì $\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$

b) Lấy 2 dãy: $x_n = n\pi$, $x'_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$ thì: $\lim x_n = +\infty$, $\lim x'_n = +\infty$.

Đặt $f(x) = \cos 2x$ thì: $\lim f(x_n) = \lim\cos(2n\pi) = \lim 1 = 1$.

$\lim f(x'_n) = \lim\cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \lim 0 = 0$.

Vì $\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos 2x$.

Bài toán 9. 4: Có tồn tại không các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{4}{x}$

Hướng dẫn giải

a) Chọn 2 dãy: $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $x'_n = \dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}$ thì $\lim x_n = 0$, $\lim x'_n = 0$.

Đặt $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ thì: $\lim f(x_n) = \lim\cos(2n\pi) = \lim 1 = 1$.

$\lim f(x'_n) = \lim\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = \lim 0 = 0$.

Vì $\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

b) Chọn 2 dãy: $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{8} + n\pi}$ thì $\lim x_n = 0$, $\lim x'_n = 0$.

Đặt $f(x) = \sin\dfrac{4}{x}$ thì: $\lim f(x_n) = \lim\sin 4n\pi = \lim 0 = 0$.

$\lim f(x'_n) = \lim\sin(\dfrac{\pi}{2} + 4n\pi) = \lim 1 = 1$.

Vì $\lim f(x_n) \neq \lim f(x'_n)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{4}{x}$.

Bài toán 9. 5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}$

Hướng dẫn giải

a) Với $x > 0$, ta có: $\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{x^2+x-x^2}{x^2(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{x(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x})}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}) = 0$ và $x(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}) > 0$ với $x>0$

nên $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2} = +\infty$.

b) Với $x > 2$

$\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x} = \dfrac{\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)}}{x(x-2)} = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}.\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x} = \sqrt{3} > 0$ nên $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x} = +\infty$.

Bài toán 9. 6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$ b) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

Hướng dẫn giải

a) Với mọi $x > -1$, $\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2}$

Do đó: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = 0$.

b) Với $-3 < x < 3$, $\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{\sqrt{(3-x)(4-x)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}$

Do đó: $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Bài toán 9. 7: Cho $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 \text{ khi } x\le 2 \\ 4x^3-29 \text{ khi } x>2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

Hướng dẫn giải

Với $x \le 2$ thì $f(x) = x^2-2x+3$ nên

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} (x^2-2x+3) = 4-4+3 = 3$

Với $x > 2$ thì $f(x) = 4x^3-29$ nên

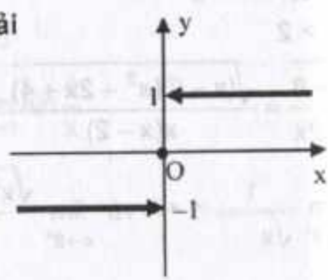
$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} (4x^3-29) = 32-29 = 3$

Vì $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 3$ nên $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 3$.

Bài toán 9. 8: Gọi d là hàm dấu: $d(x) = \begin{cases} -1 \text{ khi } x<0 \\ 0 \text{ khi } x=0 \\ 1 \text{ khi } x>0 \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to0^-} d(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} d(x)$ và $\lim\limits_{x\to0} d(x)$

Hướng dẫn giải



Với $x < 0$ ta có $d(x) = -1$,

do đó $\lim\limits_{x\to0^-} d(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (-1) = -1$

Với $x > 0$, ta có $d(x) = 1$,

do đó $\lim\limits_{x\to0^+} d(x) = \lim\limits_{x\to0^+} 1 = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^-} d(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} d(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} d(x)$.

Bài toán 9. 9: Ta gọi phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất và không vượt quá x, kí hiệu [x].

Tìm $\lim\limits_{x\to 2^-}[x]$, $\lim\limits_{x\to 2^+}[x]$ và $\lim\limits_{x\to 2}[x]$

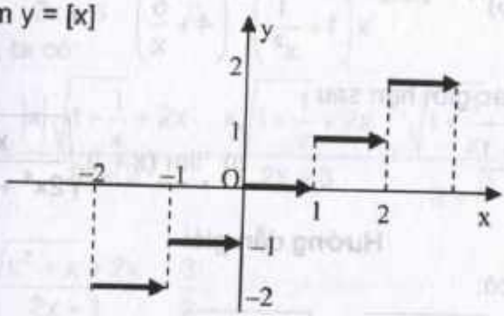
Hướng dẫn giải

Với $1 < x < 2$ thì $[x] = 1$ nên $\lim\limits_{x\to 2^-}[x] = 1$

Với $2 < x < 3$ thì $[x] = 2$ nên $\lim\limits_{x\to 2^+}[x] = 2$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}[x] \neq \lim\limits_{x\to 2^+}[x]$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}[x]$.

Chú ý: Đồ thị hàm $y = [x]$



Bài toán 9. 10: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 10}{7 - 3x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\dfrac{2x^2 + x - 10}{7 - 3x^3} = \dfrac{2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{10}{x^2}}{\dfrac{7}{x^2} - 3x}$, với $x \neq 0$.

nên $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 10}{7 - 3x^3} = 0$.

b) Ta có $\dfrac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^4}}{2x^2 - \dfrac{7}{x^4}}$, với $x \neq 0$.

nên $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7} = 0$.

Bài toán 9. 11: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2(2x+1)^3}{(2x^3+1)(x-2)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+3)^5(x^2-2)^7}{(x^2+1)^3(4x+5)^{14}}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2(2x+1)^3}{(2x^3+1)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\cdot\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2}=4$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+3)^5(x^2-2)^7}{(x^2+1)^3(4x+5)^{14}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)^5\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)^7}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^3\cdot\left(4+\dfrac{5}{x}\right)^{14}}=0$

Bài toán 9. 12: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+1}}{3|x|-7}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}$

Hướng dẫn giải

a) Với mọi $x\neq 0$, ta có:

$$\frac{\sqrt{2x^2-7x+1}}{3|x|-7}=\frac{|x|\sqrt{2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}}{|x|\left(3-\frac{7}{|x|}\right)}=\frac{\sqrt{2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{7}{|x|}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+1}}{3|x|-7}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

b) Với $x>0$, ta có:

$$(x+1)\sqrt{\frac{x^3}{2x^4+x^2+1}}=\sqrt{\frac{x^3(x+1)^2}{2x^4+x^2+1}}=\sqrt{\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}=+\infty$

Bài toán 9. 13: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+1}$

Hướng dẫn giải

a) Với mọi $x\le -1$, $x\ne -\dfrac{3}{2}$, ta có:

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x}{2x+3}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x}{2x+3}=\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2}{2+\frac{3}{x}}$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}=\dfrac{1}{2}$.

b) Với mọi $x>0$, ta có:

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x}{2x+3}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x}{2x+3}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2}{2+\frac{3}{x}}$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$.

Bài toán 9. 14: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+5}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-5}{x^2-x+2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{8-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\dfrac{1}{8}$

nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+5}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-5}{x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$.

Bài toán 9. 15: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)(x^3+x-2)}$

Hướng dẫn giải

a) Dạng $\frac{0}{0}$, ta có

$$\frac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\frac{(x+\sqrt{3})(x^2-x\sqrt{3}+3)}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}=\frac{x^2-x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-x}$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\frac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\frac{9}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)(x^3+x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(4x^4-x^3-x^2-x-1)}{(x-1)(x^3+x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^4-x^3-x^2-x-1}{x^3+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(4x^3+3x^2+2x+1)}{(x-1)(x^2+x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^3+3x^2+2x+1}{x^2+x+2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

Bài toán 9. 16: Tìm các giới hạn sau với m,n nguyên dương:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x^2-1}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}:\frac{x^m-1}{x-1}\right)$.

Với $x\neq1$, ta có:

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$$

nên $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=1+1+...+1+1=n$ (có n số 1).

Áp dụng thì: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}:\frac{x^m-1}{x-1}\right)=\frac{n}{m}$.

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{x^3-1}{x^2-1}+...+\frac{x^n-1}{x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}+...+\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+1}{x+1}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + ... + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

Bài toán 9. 17: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+2x)...(1+nx) - 1}{x}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = \frac{x^{n+1} - 1 - (n+1)x + n + 1}{(x-1)^2}$

$= \frac{(x-1)(x^n + x^{n-1} + ... + x - n)}{(x-1)^2} = \frac{x^n - 1 + x^{n-1} - 1 + ... + x - 1}{x-1}$

$= (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) + (x^{n-2} + x^{n-1} + ... + 1) + ... + (x+1) + 1$

Do đó: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} = n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Ta có $(1+x)(1+2x)...(1+nx) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}x + f(x).x^2$, nên

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+2x)...(1+nx) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{n(n+1)}{2}x + f(x).x^2 - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{n(n+1)}{2}x + f(x).x^2}{x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{n(n+1)}{2} + f(x).x\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bài toán 9. 18: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{x-1}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x})}{(2x-4)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}{-2(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$.

b) Đặt $t = x^6$, khi $x \to 1$ thì $t \to 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{t^4 - 2t^3 + 1}{t^6 - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(t-1)(t^3 - t^2 - t - 1)}{(t-1)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{t^3 - t^2 - t - 1}{t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Bài toán 9. 19: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}$

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

$=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\dfrac{2}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+1)}+\dfrac{x-2}{x+1}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{2}=0$.

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x^2-4x+3}+\dfrac{x^2-x}{x^2-4x+3}$

$=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{1}{(x-3)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}+\dfrac{x}{x-3}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{-6}+\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{2}{3}$.

Bài toán 9. 20: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}+\sqrt{3+x}-4}{x^3-1}$

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\dfrac{\sqrt{1+4x}\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

$=\sqrt[3]{1+x}.\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

$=\sqrt[3]{1+x}.\dfrac{4}{\sqrt{1+4x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\dfrac{4}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$.

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{7+x}+\sqrt{3+x}-4}{x^3-1}=\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x^3-1}+\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^3-1}$.

Ta có: $\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x^3-1}=\dfrac{x-1}{(x^3-1)\left[\sqrt[3]{(7+x)^2}+\sqrt[3]{7+x}+4\right]}$

$=\dfrac{1}{(x^2+x+1)\left[\sqrt[3]{(7+x)^2}+\sqrt[3]{7+x}+4\right]}$

$\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^3-1}=\dfrac{x-1}{(x^3-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\dfrac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{3+x}+2)}$

nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{3.12}+\dfrac{1}{3.4}=\dfrac{1}{9}$.

Bài toán 9. 21: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt[3]{x}}{x-8}$ b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt[3]{x}}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x-4}-2+2-\sqrt[3]{x}}{x-8}$

$=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(\sqrt{x-4}-2)(\sqrt{x-4}+2)}{(x-8)(\sqrt{x-4}+2)}+\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x-8)(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3+3-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=B$

Ta có $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{7-x}{(x-7)(9+3\sqrt[3]{x+20}+\sqrt[3]{x+20})^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-1}{9+3\sqrt[3]{x+20}+\sqrt[3]{(x+20)^3}}=\dfrac{-1}{27}$

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{(x-7)((\sqrt[4]{x+9})^3+2(\sqrt[4]{x+9})^2+4(\sqrt[4]{x+9})^3+8)}$

$=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x+9)^3}+2\sqrt[4]{(x+9)^2}+4\sqrt[4]{(x+9)^3}+8}=\dfrac{1}{32}$

Do đó : $B = \frac{112}{27}$.

Bài toán 9. 22: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2})$ b) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{2018}{1-x^{2018}}-\frac{2017}{1-x^{2017}}\right]$

Hướng dẫn giải

Dạng vô định $\infty-\infty$

a) Với mọi $x<-1$, ta có:

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2}=\frac{x-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4+x^2}}=\frac{x-4}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{x-4}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2})=\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}$.

b) Ta có $\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}=\frac{n-(1+x+x^2+...+x^{n-1})}{1-x^n}$

$$=\frac{1-x}{1-x^n}+\frac{1-x^2}{1-x^n}+...+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^n}$$

$$=\frac{1}{1+x+...+x^{n-1}}+\frac{1+x}{1+x+...+x^{n-1}}+...+\frac{1+x+...+x^{n-2}}{1+x+...+x^{n-1}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1+2+...+(n-1)}{n}=\frac{(n-1)n}{2n}=\frac{n-1}{2}$.

Áp dụng vào bài toán:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2018}{1-x^{2018}}-\frac{2017}{1-x^{2017}}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{2018}{1-x^{2018}}-\frac{1}{1-x}\right)-\lim_{x\to1}\left(\frac{2017}{1-x^{2017}}-\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{2018-1}{2}-\frac{2017-1}{2}=\frac{1}{2}$$

Bài toán 9. 23: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\frac{3x}{x^2-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{7}{(x-2)^2}.\sqrt{\frac{x+4}{4-x}}$

Hướng dẫn giải

Dạng vô định $0.\infty$

a) Với $-1 < x < 0$, ta có:

$$(x^3+1)\sqrt{\frac{3x}{x^2-1}} = (x+1)(x^2-x+1)\sqrt{\frac{3x}{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{x+1}(x^2-x+1)\sqrt{\frac{3x}{x-1}}$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}} = 0.$

b) Vì $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7}{(x-2)^2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} = \sqrt{3} > 0$, nên

$$\lim_{x\to 2}\frac{7}{(x-2)^2}.\sqrt{\frac{x+4}{4-x}} = +\infty.$$

Bài toán 9. 24: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1975}{(x-1)(x^2-3x+2)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x^n}\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+4}}$

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{1975}{(x-1)(x^2-3x+2)} = \dfrac{1}{(x-1)^2}.\dfrac{1975}{x-2}$

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1975}{x-2} = -1975 < 0$ nên

$$\lim_{x\to 1}\frac{1975}{(x-1)(x^2-3x+2)} = -\infty$$

b) Với $x < 1$, ta có:

$$\frac{1}{1-x^n}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+4}} = \frac{1}{(1-x)(1+x+...+x^{n-1})}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+3x+4}}$$

$$= \frac{1}{1+x+...+x^{n-1}}\sqrt{\frac{x-2}{(x-1)(x^2+3x+4)}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x^n}\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+4}} = +\infty.$

Bài toán 9. 25: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x.\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

Bài toán 9. 26: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

Hướng dẫn giải

a) $1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x = 1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x.\cos 3x)$
$= 1-\cos x+\cos x\,[1-\cos 2x+\cos 2x(1-\cos 3x)]$
$= 1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x\,(1-\cos 3x)$

Và $\dfrac{1-\cos kx}{1-\cos x}=\dfrac{2\sin^2\frac{kx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{\sin\frac{kx}{2}}{\frac{kx}{2}}\right)^2.\left(\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.k^2$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\cos x.\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}+\cos x.\cos 2x.\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos x}\right)$

$= 1+1.4+1.9=14$

b) $\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a$

$=-\dfrac{1}{2}[\cos(2a+3x)-\cos x]-\dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

$=-\dfrac{1}{2}[\cos(2a+3x)-\cos 2a]-\dfrac{1}{2}[1-\cos x]$

$=\sin(2a+\dfrac{3}{2}x)\sin\dfrac{3x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}\sin\left(2a+\dfrac{3}{2}x\right).\left(\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\dfrac{3}{2}\sin 2a$

Bài toán 9. 27: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=\dfrac{-2x^2}{2\sin^2 x(1+\sqrt{2x^2+1})}=-\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2.\dfrac{1}{1+\sqrt{2x^2+1}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=-1\,.\,\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}$

$=\left(\dfrac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{-2}{2}+1\right):\dfrac{-1}{4}=0$.

Bài toán 9. 28: Tính các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x.\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{2\cos x-1}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t=\dfrac{\pi}{4}-x$ thì $x=\dfrac{\pi}{4}-t$, $x\to\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow t\to 0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x.\tan(\dfrac{\pi}{4}-x)=\lim\limits_{t\to 0}\tan(\dfrac{\pi}{2}-2t).\tan t=\lim\limits_{t\to 0}\cot 2t\,.\,\tan t$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos 2t}{\sin 2t}.\dfrac{\sin t}{\cos t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos 2t}{2\cos^2 t}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{2\cos x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}{\cos x-\cos\frac{\pi}{3}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right).\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{-2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right).\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{-\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 9. 29: Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^3-8}\sin(x^2-4)$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = 1 - x$ thì $x = t - 1$, $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{t\to 0} t.\tan\frac{\pi(t-1)}{2} = -\lim_{t\to 0} t.\cot\frac{\pi t}{2}$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{2}{\pi}.\cos\frac{\pi t}{2}.\left(\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^3-8}\sin(x^2-4) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}.\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}.\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}.$

Bài toán 9. 30: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2+a & \text{khi } 1 \le x \le 9 \\ \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3} & \text{khi } x > 9 \end{cases}$

Tùy theo tham a xét sự tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Hướng dẫn giải

Với $1 \le x \le 3$ thì $f(x) = x + 2 + a$ nên:

$$\lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^-}(x+2+a) = 5 + a$$

Với $x > 9$ thì $f(x) = \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x}-3}$

$= \dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x+9)}{\sqrt{x}-3} = (\sqrt{x}+3)(x+9)$

nên $\lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+}(\sqrt{x}+3)(x+9) = 12(\sqrt{3}+3)$

Ta có $5 + a = 12(\sqrt{3}+3) \Leftrightarrow a = 12(\sqrt{3}+3) - 5$, do đó

khi $a = 12(\sqrt{3}+3) - 5$ thì $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = 12(\sqrt{3}+3)$, và

khi $a \ne 12(\sqrt{3}+3) - 5$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$.

Bài toán 9. 31: Chứng minh các hàm số sau liên tục trên R.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 7x - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số f xác định trên R.

Với $x \neq 2$ thì $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2}$ liên tục

Với $x = 2$ thì $f(2) = \dfrac{1}{3}$ và $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x - 8}{(x - 2)\left[\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4\right]} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4}{\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4}$

$= \dfrac{1}{3} = f(2)$ nên f liên tục tại x = 2. Vậy hàm số liên tục trên R.

b) Hàm số xác định trên R.

Với $x > 1$ thì $g(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x - 1}$ liên tục

Với $x < 1$ thì $g(x) = 7x - 3$ liên tục

Với $x = 1$ thì $g(1) = 4$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (7x - 3) = 4$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3 + x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + x + 2) = 4 = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

nên $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4 = g(1)$: liên tục. Vậy hàm số g liên tục trên R.

Bài toán 9. 32: Chứng minh các hàm số sau liên tục trên tập xác định.

a) $f(x) = \sqrt{x + 8}$ b) $g(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số f xác định khi $x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -8$. $D = [-8; +\infty)$

Với mọi $x_o \in (-8; +\infty)$: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} \sqrt{x + 8} = \sqrt{x_o + 8} = f(x_o)$

Do đó f liên tục trên khoảng $(-8; +\infty)$

Và $\lim\limits_{x \to (-8)^+} f(x) = \sqrt{-8 + 8} = 0 = f(-8)$. Vậy f liên tục trên D.

b) Hàm số $g(x)=\sqrt{8-2x^2}$ xác định trên $D=[-2;2]$

Với mọi $x_o \in (-2;2)$ ta có: $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\sqrt{8-2x_o^2}=f(x_o)$

Do đó hàm số f liên tục trên khoảng $(-2;2)$

Và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} g(x)=\sqrt{8-2(-2)^2}=0=g(-2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\sqrt{8-2.2^2}=0=g(2)$. Vậy hàm số f liên tục trên D.

Bài toán 9. 33: Tìm các giá trị của tham số để hàm số liên tục tại x = 2.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & \text{khi } x<2\\ mx+m+1 & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-a}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } x\ne 2\\ x^2-3bx & \text{khi } x=2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có f(2) = 2m + m + 1 = 3m + 1

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2m+m+1=3m+1=f(2)$ và

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-1))(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

Hàm số f liên tục tại điểm x = 2 khi $3m+1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$.

b) Ta có g(2) = 4 − 6b.

Khi $x\to 2$ thì $\sqrt{x+7}-3\to 0; \sqrt{x+2}-a\to 2-a$.

Giả sử $a\ne 2$ thì giới hạn không hữu hạn: loại nên a = 2.

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Vậy hàm số liên tục tại x = 2 khi và chỉ khi:

$$a=2; \lim_{x\to 2} g(x)=g(2)\Leftrightarrow a=2; 4-6b=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=2; b=\frac{5}{12}.$$

Bài toán 9. 34: Tuỳ theo tham số, xét sự liên tục của hàm số:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} & \text{khi } x>1\\ ax+b & \text{khi } -3\le x\le 1\\ \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-9} & \text{khi } x<-3\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định D = **R**. Với x > 1 thì $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ liên tục

Với –3 < x < 1 thì f(x) = ax + b liên tục

Với x < –3 thì $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-9}$ liên tục

Với x = 1 thì f(1) = a + b

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

Với x = –3 thì f(–3) = –3a + b

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = \lim_{x\to(-3)^+}(ax+b) = -3a+b = f(-3)$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-}\frac{x^2+4x+3}{x^2-9} = \lim_{x\to(-3)^-}\frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to(-3)^-}\frac{x+1}{x-3} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Vậy: $a+b = \dfrac{3}{2}$; $-3a+b \neq \dfrac{1}{3}$ thì f gián đoạn tại x = –3

$a+b \neq \dfrac{3}{2}$; $-3a+b = \dfrac{1}{3}$ thì f gián đoạn tại x = 1

$a+b \neq \dfrac{3}{2}$; $-3a+b \neq \dfrac{1}{3}$ thì f gián đoạn tại x = –3, x = 1

$a+b = \dfrac{3}{2}$; $-3a+b = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{27}{4}, b = \dfrac{29}{24}$ thì f liên tục trên **R**.

Bài toán 9. 35: Chứng minh phương trình

a) $x^7 + 6x^6 - x^4 + 2x + 123 = 0$ có nghiệm

b) $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$ có 2 nghiệm.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $f(x) = x^7 + 6x^6 - x^4 + 2x + 123$ thì f liên tục trên R

Ta có f(0) = 123, f(–6) = – 1296 nên f(–6).f(0) <0 : đpcm.

b) Đặt $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$ thì f liên tục trên R

Ta có f(0) = –20

Mặt khác : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_1 < 0$ để $f(x_1) > 0$

và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_2 > 0$ để $f(x_2) > 0$

do đó $f(0).f(x_1) < 0$ và $f(0) . f(x_2) < 0$

nên $\exists\ x_0 \in (x_1; 0)$ và $x'_0 \in (0; x_2)$ để $f(x_0) = 0$ và $f(x'_0) = 0$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Bài toán 9. 36: Chứng minh phương trình

a) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

b) $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ thì f liên tục trên **R**

Ta có $f(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = 5$, $f(-2) = -3$

$\Rightarrow f(-2).f(0) < 0$; $f(0).f(1) < 0$; $f(1).f(2) < 0$

Vậy phương trình có 3 nghiệm trên các khoảng $(-2; 0)$; $(0; 1)$ và $(1; 2)$

b) Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - 1$, khi đó f(x) liên tục trên **R**

$f(-2) = -1$, $f(-\frac{3}{2}) = \frac{73}{32}$, $f(0) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{13}{32}$, $f(1) = -1$, $f(3) = 119$ do đó

$f(-2).f(-\frac{3}{2})<0$; $f(-\frac{3}{2}).f(0) <0$; $f(0).f(\frac{1}{2}) <0$; $f(\frac{1}{2}).f(1) <0$; $f(1).f(3) = -119 < 0$

nên phương trình có 5 nghiệm phân biệt thuộc 5 khoảng rời nhau: $(-2; -\frac{3}{2})$,

$(-\frac{3}{2}; 0)$, $(0; \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}; 1)$ và $(1; 3)$.

Bài toán 9. 37: Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi tham số trong các trường hợp:

a) $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0, m > 0$ b) $5a + 4b + 6c = 0$

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = ax^2 + bx + c$, khi đó f(x) liên tục trên **R.** Ta có $f(0) = c$

nên $f(\frac{m+1}{m+2}) = \frac{-c}{m(m+2)}$ do đó $f(0).f(\frac{m+1}{m+2}) = \frac{-c^2}{m(m+2)} < 0$, $m > 0$

Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi tham số a,b,c,m.

b) Xét $f(x) = ax^2 + bx + c$, khi đó f(x) liên tục trên **R**

Ta có $f(0) = c$, $f(2) = 4a + 2b + c$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$

nên $f(0) + 4.f(\frac{1}{2}) + f(2) = 5a + 4b + 6c = 0$

$\Rightarrow f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(2)$ phải có ít nhất 2 số trái dấu.

do đó tồn tại 2 giá trị $p, q \in \left\{0; \frac{1}{2}; 2\right\}$ thoả $f(p).f(q) \le 0$

nên phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi tham số a,b,c.

Bài toán 9. 38: Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm:

a) đa thức bậc lẻ

b) đa thức $f(x)$ bậc chẵn có ít nhất 2 nghiệm khi $f(1) + f(3) + f(5) = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đa thức bậc lẻ có dạng

$a_0x^{2m+1} + a_1x^{2m} + \ldots + a_{2m}x + a_{2m+1} = 0$, $a_0 \neq 0$, m là số tự nhiên.

$\Leftrightarrow x^{2m+1} + b_1x^{2m} + \ldots + b_{2m}x + b_{2m+1} = 0$.

Xét hàm số $P(x) = x^{2m+1} + b_1x^{2m} + \ldots + b_{2m}x + b_{2m+1}$, khi đó hàm đa thức $P(x)$ xác định và liên tục trên **R**.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ nên tồn tại $a < 0$ để $P(a) < 0$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ nên tồn tại $b > 0$ để $P(b) > 0$

Do đó ta luôn có $P(a) . P(b) < 0$ nên phương trình bậc lẻ $P(x) = 0$ luôn luôn có ít nhất 1 nghiệm.

Kết quả: phương trình bậc 3 luôn luôn có nghiệm.

b) Vì f là hàm đa thức bậc chẵn nên liên tục trên **R**.

nên $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ nếu $a_0 > 0$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ nếu $a_0 < 0$

Theo giả thiết $f(1) + f(3) + f(5) = 0$.

Nếu tất cả giá trị $f(1) = f(3) = f(5) = 0$ thì phương trình có 3 nghiệm, nếu trái lại, thì trong 3 giá trị $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$ phải có 2 giá trị dương và 1 giá trị âm hoặc ngược lại.

Do đó có 2 khoảng (a, b) và (b,c) để $f(a).f(b) < 0$ và $f(b).f(c) < 0$. Vậy f có ít nhất 2 nghiệm.

Bài toán 9. 39: Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $\frac{1}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = m$

b) $a.\sin 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0$

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} - m$, khi đó $f(x)$ liên tục trên $(\frac{\pi}{2}; \pi)$.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists a \in (\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \varepsilon), (\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \varepsilon) \subset (\frac{\pi}{2}; \pi), f(a) < 0$

$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists b \in (\pi - \varepsilon'; \pi), (\pi - \varepsilon'; \pi) \subset (\frac{\pi}{2}; \pi) f(b) > 0$

do đó f(a).f(b) < 0 với mọi m:đpcm.

b) Xét hàm số $f(x) = a.\sin 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x$, khi đó f(x) liên tục trên

R. Ta có $f(0) = b + c$, $f(\frac{\pi}{2}) = -a - b + 1$

$f(\pi) = b - c$, $f(\frac{3\pi}{2}) = a - b - 1$

nên $f(0) + f(\frac{\pi}{2}) + f(\pi) + f(\frac{3\pi}{2}) = 0$ với mọi a,b,c

do đó tồn tại 2 giá trị $p, q \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}$ thoả $f(p).f(q) \le 0$

nên phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi tham số a,b,c.

Bài toán 9. 40: Chứng minh phương trình:

a) $ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a) = 0$ luôn có nghiệm

b) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ và thoả $x_3^2 = 2 + x_2$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $f(x) = ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ac(x-a)(x-c)$ thì f liên tục trên D= R.

Ta có: $f(a) = bc(a-b)(a-c)$, $f(b) = ac(b-a)(b-c)$, $f(c) = ab(c-a)(c-b)$

nên $f(a).f(b).f(c) = -a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \le 0$

Do đó trong 3 giá trị f(a), f(b), f(c) có một giá trị không dương, giả sử là f(a)

Mà $f(0) = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge 0$ nên $f(a) \cdot f(0) \le 0$ và f liên tục trên R. Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi a, b, c

b) Ta có $f(x) = x^3 - 3x + 1$, liên tục trên R

và $f(-2) < 0$, $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$

Suy ra phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thoả

$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2$

Do đó 3 nghiệm của phương trình đều thoả $|x_i| < 2$.

Đặt $x = 2.\cos\alpha$, $0 \le \alpha \le 180^0$ thì: $x^3 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3\alpha = -1 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = -\frac{1}{2}$

Với: $\alpha \in [0^0, 180^0]$ thì có 3 góc thoả mãn là:

$\alpha_1 = 40^0$, $\alpha_2 = 80^0$, $\alpha_3 = 160^0$.

Vậy $x_1 = 2.\cos 160^0$, $x_2 = 2.\cos 80^0$, $x_3 = 2.\cos 40^0$ và

$x_3^2 = 4\cos^2 40^0 = 2(1 + \cos 80^0) = 2 + 2.\cos 80^0 = 2 + x_2$.

Bài toán 9. 41: Cho a,b,c,d là các số thực. Chứng minh nếu phương trình $ax^2 + (b + c)x + d + e = 0$ có nghiệm thực thuộc $[1; +\infty)$ thì phương trình: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ cũng có nghiệm thực.

Hướng dẫn giải

Gọi x_0 thuộc $[1;+\infty)$ là nghiệm thực của phương trình cho thì

$ax_0^2 + (b+c)x_0 + d + e = 0$ hay: $ax_0^2 + cx_0 + e = -(bx_0 + d)$

Xét hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, khi đó thì f liên tục trên **R**.

Ta có $f(\sqrt{x_0}) = (ax_0^2 + cx_0 + e) + \sqrt{x_0}(bx_0 + d)$

$$f(-\sqrt{x_0}) = (ax_0^2 + cx_0 + e) - \sqrt{x_0}(bx_0 + d)$$

Suy ra $f(\sqrt{x_0}).f(-\sqrt{x_0}) = (ax_0^2 + cx_0 + e)^2 - x_0(bx_0 + d)^2$

$$= (ax_0^2 + cx_0 + e)^2 - x_0(ax_0^2 + cx_0 + e)^2$$

$$= (ax_0^2 + cx_0 + e)^2(1 - x_0) \le 0$$

Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\sqrt{x_0}; \sqrt{x_0}\right]$.

Vậy phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ có nghiệm thực.

Bài toán 9. 42: Cho 2 hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên **R** và thoả mãn $f[g(x)] = g[f(x)]$. Chứng minh nếu phương trình : $f(x) = g(x)$ vô nghiệm thì phương trình $f[f(x)] = g[g(x)]$ cũng vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

Vì phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm và $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên **R** nên có 2 khả năng xảy ra, hoặc

$$f(x) - g(x) > 0, \forall x \Rightarrow f(x) > g(x), \forall x$$

$$\Rightarrow f(f(x)) > g(f(x)) = f(g(x)) > g(g(x)), \forall x$$

do đó phương trình $f[f(x)] = g[g(x)]$ vô nghiệm, hoặc

$$f(x) - g(x) < 0, \forall x \Rightarrow f(x) < g(x), \forall x$$

$$\Rightarrow f(f(x)) < g(f(x)) = f(g(x)) < g(g(x)), \forall x$$

do đó phương trình $f[f(x)] = g[g(x)]$ vô nghiệm

Vậy trong cả 2 trường hợp thì phương trình vô nghiệm.

Bài toán 9. 43: Cho phương trình $x^{12} + 1 = 4x^4\sqrt{x^n - 1}$.

Tìm số n nguyên dương bé nhất để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Ta có điều kiện $x^n - 1 > 0$. Nếu n lẻ thì $x > 1$, còn nếu n chẵn, khi phương trình có nghiệm thì phải có nghiệm $x > 1$. Do đó ta chỉ cần xét $x > 1$. Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$$x^{12} + 1 = (x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) = (x^4 + 1)(x^4(x^4 - 1) + 1)$$

$$> 2x^2.2x^2.\sqrt{x^4 - 1} = 4x^4.\sqrt{x^4 - 1}$$

$$> 4x^4.\sqrt{x^3 - 1} > 4x^4.\sqrt{x^2 - 1} > 4x^4.\sqrt{x - 1}$$

do đó phương trình không có nghiệm khi n = 1,2,3,4.

Xét n = 5, phương trình trở thành $x^{12} + 1 = 4x^4\sqrt{x^5 - 1}$

Đặt $f(x) = x^{12} + 1 - 4x^4\sqrt{x^5 - 1}$, khi đó f(x) liên tục trên $(1;+\infty)$

Ta có f(1) = 2 > 0, $f(\frac{6}{5}) = (\frac{6}{5})^{12} + 1 - 4(\frac{6}{5})^4.\sqrt{(\frac{6}{5})^5 - 1} < 0$

nên f(x) có nghiệm x > 1.

Vậy giá trị n nguyên dương bé nhất cần tìm là n =5.

Bài toán 9. 44: Cho 2 hàm số liên tục f,g: $[a;b] \to [a;b]$ và thoả mãn các điều kiện: (1) f[g(x)]=g[f(x)] và (2) hàm số f(x) đơn điệu tăng.

Chứng minh hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = x \end{cases}$ có nghiệm .

Hướng dẫn giải

Đặt h(x)= g(x) – x , khi đó h(x) liên tục trên [a;b]

Theo giả thiết ta có $h(a)= g(a) - a \geq 0$ và $h(b)= g(b) - b \leq 0$

do đó tồn tại c thuộc [a;b] sao cho h(c) =0 hay g(c) = c

Nếu f(c) = c thì có điều phải chứng minh.

Nếu f(c) ≠ c thì đặt $x_1 = f(c), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1})$

Vì f(x) đơn điệu tăng nên dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu có giá trị thuộc đoạn [a;b] nên hội tụ về x_0 thuộc [a;b] : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

Khi đó $g(x_1)=g[f(c)]=f[g(c)]=f(c) =x_1$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $g(x_n)=x_n$ với mọi n.

Vì f(x), g(x) liên tục nên chuyển qua giới hạn ta có:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(x_0); \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$

nên $f(x_0)= g(x_0)= x_0 \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 9. 45: Cho hàm số: $f(x) = \frac{x^2 - x - 7}{2x + 1}$. Chứng minh tồn tại $c \in (1; 5)$ sao cho $f(c) = \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có f(x) liên tục trên đoạn [1; 5] và có $f(1) = -\frac{7}{3}$ và $f(5) = \frac{13}{11}$.

Vì $-\frac{7}{3} < \frac{\pi}{4} < \frac{13}{11}$ nên theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục nên tồn tại ít nhất một điểm $c \in (1; 5)$ sao cho $f(c) = \frac{\pi}{4}$.

Bài toán 9. 46: Cho f: [0; 1] $\to$ [0; 1] là một hàm liên tục. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in [0; 1]$ sao cho $f(c) = c$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên [0; 1] thì g liên tục trên [0; 1]

Ta có: $g(0) = f(0) - 0 \ge 0$; $g(1) = f(1) - 1 \le 0$

$\Rightarrow g(0).\ g(1) \le 0$ do đó tồn tại $c \in [0; 1]$ sao cho $g(c) = 0$

$\Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$.

Bài toán 9. 47: Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a;b] mà $f(a) \ne f(b)$. Hai số c, d bất kì mà $cd > 0$. Chứng minh tồn tại số r thoả mãn

$$cf(a) + df(b) - (c + d)f(r) = 0.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $g(x) = cf(a) + df(b) - (c + d)f(x)$, khi đó g(x) liên tục trên [a;b].

Ta có: $g(a) = cf(a) + df(b) - (c + d)f(a) = d(f(b) - f(a))$

và $g(b) = cf(a) + df(b) - (c + d)f(b) = c(f(a) - f(b))$

do đó $g(a).g(b) = -cd(f(b) - f(a))^2 < 0$

nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x = r$

Vậy tồn tại số r để $cf(a) + df(b) - (c + d)f(r) = 0$.

Bài toán 9. 48: Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trên R.

Chứng minh nếu $f(0) = f(1)$ và với m nguyên dương bất kỳ thì tồn tại c để $f(c + \frac{1}{m}) = f(c)$.

Hướng dẫn giải

Với m nguyên dương. Đặt $g(x) = f(x + \frac{1}{m}) - f(x)$, khi đó g(x) liên tục trên R.

Ta có tổng: $g(0) + g(\frac{1}{m}) + g(\frac{2}{m}) + ... + g(\frac{m-1}{m})$

$= (f(\frac{1}{m}) - f(0)) + (f(\frac{2}{m}) - f(\frac{1}{m})) + (f(\frac{3}{m}) - f(\frac{2}{m})) + ... + (f(1) - f(\frac{m-1}{m})) = f(1) - f(0) = 0$

Xét tất cả các giá trị $g(0) = g(\frac{1}{m}) = g(\frac{2}{m}) = ... = g(\frac{m-1}{m}) = 0$ thì có ngay kết quả, còn trái lại, nếu tất cả giá trị không đồng thời bằng 0 thì tồn tại 2 giá trị trái dấu tức là tồn tại 2 số $a, b \in \{0; \frac{1}{m}; \frac{2}{m}; ...; \frac{m-1}{m}\}$ để $g(a).g(b) < 0$, do đó g(x) có nghiệm.

Vậy phương trình $f(x + \frac{1}{m}) = f(x)$ có nghiệm $x = c$: đpcm.

Bài toán 9. 49: Cho hàm số f: $[a;b] \to [a;b]$, với $a<b$ và thoả điều kiện: $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, với mọi x, y phân biệt thuộc $[a;b]$.

Chứng minh tồn tại duy nhất số $c \in [a;b]$ sao cho $f(c) = c$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết cho thì có f(x) liên tục trên [a;b]

Xét hàm số $g(x) = |f(x) - x|$, khi đó g(x) liên tục trên [a;b]

Do đó tồn tại $c \in [a;b]$ sao cho: $g(c) = \min\limits_{x\in[a,b]} g(x)$. (*)

Ta sẽ chứng minh $g(c) = 0$. Giả sử $g(c) \neq 0$, do đó $f(c) \neq c$.

Từ bất đẳng thức đã cho thì: $|f(f(c)) - f(c)| < |f(c) - c|$

Suy ra $g(f(c)) < g(c)$: mâu thuẫn với (*)

Nên $g(c) = 0$ nghĩa là $f(c) = c$.

Giả sử phương trình $f(x) = x$ còn có nghiệm $c_1 \neq c$, c_1 thuộc [a; b] thì: $|f(c_1) - f(c)| = |c_1 - c|$: mâu thuẫn với giả thiết $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9. 50: Cho hàm số f(x) liên tục trên **R** và nhận giá trị dương lẫn giá trị âm. Chứng minh tồn tại $d \neq 0$ và c thỏa mãn:

$$f(c) + f(c+d) + f(c+2d) = 0.$$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết thì tồn tại x_0 để $f(x_0) < 0$. Vì f(x) liên tục trên **R** nên tồn tại khoảng K=(a,b) chứa x_0 mà $f(x) < 0$ trên đó.

Trên K tồn tại cấp số cộng a_0, b_0, c_0 mà tổng $f(a_0) + f(b_0) + f(c_0) < 0$.

Tương tự tồn tại cấp số cộng a_1, b_1, c_1 mà tổng $f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) > 0$

Xét các hàm số $a(t) = a_0t + a_1(1-t)$, $b(t) = b_0t + b_1(1-t)$, $c(t) = c_0t + c_1(1-t)$ thì a(t), b(t) và c(t) lập cấp số cộng với mọi t.

Đặt $g(t) = f(a(t)) + f(b(t)) + f(c(t))$, khi đó thì g(t) liên tục trên **R**

và có: $g(0) = f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) > 0$, $g(1) = f(a_0) + f(b_0) + f(c_0) < 0$

nên tồn tại m để $g(m) = 0$

do đó $f(a(m)) + f(b(m)) + f(c(m)) = 0$

Chọn $d = b(m) - a(m) = c(m) - b(m)$ thì $d \neq 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9. 51: Giả sử các hàm số f, g: $(0; +\infty) \to (0; +\infty)$ liên tục và thoả điều kiện: $\forall x \geq 0$ mà $g(x) \neq x$ ta đều có: $f[g(x)] = 1 \Leftrightarrow f(x) \neq 1$.

Chứng minh tồn tại số $c > 0$ để $g(c) = c$.

Hướng dẫn giải

Ta dùng phản chứng: Giả sử $g(x) \neq x, \forall x > 0$

$\Rightarrow f[g(x)] = 1 \Rightarrow f(x) \neq 1 \ \forall x > 0$

Đặt: $h(x) = f[g(x)] - f(x)$ với $x > 0$

Ta có h(x) liên tục trên $(0, +\infty)$ (do f và g liên tục)

Đồng thời $h(x) \neq 0, \forall x > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} h(x) < 0 & \forall x > 0 \\ h(x) > 0 & \forall x > 0 \end{array}\right.$

Đặt: $g_m(x) = g[g[...g(x)]]]$ (m hàm g)

Nếu $h(x) > 0\ \forall x > 0$ thì: $f(x) < f[g(x)] < f[g_2(x)] < f[g_3(x)],\ \forall x > 0$

Nếu $h(x) < 0\ \forall x > 0$ thì: $f(x) > f[g(x)] > f[g_2(x_0] > f[g_3(x)]\ \forall x > 0$

Vì vậy theo (1) ta thấy:

Nếu: $f(x) = 1$ thì $f[g(x)] \neq 1 \Rightarrow f[g_2(x)] = 1$,

Nên $f(x) = f[g_2(x)]$; mâu thuẫn, còn nếu $f(x) \neq 1$ thì $f[g(x)] = 1$

$\Rightarrow f[g_2(x)] \neq 1 \Rightarrow f[g_3(x)] = 1$

Do đó: $f[g(x)] = f(g_3(x)]$ cũng mâu thuẫn $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 9. 52: Giải phương trình $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$, khi đó $f(x)$ liên tục trên **R**

Ta có $f(-1) = -7$; $f(0)= 1$; $f(\frac{1}{2})= -1$; $f(1) = 1$ nên $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm và 3 nghiệm này thuộc khoảng $(-1;1)$.

Xét khoảng $(-1;1)$, đặt $x = \cos t$, $0 < t < \pi$ thì phương trình:

$$8\cos^3 t - 4\cos^2 t - 4\cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos t(2\cos^2 t - 1) = 4(1 - \sin^2 t) - 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos t.\cos 2t = 3 - 4\sin^2 t \Leftrightarrow \quad \sin 4t = \sin 3t \qquad (\text{vì } \sin t > 0)$$

Giải rồi chọn 3 nghiệm $t_1 = \frac{\pi}{7}, t_2 = \frac{3\pi}{7}, t_3 = \frac{5\pi}{7}$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x_1 = \cos\frac{\pi}{7}, x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}, x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$

Bài toán 9. 53: Giải phương trình $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\cos x$.

Hướng dẫn giải

Do $\sin x = 0$ không phải là nghiệm nên phương trình tương đương

$$1 + 4\cot^3 x = 3\cot x.\frac{1}{\sin^2 x}$$

$\Leftrightarrow 1 + 4\cot^3 x = 3\cot x(1 + \cot^2 x) \Leftrightarrow \cot^3 x - 3\cot x + 1 = 0$.

Đặt $t = \cot x$, hàm số $f(t) = t^3 - 3t + 1$ liên tục trên **R**

Ta có $f(-2) = -1$; $f(-1) = 3$; $f(1) = -1$; $f(2) = 3$ nên phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;2)$.

Xét khoảng $(-2;2)$, đặt $t = 2\cos u$, $u \in (0;\pi)$

Phương trình $8\cos^3 u - 6\cos u + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3u + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3u = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow u_1 = \frac{4\pi}{9}, u_2 = \frac{8\pi}{9}, u_3 = \frac{2\pi}{9}$

Do đó $t_1 = 2\cos\frac{4\pi}{9}, t_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9}, t_3 = 2\cos\frac{2\pi}{9}$.

Vậy phương trình cho có 3 nghiệm

$$x_1 = \text{arc}\cot(2\cos\frac{4\pi}{9}), x_2 = \text{arc}\cot(2\cos\frac{8\pi}{9}), x_3 = \text{arc}\cot(2\cos\frac{2\pi}{9})$$

Bài toán 9. 54: Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{7-x} > 2$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{7-x} = 2$

Đặt $u = \sqrt{x+1} \geq 0; v = \sqrt[3]{7-x}$

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^2+v^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ (2-v)^2 = 8-v^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-v \\ (2-v)(v^2+3v+2)=0 \end{cases}$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} v=2 \\ v=-1 \\ v=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8 \\ x=15 \end{array}\right.$ (chọn)

Vì $f(x) = \sqrt{x+1}+\sqrt[3]{7-x}-2$ là hàm số liên tục trên $[-1; +\infty)$ nên f chỉ đổi dấu khi qua 3 điểm $x = -1$, $x = 8$, $x = 15$.

Ta có: $f(7) = \sqrt{8}-2 > 0$; $f(9) = \sqrt{10}+\sqrt[3]{-2}-2 < 0$

$f(34) = \sqrt{35}+\sqrt[3]{-27}-2 > 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < 8$, $x > 15$.

Bài toán 9. 55: Tính giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi :

$$u_n = 2^n.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} \text{ (n + 1 dấu } \sqrt{\ } \text{)}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $v_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (n dấu $\sqrt{\ }$)

Ta chứng minh quy nạp được $v_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ nên

$$u_n = 2^n.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$$

$$= 2^n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2^n.\sqrt{2.2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

$$= 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}.2^{n+2}.\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Vậy: $\lim u_n = \lim 2^{n+2}.\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} = \lim\frac{1}{2}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\pi}{2}$

Bài toán 9. 56: Cho hai dãy số (a_n), (b_n) được xác định như sau:

$$a_1 = \frac{2015+2016}{2},\ b_1 = \sqrt{2016a_1},\ a_2 = \frac{a_1+b_1}{2},\ b_2 = \sqrt{a_2.b_1},\ldots,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ b_n = \sqrt{a_n.b_{n-1}}$$. Tìm $\lim b_n$ và $\lim a_n$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} a = 2015, b = 2016 \\ \cos\alpha = \dfrac{a}{b} \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} a_1 = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b\cos\alpha + b}{2} = b\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \\ b_1 = \sqrt{a_1 b} = \sqrt{b^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = b\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1+b_2}{2} = \dfrac{b\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + b\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2} = b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2^2} \\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{b^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2^2}} = b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

....

$$\begin{cases} a_n = b\cos\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2^n} \\ b_n = b\cos\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos\dfrac{\alpha}{2^n} \end{cases}$$

Suy ra $b_n = \dfrac{b}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}.\sin\alpha = \dfrac{\dfrac{\alpha}{2^n}}{\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}.\dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$

nên: $\lim b_n = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$ và có: $a_n = b_n.\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$

Vậy: $\lim a_n = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}.\lim\cos\dfrac{\alpha}{2^n} = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 9. 1: Dùng định nghĩa, tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{2}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1975}{(x-2)^2}$

Hướng dẫn

a) Dùng định lý kẹp 0. Kết quả 0

b) Kết quả $+\infty$

Bài tập 9. 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2+6x+8}$

Hướng dẫn

a) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ phân tích thừa số (x–2). Kết quả 3

b) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ phân tích thừa số (x+2). Kết quả –16

Bài tập 9. 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$

Hướng dẫn

a) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ phân tích thừa số (x–3). Kết quả 9

b) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nhân chia lượng liên hiệp. Kết quả $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài tập 9. 4: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1-x}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{4+x}-\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[4]{1+x}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{(n^nx^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$

Hướng dẫn

a) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nhân chia lượng liên hiệp. Kết quả $\dfrac{24}{5}$

b) Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$. Kết quả $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$.

Bài tập 9. 5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

Hướng dẫn

a) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ chia tử và mẫu cho x. Kết quả $\sqrt{2}$

b) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ nhân chia lượng liên hiệp. Kết quả $\frac{1}{4}$

Bài tập 9. 6: Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2 - x}}$

Hướng dẫn

a) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ chia rút x. Kết quả –2

b) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ phân tích thừa số (x–2). Kết quả 0

Bài tập 9. 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 5x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x + 7} + 4a & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \to 2$.

Hướng dẫn

Xét giới hạn 2 bên. Kết quả $a = \frac{3}{4}$.

Bài tập 9. 8: Tìm các khoảng, nửa khoảng mà hàm số liên tục

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$ b) $g(x) = \sqrt{x + 1} - 2\sqrt{x - 3}$

Hướng dẫn

a) Hàm phân thức liên tục trên tập xác định.

Kết quả $D = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

b) Kết quả $D = [3; +\infty)$

Bài tập 9. 9: Tìm các điểm gián đoạn của hàm số

a) $f(x) = \tan x + 2\cot x$ b) $g(x) = \frac{2\sin x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$

Hướng dẫn

a) Hàm gián đoạn tại các điểm không xác định.

Kết quả $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Kết quả $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 9. 10: Tìm các giá trị tham số a để hàm số liên tục trên **R**.

a) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ a\cos x - 5 & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$ liên tục trên **R**

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+6}-a}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \ne 3 \\ x^3 - (2b+1)x & \text{khi } x = 3 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Tính f(0) và giới hạn 2 bên của số 0. Kết quả a = 5.

b) Khi $x \to 3$ thì $\sqrt{x+1} - 2 \to 0$ nên phải có $\sqrt{x+6} - a \to 0$ do đó a = 3. Từ đó xác định b và thử lại.

Bài tập 9. 11: Chứng minh phương trình

a) $ax^2 + bx + c = 0$ với $12a + 15b + 20c = 0$ có nghiệm

b) $x^5 - 10x^3 + 9x - 1 = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hướng dẫn

a) Dùng tổng $\dfrac{75}{4}f\left(\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{5}{4}f(0) = 0$ nên $f\left(\dfrac{4}{5}\right)$ và f(0) trái dấu.

b) Chọn 6 giá trị x tăng dần mà f(x) liên tiếp đổi dấu.

Bài tập 9. 12: Tìm tham số m để phương trình:

a) $mx^4 + 2x^2 - x - m = 0$ có 2 nghiệm.

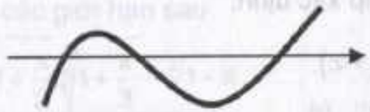
b) $x^3 - 3x^2 + 2mx + m - 2015 = 0$ có 3 nghiệm $x_1 < -1 < x_2 < x_3$

Hướng dẫn

a) Xét m = 0, xét $m \ne 0$ chia 2 vế cho m.

Kết quả mọi m thì phương trình luôn luôn có 2 nghiệm.

b)



Phương trình 3 nghiệm $x_1 < -1 < x_2 < x_3$ thì $f(-1) = -2019 - m > 0$ nên $m < -2019$. Đảo lại dùng phân tích theo nghiệm. Kết quả $m < -2019$.

Chuyên đề 10: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Định nghĩa đạo hàm, vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó, đặt $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến số và

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia của hàm số. Đạo hàm của f tại x_0:

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ (hữu hạn)}$$

Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx được kí hiệu $df(x_0)$ là: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ hay $dy = f'(x)dx = y'dx$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại điểm x_0.

Công thức và quy tắc

$y = c \Rightarrow y' = 0$; $y = x \Rightarrow y' = 1$; $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$;

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$); $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$;

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$; $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$;

$y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $y = \cot x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y = \arccos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arctan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $y = \text{arc}\cot x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$(u + v)' = u' + v'$; $(u - v)' = u' - v'$;

$(u . v)' = u'.v + u.v'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$;

Hàm hợp: $f'_x = f'_u . u'_x$; hàm ngược: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Đạo hàm cấp n:

Định nghĩa: $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$; $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$.

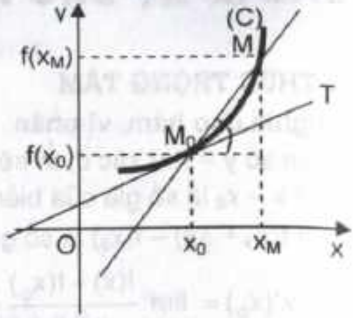
Ý nghĩa cơ học: chuyển động $s = s(t)$ có vận tốc tại điểm t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$ và gia tốc tại điểm t_0: $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$.

Tiếp tuyến và tiếp xúc

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại điểm x_0 : $k = f'(x_0)$.

  Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$:

  $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



- Tiếp tuyến đi qua điểm K(a; b).

  Lập phương trình tiếp tuyến tại x_0 rồi cho tiếp tuyến đi qua điểm K(a; b) thì tìm ra x_0.

- Điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị f(x) và g(x) là hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm

  Nghiệm chung x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Quy tắc L'Hospital

Giả sử hai hàm số f và g liên tục trên khoảng (a; b) chứa x_0, có đạo hàm trên (a ;b) \ $\{x_0\}$ và có $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Đặc biệt: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 10. 1: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số :

a) $y = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$, $x_0 = 3$. b) $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = \dfrac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

a) Cho $x_0 = 3$ số gia Δx

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = \frac{3(3 + \Delta x)}{(3 + \Delta x) - 2} - \frac{10}{1} = -\frac{-7\Delta x}{1 + \Delta x}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-7}{1 + \Delta x} = -7$. Vậy $f'(3) = -7$.

b) Cho $x_0 = \dfrac{1}{8}$ số gia Δx thì $\Delta y = f\left(\dfrac{1}{8} + \Delta x\right) - f\left(\dfrac{1}{8}\right)$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{8} + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{\Delta x}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} + \Delta x\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{8} + \Delta x} + \frac{1}{4}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} + \Delta x\right)^2} + \frac{1}{2}.\sqrt[3]{\frac{1}{8} + \Delta x} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3.\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Vậy $f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3}$.

Bài toán 10. 2: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số :

a) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ b) $y = x^n$ với n nguyên dương

Hướng dẫn giải

a) Với mọi x thuộc khoảng $(-\infty; 1)$, ta có:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1 + x + \Delta x}{\sqrt{1 - x - \Delta x}} - \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$$

$$= \frac{(1 + x + \Delta x)\sqrt{1 - x} - (1 + x)\sqrt{1 - x - \Delta x}}{\sqrt{1 - x - \Delta x}.\sqrt{1 - x}}$$

$$= \frac{(1 + x)(\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 - x - \Delta x}) + \Delta x\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x - \Delta x}.\sqrt{1 - x}}$$

$$= \frac{(1 + x)\frac{\Delta x}{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - x - \Delta x}} + \Delta x\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x - \Delta x}.\sqrt{1 - x}}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 + x + \sqrt{1 - x}(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - x - \Delta x})}{\sqrt{1 - x - \Delta x}.\sqrt{1 - x}(\sqrt{1 - x - \Delta x} + \sqrt{1 - x})} = \frac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}$$

Vậy $y' = \frac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}$, với $x < 1$.

b) Với mỗi x thuộc R, cho số gia Δx, ta có:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + \ldots + C_n^{n-1} x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1})$$

$$= C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$ Vậy $y' = n.x^{n-1}$.

Bài toán 10. 3: Chứng minh các hàm số liên tục tại x = 0 nhưng không có đạo hàm tại đó.

a) $y = f(x) = \sqrt{|x|}$ b) $y = f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có f(0) = 0, $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{|x|} = 0 = f(0)$ nên f liên tục tại x = 0.

Cho x = 0 số gia Δx, ta có: $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt{|x|}$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}} = +\infty$$

Vậy không tồn tại đạo hàm tại x = 0.

b) Ta có f(0) = 0, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x+1} = 0 = f(0)$ nên f liên tục tại x = 0.

Cho x = 0 số gia Δx thì: $\Delta y = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x + 1} - 0 = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x + 1}$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-1}{\Delta x + 1} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\Delta x + 1} = 1 \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vậy f không có đạo hàm tại x = 0.

Bài toán 10. 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Chứng minh f liên tục và có đạo hàm tại x = 0.

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) - f(0) = \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} - \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{2 - x - 2\sqrt{1-x}}{2x} = \frac{(2-x)^2 - 4(1-x)}{2x(2 - x + 2\sqrt{1-x})} = \frac{x}{2(2 - x + 2\sqrt{1-x})}.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2(2 - x + 2\sqrt{1-x})} = \frac{1}{8}$$

Vậy tồn tại $f'(0) = \dfrac{1}{8}$ nên f liên tục tại x = 0.

Bài toán 10. 5: Cho hàm số f xác định: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

Chứng minh rằng f liên tục và có đạo hàm trên **R**.

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ xác định và liên tục trên **R** \{0}và

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0 \text{ vì: } \left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2;\ \lim_{x\to 0} x^2=0$$

Nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ do đó f liên tục tại x = 0 nên liên tục trên **R**

Khi $x\neq 0$ thì $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos x$. Ta tính f ' tại x = 0.Ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}$$

Từ đó: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$ vì: $\left|\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right|\le \Delta x\to 0$ nên $f'(0)=0$

Vậy f(x) có đạo hàm trên **R**.

Bài toán 10. 6: Tìm a, b để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^3-2 & \text{khi } x\le 0 \\ x^2+ax+b & \text{khi } x>0\end{cases}$

có đạo hàm tại x = 0, khi đó tính f '(0).

Hướng dẫn giải

Hàm số có đạo hàm tại x = 0 thì liên tục tại x = 0 nên

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+ax+b)=-2\Rightarrow b=-2.$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=a$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0^-}x^2=0$$

Suy ra điều kiện tồn tại đạo hàm tại x = 0 là a = 0 và b = –2.
Khi đó f '(0) = 0.

Bài toán 10. 7: Tính đạo hàm:

a) $y=\dfrac{x^5}{a}-\dfrac{3x^2}{a}+abx$ b) $y=(x-1)(x+2)(x-3)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = \frac{1}{a}.x^5 - \frac{3}{a}.x^2 + abx$, D = **R**

Nên $y' = \frac{1}{a}.5x^4 - \frac{3}{a}.2x + ab = \frac{5}{a}x^4 - \frac{6}{a}x + ab$

b) $y' = (x-1)'(x+2)(x-3) + (x-1)(x+2)'(x-3) + (x-1)(x+2)(x-3)'$

$= (x+2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x+2) = 3x^2 - 4x - 4$

Bài toán 10. 8: Tính đạo hàm các hàm số

a) $y = \frac{5x-3}{x^2+x+1}$ b) $y = \frac{1}{(x^2-x+1)^5}$

Hướng dẫn giải

a) $y' = \frac{5(x^2+x+1)-(5x-3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$.

b) Đặt $u = x^2 - x + 1$ thì $y = \frac{1}{u^5}$

$y' = \frac{-(u^5)'}{(u^5)^2} = \frac{-5u^4.u'}{u^{10}} = \frac{-5u'}{u^6} = \frac{-5(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$.

Bài toán 10. 9: Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ b) $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

Hướng dẫn giải

a) $y' = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

b) $y' = \frac{(2ax+b)(a'x^2+b'x+c')-(ax^2+bx+c)(2a'x+b')}{(a'x^2+b'x+c')^2}$

$= \frac{(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+bc'-b'c}{(a'x^2+b'x+c')^2}$.

Bài toán 10. 10: Tính đạo hàm các hàm số:

a) $y = (x-x^2)^{32}$ b) $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

Hướng dẫn giải

a) $y' = 32(x-x^2)^{31}.(x-x^2)' = 32(x-x^2)^{31}.(1-2x)$

b) $y' = 1.(x+2)^2(x+3)^3 + (x+1).2(x+2)(x+3)^3 + (x+1)(x+2)^2.3(x+3)^2$

$= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+1) + 3(x+1)(x+2)]$

$= (x+2)(x+3)^2[x^2+5x+6+2(x^2+4x+3)+3(x^2+3x+2]$

$= (x+2)(x+3)^2[6x^2+22x+18] = 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$.

Bài toán 10. 11: Tìm đạo hàm của mỗi hàm số:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$ b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}} = \sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$

$$y' = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}}} = \frac{x^2-1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}.$$

b) $$y' = \frac{1.\sqrt{a^2-x^2} - x\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{(a^2-x^2)+x^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

Bài toán 10. 12: Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ b) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Hướng dẫn giải

a) $$y' = \frac{(1+\sqrt{x})'}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{4\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

b) Ta có $y^3 = \dfrac{1-x}{1+x}$ nên lấy đạo hàm 2 vế: $3y^2.y' = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$.

Do đó: $$y' = \frac{-2}{3y^2(1+x)^2} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}(1+x)^2} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)^4}}.$$

Bài toán 10. 13: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \cos\sqrt{2x+1} - \cot^3 x$ b) $y = 2\sin3x.\cos5x$

Hướng dẫn giải

a) $$y' = -\sin(\sqrt{2x+1}).(\sqrt{2x+1})' - 3\cot^2 x(\cot x)'$$

$$= \frac{-\sin(\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+1}} + 3\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}$$

b) Ta có $y = \sin8x - \sin2x$ nên $y' = 8\cos8x - 2\cos2x$.

Bài toán 10. 14: Tính đạo hàm các hàm số:

a) $y = \dfrac{1}{|\sin x|}$ b) $y = \sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$ nên $y' = \dfrac{-(\sqrt{\sin^2 x})'}{\sin^2 x} = \dfrac{-2\sin x\cos x}{\sin^2 x\sqrt{\sin^2 x}} = \dfrac{-\cot x}{|\sin x|}$

b) $y' = \dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}} = \dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+\tan\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$

Bài toán 10. 15: Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y = \sin(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x)$ b) $y = \sin^n x.\cos nx$, $n \geq 2$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = \cos(\cos^2 x).(\cos^2 x)'.\cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x)(-\sin(\sin^2 x))(\sin^2 x)'$

$= -2\sin x\cos x.\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x) - 2\sin x\cos x.\sin(\cos^2 x).\sin(\sin^2 x)$

$= -\sin 2x[\cos(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x).\sin(\sin^2 x)]$

$= -\sin 2x.\cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin 2x.\cos(\cos 2x)$

b) $y' = n\sin^{n-1}x.\cos x.\cos nx + \sin^n x(-\sin nx).n$

$= n\sin^{n-1}x(\cos x.\cos nx - \sin x.\sin nx)$

$= n\sin^{n-1}x.\cos(n+1)x.$

Bài toán 10. 16: Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y = \arcsin(4x^2-7)$ b) $y = \text{arc}\cot\sqrt{1-3x}$

Hướng dẫn giải

a) $y = \arcsin(4x^2-7) \Rightarrow y' = \dfrac{(4x^2-7)'}{\sqrt{1-(4x^2-7)^2}} = \dfrac{8x}{\sqrt{56x^2-16x^4-48}}$

b) $y = \text{arc}\cot\sqrt{1-3x} \Rightarrow y' = \dfrac{-(\sqrt{1-3x})'}{1+(1-3x)^2} = \dfrac{3}{2(2-6x+9x^2)\sqrt{1-3x}}$

Bài toán 10. 17: Tính vi phân của hàm số:

a) $y = x + \sqrt{2-x^2}$ b) $y = \dfrac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

Hướng dẫn giải

a) $y' = 1 - \dfrac{2x}{2\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}} \Rightarrow dy = \dfrac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}}dx$

b) $y' = \dfrac{(-4x-2)(x^2+x+1)^2-(-2x^2-2x+1)2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$

$= \dfrac{-2(2x+1)(x^2+x+1)-2(-2x^2-2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}$

$= \dfrac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3} \Rightarrow dy = \dfrac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}dx$.

Bài toán 10. 18: Tính vi phân của hàm số:

a) $y = \cos(\cos x)$ b) $y = \dfrac{1}{(1+\tan x)^2}$

Hướng dẫn giải

a) $y' = -\sin(\cos x).(\cos x)' = \sin x.\sin(\cos x)$

Do đó $dy = \sin x.\sin(\cos x)dx$

b) $dy = \dfrac{-2(1+\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^4}dx = \dfrac{-2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$.

Bài toán 10. 19: Cho hai hàm f và g có đạo hàm trên **R**. Tính đạo hàm của hàm số hợp:

a) $y = f(x^3) - g(x^2)$ b) $y = \sqrt{f^2(x)+g^3(x^2)}$

Hướng dẫn giải

a) $y' = f'(x^3).(x^3)' - g'(x^2)(x^2)' = 3x^2.f'(x^3) - 2x.g'(x^2)$

b) $y' = \dfrac{(f^2(x)+g^3(x^2))'}{2\sqrt{f^2(x)+g^3(x^2)}} = \dfrac{2f(x).f'(x)+6xg^2(x^2).g'(x^2)}{2\sqrt{f^2(x)+g^3(x^2)}}$.

Bài toán 10. 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên **R**. Chứng minh:

a) Nếu f chẵn thì f ' lẻ. b) Nếu f lẻ thì f ' chẵn.

Hướng dẫn giải

a) Nếu f chẵn trên **R** thì với mọi $x \in$ **R**: $f(-x) = f(x)$.

Lấy đạo hàm 2 vế thì được: $f'(-x).(-x)' = f'(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x)$

$\Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$. Vậy f ' lẻ.

b) Nếu f lẻ trên **R** thì với mọi $x \in$ **R**: $f(-x) = -f(x)$.

Lấy đạo hàm 2 vế thì được: $f'(-x).(-x)' = -f'(x) \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x)$.

$\Rightarrow f'(x) = f'(x)$. Vậy f ' chẵn.

Bài toán 10. 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm với mọi x và thoả mãn:

a) $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$. Tính $f'(1)$.

b) $2f(x) = 1 + x.f^3(x)$. Tính đạo hàm tại điểm M(1; 1).

Hướng dẫn giải

a) Lấy đạo hàm 2 vế, ta có:

$4f(1 + 2x) . f'(1 + 2x) = 1 + 3f^2(1 - x) . f'(1 - x)$.

Thế $x = 0$: $4f(1) . f'(1) = 1 + 3f^2(1) . f'(1)$ (*)

Thế $x = 0$ vào $f^2(1 + 2x) = x - f^3(1 - x) \Rightarrow f^2(1) = -f^3(1)$.

$\Rightarrow f^2(1)(1 + f(1)) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$ hoặc $f(1) = -1$.

Với $f(1) = 0$ thì (*): $0 = 1$ (loại)

Với $f(1) = -1$ thì (*): $-4f'(1) = 1 + 3f'(1) \Rightarrow f'(1) = \dfrac{-1}{7}$.

b) Lấy đạo hàm 2 vế, ta có: $2f'(x) = f^3(x) + 3xf^2(x) . f'(x)$.

Thế $x = 1$ và ta có $f(1) = 1$ nên:

$2f'(1) = 1 + 3f'(1) \Rightarrow f'(1) = -1$.

Bài toán 10. 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi x và thoả mãn điều kiện: $f(2x) = 4\cos x.f(x) - 2x$. Tính $f'(0)$.

Hướng dẫn giải

Đạo hàm 2 vế, ta có $2f'(2x) = -4\sin x f(x) + 4\cos x f'(x) - 2$

Thay $x = 0$, ta có: $2f'(0) = 4f'(0) - 2$.

Vậy $f'(0) = 1$

Bài toán 10. 23: Chứng minh các hàm số sau có đạo hàm $y' = 0$.

a) $y = \sin^6x + \cos^6x + 3\sin^2x\cos^2x$.

b) $y = \cos^2(\dfrac{\pi}{3} - x) + \cos^2(\dfrac{\pi}{3} + x) + \cos^2(\dfrac{2\pi}{3} - x) + \cos^2(\dfrac{2\pi}{3} + x) - 2\sin^2x$

Hướng dẫn giải

a) $y' = 6\sin^5x\cos x - 6\cos^5x\sin x + 6\sin x\cos^3x - 6\cos x\sin^3x$

$= 6\sin x\cos x[(\sin^4x - \cos^4x) + (\cos^2x - \sin^2x)]$

$= 3\sin 2x[(\sin^2x - \cos^2x)(\sin^2x + \cos^2x) + (\cos^2x - \sin^2x)] = 0$

Cách khác: Biến đổi lượng giác trước thì $y = 1$.

b) $y' = 2\cos(\dfrac{\pi}{3} - x)\sin(\dfrac{\pi}{3} - x) - 2\cos(\dfrac{\pi}{3} + x)\sin(\dfrac{\pi}{3} + x)$

$+ 2\cos(\dfrac{2\pi}{3} - x)\sin(\dfrac{2\pi}{3} - x) - 2\cos(\dfrac{2\pi}{3} + x)\sin(\dfrac{2\pi}{3} + x) - 4\sin x\cos x$

$= [\sin(\dfrac{2\pi}{3} - 2x) - \sin(\dfrac{2\pi}{3} + 2x)] + [\sin(\dfrac{4\pi}{3} - 2x) - \sin(\dfrac{4\pi}{3} + 2x)] - 2\sin 2x$

$= 2\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin(-2x) + 2\cos\dfrac{4\pi}{3}\sin(-2x) - 2\sin 2x$

$= -2\dfrac{-1}{2}\sin 2x - 2\dfrac{-1}{2}\sin 2x - 2\sin 2x = 0$.

Bài toán 10. 24: Giải phương trình $y' = 0$ với hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - x + 1}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x + 1}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi x.

$$y' = \frac{(2x-3)(x^2-x+1)-(x^2-3x+4)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2x^2-6x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

nên $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

b) Vì $x^2 - 2x + 3 > 0$ với mọi x nên điều kiện: $x \neq -\frac{1}{2}$

$$y' = \frac{\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}(2x+1) - \sqrt{x^2-3x+3}.2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(2x+1)-2(x^2-2x+3)}{(2x+1)^2\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{3x-7}{(2x+1)^2\sqrt{x^2-3x+3}}$$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ (chọn).

Bài toán 10. 25: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Giải bất phương trình:

a) $f'(x) < 0$

b) $f'(x) \leq f(x)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$.

Ta có $f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

a) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$

b) $f'(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \leq \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \quad \text{hay } x > 2 \\ x - 1 \leq x^2 - 2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \quad \text{hay } x > 2 \\ x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ hay } x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \text{ hay } x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 10. 26: Giải phương trình $y' = 0$ với hàm số:

a) $y = \cos^2 x + \sin x$

b) $y = 2x - \cos x - \sqrt{3}\sin x$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y' = -2\cos x\sin x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x)$

Do đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $1 - 2\sin x = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\ (k \in Z)\end{array}\right.$$

b) $y' = 2 + \sin x - \sqrt{3}\cos x$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = -2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -1$

$\Leftrightarrow \sin(x - \dfrac{\pi}{3}) = -1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z.$

Bài toán 10. 27: Tìm m để phương trình $y' = 0$ có nghiệm x với hàm số:

a) $y = (m-1)\sin x - (2m+3)x$

b) $y = (m+1)\sin x + m\cos x - (m+2)x + 1.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y' = (m-1)\cos x - (2m+3)$

$y' = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cos x = 2m + 3$

Xét $m = 1$ thì $0.\cos x = 5$: vô nghiệm (loại)

Xét $m \neq 1$ thì $\cos x = \dfrac{2m+3}{m-1}$

Điều kiện có nghiệm x là $\left|\dfrac{2m+3}{m-1}\right| \le 1 \Leftrightarrow |2m+3| \le |m-1|$

$\Leftrightarrow (2m+3)^2 \le (m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 14m + 8 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le -\dfrac{2}{3}.$

b) Ta có $y' = (m+1)\cos x - m\sin x - (m+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = m + 2$

Điều kiện có nghiệm x: $a^2 + b^2 \ge c^2$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \ge (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \ge 0$

$\Leftrightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge 3$.

Bài toán 10. 28: Cho $f(x) = \dfrac{m-1}{4}x^4 + \dfrac{m-2}{3}x^3 - mx^2 + 3x - 1$

Giải và biện luận phương trình $f'(x) = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = (m-1)x^3 + (m-2)x^2 - 2mx + 3.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[(m-1)x^2 + (2m-3)x - 3] = 0 \qquad (1).$

Do đó $f'(x) = 0$ luôn có nghiệm $x = 1$.

Xét $(m-1)x^2 + (2m-3)x - 3 = 0$ (2)

– Nếu $m = 1$ thì $-x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

– Nếu $m \neq 1$ thì $\Delta = (2m-3)^2 + 12(m-1) = 4m^2 - 3$.

Khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow |m| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: (2) vô nghiệm

Khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow |m| \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: (2) có hai nghiệm :

$$x_{1,2} = \frac{3 - 2m \pm \sqrt{4m^2 - 3}}{2(m-1)}$$

Bài toán 10. 29: Giải và biện luận phương trình $y' = 0$ với hàm số:

$$y = -\frac{1}{2}\sin 2x - (2m-5)\cos x + 2(2-m)x + 1.$$

Hướng dẫn giải

$y' = -\cos 2x + (2m-5)\sin x + 2(2-m)$

$= 2\sin^2 x - 1 + (2m-5)\sin x + 4 - 2m$.

$= 2\sin^2 x + (2m-5)\sin x + 3 - 2m$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + (2m-5)\sin x + 3 - 2m = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$ hoặc $\sin x = \dfrac{3-2m}{2}$

Nếu $\dfrac{3-2m}{2} < -1$ hoặc $\dfrac{3-2m}{2} > 1 \Leftrightarrow m > \dfrac{5}{2}$ hoặc $m < \dfrac{1}{2}$ thì $\sin x = \dfrac{3-2m}{2}$ vô nghiệm nên phương trình $y' = 0$ có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nếu $-1 \leq \dfrac{3-2m}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{5}{2}$, đặt $\dfrac{3-2m}{2} = \sin\alpha$ nên $\sin x = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi$ hoặc $x = \pi - \alpha + k2\pi$.

Phương trình $y' = 0$ có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = \alpha + k2\pi$, $x = \pi - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 10. 30: Tính giá trị đạo hàm tại điểm:

a) $y = (5x+1)^8$, $y'''(0)$ b) $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$, $y''(1)$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = 8(5x+1)^7 \cdot 5 = 40(5x+1)^7$

$y'' = 40.7(5x+1)^6 \cdot 5 = 140(5x+1)^6$

$y''' = 140.6(5x+1)^5.5 = 4200(5x+1)^5$. Do đó $y'''(0) = 4200$.

b) $y' = \dfrac{3(x+2)-(3x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$

$y'' = \dfrac{-14(x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{-14}{(x+2)^3} \Rightarrow y''(1) = \dfrac{-14}{27}$.

Bài toán 10. 31: Tính đạo hàm đến cấp:

a) $y = \sin5x\sin3x$, $y^{(4)}$ b) $y = \sin^4x$, y'''.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y = -\dfrac{1}{2}(\cos8x - \cos2x) = -\dfrac{1}{2}\cos8x + \dfrac{1}{2}\cos2x$.

$y' = 4\sin8x - \sin2x$, $y'' = 32\cos8x - 2\cos2x$

$y''' = -256\sin8x + 4\sin2x$, $y^{(4)} = -2048\cos8x + 8\cos2x$.

b) Ta có $y = \sin^4x = \left(\dfrac{1-\cos2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(1 - 2\cos2x + \cos^2 2x)$

$= \dfrac{1}{4}\left(1 - 2\cos2x + \dfrac{1-\cos2x}{2}\right) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos2x + \dfrac{1}{8}\cos4x$

nên $y' = \sin2x - \dfrac{1}{2}\sin4x$, $y'' = 2\cos2x - 2\cos4x$.

$y''' = -4\sin2x + 8\sin4x$.

Bài toán 10. 32: Cho hàm số với tham số a:

$$f(x) = x^4 - 2\cos2a.x^3 + \frac{3}{2}\sin2a.\sin6a.x^2 + \sqrt{2a-1-a^2}\,.\,x + a^3.$$

Chứng minh $f''(\frac{1}{2}) > 0$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $2a - 1 - a^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Khi đó $f(x) = x^4 - 2\cos2.x^3 + \dfrac{3}{2}\sin2.\sin6.x^2 + 1$.

nên $f'(x) = 4x^3 - 6\cos2.x^2 + 3\sin2.\sin6.x$;

và $f''(x) = 12x^2 - 12\cos2.x + 3\sin1.\sin6$

$\Rightarrow f''(\frac{1}{2}) = 3 - 6\cos2 + 3\sin2.\sin6 = -6\cos2 + 3(1 + \sin2.\sin6)$.

Vì $\dfrac{\pi}{2} < 2 < \pi$ nên cos < 0 và $\sin2.\sin6 \ge -1$ nên $f''(\frac{1}{2}) > 0$.

Bài toán 10. 33:

a) Chứng minh quy nạp: $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^n = \dfrac{(-1)^n.n!.a^n}{(ax+b)^{n+1}}, a \ne 0$

b) Suy ra đạo hàm cấp n của hàm số: $y = \frac{1}{x^2}$; $y = \frac{10x-4}{x^3-4x}$.

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 1 thì $\left(\frac{1}{ax+b}\right)' = \frac{-a}{(ax+b)^2} = \frac{(-1)^1.1!a}{(ax+b)^2}$: đúng

Giả sử công thức đúng khi n = k, k ≥ 1, tức là:

$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k.k!.a^k}{(ax+b)^{k+1}}$. Lấy đạo hàm 2 vế:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k+1)} = (-1)^k.k!.a^k.\frac{-(k+1)(ax+b)^k.a}{(ax+b)^{2k+2}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)a^{k+1}}{(ax+b)^{k+2}}$$

Nên công thức đúng khi n = k + 1. Vậy công thức đúng với $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

b) Xét hàm số $g(x) = -\frac{1}{x}$ thì $g'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Do đó $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{x}\right)^{(n+1)} = -\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Ta có $\frac{10x-4}{x^3-4x} = \frac{10x-4}{x(x^2-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$

$$15x - 4 = A(x^2-4) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$$
$$= (A+B+C)x^2 + 2(B-C)x - 4A.$$

Đồng nhất hệ số 2 vế, ta có: $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2(B-C)=10 \\ -4A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=-3 \end{cases}$

Do đó, $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2}$

Suy ra: $y^{(n)} = (-1)^n.n!\left[\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{2}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3}{(x+2)^{n+1}}\right]$.

Bài toán 10. 34:

a) Chứng minh công thức: $(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n.\sin(ax+b+n\frac{\pi}{2})$

b) Suy ra đạo hàm cấp n của hàm số:

$$y = \sin^4x + \cos^4x;\ y = \cos3x.\cos x.$$

Hướng dẫn giải

a) Khi n = 1: $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b) = a\sin(ax+b+\frac{\pi}{2})$: đúng

Giả sử: $(\sin(ax+b))^{(k)} = a^k.\sin(ax+b+k\frac{\pi}{2})$.

Lấy đạo hàm 2 vế, ta có:

$(\sin(ax+b))^{(k+1)} = a^{k+1}.\cos(ax+b+k\frac{\pi}{2}) = a^{k+1}.\sin(ax+b+(k+1)\frac{\pi}{2})$ nên công thức đúng khi $n = k+1$:đpcm.

Tương tự: $(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n.\cos(ax+b+n\frac{\pi}{2})$.

b) Ta có $y = \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos4x.$$

Vậy $y^{(n)} = -(\sin4x)^{(n-1)} = -4^{n-1}.\sin(4x + (n-1)\frac{\pi}{2})$

Ta có $y = \cos3x.\cos x = \frac{1}{2}(\cos4x + \cos2x)$

Suy ra: $y^{(n)} = \frac{1}{2}[4^n.\cos(4x + n\frac{\pi}{2}) + 2^n.\cos(2x + n\frac{\pi}{2})]$.

Bài toán 10. 35: Tính đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $f(x) = (3x-2)^4$ b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = 12(3x-2)^3$, $f''(x) = 108(3x-2)^2$.

$f'''(x) = 648(3x-1)$, $f^{(4)}(x) = 1944$, $f^{(n)}(x) = 0$ với $n \geq 5$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$, $f^{(3)}x = \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}}$, $f^{(4)}x = -\frac{15}{16}x^{\frac{7}{2}}$

Ta chứng minh quy nạp: $f^{-(n)}x = \frac{(-1)^{n-1}.(2n-3)!!}{2^n}x^{\frac{2n-1}{2}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

trong đó $(2n-3)!! = 1.3.5...(2n-3)$, $\forall n \geq 2$, $(-1)!! = 1$.

Bài toán 10. 36: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+9}{x^2+3}$. Hãy tính $f^{(1997)}(0)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = \frac{2x+9}{x^2+3} \Leftrightarrow f(x).(x^2+3) = 2x+9$

Do đó: $f'(x)(x^2+3) + 2xf(x) = 2$

$f''(x)(x^2+3) + 4x f'(x) + 2f(x) = 0$

$f'''(x)(x^2+3) + 6xf''(x) + 6f'(x) = 0$

Bằng quy nạp ta chứng minh được công thức:

$f^{(n)}(x)(x^2 + 3) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$

Suy ra: $f^{(n)}(0) = \frac{n(n-1)}{3}f^{(n-2)}(0)$

$\Rightarrow f^{(1997)}(0) = \frac{1997!}{3^{999}}f'(0) = \frac{2.1997!}{3^{999}}$.

Bài toán 10. 37: Cho f(x), g(x) là các hàm số có đạo hàm đến cấp n, chứng minh công thức $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.f^{(k)}g^{(n-k)}$.

Hướng dẫn giải

Ta sẽ chứng minh quy nạp theo n. Khi n = 1: đúng

Giả sử công thức đúng với n : $(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$

suy ra: $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)'$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n+1-k)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n+1-k)}$$

$$= f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}$$

$$= f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)}g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}$$

$$= f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)}g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}$$

$$= C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)}g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^0 fg^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}g^{(n+1-k)} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 10. 38: Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\sin(x - 1)$. Chứng tỏ hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} f^{(2020)}(x) + f^{(2020)}(y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Đặt a = x – 1, b = y – 1

$f(x) = (x^2 - 2x + 2)\sin(x - 1) = (a^2 + 1)\sin a = g(a)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} g^{(2020)}(a) + g^{(2020)}(b) = 0 & (1) \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

g(x) là hàm số lẻ nên g'(x) là hàm số chẵn, g''(x) là hàm số lẻ...

Tổng quát: $g^{(2020)}(x)$ là hàm số lẻ

nên với b = –a thì (1) thoả mãn

Thay b = –a vào (2) có $(a + 1)^2 + (a - 1)^2 = 10$

Giải ra được (a = 2; b = –2) hoặc (a = –2, b = 2)

Vậy nghiệm: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Bài toán 10. 39: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$.

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ có hệ số góc lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0, f(x_0))$:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Ta có $x_0 = 0$ nên $f(x_0) = -1$

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x_0) = 2$$

Thế vào thì có: $y = 2(x - 0) - 1 = 2x - 1$.

b) Hệ số góc của tiếp tuyến là đạo hàm tại đó:

$y' = -x^2 - 4x - 3 = 1 - (x + 2)^2 \le 1$.

Do đó hệ số góc lớn nhất là y' = 1 tại $x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = \dfrac{5}{2}$

Tiếp tuyến cần tìm: $y = 1(x + 2) + \dfrac{5}{2} = x + \dfrac{11}{3}$.

Bài toán 10. 40: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a) $y = x^3 - 3x + 2$, biết tiếp tuyến song song trục hoành.

b) $y = 2x^2 - 3x + 9$, biết tiếp tuyến hợp với trục hoành góc 45°.

Hướng dẫn giải

a) $y' = 3x^2 - 3$. Tiếp tuyến song song với trục hoành nên hệ số góc là đạo hàm

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

Với $x_0 = 1$ thì $f(x_0) = 0$: loại

Với $x_0 = -1$ thì $f(x_0) = 4$ nên có tiếp tuyến: y = 4.

b) $y' = 4x - 3$. Tiếp tuyến hợp với trục hoành góc 45^o nên hệ số góc:

$$k = \pm\tan 45^o = \pm 1.$$

Xét $y' = 1 \Leftrightarrow 4x - 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Ta có $f(x_0) = 8$ nên có tiếp tuyến: $y = x + 7$.

Xét $y' = -1 \Leftrightarrow 4x - 3 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$

Ta có $f(x_0) = 8$ nên có tiếp tuyến: $y = -x + \dfrac{17}{2}$.

Bài toán 10. 41: Viết phương trình tiếp tuyến của

(P): $y = -x^2 + 7x - 66$ biết tiếp tuyến đi qua B(2; 0).

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -2x + 17$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0)$:

$y = (-2x_0 + 17)(x - x_0) + (-x_0^2 + 17x_0 - 66) = (-2x_0 + 17)x + x_0^2 - 66$

Vì tiếp tuyến đi qua P(2; 0) nên ta có:

$0 = (-2x_0 + 17).2 + x_0^2 - 66$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 32 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -4$ hoặc $x_0 = 8$.

Với $x_0 = -4$ thì có tiếp tuyến: $y = 25x - 50$

Với $x_0 = 8$ thì có tiếp tuyến: $y = x - 2$.

Vậy có 2 tiếp tuyến $y = x - 2$ và $y = 25(x - 2)$.

Bài toán 10. 42: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + 3$ đi qua điểm $E(\dfrac{23}{9}; -1)$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đường thẳng d đi qua $E(\dfrac{23}{9}; -1)$ có hệ số góc k:

$y = k(x - \dfrac{23}{9}) - 1 = kx - \dfrac{23k}{9} - 1$.

Điều kiện d tiếp xúc với (C):

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3 = k\left(x - \dfrac{23k}{9}\right) - 1 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) vào (1): $x^3 - 3x^2 + 3 = (3x^2 - 6x)(x - \dfrac{23}{9}) - 1$.

$\Leftrightarrow 3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(3x^2 - 10x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 2$ hoặc $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

Với $x_0 = 2$ thì $k = 0$; Với $x_0 = 3$ thì $k = 9$.Với $x_0 = \frac{1}{3}$ thì $k = -\frac{5}{3}$. Vậy có 3 tiếp tuyến của đồ thị đi qua điểm E.

Bài toán 10. 43: Tìm m để đường thẳng

a) d: $y = mx - 1$ tiếp xúc với đồ thị (C): $y = x^3 - x^2 + 4x$.

b) d : $y = 7 - x$ tiếp xúc với đồ thị (C): $y = \frac{x^2 + m}{x - 1}$

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + 4x = mx - 1 & (1) \\ 3x^2 - 2x + 4 = m & (2) \end{cases}$$

Thế m từ (2) vào (1) : $x^3 - x^2 + 4x = (3x^2 - 2x + 4)x - 1$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0$.

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ (vì $2x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x).

$\Leftrightarrow x = 1$. Thế vào (2) thì $m = 5$. Vậy 2 đồ thị tiếp xúc khi $m = 5$.

b) Với $y = \frac{x^2 + m}{x - 1}$ thì $y' = \frac{x^2 - 2x - m}{(x - 1)^2}$

Với $y = 7 - x$ thì $y' = -1$.

Điều kiện 2 đồ thị tiếp xúc khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + m}{x - 1} = 7 - x \\ \frac{x^2 - 2x - m}{(x - 1)^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + m + 7 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 1 - m = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Khử m thì được: $4x^2 - 12x + 8 = 0$.

$\Leftrightarrow x = 1$ (loại) hoặc $x = 2$ (chọn).

Thế vào thì được $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 10. 44: Cho $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, biểu diễn các tổng sau đây theo f(x) và f '(x):

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i},\ B = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x - x_i} \text{ và } C = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3 - x_i}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$

$f'(x) = (x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \ldots + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})$

Do đó:

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}=\frac{(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)+...}{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$B=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{x-x_i}-1\right)=x\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}-n=x\frac{f'(x)}{f(x)}-n$$

$$C=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{3-x_i}=-n+3\frac{f'(3)}{f(3)}.$$

Bài toán 10. 45: Cho phương trình: $x^5-\frac{1}{2}x^4-5x^3+x^2+4x-1=0.$

a) Chứng tỏ phương trình có đúng 5 nghiệm x_i ($i=\overline{1,5}$).

b) Tính tổng $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{2x_i^5-x_i^4-2}$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x)=x^5-\frac{1}{2}x^4-5x^3+x^2+4x-1$ thì f(x) là hàm số liên tục trên R. Ta có: $f(-2)=-5<0$ $\quad f(0)=-1<0$ $\quad f(1)=-\frac{1}{2}<0$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=2>0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}>0 \qquad f(3)=\frac{175}{2}>0$$

Phương trình f(x) = 0 có các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sao cho:

$$-2<x_1<-\frac{3}{2}<x_2<0<x_3<\frac{1}{2}<x_4<1<x_5<3.$$

Hơn nữa, vì f(x) = 0 là phương trình bậc năm nên có đúng 5 nghiệm

b) Ta có x_i là nghiệm của phương trình nên:

$$x_i^5-\frac{1}{2}x_i^4-5x_i^3+4x_i-1=0 \Leftrightarrow 2x_i^5-x_i^4-2=2(5x_i^3-x_i^2-4x_i)$$

Do đó: $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{2(5x_i^3-x_i^2-4x_i)}$

Xét biểu thức $g(x)=\frac{x+1}{5x^3-x^2-4x}=\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$

Ta có: $\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{5x+4}$ nên đồng nhất được:

$$\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}=-\frac{1}{4x}+\frac{2}{9(x-1)}+\frac{5}{36(5x+4)}$$

Do đó $S = -\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i} + \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i - 1} + \frac{1}{72}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i + \frac{4}{5}}$

Mà $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

Vậy $x \neq x_i(i = \overline{1,5})$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{x - x_i}\right)$

và $f'(x) = 5x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x + 4$, do đó:

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1 - x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i - 1} = -\frac{f'(1)}{f(1)} = -12$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = 4$$

$$\frac{f'(-\frac{4}{5})}{f(-\frac{4}{5})} = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-\frac{4}{5} - x_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i + \frac{4}{5}} = -\frac{f'(-\frac{4}{5})}{f(-\frac{4}{5})} = -\frac{12900}{4789}$$

Vậy $S = -\frac{8959}{4789}$.

Bài toán 10. 46: Tính tổng:

$$T = C_n^1(\cos x - \sin x) + 0C_n^2 + C_n^3 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x) + \ldots +$$
$$+ C_n^n n\sin x\cos x(\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $y = (1 + \cos x)^n + (1 + \sin x)^n$ thì:

$$y = (C_n^0 + C_n^1\cos x + C_n^2\cos^2 x + \ldots + C_n^n\cos^n x) +$$
$$(C_n^0 + C_n^1\sin x + \ldots + C_n^n\sin^n x)$$
$$= 2C_n^0 + C_n^1(\sin x + \cos x) + C_n^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \ldots +$$
$$C_n^n(\sin^n x + \cos^n x)$$
$$\Rightarrow y' = C_n^1(\cos x - \sin x) + 0.C_n^2 + C_n^3 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$$
$$+ \ldots + C_n^n n\sin x\cos x(\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$$

Do đó: $T = y' = [(1 + \cos x)^n + (1 + \sin x)^n]'$
$= n(1 + \cos x)^{n-1}.(-\sin x) + n(1 + \sin x)^{n-1}\cos x$
$= n[\cos x(1 + \sin x)^{n-1} - \sin x(1 + \cos x)^{n-1}]$.

Bài toán 10. 47: Tính tổng

a) $P = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ b) $Q = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$

Hướng dẫn giải

a) Khi $x = 1$ thì $P = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Khi $x \neq 1$ ta có tổng $1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

Lấy đạo hàm hai vế:

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

Do đó $P = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

b) Khi $x = 1$ thì $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Khi $x \neq 1$, nhân x vào hai vế vào đẳng thức câu a)

$P.x = 1.x + 2.x^2 + 3.x^3 + ... + nx^n$

$$\Rightarrow \frac{n.x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} = 1.x + 2.x^2 + 3.x^3 + ... + nx^n$$

Đạo hàm vế phải: $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + ... + n^2x^{n-1} = Q$

Đạo hàm vế trái:

$$\frac{(n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + 1)(x-1)^2 - 2(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + 1)(x-1) - 2(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x)}{(x-1)^3}$$

Vậy $Q = \dfrac{n^2.x^{n-2} - \left(2n^2 + 2n - 1\right)x^{n+1} - (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}$.

Bài toán 10. 48: Cho số nguyên dương n. Tính tổng:

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ ... + n^k, \text{ với } k = 1,2,3.$$

Hướng dẫn giải

Xét đa thức $F(x) = (x - 1)(x^2 + x^3 + \ ... + x^n) = x^{n+1} - x^2$

Lấy đạo hàm cấp hai F''(x) ta có:

$2(2x + 3x^2 + \ ... + nx^{n-1}) + (x-1)\ (2.1 + 3.2.x + \ ... + n(n-1)x^{n-2})$

$= (n-1).n.x^{n-1} - 2$

Cho $x = 1$, ta có $2(2 + 3 + \ ... + n) = (n-1).(n-2) = 2(S_1(n) - 1)$

Vậy: $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lấy đạo hàm cấp ba F '''(x), ta có:

$3(2.1 + 3.2.x + \ldots + n(n-1)x^{n-2}) +$

$(x-1)(3.2.1 + 4.3.2.x + \ldots + n(n-1)(n-2).x^{n-3}) = (n+1)n(n-1).x^{n-2}$

Cho x = 1, ta có: $3(2.1 + 3.2 + \ldots + n(n-1)) = (n+1)n(n-1)$

Từ đó: $\sum_{m=1}^{n} m(m-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = S_2(n) - S_1(n)$

Vậy $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Tương tự, lấy đạo hàm cấp bốn, ta có:

$4(3.2.1 + 4.3.2 + \ldots + n(n-1)(n-2)x^{n-3})$

$+ (x-1)(4.3.2.1 + \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}) = (n+1)n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

Cho x = 1, ta có:

$4(3.2.1 + 4.3.2 + \ldots + n(n-1)(n-2)) = (n+1)n(n-1)(n-2)$

nên $\sum_{m=1}^{n} m(m-1)(m-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} = S_3(n) - 3S_2(n) + 2S_1(n)$

Vậy: $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Cách khác: Ta có thể dùng sai phân $\Delta x_2 = (x+1)^2 - x^2$ để tính S_1, $\Delta x_3 = (x+1)^3 - x^3$ để tính S_2, $\Delta x_4 = (x+1)^4 - x^4$ để tính S_3.

Bài toán 10. 49: Chứng minh:

a) $1.C_n^1 + 2C_n^2.9 + \ldots + kC_n^k.9^{k-1} + \ldots + nC_n^n.9^{n-1} = n.10^{n-1}$

b) $1.C_n^1 + 3C_n^3 + 5kC_n^5 + 7C_n^7 + \ldots = n.2^{n-2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = (1+x)^n$ thì $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ với mọi x

Và mặt khác, khai triển nhị thức:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k.k.x^{k-1}$$

Do đó: $\sum_{k=1}^{n} C_n^k.k.x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$ với mọi x

a) Lấy x = 9 thì có đpcm

b) Lấy x = 1 thì $1.C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n.2^{n-1}$

Lấy $x = -1$ thì $1.C_n^1 - 2C_n^2 + 3.C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}.n.C_n^n = 0$

Cộng lại và chia 2 thì có đpcm.

Bài toán 10. 50: Tính các tổng

a) $T = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + n^2C_n^n$ b) $S = 1^3C_n^1 + 2^3C_n^2 + ... + n^3C_n^n$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k$ lấy đạo hàm 2 vế thì có:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k.k.x^{k-1} \Rightarrow nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k.k.x^k$$

Lấy đạo hàm 2 vế thì được

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} C_n^k.k^2.x^{k-1}$$

a) Chọn $x = 1$ thì có: $T = n(n+1)2^{n-2}$.

b) Nhân x vào 2 vế, tiếp tục lấy đạo hàm 2 vế rồi chọn $x = 1$ thì có: $S = n^2(n+3)2^{n-3}$.

Bài toán 10. 51: Dùng vi phân, tính gần đúng:

a) $\sqrt[3]{26,7}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{20,3}}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

a) Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$ thì $f'(x) = \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$ với $x_0 = 27, \Delta x = -0,3$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-0,3) \approx 2,999.$$

b) Xét số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ thì $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$ với $x_0 = 20,25$; $\Delta x = 0,05$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{20,3}} \approx \frac{1}{4,5} + \frac{-1}{40,5\sqrt{20,25}}.(0,05) \approx 0,222.$$

Bài toán 10. 52: Dùng vi phân để tính gần đúng

a) $\cos 45^\circ 30'$ b) $\tan 29^\circ 30'$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức gần đúng: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

a) Ta có $45^\circ 30' = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{360}$

Xét $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$ với $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = \frac{\pi}{360}$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{360}\right) \approx \cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\frac{\pi}{360}$$

hay $\cos 45^\circ 30' \approx \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{360} \approx 0{,}7009.$

b) Ta có $29^\circ 30' = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{360}$

Xét $f(x) = \tan x$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ với $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{360}$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{360}\right) \approx \tan\frac{\pi}{6} + \left(1+\tan\frac{2\pi}{6}\right).\frac{-\pi}{360}$$

hay $\tan 29^\circ 30' \approx \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\left(-\frac{\pi}{360}\right) \approx 0{,}566.$

Bài toán 10. 53: Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^8 - x^7 - 128}{x^2 + 2x - 8}$ b) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng quy tắc L'Hospital:

a) Xét $f(x) = x^8 - x^7 - 128$ thì $f(2) = 0$ và $f'(x) = 8x^7 - 7x^6$

Xét $g(x) = x^2 + 2x - 8$ thì $g(2) = 0$ và $g'(x) = 4x + 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^8 - x^7 - 128}{x^2 + 2x - 8} = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{576}{10} = \frac{288}{5}.$$

b) Xét $f(x) = \sqrt{x} - 3$ thì $f(9) = 0$ và $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x\to 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = f'(9) = \frac{1}{6}$$

Bài toán 10. 54: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} + 2\sqrt[3]{1+3x} + 3x^2 - 3}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{\sqrt[n]{1+x} - 1}$

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = \sqrt{1+2x} + 2\sqrt[3]{1+3x} + 3x^2 - 3$

Thì $f(0) = 0$ và $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}} + 6x$.

Xét g(x) = sinx thì g(0) =0 và g'(x) = cosx

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}+2\sqrt[3]{1+3x}+3x^2-3}{x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt[3]{1}}+0=3.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+x}-1\right)'}{\left(\sqrt[n]{1+x}-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{m(1+x)^{\frac{m-1}{m}}}}{\dfrac{1}{n(1+x)^{\frac{n-1}{n}}}}=\frac{n}{m}$$

Bài toán 10. 55: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{10}-(1+bx)^{10}}{(1+ax)^9-(1+bx)^9}$

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = x^n$ thì f(1) = 1, $f'(x) = nx^{n-1}$

$g(x) = x^m$ thì g(1) = 1, $g'(x) = mx^{m-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}:\frac{x^m-1}{x-1}\right)=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{n}{m}.$$

b) Xét $f(x) = (1 + ax)^{10} - (1 + bx)^{10}$ thì f(0) = 0,

$f'(x) = 10a(1 + ax)^9 - 10b(1 + bx)^9$

và $g(x) = (1 + ax)^9 - (1 + bx)^9$ thì g(0) = 0,

$g'(x) = 9a(1 + ax)^8 - 9b(1 + bx)^8$.

nên $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{10}-(1+bx)^{10}}{(1+ax)^9-(1+bx)^9}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{10a-10b}{9a-9b}=\frac{10}{9}\text{ (với } a\neq b)$$

Bài toán 10. 56: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

Hướng dẫn giải

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)'}{(x^3)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x+1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan^2 x+1-\cos x)'}{(3x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(\tan^2 x+1)+\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\tan^3 x+2\tan x+\sin x)'}{(6x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\tan^2 x(\tan^2 x+1)+2(\tan^2 x+1)+\cos x}{6}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(x\sin x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 10. 57: Chứng minh:

a) Nếu $y = x^2 - x$ thì $(x + 2y)dx - xdy = 0$

b) Nếu $y = x + \sqrt{x^2+1}$ thì $\sqrt{1+x^2}.dy - ydx = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $dy = (2x - 1)dx$ nên

$(x + 2y)dx - xdy = (x + 2x^2 - 2x)dx - x(2x - 1)dx = 0$

b) Ta có $y' = 1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

Do đó : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}.dy-ydx=0$.

Bài toán 10. 58: Chứng minh:

a) Nếu $y=\sqrt{2x-x^2}$ thì $y^3.y''+1=0$.

b) Nếu $y = A\sin(at + b) + B\cos(at + b)$ thì $y'' + a^2.y = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $y'=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x).\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}=\frac{-(2x-x^2)-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$=\dfrac{-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}=\dfrac{-1}{y^3}\Rightarrow y^3.y''=-1\Rightarrow$ đpcm.

b) $y' = aA\cos(at + b) - aB\sin(at + b)$

$y'' = -a^2A\sin(at + b) - a^2B\cos(at + b)$.

$= -a^2(A\sin(at + b) + B\cos(at + b)) = -a^2.y$. Do đó: $y'' + a^2y = 0$.

Bài toán 10. 59: Cho 2n số a_i, b_i, $i = 1,2,...,n$ và hàm số:

$f(x) = a_1\sin b_1x + a_2\sin b_2x + ... + a_n\sin b_nx$ thoả mãn

$|f(x)| \le |\sin x|$, $\forall x \in [-1; 1]$.

Chứng minh: $|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n| \le 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có f(0) = 0 và $f'(x) = a_1b_1\cos b_1x + a_2b_2\cos b_2x + ... + a_nb_n\cos b_nx$

nên $f'(0) = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$. Theo định nghĩa:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}$$

Với mọi $x \in [-1; 1]$, $x \neq 0$: $\left|\frac{f(x)}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

mà $\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x} = 0$ nên $|f'(0)| \le 1$: đpcm.

Bài toán 10. 60: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn:

$$|f(-1)| \le 1,\ |f(0)| \le 1,\ |f(x)| \le 1.$$

Chứng minh: $|f'(x)| \le 4,\ \forall x \in [-1;1]$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = 2ax + b$ và

$f(-1) = a - b + c$, $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$ nên

$c = f(0)$, $b = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1))$, $a = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) - f(0)$

Với mọi x thuộc [–1; 1] thì $|f'(x)| \le \max\{|f(1)|, |f(-1)|\}$

Ta có $|f'(1)| = |f(1) + f(-1) - 2f(0) + \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)|$

$= |\frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) - 2f(0)|$

$\le \frac{3}{2}|f(1)| + \frac{1}{2}|f(-1)| + 2|f(0)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4.$

Ta có $|f'(-1)| = |-f(1) - f(-1) + 2f(0) + \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)|$

$= |-\frac{3}{2}f(-1) - \frac{1}{2}f(1) + 2f(0)|$

$\le \frac{3}{2}|f(-1)| + \frac{1}{2}|f(1)| + 2|f(0)| \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh .

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 10. 1: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số :

a) $y = x^4 - 5x$, $x_0 = -1$ b) $y = \sqrt{3x+1}$, $x_0 = 4$

Hướng dẫn

a) Dùng định nghĩa: $f'(x_0) = y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Kết quả $f'(-1) = -9$.

b) Kết quả $f'(4) = \dfrac{3}{2\sqrt{13}}$.

Bài tập 10. 2: Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số :

a) $y = \dfrac{1}{2x-1}$ với $x \neq \dfrac{1}{2}$ b) $y = \sqrt{3-x}$ với $x < 3$.

Hướng dẫn

a) Dùng định nghĩa: $f'(x_0) = y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Kết quả $y' = \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$ với $x \neq \dfrac{1}{2}$.

b) Kết quả $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$ với $x < 3$.

Bài tập 10. 3: Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = (x-2)(x^3+1)$ b) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

Hướng dẫn

a) dùng quy tắc đạo hàm của một tích. Kết quả $y' = 4x^3 - 6x^2 + 1$.

b) Kết quả $y' = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

Bài tập 10. 4: Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ b) $y = x^3\cos^2 x$

Hướng dẫn

a) dùng quy tắc đạo hàm của một thương. Kết quả $y' = \dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$

b) Kết quả $y' = x^2(3\cos^2 x - x\sin 2x)$

Bài tập 10. 5: Tính vi phân của các hàm số sau:

a) $y = x^6 - x\sqrt{x} + 2$ b) $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$

Hướng dẫn

a) Kết quả $dy = (8x^7 - \frac{3}{2}\sqrt{x})dx$

b) Dùng công thức đạo hàm của căn bậc 2.

Kết quả $dy = -\frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}dx$.

Bài tập 10. 6: Dùng vi phân, tính gần đúng

a) $\frac{1}{0,9995}$ b) $\sqrt[3]{2015}$

Hướng dẫn

a) Dùng công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Kết quả $\frac{1}{0,9995} \approx 1,0005$

b) Xét hàm $y = \sqrt[3]{x}$ và chọn $x_0 = 13$. Kết quả $\sqrt[3]{2015} \approx 12,6306$.

Bài tập 10. 7: Giải phương trình $y' = 0$ với hàm số:

a) $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 3}$ b) $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x - 3$

Hướng dẫn

a) Kết quả $x = 0$ hoặc $x = \frac{4}{3}$

b) Kết quả $x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 10. 8: Cho hypebol (H): $y = \frac{1}{x-2}$. Tiếp tuyến (T) của (H) tại điểm M có hoành độ $x = a \neq 2$, cắt trục hoành Ox tại A và cắt đường thẳng d: $x = 2$ tại B. Chứng minh M là trung điểm của AB và diện tích tam giác giới hạn bởi tiếp tuyến, Ox và d không đổi.

Hướng dẫn

Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Kết quả $S = 2$.

Bài tập 10. 9: Lập phương trình tiếp tuyến chung của 2 đồ thị:

(P_1): $y = x^2 - 5x + 6$ và (P_2): $y = -x^2 + 5x - 11$.

Hướng dẫn

Gọi phương trình tiếp tuyến chung là $y = ax + b$ rồi đồng nhất.

Kết quả: $y = 3x - 10$ và $y = -3x + 5$.

Bài tập 10. 10: Tính các tổng

a) $S = 1.C_{2000}^0 + 2.C_{2000}^1 + ... + 2001C_{2000}^{2000}$

b) $P = 1.2^{n-1}.C_n^1 + 2.2^{n-2}.C_n^2 + ... + n.2^0C_n^n$

Hướng dẫn

a) Dùng đạo hàm của nhị thức. Kết quả $S = 1001.2^{2000}$

b) Kết quả $P = n.3^{n-1}$

Bài tập 10. 11: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+2\sqrt[3]{1+3x}+3x^2-3}{5x}$

Hướng dẫn

a) Dùng quy tắc L'Hospital cho hai hàm số f và g liên tục trên khoảng (a, b) chứa x_0, có đạo hàm trên (a ;b) \ $\{x_0\}$ và có $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$. Kết quả $-\dfrac{2}{3}$.

b) Kết quả 3/5.

Bài tập 10. 12: Lập công thức đạo hàm cấp n của hàm số:

a) $y = \dfrac{13x+1}{6x^2-x-1}$ b) $y = \sin^2x - 2014x + 3$

Hướng dẫn

a) Kết quả $y = \dfrac{2}{3x+1} + \dfrac{3}{2x-1} \Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{2.(-1)^n.3^n.n!}{(3x+1)^{n+1}} + \dfrac{3(-1)^n.2^n.n!}{(2x-1)^{n+1}}$.

b) $y' = \sin2x - 2014$.

Kết quả $y^{(n)} = 2^{n-1}.\sin(2x + (n-1)\dfrac{\pi}{2})$.

Chuyên đề 11: ĐỊNH LÍ LAGRANGE VÀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU, CỰC TRỊ, LỒI LÕM

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

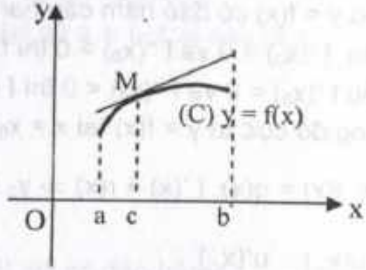
Định lí Lagrange:

Cho f là một hàm liên tục trên [a; b], có đạo hàm trên (a; b).

Lúc đó tồn tại $c \in (a,b)$ để:

$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

hay $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$



Định lý Rolle: Cho f là một hàm liên tục trên [a; b], có đạo hàm trên (a; b) và $f(a) = f(b)$. Lúc đó tồn tại $c \in (a; b)$ để $f'(c) = 0$.

Định lý Cauchy: Cho f và g là hai hàm liên tục trên [a, b], có đạo hàm trên (a; b) và $g'(x) \neq 0$ tại mỗi $x \in (a; b)$.

Lúc đó tồn tại $c \in (a,b)$ để: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Hàm hằng

Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số $f = C$ không đổi trên (a; b).

Hàm số đơn điệu:

Hàm số f xác định trên K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

- f đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Giả sử hàm số có đạo hàm trên khoảng (a; b) khi đó:

Nếu hàm số f đồng biến trên (a; b) thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$

Nếu hàm số f nghịch biến trên (a; b) thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$.

Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của (a; b) thì hàm số đồng biến trên khoảng (a; b).

Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của (a; b) thì hàm số nghịch biến trên khoảng (a; b).

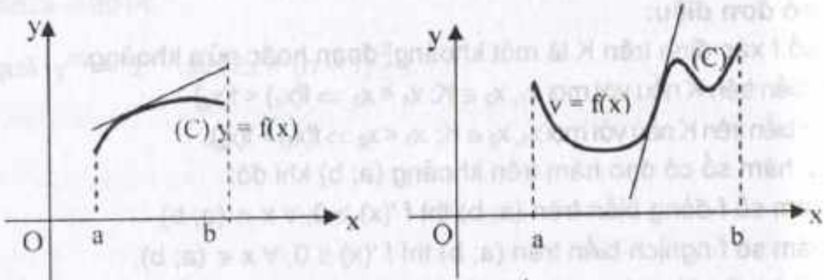
Nếu có thêm hàm số f liên tục trên [a; b); trên (a; b]; trên [a; b] thì hàm số f đồng biến, nghịch biến tương ứng trên [a; b); trên (a; b]; trên [a; b].

Cực trị hàm số

Cho hàm số f xác định trên D. Điểm $x_o \in D$ được gọi là một điểm cực đại của f nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset D$ chứa điểm x_o sao cho $f(x) < f(x_o)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_o\}$.

Tương tự điểm cực tiểu x_o: $f(x) > f(x_o)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_o\}$.

- Bổ đề Fermat: Giả sử hàm số có đạo hàm trên (a;b). Nếu f đạt cực trị tại điểm $x_o \in (a;b)$ thì $f'(x_o) = 0$.
- Cho $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a;b) chứa x_0, có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$:
  Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì f đạt cực tiểu tại x_0
  Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì f đạt cực đại tại x_0.
- Cho $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng (a;b) chứa x_0:
  Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0
  Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0
  Tung độ cực trị $y = f(x)$ tại $x = x_0$ ngoài phép thế $y_0 = f(x_0)$, với hàm đa thức:
  $y = f(x) = q(x).f'(x) + r(x) \Rightarrow y_0 = r(x_0)$, và hàm hữu tỉ: $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì $y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$
  Đặc biệt: Với hàm bậc 3 có CĐ, CT và nếu $y = q(x).y' + r(x)$ thì phương trình đường thẳng qua CĐ, CT là $y = r(x)$.
  Tính lồi lõm của đồ thị :
  Hàm số f xác định trên K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.
  f gọi là lõm trên K nếu $\forall\alpha,\beta,\alpha+\beta=1: f(\alpha x+\beta y) \le \alpha f(x)+\beta f(y), \forall x,y \ge 0$
  f gọi là lồi trên K nếu $\forall\alpha,\beta,\alpha+\beta=1: f(\alpha x+\beta y) \ge \alpha f(x)+\beta f(y), \forall x,y \ge 0$.



  Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên K
  f lõm trên K $\Leftrightarrow f''(x) \ge 0, \forall x \in K$
  f lồi trên K $\Leftrightarrow f''(x) \le 0, \forall x \in K$.
  Điểm uốn U là điểm ngăn cách phần lồi và phần lõm. Một bên tiếp tuyến tại điểm U nằm phía trên đồ thị còn ở bên kia thì tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị. Điểm uốn $(x_0;y_0)$ khi đạo hàm cấp 2 đổi dấu qua x_0.
  Nếu f lồi trên đoạn [a,b] thì GTLN = max{f(a); f(b)} và nếu f lõm trên đoạn [a,b] thì GTNN = min{f(a); f(b)}.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 11. 1: Tìm số c trong định lý Lagrang :

a) $y = f(x) = x - x^3$ trên $[-1; 3]$ b) $y = f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ trên $[1; 5]$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = f(x) = x - x^3$ liên tục trên $[-1, 3]$ và có đạo hàm $f'(x) = 1 - 3x^2$, theo định lý Lagrang thì tồn tại số $c \in [-1;3]$ sao cho

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{-24 - 0}{4} = 1 - 3c^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3c^2 = -6 \Leftrightarrow c^2 = \frac{7}{3}. \text{ Chọn } c = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

b) Hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ liên tục trên $[1; 5]$ và có đạo hàm

$f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$, theo định lý Lagrang thì tồn tại số $c \in [1; 5]$ sao cho

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{20} - 0}{4} = \frac{2c - 1}{2\sqrt{c^2 - c}}$$

$$\Leftrightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ Chọn } c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 11. 2: Tìm số c trong định lý Lagrang của hàm số:

$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & -1 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$ trên $[-1; 2]$ dù f không liên tục.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 2 \end{cases}$

Xét phương trình $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - (-1)} = f'(c) \Leftrightarrow 1 = f'(c)$

Với $-1 < c < 0$ thì $1 = -2$: loại

Với $0 < c < 2$ thì $1 = 2c \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2}$: chọn.

Bài toán 11. 3: Chứng minh:

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x$.

b) $\cos x + \sin x. \tan\dfrac{x}{2} = 1, \forall x \in (-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4})$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, D = **R**.

$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0, \forall x.$

Do đó f(x) là hàm hằng trên **R** nên $f(x) = f(0) = 1$.

b) Xét $f(x) = \cos x + \sin x \cdot \tan\frac{x}{2}$, $D = (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$.

$$f'(x) = -\sin x + \cos x\tan\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = -\sin x + \cos x.\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}.$$

$$= -\sin x + \tan\frac{x}{2}(1 + \cos x) = -\sin x + \tan\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= -\sin x + \sin x = 0 \text{ với mọi } x \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$$

Suy ra rằng f là một hàm hằng trên khoảng $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$.

Do đó $f(x) = f(0) = 1$ với mọi $x \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$.

Bài toán 11. 4: Chứng minh rằng:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \le 1$

b) $\arctan x + \text{arccot} x = \frac{\pi}{2}, x \in R$

Hướng dẫn giải

a) Nếu x = 1, x = –1 thì đúng.

Nếu $-1 < x < 1$ thì xét hàm số $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f(x) = C = f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Xét hàm số $f(x) = \arctan x + \text{arccot} x$, D = **R**

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = C = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 11. 5: Chứng minh rằng:

a) $\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \frac{\pi}{4}, x < 1.$

b) $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi, x \ge 1$

Hướng dẫn giải

a) Với x < 1, xét $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$

Ta có $f'(x) = \frac{(\frac{1+x}{1-x})'}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{-2}{(1-x)^2}}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} - \frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$.

Suy ra $f(x) = C = f(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

b) Với $x \geq 1$, xét $f(x) = 2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

Ta có $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{(\frac{2x}{1+x^2})'}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}$

$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$ (vì $x \geq 1$).

Suy ra $f(x) = C = f(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Bài toán 11. 6: Xác định hàm số f(x) thoả mãn:

$f(0) = 8$ và $f^2(x).f'(x) = 1 - 2x$ (*).

Hướng dẫn giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{3}(f^3(x))' = 1 - 2x \Leftrightarrow (f^3(x))' = 3 - 6x$.

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3x + 3x^2$ thì $g'(x) = (f^3(x))' - 3 + 6x = 0$.

nên g(x) = C: hằng số trên D, do đó:

$f^3(x) - 3x + 3x^2 = C \Rightarrow f^3(x) = -3x^2 + 3x + C$.

nên $f(x) = \sqrt[3]{-3x^2+3x+C}$. Vì $f(0) = 8 \Rightarrow C = 64$.

Vậy $f(x) = \sqrt[3]{-3x^2+3x+64}$, thử lại đúng.

Bài toán 11. 7: Xét sự biến thiên của hàm số:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ b) $y = x^4 + 8x^2 + 9$

Hướng dẫn giải

a) D = **R**. Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 1$.

BBT

x	$-\infty$		1/3		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$.

b) D = **R**. Ta có $y' = 4x^3 + 16x = 4x(x^2 + 4)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0$ trên khoảng $(0; +\infty) \Rightarrow$ y đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$y' < 0$ trên khoảng $(-\infty; 0) \Rightarrow$ y nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Bài toán 11. 8: Xét sự biến thiên của hàm số:

a) $y = x + \frac{3}{x}$ b) $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

BBT:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(0; \sqrt{3})$.

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{-x^2 - 2x - 5}{(x + 1)^2} < 0$ với mọi $x \neq -1$ (vì $\Delta' = 1 - 5 < 0$).

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng mỗi khoảng xác định.

Bài toán 11. 9: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

a) $y = \sqrt{x}(x - 3)$ b) $y = \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}$

Hướng dẫn giải

a) $D = [0; +\infty)$. Với $x > 0$, ta có:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 3) + \sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}(x - 1)}{2x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT:

x	0		1		$+\infty$
y'	||	$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng (0; 1) và đồng biến trên khoảng (1; $+\infty$).

b) D = **R**. Với $x \neq 0$, ta có: $y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$y' > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1$ hoặc $x < -1$ hoặc $x > 1$.

$y' < 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ và $x \neq 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Bài toán 11. 10: Xét sự biến thiên của hàm số:

a) $y = -\frac{3}{2}x + \sin x$ b) $y = x + 2\cos x$ trên $(0; \pi)$.

Hướng dẫn giải

a) D = **R**. Ta có $y' = -\frac{3}{2} + \cos x < 0, \forall x$ nên hàm số nghịch biến trên **R**.

b) $y' = 1 - 2\sin x$. Trên khoảng $(0; \pi)$.

$y' > 0 \Leftrightarrow \sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

$y' < 0 \Leftrightarrow \sin x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{6}$ hoặc $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; \frac{\pi}{6})$ và $(\frac{5\pi}{6}; \pi)$.

Bài toán 11. 11: Chứng minh các hàm số

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ nghịch biến trên **R**.

b) $f(x) = 2x - \cos x + \sqrt{3}\sin x$ đồng biến trên **R**.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Vì $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x, \forall x$ nên f '(x) < 0, ∀x do đó hàm số f nghịch biến trên R.

b) $y' = 2 + \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2(1 + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$.

$= 2[1 + \sin(x - \frac{\pi}{3})] \geq 0$, với mọi x.

Vậy hàm số đồng biến trên **R**.

Bài toán 11. 12: Tìm các giá trị của tham số để hàm số:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên **R**.

b) $f(x) = mx - x^3$ nghịch biến trên **R**.

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = x^2 + 2ax + 4$, $\Delta' = a^2 - 4$

– Nếu $a^2 - 4 < 0$ hay $-2 < a < 2$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \in$ **R** nên hàm số đồng biến trên **R**.

– Nếu a = 2 thì $f'(x) = (x + 2)^2 > 0$ với mọi $x \neq -2$ nên hàm số đồng biến trên R.

– Nếu a = –2 thì hàm số $f'(x) = (x - 2)^2 > 0$ với mọi $x \neq 2$ nên hàm số đồng biến trên **R**.

– Nếu a < –2 hoặc a > 2 thì f '(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt nên f ' có đổi dấu: loại.

Vậy hàm số đồng biến trên **R** khi và chỉ khi $-2 \leq a \leq 2$.

b) $y' = m - 3x^2$

– Nếu m < 0 thì y' < 0 với mọi $x \in$ **R** nên f nghịch biến trên **R**

– Nếu m = 0 thì $y' = -3x^2 \leq 0$ với mọi $x \in$ **R**, đẳng thức chỉ xảy ra với x = 0, nên hàm số nghịch biến trên **R**.

– Nếu m > 0 thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{m}{3}}$

BBT

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y		↘		↗		↘	

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$: loại

Vậy hàm số nghịch biến trên **R** khi và chỉ khi $m \leq 0$.

Bài toán 11. 13: Tìm m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định:

a) $y = \frac{(3m-1)x - m^2 + m}{x + m}$ b) $y = x + 2 + \frac{m}{x-1}$

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-m\}$. Ta có:

$$y = \frac{(x+m)(3m-1) - \left[(3m-1)x - m^2 + m\right]}{(x+m)^2} = \frac{4m^2 - 2m}{(x+m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow 4m^2 - 2m > 0$

$\Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{2}$.

b) Ta có $y' = 1 - \frac{m}{(x-1)^2}$, với mọi $x \neq 1$.

- Nếu $m \leq 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \neq 1$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- Nếu $m > 0$ thì $y' = \frac{x^2 - 2x + 1 - m}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{m}$

BBT

x	$-\infty$		$1-\sqrt{m}$		1		$1+\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(1 - \sqrt{m}; 1)$ và $(1; 1 + \sqrt{m})$: loại.

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $m \leq 0$.

Bài toán 11. 14: Tìm a để hàm số:

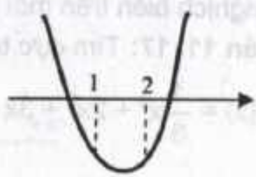
a) $f(x) = x^3 - ax^2 + x + 7$ nghịch biến trên khoảng (1; 2)

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(1 + 2\cos a)x^2 + 2x\cos a + 1$, $a \in (0; 2\pi)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 1$

Hàm số nghịch biến trên khoảng (1; 2) khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với mọi $x \in (1; 2)$



$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2a \leq 0 \\ 13 - 4a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq \frac{13}{4}$

b) $y' = x^2 - (1 + 2\cos a)x + 2\cos a$. Ta có $0 < a < 2\pi$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2\cos a$.

Vì y' > 0 ở ngoài khoảng nghiệm nên hàm số đồng biến với mọi x > 1 khi và chỉ khi $2\cos a \le 1 \Leftrightarrow \cos a \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \le a \le \frac{5\pi}{3}$

Bài toán 11. 15: Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3.

Hướng dẫn giải

D = **R**, $y' = 3x^2 + 6x + m$, $\Delta' = 9 - 3m$

Xét $\Delta' \le 0$ thì $y' \ge 0, \forall x$: Hàm luôn đồng biến (loại)

Xét $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì y' = 0 có 2 nghiệm x_1, x_2 nên $x_1 + x_2 = -2$, $x_1x_2 = \frac{m}{3}$

BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Theo đề bài: $x_2 - x_1 = 3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 9$

$\Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 9 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{3}m = 9 \Leftrightarrow m = -\frac{15}{4}$ (thoả)

Bài toán 11. 16: Tuỳ theo tham số m, xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 9x - m$$

Hướng dẫn giải

D = **R**. Ta có $y' = x^2 - 4mx + 9$; $\Delta' = 4m^2 - 9$

– Nếu $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow 4m^2 \le 9 \Leftrightarrow |m| \le \frac{3}{2}$ thì $y' \ge 0, \forall x$ nên hàm số đồng biến trên R

– Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m^2 \ge 9$

$\Leftrightarrow |m| \ge \frac{3}{2}$ thì y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = 2m \pm \sqrt{4m^2 - 9}$. Lập bảng biến thiên thì hàm đồng biến trên khoảng $(2m - \sqrt{4m^2 - 9}; 2m + \sqrt{4m^2 - 9})$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2m - \sqrt{4m^2 - 9})$, $(2m + \sqrt{4m^2 - 9}; +\infty)$.

Bài toán 11. 17: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ b) $y = x^4 - 5x^2 + 4$

Hướng dẫn giải

a) D = **R**. Ta có $f'(x) = x^2 + 4x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = -1$.

BBT

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	$-7/3$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm x = −3, f(−3) = −1 và đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$, $f(-1) = -\dfrac{7}{3}$.

b) D = R. Ta có $y' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$; $y'' = 12x^2 - 10$.

Ta có $y''\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right) = 20 > 0$, $y''(0) = -10 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại x = y,

$y_{CĐ} = 4$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $y_{CT} = -\dfrac{9}{4}$.

Bài toán 11. 18: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = (x + 2)^2 (x - 3)^2$. b) $y = \left|x^2 + 3x - 4\right|$

Hướng dẫn giải

a) $y' = 2(x + 2)(x - 3)^3 + 3(x + 2)^2 (x-3)^2 = 5x(x + 2)(x - 3)^2$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = 3$.

BBT

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-108	↗	0	↗	$+\infty$

Vậy điểm cực đại (−2; 0) và cực tiểu (0; −108).

b) $D = R$, $y = \begin{cases} x^2 + 3x - 4\ , & x \le -4 \text{ hay } x \ge 1 \\ -x^2 - 3x + 4, & -4 < x < 1 \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x + 3 & , x < -4 \text{ hay } x > 1 \\ -2x - 3, & -4 < x < 1 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$		-4		$-3/2$		1		$+\infty$
y'		−	||	+	0	−	||	+	
y		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy hàm số đạt CĐ $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{25}{4}\right)$, CT(−4; 0), CT (4;0)

Bài toán 11. 19: Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 5}$

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{(x + 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}$

BBT

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{6}$		-1		$-1+\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		+	0	−	||		0	+	
y	$-\infty$	↗	$-4-2\sqrt{6}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2\sqrt{6}-4$	↗	$+\infty$

Vậy điểm CĐ$(-1 - \sqrt{6}\,; -4 - 2\sqrt{6})$, CT$(-1 + \sqrt{6}\,; 2\sqrt{6} - 4)$.

b) $D = \mathbf{R} \setminus \{5\}$. Ta có $y' = \dfrac{-11}{(x - 5)^2} < 0,\ \forall x \neq 5$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định, do đó không có cực trị.

Bài toán 11. 20: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $-2 \le x \le 2$. Với $-2 < x < 2$ thì

$$y' = \sqrt{4 - x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2(x^2 - 2)}{\sqrt{4 - x^2}},\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

BBT:

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'	||	−	0	+	0	−	||
y		↘	CT	↗	CĐ	↘	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \sqrt{2}$, $y_{CĐ} = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2}$, $y_{CT} = -2$.

b) $D = \mathbf{R}$. Ta có $y' = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt CT(1; 2)

Bài toán 11. 21: Tìm cực trị của hàm số:

a) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}(x-5)$

Hướng dẫn giải

a) Tập xác định $D = (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{x^2-6} - \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2-6}}}{x^2-6} = \frac{3x^2(x^2-6) - x^4}{\sqrt{(x^2-6)^3}} = \frac{2x^2(x^2-9)}{\sqrt{(x^2-6)^3}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 3$.

BBT

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$		3		$+\infty$
y'		+	0	−			−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-9\sqrt{3}$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	$9\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{CĐ} = -9\sqrt{3}$, đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = 9\sqrt{3}$.

b) $D = \mathbb{R}$. Với $x \neq 0$ thì $y' = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-3\sqrt[3]{4}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = 0$

và đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -3\sqrt[3]{4}$.

Bài toán 11. 22: Tìm cực trị của hàm số

a) $y = x - \sin 2x + 2$ b) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbb{R}$, $y' = 1 - 2\cos 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $y'' = 4\sin 2x$.

Ta có $y''(-\frac{\pi}{6} + k\pi) = 4\sin(-\frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{3} < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm

$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $y_{CĐ} = -\frac{\pi}{6} + k\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

Ta có $y''(\frac{\pi}{6} + k\pi) = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại các điểm

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $y_{CT} = \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2$.

b) $y' = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x(1 + 2\cos x)$:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \text{ hoặc } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$

Ta có $y''(k\pi) = 2\cos k\pi + 4\cos 2k\pi = 2\cos k\pi + 4 > 0$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$, nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại các điểm $x = k\pi$, $y_{CT} = 2 - 2\cos k\pi$ bằng 0 khi k chẵn và bằng 4 khi k lẻ.

Ta có $y''(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 4\cos\frac{4\pi}{3} = 6\cos\frac{2\pi}{3} = -3 < 0$ nên hàm số

đạt cực đại tại điểm: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $y_{CĐ} = \frac{9}{2}$.

Bài toán 11. 23: Chứng minh rằng hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu với mọi tham số :

a) $y = x^3 + ax^2 - (1 + b^2)x + a + 4b - ab$

b) $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x + m^2 + 2}{x + m}$

Hướng dẫn giải

a) D = R. Ta có $y' = 3x^2 + 2ax - 1 - b^2$

$\Delta' = a^2 + 3(a + b^2) > 0, \forall a, \forall b$ nên $y' = 0$ luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Vậy hàm số luôn luôn có một cực đại và một cực tiểu.

b) $D = R \setminus \{-m\}$. Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + 2m - 2}{(x+m)^2}$

Tử thức g(x) có $\Delta' = m^2 - 2m + 2 > 0, \forall m$ và $g(-m) = -m^2 + 2m - 2 \neq 0, \forall m$ nên $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt khác $-m$. Vì y' đổi dấu hai lần khi qua 2 nghiệm, vậy hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu.

Bài toán 11. 24: Tìm tham số để hàm số:

a) $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 5$ đạt cực đại tại $x = 1$.

b) $y = \dfrac{x^2 + (1-m)x - 2}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $D = R$. Ta có $y' = -3(m^2 + 5m)x^2 + 12mx + 6$

Nếu hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $y'(1) = 0$

$$-3m^2 - 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -2.$$

Ta có $y'' = -6(m^2 + 5m)x + 12m$

Với $m = 1$ thì $y'' = -36x + 12$ nên $y''(1) = -24 < 0$, hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Với $m = -2$ thì $y'' = 36x - 24$ nên $y''(1) = 12 > 0$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ (loại). Vậy giá trị cần tìm $m = 1$.

b) $D = R \setminus \{-m\}$. Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - m^2 + m + 2}{(x+m)^2}$

Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì $y'(0) = 0$

$\Rightarrow -m^2 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1$ hoặc $m = 2$.

Với $m = -1$ thì $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x-1} = x + 3 + \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Do đó $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số: loại.

Với $m = 2$ thì $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x+2} = x - 3 + \dfrac{4}{x+2} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{4}{(x+2)^2}$

Do đó $y'' = \dfrac{8}{(x+2)^3}$, $y''(0) = 1 > 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy giá trị cần tìm $m = 2$.

Bài toán 11. 25: Tìm các tham số để đồ thị hàm số

a) $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$.

b) $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ không có cực trị.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $f(0) = 0$ nên $d = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ nên $f'(0) = 0$ do đó $c = 0$.

Vì f(1) = 1 nên a + b = 1. Hàm số đạt cực đại tại điểm x = 1 nên f '(1) = 0 do đó đó 3a + 2b = 0.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$

Thử lại: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$, $f'(x) = -6x^2 + 6x$, $f''(x) = -12x + 6$.

$f''(0) = 6 > 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 0: thoả mãn.

$f''(1) = -6 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại điểm x = 1: thoả mãn.

Vậy a = –2, b = –3 và c= 0.

b) Ta xét các trường hợp sau:

Khi m = 0 thì y = x – 1 nên hàm số không có cực trị

Khi $m \neq 0$ thì $y' = 3mx^2 + 6mx - m + 1$

Hàm số này không có cực trị khi và chỉ khi phương trình y' = 0 không có nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức là:

$$\Delta' \le 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 3m(m-1) = 12m^2 - 3m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{4}$$

Vậy điều kiện cần tìm là $0 \le m \le \frac{1}{4}$.

Bài toán 11. 26: Tìm các tham số để đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}ax^2 + x + 7$ có 2 cực trị và hoành độ 2 điểm cực trị của hàm số đó thoả mãn $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$.

Hướng dẫn giải

D = R. Ta có $y' = x^2 + ax + 1$.

Vì y' là hàm số bậc hai nên hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi y'(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a < -2$ hoặc $a > 2$.

Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của y'(x) = 0 thì

$$S = x_1 + x_2 = -a,\ P = x_1x_2 = 1.$$

Ta có: $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - 2 > 7 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2}\right)^2 > 9$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{S^2 - 2P}{P}\right)^2 > 9 \Leftrightarrow (a^2 - 2)^2 > 9 \Leftrightarrow a^2 > 5$$

Chọn giá trị $a < -\sqrt{5}$ hoặc $a > \sqrt{5}$.

Bài toán 11. 27: Cho đồ thị của hàm số:

$y = (3a^2 - 1)x^3 - (b^3 + 1)x^2 + 3c^2x + 4d$ có hai điểm cực trị là M(1; –7), N(2; –8). Hãy tính tổng $T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $A = 3a^2 - 1$, $B = -(b^3 + 1)$, $C = 3c^2$, $D = 4d$, thì hàm số đã cho là:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Ta có: $y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$. Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(2) = 0 \\ y(1) = -7 \\ y(2) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 2B + C = 0 \\ 12A + 4B + C = 0 \\ A + B + C + D = -7 \\ 8A + 4B + 2C + D = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -9 \\ C = 12 \\ D = -12 \end{cases}$$

Nên được $a = \pm 1$, $b = 2$, $c = \pm 2$, $d = -3$.

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 = 18$.

Bài toán 11. 28: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị: $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3 - 3m$.

Hướng dẫn giải

$y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1)$, $\Delta' = 1 > 0$, $\forall x$ nên đồ thị luôn luôn có CĐ và CT với hoành độ x_1, x_2.

Lấy y(x) chia cho y'(x) ta có: $y(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{m}{3}\right)y'(x) - 2(x + m)$.

Do đó: $y_1 = y(x_1) = \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{m}{3}\right)y'(x_1) - 2(x_1 + m) = -2(x_1 + m)$

Và $y_2 = y(x_2) = \left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{m}{3}\right)y'(x_2) - 2(x_2 + m) = -2(x_2 + m)$

nên đường thẳng qua CĐ, CT là $y = -2(x + m)$.

Bài toán 11. 29: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$ trong đó $p \neq 0$, $p^2 + q^2 = 1$. Tìm các giá trị p, q sao cho khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{(2x + p)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + px + q)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-px^2 - 2(q - 1)x + p}{(x^2 + 1)^2}$

Điều kiện để đồ thị có hai điểm cực trị x_1, x_2 là phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $px^2 + 2(q - 1)x - p = 0$

$\Delta' > 0, p \neq 0 \Leftrightarrow (q - 1)^2 + p^2 > 0$: đúng vì $p \neq 0$.

Khi đó $x_1 + x_2 = \frac{-2(q - 1)}{p}, x_1.x_2 = -1$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị d:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{2x_1 + p}{2x_1} - \frac{2x_2 + p}{2x_2}\right)^2 = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{p}{2x_1} - \frac{p}{2x_2}\right)^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2\left(1 + \frac{p^2}{4x_1^2x_2^2}\right) = \left((q-1)^2 + p^2\right)(1 + \frac{4}{p^2})$$

Nên $10 = \left((q-1)^2 + 1 - q^2\right)(1 + \frac{4}{1-q^2})$

$\Leftrightarrow q^3 + 4q^2 - 5q = 0 \Leftrightarrow q(q^2 + 4q - 5) = 0$

Chọn nghiệm $q = 0$ nên $p = \pm\ 1$. Vậy $p = \pm\ 1$, $q = 0$.

Bài toán 11. 30: Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{x}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng hàm số có ba điểm cực trị phân biệt A, B, C. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = x - 3 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ thì $f(-1) = -3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(3) = 1$ nên theo tính chất hàm liên tục, phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm x_A, x_B, x_C thỏa mãn điều kiện $-1 < x_A < 0 < x_B < 1 < x_C < 3$. Từ đó suy ra đpcm.

Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_A - x_B)(y_A - y_C) - (x_A - x_C)(y_A - y_B)\right|$$

Theo định lí Viete, ta có:

$x_A + x_B + x_C = 3$, $x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A = 0$ và $x_Ax_Bx_C = 1$

nên $y_A - y_B = \frac{x_A^2 - x_B^2}{2} - 3(x_A - x_B) - \left(\frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_B}\right)$

$$= (x_A - x_B)\left(\frac{x_A + x_B}{2} - 3\frac{1}{x_Ax_B}\right) = -\frac{3}{2}(x_A - x_B)(x_C + 1)$$

Tương tự $y_A - y_C = -\frac{3}{2}(x_A - x_C)(x_B + 1)$.

Từ đó suy ra $S = \frac{27}{4}$.

Bài toán 11. 31: Tìm khoảng lồi , lõm và điểm uốn của đồ thị :

a) $y = x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ b) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

Hướng dẫn giải

a) $D = R$

Ta có $y' = 3x^2 + 12x - 4$, $y'' = 6x + 12$

Do đó $y'' > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, $y'' < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy đồ thị lồi trên khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$, lõm trên khoảng $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ và có điểm uốn $I(-\frac{1}{2}; \frac{35}{8})$.

b) $D = R$

Ta có $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3$, $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$

Do đó $y'' > 0 \Leftrightarrow x > 1$, $y'' < 0 \Leftrightarrow x < 1, x \neq 0$.

$y'' = 0$ và đổi dấu khi $x = 1$.

Vậy đồ thị lồi trên khoảng $(-\infty; 1)$, lõm trên khoảng $(1; +\infty)$ và có điểm uốn $I(1; -1)$.

Bài toán 11. 32: Tìm khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị:

a) $y = \sqrt[3]{1-x}$ b) $y = \sqrt{5+x^2}$

Hướng dẫn giải

a) $D = R$

Ta có $y' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$; $y'' = \frac{-2}{9(1-x)\sqrt[3]{(1-x)^2}} \neq 0$

Do đó $y'' > 0 \Leftrightarrow x > 1$, $y'' < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Vậy đồ thị lồi trên khoảng $(-\infty; 1)$, lõm trên khoảng $(1; +\infty)$ và không có điểm uốn.

b) $D = R$

Ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}$; $y'' = \frac{5}{(5+x^2)\sqrt{5+x^2}} > 0, \forall x$

Vậy đồ thị lõm trên **R**.

Bài toán 11. 33: Chứng minh đồ thị sau có khoảng lồi và khoảng lõm nhưng không có điểm uốn:

a) $y = \frac{2x-1}{2-3x}$ b) $y = \frac{x^2+4x-1}{x-2}$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \neq \frac{2}{3}$

Ta có $y' = \frac{1}{(2-3x)^2}$; $y'' = \frac{6}{(2-3x)^3} \neq 0$

Do đó $y'' > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$, $y'' < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$.

Vậy đồ thị lồi trên khoảng $(\frac{2}{3}; +\infty)$, lõm trên khoảng $(-\infty; \frac{2}{3})$ và không có điểm uốn.

b) Điều kiện $x \neq 2$

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x-2)^2}; y'' = \frac{22}{(x-2)^3} \neq 0$

Do đó $y'' > 0 \Leftrightarrow x < 2$, $y'' < 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy đồ thị lồi trên khoảng $(2; +\infty)$, lõm trên khoảng $(-\infty; 2)$ và không có điểm uốn.

Bài toán 11. 34: Chứng minh đồ thị:

a) $y = -5x^4 - 6x^2 + 13$ luôn luôn lồi

b) $y = x \arctan x$ luôn luôn lõm.

Hướng dẫn giải

a) D = **R**. Ta có $y' = -20x^3 - 12x$,

$y'' = -60x^2 - 12 < 0$ với mọi x nên đồ thị $y = -5x^4 - 6x^2 + 13$ luôn luôn lồi

b) D = **R**. Ta có $y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x$$

nên đồ thị $y = x \arctan x$ luôn luôn lõm.

Bài toán 11. 35: Tìm tham số để đồ thị :

a) $y = f(x) = x^3 - ax^2 + x + b$ nhận I(1; 1) làm điểm uốn.

b) $y = f(x) = x^4 - mx^2 + 3$ có 2 điểm uốn.

Hướng dẫn giải

a) D = **R** . Ta có $y' = 3x^2 - 2ax + 1$, $y'' = 6x - 2a$

Do đó $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

I(1; 1) là điểm uốn $\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

b) D = **R** . Ta có $y' = 4x^3 - 2mx$, $y'' = 12x^2 - 2m$

Do đó $y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{m}{6}$.

Đồ thị có 2 điểm uốn $\Leftrightarrow \frac{m}{6} > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Bài toán 11. 36: Chứng minh rằng với a ∈ **R**, đồ thị hàm số

$y = \dfrac{x+a}{x^2+x+1}$ luôn có ba điểm uốn thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y' = \frac{(x^2+x+1)-(x+a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x^2+2ax+a-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{2(x^3+3ax^2+3(a-1)x-1)}{(x^2+x+1)^3}$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x^3+3ax^2+3(a-1)x-1=0$$

Đặt $f(x) = x^3+3ax^2+3(a-1)x-1,\ x \in \mathbb{R}$

Ta có: $f(0) = -1 < 0,\ f(-1) = 1 > 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ và đồng thời hàm số này liên tục tên tập số thực nên phương trình f(x) = 0 có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-\infty;-1),\ (-1;0),\ (0;+\infty)$

Giả sử hoành độ của một trong các điểm uốn là x_0 nên

$$x_0^3+3ax_0^2+3(a-1)x_0-1=0$$

Ta có: $x_0^3+3ax_0^2+3ax_0+3a-1=3x_0+3a$

$\Leftrightarrow (x_0+3a-1)(x_0^2+x_0+1) = 3(x_0+a)$

Suy ra $y_0 = \dfrac{x_0+a}{x_0^2+x_0+1} = \dfrac{(x_0+3a-1)(x_0^2+x_0+1)}{3(x_0^2+x_0+1)} = \dfrac{x_0+3a-1}{3}$

Vậy các điểm uốn của đồ thị thuộc đường thẳng $y = \dfrac{x+3a-1}{3}$ nên chúng thẳng hàng

. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 11. 1: Tìm số c trong định lý Lagrang :

a) $y = f(x) = 2x^2+x-4$ trên $[-1;2]$

b) $y = f(x) = \dfrac{2}{x}$ trên $[2;5]$.

Hướng dẫn

Giải phương trình $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Kết quả $c = \dfrac{1}{2}$

Kết quả $c = \sqrt{10}$

Bài tập 11. 2: Chứng minh rằng:

a) $\arctan\frac{1-x}{1+x}+\arctan x=-\frac{\pi}{4}, x>-1$.

b) $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=-\pi, x\le -1$

Hướng dẫn

a) Hàm số f(x) của VT có đạo hàm bằng 0 nên f(x) = f(0).

b) Hàm số f(x) của VT có đạo hàm bằng 0 nên f(x) = f(−1).

Bài tập 11. 3: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số:

a) $y=\frac{x-2}{x^2+x+1}$ b) $y=\frac{2x}{x^2-9}$

Hướng dẫn

a) Tính đạo hàm và xét dấu.

Kết quả đồng biến trên $(2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7})$ và nghịch biến trên $(-\infty; 2-\sqrt{7})$, $(2+\sqrt{7}; +\infty)$.

b) Kết quả nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$

Bài tập 11. 4: Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

a) $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$ b) $y=\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}$

Hướng dẫn

a) Kết quả đồng biến trên $(-\infty; -3)$, $(3; +\infty)$, nghịch biến trên $(-3; -\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; 3)$.

b) Kết quả đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Bài tập 11. 5: Cho hàm số a, b thoả mãn $b\neq a+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Chứng minh hàm số

$y=\frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.

Hướng dẫn

Vì $y'=\frac{\sin(b-a)}{\sin^2(x+b)}$ có tử thức không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

Bài tập 11. 6: Chứng minh hàm số sau không có đạo hàm tại $x = x_0$ nhưng đạt cực trị tại điểm đó.

a) $f(x)=|x^2-2015x+2014|+2016$ với $x_0 = 2014$

b) $f(x)=\begin{cases}-2x & \text{khi } x<0\\ \sin\frac{x}{2} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ với $x_0 = 0$.

Hướng dẫn

a) Dùng định nghĩa tính đạo hàm. Kết quả CT (2014; 2016).

b) Kết quả CĐ(0;0)

Bài tập 11. 7: Tìm các tham số thực sao cho hàm số

a) $y = f(x) = x + p + \dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm A(–2; –2).

b) $y = a.\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ đạt CĐ tại $x = \dfrac{\pi}{3}$

Hướng dẫn

a) Dùng điều kiện cần là $f'(-2) = 0$. Kết quả $p=q=1$

b) Dùng điều kiện cần là $f'(\dfrac{\pi}{3}) = 0$. Kết quả $a = 2$.

Bài tập 11. 8: Cho hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$

a) Tìm điều kiện a, b để hàm số có 2 cực trị

b) Chứng minh phương trình $y = 0$ không thể có 3 nghiệm phân biệt .

Hướng dẫn

a) Kết quả $a.b > 0$.

b) Xét trường hợp không có cực trị và còn trường có cực trị thì ta chứng minh $y_{CĐ}.y_{CT} \geq 0$.

Bài tập 11. 9: Tìm điều kiện có CĐ, CT và lập phương trình đường thẳng qua CĐ, CT của đồ thị $y = x^3 - 2x^2 + mx - 1$.

Hướng dẫn

Lấy y chia y'.

Kết quả $m < \dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{6m+8}{9}x + \dfrac{2m-9}{9}$

Bài tập 11. 10: Chứng minh trong tất cả tiếp tuyến của đồ thị :

$y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 12x^2 - 4x + 7$ thì tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc lớn nhất. Lập phương trình tiếp tuyến đó.

Hướng dẫn

Hệ số góc của tiếp tuyến là giá trị đạo hàm tại điểm đó.

Tính y' và tìm GTLN.

Kết quả $y = 140x - 569$.

Bài tập 11. 11: Chứng minh đồ thị sau có khoảng lồi và khoảng lõm nhưng không có điểm uốn :

a) $y = \dfrac{4x+1}{5-3x}$ b) $y = \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{7x - 2}$

Hướng dẫn

a) Chứng minh y" khác 0 và có đổi dấu

b) Chứng minh y" khác 0 và có đổi dấu

Chuyên đề 12: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Đối với hàm số $y = f(x)$ trên D. Xét dấu đạo hàm y' hoặc từ bảng biến thiên có kết luận về GTLN, GTNN. Nếu cần thì đặt ẩn phụ $t = g(x)$ với điều kiện đầy đủ của t.

Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì: $\min f(x) = f(a)$ và $\max f(x) = f(b)$. Ngược lại với hàm nghịch biến.

Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm x_i thì:

$\min f(x) = \min \{ f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(b) \}$

$\max f(x) = \max \{ f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(b) \}$

Nếu f lồi trên đoạn $[a,b]$ thì GTLN = $\max\{f(a); f(b)\}$ và nếu f lõm trên đoạn $[a; b]$ thì GTNN = $\min\{f(a); f(b)\}$.

Đối với các đại lượng, chọn đặt biến x (hoặc t), kèm điệu kiện tồn tại. Dựa vào giả thiết, các quan hệ cho để xác lập hàm số cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Chứng minh bất đẳng thức:

Nếu $y = f(x)$ có $y' > 0$ thì $f(x)$ đồng biến:

$x > a \Rightarrow f(x) > f(a); x < b \Rightarrow f(x) < f(b)$

Đối với $y' < 0$ thì ta có bất đẳng thức ngược lại.

Việc xét dấu y' đôi khi phải cần đến y'', y''',... hoặc xét dấu bộ phận, chẳng hạn tử số của một phân số có mẫu dương,.... Nếu $y'' > 0$ thì y' đồng biến từ đó ta có đánh giá $f'(x)$ rồi $f(x)$,...

- Từ bảng biến thiên ta cũng nhận được GTLN, GTNN để có đánh giá.
- Bất đẳng thức có biểu thức dạng $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ là dùng định lý Larange

  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, sự tồn tại số $c \in (a;b)$ hay giá trị $f'(c)$ cũng có đánh giá bất đẳng thức.
- Có thể phối hợp với các bất đẳng thức cơ bản.

Phương pháp tiếp tuyến

Cho n số a_i thuộc D có tổng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = nb$ không đổi.

Bất đẳng thức có dạng $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \geq nf(b)$.

Lập phương trình tiếp tuyến tại $x = b$: $y = Ax + B$.

Nếu $f(x) \geq Ax + B$ trên D, dấu bằng xảy ra khi $x = b$.

Khi đó $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n))$

$$\geq A(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + nB$$

$$= Anb + nB = n(Ab + B) = nf(b)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = b$.

Còn nếu $f(x) \le Ax + B$ trên D, dấu bằng xảy ra khi x = b thì có ngược lại $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \le nf(b)$.

Có thể dùng tính lồi lõm để khẳng định hay dự đoán bất đẳng thức.

Bất đẳng thức Jensen

Cho hàm số y = f(x) liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên K.

- Nếu $f''(x) \ge 0, \forall x \in K \Rightarrow$ f lõm trên K

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta = 1: f(\alpha x + \beta y) \le \alpha f(x) + \beta f(y), \forall x, y \ge 0$

Với mọi a, b, c, d thuộc K thì:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \le f\left(\frac{a+b}{2}\right); \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \le f\left(\frac{a+b+c}{3}\right), ...$$

- Nếu $f''(x) \le 0, \forall x \in K \Rightarrow$ f lồi trên K

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta, \alpha + \beta = 1: f(\alpha x + \beta y) \ge \alpha f(x) + \beta f(y), \forall x, y \ge 0$.

Với mọi a, b, c, d thuộc K thì:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right); \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \ge f\left(\frac{a+b+c}{3}\right), ...$$

Giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình:

- Nếu hàm số f đơn điệu trên K thì phương trình f(x) = 0 có tối đa 1 nghiệm. Nếu f(a) = 0, a thuộc K thì x = a là nghiệm duy nhất.
- Nếu f có đạo hàm cấp 2 không đổi dấu trên K thì f ' là hàm đơn điệu nên phương trình f(x) = 0 có tối đa 2 nghiệm trên K. Nếu f(a) = 0 và f(b) = 0 với $a \ne b$ thì phương trình chỉ có 2 nghiệm là x = a, x = b.
- Nếu f là một hàm liên tục trên [a; b], có đạo hàm trên (a; b) thì phương trình $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x)$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a; b)$.
- Nếu *f* là một hàm liên tục trên [a; b], có đạo hàm trên (a; b) và $f(a) = f(b) = 0$ thì giữa hai nghiệm của f có ít nhất một nghiệm của f '.
- Nếu 2 hàm f và g liên tục trên [a; b], có đạo hàm trên (a; b) và $g'(x) \ne 0$ tại mỗi $x \in (a; b)$ thì phương trình $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ có ít nhất một nghiệm $x = c \in (a,b)$.

Điều kiện phương trình về nghiệm :

Cho y = f(x) trên D đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất: GTLN = M và GTNN = m thì

Phương trình f(x) = k có nghiệm $\Leftrightarrow m \le k \le M$

Bất phương trình $f(x) \ge k$ có nghiệm $\Leftrightarrow k \le M$

Bất phương trình $f(x) \le k$ có nghiệm $\Leftrightarrow k \ge m$

Bất phương trình $f(x) \ge k$ có nghiệm mọi x thuộc D $\Leftrightarrow k \le m$

Bất phương trình $f(x) \le k$ có nghiệm mọi x thuộc D $\Leftrightarrow k \ge M$

Chú ý:

1) Từ BBT ta tính được số nghiệm phương trình, điều kiện về số nghiệm phương trình. Một số bài toán ta chuyển tham số về 1 bên dạng $m = f(x)$.

2) Số nghiệm của phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$.

Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x$ hay $f'(x) \leq 0, \forall x$ thì $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm.

Nếu $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và:

Với $y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0$: phương trình $f(x) = 0$ chỉ có 1 nghiệm

Với $y_{CĐ} \cdot y_{CT} = 0$: phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm (1 đơn, 1 kép)

Với $y_{CĐ} \cdot y_{CT} < 0$: phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

3) Khai triển Taylor của hàm f tại điểm $x = x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 12. 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$

b) $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ trên đoạn $[-5; 5]$.

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = x^2 + 4x + 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -3$.

Ta có $f(-4) = -\dfrac{16}{3}$, $f(-3) = -4$; $f(-1) = -\dfrac{16}{3}$, $f(0) = -4$.

Vậy $\min\limits_{x \in [-4;0]} f(x) = -\dfrac{16}{3}$; $\max\limits_{x \in [-4;0]} f(x) = -4$

b) Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ trên đoạn $[-5; 5]$

$g'(x) = 3x^2 + 6x - 72$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = -6$ (loại)

$f(-5) = 500$; $f(5) = -70$; $f(4) = -86$.

Do đó $-86 \leq g(x) \leq 400$, $\forall x \in [-5; 5]$ và vì hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 5]$ nên $0 \leq f(x) = |g(x)| \leq 400$.

Vậy $\min\limits_{x \in [-5;5]} f(x) = 0$; $\max\limits_{x \in [-5;5]} f(x) = f(-5) = 400$.

Bài toán 12. 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $y = \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$ b) $y = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x}$ với $x \geq 2$.

Hướng dẫn giải

a) $y' = -\dfrac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

BBT

x	0		$-1/2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	2

Vậy $\max y = \dfrac{10}{3}$ và không tồn tại GTNN.

b) Với $x \ge 2$ thì mẫu thức $x^2 - x = x(x-1) > 0$, ta có:

$$y = x^2 - x - \frac{1}{x^2 - x} = 2x - 1 + \frac{2x-1}{(x^2-x)^2} > 0,\ \forall x \ge 2$$

Nên hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Vậy $\min y = f(2) = \dfrac{3}{2}$ và không tồn tại GTLN.

Bài toán 12. 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^4 - x^2 + x + \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ b) $y = |x| + \left|1 + \dfrac{2}{x-1}\right|$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \ne 0$. Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}, |t| \ge 2$ thì

$$y = x^4 - x^2 + x + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = t^4 - 5t^2 + t + 4$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 5t^2 + t + 4$ với $|t| \ge 2$

$f'(t) = 4t^3 - 10t + 1$, $f''(t) = 12t^2 - 10$

Khi $t \ge 2$ thì $f''(t) > 0$ nên

$f'(t) \ge f'(2) = 13 > 0$ do đó $f(t) \ge 2$.

Khi $t \le -2$ thì $f''(t) > 0$ nên

$f'(t) \le f'(-2) = -11 < 0$ do đó $f(t) \ge -2$.

So sánh thì $\min y = f(-2) = -2$ khi $x = -1$.

b) Ta có $y = |x| + \left|1 + \dfrac{2}{x-1}\right| = |x| + \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$. Điều kiện $x \ne 1$.

Khi $-1 \le x \le 0$ thì hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Ta có $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$.

$y(-1) = 1$, $y(0) = 1$, $f(1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$

So sánh thì $\min\limits_{-1\le x\le 0} y = 2\sqrt{2} - 2$ tại $x = 1 - \sqrt{2}$.

Khi $x < -1$ hoặc $x > 1$ thì $y > 1 > 2\sqrt{2} - 2$

Khi $0 < x < 1$ thì $y > 1 > 2\sqrt{2} - 2$.

Vậy $\min y = 2\sqrt{2} - 2$ tại $x = 1 - \sqrt{2}$.

Bài toán 12. 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

b) $y = f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số f xác định và liên tục trên đoạn [–2; 2]

$f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, với mọi $x \in (-2; 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$; $f(-2) = -2$; $f(2) = 2$.

So sánh thì $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$ và $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2$.

b) Điều kiện $\begin{cases} -x^2 + 4x + 21 \ge 0 \\ -x^2 + 3x + 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 5$

$$y' = \frac{-x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x + 21}} - \frac{-2x + 3}{2\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$$

$$= \frac{(4 - 2x)\sqrt{-x^2 + 3x + 10} - (3 - 2x)\sqrt{-x^2 + 4x + 21}}{2\sqrt{-x^2 + 4x + 21}.\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow (4 - 2x)\sqrt{-x^2 + 3x + 10} = (3 - 2x)\sqrt{-x^2 + 4x + 21}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4 - 2x)(3 - 2x) \ge 0 \\ (4 - 2x)^2(-x^2 + 3x + 10) = (3 - 2x)^2(-x^2 + 4x + 11) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \text{ hay } x > 2 \\ -51x^2 + 104x - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Ta có $y(-2) = 3; y(\frac{1}{3}) = \sqrt{2}; y(5) = 4$

Vậy min y = $\sqrt{2}$ tại x = $\frac{1}{3}$, max y = 4 tại x = 5.

Bài toán 12. 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ b) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$

Hướng dẫn giải

a) $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Ta có $f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$; $f(\pi) = \pi$.

So sánh thì $\max\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\min\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

b) Hàm số liên tục trên D = R, tuần hoàn với chu kì 2π nên ta xét trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

$y' = \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}, x = \pm\pi$

Ta có $f(-\pi) = 0$, $f(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(\pi) = 0$.

Vậy $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\min y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 12. 6: Tìm GTLN, GTNN của $T = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + 4y^2}$, trong đó x, y tuỳ ý và không đồng thời bằng 0.

Hướng dẫn giải

Xét y = 0 thì $x \neq 0$ nên T = 1. Xét $y \neq 0$, đặt x = ty thì:

$$T = \frac{t^2y^2 + y^2}{t^2y^2 + ty^2 + 4y^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2 + t + 4} = f(t), D = \mathbb{R}.$$

$f'(t) = \frac{t^2 + 6t - 1}{(t^2 + t + 4)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -3 \pm \sqrt{10}$

Lập BBT thì có $\max T = f(-3-\sqrt{10}) = \dfrac{10+2\sqrt{10}}{15}$;

$$\min T = f(-3+\sqrt{10}) = \frac{10-2\sqrt{10}}{15}.$$

Bài toán 12. 7: Cho 2 số dương thay đổi x và y thoả mãn $x + y = 1$.

Tìm GTNN của

a) $Q = xy + \dfrac{1}{xy}$ b) $P = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-x}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = xy$, vì $x, y > 0$ và $x + y = 1 \ge 2\sqrt{xy}$ nên $0 < t \le \dfrac{1}{4}$.

Ta có $Q = f(t) = t + \dfrac{1}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} < 0$ nên f nghịch biến trên $(0; \dfrac{1}{4}]$.

Vậy $\min Q = f(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{17}{4}$.

b) Với $x, y > 0$, $x + y = 1$ nên đặt $x = \sin^2 a$, $y = \cos^2 a$ với $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$

$$P = \frac{\sin^2 a}{\cos a} + \frac{\cos^2 a}{\sin a} = \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a}$$

Đặt $t = \sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $1 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$$P = f(t) = \frac{-t^3 - 3t}{t^2 - 1}, f'(t) = \frac{(-3t^2-3)(t^2-1) - 2t(-t^3-3t)}{(t^2-1)^2} = -\frac{t^4+3}{(t^2-1)^2} < 0$$

Nên f nghịch biến trên $[1; \sqrt{2}]$. Vậy $\min P = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Bài toán 12. 8: Cho 3 số dương a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm GTLN của $S = \dfrac{a^5 - 2a^3 + a}{b^2 + c^2}.b^2 + \dfrac{b^5 - 2b^3 + b}{c^2 + a^2}.c^2 + \dfrac{c^5 - 2c^3 + c}{a^2 + b^2}.a^2$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết thì $a, b, c \in (0; 1)$

Ta có $S = \dfrac{a(1-a^2)^2}{1-a^2}b^2 + \dfrac{b(1-b^2)^2}{1-b^2}c^2 + \dfrac{c(1-c^2)^2}{1-c^2}a^2$

$$= a(1-a^2)b^2 + b(1-b^2)c^2 + c(1-c^2)a^2$$

Xét $f(x) = x(1 - x^2)$ trên khoảng $(0; 1)$

$f'(x) - 1 - 3x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Lập BBT thì $0 < f(x) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Do đó $S \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}(b^2 + c^2 + a^2) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Dấu bằng khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $\max S = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Bài toán 12. 9: Cho x, y là các số thực thay đổi và thoả điều kiện $x^3 \le y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = x^2 + y^2 - 8x + 16$.

Hướng dẫn giải

Nếu $x > 0$ thì $x^6 \le y^2$ và $F = x^2 + y^2 - 8x + 16 \ge x^6 + x^2 - 8x + 16$.

Xét hàm số: $f(x) = x^6 + x^2 - 8x + 16$ với $x > 0$.

$f'(x) = 6x^5 + 2x - 8$; $f''(x) = 30x^4 + 2 > 0,\ \forall\ x > 0$.

Do đó $f'(x)$ đồng biến:

$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0$; $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$

BBT

x	0		1		$-\infty$
f'		–	0	+	
f	16	↘	10	↗	$+\infty$

Từ đó: $f(x) \ge 0 \Rightarrow F \ge 10$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.

Nếu $x \le 0$ thì $x^2 + y^2 - 8x + 16 \ge 16$

Vậy $\min F = 10$, đạt được khi $x = y = 1$.

Bài toán 12. 10: Cho $2 \le x \le 3 \le y$. Tìm GTNN của:

$$T = \frac{2x^2 + y^2 + 2x + y}{xy}$$

Hướng dẫn giải

Xét $g(y) = \dfrac{2x^2 + y^2 + 2x + y}{xy} = \dfrac{2(x+1)}{y} + \dfrac{y+1}{x}$, với $2 \le x \le 3 \le y$

$g'(y) = \dfrac{-2(x+1)}{y^2} + \dfrac{1}{x}$, $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2x(x+1)}$

BBT

x	3		$\sqrt{2x(x+1)}$		$-\infty$
y'		–	0	+	
y		↘		↗	

Do đó min g(y) = g($\sqrt{2x(x+1)}$) = $2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}$

Xét f(x) = $2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}$, $2 \le x < 3$ thì

$f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{x^2\sqrt{\frac{1}{x}+1}} - \dfrac{1}{x^2} < 0$ nên f nghịch biến trên đoạn [2; 3] do đó:

minf(x) = f(3) = $\dfrac{4\sqrt{6}+1}{3}$. Do đó B ≤ $\dfrac{4\sqrt{6}+1}{3}$, dấu bằng khi x = 3, y = $2\sqrt{6}$.

Vậy minT = $\dfrac{4\sqrt{6}+1}{3}$

Bài toán 12. 11: Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z \le \dfrac{3}{2}$.

Tìm GTNN $T = \dfrac{x}{y^2z}+\dfrac{y}{z^2x}+\dfrac{x}{x^2y}+\dfrac{x^5}{y}+\dfrac{y^5}{z}+\dfrac{z^5}{x}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô si: $T \ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{(xyz)^2}}+3.\sqrt[3]{(xyz)^4}$

Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$ thì $0 < t \le \dfrac{x+y+z}{3} = \dfrac{1}{2}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{3}{t^2}+3t^4$, $0 < t \le \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-6}{t^3}+12t^3 = \dfrac{3(4t^3-2)}{t^3} < 0, \quad \forall t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$ nên f nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, do đó $f(t) \ge f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{195}{16}$.

Dấu = khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$. Vậy minT = $\dfrac{195}{16}$.

Bài toán 12. 12: Cho phương trình: $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ có nghiệm. Tìm giá trị bé nhất của $T = a^2+b^2$.

Hướng dẫn giải

Gọi x_0 là nghiệm: $x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+ax_0+1=0 \Rightarrow x_0 \ne 0$ nên

$x_0^2 + ax_0 + b + \frac{a}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b = 0$

Đặt: $y = x_0 + \frac{1}{x_0}$. Điều kiện $|y| = |x_0| + |\frac{1}{x_0}| \geq 2$ nên:

$(y^2 - 2) + ay + b = 0 \Rightarrow |2 - y^2| = |ay + b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{y^2 + 1}$.

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{\left(2 - y^2\right)^2}{1 + y^2}.$$

Đặt: $t = y^2$, $t \geq 4$. Ta chứng minh $\frac{(2-t)^2}{1+t} \geq \frac{4}{5}$.

Xét $f(t) = \frac{(2-t)^2}{1+t}$, $t \geq 4$ thì $f'(t) = \frac{3t-6}{(1+t)^2} > 0 \Rightarrow$ f đồng biến

nên $t \geq 4 \Rightarrow f(t) \geq f(4) = \frac{4}{5}$. Dấu = khi $t = 4 \Rightarrow y = \pm 2$ và $\frac{a}{y} = \frac{b}{1}$

nên chọn $b = \frac{-2}{5}$, $a = \frac{-4}{5}$.

Phương trình: $x^4 - \frac{4}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 1 = 0$ có nghiệm $x = 1$

Vậy: $\min(a^2 + b^2) = \frac{4}{5}$

Bài toán 12. 13: Tìm số hạng bé nhất của dãy xác định bởi:

$$u_n = n^4 - 20n^3 + 0{,}5n^2 - 13n.$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 20x^3 + 0{,}5x^2 - 13x$, $x \geq 1$.

$$f'(x) = 4x^4 - 60x^2 + x = x(4x^2 - 60x + 1)$$

Với $x \geq 1$ thì $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = \frac{30 + \sqrt{896}}{4}$

Lập BBT thì f đạt GTNN tại $x = \frac{30 + \sqrt{896}}{4} \in [14;15]$.

Ta có $f(14) = -16548$; $f(15) = -16957{,}5$. So sánh thì số hạng lớn nhất là $u_{15} = f(15) = -16957{,}5$.

Bài toán 12. 14: Cho parabol (P): $y = x^2$ và điểm $A(-3; 0)$. Xác định điểm M thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; x^2)$ là một điểm bất kì của parabol (P)

Ta có $AM = \sqrt{(x+3)^2 + x^4} = \sqrt{x^4 + x^2 + 6x + 9}$

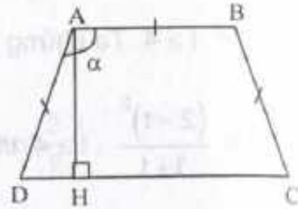
Xét hàm số $g(x) = x^4 + x^2 + 6x + 9$; $D = R$

$g'(x) = 4x^3 + 2x + 6 = (x + 1)(4x^2 - 4x + 6)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Lập BBT thì min $g = g(-1) = 5$. Vậy min$AM = \sqrt{5}$ tại $M(-1; 1)$.

Bài toán 12. 15: Hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AB và hai cạnh bên đều dài 1m. Tính góc $\alpha = \widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ sao cho hình thang có diện tích lớn nhất và tính diện tích lớn nhất đó.

Hướng dẫn giải



Hạ $AH \perp CD$. Đặt $x = \widehat{ADC}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Ta được $AH = \sin x$, $DH = \cos x$;

$DC = 1 + 2\cos x$.

Diện tích hình thang là:

$$S(x) = \frac{AB + CD}{2}.AH = (1 + \cos x)\sin x;\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$S'(x) = (\cos x + 1)(2\cos x - 1),\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

Lập BBT thì $\max S = S\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ nên hình thang có diện tích lớn nhất khi

$\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

Bài toán 12. 16: Cho a, b, c $\geq \dfrac{-3}{4}$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$T = \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}$$

Hướng dẫn giải

Chứng minh . $\dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1} + \dfrac{c}{c^2+1} \leq \dfrac{9}{10}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ với $x \geq \dfrac{-3}{4}$ có $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$

Tiếp tuyến tại $x = \dfrac{1}{3}$ là $y = \dfrac{36x + 3}{50}$.

Ta chứng minh $\frac{x}{x^2+1} \le \frac{36x+3}{50}$ với $x \ge \frac{-3}{4}$.

Bất đẳng thức tương đương : $(36x+3)(x^2+1) \ge 50x$

$\Leftrightarrow 36x^3 + 3x^2 - 14x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow (4x+3)(3x-1)^2 \ge 0$: đúng.

Áp dụng $f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{36a+3+36b+3+36c+3}{50} = \frac{9}{10}$

Vậy max $T = \frac{9}{10}$ .Dấu = khi a =b =c = $\frac{1}{3}$.

Bài toán 12. 17: Cho a, b, c là 3 số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$T = \frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}.$$

Hướng dẫn giải

Với a, b, c là 3 số thực dương, ta chứng minh .

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \le \frac{6}{5}$$

Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: a + b + c = 3. Do đó

$$\frac{a(3-a)}{(3-a)^2+a^2} + \frac{b(3-b)}{(3-b)^2+b^2} + \frac{c(3-c)}{(3-c)^2+c^2} \le \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6a-2a^2}{2a^2-6a+9} + \frac{6b-2b^2}{2b^2-6b+9} + \frac{6c-2c^2}{2c^2-6c+9} \le \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a^2-6a+9} + \frac{1}{2b^2-6b+9} + \frac{1}{2c^2-6c+9} \le \frac{3}{5}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2x^2-6x+9}$ có tiếp tuyến tại x =1 là

$y = \frac{2x+3}{25}$.Ta chứng minh $\frac{1}{2x^2-6x+9} \le \frac{2x+3}{x}$ với $0 < x < 3$.

Bất đẳng thức tương đương : $(2x+3)(2x^2-6x+9) \ge 25$

$\Leftrightarrow 2(2x^3 - 3x^2 + 1) \ge 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(2x^2 - x - 1) \ge 0$: đúng.

Áp dụng $f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{2a+3+2b+3+2c+3}{25} = \frac{3}{5}$

Vậy max $T = \frac{3}{5}$ khi a =b =c.

Bài toán 12. 18: Chứng minh:

a) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \forall x > 0$ b) $\tan x > x, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Hướng dẫn giải

a) BĐT: $x - \frac{x^3}{6} - \sin x > 0, \forall x > 0$

Xét $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$ thì f liên tục trên $[0; +\infty)$

$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$; $f''(x) = -x + \sin x$

$f'''(x) = -1 + \cos x \le 0$ nên f " nghịch biến trên $[0; +\infty)$:

$x > 0 \Rightarrow f''(x) < f''(0) = 0$ nên f ' nghịch biến trên $[0; +\infty)$:

$x > 0 \Rightarrow f'(x) < f(0) = 0$ nên f nghịch biến trên $[0; +\infty)$:

$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0$: đpcm

b) Hàm số $f(x) = \tan x - x$ liên tục trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$ và có đạo hàm

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Do đó hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$ nên $f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Bài toán 12. 19: Chứng minh các bất đẳng thức với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

a) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ b) $\sin x + \tan x > 2x$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$ và có đạo hàm

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$

$= (\tan x + x)(\tan x - x) > 0$ với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ do đó f đồng biến nên

$f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ đpcm.

b) Hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên nửa khoảng $[0; \frac{\pi}{2})$ và có:

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = (\cos x - \frac{1}{\cos x})^2 > 0.$$

Do đó hàm số f đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$ nên $f(x) > f(0) = 0$.

Bài toán 12. 20: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $8\sin^2\frac{x}{2} + \sin 2x > 2x, \forall x \in (0; \pi]$. b) $\tan x \le \frac{4x}{\pi}, \forall x\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = 8\sin^2\frac{x}{2} + \sin 2x - 2x, \forall x \in (0; \pi]$.

$f'(x) = 4\sin x + 2\cos 2x - 2 = 4\sin x(1 - \sin x) \ge 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $(0; \pi]$ do đó $f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Nếu $x = 0$ thì BĐT đúng.

Nếu $x > 0$ thì BĐT $\Leftrightarrow \frac{\tan x}{x} \le \frac{4}{\pi}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

Xét $f(x) = \frac{\tan x}{x}$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$$

Vì $0 < x \le \frac{\pi}{4}$ nên $0 < 2x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 2x < 2x$ do đó $f'(x) > 0$ nên f đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, suy ra $f(x) \le f(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi}$: đpcm

Bài toán 12. 21: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $b.\tan a > a.\tan b$ với. $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

b) $\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \ge 2$ với tam giác ABC có $A \le B \le C < 90^0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $b.\tan a < a.\tan b \Leftrightarrow \frac{\tan a}{a} < \frac{\tan b}{b}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\tan x}{x}$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}.x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2.\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$$

Xét $g(x) = 2x - \sin 2x$, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$g'(x) = 2 - 2\cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \ge 0$

nên g đồng biến: $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0$, do đó $f'(x) \ge 0$ nên f đồng biến trên $[0; \frac{\pi}{2})$. Vì $0 < a < b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(a) < f(b)$: đpcm.

b) Do cosC > 0 nên bất đẳng thức: $\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \ge 2$

$\Leftrightarrow 2(4\cos^3 C - 3\cos C) - 4(2\cos^2 C - 1) + 1 \ge 2\cos C$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 C - 8\cos^2 C - 8\cos C + 5 \ge 0.$

Từ giả thiết $\Rightarrow 60^\circ \le C < 90^\circ \Leftrightarrow 0 < \cos C \le \frac{1}{2}$

Đặt $\cos C = t$, $t \in (0; \frac{1}{2}]$, xét hàm số: $y = f(t) = 8t^3 - 8t^2 - 8t + 5$

Ta có : $y' = f'(t) = 24t^2 - 16t - 8 \le 0$, $\forall t \in (0; \frac{1}{2}]$

Do đó $\min\limits_{t \in (0; \frac{1}{2}]} f(t) = 0$(đpcm).

Bài toán 12. 22: Chứng minh bất đẳng thức

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x, \text{ với } x > 0.$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$ trên $[0; +\infty)$. Ta có:

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \ge 0$ với $x \ge 0$ nên f(x) đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Do đó $f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x \ge 0$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8}$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$, $g''(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} \ge 0$

nên g' đồng biến trên $[0; +\infty)$, do đó $g'(x) = g'(0) = 0$. Suy ra g đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên $g(x) > g(0) = 0$ với mọi $x \in [0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 12. 23: Cho a, b, c > 0 và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Xét hàm số $f(x) = x(1-x^2)$ với $x \in (0;1)$

Ta có : $f'(x) = 1 - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \in (0;\ 1)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	$+\infty$
y'			+	0	–		
y		0	$\nearrow$		$\searrow$	0	

Suy ra $f(x) \le f(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, $\forall x \in (0;1)$ nên

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 12. 24: Cho x, y, z ≥ 0, x + y + z = 1. Chứng minh :

$$x^2y + y^2z + z^2x \le \frac{4}{27}.$$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử: $y = \min\{x, y, z\} \Rightarrow 0 \le y \le \dfrac{1}{3}$.

Ta có $f(x) = x^2y + y^2z + z^2x = x^2y + y^2(1-x-y) + x(1-x-y)^2$

$$= x^3 + (3y-2)x^2 + (1-2y)x - y^2 - y^3$$

$f'(x) = 3x^2 + 2(3y-2)x + 1 - 2y$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ hoặc $x = 1 - 2y \ge \dfrac{1}{3}$.

Vì $x = 1 - y - z \le 1 - y$ nên ta có BBT:

x	$-\infty$	0		$1/3$		$1-2y$		$1-y$	$+\infty$
f'			+	0	–	0	+		
f			↗		↘		↗		

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} - \frac{1}{3}y(1-3y+3y^2) \le \frac{4}{27}$, và

$$f(1-y) = y(1-y)^2 - \frac{1}{2}.2y(1-y)(1-y) \le \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1-y+1-y}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Vậy $f(x) \le \frac{4}{27}$ suy ra đpcm.

Bài toán 12. 25: Cho n nguyên dương. Chứng minh với mọi x:

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^i\frac{x^i}{i!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ge 0.$$

Hướng dẫn giải

Xét $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^i\frac{x^i}{i!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in R$

Với $x < 0$ thì $f(x) \ge 1 \ge 0$: đúng. Với $x > 2n$ thì:

$$f(x) = 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - x\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x^3}{4!}(x-4) + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}(x-2n) \ge 1 \ge 0 \text{ : đúng}$$

Với $0 \le x \le 2n$ thì f liên tục trên đoạn $[0,2n]$ nên tồn tại giá trị bé nhất tại x_0

Nếu $x_0 = 0$ hay $x_0 = 2n$ thì $f(x) \ge f(x_0) \ge 1 \ge 0$

Nếu $x_0 \in (0,2n)$ thì f đạt cực tiểu tại đó.

$$f'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - f(x)$$

Vì $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{x_0^{2n}}{(2n)!} > 0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0) > 0$: đúng

Bài toán 12. 26: Cho các số nguyên n $(n \ge 2)$ và hai số thực không âm x, y.

Chứng minh: $\sqrt[n]{x^n + y^n} \ge \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

Với $x = 0$ hoặc $y = 0$, bất đẳng thức đúng.

Với xy > 0, bất đẳng thức tương đương $\sqrt[n]{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n} \geq \sqrt[n+1]{1+\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt[n]{1+t^n}}{\sqrt[n+1]{1+t^{n+1}}}$ với $t \in (0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{t^{n-1}(1-t)}{\sqrt[n+1]{\left(1+t^{n+1}\right)^{n+2}}\sqrt[n]{\left(1+t^n\right)^{n-1}}}; \; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

BBT

x	0		1		+∞
f'(t)	0	+	0	–	
f(t)	1	↗		↘	1

Suy ra $f(t) \geq 1$ với mọi $t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 12. 27: Cho 4 số dương a, b, c, d có tổng a + b +c + d =1.

Chứng minh: $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c, d dương có tổng a + b +c + d =1 nên 0 < a,b,c, d < 1.

BĐT $\Leftrightarrow 6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq \frac{1}{8}$.

$\Leftrightarrow (6a^3-a^2)+(6b^3-b^2)+(6c^3-c^2)+(6d^3-d^2) \geq \frac{1}{8}$.

$\Leftrightarrow (6a^3-a^2-\frac{1}{32})+(6b^3-b^2-\frac{1}{32})+(6c^3-c^2-\frac{1}{32})+(6d^3-d^2-\frac{1}{32}) \geq 0$

Xét hàm số $f(x) = 6x^3-x^2-\frac{1}{32}$ thì $f'(x) = 18x^2-2x$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = \frac{1}{4}$ là $y = \frac{5}{8}(x-\frac{1}{4})$

Với 0 < x < 1 , ta chứng minh $6x^3-x^2-\frac{1}{32} \geq \frac{5}{8}(x-\frac{1}{4})$.

Thật vậy $6x^3-x^2-\frac{1}{32} \geq \frac{5}{8}(x-\frac{1}{4})$

$\Leftrightarrow 6x^3-x^2 \geq \frac{5x-1}{8} \Leftrightarrow 8(6x^3-x^2) \geq 5x-1$

$\Leftrightarrow (4x-1)^2(3x+1) \geq 0$: đúng, dấu bằng khi $x = \frac{1}{4}$.

Do đó

$(6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2)$
$= f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$
$\geq \frac{5a-1}{8} + \frac{5b-1}{8} + \frac{5c-1}{8} + \frac{5d-1}{8} = \frac{5(a+b+c+d)-4}{8} = \frac{1}{8}$

Vậy $(6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2) \geq \frac{1}{8}$

Dấu bằng khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Bài toán 12. 28: Cho 3 số dương a, b, c có tổng $a + b + c = 1$.

Chứng minh $\frac{1-b-c}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1-c-a}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1-a-b}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c dương có tổng $a + b + c = 1$ nên $0 < a,b,c < 1$ và

$T = \frac{1-b-c}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1-c-a}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1-a-b}{\sqrt{1+c^2}}$

$= \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ thì $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{1}{10\sqrt{10}}(27x+1)$

Với $0 < x < 1$, ta chứng minh $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{10\sqrt{10}}(27x+1)$

Thật vậy $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{10\sqrt{10}}(27x+1)$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{10}x \leq (27x+1)\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 1000x^2 \leq (27x+1)^2(1+x^2)$

$\Leftrightarrow 729x^6 + 54x^4 - 270x^2 + 54x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2(81x^2 + 60x + 1) \geq 0$: đúng, dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$.

Do đó

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=f(a)+f(b)+f(c)$$

$$\le\frac{1}{10\sqrt{10}}(27a+1)+\frac{1}{10\sqrt{10}}(27b+1)+\frac{1}{10\sqrt{10}}(27c+1)$$

$$=\frac{1}{10\sqrt{10}}(27(a+b+c)+3)=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Dấu bằng khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 12. 29: Cho tam giác ABC. Chứng minh

a) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x)=\sin x$, $0<x<\pi$

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

Vì $f''(x)<0$ trên $(0;\pi)$ nên f lồi, theo bất đẳng thức Jensen thì có

$$VT=f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f(\frac{a+b+c}{3})=3.\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu = khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

b) Xét hàm số $f(x)=\tan\frac{x}{2}$, $0<x<\pi$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2});f''(x)=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})$$

Vì $f''(x)>0$ trên $(0;\pi)$ nên f lõm, theo bất đẳng thức Jensen thì có

$$VT=f(a)+f(b)+f(c)\le 3f(\frac{a+b+c}{3})=3.\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

Dấu = khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

Bài toán 6. 30: Cho a, b, c là 3 số thực dương. Chứng minh .

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\le\frac{a+b+c}{2}$$

Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: $a+b+c=3$.

Do đó $\frac{a^2}{3-a}+\frac{b^2}{3-b}+\frac{c^2}{3-c}\le\frac{3}{2}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{3-x}$ với $0<x<3$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{6x-x^2}{(3-x)^2}; f''(x)=\dfrac{18}{(3-x)^3}$

Vì $f''(x)>0$ trên $(0;3)$ nên f lõm, theo bất đẳng thức Jensen thì có

$VT=f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f(\dfrac{a+b+c}{3})=\dfrac{3}{2}$.

Bài toán 6. 31: Cho a, b, c, d là 3 số thực dương và có tổng a+b+c+d =1 .

Chứng minh . $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{63}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{63}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}-a^2+\dfrac{1}{b}-b^2+\dfrac{1}{c}-c^2+\dfrac{1}{d}-d^2\ge\dfrac{63}{4}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$ với $0<x<1$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}-2x; f''(x)=\dfrac{2}{x^3}-2$

Vì $f''(x)>0$ trên $(0;1)$ nên f lõm, theo bất đẳng thức Jensen thì có

$VT=f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\ge 4f(\dfrac{a+b+c+d}{4})=\dfrac{63}{4}$.

Dấu = khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$.

Bài toán 12. 32: Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}\le\sqrt{\frac{ab+bc+cd+da+ac+bd}{6}}$$

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c\le d$.

Xét đa thức: $f(x)=(x-a)(x-b)x-c)(x-d)$

$=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+bc+cd+da+ac+bd)^2$

$-(abc+bcd+cda+dab)x+abcd$

Vì f có 4 nghiệm nên f ' có 3 nghiệm $x_1, x_2, x_3>0$

$f'(x)=4x^3-3(a+b+c+d)x^2+2(ab+bc+cd+da+ac+bd)x$

$-(abc+bcd+cda+dab)$

$=4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Theo định lý Viete, ta có: $x_1x_2x_3 = \frac{1}{4}(abc + bcd + cda + dab)$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da + ac + bd)$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM:

$\frac{1}{2}(ab + bc + cd + da + ac + bd) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

$\geq 3\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{16}(abc + bcd + cda + dab)^2}$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài toán 12. 33: Cho a,b,c là 3 số mà phương trình: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chứng minh: $|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $D = R$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Vì $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3},\ x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

Và vì hệ số cao nhất của f dương nên $y_{CĐ} = f(x_1) > 0$ và $f(x_2) = y_{CT} < 0$.

Ta có $\quad f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right)f'(x) + \frac{1}{9}(3b - a^2)x + c - \frac{ab}{9}$

$\Rightarrow f(x_i) = \frac{2}{9}(3b - a^2)x_i + c - \frac{ab}{9}$

Từ $f(x_1) > 0 \Rightarrow -2\sqrt{(a^2 - 3b)^3} < 2a^3 + 27c - 9ab$

$f(x_2) < 0 \Rightarrow 2a^3 + 27c - 9ab < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

Do vậy: $|2a^3 + 27c - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

Bài toán 12. 34: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ với a,b tùy ý.

b) $\frac{1}{1 + (n+1)^2} < \arctan\frac{1}{n^2 + n + 1} < \frac{1}{1 + n^2}$ với mọi n.

Hướng dẫn giải

a) Nếu a = b thì bất đẳng thức đúng.

Nếu $a \neq b$ thì bất đẳng thức tương đương: $\left|\frac{\sin b - \sin a}{b - a}\right| \leq 1$. Không mất tính tổng quát , giả sử $b > a$.

Hàm số f(x) = sinx liên tục trên [a;b] và có đạo hàm f '(x) = cosx.

Theo định lí Lagrange, tồn tại c ∈ (a;b) sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos c$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sin b - \sin a}{b-a}\right| = |\cos c| \le 1\text{: đpcm.}$$

b) Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{1}{1+(n+1)^2} < \frac{\arctan(n+1) - \arctan n}{(n+1)-n} < \frac{1}{1+n^2}$$

Hàm số f(x) = arctanx liên tục trên [n;n+1] và có đạo hàm

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Theo định lí Lagrange, tồn tại c ∈ (n;n+1) sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\arctan(n+1) - \arctan n}{(n+1)-n} = \frac{1}{1+c^2}$$

Vì c ∈ (n;n+1) nên $\frac{1}{1+(n+1)^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+n^2}$

⇒ đpcm.

Bài toán 12. 35: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có bất đẳng thức: $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$

Hướng dẫn giải

Hàm số f(x) = $\sqrt{x}$ liên tục trên [0; +∞) và có đạo hàm

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên (0; +∞). Theo định lí Lagrange, với mọi

n ≥ 1 tồn tại x_1 ∈ (n–1; n) và x_2 ∈ (n; n+1) sao cho:

$$f'(x_1) = \frac{f(n) - f(n-1)}{n-(n-1)},\ f'(x_2) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1)-n}$$

Hay $\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $\frac{1}{2\sqrt{x_2}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Vì $0 < x_1 < n < x_2$ nên $\frac{1}{2\sqrt{x_1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$

Do đó . $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \Rightarrow$ đpcm

Bài toán 12. 36: 5 số thực dương x, y, z, a, b, thoả: $\begin{cases} x \ge y \ge z > 0 \\ a \ge b > 0 \end{cases}$

Chứng minh $x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \ge 0$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = x^{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b} \ge 1\right)$ nên $f'(x) = \frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1}$

$\Rightarrow\ f''(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b} - 1\right)x^{\frac{a}{b}-2} > 0$ do đó $f'(x)$ tăng trên $(z^b; y^b)$

Theo định lí Lagrangge:

$f(y^b) - f(z^b) = f'(c_1)[y^b - z^b]$, $c_1 \in (z^b; y^b)$

$y^a - z^a = f'(c_1)[y^b - z^b]$

Tương tự: $x^a - y^a = f'(c_2)[x^b - y^b]$, $c_2 \in (y^b; x^b)$

nên: $(x^a - y^a)(y^b - z^b) = f'(c_2)[x^b - y^b][y^b - z^b]$

$(y^a - z^a)(x^b - y^b) = f'(c_1)[x^b - y^b][y^b - z^b]$

Và $c_2 \ge c_1$ nên $f'(c_2) \ge f'(c_1)$

$\Rightarrow (x^a - y^a)(y^b - z^b) \ge (y^a - z^a)(x^b - y^b)$

$\Rightarrow x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \ge 0$ (đpcm)

Bài toán 12. 37: Cho dãy : $\begin{cases} u_0 = \alpha & \in (0; \pi) \\ u_n = \sin u_n - 1, & n \ge 1 \end{cases}$

Chứng minh: $0 < u_n < \sqrt{\frac{3}{n+1}}$

Hướng dẫn giải

Xét hàm, đạo hàm đến cấp 5, ta chứng minh được:

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\ , \forall x > 0$$

Ta chứng minh quy nạp.Khi n = 1: $0 < u_1 = \sin\alpha < 1 < \sqrt{\frac{3}{2}}$ (đúng)

Giả sử: $0 < u_n = \sin u_{n-1} < \sqrt{\frac{3}{n+1}}$

Ta có $\sin u_n < \sin\sqrt{\frac{3}{n+1}} < \sqrt{\frac{3}{n+1}}\left(1 - \frac{1}{6}.\frac{3}{n+1} + \frac{1}{120}.\frac{9}{(n+1)^2}\right)$

Do đó ta cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{3}{n+1}}\left(1 - \frac{1}{6}.\frac{3}{n+1} + \frac{1}{120}.\frac{9}{(n+1)^2}\right) < \sqrt{\frac{3}{n+2}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{3}{40(n+1)^2}<\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}}$$

Đặt $x=\frac{1}{n+1}\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$, xét $f(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{40}-(1+x)^{-\frac{1}{2}}, 0\le x\le\frac{1}{2}$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{3x}{20}+\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f''(x)=\frac{3}{20}\left(1-\frac{5}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}\right)<0$$

$\Rightarrow f'$ nghịch biến: $x>0\Rightarrow f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f$ nghịch biến

Mà $x>0\Rightarrow f(x)<f(0)=0\Rightarrow$ đpcm

Bài toán 12. 38: Giải phương trình:

a) $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$

b) $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}=2\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t=x^2-x$ thì phương trình trở thành:

$$\sqrt{3+t}-\sqrt{2-t}=1, -3\le t\le 2.$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{3+t}-\sqrt{2-t}, -3\le t\le 2$.

Với $-3<t<2$ thì $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{3+t}}+\frac{1}{2\sqrt{2-t}}>0$ nên f đồng biến trên $(-3; 2)$.

Ta có $f(1)=2-1=1$ nên phương trình: $f(t)=f(1)$

$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện xác định:

$$\begin{cases}2x^3+3x^2+6x+16\ge 0\\ 4-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)(2x^2-x+8)\ge 0\\ 4-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 4$$

Phương trình tương đương $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{3}$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}, -2\le x\le 4$

Thì $f'(x)=\frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}>0$ nên f đồng biến

mà $f(1)=2\sqrt{3}$, do đó phương trình trở thành $f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Bài toán 12. 39: Giải phương trình :

a) $\sqrt[3]{x^2-1}=\sqrt{x^3-2}-x$ b) $3x^2-18x+24=\frac{1}{|2x-5|}-\frac{1}{|x-1|}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x \ge \sqrt[3]{2}$. Ta có:

$\sqrt{x^3-2}=x+\sqrt[3]{x^2-1}>x>1 \Rightarrow x^3 \ge 3 \Rightarrow x \ge \sqrt[3]{3}$

Chia 2 vế cho $\sqrt{x^3}$ thì phương trình:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^2.\sqrt{x}}-\frac{1}{x^4\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x\sqrt{x}}}=0$$

Xét f(x) là hàm số vế trái, $x \ge \sqrt[3]{3}$ thì

$$f'(x)=\frac{9-5x^2}{2x^5.\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{3}{2x^2\sqrt{x-\frac{2}{\sqrt{x}}}}<0.$$

Do đó hàm số f nghịch biến trên khoảng $(\sqrt[3]{3};+\infty)$ mà $f(3)=0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

b) Điều kiện $x \ne 1; \frac{5}{2}$, phương trình trở thành:

$$(2x-5)^2-\frac{1}{|2x-5|}=(x-1)^2-\frac{1}{|x-1|}$$

Xét $f(t)=t^2-\frac{1}{t}$ với $t>0$. Ta có:

$f'(t)=2t+\frac{1}{t^2}>0$ nên f đồng biến trên $(0;+\infty)$

Phương trình: $f(|2x-5|)=f(|x-1|) \Leftrightarrow |2x-5|=|x-1|$

$\Leftrightarrow 4x^2-20x+25=x^2-2x+1 \Leftrightarrow 3x^2-18x+24=0.$

$\Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=4$ (chọn)

Bài toán 12. 40: Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+6} \le 20-3\sqrt{x+13}$

b) $4|2x-1|(x^2-x+1)>x^3-6x^2+15x-14.$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x \ge -1$. BPT viết lại: $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+6}+3\sqrt{x+13} \le 20$

Xét f(x) là hàm số vế trái, $x \ge -1$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+6}} + \frac{3}{2\sqrt{x+13}} > 0$$

nên f đồng biến trên $[-1; +\infty)$. Ta có $f(3) = 20$ nên BPT: $f(x) \le f(3) \Leftrightarrow x \le 3$.

Vậy tập nghiệm của BPT là $S = [-1; 3]$.

b) BPT: $|2x-1|.[(2x-1)^2 + 3] > (x-2)^3 + 3x - 6$

$\Leftrightarrow \quad |2x-1|^3 + 3|2x-1| > (x-2)^3 + 3(x-2)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, D = **R**.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ nên f đồng biến trên **R**.

BPT: $f(|2x-1|) > f(x-2) \Leftrightarrow |2x-1| > x-2$.

Xét $x - 2 < 0$ thì BPT nghiệm đúng.

Xét $x-2 \ge 0$ thì $2x-1 > 0$ nên BPT $\Leftrightarrow 2x-1 > x-2 \Leftrightarrow x > -1$: Đúng

Vậy tập nghiệm là S = **R**.

Bài toán 12. 41: Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} x+3 = y + \sqrt{y^2+1} \\ y+3 = z + \sqrt{z^2+1} \\ z+3 = x + \sqrt{x^2+1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 - 1 = y(y-1) \\ y^3 - 1 = z(z-1) \\ z^3 - 1 = x(x-1) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+1} - 3, t \in R$

thì $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}} \ge 0 \ \forall t$

nên f(t) đồng biến trên **R.** Ta có hệ $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$

Giả sử $x > y$ thì $f(x)>f(y)$ nên $z > x$ do đó $f(z)>f(x)$ tức là $y>z$: vô lý

Giả sử $x < y$ thì $f(x)<f(y)$ nên $z < x$ do đó $f(z)<f(x)$ tức là $y<z$: vô lý

Giả sử $x = y$ thì $f(x) = f(y)$ nên $z = x$ do đó $x = y = z$. Thế vào hệ:

$$x + 3 = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Thử lại $x = y = z = \pm\sqrt{2}$ thì hệ nghiệm đúng.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $x = y = z = \pm\sqrt{2}$.

b) Ta có $x^3 = y^2 - y + 1 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4} > \frac{1}{8} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$.

Tương tự $y, z \ge \frac{1}{2}$. Đặt $f(t) = t^2 - t + 1$, $t > \frac{1}{2}$ thì

$f'(t) = 2t - 1 > 0$ nên f đồng biến trên $(\frac{1}{2}; +\infty)$

Ta có hệ $\begin{cases} x^3 = y^2 - y + 1 \\ y^3 = z^2 - z + 1 \\ z^3 = x^2 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = f(y) \\ y^3 = f(z) \\ z^3 = f(x) \end{cases}$

Giả sử $x > y$ thì $f(x) > f(y) \Rightarrow z^3 > x^3 \Rightarrow z > x$.

nên $f(z) > f(x) \Rightarrow y^3 > z^3 \Rightarrow y > z$.

Do đó $x > y > z > x$: vô lý.

Tương tự $x < y$: vô lý nên $x = y \Rightarrow x = y = z$. Ta có $t^3 = f(t)$

$\Leftrightarrow t^3 - t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

Bài toán 12. 42: Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \geq 1$, $y \geq 0$. Hệ phương trình tương đương với:

$\begin{cases} \sqrt{x-1} - (x-1)^2 + x^3 - 8 = 0 & (1) \\ y = (x-1)^4 & (2) \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t-1} - (t-1)^2 + t^3 - 8$, với $t \geq 1$.

Ta có $f'(t) = -2(t-1) + 3t^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} = 3t^2 - 2t + 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} > 0$ với mọi $t > 1$

nên f(t) đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Phương trình (1) có dạng $f(x) = f(2)$ nên (1)

$\Leftrightarrow x = 2$, thay vào (2) ta được $y = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) = (2; 1)$.

b) Điều kiện $x \leq \dfrac{3}{4}; y \leq \dfrac{5}{2}$. Ta có

$$(4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \Leftrightarrow (4x^2+1)2x = (5-2y+1)\sqrt{5-2y}$$

Xét hàm số $f(t) = (t^2+1)t$ với $t \in \mathbf{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ nên f đồng biến trên R, do đó

$(4x^2+1)2x = (5-2y+1)\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5-2y})$

$$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$$

Thế $y = \frac{5-4x^2}{2}$ vào phương trình sau ta được

$$4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7$$

Với x =0, x = $\frac{3}{4}$ thì không thỏa mãn nên ta chỉ xét khi $0 < x < \frac{3}{4}$.

Xét hàm số $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x}, 0 < x < \frac{3}{4}$

Thì $g'(x) = 8x - 8x(\frac{5}{2} - 2x^2) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0$

nên g(x) nghịch biến trên $(0;\frac{3}{4})$, mà $g(\frac{1}{2}) = 7$ nên phương trình sau có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$, suy ra y = 2: chọn.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(\frac{1}{2};2)$.

Bài toán 12. 43: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 12x + 35 < 0 & (1) \\ x^3 - 3x^2 + 9x + \frac{1}{3} > 0 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 - 12x + 35 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 7$

Xét (2) : Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + \frac{1}{3}$, D = R

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên f(x) đồng biến: $x > 5 \Rightarrow f(x) > \frac{286}{3}$

Do đó $f(x) > 0, \forall x \in (5;7)$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là S =(5; 7)

Bài toán 12. 44: Chứng minh phương trình có một nghiệm duy hất:

a) $3x^5 + 15x - 8 = 0$ b) $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ là hàm số liên tục và có đạo hàm trên R.

Vì $f(0) = -8 < 0$, $f(1) = 10 > 0$ nên tồn tại một số $x_o \in (0; 1)$ sao cho $f(x_o) = 0$ tức là phương trình f(x) = 0 có nghiệm.

Mặt khác, ta có $y' = 15x^4 + 15 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho luôn luôn đồng biến. Vậy phương trình đó chỉ có một nghiệm duy nhất.

b) Ta có $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^5 = (x+1)^2 \geq 0$ nên $x^5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Do đó $(x+1)^2 \ge 1$ nên $x^5 \ge 1 \Rightarrow x \ge 1$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ với $x \ge 1$.

Ta có $y' = 5x^4 - 2x - 2 = (2x^4 - 2x) + (2x^4 - 2) + x^4$

$= 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0$, với mọi $x \ge 1$.

Nên hàm số đồng biến trên tập xác định.

Vì f liên tục với mọi $x \ge 1$ và có $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 23 > 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Vậy phương trình cho có một nghiệm duy nhất.

Bài toán 12. 45: Chứng minh phương trình có một nghiệm duy nhất:

a) $2x^2\sqrt{x-2} = 11$.

b) $\sin^2 x + \cos x = m$, $|m| \le 1$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[0; \pi]$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x^2.\sqrt{x-2} = 1$ thì hàm số xác định và liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

$$f'(x) = 2\left(2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x-2}}\right) = \frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}} > 0, \text{ với mọi } x \in (2; +\infty)$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Ta có $f(2) = 0$, $f(3) = 18$. Vì $0 < 11 < 18$ nên tồn tại số $c \in (2; 3)$ sao cho $f(c) = 11$ tức c là một nghiệm của phương trình f. Vì hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$ nên c là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Xét hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x$, liên tục trên đoạn $[0; \pi]$.

Ta có $f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$, $x \in (0; \pi)$

Vì $\sin x > 0$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

BBT:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)		+	0	−	
f(x)	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	−1

Hàm f đồng biến trên đoạn $[0; \frac{\pi}{3}]$ và nghịch biến trên đoạn $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.

Hàm số f liên tục trên đoạn $[\frac{\pi}{3}; \pi]$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4}$ và $f(\pi) = -1$. Theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, với mọi $m \in (-1; 1) \subset (-1; \frac{5}{4})$, tồn tại một số thực $c \in (\frac{\pi}{3}; \pi)$ sao cho $f(c) = 0$ tức c là nghiệm của phương trình. Vì hàm số f nghịch biến trên $[\frac{\pi}{3}; \pi]$ nên trên đoạn này, phương trình có một nghiệm duy nhất.

Còn với mọi $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$, ta có $1 \le f(x) \le \frac{5}{4}$ nên phương trình không có nghiệm suy ra đpcm.

Bài toán 12. 46: Tìm số nghiệm của phương trình :

$$x^8 + 2x^5 - 2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6x - 3 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương: $(x^3 + 3)(x^5 - x^2 - 2x - 1) = 0$.

$\Leftrightarrow x^3 + 3 = 0$ hoặc $x^5 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{3}$ hoặc $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

Xét phương trình: $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^5 = (x + 1)^2 \ge 0$.

Do đó $x^5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow (x + 1)^2 \ge 1 \Rightarrow x^5 \ge 1 \Rightarrow x \ge 1$.

Do đó nghiệm của phương trình $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ nếu có thì $x \ge 1$. Đặt $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$, $x \ge 1$.

$f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = 2(x^4 - 1) + 2x(x^3 - 1) \ge 0$.

Do đó f đồng biến.

Vì $f(1) = -3 < 0$ và $f(2) = 23 > 0$ nên $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_o > 1$.

Vậy phương trình cho có đúng 2 nghiệm.

Bài toán 12. 47: Tìm tham số để phương trình có nghiệm:

a) $m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

b) $(4m - 3)\sqrt{x+3} + (3m - 4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $-1 \le x \le 1$. Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ thì $t \ge 0$

và $t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \le 2$, dấu = khi $x^2 = 1$. Do đó $0 \le t \le \sqrt{2}$

PT: $m(t + 2) = 2 - t^2 + t \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 + t + 2}{t + 2}$

Xét $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t + 2}$, $0 \le t \le \sqrt{2}$, $f'(t) = \frac{t^2 + 4t}{(t + 2)^2} \le 0$ nên f nghịch biến trên $[0; \sqrt{2}]$. Điều kiện có nghiệm:

$\min f(t) \le m \le \max f(t) \Leftrightarrow f(\sqrt{2}) \le m \le f(0) \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \le m \le 1$.

b) Điều kiện $-3 \le x \le 1$. PT $\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{x+3}+4\sqrt{1-x}+1}{4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1} = m$

Ta có $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4$ nên đặt:

$$\sqrt{x+3} = 2\sin\phi = 2.\frac{2t}{1+t^2},\ \sqrt{1-x} = 2\cos\phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Với $t = \tan\dfrac{\phi}{2}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le t \le 1$.

PT $\Leftrightarrow m = \dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}$. Đặt $f(t) = \dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}$, $0 \le t \le 1$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{-52t^2-8t-60}{(5t^2-16t-7)^2} < 0$ nên f nghịch biến trên đoạn [0; 1], do đó

điều kiện có nghiệm: $f(1) \le m \le f(0) \Leftrightarrow \dfrac{7}{9} \le m \le \dfrac{9}{7}$.

Bài toán 12. 48: Tìm tham số để phương trình:

a) $\sqrt[4]{x^2+2x+4} - \sqrt{x+1} = m$ có đúng một nghiệm

b) $\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = \sqrt{x+1} \ge 0$, phương trình trở thành $\sqrt[4]{t^4+3} - t = m$ (*)

Nhận xét ứng với mỗi nghiệm không âm của phương trình (*) có đúng một nghiệm của phương trình đã cho, do đó phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có đúng một nghiệm không âm.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{t^4+3} - t$ với $t \ge 0$, $f'(t) = \dfrac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4+3)^3}} - 1 < 0$.

Mà $f(0) = \sqrt[4]{3}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = 0$ nên có bảng biến thiên:

t	0		+∞
f '(t)		–	
f(t)	$\sqrt[4]{3}$	↘	0

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị cần tìm của m là $0 < m \le \sqrt[4]{3}$.

b) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ x^2+mx+2 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2+4x-1 = mx,\ x \ge -\dfrac{1}{2}$

Vì x = 0 không thoả mãn nên: $\frac{3x^2+4x-1}{x}=m,\quad x\ge -\frac{1}{2}$

Xét $f(x)=\frac{3x^2+4x-1}{x},\quad x\ge -\frac{1}{2}, x\ne 0$ thì $f'(x)=\frac{3x^2+1}{x^2}$

Lập BBT thì điều kiện phương trình cho có 2 nghiệm phân biệt là

$f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $x\ge -\frac{1}{2}, x\ne 0 \Leftrightarrow\ m\ge \frac{9}{2}$.

Bài toán 12. 49: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm

a) $2(1+\sin 2x.\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)=m$

b) $t^4-(m-1)t^3+3t^2-(m-1)t+1=0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2(1+\sin 2x.\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)$

$=2+2.\sin 2x.\cos 4x-\sin 6x.\sin 2x$

$=2+\sin 2x(2\cos 4x-\sin 6x)$

Đặt: $t=\sin 2x(-1\le t\le 1)$ xét: $y=f(t)=4t^4-4t^3-3t^2+2t+2$

Ta có: $f'(t)=16t^3-12t^2-6t+2=(t-1)(16t^2+4t-2)$

$f'(t)=0\Rightarrow t=1, t=-\frac{1}{2}, t=\frac{1}{4}$

So sánh.: $f(-1), f(1), f(-\frac{1}{2})$ và $f(\frac{1}{4})$ thì max y = 5 ; miny = $\frac{129}{64}$

Vậy điều kiện có nghiệm $\frac{129}{64}\le m\le 5$

b) Ta có t = 0 không là nghiệm. Chia hai vế cho t^2

$t^2-(m-1)t+3-(m-1)\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}=0$

$\Leftrightarrow\quad \left(t+\frac{1}{t}\right)^2-(m-1)\left(t+\frac{1}{t}\right)+1=0$

Đặt $x=t+\frac{1}{t}$ thì $|x|\ge 2$ và phương trình trở thành:

$x^2-(m-1)x+1=0\Leftrightarrow y=\frac{x^2+x+1}{x}=m$

Ta có: $y'=\frac{x^2-1}{x^2}>0, \forall |x|\ge 2$ và $f(-2)=\frac{-3}{2}, f(2)=\frac{7}{2}$

Do đó phương trình có nghiệm khi $m \le -\frac{3}{2}$ hay $m \ge \frac{7}{2}$

Bài toán 12. 50: Tìm tham số để bất phương trình

a) $\sqrt{4x-2} + 2\sqrt{4-x} < m$ có nghiệm

b) $a\sqrt{2x^2+9} < x + a$ có nghiệm với mọi x

Hướng dẫn giải

a) Xét $f(x) = \sqrt{4x-2} + 2\sqrt{4-x}$, $D = [\frac{1}{2};4]$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{2\sqrt{4-x} - \sqrt{4x-2}}{\sqrt{4x-2}\,.\,\sqrt{4-x}}$$

Ta có $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} \ge \sqrt{4x-2}$ $(x \ne 4, x \ne \frac{1}{2})$

$$\Leftrightarrow 4(4-x) \ge 4x-2 \Leftrightarrow x \le \frac{9}{4}$$

Lập bảng biến thiên thì có kết quả $m > \sqrt{14}$.

b) Ta có : $a\sqrt{2x^2+9} < x + a \Leftrightarrow a(\sqrt{2x^2+9} - 1) < x$

$\Leftrightarrow a < \frac{1}{\sqrt{2x^2+9} - 1}$ (vì $\sqrt{2x^2+9} - 1 > 0, \forall x$)

Xét $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+9} - 1}$, $x \in R$, $f'(x) = \frac{9 - \sqrt{2x^2+9}}{\sqrt{2x^2+9}\,.\,(\sqrt{2x^2+9} - 1)^2}$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - \sqrt{2x^2+9} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 9 = 81$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$

Lập BBT thì $\min f(x) = -\frac{3}{4}$

Vậy BPT nghiệm đúng $\forall x$ khi $a < -\frac{3}{4}$

Bài toán 12. 51: Tìm điều kiện của m để hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \dfrac{1}{x^3} + y^3 + \dfrac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x, y \ne 0$. Đặt $u = x + \frac{1}{x}$, $v = y + \frac{1}{y}$ thì $|u| \ge 2$, $|v| \ge 2$.

Hệ: $\begin{cases} u+v=5 \\ u^3-3u+v^3-3v=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=8-m \end{cases}$

Do đó, u, v là nghiệm phương trình: $t^2-5t+8-m=0$

Bài toán đưa về tìm m để phương trình $t^2-5t+8=m$ có 2 nghiệm, thoả mãn $|t_1|$, $|t_2| \geq 2$

Xét $f(t)=t^2-5t+8$, D = **R.** Ta có : $f'(t)=2t-5$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$5/2$		$+\infty$
f'		$-$		//////		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	22	//////	2	$\searrow$	$7/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy: $\frac{7}{4} \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 22$

Bài toán 12. 52: Cho φ và ψ là hai hàm liên tục trên [a; b], khả vi trên (a; b) và $\varphi'(x) \neq 0$ tại mỗi $x \in (a; b)$. Lúc đó tồn tại $c \in (a; b)$ để:

$[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi'(c) = [\psi(b)-\psi(a)]\varphi'(c)$

Hướng dẫn giải

Xét hàm $F(x) = [\psi(b)-\psi(a)]\varphi(x) - [\varphi(b)-\varphi(b)]\psi(x)$ thì F liên tục trên [a,b] và có đạo hàm trên (a; b).

Thêm vào đó F(a) = F(b). Do đó theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a; b)$ để cho $F'(c)=0$, tức là $[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi'(c) = [\psi(b)-\psi(a)]\varphi'(c)$: đpcm.

Bài toán 12. 53: Cho hàm số f khả vi trên [0;1] và thoả mãn: f(0)=0 ; f(1) = 1. Chứng minh tồn tại 2 số phân biệt a;b thuộc (0;1) sao cho f '(a).f '(b) = 1.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số g(x)= f(x) +x – 1 , khi đó thì g(x) liên tục và có đạo hàm trên [0;1]. Ta có: g(0)= – 1 < 0 và g(1)= 1 >0 nên tồn tại số c thuộc (0;1) sao cho g(c) =0.

Do đó f(c) + c –1 =0 hay f(c) = 1– c

Áp dụng định lý Lagrange cho f trên các đoạn [0;c] và [c;1] thì :

tồn tại $a \in (0;c)$ sao cho: $\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(a)$

và tồn tại $b \in (c;1)$ sao cho: $\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(b)$

nên: $f'(a).f'(b) = \frac{f(c)}{c}\frac{1-f(c)}{1-c} = \frac{(1-c)c}{c(1-c)} = 1$

Vậy tồn tại 2 số phân biệt a;b thuộc (0;1) sao cho f '(a).f '(b) = 1.

Bài toán 12. 54: Cho 3 số a,b,c thoả mãn $abc \neq 0$ và $\frac{a}{7}+\frac{b}{5}+\frac{c}{3}=0$. Chứng minh phương trình : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $F(x) = \frac{a}{7}x^7 + \frac{b}{5}x^5 + \frac{c}{3}x^3$, khi đó $F(x)$ liên tục, có đạo hàm $F'(x) = x^2.(ax^4 + bx^2 + c) = x^2.f(x)$

Áp dụng định lí Lagrange trên [0; 1] thì tồn tại $c \in (0; 1)$: $\frac{F(1)-F(0)}{1-0} = F'(c)$.

Mà $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{3} = 0$ nên $F'(c) = 0$ hay $c^2.f(c) = 0$

Vì $c \in (0,1)$ nên $c^2 \neq 0$ do đó $f(c) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 12. 55: Cho $0 < a < b$ và f là một hàm liên tục trên [a; b], có đạo hàm trên (a; b). Chứng minh rằng tồn tại c thuộc (a, b) sao cho:

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(c) - cf'(c).$$

Hướng dẫn giải

Ta có hai hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ và $h(x) = \frac{1}{x}$ thoả mãn điều kiện của định lí Cauchy. Do đó, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho: $\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$

hay $\dfrac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \dfrac{\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}}{-\frac{1}{c^2}} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 12. 56: Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên [0; 1] và nhận giá trị dương. Chứng minh bất phương trình:

$$f'(x) - f(x) \leq \frac{2}{\pi}(f(1) - 2f(0)) \text{ có nghiệm.}$$

Hướng dẫn giải

Xét 2 hàm số: $g(x) = \text{arctg}x; h(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$ trên [0; 1].

Ta có: $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}; h'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}f(x) + \frac{1}{1+x^2}f'(x)$

Theo định lý Cauchy thì tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho:

$$\frac{h(1)-h(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{h'(c)}{g'(c)} \text{ hay } \frac{\frac{f(1)}{2}-f(0)}{\frac{\pi}{4}-0}=f'(c)-\frac{2c}{1+c^2}f(c)$$

nên $\frac{2}{\pi}(f(1)-2f(0))=f'(c)-\frac{2c}{1+c^2}f(c)$

Vì $0<c<1$ nên $1+c^2\ge 2c$ và vì $f(c)>0$ nên $f'(c)-\frac{2c}{1+c^2}f(c)\ge f'(c)-f(c)$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 12. 57: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\ge 1$

$x^2+2(y-1)x+y^2-6y+1=0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2-4y=0$ nên: $y\ge 0$

$\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{(y^4+1)+1}+\sqrt[4]{(y^4+1)-1}\ (**)$

Đặt $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t-1}$ thì f đồng biến trên $[1; +\infty)$

Nên $(**) \Leftrightarrow f(x)=f(y^4+1) \Leftrightarrow x=y^4+1$

Thế vào (*) ta có : $4y=(y^4+y)^2=y^8+2y^5+y^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\to x=1\\ y^7+2y^4+y=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=1\end{array}\right.$

(vì $g(y)=y^7+2y^4+y$ đồng biến trên $[0; +\infty)$)

Vậy nghiệm của hệ $(x; y)=(1; 0)$ hay $(x; y)=(2; 1)$.

<u>Cách khác</u> : $x^2+2(y-1)x+y^2-6y+1=0$

$\Rightarrow x=-y+1\pm 2\sqrt{y}$ vì $x\ge 1$

$\Rightarrow x=-y+1+2\sqrt{y}$

Đặt $u=x-1\ge 0$ và $v=y^4\ge 0$, ta được $\sqrt{u+2}+\sqrt[4]{u}=\sqrt{v+2}+\sqrt[4]{v}$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+\sqrt[4]{t}$ tăng trên $[0; +\infty)$

$\Rightarrow f(u)=f(v)\Rightarrow u=v\Rightarrow x-1=y^4$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 12.1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$. b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn

a) Tính đạo hàm và lập BBT.

Kết quả $\max y = 3 + 2\sqrt{2}$ và $\min y = 3 - 2\sqrt{2}$

b) Kết quả $\max\limits_{x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y = -1$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 12.2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + 4} - \frac{1}{\cos x - 4}$$

Hướng dẫn

Quy đồng mẫu thức và đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$ $(|t| \le 2)$

Kết quả $\min f = \dfrac{4}{8 + \sqrt{2}}$; $\max f = \dfrac{4}{8 - \sqrt{2}}$.

Bài tập 12.3: Cho đồ thị (C): $y = |x - m| - \dfrac{m^2 - m + 1}{m^2 - 3m + 3}$, $1 \le m \le 4$.

Tìm GTLN, GTNN của diện tích giới hạn bởi đồ thị và trục hoành.

Hướng dẫn

Tính diện tích đa giác giới hạn.

Kết quả $\max S = S(2) = 9$, $\min S = S(1) = 1$.

Bài tập 12.4: Xác định tam giác vuông ABC có diện tích lớn nhất biết tổng một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng a cho trước.

Hướng dẫn

Gọi x là một cạnh góc vuông thì x >0 và tính cạnh góc vuông còn lại . Kết quả ABC là nửa tam giác đều

Bài tập 12.5: Cho tam giác ABC. Chứng minh

a) $\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn

a) Xét hàm số $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$ trên $(0; \pi)$

b) Xét hàm số $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$ trên $(0; \pi)$

Bài tập 12.6: Cho các số thực x, y thoả mãn $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ và $0 \le y \le \frac{\pi}{3}$.

Chứng minh rằng: $\cos x + \cos y \le 1 + \cos(xy)$.

Hướng dẫn

Xét hàm số $f(t) = 1 + \cos t^2 - 2\cos t$ với $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$.

Bài tập 12.7: Cho các số thực dương x, y, z với $x \ge y \ge z$. Chứng minh :

$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \ge x^2 + y^2 + z^2$.

Hướng dẫn

Đặt $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$ với $u \ge v \ge 1$, thì :

$u^3v(v-1) + u^2 - uv(v^2+1) + v^3 \ge 0$

Bài tập 12. 8: Cho $x, y, z \ge 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh:

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Hướng dẫn

Giả sử z là số bé nhất thì $0 \le z \le \frac{1}{3}$.

Xét $f(z) = -2z^3 + z^2 + 1$, $0 \le z \le \frac{1}{3}$

Bài tập 12.9: Chứng minh bất đẳng thức

a) BECNULI :Nếu $x > -1$ và $\alpha \ge 1$ thì $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$.

Nếu $x > -1$ và $0 < \alpha \le 1$ thì $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$.

b) $\frac{(a-b)^2}{8a} \le \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{(a-b)^2}{8b}$ với $a \ge b > 0$.

Hướng dẫn

a) Xét hàm số: $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$ với $x > -1$

b) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ rồi dùng định lý Larange.

Bài tập 12. 10: Cho a, b, c không âm và không đồng thời bằng 0.

Chứng minh $\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2 + b^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \le \frac{1}{3}$

Nếu $x > -1$ và $0 < \alpha \le 1$ thì $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$.

Hướng dẫn

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 - 2x + 3}$ và lập phương trình tiếp tuyến tại

$x = 1$ là $y = \dfrac{4x - 1}{9}$.

Bài tập 12.11: Giải phương trình, hệ phương trình :

a) $\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3x} - 2} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3x} + 4} = 3$

b) $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 1 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Tính đạo hàm của hàm số VT. Kết quả x =3.

b) Kết quả x =3, y =0.

Bài tập 12.12: Tìm tham số để phương trình

a) $x^4 + 4x^3 - 8x + 1 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

b) $1 + \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x - m = 0$ có vô số nghiệm.

Hướng dẫn

a) PT: $x^4 + 4x^3 - 8x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 8x + 1 = m$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x + 1$.

Kết quả $-3 < m < 6$

b) Đưa về xét hàm số f(t) theo $t = \cos x$, $-1 \le x \le 1$.

Kết quả $\dfrac{1}{6} \le m \le \dfrac{17}{6}$.

Chuyên đề 13: PHÉP BIẾN HÌNH VÀ DỜI HÌNH

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phép biến hình

Phép biến hình F trong mặt phẳng là một quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy, gọi là ảnh của điểm M: F(M) = M'.

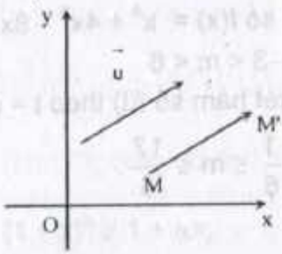
Phép dời hình

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì: F: $M \mapsto M'$, $N \mapsto N'$ thì M'N' = MN. Đôi khi ta còn gọi là phép đẳng cự.

Định lí cơ bản: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

Các phép dời hình đặc biệt

- Phép biến hình đồng nhất I biến mỗi điểm M thành chính nó, tức là ảnh M' luôn trùng với M.
- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ cho trước, là phép biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, kí hiệu $T_{\vec{v}}$.



Trong hệ toạ độ Oxy cho $\vec{v}(a; b)$.

Gọi $T_{\vec{v}}: M(x; y) \to M'(x'; y')$

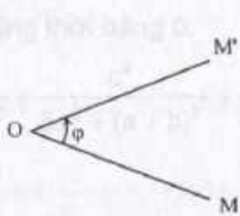
thì $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

- Phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành điểm M' đối xứng với M qua d, kí hiệu là $Đ_d$ hay S_d.
- Phép đối xứng qua điểm I là phép biến đổi mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua I, kí hiệu là $Đ_I$ hay S_I.

Trong hệ toạ độ Oxy cho điểm I(a; b).

$Đ_I: M(x; y) \to M'(x'; y')$ thì: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$.

- Phép quay tâm O góc quay φ, biến điểm O thành O và biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho:



$\begin{cases} OM' = OM \\ (OM, OM') = \phi \end{cases}$

Kí hiệu $Q_{(O;\varphi)}$ hay $R_{(O;\varphi)}$.

Phép quay góc φ biến đường thẳng d thành đường thẳng d', nếu $0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$ thì $(d, d') = \varphi$, còn nếu $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ thì $(d, d') = \pi - \varphi$.

Xác định phép dời hình

Nếu 2 tam giác bằng nhau ABC và A'B'C' tương ứng thì xác định chỉ một phép dời hình biến A, B, C thành A', B', C' tương ứng.

Hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Chú ý

1) Các hướng chứng minh: dùng quan hệ hình học; dùng hệ thức về vectơ để suy ra quan hệ độ dài; dùng phương pháp toạ độ,...

2) Hợp thành của hai phép dời hình liên tiếp:

$F_1: M \longmapsto M'$ và $F_2: M' \longmapsto M''$

Xác định quy tắc biến M thành M'' theo đặc trưng các phép dời hình. Từ đó ta lại có phân tích một phép dời hình thành tích các phép dời hình nào đó.

3) Để xác định điểm ta thường tìm tương giao. Thông thường điểm cần tìm thuộc một đường đã biết và một đường là ảnh qua phép dời hình, do đó điểm cần tìm là điểm chung. Bài toán dựng hình đầy đủ có 4 bước: phân tích, dựng hình, chứng minh và biện luận, tuy nhiên có thể lược giản đi.

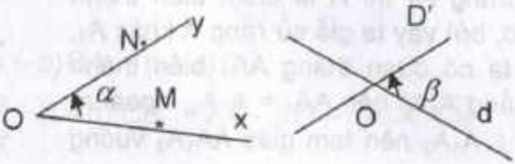
4) Để tìm quỹ tích (tập hợp điểm), nếu có phép dời hình biến điểm M thành M' và (C) là tập hợp điểm của M thì ảnh (C') là tập hợp điểm của M'. Ta phối hợp với các quỹ tích cơ bản.

5) Góc định hướng

$(Ox, Oy) \equiv \alpha (\text{mod } 2\pi)$

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \alpha (\text{mod } 2\pi)$

$(d, d') \equiv \alpha (\text{mod } \pi)$



Tam giác ABC : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \pi (\text{mod } 2\pi)$

và $(AB, AC) + (BC, BA) + (CA, CB) \equiv 0 (\text{mod } \pi)$

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O):

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) (\text{mod } 2\pi)$ và $(OA, OB) \equiv 2(CA, CB) (\text{mod } \pi)$

Bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) (\text{mod } 2\pi)$ hay $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv -(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) (\text{mod } 2\pi)$

$\Leftrightarrow (CA, CB) \equiv (DA, DB) (\text{mod } \pi)$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 13. 1: Một điểm gọi là bất động nếu nó trùng với ảnh của nó qua phép biến hình. Chứng minh một phép dời hình có hai điểm bất động là một phép đồng nhất hoặc là một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

Gọi F là phép dời hình có hai điểm bất động A, B: F(A) = A, F(B) = B.

Lấy một điểm C không thẳng hàng với A, B và gọi C' = F(C).

Nếu C' ≡ C thì F có ba điểm bất động không thẳng hàng. Giả sử F không phải là phép đồng nhất thì có một điểm M mà ảnh M' khác M ta có: AM = AM', BM = BM', CM = CM' nên A, B, C cách đều M và M' nên nằm trên trung trực của MM' do đó chúng thẳng hàng: vô lí. Vậy F là phép đồng nhất.

Nếu C' không trùng C thì AC = AC' và BC = BC' nên AB là trung trực của CC'. Khi đó F chính là phép đối xứng trục, với trục là đường thẳng AB.

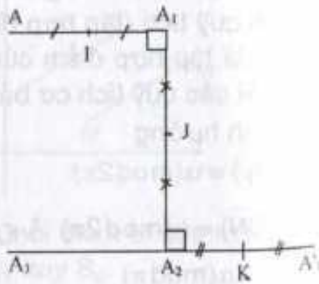
Kết quả: Nếu phép dời hình có ba điểm bất động không thẳng hàng thì phép dời hình đó là một phép đồng nhất.

Bài toán 13. 2: Chứng minh rằng nếu phép dời hình F biến mỗi đường thẳng a thành đường thẳng a' vuông góc với a thì F có một điểm duy nhất biến thành chính nó.

Hướng dẫn giải

Trước hết, F không thể có hai điểm phân biệt biến thành chính nó vì khi đó đường thẳng đi qua hai điểm đó phải biến thành chính nó, trái với giả thiết là F biến đường thẳng thành đường thẳng vuông góc.

Để chứng minh sự tồn tại của điểm biến thành chính nó, lấy một điểm A nào đó và gọi $A_1 = F(A)$, $A_2 = F(A_1)$.

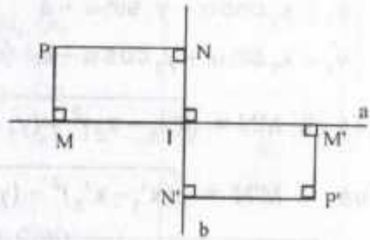


Nếu A trùng A_1 thì A là điểm biến thành chính nó, bởi vậy ta giả sử rằng A khác A_1. Khi đó ta có đoạn thẳng AA_1 biến thành đoạn thẳng A_1A_2 nên $AA_1 = A_1A_2$, ngoài ra có $AA_1 \perp A_1A_2$ nên tam giác AA_1A_2 vuông cân tại A_1.

Lấy điểm A_3 sao cho $AA_1A_2A_3$ là hình vuông và điểm A'_3 là điểm đối xứng với A_3 qua điểm A_2. Khi đó, F biến điểm A_2 thành điểm A_3 hoặc điểm A'_3. Ta chứng minh rằng nếu F biến A_2 thành A'_3 thì vô lí. Thật vậy, nếu ta gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA_1, A_1A_2, $A_2A'_3$ thì F biến I thành J và biến J thành K mà IJ không vuông góc với IJ, vô lí. Vậy F biến A_2 thành A_3 và cũng tương tự F biến A_3 thành A. Như vậy F biến đoạn thẳng AA_2 thành đoạn thẳng A_1A_3, suy ra F biến trung điểm của AA_2 thành trung điểm của A_1A_3, tức là biến tâm O của hình vuông $AA_1A_2A_3$ thành chính nó. Vậy F có duy nhất điểm O biến thành chính nó.

Bài toán 13. 3: Cho đường thẳng a và một điểm I nằm trên nó. Gọi F là phép dời hình biến a thành a và I là điểm duy nhất biến thành chính nó. Chứng minh rằng F biến điểm M bất kì thành điểm M' sao cho I là trung điểm MM'.

Giải



Lấy điểm M bất kì nằm trên a và khác I, phép dời hình F biến a thành a nên biến điểm M thành điểm M' trên a, IM = IM'. Ngoài ra vì M khác M' nên I là trung điểm của MM'.

Gọi b là đường thẳng đi qua I vuông góc với a thì F biến b thành đường thẳng đi qua I và vuông góc với a.

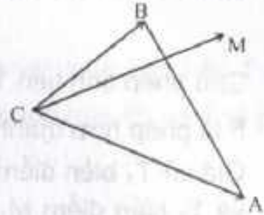
Do đó b biến thành b. Cũng lập luận như trên, nếu N nằm trên b thì F biến N thành N' sao cho I là trung điểm của NN'. Giả sử điểm P không nằm trên a và b. Hạ $PM \perp a$ và $PN \perp b$ ($M \in a$, $N \in b$). Theo trên M biến thành M', N biến thành N' sao cho I là trung điểm của MM' và NN'. Suy ra P biến thành điểm P' sao cho M'IN'P' là hình chữ nhật và do đó I là trung điểm của PP'.

Bài toán 13. 4: Cho 2 tam giác bằng nhau ABC và A'B'C'. Chứng minh có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

Hướng dẫn giải

Xét phép biến hình, F biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho nếu

$\overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$



thì $\overrightarrow{C'M'} = p\overrightarrow{C'A'} = q\overrightarrow{C'B'}$.

Ta chứng minh F là phép dời hình.

Giả sử F biến N thành N', nếu $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ thì

$\overrightarrow{C'N'} = k\overrightarrow{C'A'} + t\overrightarrow{C'B'}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = (k-p)\overrightarrow{CA} + (t-q)\overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (k-p)^2CA^2 + (t-q)^2CB^2 + 2(k-p)(t-q)\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Tương tự: $M'N'_2 = \overrightarrow{M'N'}^2$

$$= (k-p)^2C'A^2 + (t-q)^2C'B'^2 + 2(k-p)(t-q)\overrightarrow{C'A'}.\overrightarrow{C'B'}$$

Vì hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau nên CA = C'A', CB = C'B' và $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'}.\overrightarrow{C'B'}$. Do đó MN = M'N' hay F là phép dời hình, biến A, B, C lần lượt thành A', B', C' ⇒ đpcm.

Bài toán 13. 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') trong đó: $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$

Chứng minh phép F là phép dời hình.

Hướng dẫn giải

Phép F biến điểm $M(x_1; y_1)$ thành điểm $M'(x'_1; y'_1)$, điểm $N(x_2; y_2)$ thành điểm $N'(x'_2; y'_2)$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + a \\ y'_1 = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + b \end{cases}, \begin{cases} x'_2 = x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha + a \\ y'_2 = x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha + b \end{cases}$$

Ta có: $MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

và $M'N' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$

$= \sqrt{\left[(x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\sin\alpha\right]^2 + \left[(x_1 - x_2)\sin\alpha + (y_1 - y_2)\cos\alpha\right]^2}$

$= \sqrt{\left[(x_1 - x_2)^2\cos^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\sin^2\alpha + (x_1 - x_2)^2\sin^2\alpha + (y_1 - y_2)^2\cos^2\alpha\right]}$

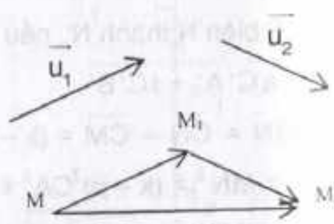
$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = MN.$

Vậy phép F là phép dời hình.

Bài toán 13. 6: Chứng minh rằng hợp thành của một số hữu hạn các phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến và ngược lại một phép tịnh tiến được xem là hợp thành của một số hữu hạn các phép tịnh tiến.

Hướng dẫn giải

Cho phép tịnh tiến T_1 theo vectơ $\vec{u_1}$ và phép tịnh tiến T_2 theo vectơ $\vec{u_2}$. Gọi F là phép hợp thành của T_1 và T_2.



Giả sử T_1 biến điểm M thành điểm M_1 và T_2 biến điểm M_1 thành M_2, tức là:

$\overrightarrow{MM_1} = \vec{u_1}$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u_2}$

Suy ra: $\overrightarrow{MM_2} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$: xác định

Vì phép hợp thành F biến M thành M_2

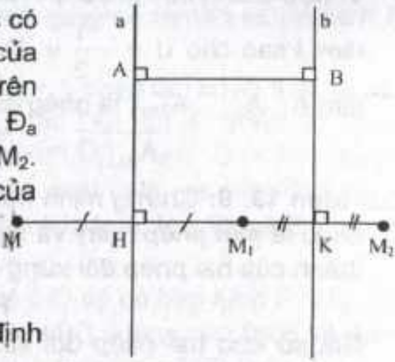
nên F là phép tịnh tiến theo vectơ : $\vec{u_1} + \vec{u_2}$.

Một cách tổng quát: Hợp thành của một số hữu hạn phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến theo vectơ tổng của các vectơ tịnh tiến của các phép tịnh tiến đó.

Do một vectơ có thể phân tích thành tổng hữu hạn các vectơ nên ta có cả kết quả phân tích ngược lại.

Bài toán 13. 7: Chứng minh hợp thành của hai phép đối xứng trục có các trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến và ngược lại, mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song bằng nhiều cách.

Hướng dẫn giải



Giả sử Đ$_a$ và Đ$_b$ là các phép đối xứng trục có trục là a và b mà a // b và F là hợp thành của Đ$_a$ và Đ$_b$. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên a, b sao cho AB ⊥ a. Với điểm M bất kì, Đ$_a$ biến M thành M_1 và Đ$_b$ biến M_1 thành M_2. Nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M_2 thì :

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

$= 2(\overrightarrow{HM_2} + \overrightarrow{M_2K}) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}$: xác định

Vì phép hợp thành F biến M thành M_2 mà $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{AB}$ nên F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

Ngược lại, giả sử T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Lấy một đường thẳng a nào đó vuông góc với $\vec{u}$ và đường thẳng b là ảnh của a qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{u}$ thì phép tịnh tiến T là hợp thành của phép đối xứng trục Đ$_a$ và phép đối xứng trục Đ$_b$. Vì có nhiều cách chọn đường thẳng a, nên có nhiều phép đối xứng Đ$_a$ và Đ$_b$ có hợp thành là T.

Bài toán 13. 8:

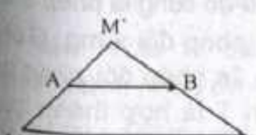
a) Cho phép đối xứng trục Đ$_a$ qua đường thẳng a và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với a. Chứng minh rằng hợp thành của Đ$_a$ và T là phép đối xứng trục.

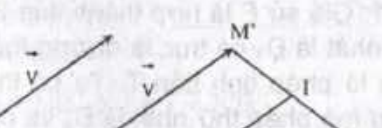
b) Xác định hợp thành của m phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn giải

a) Có thể xem phép tịnh tiến T là hợp thành của hai phép đối xứng trục Đ$_b$ và Đ$_c$. Vì vectơ tịnh tiến vuông góc với a nên a // b // c. Do đó, ta được hợp thành của ba phép đối xứng có trục song song. Vậy ta được một phép đối xứng trục.

b) Ta có hợp thành của 2 phép đối xứng tâm A và B là phép tịnh tiến vectơ $2\overrightarrow{AB}$. Do đó, hợp thành của m = 2n phép đối xứng tâm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ là phép tịnh tiến vectơ $2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_n})$



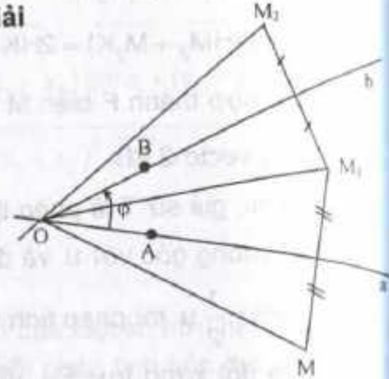


Vì hợp thành của phép tịnh tiến $\vec{V}$ và phép đối xứng tâm I là phép đối xứng tâm J sao cho $\vec{U} = -\frac{1}{2}\vec{v}$. Do đó hợp thành của m = 2n + 1 phép đối xứng tâm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ là phép đối xứng tâm O sao cho:

$$\overrightarrow{A_{2n+1}O} = -(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}).$$

Bài toán 13. 9: Chứng minh hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay và ngược lại, mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau, bằng nhiều cách.

Hướng dẫn giải



Giả sử cho hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ có trục a và b cắt nhau tại O, còn F là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$. Lấy hai điểm A, B khác O lần lượt nằm trên a, b sao cho góc AOB không tù và đặt $\varphi = (OA, OB)$. Với mọi điểm M khác O, giả sử $Đ_a$ biến M thành M_1 và $Đ_b$ biến M_1 thành M_2.

Khi đó, nếu gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M_2 thì ta có:

$$OM = OM_1 = OM_2$$

và $(OM, OM_2) = (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2)$

$$= 2(OH, OM_1) + 2(OM_1, OK) = 2(OH, OK) = 2\varphi.$$

Vậy phép hợp thành F là phép quay tâm O góc quay 2φ.

Ngược lại, giả sử Q là phép quay tâm O góc quay φ. Ta lấy đường thẳng a nào đó đi qua O và b là ảnh của a qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\varphi}{2}$ thì hợp thành hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ chính là phép quay Q.

Bài toán 13. 10: Xác định hợp thành của m phép đối xứng:

a) có trục đối xứng đồng quy.

b) có trục đối xứng song song.

Hướng dẫn giải

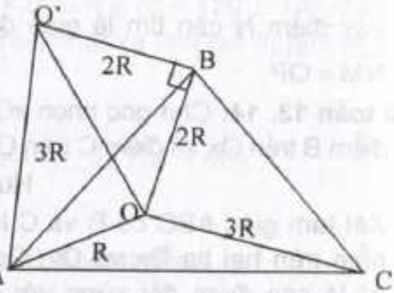
a) Xét m = 2n. Hợp thành của hai phép đối xứng có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến. Vì vậy, hợp thành của 2n phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là hợp thành của n phép tịnh tiến, do đó cũng là phép tịnh tiến. Xét m = 2n +1. Giả sử F là hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng. Gọi phép đối xứng thứ nhất là $Đ_1$ có trục là đường thẳng a, 2n phép đối xứng còn lại có hợp thành là phép tịnh tiến T. Ta có thể xem T là hợp thành của hai phép đối xứng mà phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng: $Đ_{a'}$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Nhưng vì hợp thành của $Đ_{a'}$ và $Đ_a$ là phép đồng nhất e nên F chính là phép đối xứng $Đ_b$.

b) Xét m = 2n. Nếu F là hợp thành của 2n phép đối xứng có trục đối xứng đồng quy tại O thì F là hợp thành của n phép quay có tâm O và do đó F là một phép quay.

Xét m = 2n +1. Giả sử F là hợp thành của 2n + 1 phép đối xứng trục có các trục đều đi qua O. Gọi $Đ_a$ là phép đối xứng đầu tiên, thì 2n phép đối xứng trục còn lại có hợp thành là phép quay Q tâm O. Ta xem Q là hợp thành của hai phép đối xứng trục, trong đó phép thứ nhất là $Đ_a$ và phép thứ hai là $Đ_b$. Như vậy F là hợp thành của ba phép đối xứng trục: $Đ_a'$, $Đ_a$ và $Đ_b$. Vậy F chính là phép đối xứng trục $Đ_b$.

Bài toán 13. 11: Trên ba đường tròn có cùng tâm O và có bán kính R, 2R, 3R, lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và điểm O thuộc miền trong tam giác này. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Hướng dẫn giải



Phép quay tâm B góc $-\dfrac{\pi}{2}$ biến C thành A sẽ biến điểm O thành O'

Ta có $\begin{cases} AO' = OC = 3R \\ BO' = BO = 2R, OBO' = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta OBO'$ vuông cân

$\Rightarrow OO' = OB\sqrt{2} = 2R\sqrt{2}$

Từ đó: $OO'^2 + OA^2 = 8R^2 + R^2 = 9R^2 = O'A^2 \Rightarrow \widehat{O'OA} = 90^0$

Mà: $B\hat{O}O' = 45^0$ nên $B\hat{O}A = 135^0$

Định lý hàm số cosin trong tam giác BOA cho:

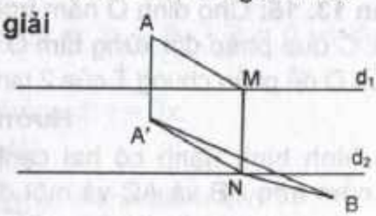
$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos BOA = (5 + 2\sqrt{2})R^2$

ΔABC vuông cân $\Rightarrow S(ABC) = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{5+2\sqrt{2}}{2}R^2$.

Bài toán 13. 12: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 và hai điểm A, B ở hai phía của dãy (d_1, d_2).

Tìm $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho $MN \perp d_1$ và AM + MN + NB là ngắn nhất.

Hướng dẫn giải



Giả sử $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho:

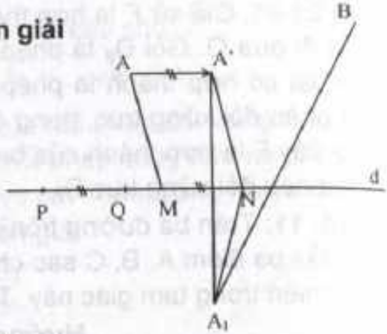
$MN \perp d_1$ ta có $\overrightarrow{NM} = \vec{a}$: xác định, phép tịnh tiến vectơ $\vec{a}$ biến M thành N, biến A thành A' do đó AM = A'N nên :

$AM + MN + NB = |\vec{a}| + A'N + NB \geq |\vec{a}| + A'B$.

Dấu = xảy ra khi N là giao điểm của A'B với d_2, hạ $NM \perp d_1$ thì M, N là 2 điểm cần tìm.

Bài toán 13. 13: : Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P, Q và hai điểm A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.

Hướng dẫn giải



Giả sử dựng được hai điểm M, N nằm trên d sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$. Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$ thì điểm A' hoàn toàn xác định và AMNA' là hình bình hành nên AM = A'N.

Do đó AM + BN = A'N + BN.

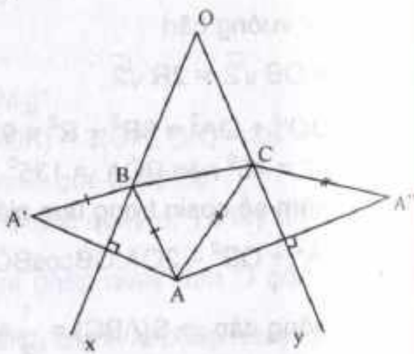
Lấy A_1 đối xứng A' qua d thì:

$A'N + BN = A_1N + BN \geq A_1B$: Không đổi

Vậy điểm N cần tìm là giao điểm của A_1B và d, và điểm M xác định bởi $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{QP}$.

Bài toán 13. 14: Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Xét tam giác ABC có B và C lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy. Gọi A' và A" là các điểm đối xứng với điểm A lần lượt qua các đường thẳng Ox và Oy. Chu vi của tam giác ABC là:

AB + BC + CA

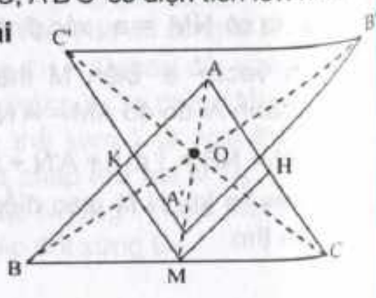
= A'B + BC + CA" ≥ A'A".

Dấu "=" xảy ra khi bốn điểm A', B, C, A" thẳng hàng. Vậy chu vi tam giác ABC bé nhất khi lấy B và C lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng A'A" với hai tia của góc nhọn xOy.

Vì góc xOy nhọn tồn tại các giao điểm B và C.

Bài toán 13. 15: Cho đỉnh O nằm trong tam giác ABC. Gọi A', B', C' là ảnh của A, B, C qua phép đối xứng tâm O. Biết rằng A' ở trong tam giác ABC, tìm vị trí của O để phần chung T của 2 tam giác ABC, A'B'C' có diện tích lớn nhất?

Hướng dẫn giải



T là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp nằm trên AB và AC và một đường chéo là AA'. Gọi M là giao điểm của AA' với cạnh BC và dựng hình bình hành AKMH, có MK // AC và MH // AB ($K \in AB$, $H \in AC$).

Ta có T ở trong hình bình hành AKMH, do đó: $S_T \le S_{AKMN}$

và $\dfrac{S_{AHK}}{S_{ABC}} = \dfrac{AK}{AB}.\dfrac{AH}{AC}$. Do MK // AC và MH // AB nên:

$\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{CM}{BC}, \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{BM}{BC}$ và $\dfrac{AK}{AB} + \dfrac{AH}{AC} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $\dfrac{AK}{AC}.\dfrac{AH}{AC} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{AK}{AB} + \dfrac{AH}{AC}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{AHK} \le \dfrac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow S_{AKMH} \le \dfrac{1}{2} S_{ABC}$.

Vậy S_T lớn nhất khi O là trung điểm của trung tuyến AM.

Bài toán 13. 16: Tam giác ABC có BC = a, AC = b, C = φ (φ < 120°). Tìm điểm M trong mặt phẳng sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất của tổng đó.

Hướng dẫn giải

Thực hiện phép quay: $Q_{(C,-60^o)}$: M ↦ M', A ↦ A', thì MA = M'A'.

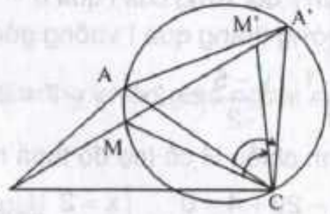
Tam giác CMM' đều, nên MM' = CM.

Do đó: MA + MB + MC = BM + MM' + M'A' ≥ A'B: không đổi

Theo định lí hàm số cosin trong tam giác A'BC:

$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi + 60^o)$.

Độ dài đường gấp khúc BMM'A' ngắn nhất khi M và M' nằm trên BA', do đó $\widehat{CMA'} = \widehat{CAA'} = 60^o$ nên thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACA'.



Vậy điểm M cần tìm là giao của đường thẳng BA' và đường tròn ngoại tiếp tam giác ACA'. Độ dài ngắn nhất của tổng là:

$$MA + MB + MC = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\varphi + 60^o).$$

Bài toán 13. 17: Tìm ảnh qua phép:

a) tịnh tiến vectơ $\vec{u}(-2; 3)$ của đường thẳng d: 3x − 5y + 3 = 0 và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

b) phép quay tâm O, góc 90° của đường thẳng d: y = 2x.

Hướng dẫn giải

a) Phép tịnh tiến vectơ $\vec{u}(-2; 3)$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') thì ta có: $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

Ta có x = x' + 2, y = y' – 3. Thay vào phương trình của d ta được:

$$3(x' + 2) - 5(y' - 3) + 3 = 0 \text{ hay } 3x' - 5y' + 24 = 0.$$

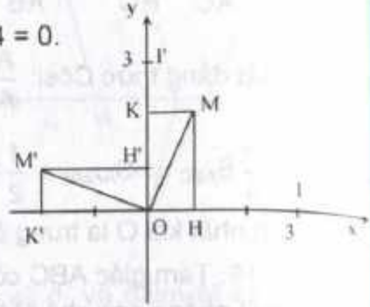
Vậy phương trình của d' là: $3x - 5y + 24 = 0$.

Thay vào phương trình (C) ta được:

$(x' + 2)^2 + (y' - 3)^2 - 2(x' + 2) + 4(y' - 3) - 1 = 0$

hay $x'^2 + y'^2 + 2x' - 2y' - 4 = 0$.

Vậy phương trình (C'): $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$.



b) Đường thẳng d: y = 2x qua gốc O và M(1; 2) thì điểm O không thay đổi còn M biến thành M'(–2; 1).

Do đó ảnh của d là đường thẳng

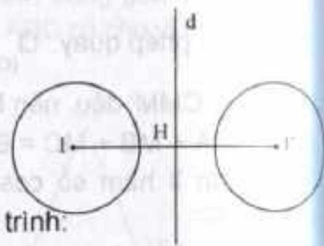
OM': $y = -\frac{1}{2}x$.

Bài toán 13. 18: Tìm ảnh qua phép đối xứng:

a) trục d: $x - 2y + 4 = 0$ của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$.

b) tâm $I(x_o; y_o)$ của đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$.

Hướng dẫn giải



a) Đường tròn (C) có tâm I(1; 5) và

bán kính $R = \sqrt{1 + 25 - 1} = 5$

Ta tìm hình chiếu của I lên d và tìm điểm I' đối xứng của I qua d.

Đường thẳng qua I vuông góc với d có phương trình:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 5}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Hình chiếu H có toạ độ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ nên điểm } H(2; 3) \Rightarrow I'(3; 1)$$

Vì R' = R nên (C'): $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

b) Cho M(x; y) và M'(x'; y') là ảnh của M qua phép đối xứng tâm với tâm $I(x_o; y_o)$ thì $x + x' = 2x_o$; $y + y' = 2y_o$ nên $x = 2x_o - x'$; $y = 2y_o - y'$.

Thế vào phương trình Δ thành: $a(2x_o - x') + b(2y_o - y') + c = 0$

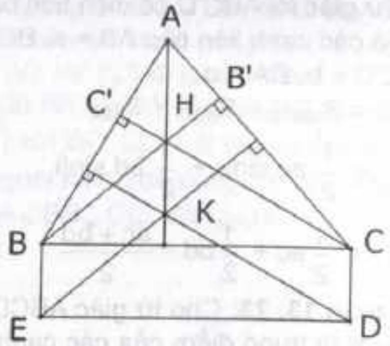
hay: $-(ax' + by' + c) + 2(ax_o + by_o + c) = 0$

Vậy (Δ'): $ax + by + c - 2(ax_o + by_o + c) = 0$.

Bài toán 13. 19: Cho tam giác ABC, vẽ ra ngoài hình chữ nhật BCDE. Các đường thẳng qua D và E lần lượt vuông góc với AB và AC cắt nhau tại K. Chứng minh AK vuông góc với BC.

Hướng dẫn giải

Gọi BB' và CC' là hai đường cao của tam giác ABC và H là trực tâm của tam giác này.



Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ biến:

- BB' thành EK (vì EK // BB')
- CC' thành DK (vì DK // CC')

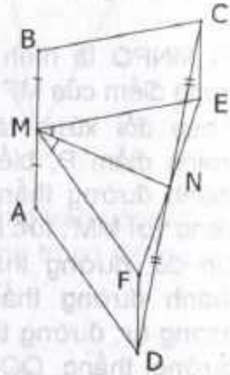
Mà BB' và CC' giao nhau tại H nên H và K là hai điểm tương ứng trong phép tịnh tiến này.

Do đó HK // BE nên HK ⊥ BC.

Mà AH ⊥ BC, vậy A, H, K thẳng hàng, nghĩa là AK vuông góc với đường thẳng BC.

Bài toán 13. 20: Cho tứ giác lồi ABCD không phải là hình thang. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng nếu MN tạo với các cạnh AD và BC những góc bằng nhau thì AD = BC.

Hướng dẫn giải



Dựng $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AD}$

Các tứ giác MBCE và MADF là hình bình hành nên ta có: CE = BM, DF = AM nên CE = DF, CE // DF.

Do đó tứ giác CEDF là hình bình hành nên hai đường chéo EF và CD giao nhau tại trung điểm N.

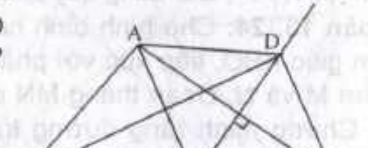
Theo giả thiết thì $\widehat{EMN} = \widehat{NMF}$ nên tam giác EMF cân vì có đường phân giác vừa là trung tuyến.

Vậy ME = MF ⇒ BC = AD.

Bài toán 13. 21: Cho tam giác ABC. Trên đường phân giác ngoài của góc C lấy một điểm D khác với C.

Chứng minh rằng: DA + DB > CA + CB.

Hướng dẫn giải



Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CD. Do CD là phân giác ngoài của góc C, nên A' thuộc tia đối của tia CB và A'C = AC

Ta có:

DA + DB = DA' + DB > BA' (do D ∉ BA')

Mặt khác: BA' = CB + CA' = CB + CA

Do đó DA + DB > CA + CB.

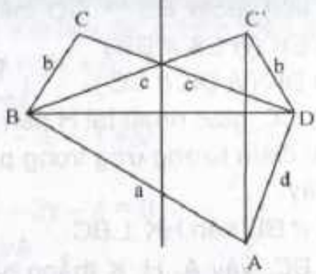
Bài toán 13. 22: Cho tứ giác lồi ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.

Chứng minh tứ giác có diện tích $S \le \dfrac{ac+bd}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta dựng đường trung trực Δ của đường chéo BD và gọi C' là ảnh của C trong phép đối xứng qua Δ, khi đó ΔBC'D = ΔBCD, DC' = BC = b, BC' = DC = c.

Tứ giác lồi ABC'D có diện tích bằng S và các cạnh liên tiếp AB = a, BC' = c, C'D = b, DA = d.



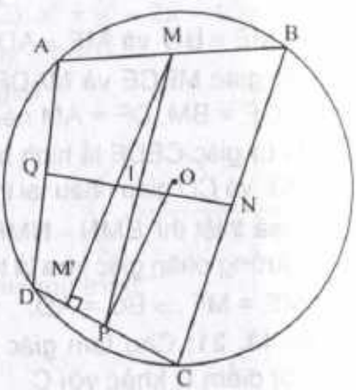
$S = S_{ABC'D} = S_{ABC'} + S_{ADC'}$

$= \frac{1}{2}.ac.\sin\alpha + \frac{1}{2}.bd.\sin\beta$

$\le \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}bd = \frac{ac+bd}{2}$.

Bài toán 13. 23: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Hạ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC. Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm I, O?

Hướng dẫn giải



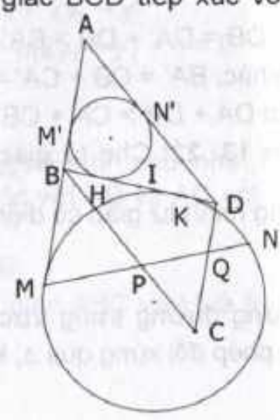
Vì MNPQ là hình bình hành nên I là trung điểm của MP và NQ.

Phép đối xứng tâm Đ$_1$ biến điểm M thành điểm P, biến đường thẳng MM' thành đường thẳng đi qua P và song song với MM', tức là vuông góc với DC. Do đó, đường thẳng MM' được biến thành đường thẳng PO. Hoàn toàn tương tự; đường thẳng NN' biến thành đường thẳng QO, đường thẳng PP' biến thành đường thẳng MO, đường thẳng QQ' biến thành đường thẳng NO.

Vì bốn đường thẳng MO, NO, PO, QO đồng quy tại O nên bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại điểm O' đối xứng với tâm O qua điểm I.

Bài toán 13. 24: Cho hình bình hành ABCD và đường tròn (C) bàng tiếp của tam giác ABD, tiếp xúc với phần kéo dài của AB và AD tương ứng tại các điểm M và N. Đoạn thẳng MN cắt BC và DC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc với các cạnh BC và DC tại P và Q.

Hướng dẫn giải



Gọi K là tiếp điểm của (C) với BD; (V) là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, tiếp xúc với AB tại M', với AD tại N' và BD tại H; gọi I là trung điểm của BD.

Từ MM' = NN'

và MM' = BH + BK,

NN' = DK + DH suy ra BH = DK.

Ta có phép đối xứng Đ$_I$:

$B \mapsto D, H \mapsto K$.

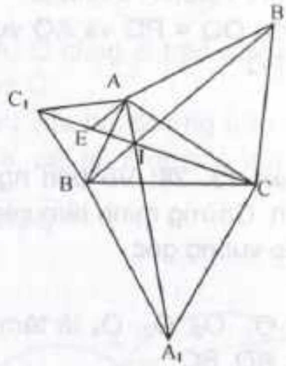
Tam giác AMN cân tại A và vì DQ // AM nên tam giác DQN cân tại D suy ra DQ = DN = DK = BH = BM'. Do đó, Q là ảnh của M' trong phép $Đ_I$. Tương tự, P là ảnh của N' trong phép $Đ_I$, phép $Đ_I$: (V) $\mapsto$ (V') đi qua 3 điểm K, Q, P. Vì M', N', H là các điểm chung duy nhất của (V) với AB, AD và BC, do đó K, Q, P cũng là điểm chung duy nhất của (V') với BC, CD, CB suy ra đpcm.

Bài toán 13. 25: Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Hướng dẫn giải

Gọi $I = AA_1 \cap CC_1$

Phép quay tâm B góc 60° biến A_1 thành C, biến A thành C_1, biến A_1A thành CC_1, do đó $AIC_1 = 60^\circ$.



Lấy trên CC_1 điểm E sao cho IE = IA thì tam giác EIA đều.

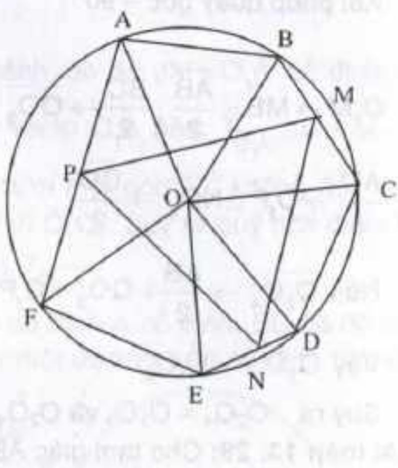
Phép quay tâm A góc 60° biến C_1 thành B, biến E thành I, C thành B_1 và vì C_1, E, C thẳng hàng nên B, I, B_1 thẳng hàng.

Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại I.

Bài toán 13. 26: Cho lục giác lồi ABCDEF nội tiếp trong đường tròn với tâm O bán kính R. Biết rằng AB = CD = EF = R, chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng BC, DE và FA là đỉnh của một tam giác đều.

Hướng dẫn giải

Giả sử lục giác ABCDEF định hướng m. Gọi M, N và P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, DE và FA.



Ta có: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CF})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF})$

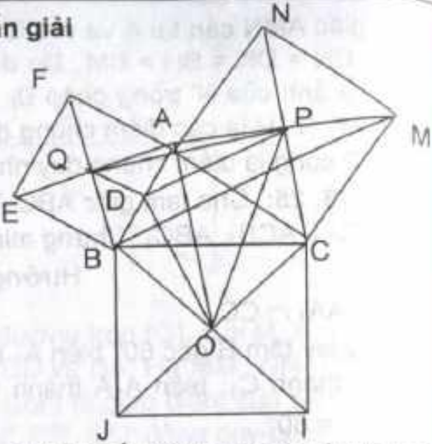
Phép quay góc $+\frac{\pi}{3}$ biến $\overrightarrow{MP}$ thành :

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{MN}$

Suy ra MP = MN và $\widehat{PMN} = \frac{\pi}{3}$. Do đó tam giác MNP đều.

Bài toán 13. 27: Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm của chúng. Chứng minh AO vuông góc với PQ và AO = PQ.

Hướng dẫn giải



Gọi D là trung điểm AB thì phép quay tâm C góc 90^o biến MB thành AI, suy ra tam giác DPO vuông cân tại D.

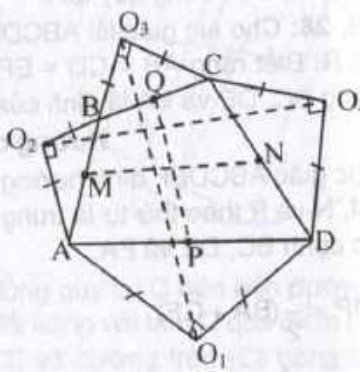
Phép quay tâm D, góc 90^o biến O thành P, biến A thành Q.

Do đó OQ = PQ và AO vuông góc với PQ.

Bài toán 13. 28: Vẽ bên ngoài tứ giác ABCD bốn hình vuông dựng trên 4 cạnh. Chứng minh tâm các hình vuông đó là đỉnh của 1 tứ giác có 2 đường chéo vuông góc.

Hướng dẫn giải:

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm của 4 hình vuông.M, N, P, Q là trung điểm AB, CD, AD, BC.



$\overrightarrow{O_2O_4} = \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO_4}$

$= \overrightarrow{O_2M} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{NO_4}$ (1)

Xét phép quay góc -90^0:

$\overrightarrow{O_2M} \to \overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{2} \to \overrightarrow{QO_3}$

$\frac{\overrightarrow{AD}}{2} \to \overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{NO_4} \to \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$

Nên $\overrightarrow{O_2O_4} \to \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{QO_3} + \overrightarrow{O_1P} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2} = \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO_3} = \overrightarrow{O_1O_3}$

Vậy $\overrightarrow{O_2O_4} \to \overrightarrow{O_1O_3}$.

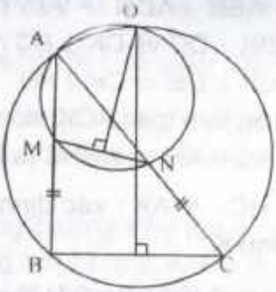
Suy ra $O_2O_4 = O_1O_3$ và $O_2O_4 \perp O_1O_3$.

Bài toán 13. 29: Cho tam giác ABC. Lấy trên AB một điểm lưu động M và trên AC một điểm N sao cho BM = CN. Chứng minh trung trực của MN qua 1 điểm cố định và đường tròn (AMN) qua 2 điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Ta có: BM = CN và $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \varphi$

Vậy N là ảnh của M trong phép quay có góc quay φ biến B thành C.
Do đó đường trung trực của MN qua tâm quay O cố định là giao điểm của đường trung trực của BC và cung chứa góc φ dựng trên dây BC.
M và N là hai điểm tương ứng, và A là giao điểm của hai đường thẳng tương ứng BM và CN trong phép quay trên.



Do đó góc (OM ON) = (AM, AN) nên M, N, A, O cùng ở trên đường tròn.
Vậy đường tròn (AMN) qua 2 điểm cố định A và O.

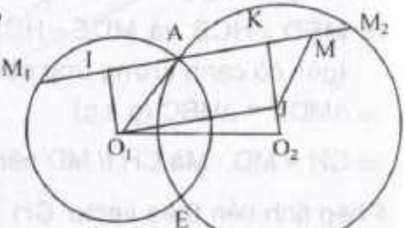
Bài toán 13. 30: Gọi A là một trong hai giao điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Một đường thẳng Δ tùy ý, quay quanh A, cắt lại 2 đường tròn ở M_1, M_2. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}$

Hướng dẫn giải

Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của O_1, O_2 trên đường thẳng M_1M_2.
Khi đó $M_1I = IA$, $AK = KM_2$ và do đó:

$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AM}$$

Gọi J là hình chiếu của O_1 trên O_2K, khi đó $\overrightarrow{O_1J} = \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AM}$



Suy ra tứ giác AO_1JM là một hình bình hành, do đó $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{O_1A}$ cố định, vì vậy M là ảnh của J qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{O_1A}$ nên: $T_{\overrightarrow{O_1A}} : J \mapsto M$.

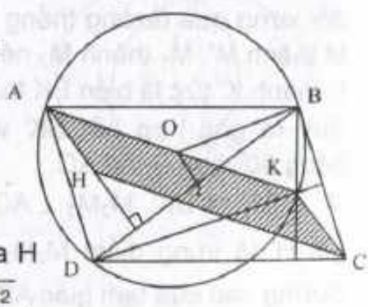
Do điểm J luôn nhìn đoạn O_1O_2 cố định dưới một góc 90° không đổi, nên quỹ tích điểm J là đường tròn ω đường kính O_1O_2. Suy ra quỹ tích điểm M là ảnh của đường tròn ω qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{O_{12}A}}$.

Bài toán 13. 31: Cho hình bình hành ABCD có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng 2a, còn A, B, D nằm trên một đường tròn cố định tâm O, bán kính R. Tìm quỹ tích đỉnh C.

Hướng dẫn giải

AO kéo dài cắt đường tròn ở K, nên K cố định. Gọi H là trực tâm tam giác ABD, I là trung điểm của BD.
Từ đó suy ra:

$AH = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$: không đổi nên suy ra H nằm trên đường tròn tâm A, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$.



Do $\widehat{ABK} = \widehat{ADK} = 90^\circ$, mà AB // DC, AD // BC

$\Rightarrow$ BK $\perp$ DC và DK $\perp$ BC nên K là trực tâm tam giác BDC

$\Rightarrow$ CK $\perp$ DB $\Rightarrow$ CK // AH.

Trong tam giác ACK, do OI là đường trung bình, nên KC = 2OI

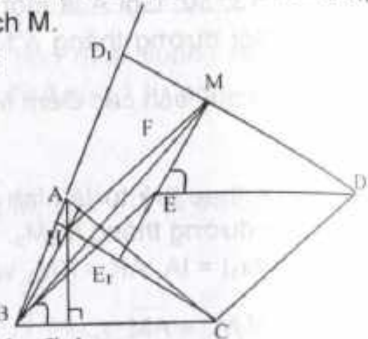
$\Rightarrow$ KC = AH $\Rightarrow$ AHKC là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AK}$: xác định. Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AK}$ biến H thành C, biến A thành K.

Vậy quỹ tích của C là đường tròn tâm K, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Bài toán 13. 32: Cho tam giác ABC cố định. Vẽ hình thoi BCDE mà E, D, A cùng phía đối với đường thẳng BC. Hạ $DD_1 \perp AB$, và $EE_1 \perp AC$. Các đường thẳng DD_1 và EE_1 cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích M.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow$ H cố định. Ta có: HC // DD_1

(vì cũng vuông góc AC).

$\Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{HCB}$ và $\widehat{MDE} = \widehat{HCB}$

(góc có cạnh tương ứng song song)

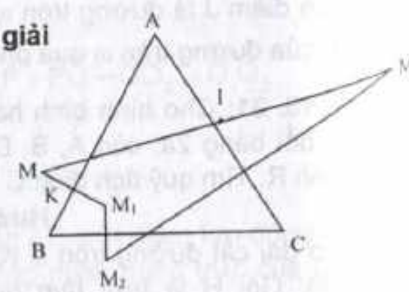
$\Rightarrow \Delta MDE = \Delta HBC$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ CH = MD. Mà CH // MD nên $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CH}$: xác định.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CH}$ biến D thành M và biến C thành H. Mà CD = BC không đổi nên C thuộc đường tròn (C; BC) nên quỹ tích các điểm M là đường tròn ảnh qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{CH}$, chính là đường tròn (H; BC).

Bài toán 13. 33: Cho tam giác đều ABC. Với một điểm M tuỳ ý gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua đường thẳng AB, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua đường thẳng BC và M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua đường thẳng CA. Tìm quỹ tích trung điểm I của MM_3.

Hướng dẫn giải



Gọi M' là điểm đối xứng của M qua BC, K là trung điểm của MM_1 (K $\in$ AB) và K' là trung điểm của $M'M_2$. Khi đó phép đối xứng qua đường thẳng BC sẽ biến M thành M', M_1 thành M_2 nên cũng biến K thành K' tức là biến BK thành BK'.

Suy ra góc hợp bởi BK' và BC cũng bằng 60° hay BK' // AC.

Vì $M'M_2 \perp BK'$, $M_2M_3 \perp AC$, suy ra ba điểm M', M_2, M_3 thẳng hàng. Nếu ta gọi H' là trung điểm M_2M_3 (H' $\in$ AC) thì $\overrightarrow{M'M_3} = 2\overrightarrow{K'H'} = 2\overrightarrow{BH}$ với BH là đường cao của tam giác ABC.

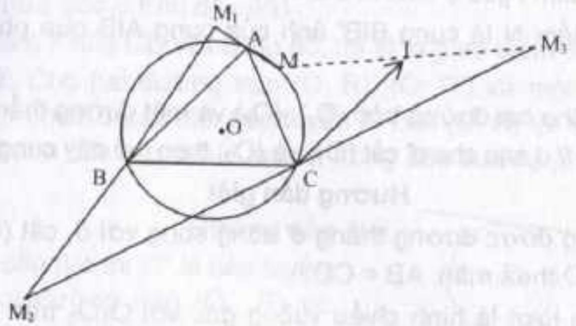
Nếu gọi P là trung điểm MM' ($P \in BC$) và I là trung điểm MM_3 thì $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M_3} = \overrightarrow{BH}$. Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BH}$ sẽ biến điểm P thành I, vì $P \in BC$ nên quỹ tích I chính là ảnh của đường thẳng BC qua phép tịnh tiến nói trên. Quỹ tích này là đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh AB và AC.

Bài toán 13. 34: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C. Tìm quỹ tích điểm M_3.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của MM_3, ta có:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{M_2C}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{BA}$$



Như vậy điểm I cố định, do đó phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là phép đối xứng qua điểm I.

Vì M thay đổi trên (O) nên quỹ tích điểm M_3 là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm với tâm I.

Bài toán 13. 35: Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, M là một điểm di động trên (O), M không trùng A, B. Hai đường tròn (O_1), (O_2) qua M theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích các điểm N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2).

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

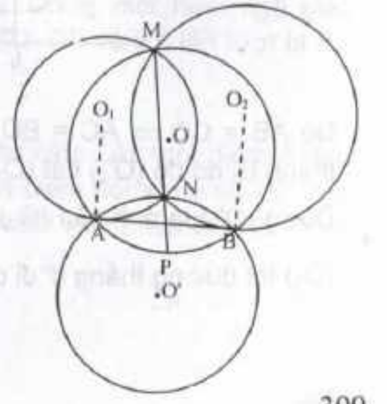
$IA^2 = IM \,.\, IN = IB^2 \Rightarrow IA = IB$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của AB cố định.

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với (O) ta có:

$IA^2 = IA.IB = IM.IP$

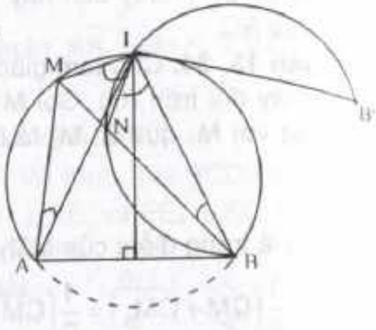
$\Rightarrow IN = IP$ nên I là trung điểm của PN, do đó phép đối xứng tâm I biến P thành N.



Vì quỹ tích điểm P là đường tròn (O) nên quỹ tích N là đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I, bỏ đi hai điểm A và B.

Bài toán 13. 36: Một điểm M lưu động trên cung AB lớn của đường tròn (O), với A, B là hai điểm cố định trên đường tròn này. Trên đoạn BM lấy điểm N sao cho BN = AM. Tìm tập hợp điểm N.

Hướng dẫn giải



Đường trung trực của cung AB cắt cung AB lớn tại I cố định.

Ta có hai tam giác IMA và INB bằng nhau (c.g.c)

$\Rightarrow$ IN = IM và $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN})$

$= (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \varphi$: không đổi

nên phép quay tâm I góc φ biến M thành N.

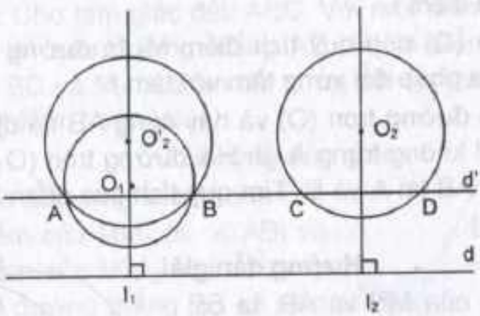
Vậy tập hợp điểm N là cung BIB' ảnh của cung AIB qua phép quay tâm I góc φ.

Bài toán 13. 37: Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và một đường thẳng d. Dựng một đường thẳng d' // d sao cho d' cắt (O_1) và (O_2) theo hai dây cung bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử đã dựng được đường thẳng d' song song với d, cắt (O_1) tại A, B và cắt (O_2) tại C, D thoả mãn: AB = CD.

Gọi I_1 và I_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc với O_1O_2 trên d. Gọi (O'_2) là ảnh của (O_2) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{I_2I_1}}$.

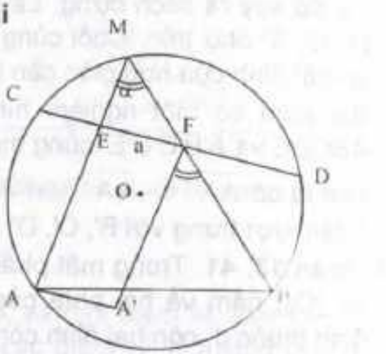


Do AB = CD $\Rightarrow$ AC = BD = I_1I_2 nên phép tịnh tiến đó biến C thành A, D thành B, do đó (O'_2) cắt (O_1) tại A và B. Từ đó suy ra cách dựng.

Dựng (O'_2) là ảnh của (O_2) qua $T_{\overrightarrow{I_2I_1}}$. Gọi A, B là các giao điểm của (O'_2) và (O_1) thì đường thẳng d' đi qua A, B sẽ là đường thẳng cần dựng.

Bài toán 13. 38: Cho AB và CD là hai dây không cắt nhau của đường tròn (O). Với một điểm M nằm trên đường tròn, gọi E và F theo thứ tự là giao điểm của MA và MB với CD. Xác định điểm M để EF có độ dài bằng a cho trước.

Hướng dẫn giải



Ta có $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$ xác định.

Giả sử đã dựng được điểm M.

Gọi $A' = T_{\vec{a}}(A)$ thì MA // FA'

nên $\widehat{A'FB} = \widehat{AMB} = \alpha$: không đổi.

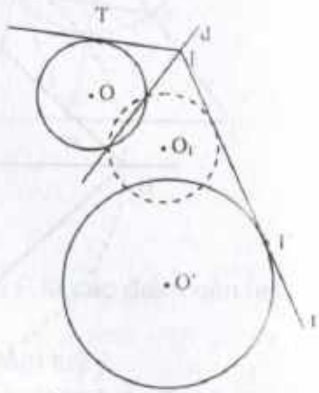
Do đó, F là giao điểm của CD với cung chứa góc α nhìn bởi đoạn A'B.

Từ đó suy ra cách dựng.

- Dựng ảnh của A qua $T_{\vec{a}}$ là A'.
- Dựng cung chứa góc α trên dây A'B.
- Dựng giao điểm F của CD với cung đó, thì M là giao điểm của BF với (O)

Bài toán 13. 39: Cho hai đường tròn (O; R), (O; R') và một đường thẳng d. Xác định điểm I trên d sao cho tiếp tuyến IT của (O; R) và tiếp tuyến IT' của (O'; R) hợp thành các góc mà d là một trong các đường phân giác của các góc đó.

Hướng dẫn giải



Gọi I là điểm cần tìm thì IT' là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1; R) và (O'; R').

Suy ra cách dựng: Vẽ tiếp tuyến chung t của hai đường tròn (O_1; R) và (O'; R'). Giao điểm của t và d chính là điểm I cần tìm. Khi đó tiếp tuyến IT' chính là t còn đường thẳng đối xứng với IT' qua d là tiếp tuyến IT của (O; R).

Số nghiệm phụ thuộc vào số tiếp tuyến chung và số điểm chung của t và d.

Bài toán 13. 40: Cho 5 điểm P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Dựng một hình ngũ giác ABCDE sao cho trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE và EA lần lượt là P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

Hướng dẫn giải

Giả sử đã dựng được ngũ giác ABCDE theo yêu cầu. Lấy một điểm A' tuỳ ý, và gọi B' là điểm đối xứng của A' qua P_1, C là điểm đối xứng của B' qua P_2, D' là điểm đối xứng của C' qua P_3, E' là điểm đối xứng của D' qua P_4 và A" là điểm đối xứng của E' qua P_5.

Khi đó $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{P_1A'} - \overrightarrow{P_1A} = -\overrightarrow{P_1B'} + \overrightarrow{P_1B} = -\overrightarrow{BB'}$

Tương tự $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{DD'} = -\overrightarrow{EE'}$, $\overrightarrow{EE'} = -\overrightarrow{AA'}$

Do đó $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA''}$ nên A là trung điểm của A'A".

Từ đó suy ra cách dựng: Lấy một điểm A' bất kì, rồi dựng các điểm B', C', D', E', A" như trên. Cuối cùng dựng trung điểm A của đoạn thẳng A'A", thì A là một đỉnh của ngũ giác cần tìm. Các đỉnh còn lại dựng dễ dàng.

Bài toán có một nghiệm hình duy nhất. Thật vậy nếu có hai ngũ giác ABCDE và A'B'C'D'E' cùng thoả mãn điều kiện của bài toán thì lập luận như trên ta có $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA'}$ nên $\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$ tức là A trùng với A', và do đó B, C, D, E lần lượt trùng với B', C', D', E'.

Bài toán 13. 41: Trong mặt phẳng cho đường thẳng d và hai đường tròn (O_1) và (O_2) nằm về hai phía của đường thẳng. Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh thuộc d, còn hai đỉnh còn lại lần lượt nằm trên (O_1) và (O_2).

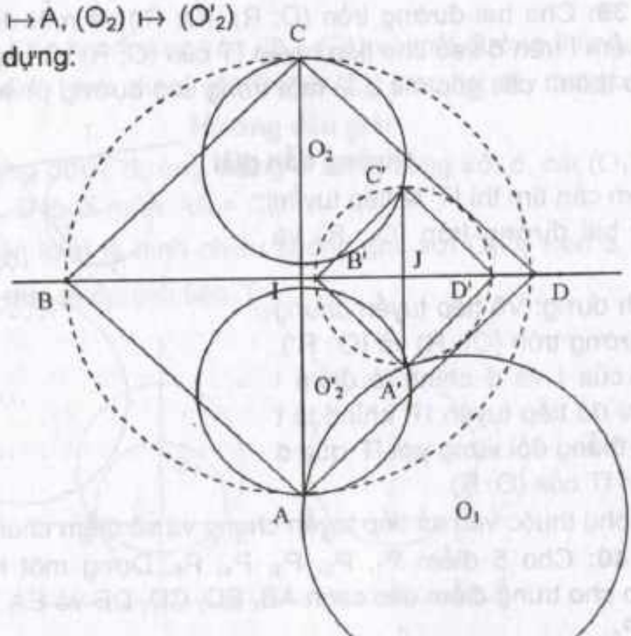
Hướng dẫn giải

Giả sử dựng được hình vuông ABCD với B, D $\in$ d còn A $\in (O_1)$, C $\in (O_2)$.

Khi đó A, C đối xứng với nhau qua (BD) $\equiv$ d.

Do đó $Đ_d$: C $\mapsto$ A, $(O_2) \mapsto (O'_2)$

Suy ra cách dựng:



Dựng $(O'_2) = Đ_d((O_2))$ và A là giao điểm của (O'_2) với (O_1)

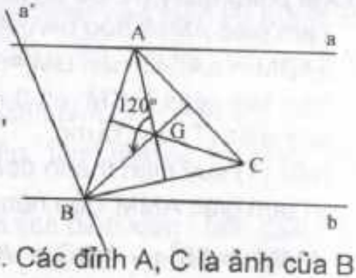
Dựng C = $Đ_d$(A) và I là giao điểm của AC với d (I là trung điểm AC).

Dựng đường tròn tâm I, bán kính IA, cắt d tại hai điểm B, D

Nối AB, BC, CD và DA ta được hình vuông cần dựng.

Bài toán 13. 42: Cho hai đường thẳng a, b song song và một điểm G không nằm trên chúng. Xác định tam giác đều ABC có A $\in$ a, B $\in$ c và G là trọng tâm của tam giác đó.

Hướng dẫn giải



Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn các điều kiện

Ta có: $GA = GB = GC$ và $\widehat{AGB} = \widehat{BGC} = \widehat{CGA} = 120^\circ$, do đó trong phép quay Q tâm G góc 120° biến A thành B, biến a thành a' nên $B = b \cap a'$.

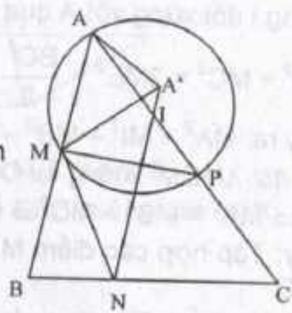
Từ đó suy ra cách dựng:

Dựng: a' là ảnh của a qua phép Q và $B = b \cap a'$. Các đỉnh A, C là ảnh của B qua phép quay tâm G, góc $\pm 120^\circ$.

Bài toán luôn có hai nghiệm hình, góc quay $\pm 120^\circ$.

Bài toán 13. 43: Cho tam giác ABC, có góc $\widehat{A} = \varphi$, và một điểm M nằm trên cạnh AB. Dựng trên các đường thẳng BC, CA các điểm N, P tương ứng sao cho MP = MN và đường tròn đi qua A, M, P tiếp xúc với MN.

Hướng dẫn giải



Giả sử đã dựng được hai điểm:

$N \in BC$, $P \in AC$ thoả mãn các điều kiện.

Ta có $\widehat{NMP} = \widehat{MAP} = \varphi$,

MP = MN nên phép quay Q tâm M, góc φ biến A thành A', PA thành NA'. Gọi $A'N \cap AC = I$.

Ta có $\widehat{NIC} = (PA, NA') = \varphi \Rightarrow \widehat{NIC} = \widehat{BAC}$

$\Rightarrow IN // AB$.

Từ đó suy ra cách dựng như sau:

- Phép quay tâm M, góc φ biến A thành A'.
- Vẽ $A'N // AB$, $N \in BC$.
- Dựng tia MP cắt AC tại P sao cho $\widehat{NMP} = \varphi$ thì N và P là các điểm cần tìm.

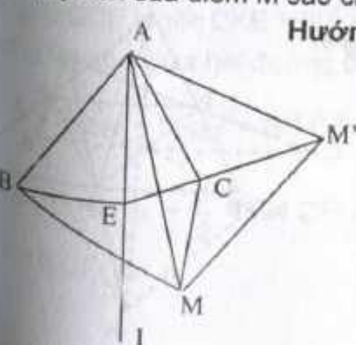
Bài toán có một nghiệm duy nhất.

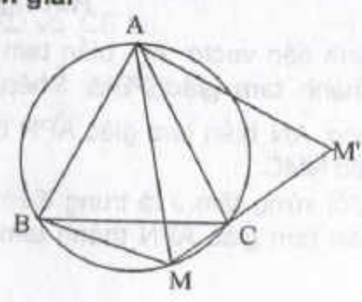
Bài toán 13. 44: Cho tam giác đều ABC cạnh a, M là điểm tuỳ ý.

a) Chứng minh rằng: Từ 3 đoạn thẳng MA, MB, MC ta luôn luôn dựng được một tam giác (T) nào đó.Tam giác (T) suy biến thành đoạn thẳng khi và chỉ khi M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm quỹ tích của điểm M sao cho (T) là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải





a) Xét phép quay $(A; 60^0)$: $AB \mapsto AC$ và $AM \mapsto AM'$

Tam giác AMM' đều nên: AM = AM'

$\Delta ABM = \Delta ACM'$ nên BM = CM'

Vậy tam giác MCM' có 3 cạnh: MM' = MA, M'C = MB và MC. Đó chính là tam giác (T) cần dựng.

Nếu (T) suy biến thành đoạn thẳng: (M, C, M' thẳng hàng)

Vì tam giác AMM' đều nên:

$\widehat{AMM'} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^0$

Vậy: M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đảo lại dùng phép quay $(A, 60^0)$. Ta có: $\widehat{ACM} + \widehat{ABM} = 180^0$.

$\Delta ABM = \Delta ACM' \Rightarrow \widehat{ACM'} = \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{ACM} + \widehat{ACM'} = 180^0$

Vậy (T) suy biến thành đoạn thẳng

b) Trước hết, ta tìm quỹ tích các điểm M sao cho: $MA^2 = MB^2 + MC^2$

Dựng I đối xứng với A qua BC. Gọi $E = AI \cap BC$. Ta có:

$MB^2 + MC^2 = 2ME^2 + \dfrac{BC^2}{2}$; $MA^2 + MI^2 = 2ME^2 + \dfrac{AI^2}{2}$

Suy ra: $MA^2 + MI^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$

Do đó: $\Delta MCM'$ vuông tại C $\Leftrightarrow MM'^2 = MC^2 + M'C^2$

$\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow MI^2 = a^2 \Leftrightarrow MI = a$

Vậy: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính R = a trừ hai điểm B, C.

Gọi J là điểm đối xứng với B qua AC và K là điểm đối xứng với C qua AB. Từ đó suy ra quỹ tích của M là 3 đường tròn

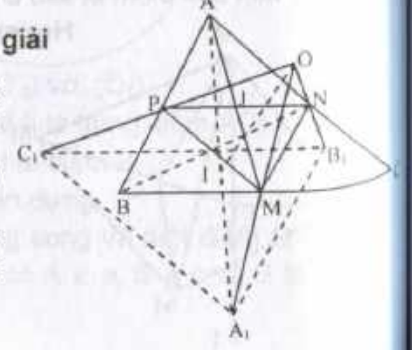
(I; a), (J; a), (K; a) trừ 3 đỉnh của tam giác ABC.

Bài toán 13. 45: Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NMC, MNP. Tìm phép dời hình biến tam giác APN lần lượt thành một trong ba tam giác còn lại.

b) Xét tam giác có ba đỉnh là trực tâm của ba tam giác APN, PBM và NCM. Chứng minh tam giác đó bằng tam giác APN. Chứng minh điều đó cũng đúng nếu thay trực tâm bằng trọng tâm, hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp hoặc tâm đường tròn nội tiếp.

Hướng dẫn giải



a) Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AP}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM. Phép tịnh tiến vecơ AN biến tam giác APN thành tam giác NMC.

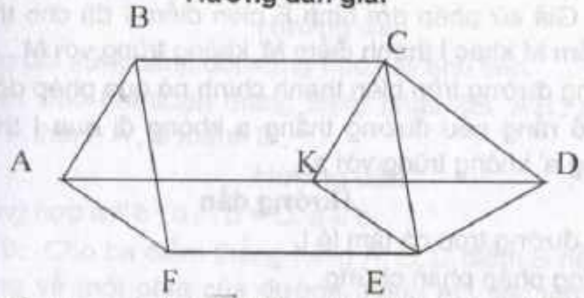
Phép đối xứng tâm J là trung điểm của PN, biến tam giác APN thành tam giác MNP.

b) Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác APN, PBM, NMC. Phép tịnh tiến $\overrightarrow{AP}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM nên biến H_1 thành H_2, tức là H_1H_2 = AP nên $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2}$. Suy ra $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2} = \overrightarrow{NH_3}$. Do đó phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AH_1}$ biến tam giác APN thành tam giác $H_1H_2H_3$.

Đối với trọng tâm tam đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, chứng minh hoàn toàn tương tự.

Bài toán 13. 46: Cho lục giác ABCDEF thỏa mãn các điều kiện : tam giác ABF vuông cân tại A, BCEF là hình bình hành, BC = 19, AD = 2013 và DC + DE $= 1994\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác ABCDEF.

Hướng dẫn giải



Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ biến A thành K, F thành E.

Vì tam giác ABF vuông cân tại A nên tam giác CKE vuông cân tại K.

Do đó $KC = KE = \frac{CE}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{CE}{KE} = \sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Ptoleme vào tứ giác CKED:

$$KC.DE + CD.KE \geq CE.KD$$

$\Rightarrow (DE + CD).KE \geq CE.KD \Rightarrow DE + DC \geq KD.\frac{CE}{KE}$

$\Rightarrow 1994\sqrt{2} \geq KD\sqrt{2} \Rightarrow KD \leq 1994$.

Mặt khác AK = BC = 19 nên $AD \leq AK + KD \leq 19 + 1994 = 2013 = AD$

$\Rightarrow$ KD = 1994 nên K thuộc đoạn AD, do đó dấu = trong bất đẳng thức xảy ra.

Vậy C, K, E, D cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow$ góc CDE = góc CKE = 90^0 và DC + DE = $1994\sqrt{2}$.

Gọi α là góc giữa hai đường chéo KD và CE thì

$S = S_{BCEF} + S_{CKEF} = BC.CE.\sin\alpha + \frac{1}{2}CE.KD.\sin\alpha$

$= 19.CE.\sin\alpha + \frac{1}{2}1994.CE.\sin\alpha$

$= 1016.CE.\sin\alpha$

Mặt khác DC + DE = $1994\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ $EC.\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + EC.\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1994.\sqrt{2} \Rightarrow CE.\ \sin\alpha = 1994.$

Vậy diện tích $S = 2022904$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 13. 1: Chứng minh các phép tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng trục và phép quay đều là các phép dời hình.

Hướng dẫn

Dùng định nghĩa và chọn hướng giải hình học, vectơ hay tọa độ .

Bài tập 13. 2: Giả sử phép dời hình F biến điểm I đã cho thành chính nó và biến một điểm M khác I thành điểm M' không trùng với M.

a) Tìm những đường tròn biến thành chính nó qua phép dời hình F.

b) Chứng tỏ rằng nếu đường thẳng a không đi qua I thì F biến a thành đường thẳng a' không trùng với a.

Hướng dẫn

a) Kết quả các đường tròn có tâm là I.

b) Dùng phương pháp phản chứng.

Bài tập 13. 3: Có hay không một phép dời hình F sao cho mọi đường thẳng đều biến thành đường thẳng song song với nó?

Hướng dẫn

Kết quả không có phép dời hình F.

Bài tập 13. 4: Cho hình bình hành ABCD và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD. Giả sử $MBC = MDC$.

Chứng minh $AMD = BMC$

Hướng dẫn

Dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$.

Bài tập 13. 5: Cho tam giác ABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là các tia đối của các tia BA, CA. Các điểm D, E thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy. Tìm quỹ tích các trung điểm M của DE biết BD = 2CE.

Hướng dẫn

Kết quả quỹ tích các trung điểm M là tia Im: ảnh của tia BN_o qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BI}}$ theo vectơ $\overrightarrow{BI}$.

Bài tập 13. 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x - 5y + 7 = 0$ và đường thẳng d' có phương trình $5x - y - 13 = 0$. Tìm phép đối xứng qua trục biến d thành d'.

Hướng dẫn

Phép đối xứng qua trục là phân giác.

Kết quả có hai phép đối xứng qua các trục: Δ_1 có phương trình $x + y - 5 = 0$, Δ_2 có phương trình $x - y - 1 = 0$.

Bài tập 13. 7: Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC tương ứng tại các điểm C' và B'. Chứng minh rằng nếu AC > AB thì CC' > BB'.

Hướng dẫn

Gọi B" là điểm đối xứng của B qua phân giác góc A. Khi đó B" nằm trên cạnh AC và AB = AB".

Bài tập 13. 8: Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

Dùng phép đối xứng tâm, đối xứng trục hay tịnh tiến.

Bài tập 13. 9: Cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB, A'B'. Hãy xác định phép quay biến A thành A', B thành B'.

Hướng dẫn

Xét 3 trường hợp $a \parallel b$, $a \cap b = O$, $a \equiv b$.

Bài tập 13. 10: Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC. Chứng minh tam giác BMN đều.

Hướng dẫn

Dùng phép quay tâm B góc quay 60° và các đoạn ảnh bằng tạo ảnh của nó.

Bài tập 13. 11: Gọi O, O' là tâm của các hình vuông, I là trung điểm của BC. Cho tam giác ABC và vẽ ra ngoài hai hình vuông ABMN, ACPQ. Chứng minh hai đoạn thẳng BQ, CN bằng nhau, vuông góc với nhau và tam giác OIO' vuông cân.

Hướng dẫn

Dùng phép quay tâm A, góc -90°

Bài tập 13. 12: Đa giác lồi n cạnh gọi là n – giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n–giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.

Hướng dẫn

Gọi O và O' lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đó thì hai tam giác OA_1A_2 và $O'A'_1A'_2$ bằng nhau nên có phép dời hình F biến tam giác OA_1A_2 thành tam giác $O'A'_1A'_2$.

Chuyên đề 14: PHÉP ĐỒNG DẠNG VÀ PHÉP NGHỊCH ĐẢO

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phép đồng dạng

Phép biến hình D gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có M'N' = kMN.

Định lí cơ bản: phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài k lần, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR, biến góc thành góc bằng nó.

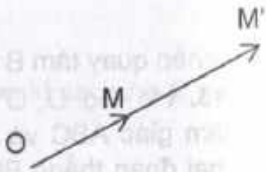
Vì phép đồng dạng bảo toàn độ lớn của góc nên ta còn gọi là phép biến hình bảo giác.

Xác định phép đồng dạng

Nếu 2 tam giác đồng dạng ABC và A'B'C' tương ứng thì xác định chỉ một phép đồng dạng biến A, B, C thành A',B',C' tương ứng.

Phép vị tự

– Cho điểm O và một số $k \neq 0$. Phép vị tự tâm O, tỉ số k biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



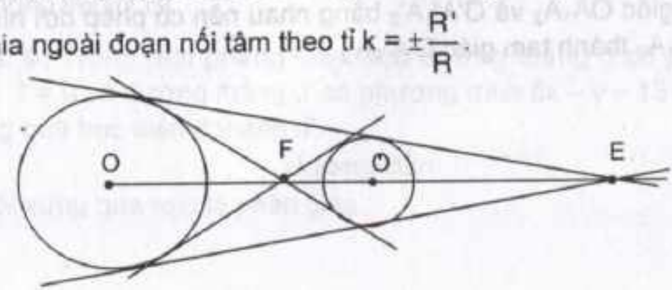
Kí hiệu $V_{(O,k)}$ hay $H_{(O,k)}$.

Khi k >0 gọi là phép vị tự thuận, k <0 gọi là phép vị tự nghịch.

– Nếu M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N qua phép vị tự tỉ số k thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$; $M'N' = |k|.MN$.

– Hợp thành của hai phép vị tự V_1 có tâm O_1 tỉ số k_1 và V_2 có tâm O_2 tỉ số k_2 là một phép tịnh tiến nếu $k_1.k_2 = 1$; là một phép vị tự nếu $k_1.k_2 \neq 1$.

– Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm vị tự của 2 đường tròn không đồng tâm là 2 điểm chia trong và chia ngoài đoạn nối tâm theo tỉ $k = \pm\frac{R'}{R}$.



Quan hệ phép dời hình và đồng dạng

Mọi phép đồng dạng F tỉ số |k| đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

Hình đồng dạng

Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia. Để chứng minh 2 hình (H_1) và (H'_1) đồng dạng, ta sử dụng phép vị tự để biến hình (H_1) thành (H_2) bằng (H'_1) rồi sử dụng phép dời hình biến (H_2) thành (H'_1).

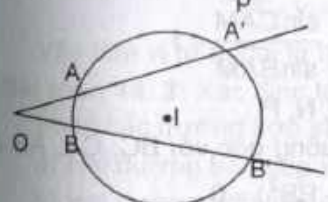
Phép nghịch đảo

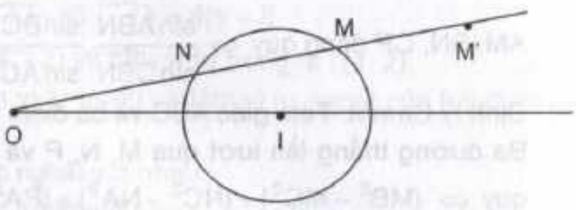
Phép nghịch đảo cực O, tỉ k (phương tích)

$$f: M \to M' \text{ khi } \overline{OM}.\overline{OM'} = k$$

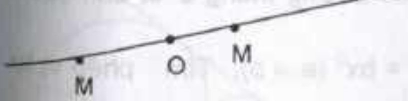
Phép nghịch đảo cực O, phương tích k biến A thành A', B thành B' thì $A'B' = \dfrac{|k|.AB}{OA.OB}$ và A,B, A',B' đồng viên.

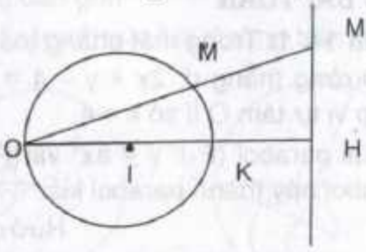
Phép nghịch đảo f cực O, tỉ k: $M \to M'$ khi $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$. Với M thuộc đường tròn (I), đặt p = **P** O/ (I) và gọi N là giao điểm khác M của OM với (I) thì $\overline{OM}.\overline{ON} = p$. Vì $\overline{OM}.\overline{OM'} = k \Rightarrow \overline{OM'} = \dfrac{k}{p}\overline{ON}$ nên M' là ảnh của N qua phép vị tự tâm O tỉ $\dfrac{k}{p}$.





Phép nghịch đảo cực O biến 1 đường thẳng qua cực O thành chính nó, biến 1 đường thẳng không qua cực O thành đường tròn qua cực O.





Phép nghịch đảo cực O biến đường tròn qua cực O thành đường thẳng, biến một đường tròn không qua cực O thành một đường tròn, đặc biệt biến đường tròn tâm là cực O và bán kính $\sqrt{k}$ khi phương tích k >0 thành chính nó. Phép nghịch đảo bảo toàn sự tiếp xúc và góc của 2 yếu tố.

Chú ý:

1) Phép vị tự tâm O tỉ số k là một một phép đồng dạng tỉ số $|k|$ nên có các tính chất của phép đồng dạng. Ngoài ra, phép vị tự có tính chất đặc biệt sau: đường thẳng nối một điểm và ảnh của nó luôn luôn đi qua O; ảnh d' của đường thẳng d luôn song song hoặc trùng với d, bảo toàn sự tiếp xúc,...
2) Yếu tố liên quan đến phép vị tự là thẳng hàng và tỉ số không đổi từ đó, vận dụng phép vị tự để giải toán chứng minh, xác định điểm, dựng hình, quỹ tích ảnh của M khi biết quỹ tích của M,...
3) Thẳng hàng và đồng quy

– Định lý Menelaus: Tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt thuộc ba đường thẳng BC,CA,AB:

$$\text{M, N, P thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

– Định lý Ceva: Tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt thuộc ba đường thẳng BC,CA,AB:

$$\text{AM, BN, CP đồng quy hoặc song song} \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$

– Định lý Ceva dạng lượng giác: Tam giác ABC, ba điểm M, N, P lần lượt thuộc ba đường thẳng BC,CA,AB:

$$\text{AM, BN, CP đồng quy} \Leftrightarrow \frac{\sin\widehat{ABN}}{\sin\widehat{CBN}}.\frac{\sin\widehat{BCP}}{\sin\widehat{ACP}}.\frac{\sin\widehat{CAM}}{\sin\widehat{BAM}} = 1$$

– Định lý Carnot: Tam giác ABC và ba điểm M, N, P.

Ba đường thẳng lần lượt qua M, N, P và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy $\Leftrightarrow (MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 14. 1: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho:

a) Đường thẳng d: $2x + y - 4 = 0$. Tìm đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 4$.

b) Hai parabol (P_1): $y = ax^2$ và (P_2): $y = bx^2$ $(a \neq b)$. Tìm phép vị tự biến parabol này thành parabol kia.

Hướng dẫn giải

a) Lấy A(0; 4) và B(2; 0) thuộc d. Phép vị tự tâm O tỉ số k = 4, biến A thành A', B thành B'.

Ta có $\overrightarrow{OA'} = 4\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = 4\overrightarrow{OB}$ nên A'(0; 16), B'(8; 0)

Do đó d' là đường thẳng qua A', B' có phương trình đoạn chắn:
$\frac{x}{8}+\frac{y}{16}=1 \Leftrightarrow 2x+y-16=0$.

b) Phép vị tự $V_{(O,\,k)}$ biến điểm M(x; y) thành M(kx; ky).

Gọi (P_1) là parabol: $y = ax^2$ và (P_2) là parabol: $y = bx^2$.

Ta chứng minh rằng $V_{(O,\,k)}: (P_1) \to (P_2)$ với $k = \frac{b}{a}$.

Thật vậy, nếu $M(x_1; y_1) \in (P_1)$ thì $(x_1; y_1) = (x_1; ax_1^2)$ nên ảnh M' có toạ độ:

$$\left(\frac{a}{b}x_1;\frac{a}{b}ax_1^2\right)=\left(\frac{a}{b}x_1;b\left(\frac{a}{b}ax_1^2\right)^2\right)=(x_2;bx_2^2)\in(P_2)\text{: đpcm.}$$

Bài toán 14. 2: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(2; 1) và B(8; 4). Tìm toạ độ tâm vị tự của hai đường tròn (A; 2) và (B; 4).

Hướng dẫn giải

Hai đường tròn đã cho không đồng tâm và có bán kính R = 2, R' = 4 nên có hai phép vị tự tỉ số $k = \pm\frac{R'}{R} = \pm 2$, biến đường tròn (A; 2) thành đường tròn (B; 4). Gọi I(x; y) là tâm vị tự, ta có:

$$\overrightarrow{IB}=\pm2\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow\begin{cases}8-x=\pm2(2-x)\\4-y=\pm2(1-y)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4;y=-2\\x=4;y=2\end{array}\right.$$

Vậy tâm vị tự ngoài là I(–4; –2) và tâm vị tự trong là I'(4; 2).

Bài toán 14. 3: Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:

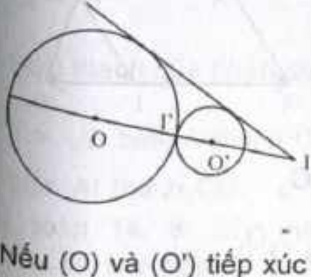
a) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

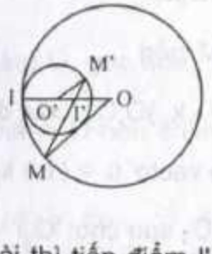
b) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

c) Một đường tròn chứa đường tròn kia.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm vị tự ngoài, I' là tâm vị tự trong của hai đường tròn (O) và (O').





a) Nếu (O) và (O') tiếp xúc ngoài thì tiếp điểm I' là tâm vị tự trong, giao điểm của OO' với tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O') nếu có là tâm vị tự ngoài.

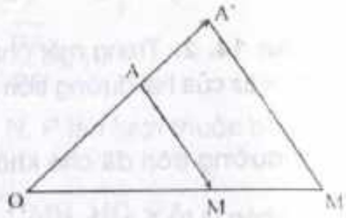
b) Nếu (O) và (O') tiếp xúc trong thì tiếp điểm I là tâm vị tự ngoài, tâm vị tự trong I' là giao điểm của OO' và MM' trong đó $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{O'M'}$ là 2 vectơ bán kính ngược hướng của (O) và (O').

c) Nếu (O) chứa (O') thì xác định I và I' qua các cặp vectơ bán kính cùng hướng và ngược hướng. Đặc biệt, khi O trùng O' thì I và I' trùng O.

Bài toán 14. 4: Gọi F là phép biến hình có tính chất sau đây: Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.

Hướng dẫn giải

Lấy một điểm A cố định và đặt A' = F(A). Theo giả thiết, với điểm M bất kì và ảnh M'= F(M), ta có:



$\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$

Nếu k = 1, thì $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$

nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$: xác định.

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Nếu $k \neq 1$ thì có điểm O sao cho $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

Ta có $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{OM}$

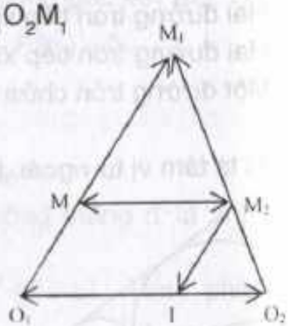
Vậy F là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Bài toán 14. 5: Cho hai phép vị tự V_1 có tâm O_1 tỉ số k_1 và V_2 có tâm O_2 tỉ số k_2. Xác định phép F là hợp thành của V_1 và V_2.

Hướng dẫn giải

Lấy một điểm M bất kì, nếu V_1 biến M thành M_1 và V_2 biến M_1 thành M_2 thì:

$$\overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M} \text{ và } \overrightarrow{O_2M_2} = k_1\overrightarrow{O_2M_1}$$



Khi đó, phép hợp thành F biến M thành M_2.

Gọi I là ảnh của O_1 qua phép vị tự V_2, tức là:

$\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$

Khi đó: $\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}$

Nếu $k_1.k_2 = 1$ thì $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M}$ nên

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$ xác định.

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$.

Nếu $k_1.k_2 \neq 1$ ta chọn điểm O_3 sao cho: $\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

Khi đó: $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = k_1k_2\overrightarrow{O_3M}$

Vậy F là phép vị tự tâm O_3 tỉ số k_1k_2.

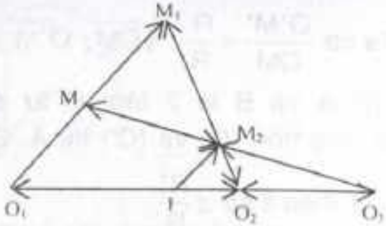
Tâm O_3 của phép vị tự đó được xác định bởi đẳng thức

$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

hay $\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = (1-k_1k_2)\overrightarrow{O_1O_3}$

hay: $\overrightarrow{O_1O_3} = \dfrac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$.



Do đó tâm của ba phép vị tự V_1, V_2 và F là ba điểm thẳng hàng.

Bài toán 14. 6: Trong mặt phẳng Oxy xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x; y) thành M'(3x + 1; –3y + 5).

Chứng minh F là một phép đồng dạng.

Hướng dẫn giải

Phép F biến $A(x_1; y_1)$ thành $A'(3x_1 + 1; -3y_1 + 5)$

$B(x_2; y_2)$ thành $B'(3x_2 + 1; -3y_2 + 5)$

Ta có $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ và

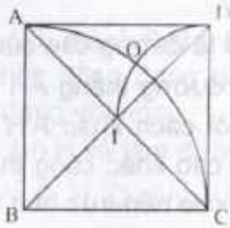
$$A'B' = \sqrt{(3x_1 - 3x_2)^2 + (-3y_1 + 3y_2)^2} = 3\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 3AB$$

Vậy F là phép đồng dạng tỉ số k = 3.

Bài toán 14. 7: Cho hình vuông ABCD tâm I có các đỉnh A, B, C, D quay theo chiều dương. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải

Tỉ số đồng dạng là $k = \dfrac{CD}{AI} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

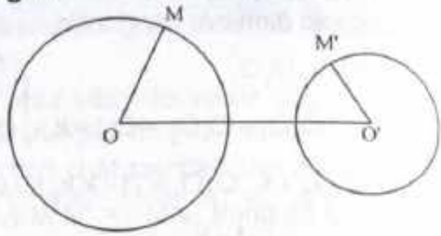


Gọi O là giao điểm 2 cung chứa góc $\dfrac{3\pi}{4}$ dựng trên dây AC và ID.

Hợp thành của phép quay tâm O, góc quay $\dfrac{3\pi}{4}$ và phép vị tự tâm O tỉ số $k = \sqrt{2}$ biến A thành C, I thành D nên chính là phép đồng dạng cần tìm biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

Bài toán 14. 8: Cho hai đường tròn cố định (O; R) và (O'; R') với R ≠ R'. Hai điểm M và M' lần lượt di động trên hai đường tròn (O) và (O') sao cho $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = 60^\circ$. Xác định phép đồng dạng biến M thành M'.

Hướng dẫn giải



Ta có $\frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R}$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = 60^\circ$

Gọi A và B là 2 tâm vị tự của 2 đường tròn (O) và (O') thì A, B chia OO' theo tỉ số $\pm\frac{R'}{R}$.

Gọi I là giao điểm của đường tròn đường kính AB với cung chứa góc 60° dựng trên dây OO'. Hợp thành của phép quay tâm I, góc 60° và phép vị tự tâm I, tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ biến $\overrightarrow{OM}$ thành $\overrightarrow{O'M'}$ nên biến M thành M'. Đó là phép đồng dạng cần tìm.

Bài toán 14. 9: Chứng minh nếu phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

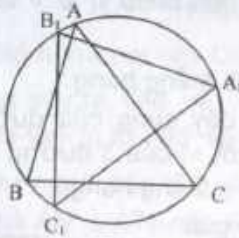
Hướng dẫn giải

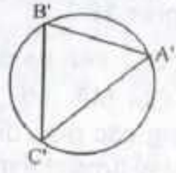
- Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC thì phép đồng dạng F biến điểm D thành trung điểm D' của đoạn thẳng B'C' và vì thế trung tuyến AD của tam giác ABC biến thành trung tuyến A'D' của tam giác A'B'C'. Đối với hai trung tuyến còn lại cũng thế. Vì trọng tâm tam giác là giao điểm của các đường trung tuyến nên trọng tâm tam giác ABC biến thành trọng tâm tam giác A'B'C'.
- Gọi AH là đường cao của tam giác ABC ($H \in BC$). Khi đó phép đồng dạng F biến đường thẳng AH thành đường thẳng A'H'. Vì $AH \perp BC$ nên $A'H' \perp B'C'$, nói cách khác A'H' là đường cao của tam giác A'B'C'. Đối với các đường cao khác cũng thế. Vì trực tâm của tam giác là giao điểm của các đường cao nên trực tâm tam giác ABC biến thành trực tâm tam giác A'B'C'.
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì OA = OB = OC nên nếu điểm O biến thành điểm O' thì O'A' = O'B' = O'C' = kOA = kOB = kOC, do đó O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

Bài toán 14. 10: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$, $CA \perp C'A'$. Chứng minh rằng hai tam giác đó đồng dạng.

Hướng dẫn giải

Gọi (O) và (O') là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và A'B'C'. Ta có một phép vị tự biến đường tròn (O') thành đường tròn (O). Kí hiệu A_1, B_1, C_1 là ảnh của các đỉnh A', B', C' trong phép vị tự đó.





Vì: A_1B_1 // A'B', B_1C_1 // B'C', C_1A_1 // C'A' nên $A_1B_1 \perp AB$, $B_1C_1 \perp BC$, $C_1A_1 \perp CA$. Thực hiện phép quay tâm (O) góc quay 90° biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác $A_2B_2C_2$. Tam giác $A_2B_2C_2$ có 3 cạnh song song với tam giác ABC và cùng nội tiếp trong một đường tròn (O), do đó các đỉnh của $A_2B_2C_2$ trùng với đỉnh của tam giác ABC. Điều đó chứng tỏ rằng tồn tại một phép đồng dạng là hợp thành của một phép vị tự với một phép quay biến tam giác A'B'C' thành tam giác ABC nên 2 tam giác đó đồng dạng.

Bài toán 14. 11: Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

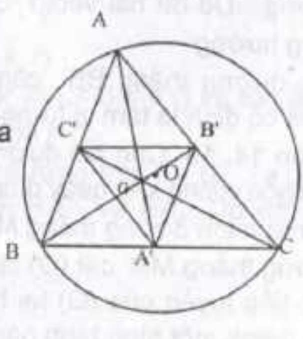
Hướng dẫn giải

Cho hai n–giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có tâm lần lượt là điểm O và điểm O'.

Đặt $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{O'B_1}{OA_1}$. Gọi V là phép vị tự tâm O, tỉ số k và $C_1C_2...C_n$ là ảnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ qua phép vị tự V. Ta có $C_1C_2...C_n$ cũng là đa giác đều và vì $\dfrac{C_1C_2}{A_1A_2}$ nên $C_1C_2...C_n = B_2B_2$. Do đó hai n–giác đều C_1C_2 và $B_2B_2...B_n$ có cạnh bằng nhau nên có phép dời hình D biến $C_1C_2...C_n$ thành $B_1B_2...B_n$. Nếu gọi F là phép hợp thành của V và D thì F là phép đồng dạng biến $A_1A_2...A_n$ thành $B_1B_2...B_n$. Vậy hai đa giác đều đó đồng dạng với nhau.

Bài toán 14. 12: Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ và ba điểm G, H, O cùng nằm trên một đường thẳng Ơ–le.

Hướng dẫn giải



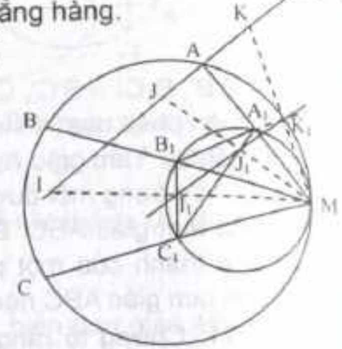
Ta có OA' ⊥ BC mà BC // B'C' nên OA' ⊥ B'C'.
Tương tự OB' ⊥ A'C'. Vậy O là trực tâm của tam giác A'B'C'.
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên
$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$.
Do đó phép vị tự V tâm G, tỉ số – 2 biến tam giác A'B'C' thành tam giác ABC.

Điểm O là trực tâm của tam giác A'B'C' nên phép vị tự V biến O thành trực tâm H của tam giác ABC.

Do đó $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ nên ba điểm G, H, O thẳng hàng.

Bài toán 14. 13: Gọi MA, MB, MC là 3 dây cung của đường tròn tâm O. Chứng minh rằng các giao điểm khác với M của 3 đường tròn đường kính MA, MB và MC lấy từng đôi một là 3 điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Gọi A_1, B_1 và C_1 lần lượt là trung điểm của MA, MB và MC; I, J, K lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn đường kính MB, MC, đường tròn đường kính MC, MA và đường tròn đường kính MA, MB.

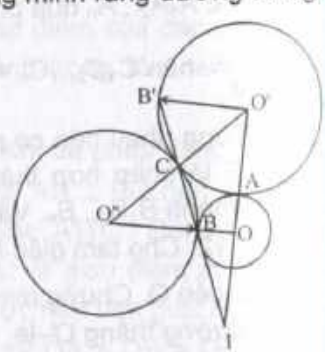
Ta có I, J, K là điểm đối xứng của M qua B_1C_1, C_1A_1 và A_1B_1.

Phép vị tự tâm M tỉ số 2 biến các hình chiếu I, J, K của M lên các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ thành I, J, K.

Từ các tứ giác nội tiếp được thì góc $K_1I_1M = J_1I_1M$ nên I_1, J_1, K_1 thẳng hàng do đó I, J, K thẳng hàng.

Bài toán 14. 14: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O") thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải



Kéo dài BC cắt (O') tại B'. Vì C là tâm vị tự trong của (O') và (O') nên hai vectơ $\overrightarrow{O'B'}$ và $\overrightarrow{O''B}$ ngược hướng.

Vì B là tâm vị tự trong của (O) và (O") nên hai vectơ $\overrightarrow{O''B}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{O'B'}$ cùng hướng.

Vậy đường thẳng BB', cũng chính là đường thẳng BC, luôn luôn đi qua điểm cố định là tâm vị tự ngoài I của (O) và (O').

Bài toán 14. 15: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một góc vuông xAy quay quanh A, tia Ax cắt (O) tại M còn tia Ay cắt (O') tại M'.

a) Chứng minh đường thẳng MM' luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng MM' cắt (O) tại N và cắt (O') tại N'. Chứng minh $\widehat{NAN'} = 90^\circ$ và các tiếp tuyến của (O) tại M, N, các tiếp tuyến của (O') tại M', N' cắt nhau tạo thành một hình bình hành.

Hướng dẫn giải

a) Gọi A' là giao điểm thứ hai của OO' và đường tròn (O'). Ta có $\overrightarrow{A'M'}$ và $\overrightarrow{AM}$ có cùng hướng suy ra $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M'}$ cùng hướng. Vậy đường thẳng MM' luôn luôn đi qua tâm vị tự ngoài S của (O) và (O').

b) Vì S là tâm vị tự ngoài của (O) và (O') nên $\overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{O'N'}$ cùng hướng. Suy ra AN // A'N', mà AN' ⊥ A'N' nên AN' ⊥ AN hay $\widehat{NAN'} = 90^\circ$.

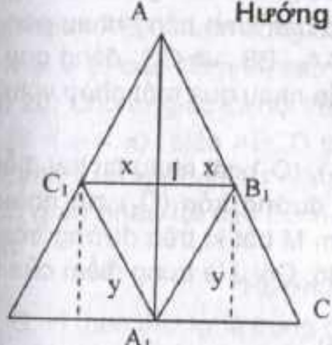
Qua phép vị tự tâm S, tiếp tuyến tại M của (O) biến thành tiếp tuyến tại M' của (O'), nên hai tiếp tuyến đó song song. Cũng tương tự, tiếp tuyến tại N của (O) và tiếp tuyến tại N' của (O') cũng song song. Vậy bốn tiếp tuyến đó tạo thành một hình bình hành.

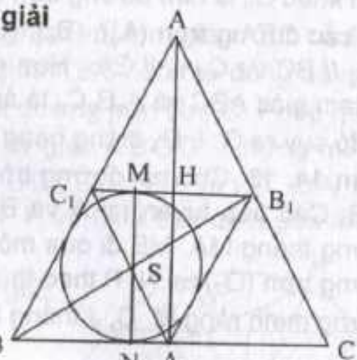
Bài toán 14. 16: Cho tam giác ABC cân đỉnh A, A_1 là trung điểm BC.

a) Chứng minh tồn tại duy nhất cặp điểm B_1, C_1 thoả các điều kiện: B_1 thuộc đoạn AC, C_1 thuộc đoạn AB và $BC_1 + A_1B_1 = BA_1 + B_1C_1$.

b) Chứng minh khi đó bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng hai lần bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Hướng dẫn giải





a) Đặt BC = 2, $A_1B_1 = A_1C_1 = y$, $IC_1 = IB_1 = x$, AB = AC = b (b > 1)

$\Rightarrow BC_1 = b(1 - x)$, $AC_1 = bx$. Ta có:

$y^2 = 1 + b^2(1 - x)^2 - 2b(1 - x)\cos C = 1 + b^2(1-x)^2 - 2(1-x)$

Mà $y = BC_1 = 1 + 2x \Rightarrow y^2 = [(1 + 2x - b(1 - x)]^2$

Do đó: $[1 + 2x - b(1 - x)]^2 = 1 + b^2(1 - x)^2 - 2(1 - x)$

$\Rightarrow \quad 2(1 + b)x^2 - (b - 1)x - (b - 1) = 0 \ (0 < x < 1)$

Đặt $f(x) = 2(1 + b)x^2 - (b - 1)x - (b - 1)$. Ta có: $f(0) < 0 < f(1)$ và f(x) là tam thức bậc hai nên tồn tại duy nhất $x \in (0; 1)$ để f(x) = 0.

b) Từ câu a) thì tứ giác $BC_1B_1A_1$ ngoại tiếp được đường tròn (I_0, r_0). Ta gọi M, N là các tiếp điểm của đường tròn (I_0, r_0) với B_1C_1 và BA_1. Do đó: BB_1, C_1A_1, MN đồng quy tại S.

Gọi (I_1, r_1) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Xét các phép vị tự $V_{(B,k1)}$ biến đường tròn (I_0, r_0) thành đường tròn (I, r), $k_1 =$ $\frac{r}{r_0} = \frac{BA_1}{BN}$. Ta có: $\frac{BA_1}{BN} = \frac{B_1C_1}{B_1M} = \frac{2B_1H}{B_1M}$ và qua $V_{(B,k2)}$ biến (I_1, r_1) thành (I_0, r_0),

$k_2 = \frac{r_0}{r_1} = \frac{B_1M}{B_1H}$. Từ đó $r = 2r_1$.

Bài toán 14. 17: Giả sử ba đường tròn (A_0), (B_0) và (C_0) có cùng bán kính, theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc A, B và C của một tam giác ABC. Gọi D_0 là đường tròn thứ tư tiếp xúc ngoài với cả ba đường tròn nói trên. Chứng minh rằng tâm D_0 thẳng hàng với tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Gọi I và O lần lượt là tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác ABC. Vì các đường tròn (A_o), (B_o), (C_o) có bán kính bằng nhau và đường tròn (D_o) tiếp xúc ngoài với cả ba đường tròn đó nên $D_oA_o = D_oB_o = D_oC_o$ hay nói cách khác D_o là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_oB_oC_o$.

Mà các đường tròn (A_o), (B_o), (C_o) có bán kính bằng nhau nên A_oB_o // AB, B_oC_o // BC và C_oA_o // CA. Hơn nữa AA_o, BB_o và CC_o đồng quy tại I. Do đó hai tam giác ABC và $A_oB_oC_o$ là ảnh của nhau qua một phép vị tự tâm I.

Từ đó suy ra O, I, D_o thẳng hàng

Bài toán 14. 18: Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại C. Các đường thẳng MA, MB đi qua một điểm M bất kì trên đường tròn (O_1) cắt lại đường tròn (O_2) tại N, P theo thứ tự đó. Gọi J là trung điểm của NP. Chứng minh rằng M, C, J thẳng hàng.

Giải

Từ giả thiết suy ra MC là đường đối trung của tam giác MAB.

Vì A, B, N, P cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng AN, BP cắt nhau ở M nên ΔMAB đồng dạng ΔMPN.

Gọi I là trung điểm của AB.

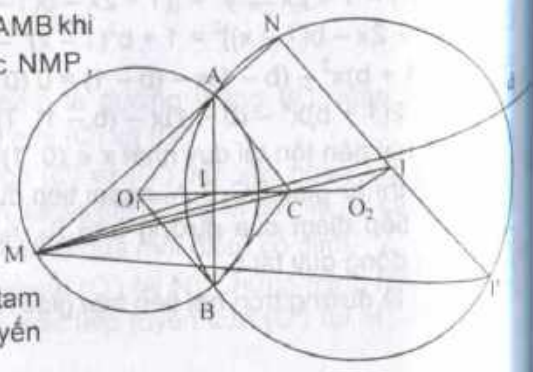
Gọi d là phân giác của góc AMB khi đó d cũng là phân giác của góc NMP,

đặt $k = \frac{MP}{MA}$

Ta có phép đồng dạng

$V_{(M,k)} \circ Đ_d$: $A \mapsto P$, $B \mapsto N$

nên $\Delta MAB \mapsto \Delta MPN$



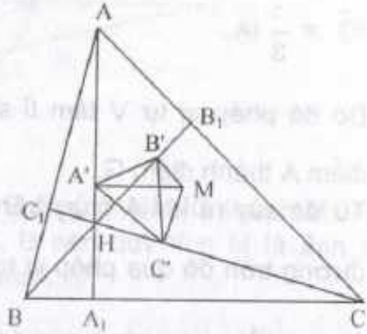
Do đó trung tuyến MI của tam giác MAB biến thành trung tuyến MJ của tam giác MPN.

Vì MI và MJ đối xứng với nhau qua d, suy ra M, C, J thẳng hàng.

Bài toán 14. 19: Gọi A', B', C' là các hình chiếu vuông góc của một điểm M bất kì nằm trong mặt phẳng của một tam giác ABC đã cho lần lượt trên các đường thẳng chứa đường cao AA_1, BB_1 và CC_1 của tam giác đó. Chứng minh rằng tam giác A'B'C' luôn đồng dạng với chính nó khi M chạy khắp mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.



Do bốn điểm A', B', M, H đồng viên, nên (A'B'; A'M) = (HB', HM) [modπ]

Do bốn điểm A', C', H, M đồng viên nên (A'M; A'C') = (HM; HC') [modπ]

Suy ra:

(A'B'; A'C') = (A'B'; A'M) + (A'M; A'C')

= (HB'; HM) + (HM; HC') = (HB'; HC')

= (AC; AB) [modπ]

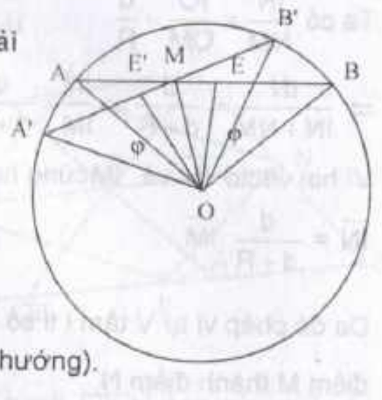
Tương tự (B'C'; B'A') = (BA; BC) [modπ]

Suy ra tam giác A'B'C' luôn đồng dạng nghịch với tam giác ABC cố định

Vậy, với mọi vị trí của điểm M, các tam giác A'B'C' luôn tự đồng dạng.

Bài toán 14. 20: Cho tứ giác lồi nội tiếp một đường tròn tâm O. Phép quay tâm O góc φ $(0 < \varphi < \pi)$ biến ABCD thành tứ giác A'B'C'D'. Chứng minh rằng các cặp cạnh tương ứng AB, A'B'; BC, B'C'; CD, C'D' và DA, D'A' của hai tứ giác đó giao nhau tại các điểm M, N, P và Q là các đỉnh của một hình bình hành.

Hướng dẫn giải



Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác ABCD và E', F', G', H' là trung điểm các cạnh A'B', B'C', C'D', D'A' của tứ giác A'B'C'D'.

Ta có $Q_{(O,\phi)}: A \mapsto A', B \mapsto B'$ nên $E \mapsto E'$

Mà AB = A'B' nên OE = OE' nên hai tam giác vuông OEM, OE'M bằng nhau (ngược hướng).

Suy ra: $(OE; OM) = (OM; OE') = \frac{\phi}{2}$ [modπ]

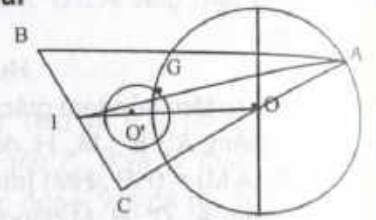
Do đó phép đồng dạng

$V_{(O,k)} \cdot Q_{(O,\frac{\phi}{2})}$ với $k = \dfrac{1}{\cos\frac{\phi}{2}}$ biến E thành M

Tương tự thì biến tứ giác EFGH thành tứ giác MNPQ mà tứ giác EFGH là hình bình hành nên suy ra MNPQ là hình bình hành.

Bài toán 14. 21: Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm qũy tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định.
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

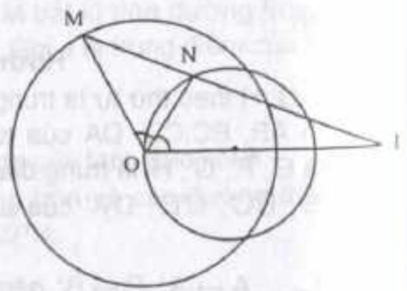
$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Do đó phép vị tự V tâm tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G.

Từ đó suy ra khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì quỹ tích G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn (O'; R') mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3}R$.

Bài toán 14. 22: Cho đường tròn (O; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

Hướng dẫn giải



Đặt IO = d. Theo tính chất đường phân giác

Ta có $\frac{IN}{NM} = \frac{IO}{OM} = \frac{d}{R}$

$\Rightarrow \frac{IN}{IN + NM} = \frac{d}{d + R} \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{d}{d + R}$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng nên

$\overrightarrow{IN} = \frac{d}{d + R}\overrightarrow{IM}$.

Do đó phép vị tự V tâm I tỉ số $k = \frac{d}{d + R}$ biến điểm M thành điểm N.

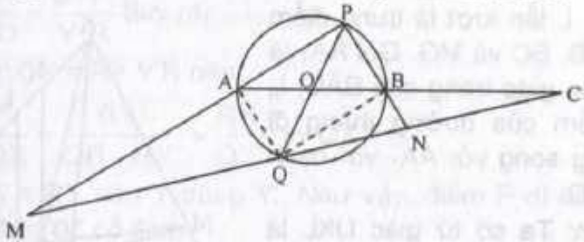
Khi M ở vị trí M_o trên đường tròn (O; R) sao cho $\widehat{IOM_o} = 0^o$ thì tia phân giác của góc $\widehat{IOM_o}$ không cắt IM. Điểm N không tồn tại.

Vậy khi M chạy trên (O; R) (M khác M_o) thì quỹ tích điểm N là ảnh của (O; R) qua phép vị tự V bỏ đi ảnh của điểm M_o.

Bài toán 14. 23: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N. Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

Hướng dẫn giải

Ta có QB // AP (vì cùng vuông góc với PB) và B là trung điểm của AC nên Q là trung điểm của CM. Tương tự ta có AQ // BN (vì cùng vuông góc với AP) và B là trung điểm của AC nên N là trung điểm của CQ.



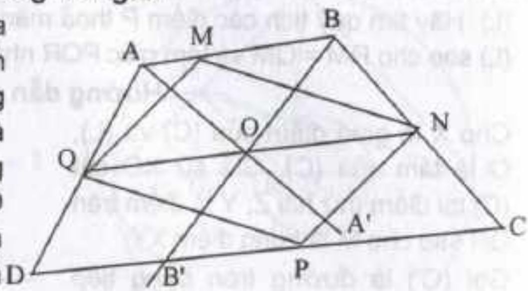
Ta có $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ}$ nên phép vị tự V tâm C tỉ số 2 biến Q thành M. Vì Q chạy trên đường tròn (O) trừ hai điểm A, B nên quỹ tích M là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V trừ 2 ảnh của A, B.

Tương tự $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CQ}$ nên quỹ tích N là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự V' tâm C, tỉ số $\frac{1}{2}$ trừ 2 ảnh của A, B.

Bài toán 14. 24: Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi ABCD với các cạnh đối không song song. Tìm quỹ tích tâm của các hình bình hành MNPQ mà các đỉnh M, N, P, Q theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA nhưng không trùng với đỉnh nào của tứ giác.

Hướng dẫn giải

Gọi A', B' là điểm đối xứng của A, B qua tâm O của hình bình hành MNPQ. Do AB không song song với CD nên O là trung điểm của MP tương đương với hai đoạn B'A' và CD cắt nhau hay A' thuộc miền trong của miền hình bình hành CDD'C với $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$.



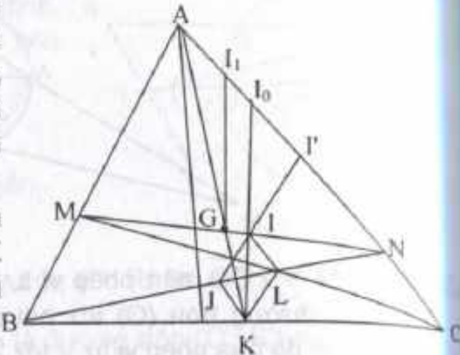
Tức là O thuộc miền trong của miền bình hành EFFH ảnh của miền bình hành CDD'C qua phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ tức là E, G, F, H là trung điểm của AC, AD, AD', AC'.

Chứng minh tương tự thì O thuộc miền trong của miền bình hành IEJF với I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

Vậy quỹ tích cần tìm là phần giao của hai miền trong của hai miền bình hành EGFH và IEJF.

Bài toán 14. 25: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N chuyển động trên 2 cạnh AB, AC sao cho BM = CN. Tìm quỹ tích trung điểm MN và trọng tâm tam giác AMN.

Hướng dẫn giải



Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của MN, NB, BC và MG. Gọi AA_1 là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$; I_0 là giao điểm của đường thẳng đi qua K song song với AA_1 với cạnh AB hoặc AC.

Phần thuận: Ta có tứ giác IJKL là hình thoi và từ đó có KI // AA_1. Do K cố định nên I nằm trên đường thẳng cố định KI_0.

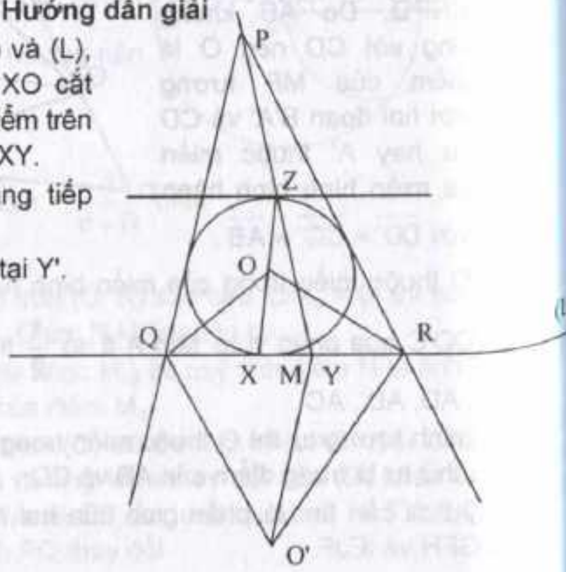
Giới hạn: I nằm trên đoạn thẳng KI_0.

Phần đảo: Lấy điểm I tuỳ ý thuộc đoạn KI_0 qua I kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở I'. Gọi N là điểm đối xứng của A đối với I' (N thuộc cạnh AC) đường thẳng NI cắt cạnh AB ở M. Ta sẽ chứng minh I là trung điểm của MN và BM = CN.

Vậy Quỹ tích của I, trung điểm của MN, là đoạn thẳng I_0K. Suy ra quỹ tích trọng tâm tam giác AMN và đoạn thẳng GI_1, ảnh của đoạn thẳng I_0K qua phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{2}{3}$.

Bài toán 14. 26: Gọi (L) là tiếp tuyến của đường tròn (C) và M là một điểm trên (L). Hãy tìm quỹ tích các điểm P thoả mãn tính chất: tồn tại hai điểm R, Q trên (L) sao cho RM = QM và tam giác PQR nhận (C) làm đường tròn nội tiếp.

Hướng dẫn giải



Cho X là giao điểm của (C) và (L), O là tâm của (C). Giả sử XO cắt (C) tại điểm thứ hai Z; Y là điểm trên QR sao cho M là trung điểm XY.

Gọi (C') là đường tròn bằng tiếp góc P của tam giác PQR.

Giả sử (C') tiếp xúc với QR tại Y'.

Phép vị tự tâm P, tỉ số $\frac{PY'}{PZ}$ biến (C) thành (C') tiếp tuyến với (C) tại Z biến thành đường thẳng QR, suy ra Z biến thành Y'.

Ta sẽ chứng minh rằng QX = RY'.

$OQO' = ORO' = 90^0 \Rightarrow \Delta QY'O' \sim \Delta OXQ \Rightarrow \frac{QY'}{Y'O'} = \frac{OX}{XQ}$

Tương tự: $\frac{RX}{XO} = \frac{O'Y'}{Y'R}$ Suy ra:

$QY'.XQ = Y'O'.OX = RX.Y'R$ nên:

$$\frac{QX}{RX} = \frac{QX}{QR - QX} = \frac{RY'}{QR - RY'} = \frac{RY'}{QY'} \Rightarrow QX = RY'$$

Mặt khác, QX = RY nên Y trùng Y'. Như vậy, điểm P di động nhưng luôn luôn nằm trên tia YZ cố định.

Đảo lại, lấy điểm P bất kì trên tia YZ, thì bằng cách lí luận tương tự như trên ta cũng có QX = RY. Nhưng M là trung điểm XY nên suy ra M là trung điểm QR, như thế P là điểm của quỹ tích.

Tóm lại, quỹ tích của P là tia YZ.

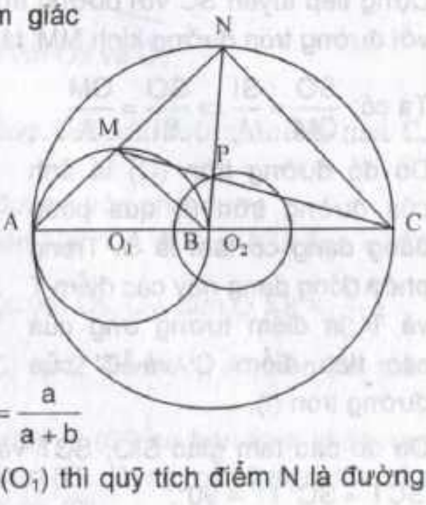
Bài toán 14. 27: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Gọi (V_1), (V_2) theo thứ tự là các đường tròn đường kính AB và AC. Một điểm M chuyển động trên (V_1), đường thẳng AM cắt lại (V_2) ở điểm N. Tìm quỹ tích giao điểm P của BN và CM.

Hướng dẫn giải

Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là tân của các đường tròn (V_1), (V_2)

Đặt $\overline{AB} = b$, $\overline{AC} = c$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ANB với cát tuyến CPM ta được:



$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MN}} \cdot \frac{\overline{PN}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = 1$$

Do BM // CN nên $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{PN}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = 1$

Do đó: $\frac{\overline{PN}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow \frac{\overline{BN}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PN} - \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{-a-b}{a}$ hay $\frac{\overline{BP}}{\overline{BN}} = \frac{a}{a+b}$

Vậy, khi M thay đổi trên đường tròn (O_1) thì quỹ tích điểm N là đường tròn (O_2) và P là ảnh của N qua phép vị tự tâm B, tỉ số $\frac{a}{a+b}$, do đó quỹ tích của điểm P cần tìm là đường tròn ω ảnh của (O_2) qua phép $V_{\left(B, \frac{a}{a+b}\right)}$.

Bài toán 14. 28: Cho một đường tròn (O), một đường thẳng d và một điểm P cố định. Với mỗi điểm M thuộc đường tròn (O) ta xác định điểm N đối xứng với M qua d. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PN. Tìm tập hợp điểm I, khi M thay đổi trên đường tròn.

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện bài toán ta suy ra tập hợp N là một đường tròn (O') ảnh của (O) trong phép đối xứng trục d.

Mặt khác, ta có $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$, nên I là ảnh của N trong phép vị tự tâm P, tỉ $k = \frac{1}{2}$.

Tập hợp các điểm I là một đường tròn (O") và ảnh của (O') trong phép vị tự $V_{(P,\frac{1}{2})}$. Vậy tập hợp các điểm I là một đường tròn ảnh của (O) qua phép đồng dạng là hợp thành của 2 phép $Đ_d$ và $V_{(P,\frac{1}{2})}$.

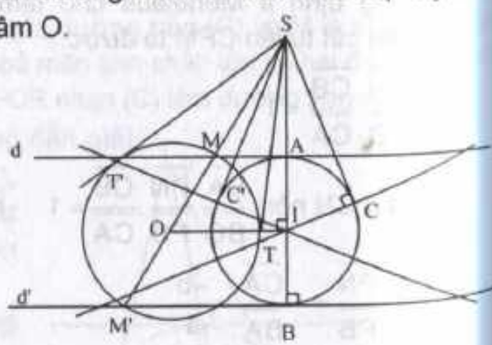
Bài toán 14. 29: Cho hai đường thẳng song song d và d' và điểm cố định S ở ngoài dải (d, d'). Một cát tuyến di động qua S cắt d tại M và d' tại M'. Chứng minh rằng các tiếp điểm T và T' của các tiếp tuyến vẽ từ S đến đường tròn đường kính MM' ở trên những đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải

Vẽ cát tuyến qua S và vuông góc với d tại A và d' tại B.

Dựng tiếp tuyến SC với đường tròn đường kính AB tâm I và tiếp tuyến ST với đường tròn đường kính MM' tâm O.

Ta có: $\frac{SO}{OM} = \frac{SI}{IA} \Rightarrow \frac{SO}{SI} = \frac{OM}{IA}$



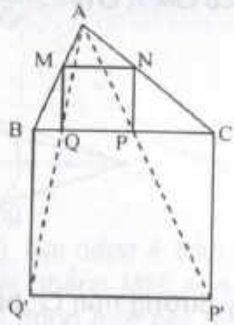
Do đó đường tròn (O) là ảnh của đường tròn (I) qua phép đồng dạng có tâm là S. Trong phép đồng dạng này các điểm T và T' là điểm tương ứng của các tiếp điểm C và C' của đường tròn (I).

Do đó các tam giác SIO, SCT và SC'T' đồng dạng và vì $\widehat{SIO} = 90^\circ$ nên $\widehat{SCT} = \widehat{SC'T'} = 90^\circ$.

Vậy T và T' ở trên các đường thẳng IC và IC' cố định.

Bài toán 14. 30: Cho tam giác nhọn ABC, hãy dựng hình vuông MNPQ sao cho hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và hai đỉnh M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC.

Hướng dẫn giải

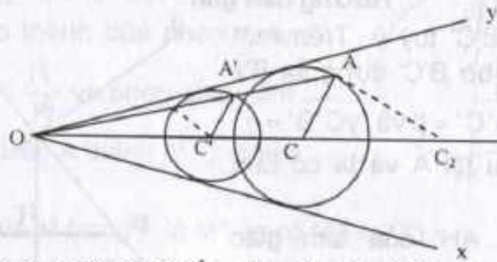


Giả sử ta dựng hình vuông MNPQ thì phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{BC}{MN}$ biến hình vuông MNPQ thành hình vuông BCP'Q'. Suy ra cách dựng: Dựng hình vuông BCP'Q' nằm ngoài tam giác ABC. Lấy giao điểm P, Q của BC với các đoạn thẳng tương ứng AP' và AQ'. Từ P và Q, vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, lần lượt cắt AC và AB tại N và M. Khi đó MNPQ chính là hình vuông cần dựng.

Bài toán 14. 31: Dựng một đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Ox, Oy cho sẵn và đi qua một điểm cố định A cho sẵn ở trong góc xOy.

Hướng dẫn giải

Phân tích, giả sử dựng được đường tròn (C) đi qua A và tiếp xúc với Ox, Oy, phép vị tự tâm O biến (C) thành (C') chỉ thỏa mãn 2 điều kiện tiếp xúc với Ox, Oy.



Cách dựng:

- Dựng đường tròn (C') tuỳ ý tiếp xúc với Ox và Oy.
- Dựng OA cắt (C') tại A'.
- Dựng giao điểm A của đường thẳng OA' với đường thẳng qua C, song song C'A'.
- Đường tròn tâm C, bán kính CA là đường tròn phải dựng.

Chứng minh: Đường tròn tâm C, bán kính CA đi qua A là ảnh của đường tròn (C') trong phép vị tự nên tiếp xúc với Ox, Oy, tâm O tỉ $k = \frac{CA}{CA'}$

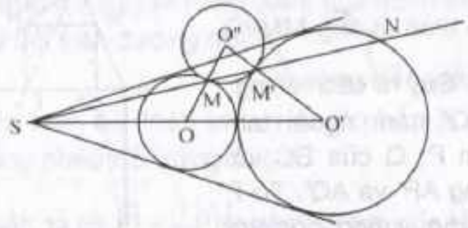
Biện luận: Đường thẳng OA cắt (C) tại 2 điểm A'_1, A'_2 nên bài toán có 2 nghiệm hình.

Bài toán 14. 32: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau và một điểm M trên (O). Dựng một đường tròn đi qua M và tiếp xúc với cả hai đường tròn (O) và (O').

Hướng dẫn giải

Gọi S là tâm vị tự ngoài của (O) và (O'). Gọi N là ảnh của M qua phép vị tự tâm S biến (O) thành (O'). Đường thẳng SN cắt (O') tại điểm thứ hai M'. Gọi O" là giao điểm của OM và O'M'.

Ta có OM // O'N ⇒ $\dfrac{O''M}{O'N} = \dfrac{O''M'}{M'O'}$ vì O'N = O'M' nên O"M = O"M'.



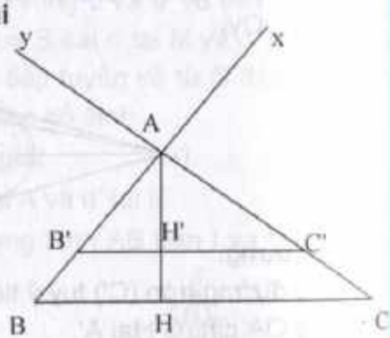
Vậy đường tròn O" bán kính O"M tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với (O') tại M' là tâm cần dựng.

Bài toán 14. 33: Dựng tam giác ABC nếu biết hai góc $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$ và một trong các yếu tố sau:

a) Đường cao AH = h.

b) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp

Hướng dẫn giải



a) Dựng đoạn thẳng B'C' tuỳ ý. Trên một nửa mặt phẳng có bờ B'C' dựng tia B'x và C'y sao cho $\widehat{xB'C'} = \beta$ và $\widehat{yC'B'} = \gamma$. Hai tia đó cắt nhau tại A và ta có tam giác AB'C'.

Dựng đường cao AH' của tam giác AB'C'. Nếu AH' = h thì AB'C' là tam giác cần dựng.

Nếu AH' ≠ h thì trên tia AH', ta lấy điểm H sao cho AH = h rồi dựng đường thẳng a vuông góc với AH tại H, cắt AB' tại B và cắt AC' tại C. Tam giác cần dựng là ABC.

b) Dựng tam giác AB'C' như câu a) rồi dựng tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB'C'. Trên tia AO' lấy điểm O sao cho AO = R rồi dựng đường tròn (O) đi qua A (tức là có bán kính bằng R). Hai tia AB' và AC' lần lượt cắt (O) tại các điểm B và C (khác A). Tam giác ABC là tam giác cần dựng.

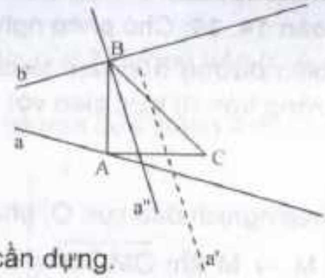
Bài toán 14. 34: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và điểm C. Tìm trên hai đường thẳng a và b các điểm A và B tương ứng sao cho tam giác ABC vuông cân ở A.

Hướng dẫn giải

Ta có thấy góc lượng giác (CA; CB) = -45° và $\dfrac{CB}{CA} = \sqrt{2}$. Do đó B là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm C, góc -45° và phép vị tự tâm C, tỉ số $\sqrt{2}$.

Cách dựng:

- Phép $Q_{(C,-45^o)}$ biến a thành a'.
- Phép $V_{(C,\sqrt{2})}$ biến a' thành a",
- B là giao điểm của a" và b,
- A là giao điểm của b và trung trực của BC.



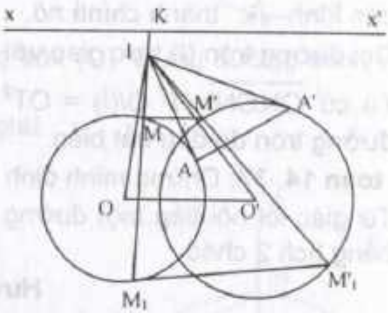
Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A cần dựng.

Bài toán 14. 35: Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R'), hai điểm A trên (O) và điểm A' trên (O'), một đường thẳng xx'. Dựng đoạn thẳng MM' song song với xx' sao cho M nằm trên (O); M' nằm trên (O') đồng thời các tam giác OAM, O'A'M' đồng dạng và cùng hướng.

Hướng dẫn giải

Phân tích : Giả sử đã dựng được hai điểm M, M' thoả mãn điều kiện của đầu bài. Lấy điểm I sao cho $\Delta IOO' \sim \Delta IAA'$ và cùng hướng. Đặt $\alpha = OIO'$.

Gọi F là hợp thành của phép vị tự tâm I, tỉ số $k = \dfrac{R'}{R}$ và phép quay tâm I, góc α thì F biến A thành A', O thành O'.



Giả sử ảnh của M trong F là M", ta có $M'' \in (O')$.

Do F biến A thành A', O thành O', M thành M' nên ta có $\Delta OAM \sim \Delta O'A'M'$ và cùng hướng. Suy ra $M'' \equiv M'$ hay $\Delta IMM' \sim \Delta IOO'$ và cùng hướng. Do vậy hai góc $\widehat{IMM'}, \widehat{IOO'}$ bằng nhau và cùng hướng.

Cách dựng: Từ I vẽ đường thẳng cắt (O) tại các điểm M, M_1 và cắt đường thẳng xx' tại điểm K sao cho hai góc $\widehat{IKx}$ và $\widehat{IOO'}$ bằng nhau và cùng hướng. Từ I vẽ tia IM' cắt đường tròn (O') tại M' và M'_1 sao cho hai góc $\widehat{MIM'}, \widehat{OIO'}$ bằng nhau và cùng hướng.

Chứng minh: do $M \in (O)$, $M' \in (O')$, $\widehat{MIM'} = \widehat{OIO'}$ và F: $(O) \Rightarrow (O')$ nên F biến M thành M'. Suy ra $\Delta IMM' \sim \Delta IOO'$ và ta có $\widehat{IMM'} = \widehat{IOO'} = \widehat{IKx}$. Mà $\widehat{IMM'}, \widehat{IKx}$ cùng hướng với $\widehat{IOO'}$, suy ra MM' // xx' (đối với M_1, M'_1 cũng chứng minh tương tự).

Biện luận: Số nghiệm tuỳ theo số giao điểm của đường thẳng IK với đường tròn (O).

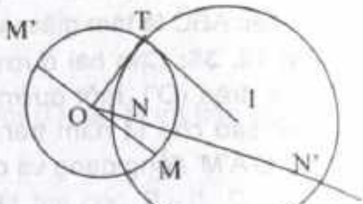
Bài toán 14. 36: Cho phép nghịch đảo f cực O, phương tích k >0. Chứng minh f biến đường tròn tâm là cực O và bán kính $\sqrt{k}$ thành chính nó và mọi đường tròn (I) trực giao với đường tròn đó đều bất biến.

Hướng dẫn giải

Phép nghịch đảo cực O, phương tích k >0

f: M → M' khi $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$

Gọi M'' là giao điểm của OM với đường tròn tâm là cực O và bán kính $\sqrt{k}$ thì $\overline{OM}.\overline{OM''} = k \Rightarrow M'' \equiv M'$ nên phép nghịch đảo biến đường tròn tâm là cực O và bán kính $\sqrt{k}$ thành chính nó.



Gọi đường tròn (I) trực giao với đường tròn trên, vẽ tiếp tuyến OT

Ta có $\overline{ON}.\overline{ON'} = P\ O/(I) = OT^2 = k$ nên mọi đường tròn (I) trực giao với đường tròn đó đều bất biến.

Bài toán 14. 37: Chứng minh định lý Ptoleme:

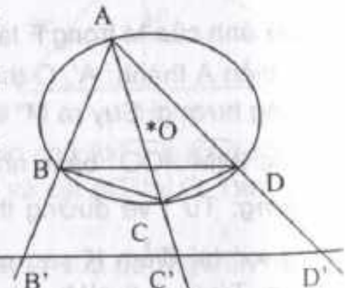
Tứ giác lồi nối tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tổng các tích 2 cạnh đối bằng tích 2 chéo.

Hướng dẫn giải

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O).

Xét phép nghịch đảo f cực A, phương tích k =1 biến đường tròn (O) qua A thành đường thẳng d.

f biến B, C, D thành B', C', D' thẳng hàng trên d.



Ta có $B'C' = \dfrac{|k|.BC}{AB.AC} = \dfrac{BC}{AB.AC}$

Tương tự $C'D' = \dfrac{CD}{AC.AD}; B'D' = \dfrac{BD}{AB.AD}$

Vì B',C',D' thẳng hàng theo thứ tự đó nên B'C' +C'D' = B'D'

$\Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB.AC} + \dfrac{CD}{AC.AD} = \dfrac{BD}{AB.AD}$

$\Leftrightarrow AD.BC + AB.CD = AC.BD$.

Đảo lại nếu $AD.BC + AB.CD = AC.BD$ thì B',C',D' thẳng hàng theo thứ tự đó nên f biến đường thẳng d chứa B', C', D' không qua cực A thành đường tròn qua cực A, do đó tạo ảnh B, C, D thuộc đường tròn này ⇒ đpcm.

Bài toán 14. 38: Cho 4 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) mà mỗi đường tròn đều tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn khác. Chứng minh 4 tiếp điểm đồng viên.

Hướng dẫn giải

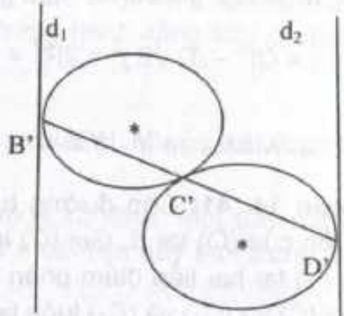
Gọi 4 tiếp điểm là A, B, C, D với A là tiếp điểm của 2 đường tròn (O_1), (O_2). Xét phép nghịch đảo f cực A.

f biến 2 đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài và qua cực thành 2 đường thẳng d_1, d_2 song song nhau.

f biến 2 đường tròn (O_3), (O_4) tiếp xúc ngoài và không qua cực thành 2 đường tròn (O'_3), (O'_4) tiếp xúc nhau.

f biến các tiếp điểm B, C, D thành B', C', D'. Vì B', D' là 2 tiếp điểm và nằm trên d_1, d_2 song song nhau còn C' là 2 tiếp điểm khác của 2 đường đó nên B', C', D' thẳng hàng. Suy ra tạo ảnh B, C, D thuộc một đường tròn qua cực A.

Vậy 4 tiếp điểm A, B, C, D đồng viên.



Bài toán 14. 39: Cho 2 điểm A, B và đường tròn (O). Dựng đường tròn (V) đi qua A, B và trực giao với (O).

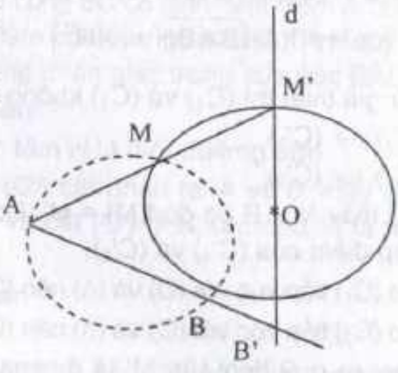
Hướng dẫn giải

Xét phép nghịch đảo f cực A, tỉ số $k = P_{A/(O)}$ thì f biến đường tròn (O) thành chính nó và biến B thành B'.

Đường tròn (V) đi qua A, B và trực giao với (O) biến thành đường thẳng d qua tâm O.

Suy ra cách dựng:

- f: B → B'
- dựng đường thẳng d qua O, B'.
- d cắt (O) tại M'
- AM' cắt (O) tại M
- dựng đường tròn (V) qua A, B và M.



Bài toán 14. 40: Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R và điểm O cố định sao cho OI = 2R, (C_1), (C_2) là 2 đường tròn thay đổi qua O, tiếp xúc với (C) và trực giao với nhau, M là giao điểm thứ 2 của (C_1) và (C_2). Tìm tập hợp điểm M.

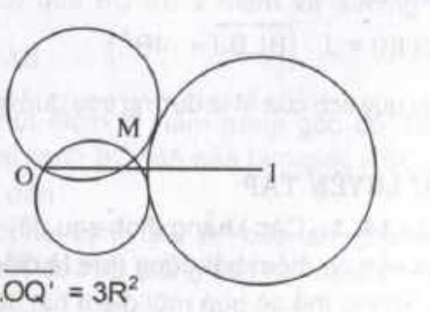
Hướng dẫn giải

Xét phép nghịch đảo f cực O, phương tích $P_{O/(C)} = OI^2 - R^2 = 3R^2$ biến (C) thành (C).

Gọi P, Q là điểm tiếp xúc của (C_1), (C_2) với (C), khi đó:

f: $(C_1) \Rightarrow (D_1)$ tiếp xúc của (C) tại P': $\overline{OP}.\overline{OP'} = 3R^2$

$(C_2) \Rightarrow (D_2)$ tiếp xúc với (C) tại Q': $\overline{OQ}.\overline{OQ'} = 3R^2$



f: M → M'

Vì (C_1) trực giao (C_2) $\Rightarrow$ (D_1) $\perp$ (D_2) tại M'.

Ta có IP'M'Q' là hình vuông cạnh R nên IM' = $R\sqrt{2}$ tức là M $\in$ (γ) là đường tròn tâm I, bán kính $R\sqrt{2} \Rightarrow$ M $\in$ (γ) nghịch đảo của (γ').

Lấy M' $\in$ (γ'), giả sử M = f(M') $\Rightarrow \overline{OM}.\overline{OM'} = 3R^2$

$$P_{O/(\gamma')} = OI^2 - (R\sqrt{2})^2 = 2R^2 = \overline{OM'}.\overline{ON}\ ;\ N \in (\gamma') \Rightarrow \overline{OM} = \frac{3}{2}\overline{ON}$$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn (γ) là hình vị tự của (γ') trong $V(0; \frac{3}{2})$

Bài toán 14. 41: Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (O) tại B. Gọi (C) là đường tròn thay đổi và luôn tiếp xúc với (O) và (Δ) tại hai tiếp điểm phân biệt. Gọi (C_1) và (C_2) là hai đường tròn bất kì của (C) và (C_1) và (C_2) luôn tiếp xúc với nhau tại M. Tìm quỹ tích của M.

Hướng dẫn giải

Xét phép nghịch đảo f cực B, phương tích $k = -4R^2$.

Do B $\in$ (Δ) nên qua f: (Δ) $\to$ (Δ)

Do B $\in$ (0) nên qua f: (0) $\to$ (d) với (d) là đường thẳng vuông góc với AB tại H với H = f(A) $\left(\overline{BA}.\overline{BH} = -4R^2\right)$

Từ giả thiết thì (C_1) và (C_2) không đi qua cực B nên:

(C_1) $\mapsto$ (C'_1)

(C_2) $\mapsto$ (C'_2)

Dễ thấy M $\neq$ B do đó f(M) = M'. Do M là tiếp điểm của (C_1) và (C_2) nên M' là tiếp điểm của (C'_1) và (C'_2).

Do (C_1) tiếp xúc với (O) và (Δ) nên (C'_1) tiếp xúc với (Δ) và (d).

Do (C_2) tiếp xúc với (O) và (Δ) nên (C'_2) tiếp xúc với (Δ) và (d).

Suy ra quỹ tích của M' là đường thẳng (D), với (D) vuông góc với AB tại trung điểm I của BH.

Do đó, theo tính chất đối hợp của phép nghịch đảo thì quỹ tích của M là ảnh của (D) qua f. Ảnh của (D) qua f là đường tròn đường kính BJ (trừ điểm B).

Với f(I) = J $\left(\overline{BI}.\overline{BJ} = -4R^2\right)$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn đường kính BJ (trừ điểm B).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 14. 1: Các khẳng định sau đây có đúng không: Phép vị tự

a) Luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

b) Không thể có quá một điểm bất động.

c) Nếu có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

Hướng dẫn

a) Kết quả Đúng : tâm vị tự.

b) Kết quả Sai.

c) Kết quả Đúng. Chứng minh khi đó là phép dồng nhất.

Bài tập 14. 2: Cho đường thẳng d và đường tròn (O). Một đường tròn lưu động tiếp xúc với d và (O) tại M và N. Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Kết quả Gọi AB là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với d.. Vậy MN qua điểm cố định A.

Bài tập 14. 3: Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O; R) có độ dài không đổi BC = m. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn

Kết quả Gọi I là trung điểm của BC. Phép vị tự V tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$ biến điểm I thành điểm G. Quỹ tích G là ảnh của quỹ tích I qua phép V.

Bài tập 14. 4: Cho đường tròn v(O; R) và dây cung BC cố định. Một điểm A chuyển động trên đường tròn đó. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc M của H trên đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.

Hướng dẫn

Sử dụng phép vị tự và để ý quỹ tích trực tâm H là một đường tròn.

Bài tập 14. 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

Hướng dẫn

Dùng phép vị tự V tâm A tỉ số 2.

Bài tập 14. 6: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định, trong đó B và C cố định còn A di động. Tìm quỹ tích trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn

Kết quả Đường tròn đối xứng của (O) qua BC trừ 2 điểm và đường tròn ảnh của (O) qua V(I; $\frac{2}{3}$). I trung điểm AB.

Bài tập 14. 7: Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong góc đó. Dựng đường tròn đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh BC, BA của tam giác ABC

Hướng dẫn

Dựng đường tròn tùy ý (E) tiếp xúc với hai cạnh BC, BA của tam giác ABC Dựng giao điểm của đường tròn (E) với đường thẳng BM rồi dùng phép vị tự V tâm B.

Bài tập 14. 8: Tìm điều kiện để hai hình chữ nhật đồng dạng với nhau

Hướng dẫn

Kết quả Nếu hình chữ nhật có chiều rộng a, chiều dài b và hình chữ nhật (H') có chiều rộng a', chiều dài b', điều kiện cần và đủ để (H) đồng dạng với (H') là: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Bài tập 14. 9: Chứng minh phép đồng dạng biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng, đồng thời bảo toàn thứ tự các điểm.

Hướng dẫn

A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó $\Leftrightarrow$ AB + BC = AC

Bài tập 14. 10: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Hãy viết phương trình đường tròn (C'') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = –2 và phép đối xứng qua trục Oy.

Hướng dẫn

Từ định nghĩa $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$ để tìm ra tọa độ M'(x';y') theo M(x;y).

Kết quả (C''): $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$.

Bài tập 14. 11: Cho hình thoi ABCD cạnh a, góc nhọn $\widehat{A} = 60^0$ có đường tròn nội tiếp (I). Tìm quỹ tích các điểm M có phương tích M đối với (I) bằng $-\frac{a^2}{4}$.

Hướng dẫn

Dùng dùng phép vị tự

Bài tập 14. 12: Cho đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại A. Chứng minh các đường tròn (I) tiếp xúc với d và trực giao với đường tròn (O) thì luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

Hướng dẫn

Dùng phép nghịch đảo cực O phương tích R^2.

Chuyên đề 15: QUAN HỆ SONG SONG

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

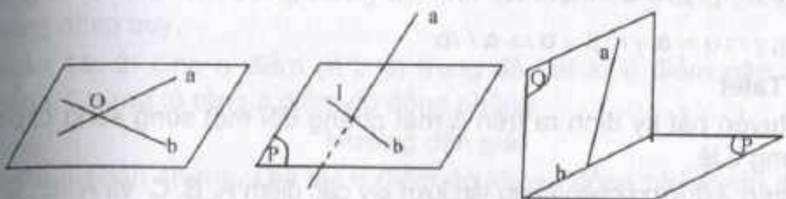
Thẳng hàng và đồng quy

Tìm chọn 2 mặt phẳng phân biệt cùng chứa các điểm, các điểm này thẳng hàng trên giao tuyến của 2 mặt phẳng. Còn các đường đồng quy, có thể sử dụng tính chất 2 đường chéo của hình bình hành, cắt cùng tỉ lệ, chứng minh đồng quy liên tiếp, hoặc dùng phản chứng,...

Giao điểm và giao tuyến của đường thẳng và mặt phẳng

Tìm mặt phẳng phụ chứa đường thẳng, đưa về tìm giao điểm của đường thẳng đã cho với giao tuyến của mặt phẳng cho và mặt phẳng phụ.

Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng, giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 điểm chung này, có thể tìm 1 điểm chung và song song với 1 đường thẳng khác.



Thiết diện cắt khối đa diện bởi một mặt phẳng

Đưa về tìm giao điểm với cạnh của khối đa diện và tìm giao tuyến với mặt của khối đa diện. Thiết diện cần tìm là một đa giác có các cạnh thuộc một số mặt của khối đa diện.

Khi tìm giao điểm, giao tuyến, thiết diện ta có thể sử dụng: trong một mặt phẳng, các đường thẳng cắt nhau hoặc kéo dài cắt nhau; đường gióng từ đỉnh xuống mặt phẳng hoặc đường gióng song song; giao tuyến của 2 mặt phẳng làm gốc; giao tuyến song song, quan hệ đặc biệt của đề bài cho sẵn,...

Bài toán yếu tố cố định và quỹ tích giao điểm của 2 đường thẳng di động trong không gian

Dựa trên 2 quan hệ: đại lượng không đổi và các yếu tố cố định đã cho, các tương giao của 2 yếu tố cố định.

Tìm 2 mặt phẳng cố định và phân biệt lần lượt chứa 2 đường thẳng di động thì giao điểm thuộc giao tuyến cố định. Lưu ý giới hạn và phần đảo.

Định nghĩa đường và mặt song song

$a // b$ khi a, b đồng phẳng và không có điểm chung.

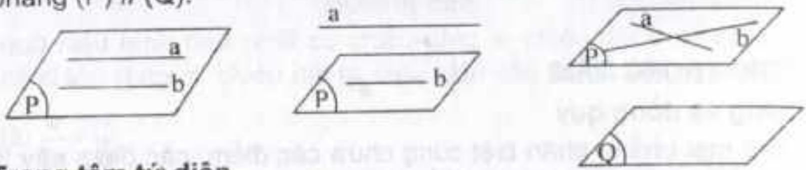
$a // (P)$ khi chúng không có điểm chung.

$(P) // (Q)$ khi chúng không có điểm chung.

Định lý song song cơ bản

Nếu $a \not\subset (P)$, $a // b$, $b \subset (P)$ thì $a // (P)$

Nếu (P) chứa 2 đường thẳng cắt nhau cùng song song với (Q) thì hai mặt phẳng (P) // (Q).



Trọng tâm tứ diện

Trong tứ diện 3 đường trung bình (đoạn nối trung điểm 2 cạnh đối diện) đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn gọi là trọng tâm tứ diện.

Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD thì đường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy. Nếu gọi A' là trọng tâm của mặt BCD thì GA = 3GA'.

Giao tuyến song song

$a // (Q), \forall (P) \supset a, (P) \cap (Q) = \Delta \Rightarrow \Delta // a$

$a // b, \forall \alpha \supset a, \forall \beta \supset b, \alpha \cap \beta = \Delta \Rightarrow \Delta // a$ hay $\Delta // b$

$\alpha // \beta, \forall \gamma, \gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b \Rightarrow a // b$

Định lý Talet

Hai cát tuyến bất kỳ định ra trên 3 mặt phẳng đôi một song song các đoạn tương ứng tỉ lệ.

Đảo lại, trên 2 đường chéo nhau lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' theo thứ tự, nếu $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ thì AA', BB', CC' nằm trên 3 mặt phẳng song song.

Góc giữa 2 đường thẳng

Là góc giữa 2 đường thẳng cùng đi qua một điểm nào đó và lần lượt song song với 2 đường thẳng đã cho.

Hình lăng trụ , hình hộp

Hình lăng trụ có hai mặt đáy là hai hình đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau, có các mặt bên là những hình bình hành, có các cạnh bên song song và bằng nhau.

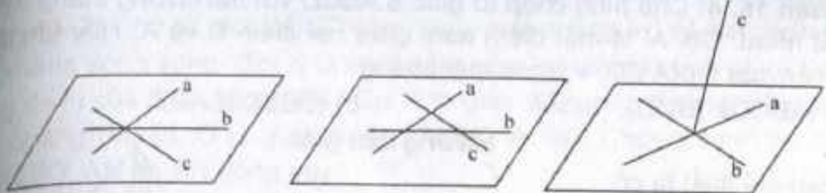
Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Trong mỗi hình hộp, bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, điểm cắt nhau đó gọi là tâm hình hộp.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 15. 1: Cho 3 đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau. Có thể kết luận 3 đường này đồng phẳng và đồng quy? Chứng minh : Nếu 3 đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.

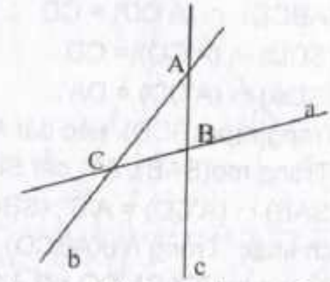
Hướng dẫn giải

Không chắc. Ta minh hoạ 3 hình vẽ sau tương ứng 3 đường thẳng a, b, c đồng phẳng và đồng quy; đồng phẳng và không đồng quy; không đồng phẳng và đồng quy.



Với n = 3. Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau. Gọi A là giao điểm của b và c. Ta chứng minh đường thẳng a qua giao điểm A

Giả sử a không qua điểm A thì a cắt b, c tại B, C khác điểm A.Do đó, ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trên mặt phẳng (ABC): vô lý.Vậy chúng đồng quy.



Tổng quát: Nếu n đường thẳng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng thì chúng đồng quy.

Bài toán 15. 2: Cho n điểm ($n \geq 4$) trong đó bất kì 4 điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng tỏ rằng n điểm đó đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Ta dùng phản chứng. Giả sử n điểm đó không đồng phẳng thì ít nhất phải có 4 điểm trong chúng không đồng phẳng, trái giả thiết.

Bài toán 15. 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác ABCD có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

a) (SBM) và (SCD)

b) (ABM) và (SCD)

c) (ABM) và (SAC).

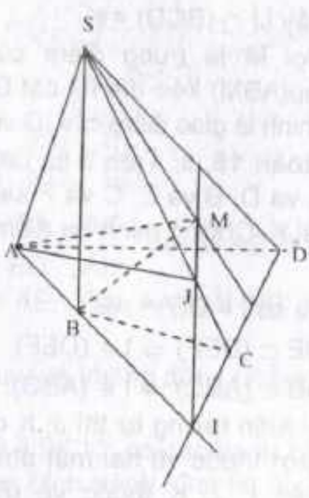
Hướng dẫn giải

a) Ta có S và M là hai điểm chung của 2 mp(SBM) và (SCD) nên giao tuyến là đường thẳng SM.

b) Từ giả thiết, trong mp(ABCD) kéo dài AB, CD cắt nhau tại I.

Vì $I \in AB$, $I \in CD$ nên I và M là 2 điểm chung của 2 mp(ABM) và mp(SCD) nên giao tuyến của chúng là đường thẳng IM.

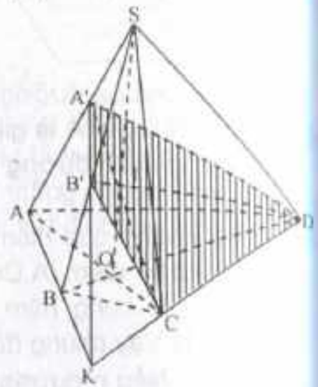
c) Trong mp(SCD), IM cắt SC tại J thì giao tuyến của mp(ABM) và (SAC) là đường thẳng AJ.



Bài toán 15. 4: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD với hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi A' là một điểm nằm giữa hai điểm S và A. Hãy tìm các giao tuyến của mp(A'CD) với các mặt phẳng

a) (ABCD), (SCD), (SDA) b) (SBC), (SAB).

Hướng dẫn giải



a) Theo giả thiết ta có:

(ABCD) $\cap$ (A'CD) = CD ;

(SCD) $\cap$ (A'CD) = CD

(SDA) $\cap$ (A'CD) = DA'.

b) Trong mp(ABCD), kéo dài AB cắt CD tại K

Trong mp(SAB), A'K cắt SB tại B' thì

SAB) $\cap$ (A'CD) = A'B', (SBC) $\cap$ (A'CD) = CB'

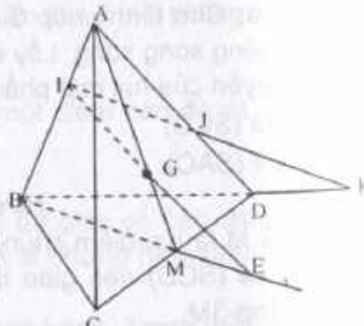
Cách khác: Trong mp(ABCD), AC cắt BD tại O.

Trong mp(SAC), SO cắt A'C tại I.

Trong mp(SBD), DI cắt SB tại B'.

Bài toán 15. 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD với AI = $\frac{1}{3}$AB và AJ = $\frac{3}{4}$AD. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD. Tìm giao điểm của đường thẳng IJ, IG với mp(BCD).

Hướng dẫn giải



Trong mp(ABD), theo giả thiết IJ, BD không song song nên kéo dài cắt nhau tại K.

Ta có K $\in$ IJ, K $\in$ BD

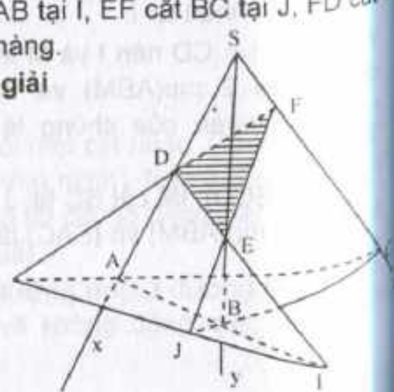
$\Rightarrow$ K $\in$ IJ, K $\in$ (BCD).

Vậy IJ $\cap$ (BCD) = K.

Gọi M là trung điểm của CD, trong mp(ABM) kéo dài IG cắt BM tại E thì E chính là giao điểm của IG với mp(BCD).

Bài toán 15. 6: Trên 3 tia Sx, Sy, Sz không đồng phẳng lần lượt lấy các điểm A và D, B và E, C và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Ta có I = DE $\cap$ AB

DE $\subset$ (DEF) $\Rightarrow$ I $\in$ (DEF)

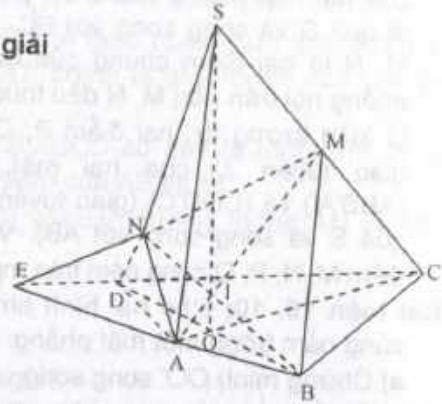
AB $\subset$ (ABC) $\Rightarrow$ I $\in$ (ABC).

Lí luận tương tự thì J, K cũng lần lượt thuộc về hai mặt phẳng trên nên I, J, K thuộc về giaotuyến của (ABC) và (DEF) phân biệt.

Vậy 3 điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài toán 15. 7: Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm của đoạn thẳng SC. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB). O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh ba đường thẳng SO, AM và BN đồng quy.

Hướng dẫn giải



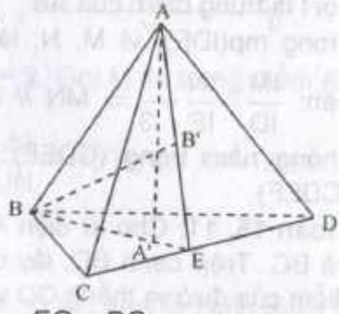
Gọi E là giao điểm của AB và CD. Hai mặt phẳng (MAB) và (SCD) có hai điểm chung là M và E. Do đó hai mặt phẳng này có ME là giao tuyến. Trong mặt phẳng (MCD), gọi N là giao điểm của SD và EM, ta có N là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

Gọi I là giao điểm của AM và BN.

Như vậy điểm I vừa thuộc mặt phẳng (SAC) vừa thuộc mặt phẳng (SBD). Mặt khác SO là giao tuyến của (SAC) và (SBD). Do đó ba đường thẳng SO, AM và BN đồng quy tại I.

Bài toán 15. 8: Cho tứ diện ABCD có các cạnh thoả mãn AB.CD = AC.BD = AD.BC. Chứng minh các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp các mặt đối diện đồng quy tại 1 điểm.

Hướng dẫn giải



Gọi A', B', C', D' là tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện các đỉnh A, B, C, D.

Vì AA', BB', CC', DD' không đồng phẳng nên ta chứng minh chúng đôi một cắt nhau.

Gọi E = BA' $\cap$ CD.

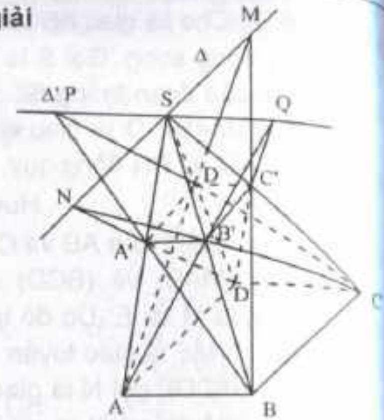
Vì BE là phân giác trong của tam giác BCD nên $\frac{EC}{ED}=\frac{BC}{BD}$.

Ta có AC.BD = AD.BC nên $\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$ suy ra $\frac{EC}{ED}=\frac{AC}{AD}$, do đó AE là phân giác trong của tam giác ACD nên B' thuộc AE. Vậy AA' cắt BB' trong mp(ABE).

Chứng minh tương tự thì chúng đôi một cắt nhau và không đồng phẳng nên 4 đường thẳng đó đồng quy.

Bài toán 15. 9: Cho hình chóp cụt tứ giác ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bên là AA', BB', CC', DD' và có đáy lớn ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AD' và BC', CB' và DA', BA' và CD', AB' và DC'. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Hướng dẫn giải



Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC', DD'. Vì BC song song với AD nên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (BB'C'C), (AA'D'D) đi qua S và song song với BC. Ta có M, N là hai điểm chung của hai mặt phẳng nói trên nên M, N đều thuộc Δ.

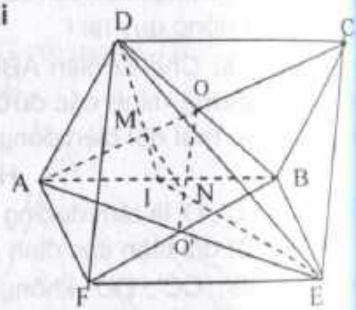
Lí luận tương tự, hai điểm P, Q thuộc giao tuyến Δ' của hai mặt phẳng (ABB'A') và (CDD'C) (giao tuyến này đi qua S và song song với AB). Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên mp(Δ, Δ').

Bài toán 15. 10: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF tâm O, O' không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N là trọng tâm các tam giác ABD và ABE. Chứng minh MN song song với mặt phẳng (CDEF).

Hướng dẫn giải



a) Ta có: OO' // DF, nên: OO' // (ADF).

Tương tự: OO' // CE nên OO' // (BCE).

b) Gọi I là trung điểm của AB.

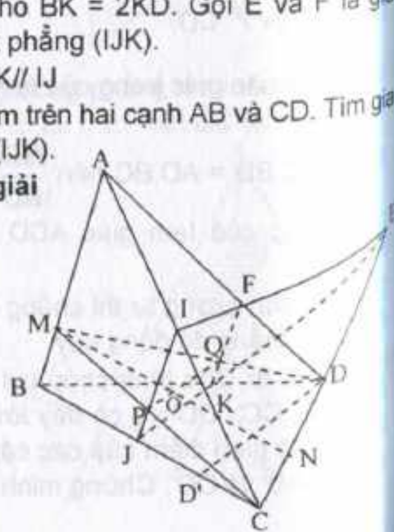
Trong mp(IDE), vì M, N, là trọng tâm nên: $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ MN // DE. Vì MN không nằm trong (CDEF) nên MN // (CDEF).

Bài toán 15. 11: Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD, lấy điểm K sao cho BK = 2KD. Gọi E và F là giao điểm của đường thẳng CD và AD với mặt phẳng (IJK).

a) Chứng minh DE = DC, FA = 2FD và FK// IJ

b) Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (IJK).

Hướng dẫn giải



a) Trong (BCD), CD cắt JK tại E nên E là giao điểm của CD với (IJK). Trong tam giác BCD, dựng DD' // JK.

Vì KD = $\frac{1}{2}$KB nên JD' = $\frac{1}{2}$JB.

Vì JB = JC nên JD' = $\frac{1}{2}$JC.

Suy ra: D'J = D'C. Do đó: DE = DC

Trong (ACD), AD cắt IE tại F. Đây là giao điểm của AD với (IJK). Trong tam giác ACE, AD và EI là hai trung tuyến, nên F là trọng tâm.

Do đó FA = 2 FD. Vì K và F là trọng tâm các tam giác BCE và ACE nên ta có: $\frac{KE}{KJ} = \frac{FE}{FI} = 2$ suy ra FK // IJ.

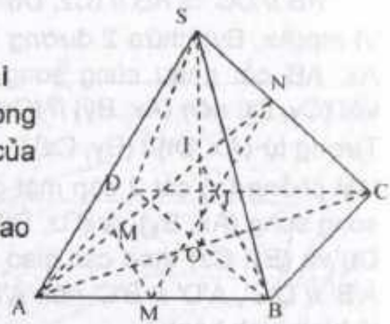
b) MC cắt IJ tại P, MD cắt FK tại Q thì PQ là giao tuyến của mp(MCD) và mp(IJK). Trong (MCD), MN cắt PQ tại O, chính là giao điểm của MN với (LJK).

Bài toán 15. 12: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và SC.

a) Gọi I và J là giao điểm của mp(SBD) với các đường thẳng AN và MN. Chứng minh ba điểm B, I, J thẳng hàng.

b) Tính các tỉ số $\frac{IA}{IN}$; $\frac{JM}{JN}$; $\frac{JB}{JI}$.

Hướng dẫn giải



a) Gọi O là tâm hình bình hành ABCD. Trong ΔSAC, AN cắt SO tại I. Vậy I là giao điểm của AN và mp(SBD).

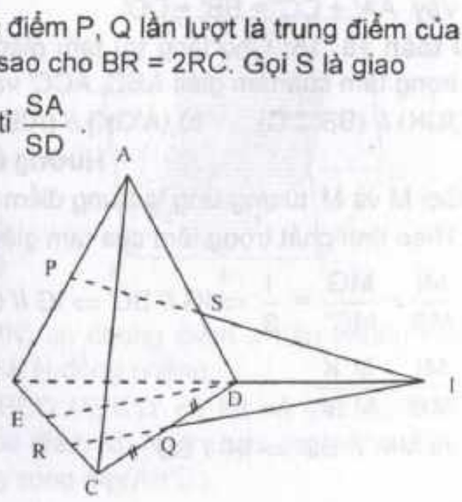
Trong ΔNAB, MN cắt BI tại J. Vậy J là giao điểm của MN và mp(SBD).

Theo cách vẽ thì B, I, J thẳng hàng.

b) Vì I là trọng tâm của tam giác SAC nên $\frac{IA}{IN} = 2$. Gọi M' là trung điểm AI, thì MM' // BJ, và J là trung điểm của M'N nên $\frac{JM}{JN} = 1$. Ta có: IB = 2MM', IJ = $\frac{1}{2}$MM'. Vậy $\frac{JB}{JI} = 3$.

Bài toán 15. 13: Cho tứ diện ABCD. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mp(PQR) và cạnh AD. Tính tỉ $\frac{SA}{SD}$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của RQ và BD; E là trung điểm của BR. Khi đó EB = ER = RC và RQ // ED.

Tam giác BRI có: ED // RQ,

suy ra: $\frac{BD}{DI} = \frac{BE}{ER} = 1$

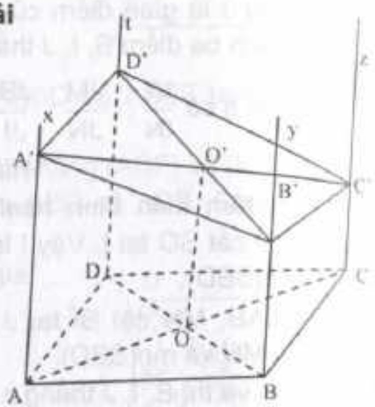
Do đó DB = DI nên AD và IP là hai đường trung tuyến của tam giác ABI nên giao điểm S của AD và IP là trọng tâm của tam giác ABI và ta có AS = 2DS. Vậy $\frac{SA}{SD}=2$.

Bài toán 15. 14: Từ bốn đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz và Dt sao cho chúng cắt mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng (α) cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A', B', C' và D'. Chứng minh:

a) (Ax, By) // (Cz, Dt), (Ax, Dt) // (By, Cz).

b) Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành và AA' + CC' = BB' + DD'.

Hướng dẫn giải



a) Ta có Ax // Dt $\Rightarrow$ Ax // (Cz, Dt)

AB // DC $\Rightarrow$ AB // (Cz, Dt)

Vì mp(Ax, By) chứa 2 đường thẳng Ax, AB cắt nhau cùng song song với (Cy, Dt) nên (Ax, By) // (Cz, Dt).

Tương tự (Ax, Dt)// (By, Cz).

b) Mặt phẳng (α) cắt 2 cặp mặt phẳng song song (Ax, By) và (Cz, Dt); (Ax, Dt) và (By, Cz) theo các giao tuyến A'B' // D'C', A'D' // B'C' nên A'B'C'D' là hình bình hành.

Gọi O, O' lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, A'B'C'D'. Ta có OO' là đường trung bình của hình thang AA'C'C nên có OO' = $\frac{AA'+CC'}{2}$.

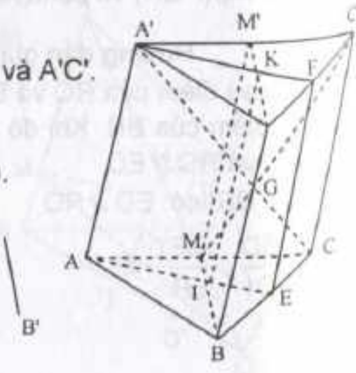
Tương tự OO' = $\frac{BB'+DD'}{2}$.

Vậy AA' + CC' = BB' + DD'.

Bài toán 15. 15: Cho lăng trụ tam giác A'B'C'.ABC. Gọi I, G và K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACC' và A'B'C'.Chứng minh :

a) (IGK) // (BB'C'C) b) (A'GK) // (AIB').

Hướng dẫn giải



a) Gọi M và M' tương ứng là trung điểm của AC và A'C'.

Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có:

$\frac{MI}{MB}=\frac{MG}{MC'}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ IG // BC' $\Rightarrow$ IG // (BB'CC').

$\frac{MI}{MB}=\frac{M'K}{M'B'}$

và MM' // BB' $\Rightarrow$ IK // BB'.

$\Rightarrow$ IK // (BB'C'C).

Vậy (IGK) // (BB'C'C).

b) Gọi E và F tương ứng là trung điểm của BC và B'C'

$\Rightarrow$ B'E // CF $\Rightarrow$ B'E // (A'CF). Mà AE // A'F $\Rightarrow$ AF // (A'CF).

Do đó (AEB') // (A'CF)) hay (AIB') // (A'GK).

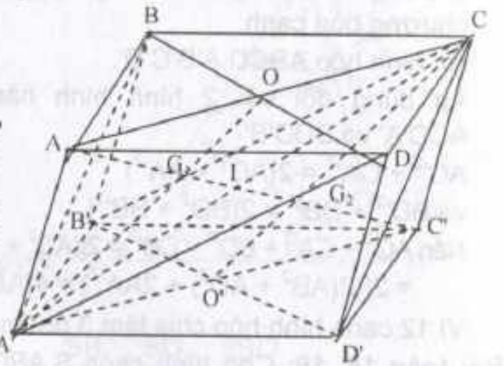
Bài toán 15. 16: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh mặt phẳng (BDA') song song (B'D'C), đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C, hơn nữa G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

b) Các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B cùng nằm trên một mặt phẳng

Hướng dẫn giải

a) Hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song vì ta có BD // B'D', BA' // D'C $\Rightarrow$ BD, BA' // (B'D'C).



Gọi O và O' lần lượt là tâm của đáy ABCD và A'B'C'D'. Đường chép AC' nằm trong mặt phẳng (AA'C'C), AC' cắt A'O tại G_1 Xét tam giác BDA' thì A'O là một trung tuyến và AO // A'C'

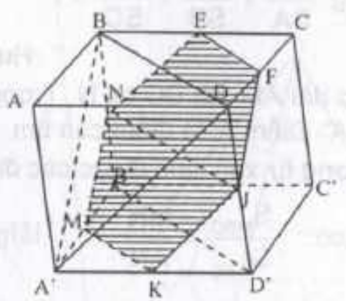
nên $\frac{G_1O}{G_1A} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2}$, do đó G_1 là trọng tâm của tam giác BDA'.

Tương tự thì G_2 là trọng tâm của tam giác B'D'C

Ta có A'O // O'C và O trung điểm AC, O' trung điểm A'C' nên G_1 là trung điểm của AG_2 và G_2 là trung điểm của $C'G_1$.

Vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$.

b) Gọi E, F, J, K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B.

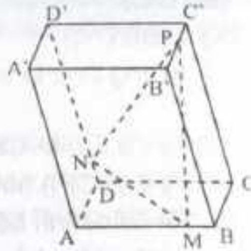


Ta có EF // JN, JN // KM và EF // BD, FJ // BA', KM // BD, MN // BA'. Do đó hai mặt phẳng (EFJN) và (JKMN) đều song song với mp(A'BD).

Nhưng hai mặt phẳng (EFJN), (JKMN) có chung điểm J nên chúng phải trùng nhau. Vậy sáu điểm E, F, J, K, M, N đồng phẳng.

Bài toán 15. 17: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trên AB, DD', C'B' lấy ba điểm M, N, P sao cho AM = D'N = B'P. Chứng minh rằng mp(MNP) song song mp(AB'D').

Hướng dẫn giải



Vì các cạnh của hình hộp bằng nhau và AM = D'N = B'P nên MB = PC' = ND.

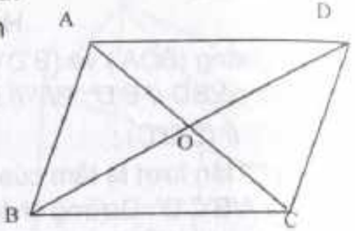
Ta có: $\frac{BM}{MA}=\frac{C'P}{PB'}\Rightarrow\frac{MB}{PC'}=\frac{MA}{PB'}=\frac{AB}{C'B'}$

Theo định lí Ta lét đảo, các đường thẳng BC', MP,AB' cùng song song với một mặt phẳng hay MP // mp(AB'D').

Tương tự thì được MN // mp(AB'D'). Vậy mp(MNP) // mp(AB'D')

Bài toán 15. 18: Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

Hướng dẫn giải



Ta biết trong một hình bình hành, tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương bốn cạnh.

Với hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

Áp dụng đối với 2 hình bình hành ACC'A' và BDD'B'

$AC'^2 + CA'^2 = 2(AC^2 + AA'^2)$

và $BD'^2 + DB'^2 = 2(BD^2 + BB'^2)$

Nên $AC'^2 + CA'^2 + BD'^2 + DB'^2 = 2[(AC^2 + BD^2) + (AA'^2 + BB'^2)]$

$= 2[(2(AB^2 + AD^2) + 2AA'^2] = 4(AB^2 + AD^2 + AA'^2)$

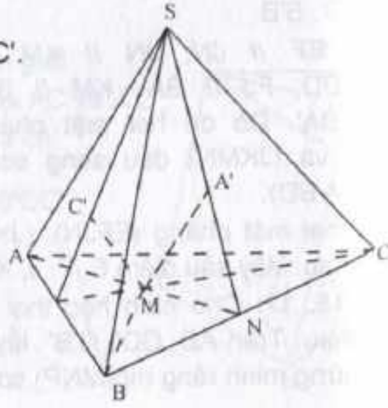
Vì 12 cạnh hình hộp chia làm 3 nhóm song song và bằng nhau ⇒ đpcm.

Bài toán 15. 19: Cho hình chóp S.ABC và một điểm M nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M lần lượt song song với các đường thẳng SA, SB,SC cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) tại A', B', C'. Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1$.

Hướng dẫn giải

Kéo dài AM cắt BC tại N. Trong mp(SAN) kẻ MA' song song với SA cắt SN tại A'. Điểm A' là điểm cần tìm.

Tương tự xác định được các điểm B', C'.



Ta có: $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}=\frac{MN}{AN}$

mà $\frac{MN}{AN}=\frac{MA'}{SA}$

Do đó $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}=\frac{MA'}{SA}$

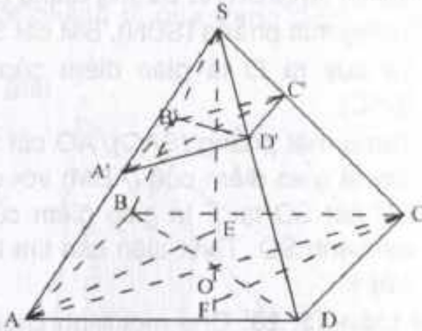
Tương tự : $\dfrac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = \dfrac{MB'}{SB}$, $\dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{MC'}{SC}$

Vậy : $\dfrac{MA'}{SA} + \dfrac{MB'}{SB} + \dfrac{MC'}{SC} = \dfrac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$.

Bài toán 15. 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại A', B', C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD; I là giao điểm của A'C' và SO. Gọi D' là giao điểm của mp(P) với cạnh SD. Chứng minh rằng $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

Hướng dẫn giải

Trong mp(SAC), A'C' cắt SO tại I. Trong mp(SBD), B'I cắt SD tại D'. Khi đó D' chính là giao điểm của mp(P) với SD.



Trong mp(SAC), vẽ AE // A'C' cắt SO tại E; vẽ CF // A'C' cắt SO tại F.

Ta có: $\dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{SE}{SI} = \dfrac{SO - OE}{SI}$

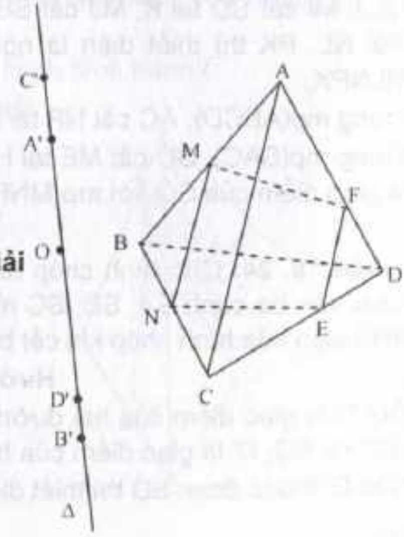
$\dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SF}{SI} = \dfrac{SO + OF}{SI}$

Vì O là trung điểm của AC và AE // CF, nên OE = OF.

Suy ra : $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{2SO}{SI}$, tương tự: $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{2SO}{SI}$

Vậy : $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

Bài toán 15. 21: Cho tứ diện ABCD và bốn điểm M, N, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng: Nếu bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng thì $\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{NB}{NC} \cdot \dfrac{EC}{ED} \cdot \dfrac{FD}{FA} = 1$



Hướng dẫn giải

Vẽ đường thẳng Δ bất kì cắt mặt phẳng (MNEF) tại một điểm O. Bốn mặt phẳng lần lượt qua A, B, C, D và đồng thời song song với mặt phẳng (MNEF) cắt đường thẳng Δ theo thứ tự tại A', B', C', D'. Theo định lý Ta–lét ta có:

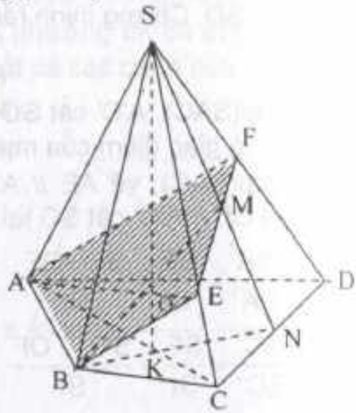
$\frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'}, \frac{NB}{NC} = \frac{OB'}{OC'}$

$\frac{EC}{ED} = \frac{OC'}{OD'}, \frac{FD}{FA} = \frac{OD'}{OA'}$

Vậy: $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA} = \frac{OA'}{OB'}.\frac{OB'}{OC'}.\frac{OC'}{OD'}.\frac{OD'}{OA'} = 1.$

Bài toán 15. 22: Cho hình chóp S.ABCD. Trong tam giác SCD, ta lấy một điểm M. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ABM).

Hướng dẫn giải



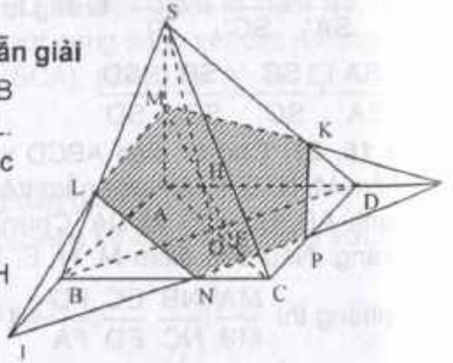
Gọi N là giao điểm của SM và CD, K là giao điểm của BN và AC. Giao tuyến của (SAC) và (SBN) là đường thẳng SK.

Trong mặt phẳng (SBN), BM cắt SK tại O. Ta suy ra O là giao điểm của BM với (SAC).

Trong mặt phẳng (SAC), AO cắt SC tại E, đây là giao điểm của (ABM) với cạnh SC, EM cắt SD tại F là giao điểm của (ABM) với cạnh SD. Thiết diện cần tìm là tứ giác ABEF.

Bài toán 15. 23: Cho một hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD. Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNP) và tìm giao điểm của SO và (MNP).

Hướng dẫn giải



Đường thẳng NP cắt AD tại I và cắt AB tại J, MI cắt SD tại K; MJ cắt SB tại L. Nối NL, PK thì thiết diện là ngũ giác MLNPK.

Trong mp(ABCD), AC cắt NP tại E.

Trong mp(SAC), SO cắt ME tại H thì H là giao điểm của SO với mp(MNP).

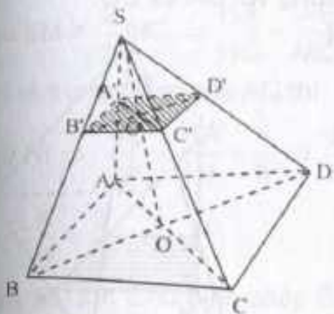
Bài toán 15. 24: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(A'B'C').

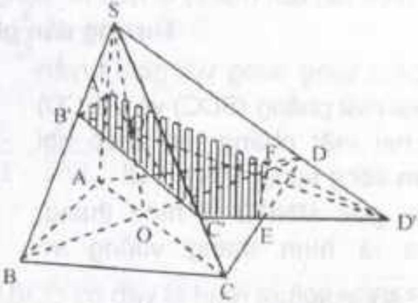
Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi O' là giao điểm của A'C' và SO; D' là giao điểm của hai đường thẳng B'O' và SD.

– Nếu D' thuộc đoạn SD thì thiết diện là tứ giác A'B'C'D'.

- Nếu D' nằm trên phần kéo dài của cạnh SD, gọi E là giao điểm của CD và C'D', F là giao điểm của AD và A'D'. Nối EC', EF thì thiết diện là ngũ giác A'B'C'EF.



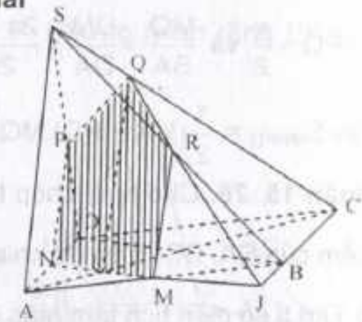


Bài toán 15. 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.

Hướng dẫn giải

Qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt AD tại N và cắt AC tại I. Qua M, I, N vẽ các đường thẳng song song với SA lần lượt cắt SB, SC, SD tại R, Q, P. Thiết diện là ngũ giác MNPQR.

Cách khác: Tìm giao điểm Q của mặt phẳng cắt với cạnh SC bằng cách nối giao điểm J của MN và BC với R và kéo dài cắt SC tại Q.



Bài toán 15. 26: Cho hình chóp S.ABCD, tứ giác đáy có các cạnh đối AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F. Gọi (α) là mặt phẳng cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C', D'.Tìm điều kiện của mp(α) để thiết diện A'B'C'D' là:

a) Hình thang? b) Hình bình hành?

Hướng dẫn giải

Ta có (SAB) $\cap$ (SCD) = SE,

(SAD) $\cap$ (SBC) = SF.

a) Thiết diện A'B'C'D' là hình thang

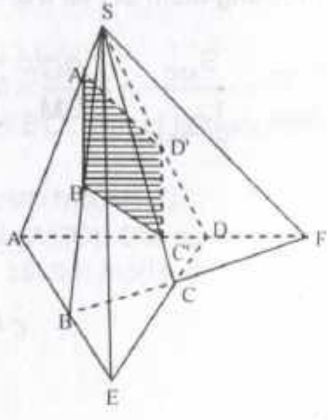
$\Leftrightarrow$ A'B' // C'D' hoặc A'D' // B'C'.

$\Leftrightarrow$ (α) song song SD hoặc SF.

b) Thiết diện A'B'C'D' là hình bình hành

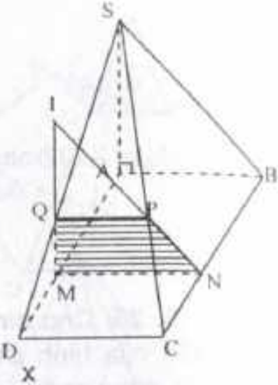
$\Leftrightarrow$ A'B' // C'D' và A'B' // B'C'

$\Leftrightarrow$ (α) song song với SE và SF.



Bài toán 15. 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a. Mặt bên SAB là một tam giác vuông cân tại đỉnh A. Trên cạnh AD lấy một điểm M và đặt AM = x (0 < x < 2a). Xác định và tính diện tích thiết diện cắt bởi mp(α) đi qua M, song song với SA và CD.

Hướng dẫn giải



Ta có mp(α) song song với giao tuyến DC của hai mặt phẳng (SDC) và (ABCD) nên cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến song song: MN // PQ.

Do đó tứ giác MNPQ là hình thang, hơn nữa là hình thang vuông vì: $\widehat{QMN} = \widehat{SAB} = 90^\circ$.

Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{IQ}{IM} = 1 - \frac{QM}{IM} = 1 - \frac{QM}{SA} = 1 - \frac{DM}{DA} = 1 - \frac{2a-x}{2a} = \frac{x}{2a}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{x}{2} \text{ và } \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{2a-x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{2a-x}{2}$$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{2})\frac{2a-x}{2} = \frac{4a^2 - x^2}{8}$.

Bài toán 15. 28: Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi K, N theo thứ tự là trung điểm của SA, BC. Điểm M chia đoạn SC theo tỉ số $-\frac{2}{3}$.

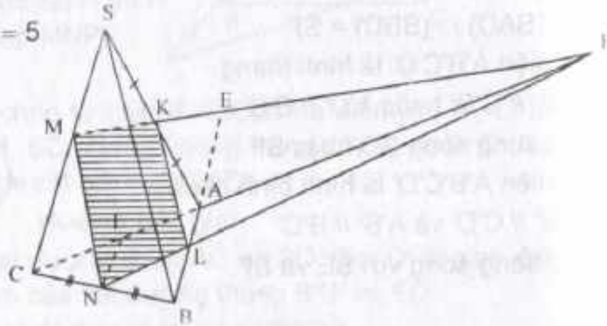
a) Tìm tỉ số diện tích tam giác ASC và AKM.

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua M, N, K. Giả sử mp(α) cắt AB tại L, tính tỉ số $\frac{LA}{LB}$.

Hướng dẫn giải

a) Vì K trung điểm SA và SC = $\frac{5}{2}$SM nên:

$$\frac{S_{ASC}}{S_{AKM}} = \frac{S_{ASC}}{\frac{1}{2}S_{ASM}} = 2.\frac{SC}{SM} = 5$$



b) Kéo dài MK cắt CA tại H. Trong mặt phẳng (ABC) nối N với H cắt AB tại L. Tứ giác MKLN là thiết diện cần dựng.

Trong mp(SAC) từ A vẽ AE // SC ($E \in MN$) thì:

$$AE = SM = \frac{2}{3}MC \Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{AE}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow HA = 2AC.$$

Gọi I là trung điểm của AC thì:

$$AL // NI \Rightarrow \frac{AL}{NI} = \frac{HA}{HI} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AL}{AB} = \frac{AL}{2NI} = \frac{2}{5}.$$

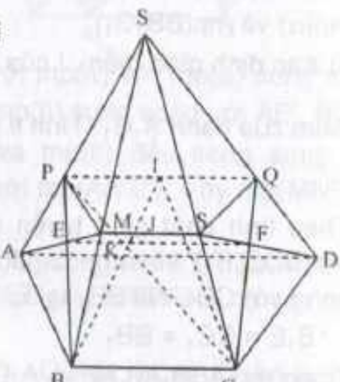
Vậy $\frac{LA}{LB} = \frac{2}{3}$.

Bài toán 15. 29: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD với đáy là AD = a và BC = b. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Giả sử AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F. Chứng minh rằng EF song song với MN và PQ. Tính EF.

Hướng dẫn giải



a) Vì AD // BC nên mp(ADJ) cắt (SBC) theo giao tuyến NK // AD, BC và mp(BCI) cắt (SAD) theo giao tuyến PQ // AD, BC.

Vậy MN // PQ.

b) Ta có: $(AMND) \cap (PBCQ) = EF$

và EF // AD, BC, MN, PQ

Ta có $CP \cap EF = K \Rightarrow EF = EK + KF$.

$$\text{Vì } PM // AB \Rightarrow \frac{PE}{EB} = \frac{PM}{AB} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vì } FK // BC \Rightarrow \frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{PE}{PE+EB} = \frac{2}{5} \Rightarrow EK = \frac{2}{5}b$$

Tương tự $KF = \frac{2}{5}a$. Vậy $EF = \frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b = \frac{2}{5}(a+b)$.

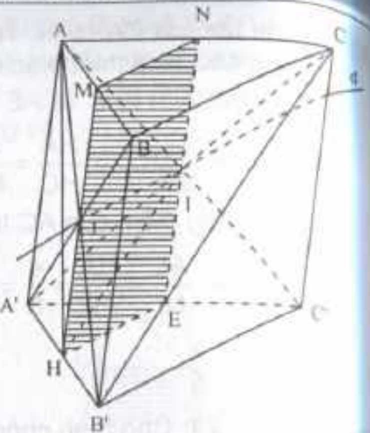
Bài toán 15. 30: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

a) Chứng minh rằng đường thẳng CB' song song với mp(AHC').

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mp(BB'C'C). Xác định thiết diện cắt bởi mp(H; d).

Hướng dẫn giải

a) Gọi I là tâm của hình bình hành AA'C'C.



Xét tam giác A'B'C thì HI là một đường trung bình của nó, nên CB' // HI. Mặt khác HI nằm trong mặt phẳng (AHC') nên CB' // mp(AHC').

b) Gọi J là tâm của hình bình hành AA'B'B. Ta có I, J là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Vậy giao tuyến d của chúng là đường thẳng IJ. Vì d // B'C' nên d // (BB'C'C).

Đường thẳng HJ cắt AB tại M.

Ta có AA' // HM, suy ra AA' // mp(H; d) nên mp(AA'C'C) cắt mp(H; d) theo giao tuyến qua I và song song với AA'.

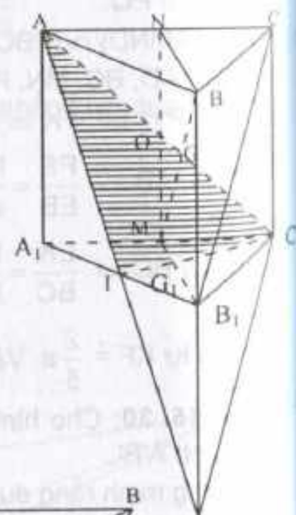
Giao tuyến này cắt AC và A'C'lần lượt tại N và E. Vậy thiết diện là hình bình hành MNEH.

Bài toán 15. 31: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$.

a) Dựng thiết diện của hình lăng trụ với mp(α) đi qua AC_1 và song song với CB_1. Gọi G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. Xác định giao tuyến của mp(α) và mp(BB_1G_1).

b) Xác định giao điểm J của đường thẳng BM với mp(α) trong đó M là trung điểm của cạnh A_1C_1. Tính tỉ số $\dfrac{JG_1}{JO}$

Hướng dẫn giải



a) Theo tính chất giao tuyến song song, trong mp(BCC_1B_1) vẽ qua C_1 đường thẳng song song với CB_1, cắt BB_1 tại E, thì

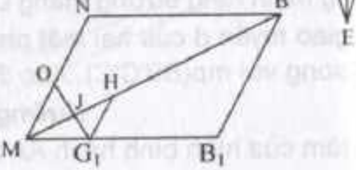
$B_1E = CC_1 = BB_1$.

Trong mp(ABB_1A_1) $AE \cap A_1B_1 = I$ thì I là trung điểm của A_1B_1. Tam giác AC_1I là thiết diện cần dựng.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của A_1C_1, AC. Đường thẳng MN cắt AC_1 tại O.

Ta có O và G_1 thuộc hai mặt phẳng (α) và (BB_1G_1) nên đường thẳng OG_1 là giao tuyến của chúng;

b) Giao điểm J của đường thẳng BM với mp(α) chính là giao điểm J của BM và OG_1.



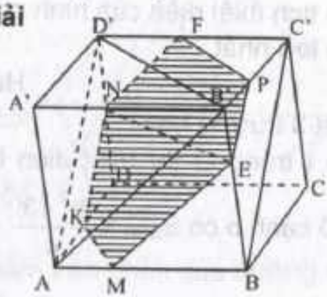
Vẽ G_1H // B_1B thì $\frac{JG_1}{JO} = \frac{G_1H}{OM} = \frac{\frac{1}{3}BB_1}{\frac{1}{2}MN} = \frac{2}{3}$.

Bài toán 15. 32: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên ba cạnh AB, DD', C'B' lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

a) Chứng minh rằng mp(MNP) và mp(AB'D') song song với nhau.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNP).

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{DD'} = \frac{B'P}{B'C'}$

$\Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MB}{ND} = \frac{BA}{DD'}$

và $\frac{AM}{B'P} = \frac{MB}{PC'} = \frac{BA}{C'B'}$

Theo định lí Ta–lét đảo, thì MN song song với mp(α) với mp(α) song song với AD', BD và MP song song với mp(β) với mp(β) song song với AB', BC. Vì BD // B'D', BC' // AD' nên hai mp(α) và mp(β) đều song song với mp(AB'D) do đó MN và MP đều song song với mp(AB'D'). Vậy mp(MNP) // mp(AB'D').

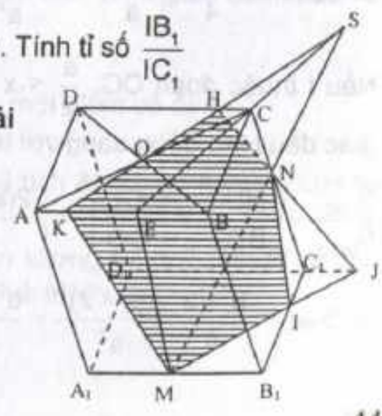
b) Từ M vẽ ME song song với AB', từ P vẽ PF song song với B'D'. Từ N vẽ NK song song với AD' cắt AD tại K. Thiết diện là lục giác MEPFNK có các cạnh đối song song.

Bài toán 15. 33: Cho hình hộp ABCD.$A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N và O lần lượt là trung điểm của A_1B_1, CC_1 và tâm của đáy ABCD.

a) Xác định giao điểm S của đường thẳng MN và mp(ABCD); dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(MNO);

b) Gọi I là giao điểm của B_1C_1 và mp(MNO). Tính tỉ số $\frac{IB_1}{IC_1}$

Hướng dẫn giải



a) Gọi E là trung điểm của AB, thì ME // CN.

Trong mp(MNCE): S = MN ∩ CE do đó S cũng là giao của MN với mp(ABCD).

SO cắt CD tại H và AB tại K. HN cắt C_1D_1 tại J, JM cắt B_1C_1 tại I. Ngũ giác HKMIN là thiết diện cần dựng.

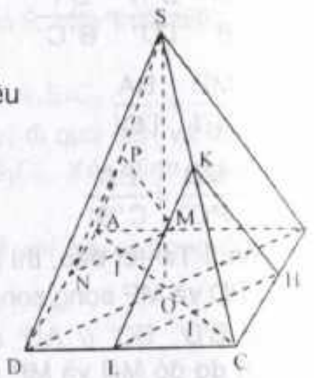
b) NC // ME, $NC = \frac{1}{2}ME$

$\Rightarrow AK = CH = \frac{1}{2}KE \Rightarrow CH = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{6}AB = C_1J$.

Vậy $\frac{IB_1}{IC_1} = \frac{MB_1}{C_1J} = \frac{1}{3}$.

Bài toán 15. 34: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O có AC = a, BD = b. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và qua điểm I tên đoạn AC. Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Ta xét 3 trường hợp

– Nếu I trùng O thì thiết diện là tam giác đều SBD cạnh b có $S_{SBD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

– Nếu I thuộc đoạn OA: $0 < x < \frac{a}{2}$.

Vì (α) // (SBD) nên theo tính chất giao tuyến song song thì (ABCD) cắt theo giao tuyến MN qua I, song song với BD.

Tương tự (α) cắt (SAB) theo giao tuyến MP song song với SB và cắt (SAD) theo giao tuyến NP song song với SD.

Thiết diện là tam giác đều MNP đồng dạng với tam giác đều SBD. Ta có:

$\frac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\frac{MN}{BD}\right)^2$. Do MN // BD $\Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a}$

$\Rightarrow S_{MNP} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{2x}{a}\right)^2 = \frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$

– Nếu I thuộc đoạn OC: $\frac{a}{2} < x < a$. Tương tự như trên thì thiết diện là tam giác đều HKL đồng dạng với tam giác đều SBD.

$\frac{S_{HKL}}{S_{BCD}} = \left(\frac{HL}{BD}\right)^2 = \left(\frac{CI}{CO}\right)^2 = \left(\frac{2(a-x)}{a}\right)^2$

$\Rightarrow S_{HKL} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.\frac{4(a-x)^2}{a^2} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$

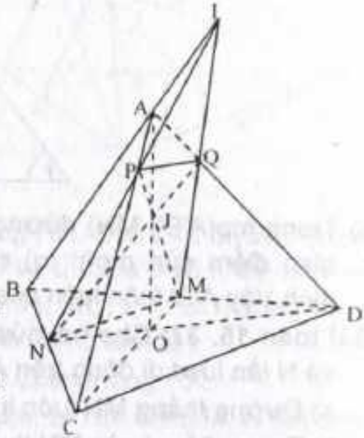
So sánh 3 kết quả trên thì diện tích thiết diện lớn nhất khi $x = \frac{a}{2}$.

Bài toán 15. 35: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD; P là một điểm thay đổi trên đoạn thẳng AD.

a) Xác định giao điểm Q của mp(MNP) và cạnh AC. Chứng minh thiết diện MNPQ là hình thang khi P khác A và D.

b) Tìm quỹ tích giao điểm I của QM và PN.

c) Tìm quỹ tích giao điểm J của QN và PM.



Hướng dẫn giải

a) Vẽ đường thẳng qua P song song với CD cắt AC tại Q thì Q là giao điểm của AC và mp(MNP). Ta có PQ // MN nên thiết diện MNPQ là hình thang.

b) Giả sử I là giao điểm của QM và PN.Ta có: QM$\subset$mp(ABC) cố định.

PN$\subset$mp(ABD) cố định nên giao điểm I thuộc giao tuyến AB cố định.

Vì P thay đổi trên đoạn thẳng AD nên I chỉ nằm trên phần của đường thẳng AB trừ đi các điểm trong của đoạn AB.

Đảo lại, lấy một điểm I bất kì thuộc đường thẳng AB nhưng không nằm giữa A và B. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của IN với AD, của IM với AC. Khi đó mp(MNP) cắt AC tại Q và giao điểm của QM và PN là I.Vậy quỹ tích giao điểm I của QM và PN là phần đường thẳng AB trừ đi các điểm trong của đoạn AB.

c) Ta có QN $\subset$ mp(NAC) cố định PM $\subset$ mp(MAD) cố định nên giao điểm J thuộc giao tuyến AO cố định với O = CN $\cap$ DM. Từ đó thì quỹ tích giao điểm I của QN và PM là đoạn thẳng AO.

Bài toán 15. 36: Trong mp(P) cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại I. Ngoài mp(P) cho hai điểm M, N sao cho đường thẳng MN cắt (P) tại O và O không nằm trên a và b. Một đường thẳng c thay đổi đi qua O cắt a, b lần lượt tại A và B. Gọi A' là giao điểm của AN và BM, B' là giao điểm của AM và BN.

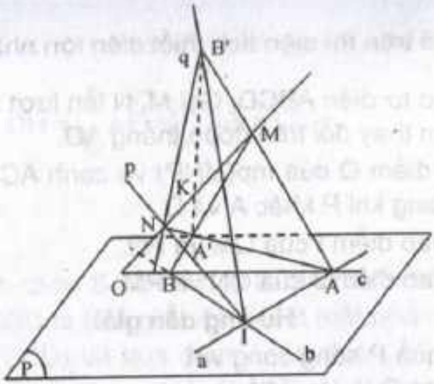
a) Tìm quỹ tích A' và B'.

b) Chứng minh đường thẳng A'B' luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Ta có A' $\in$ mp(M; b) và A' $\in$ mp(N; a) nên quỹ tích A' là giao tuyến p của hai mặt phẳng cố định : mp(M; b) và mp(N; a).

Ta có: B' $\in$ mp(M; a) và B' $\in$ mp(N; b) nên tương tự quỹ tích B' là giao tuyến q của hai mặt phẳng cố định: mp(M; a) và mp(N; b).



b) Trong mp(A'B'; MN) đường thẳng A'B' cắt MN tại K. Điểm K cũng chính là giao điểm của mp(p; q) cố định và đường thẳng MN cố định nên K cố định. Vậy A'B' luôn luôn qua K cố định.

Bài toán 15. 37: Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho AM = BN. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

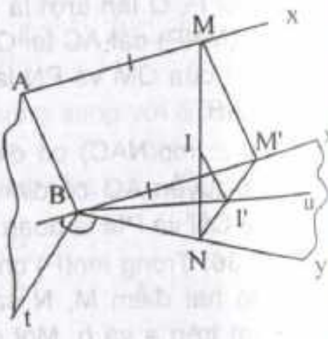
b) Trung điểm I của MN thuộc một mặt phẳng cố định.

Hướng dẫn giải

a) Dựng Bx' // Ax. Trong mặt phẳng (Ax, Bx'), đường thẳng qua M song song với AB cắt Bx' tại M'.

Ta có: BM' = BN = AM.

Vậy BNM' là tam giác cân tại B nên M'N song song với phân giác ngoài Bt của góc x'By.



Ta có: $\begin{cases} MM' // AB \\ M'N // Bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' // (AB, Bt) \\ M'N // (AB, Bt) \end{cases}$

Nên hai mặt phẳng (MM'N) và (AB, Bt) song song với nhau.

Từ đó suy ra MN luôn luôn song song với mặt phẳng (AB, Bt) cố định.

b) Gọi I' trung điểm NM' thì BI' vuông góc NM' mà tam giác BNM' cân tại B nên I' thuộc phân giác trong Bu cố định.

Vì II' // MM' nên II' // AB do đó I thuộc mp(A, Bu) cố định.

Bài toán 15. 38 Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (P) di động luôn song song với 2 đường thẳng CD lần lượt cắt các cạnh AC, AD, BD, BC tại M, N, E, F. Tìm tập hợp giao điểm 2 chéo I của tứ giác MNEF.

Hướng dẫn giải

Ta có AB // (P), AB $\subset$ (ABC) $\Rightarrow$ (ABC) $\cap$ (P) = MF // AB

và AB // (P), AB $\subset$ (ABD) $\Rightarrow$ (ABD) $\cap$ (P) = NE // AB.

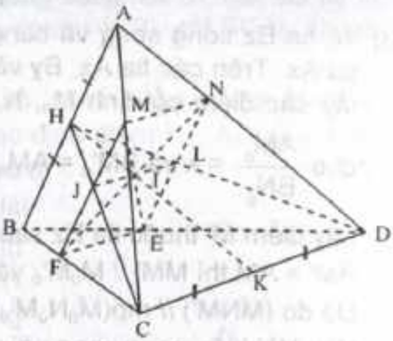
Do đó MF // NE // AB.

Tương tự MN // EF // CD nên tứ giác MNEF là hình bình hành.

Gọi H và K lần lượt là trung điểm của B và CD.

Gọi J và L lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng CH và MF, DH và NE thì ba điểm J, I, L thẳng hàng trên giao tuyến của 2 mp(P) và (HCD).

Ta có H, I, K thẳng hàng. Vậy khi (P) di động thì tâm I của hình bình hành MNEF chạy trên đoạn thẳng HK.



Ngược lại, lấy một điểm I bất kì trên đoạn thẳng HK. Qua I kẻ đường thẳng song song với CD lần lượt cắt CH và DH tại J và L. Qua J và L lần lượt vẽ hai đường thẳng MF ($M \in AC$, $F \in BC$), NE ($N \in AD$, $E \in BD$) cùng song song với AB thì tứ giác MNEF là hình bình hành và có tâm là I.

Vậy tập hợp tâm I của hình bình hành MNEF là đoạn thẳng HK.

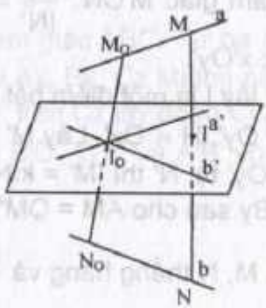
Bài toán 15. 39: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên a và b. Tìm tập hợp những điểm I chia đoạn thẳng MN theo một tỉ số k cho trước, $k \neq 0$.

Hướng dẫn giải

Lấy hai điểm cố định M_o, N_o lần lượt nằm trên a, b và điểm I_o chia M_oN_o theo tỉ số k cho trước thì I_o cố định.

Ta có $\frac{IM}{IN} = k = \frac{I_oM_o}{I_oN_o} \Rightarrow \frac{IM}{I_oM_o} = \frac{IN}{I_oN} = \frac{MN}{M_oN_o}$

Áp dụng định lý Ta–lét đảo thì ba đoạn thẳng I_oI, M_oM, N_oN nằm trên ba mặt phẳng song song. Do đó I nằm trên mp(R) đi qua I_o và song song với a và b, mặt phẳng này được xác định bởi 2 đường thẳng qua M_o là a' // a, b' // b.



Đảo lại, lấy điểm $I \in mp(R)$, hai mp(I; a) và (I; b) cắt nhau theo giao tuyến, giao tuyến này cắt a và b tại M, N.

Theo định lý Ta–lét thì: $\frac{IM}{IN} = \frac{I_oM_o}{I_oN_o} = k$.

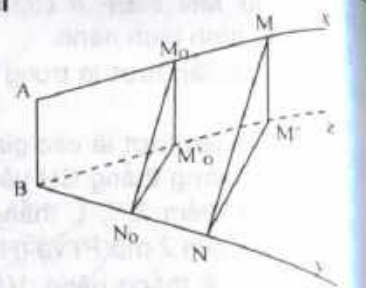
Vậy quỹ tích các điểm I là mặt phẳng (R).

Bài toán 15. 40: Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho AM = kBN (k > 0 cho trước).

a) Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho IM = kIN.

Hướng dẫn giải



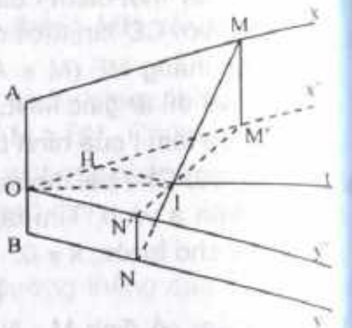
a) Vẽ tia Bz song song và cùng hướng với tia Ax. Trên các tia Ax, By và Bz lần lượt lấy các điểm cố định M_o, N_o và M'_o sao cho $\frac{AM_o}{BN_o} = k$ và $BM'_o = AM_o$.

Lấy điểm M' thuộc tia Bz sao cho $BM' = AM$ thì $MM' // M_oM'_o$ và $NM' // N_oM'_o$.

Do đó $(MNM') // mp(M_oN_oM'_o)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(M_oN_oM'_o)$.

Cách khác: Dùng định lý Ta–lét đảo.



b) Gọi O là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\frac{OA}{OB} = k$ nên O cố định. Từ O ta vẽ hai tia Ox' và Oy' sao cho Ox' // Ax, Oy' // By. Vẽ MM' // AB, $M' \in Ox'$ và NN' // AB, $N' \in Oy'$.

Ta có $\frac{IM}{IN} = \frac{M'M}{N'N} = \frac{OA}{OB} = k \Rightarrow MN \cap M'N' = I$

Trong tam giác M'ON: $\frac{IM'}{IN'} = k = \frac{OM'}{ON'}$, do đó I nằm trên tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

Đảo lại, lấy I là một điểm bất kì thuộc tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

Vẽ IH // Oy', $H \in Ox'$. Lấy $M' \in Hx'$ sao cho $HM' = kHO$.

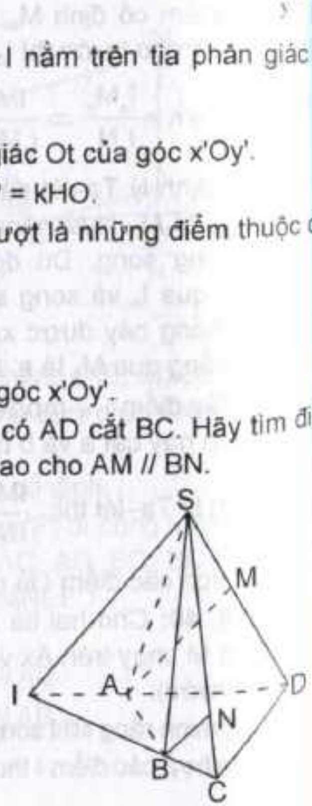
M'I cắt Oy' tại N' thì $IM' = kIN'$. Gọi M và N lần lượt là những điểm thuộc các tia Ax, By sao cho $AM = OM'$; $BN = ON'$.

Ta có I, M, N thẳng hàng và $\frac{IM}{IN} = k$.

Vậy tập hợp các điểm I là tia phân giác Ot của góc x'Oy'.

Bài toán 15. 41: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có AD cắt BC. Hãy tìm điểm M nằm trên cạnh SD và điểm N trên cạnh SC sao cho AM // BN.

Hướng dẫn giải



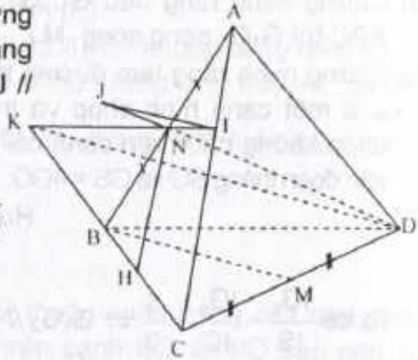
Gọi I là giao điểm của BC và AD, khi đó $(SAD) \cap (SBC) = SI$.

Giả sử có $M \in SD$, $N \in SC$ sao cho AM // BN thì khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC(cắt nhau theo giao tuyến SI phải song song với AM và BN. Từ đó ta suy ra cách xác định điểm M và N như sau:

Từ A trong mp(SAD) ta vẽ đường thẳng song song với SI, cắt SD tại M; từ B trong mp(SBC) ta vẽ đường thẳng song song với SI, cắt SC tại N. Vậy M và N là hai điểm cần tìm.

Bài toán 15. 42: Cho tứ diện đều ABCD có các cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và AB. Hãy xác định điểm $I \in AC$, $J \in DN$ sao cho IJ // BM. Tính độ dài đoạn thẳng IJ theo a.

hướng dẫn giải



Trong mp(BCD), từ D vẽ đường thẳng song song với BM cắt CB tại K. Nối K và N cắt AC tại I. Trong mp(IKD), từ I vẽ đường thẳng song song với DK cắt đường thẳng DN tại J. Khi đó theo cách dựng ta có IJ // BM.

Do BM là đường trung bình của tam giác CKD nên: $KD = 2BM = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Gọi H là trung điểm của BC, khi đó:

$NH \,//\, AC \Rightarrow \dfrac{NK}{NI} = \dfrac{KH}{HC} = \dfrac{3HC}{HC} = 3$

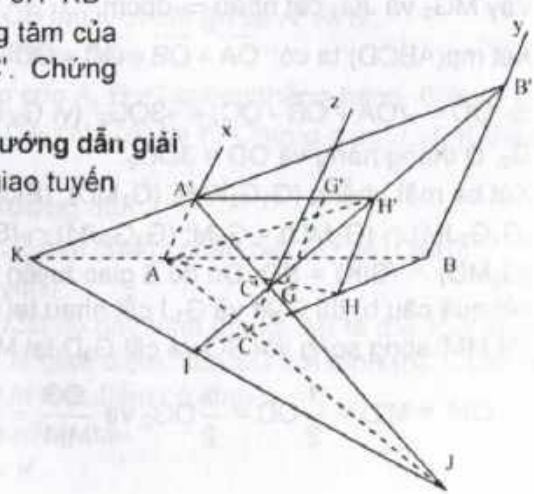
$\Rightarrow NK = 3NI \Rightarrow KD = 3IJ$. Vậy $IJ = \dfrac{1}{3}KD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 15. 43: Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC. Từ ba đỉnh của tam giác này, vẽ các tia song song cùng chiều Ax, By, Cz không nằm trong (α). Trên Ax lấy đoạn AA', trên By lấy đoạn BB' trên Cz lấy đoạn CC'.

a) Gọi I, J và K lần lượt là các giao điểm B'C', C'A' và A'B' với (α). Chứng minh I, J, K thẳng hàng và $\dfrac{IB}{IC}.\dfrac{JC}{JA}.\dfrac{KA}{KB} = 1$.

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh GG' // AA'.

Hướng dẫn giải



a) Ta có I, J, K thẳng hàng trên giao tuyến của 2 mp(ABC) và (A'B'C')

Vì CC' // BB'

$\Rightarrow \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{BB'}{CC'}$

Tương tự có :

$\dfrac{JC}{JA} = \dfrac{CC'}{AA'}$ và $\dfrac{KA}{KB} = \dfrac{AA'}{BB'}$

Do đó: $\frac{IB}{IC}.\frac{JC}{JA}.\frac{KA}{KB}=1$

b) Gọi H và H' lần lượt là trung điểm các cạnh BC và B'C' thì HH' // BB', do đó: HH' // AA'

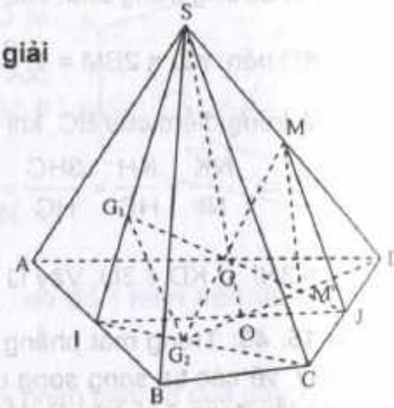
Ta có: $\frac{AG}{AH}=\frac{2}{3}=\frac{A'G'}{A'H'} \Rightarrow GG' // AA'$.

Bài toán 15. 44: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M, I, J, O lần lượt là trung điểm của SD, AB, CD, IJ.

a) Chứng minh rằng nếu G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC thì G_1G_1 song song MJ.

b) Chứng minh rằng tám đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh hình chóp và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh hình chóp không nằm trên cạnh nói trên đồng quy tại một điểm G và điểm G nằm trên đoạn thẳng SO và GS = 4GO.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\frac{IG_1}{IS}=\frac{IG_2}{IC}=\frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 // SC$.

Mặt khác MJ là đường trung bình của tam giác DSC nên MJ // SC.

Từ đó suy ra G_1G_2 // MJ.

b) Ta có tám đường thẳng đã cho không đồng phẳng; ta chỉ cần chứng minh chúng cắt nhau từng đôi thì đồng quy.

Lấy hai đường thẳng bất kì trong tám đường thẳng trên, chẳng hạn như hai đường thẳng MG_2 và JG_1. Theo câu a) thì G_1G_2 // MJ, do đó MG_2 và JG_1 nằm trong mp(G_1G_2JM).

Vậy MG_2 và JG_1 cắt nhau $\Rightarrow$ đpcm.

Xét mp(ABCD) ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-3\overrightarrow{OG_2}$ (vì G_2 là trọng tâm tam giác ABC) $\Rightarrow$ O, G_2, D thẳng hàng và OD = $3OG_2$.

Xét ba mặt phẳng (G_1G_2KM), (G_2MD), (SIJ), ta có

(G_1G_2JM) $\cap$ (G_2MD) = G_2M; (G_1G_2JM) $\cap$ (SIJ) = G_1J;

(G_2MD) $\cap$ (SIK) = SO. Do đó 3 giao tuyến G_2M, G_1J và SO đồng quy. Theo kết quả câu b) thì G_2M và G_1J cắt nhau tại G. Vậy điểm G nằm trên SO.

Vẽ MM' song song với SO và cắt G_2D tại M', ta có:

$$OM' = M'D = \frac{1}{2}OD = \frac{3}{2}OG_2 \text{ và } \frac{OG}{MM'}=\frac{OG_2}{G_2M'}=\frac{OG_2}{\frac{5}{2}OG_2}=\frac{2}{5}$$

$\Rightarrow OG = \frac{2}{5}MM' = \frac{2}{5}SO \Rightarrow GS = 4GO$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 15. 1: Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C không nằm trên (P). Giả sử đoạn thẳng AB và đoạn thẳng BC đều cắt mp(P). Chứng minh rằng đoạn thẳng AC không cắt mp (P).

Hướng dẫn

Dựa vào quan hệ cùng phía, khác phía đối với (P).

Bài tập 15. 2: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N là hai điểm di động tương ứng trên AD và BE sao cho: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Hướng dẫn

Dùng định lý Talet đảo.

Bài tập 15. 3: Cho tứ diện ABCD và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

b) Lấy N là điểm thuộc miền trong của tam giác ABD sao cho JN cắt đoạn AB tại H. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNJ) và (ABC).

Hướng dẫn

a) 2 đường thẳng CD và IJ kéo dài cắt nhau tại M'. Kết quả MM'.

b) Dùng 2 đường thẳng kéo dài cắt nhau trong một mặt phẳng.

Bài tập 15. 4: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến d. Trong (α) lấy hai điểm A và B sao cho AB cắt d tại I. Điểm O là một điểm nằm ngoài (α) và (β) sao cho OA và OB lần lượt cắt (β) tại A' và B'.

a) Chứng minh ba điểm I, A', B' thẳng hàng.

b) Trong (α) lấy các điểm C sao cho A, B, C không thẳng hàng. Giả sử OC cắt (β) tại C', BC cắt B'C' tại J, CA cắt C'A' tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Chứng minh ba điểm cùng thuộc 2 mặt phẳng phân biệt (α) và (OAB).

b) Ba điểm thẳng hàng trên giao tuyến.

Bài tập 15. 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình thang, AB là đáy lớn. Điểm M lưu động tên cạnh SA. Gọi N là giao điểm của SD với mp(MBC). Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

MN đi qua K cố định, $AD \cap BC = K$.

Bài tập 15. 6: Cho tứ diện ABCD. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng: bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Hướng dẫn

Dùng định lý về 3 giao tuyến đôi một cắt nhau.

Xét đường thẳng PQ, RS song song và cắt nhau.

Bài tập 15. 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Trong mặt phẳng (ABCD) vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC. Tìm thiết diện cắt bởi mặt phẳng (d; C).

Hướng dẫn

Xét đường thẳng d đi qua điểm C và không qua C.

Bài tập 15. 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD; P và Q là trung điểm của AB và ON.

a) Chứng minh (OMN) song song với (SBC).

b) Chứng minh PQ song song với (SBC).

Hướng dẫn

a) Chứng minh MN song song BC và OM song song SC

b) PQ nằm trong mp(OMN).

Bài tập 15. 9: Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của A'B'.

a) Chứng minh CB' song song với mặt phẳng (AHC'). Tìm giao điểm của AC' với (BCH).

b) Mặt phẳng (α) qua trung điểm M của CC' và song song với AH và CB'. Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia cạnh tương ứng của lăng trụ.

Hướng dẫn

a) Gọi I là tâm hình bình hành và chứng minh CB' song song IH.

b) Kết quả các tỉ số 1, 1, 3, $\frac{1}{3}$, 1.

Bài tập 15. 10: Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh AB, M là một điểm di động trên cạnh CD, P là trung điểm của đoạn BM. Chứng minh rằng IM và AP mỗi đường nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên cạnh CD. Tìm tập hợp các giao điểm G của IM và AP.

Hướng dẫn

G thuộc 2 mặt phẳng cố định (ICD), (AEF) với E, F lần lượt là trung điểm của BC và BD, G thuộc đường thẳng HK là giao tuyến của mặt phẳng cố định.

Bài tập 15. 11: Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai cạnh AB và CD. Tìm tập hợp các trung điểm E của MN.

Hướng dẫn

Gọi I là trung điểm của AD rồi dựng các đường trung bình của tam giác ABD và ACD.

Kết quả tập hợp các điểm E là hình bình hành.

Bài tập 15. 12: Cho hình chóp S.ABC. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC; M là điểm nằm giữa S và C.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua K, song song với AB và SC thì đi qua điểm N.

b) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(KMN). KN chia thiết diện thành hai phần có tỉ diện tích?

Hướng dẫn

a) Gọi I là trung điểm của SB thì KI song song với AB và IN song song với SC

b) Kết quả hai phần có diện tích bằng nhau.

Chuyên đề 16: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các qui tắc:

- Cộng , trừ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{NM}$
- Trung điểm I của AB: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- Trọng tâm G của tam giác ABC: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- Trọng tâm G của tứ diện ABCD: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
- Hình bình hành ABCD: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$
- Hình hộp ABCD.A'B'C'D': $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

Tâm tỉ cự: Tâm tỉ cự của hệ điểm $A_1, A_2, ..., A_k$ kèm k hệ số $m_1, m_2, ..., m_k$ với $m_1+m_2+...+m_k \neq 0$ là điểm I duy nhất thoả

$m_1.\vec{IA_1}+m_2.\vec{IA_2}+...+m_k.\vec{IA_k}=\vec{0}$.

Tích vô hướng

Tích vô hướng của 2 vectơ : $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$

$AB \perp CD$ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Tam giác ABC thì có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$

Tứ diện ABCD thì có $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$.

Cùng phương và đồng phẳng:

- Hai vectơ cùng phương a, b khi $\vec{b}=k.\vec{a}$
- Cơ sở trong mặt phẳng: cho 2 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương thì mọi vectơ $\vec{c}$ trong mặt phẳng đều phân tích một cách duy nhất theo $\vec{a}$, $\vec{b}$: $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$
- Ba vectơ đồng phẳng khi chúng nằm trên 3 đường thẳng cùng song song với 1 mặt phẳng.
- Điều kiện 3 vectơ đồng phẳng : Nếu $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$ thì đồng phẳng.
- Cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Nếu $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ thì m = n = p = 0: ba vectơ không đồng phẳng, còn nếu một trong ba số m, n, p khác không thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Cơ sở của không gian: Cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì mọi vectơ $\vec{u}$ của không gian đều phân tích một cách duy nhất theo 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{u} = x.\vec{a} + y.\vec{b} + z.\vec{c}$.

Chú ý:

1) M chia AB theo tỉ số $k \neq 1$ thì mọi O bất kì: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

2) Để tính MN thì ta biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ rồi bình phương vô hướng.

3) Để chứng minh A, B, C thẳng hàng thì ta biểu diễn : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$ hoặc $\overrightarrow{OC} = m.\overrightarrow{OA} + n.\overrightarrow{OB}$, $m + n = 1$.

4) Để chứng minh 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng thì ta biểu diễn $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, hoặc $\overrightarrow{OD} = k.\overrightarrow{OA} + l.\overrightarrow{OB} + m.\overrightarrow{OC}$, $k + l + m = 1$.

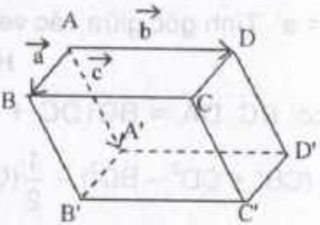
5) Để chứng minh AB // CD thì ta $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và A không thuộc CD.

6) Để chứng minh AB // (IJK) thì ta biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}$.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 16.1: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Đặt: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{CA'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{A'D}$.

Hướng dẫn giải



$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{b} - \vec{c}$.

Bài toán 16.2: Cho hình tứ diện ABCD, gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các mặt BCD, CDA, DAB, ABC. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau đây theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

Hướng dẫn giải

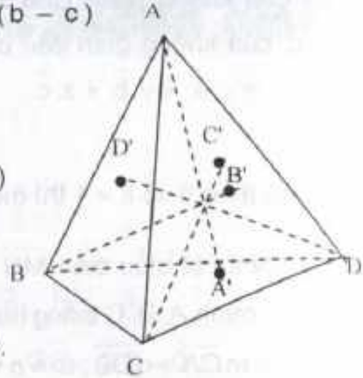
Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD, khi đó:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

nên $\overrightarrow{DD'} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BB'} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA'} = \dfrac{3}{4}(\vec{a} - \vec{b})$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BB'} = \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{c})$



$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DD'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$

$= \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{c}) = \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DD'}$

$= \frac{3}{4}(-\vec{a} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = -\frac{3}{4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Bài toán 16.3: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = b và đôi một hợp với nhau góc 30^o. Tính khoảng cách từ S đến trọng tâm G của đáy.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$ nên:

$9SG^2 = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2$

$= SA^2 + SB^2 + SC^2 + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$= 3b^2 + 3.2b^2.\cos 30^o = 3b^2(1 + \sqrt{3})$. Vậy $SG = \frac{b}{3}\sqrt{3(1+\sqrt{3})}$.

Bài toán 16.4: Cho tứ diện ABCD có AB = c, CD = c', AC = b, BD = b', BC = a, AD = a'. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{2}(CB^2 + CD^2 - BD^2) - \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2)$

$= \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2)$

Do đó $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}$.

Bài toán 16.5: Cho hình chóp tam giác S.ABC có các cạnh SA = SB = SC = AB = AC = a và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2}$

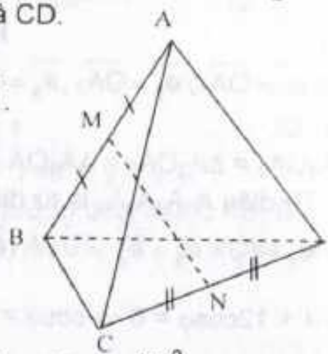
Ta có tam giác SAB, SAC đều là và ABC, SBC là tam giác vuông nên: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = a.a.\cos120^\circ = -\frac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$, do đó: $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$ bằng 120°.

Bài toán 16.6: Cho hình tứ diện đều ABCD có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính độ dài MN.

b) Tính góc giữa $\overrightarrow{MN}$ với các vectơ $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$.



Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$$

nên $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c}) = \frac{2m^2}{4}$.

Vậy $MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} - \vec{c}^2 + \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} - m^2 + \frac{m^2}{2}\right) = 0$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng 90°.

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c})$

$$= \frac{1}{2}(-\vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{c} + \vec{c}^2 - \vec{b}.\vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} + m^2 + \frac{m^2}{2} + m^2 - \frac{m^2}{2}\right) = \frac{1}{2}m^2.$$

Do đó: $\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}}{MN.BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 45°.

Bài toán 16.7: Cho 4 tia Ox, Oy, Oz, Ot trong không gian, đôi một hợp nhau 1 góc bằng φ.

a) Tính φ

b) Một tia Ou khác Ox, Oy, Oz, Ot hợp với các tia đó các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Tính $p=\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i$, $q=\sum_{i=1}^{4}\cos^2\alpha_i$.

Hướng dẫn giải:

a) Gọi $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{e_4}=\overrightarrow{OA_4}$ là các vectơ đơn vị của Ox, Oy, Oz, Ot.

$\Delta A_1OA_2=\Delta A_2OA_3=\Delta A_4OA_1$ (cgc)

$\Rightarrow$ Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều có trọng tâm là O nên:

$$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_4}=\vec{0}\Rightarrow(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_4})^2=0$$

$$\Rightarrow 4+12\cos\varphi=0\Rightarrow\cos\varphi=-\frac{1}{3}$$

b) Gọi $\vec{e}$ là vectơ đơn vị của Ou, ta có

$$p=\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i=\sum_{i=1}^{4}\vec{e}\,\overrightarrow{e_i}=\vec{e}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{e_i}=0,\quad q=\sum_{i=1}^{4}\cos^2\alpha_1=\sum_{i=1}^{4}\left(\vec{e}\,\overrightarrow{e_i}\right)^2$$

mà $\qquad \vec{e}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}+x_4\overrightarrow{e_4}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{e_i}\vec{e}=x_i+\sum_{j\neq i}x_j\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}=x_i+\sum_{j\neq i}x_j(-\frac{1}{3})\qquad(\forall_i=\overline{1,4})$$

$$=x_i-\frac{1}{3}\sum_{j\neq i}x_j=\frac{4}{3}x_i-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4}x_j$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{e_i}\vec{e})\overrightarrow{e_i}=\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4}x_i\overrightarrow{e_i}-\frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{4}x_j\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{e_i}\right)=\frac{4}{3}\vec{e}$$

$$\Rightarrow\left[\sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{e_i}\vec{e})\overrightarrow{e_i}\right]\vec{e}=\frac{4}{3}\vec{e}^2=\frac{4}{3}\Rightarrow\sum_{i=1}^{4}(\overrightarrow{e_i}\vec{e})(\overrightarrow{e_i}\vec{e})=\frac{4}{3}\Rightarrow q=\frac{4}{3}.$$

Bài toán 16.8: Chứng minh:

a) Ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n}\neq\vec{0}$ thì đồng phẳng.

b) Điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có ba số x, y, z mà $x+y+z=1$ sao cho $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O.

Hướng dẫn giải

a) Gọi ba vectơ cùng vuông góc với $\vec{n}$ là $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ thì $\vec{a}.\vec{n}=\vec{b}.\vec{n}=\vec{c}.\vec{n}=0$. Giả sử $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng thì tồn tại 3 số

x, y, z sao cho $\vec{n}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

$\Rightarrow \vec{n}^2 = x.\vec{a}.\vec{n} + y.\vec{b}.\vec{n} + z.\vec{c}.\vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{n} = \vec{0}$: Vô lý

b) Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương nên điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi có: $\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = l(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ với mọi điểm O.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - l - m)\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$.

Đặt $1 - l - m = x$, $l = y$, $m = z$ thì:

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, với $x + y + z = 1$

Kết quả M thuộc tam giác ABC khi $x + y + z = 1$ và $x, y, z \geq 0$.

Bài toán 16.9: Cho tứ diện ABCD. A', B', C', D' tương ứng thuộc AB, BC, CD, DA. Chứng minh điều kiện cần và đủ để A', B', C', D' đồng phẳng $\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}}.\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'D}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}} = 1$

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ cơ sở $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$

Các điểm A', B', C', D' chia AB, BC, CD, DA theo tỉ k_1, k_2, k_3, k_4 thì:

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AA} - k_1\overrightarrow{AB}}{1-k_1} = \frac{-k_1}{1-k_1}\vec{b},\ \overrightarrow{AB'} = \frac{\overrightarrow{AB} - k_2\overrightarrow{AC}}{1-k_2} = \frac{\vec{b} - k_2\vec{c}}{1-k_2}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{\overrightarrow{AC} - k_3\overrightarrow{AD}}{1-k_3} = \frac{\vec{c} - k_3\vec{d}}{1-k_3},\ \overrightarrow{AD'} = \frac{\overrightarrow{AD} - k_4\overrightarrow{AA}}{1-k_{41}} = \frac{\vec{d}}{1-k_4}$$

Ta có A', B', C', D' đồng phẳng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = m\overrightarrow{AB'} + n\overrightarrow{AC'} + p\overrightarrow{AD'}$ $(m + n + p = 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{-k_1}{1-k_1}\vec{b} = m\frac{\vec{b} - k_2\vec{c}}{1-k_2} + n\frac{\vec{c} - k_3\vec{d}}{1-k_3} + p\frac{\vec{d}}{1-k_4}$$

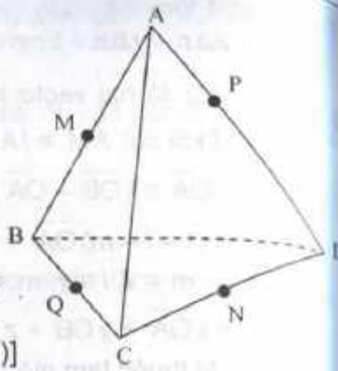
$$\Leftrightarrow \left(\frac{m}{1-k_2} + \frac{k_1}{1-k_1}\right)\vec{b} + \left(\frac{n}{1-k_3} + \frac{mk_2}{1-k_2}\right)\vec{c} + \left(\frac{p}{1-k_4} + \frac{nk_3}{1-k_3}\right)\vec{d} = \vec{0}$$ .Mà

$m + n + p = 1 \Rightarrow -k_1(1-k_2) - k_1k_2(1-k_3) - k_1k_2k_3(1-k_4) = 1 - k_1$

$$\Leftrightarrow k_1k_2k_3k_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}}.\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}}.\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'D}}.\frac{\overline{D'D}}{\overline{D'A}} = 1$$

Bài toán 16. 10: Cho tứ diện ABCD. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải



Chọn gốc M. Ta có $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$.

nên $\overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$

Tương tự: $\overrightarrow{MQ} = \dfrac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Mà $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$, nên:

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{1-k}[\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - k(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})]$$

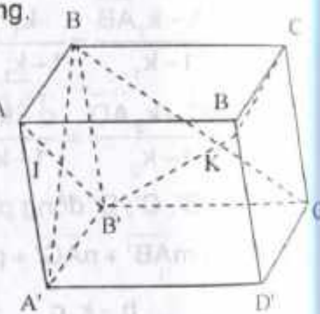
$$= \frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$$

Do đó $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng nên các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài toán 16.11: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABB'A' và K là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành BCC'D'.

Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{B'C'}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{B'C'} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

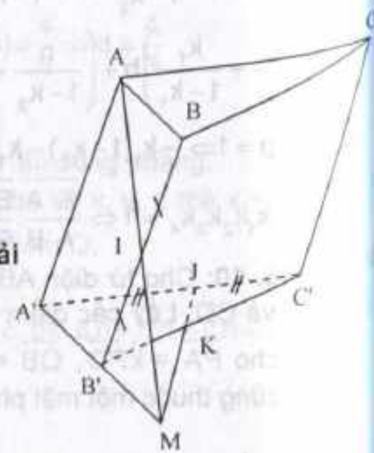
$= \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$

$= 2\overrightarrow{B'C'} - 2\overrightarrow{IK}$

(Vì IK là đường trung bình của tam giác AB'C)

Vậy $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{B'C'}$ đồng phẳng.

Bài toán 16.12: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và A'C'. Điểm K thuộc B'C' sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.



Hướng dẫn giải

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})$

$= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b})$

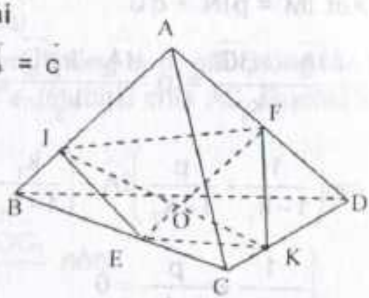
$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c})$

$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{AB'}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + 2(\vec{a} + \vec{b})}{3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3}$

Do đó, ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 16.13: Cho hình tứ diện ABCD, I, K, E, F là các điểm thoả mãn: $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FD} = \vec{0}$. Chứng minh bốn điểm I, E, K, F đồng phẳng.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$

Ta chứng minh các vectơ $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IF}$ đồng phẳng.

Ta có $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{3}{5}\vec{a}$

$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{5}\vec{c} + \frac{3}{5}(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c}$

và $\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$

Ta tìm hai số x và y sao cho $\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IE} + y\overrightarrow{IF}$

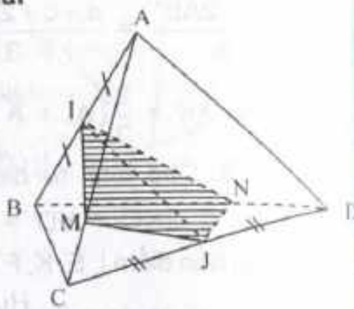
$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{3}{5}x\vec{a} + \frac{3}{5}y\vec{b} + (\frac{1}{15}y - \frac{1}{3}x)\vec{c}$

Do đó: $\begin{cases} \frac{3}{5}x = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5}y = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{15}y - \frac{1}{3}x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{9} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{IK} = \frac{10}{9}\overrightarrow{IE} + \frac{5}{9}\overrightarrow{IF} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 16.14: Cho hình tứ diện ABCD, I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD; M là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$, N là điểm thuộc BD sao cho $\overrightarrow{NB} = k_2\overrightarrow{ND}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $k_1 = k_2$.

Hướng dẫn giải



Vì $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$ nên $\overrightarrow{IM} = \dfrac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1-k_1}$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{IN} = \frac{\overrightarrow{IB} - k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2} = \frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2}$$

Xét $\overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IN} + q\overrightarrow{IJ}$

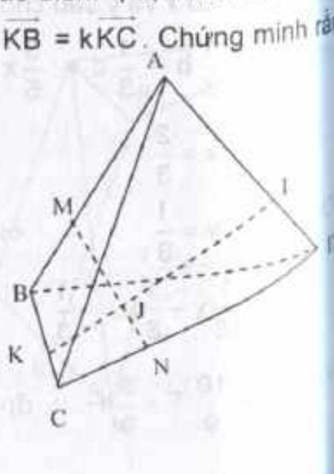
$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}}{1-k_1} = p.\frac{-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2} + \frac{q}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k_1} + \frac{p}{1-k_2}\right)\overrightarrow{IA} - \left(\frac{k_1}{1-k_1} + \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{IC} + \left(\frac{pk_2}{1-k_2} - \frac{q}{2}\right)\overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-k_1} + \dfrac{p}{1-k_2} = 0 \\ \dfrac{k_1}{1-k_1} + \dfrac{q}{2} = 0 \\ \dfrac{pk_2}{1-k_2} - \dfrac{q}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{k_1}{1-k_1} = -\frac{pk_2}{1-k_2} = \frac{k_2}{1-k_1} \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

Bài toán 16.15: Cho tứ diện ABCD, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ}$,

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ}$

$k\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ}$

hay $k\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ}$

Do đó: $(1-k)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}$

hay $\vec{IJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}$

Chứng minh tương tự như trên ta có: $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}$

Mà $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$ nên $\vec{IJ} = \frac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}$

Do đó : $\vec{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$. Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài toán 16.16: Cho ba mặt phẳng song song (α), (β), (γ) và hai đường thẳng chéo nhau d, d_1 cắt chúng theo thứ tự tại A, B, C và A_1, B_1, C_1. Từ một điểm O bất kì trong không gian dựng các vectơ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CC_1}$. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Vì (α), (β), (γ) song song với nhau, hai đường thẳng d, d_1 cắt chúng lần lượt tại A, B, C và A_1, B_1, C_1 nên theo định lý Ta–lét thì B chia AC, B_1 chia A_1C_1 theo cùng tỉ số nên:

$\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}$

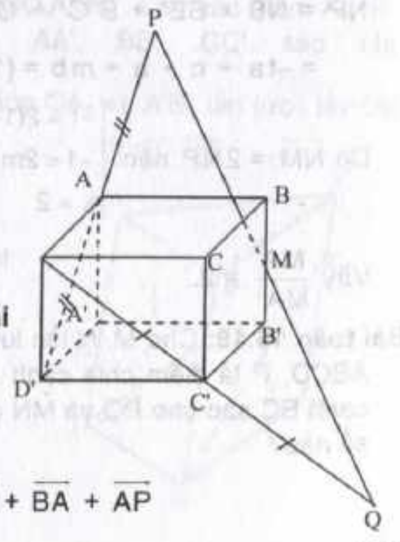
Do đó: $\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}$ và $\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}}{1-k}$ nên:

$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB}$

$= \frac{(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) - k(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC})}{1-k} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA_1} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CC_1}$

Hay là : $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OM} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = k\overrightarrow{NP} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 16.17: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bằng m, các góc tại A bằng 60° ($\widehat{BAD} = \widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60^\circ$). Gọi P và Q là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A}$, $\overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'}$. Chứng minh đường thẳng PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'. Tính độ dài đoạn PQ.



Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = \frac{1}{2}m^2$

Gọi M là trung điểm của BB' thì: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$

Do $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{D'A} = -\vec{a} - \vec{c}$

nên $\overrightarrow{MP} = -\dfrac{\vec{a}}{2} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c} = -\dfrac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

Mặt khác $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DC'}$

$= \dfrac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nên $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$ (đpcm)

Ta có $PQ^2 = \overrightarrow{PQ}^2 = 4\overrightarrow{MP}^2$

$= 4\left(\dfrac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 4\left(\dfrac{9}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 3\vec{a}.\vec{b} + 3\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c}\right)$

$= 4.\dfrac{33}{4}m^2 = 33m^2 \Rightarrow PQ = m\sqrt{33}$.

Cách khác: Chiếu theo phương song song với BB' lên mặt đáy (A'B'C'D').

Bài toán 16.18: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng AA', BC, C'D' lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\dfrac{MA}{MA'}$.

Hướng dẫn giải

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Vì M thuộc đường thẳng AA' nên: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$;

N thuộc BC, P thuộc C'D' nên: $\overrightarrow{BN} = t\vec{a}$, $\overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -t\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P}$

$= -t\vec{a} + \vec{c} + \vec{a} + m\vec{b} = (1-t)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$.

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$ nên: $\begin{cases} -t = 2(1-t) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\dfrac{1}{2}, t = 2$.

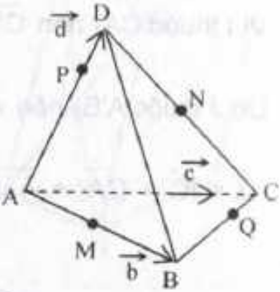
Vậy $\dfrac{MA}{MA'} = 2$.

Bài toán 16.19: Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD của tứ diện ABCD, P là điểm chia cạnh AD theo tỷ số –2. Hãy xác định điểm Q trên cạnh BC sao cho PQ và MN cắt nhau. Khi đó điểm Q chia cạnh BC' theo tỷ số nào?

Hướng dẫn giải

Vì MN luôn cắt mp(PBC) nên MN không song song PQ.

Vậy các đường thẳng MN và PQ cắt nhau hay điểm M, N, P, Q đồng phẳng nên tồn tại x, y sao cho $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$.



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ và

$\overrightarrow{BQ} = t\overrightarrow{BC} = -t\vec{b} + t\vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\vec{b} - t\vec{b} + t\vec{c} = (\frac{1}{2} - t)\vec{b} + t\vec{c}.$$

Do đó: $-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} = (-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - yt)\vec{b} + (\frac{x}{2} + yt)\vec{c} + \frac{x}{2}\vec{d}$

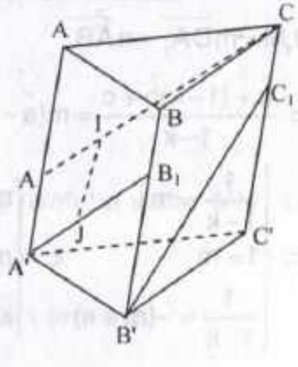
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - yt = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + yt = 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ yt = -\frac{2}{3} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên điểm Q chia cạnh BC theo tỷ số –2.

Bài toán 16.20: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh bên AA', BB', CC' sao cho $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{B'B_1}{BB'} = \frac{C'C_1}{CC'} = \frac{3}{4}$. Trên các đoạn thẳng CA_1 và $A'B_1$ lần lượt lấy các điểm I, J sao cho $IJ // B'C_1$. Tính tỉ số $\frac{IJ}{B'C_1}$.

Hướng dẫn giải



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Theo giả thiết, ta có:

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4}\vec{a}$

Ta có: $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B_1} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{B'C_1} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C_1} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

Vì I thuộc CA_1 nên $\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CA_1} = \frac{3}{4}t\vec{a} - t\vec{c}$

Do J thuộc $A'B_1$ nên $\overrightarrow{A'J} = m\overrightarrow{A'B_1} = -\frac{3}{4}m\vec{a} + m\vec{b}$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'J} = \left(1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m\right)\vec{a} + m\vec{b} + (t-1)\vec{c}$$

Ta có $IJ \parallel B'C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{B'C_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}m = -\frac{3}{4}k \\ m = -k \\ t - 1 = k \end{cases}$

$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}, t = \frac{2}{3}, m = \frac{1}{3}$. Vậy $\frac{IJ}{B'C_1} = \frac{1}{3}$.

Bài toán 16.21: Cho một hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng đi qua D_1 song song với DA_1 và AB_1 cắt đường thẳng BC_1 tại M. Tìm tỉ số mà điểm M chia đoạn thẳng BC_1.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC_1}$. Ta phải xác định k sao cho ba vectơ $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ và $\overrightarrow{D_1M}$ đồng phẳng. Đặt $\overrightarrow{D_1A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{D_1C_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{D_1D} = \vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{D_1A_1} - \overrightarrow{D_1D} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1} = \vec{b} - \vec{c}$

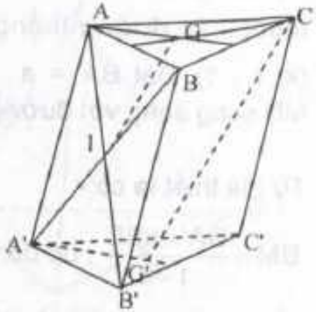
$$\overrightarrow{D_1M} = \frac{\overrightarrow{D_1B} - k\overrightarrow{D_1C_1}}{1-k} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$

Điều kiện ba vectơ $\overrightarrow{D_1M}$, $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ đồng phẳng ta phải có m, n sao cho $\overrightarrow{D_1M} = m\overrightarrow{DA_1} + n\overrightarrow{AB_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{a} + (1-k)\vec{b} + \vec{c}}{1-k} = m(\vec{a} - \vec{c}) + n(\vec{b} - \vec{c}) = m\vec{a} + n\vec{b} - (m+n)\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-k} = m \\ 1 = m \\ \frac{1}{1-k} = -(m+n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \\ k = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } k = 3.$$

Bài toán 16.22: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C', I là giao điểm của AB' và A'B. Chứng minh rằng GI // CG'



Hướng dẫn giải

Chọn cơ sở gốc A: $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

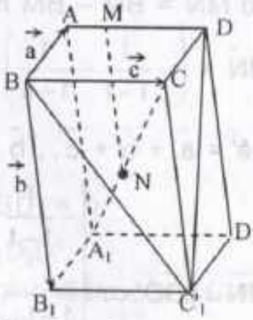
$\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$

nên $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3} = \dfrac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{6}$

$\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{c} = \dfrac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{3}$

Suy ra: $\overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{GI}$ mà GI, CG' phân biệt nên GI // CG'

Bài toán 16.23: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Điểm M chia đoạn AD theo tỉ số $-\dfrac{1}{4}$, điểm N chia đoạn A_1C theo tỉ số $-\dfrac{2}{3}$. Chứng minh MN song song mp(BC_1D).



Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

Khi đó:

$\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{c}$; $\overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}$,

$\overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BM} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}}{1 + \frac{1}{4}} = \dfrac{5\vec{a} + \vec{c}}{5}$; $\overrightarrow{BN} = \dfrac{\overrightarrow{BA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \dfrac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{5}$

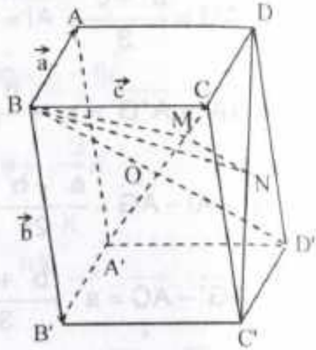
Để chứng minh MN // mp(BDC_1) ta phải chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng, tức là có m và n sao cho:

$\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{BD} + n\overrightarrow{BC_1} \Leftrightarrow \dfrac{-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{a}}{5} = m\vec{a} + n\vec{b} + (m + n)\vec{c}$

$\Leftrightarrow m = -\frac{2}{5}$ và $n = \frac{3}{5}$ (đpcm).

Bài toán 16.24: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Xét các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng A'C và C'D sao cho $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = t\overrightarrow{ND}$ $(k, t \neq 1)$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Xác định k, t để đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết ta có:

$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA'} - k\overrightarrow{BC}}{1-k}$, do đó:

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC'} - t\overrightarrow{BD}}{1-t}$, do đó:

$\overrightarrow{BN} = \frac{t}{1-t}\vec{a} + \frac{1}{1-t}\vec{b} + \vec{c}$

Vì BD' và C'D là hai đường thẳng chéo nhau nên đường thẳng MN song song với đường thẳng BD' khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'}$.

Do $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$ nên ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{k}{1-k}\right)\vec{c}$$

Mà' = $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, , $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên:

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{t}{1-t} - \frac{1}{1-k} = p \\ \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-k} = p \\ 1 + \frac{k}{1-k} = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = -3 \\ p = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy khi $k = -3$, $t = -1$ thì đường thẳng MN và đường thẳng BD' song song với nhau.

Bài toán 16.25: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

b) Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

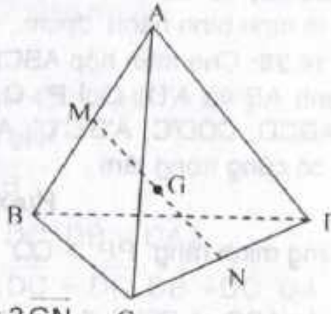
Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

Vì M, N là trung điểm của AB, CD nên:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$



Do đó: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Tương tự thì: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

b) Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$

Do đó: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow$ G là trung điểm của MN.

$\Leftrightarrow$ G là trọng tâm tứ diện ABCD.

Bài toán 16.26: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi D_1, D_2, D_3 lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Từ giả thiết, ta có: $\overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{b}$

Mà $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Vậy $\overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

Lập tương tự như trên ta có: $\overrightarrow{BD_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

và $\overrightarrow{BD_3} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Vậy $\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0}$

Điều này chứng tỏ B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

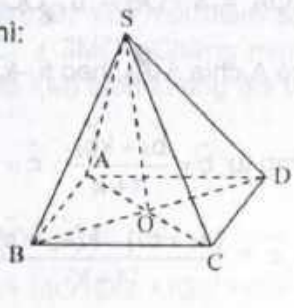
Bài toán 16.27: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD thì:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$.



Ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO}$

$+ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \vec{0}$ điều này chứng tỏ O, M, N thẳng hàng. Mặt khác M thuộc AC, N thuộc BD và O là giao điểm của AC và BD nên O, M, N thẳng hàng chỉ xảy ra khi O ≡ M ≡ N, tức O là trung điểm của AC và BD, hay ABCD là hình bình hành: đpcm.

Bài toán 16.28: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD, CDD'C, A'B'C'D', ADD'A'. Chứng minh hai tam giác PQR và P'Q'R' có cùng trọng tâm .

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh rằng $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

Tam giác ABC có PP' là đường trung bình nên $\overrightarrow{PP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Tương tự: $\overrightarrow{QQ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

Do đó: $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 16.29: Trên mặt phẳng (P) cho hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Về một phía đối với mặt phẳng (P) ta dựng hình bình hành $A_2B_2C_2D_2$. Trên các đoạn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 ta lần lượt lấy các điểm A, B, C, D sao cho: $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{CC_1}{CC_2} = \frac{DD_1}{DD_2}$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành.

Hướng dẫn giải

Lấy điểm O, đặt $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{b}_1$, $\overrightarrow{OC_1} = \vec{c}_1$, $\overrightarrow{OD_1} = \vec{d}_1$.

$A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành nên:

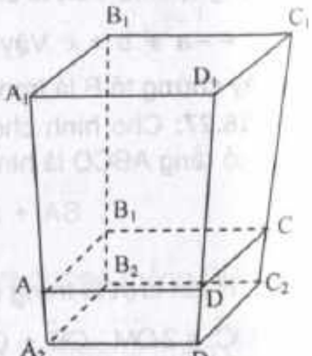
$\vec{a}_1 + \vec{c}_1 = \vec{b}_1 + \vec{d}_1$.

Tương tự đặt:

$\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OB_2} = \vec{b}_2$, $\overrightarrow{OC_2} = \vec{c}_2$,

$\overrightarrow{OD_2} = \vec{d}_2$ thì $\vec{a}_2 + \vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \vec{d}_2$

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$



Ta có A chia A_1A_2 theo tỉ –k nên $\vec{a} = \frac{\vec{a}_1 - k\vec{a}_2}{1+k}$

Tương tự $\vec{b} = \frac{\vec{b}_1 - k\vec{b}_2}{1+k}$, $\vec{c} = \frac{\vec{c}_1 - k\vec{c}_2}{1+k}$, $\vec{d} = \frac{\vec{d}_1 - k\vec{d}_2}{1+k}$ nên

$\vec{a} + \vec{c} = \frac{(\vec{a}_1 + \vec{c}_1) - k(\vec{a}_2 + \vec{c}_2)}{1+k}$, $\vec{b} + \vec{d} = \frac{(\vec{b}_1 + \vec{d}_1) - k(b_2 + \vec{d}_2)}{1+k}$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Vậy ABCD là hình bình hành.

Bài toán 16.30: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

b) $AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2)$.

Hướng dẫn giải

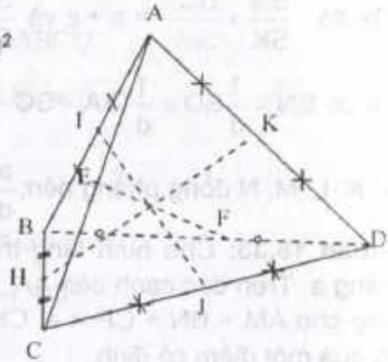
a) Ta có: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})$

$= \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$.

b) Ta có:

$AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$



Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

nên: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$

$= -\dfrac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{\overrightarrow{DC}}{2}$

$= -\dfrac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{a}) + \dfrac{\vec{c}}{2} = \dfrac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{2}$ nên

$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 4\overrightarrow{IJ}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2$

$= 2\vec{b}^2 + 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}$

$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2 + \vec{b}^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + \vec{a}^2$

$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}.\vec{c} - 2\vec{b}.\vec{c}$

Do đó: $AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 + 4IJ^2$

Tương tự: $AC^2 + BD^2 + AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 4HK^2$

$AB^2 + CD^2 + BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

Do đó: $AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4(IJ^2 + HK^2 + EF^2)$.

Bài toán 16.31: Cho tam giác ABC và một điểm O. Với mỗi điểm M trong không gian, ký hiệu: $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MO^2$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để O là trọng tâm ΔABC là f(M) luôn không đổi với mọi điểm M.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của ΔABC, thì:

$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2 = 3MG^2 - 3MO^2$

$+ (GA^2 + GB^2 + GC^2) = 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MO})\overrightarrow{OG} + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$

Nếu O ≡ G thì $f(M) = GA^2 + GB^2 + GC^2$ = hằng số, $\forall M$

Nếu f(M) = hằng số, thì: f(O) = f(G)

$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG}\,.\,\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{GO}\,.\,\overrightarrow{OG} \Rightarrow 6.OG^2 = 0$, hay O ≡ G.

Bài toán 16.32: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N.

Chứng minh rằng: $\dfrac{SA}{SK} + \dfrac{SC}{SM} = \dfrac{SB}{SL} + \dfrac{SD}{SN}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm hình bình hành đáy thì: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

Đặt: $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SK}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SL}$, $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SM}$S, $\overrightarrow{SD} = d\overrightarrow{SN}$, a, b, c, d > 1.

Khi đó: $\dfrac{SA}{SK} + \dfrac{SC}{SM} = a + c$ và $\dfrac{SB}{SL} + \dfrac{SD}{SN} = b + d$

Ta có $\overrightarrow{SN} = \dfrac{1}{d}\overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{d}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \dfrac{a}{d}\overrightarrow{SA} + \dfrac{c}{d}\overrightarrow{SC} - \dfrac{b}{d}\overrightarrow{SB}$

Vì K, L, M, N đồng phẳng nên: $\dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{d} - \dfrac{b}{d} = 1 \Rightarrow a+c = b+d$ (đpcm).

Bài toán 16.33: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng a. Trên các cạnh bên AA', BB', CC' ta lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho AM + BN + CP = a. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

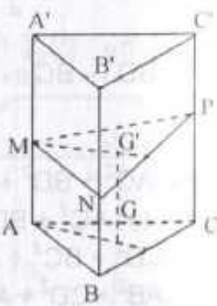
Hướng dẫn giải

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác MNP.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N}$

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CG'} + \overrightarrow{G'P}$



Nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{GG'}$

Vì lăng trụ có cạnh bên bằng a và AM + BN + CP = a

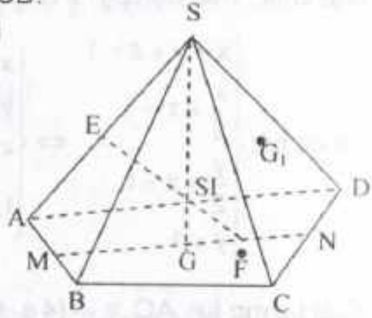
nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AA'}$ do đó $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{GG'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. Vì G, A, A' cố định nên G' cố định. Vậy (MNP) luôn qua G' cố định.

Bài toán 16.34: Cho hình chóp S.ABCD đáy là tứ giác, M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm của cạnh CD, G và G_1 lần lượt là trọng tâm của đáy và mặt bên SCD.

a) Xác định I: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = \vec{0}$.

b) Chứng minh đoạn thẳng nối từ đỉnh với trọng tâm của đáy cùng với bốn đoạn thẳng nối trung điểm của một cạnh đáy với trọng tâm mặt đối diện thì đồng quy tại I. Gọi E là trung điểm của SA, đường thẳng EI cắt mặt phẳng đáy tại F, chứng minh F là trọng tâm của ΔBCD.



Hướng dẫn giải

a) Vì M, N là trung điểm của AB và CD, ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN}$,

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN})$

G là trung điểm của MN nên:

$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IG}$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

$= 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ nên G là trọng tâm của ABCD.

Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IG}$ nên $4\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IS} = \vec{0}$

Vậy I là điểm trên đoạn SG và $\frac{IG}{IS} = \frac{1}{4}$.

b) G_1 là trọng tâm ΔSCD nên có $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 3\overrightarrow{IG_1}$

Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IM} + 3\overrightarrow{IG_1} = \vec{0}$

Suy ra I là điểm trên đoạn MG_1 và $\frac{IM}{IG_1} = \frac{3}{2}$.

Vậy MG_1 qua I và SG qua I. Tương tự thì có đpcm.

Gọi F là trọng tâm ΔBCD nên có $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IF}$.

E là trung điểm của SA nên có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IE}$.

Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IE} + 3\overrightarrow{IF} = \vec{0}$ suy ra I là điểm thuộc đoạn EF và $\frac{IE}{IF} = \frac{3}{2}$, EF qua I, và F là giao điểm của EI với mặt đáy ABCD và F là trọng tâm ΔBCD.

Bài toán 16.35: Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A_1D_1 của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi P và Q là giao điểm của mặt phẳng (CMN) với các đường thẳng B_1C_1 và DB_1. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AQ}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Vì bốn điểm M, N, C, P đồng phẳng nên:

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AC}$, $x + y + z = 1$.

nên $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{x}{2} + z\right)\vec{a} + \left(\frac{y}{2} + z\right)\vec{b} + y\vec{c}$

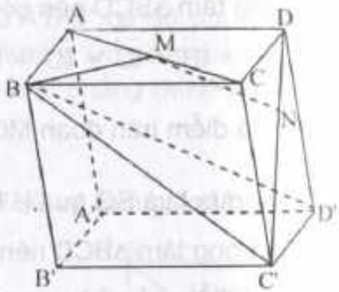
Mặt khác, nếu đặt: $\overrightarrow{B_1P} = t\overrightarrow{B_1C_1}$ thì $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}$

Ta có hệ: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{x}{2} + z = 1 \\ \frac{y}{2} + z = t \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$. Do đó: $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \vec{c}$.

Giải tương tự: $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{9}(4\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c})$.

Bài toán 16.36: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt thuộc CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ và BA = a, BB' = b, BC = c.

Hướng dẫn giải



$\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ thì

$\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$ nên

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1-m} = \frac{\vec{c} - m\vec{a}}{1-m}$$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC'}}{1-m} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - m(\vec{b} + \vec{c})}{1-m} = \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c}$$

Từ đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}$

Do AC, BD' chéo nhau và DC', BD' chéo nhau nên

$MN \parallel BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$.

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên $\begin{cases} \frac{1+m}{1-m} = k \\ \frac{-m}{1-m} = k \\ \frac{-m}{1-m} = k \end{cases}$.

Suy ra $1 + m = -m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$. Từ đó, ta có $k = \frac{1}{3}$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thì MN // BD'. Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Do đó $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c})$

hay $MN^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$

Vậy $MN = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$.

Bài toán 16.37: Trên các cạnh AB, AC và AD của tứ diện ABCD lần lượt lấy các điểm K, L và M sao cho: $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AL}$ và $\overrightarrow{AD} = \gamma\overrightarrow{AM}$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\gamma = \alpha + \beta + 1$ thì các mặt phẳng (KLM) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Nếu $\beta = \alpha + 1$ và $\gamma = \beta + 1$ thì các mặt phẳng (KLM) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Vì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng, nên với điểm X bất kì trong không gian ta có:

$\overrightarrow{AX} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Điểm X thuộc mp(KLM) $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{AK} + q\overrightarrow{AL} + r\overrightarrow{AM} \\ p + q + r = 1 \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{AX} = \alpha x\overrightarrow{AK} + \beta y\overrightarrow{AL} + \gamma z\overrightarrow{AM}$

a) Giả sử: $\gamma = \alpha + \beta + 1$, thì:

$\overrightarrow{AX} = \alpha x\overrightarrow{AK} + \beta y\overrightarrow{AL} + (\alpha + \beta + 1)z\overrightarrow{AM}$

Do đó để $X \in$ mp(KLM) ta cần có điều kiện:

$\alpha x + \beta y + (\alpha + \beta + 1)z = 1$ hay: $(x + z)\alpha + (y + z)\beta + z = 1$ (*)

Điều kiện (*) đúng với mọi α, β khi và chỉ khi: $x = y = -1$, $z = 1$.

Vậy điểm X sao cho $\overrightarrow{AX} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ là điểm cố định nằm trên mọi mp(KLM).

b) Giả sử: $\beta = \alpha + 1$, $\gamma = \beta + 1$ hay $\alpha = \beta - 1$, $\gamma = \beta + 1$ thì:

$\overrightarrow{AX} = (\beta - 1)x\overrightarrow{AK} + \beta y\overrightarrow{AL} + (\beta + 1)z\overrightarrow{AM}$.

Để $X \in$ mp(KLM) ta cần có điều kiện:

$(\beta - 1)x + \beta y + (\beta + 1)z = 1 \Rightarrow (x + y + z)\beta - x + z = 1$ (**).

Điều kiện (**) đúng với mọi β khi và chỉ khi: $x + y + z = 0$ và $-x + z = 1$ hay $z = x + 1$ và $y = -2x - 1$. Vì vậy, ta có thể lấy điểm X ứng với $x = 0$, $y = -1$, $z =$

1 và Y ứng với: x = 1, y = –3, z = 2 chẳng hạn, tức là: $\overrightarrow{AX} = -\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AY} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ thì X, Y là hai điểm cố định thuộc mọi mp(KLM). Vậy mp(KLM) luôn đi qua đường thẳng cố định XY.

Bài toán 16.38: Cho tứ diện ABCD. Chứng minh:

$AC^2 + BD^2 < AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $AC^2 + BD^2 < AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 < 2AB.CD$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) < 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) < 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) < 2AB.CD$

$\Leftrightarrow DC(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) < 2AB.CD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{AB} < 2AB.CO \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} < AB.CD$: đúng vì dấu đẳng thức không xảy ra (AB không song song CD).

Bài toán 16.39: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là hai điểm lần lượt chia AD, BC theo tỉ số $k < 0$. Chứng minh $MN \le \max(AB, CD)$.

Hướng dẫn giải:

Ta có M, N chia AD, BC theo tỉ số k nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - k(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})}{1-k}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}}{1-k}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{DC}}{1-k}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB} + (-k)\overrightarrow{DC}\right|}{1-k} \quad \text{(do } k < 0\text{)}$$

$$\le \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|(-k)\overrightarrow{DC}\right|}{1-k} = \frac{AB - kDC}{1-k}$$

$$m = \max(AB, DC) \Rightarrow AB \le m, DC \le m \Rightarrow MN \le \frac{m - km}{1-k} = m.$$

Bài toán 16.40: Cho tứ diện MABC, G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh : $MA^2 + MB^2 + MC^2 \ge MA.GA + MB.GB + MC.GC$

$\ge GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có :MA.GA + MB.GA + MC.GC

$\ge \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GA}$

$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})\overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})\overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\geq GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Theo bất đẳng thức AM–GM : $2MA.GA \leq MA^2 + GA^2$

$2MB.GB \leq MB^2 + GB^2$, $2MC.GC \leq MC^2 + GC^2$

$\Rightarrow 2(MA.GA + MB.GB + MC.GC) \leq MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Nên $MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MA.GA + MB.GB + MC.GC)$

$\geq (MA.GA + MB.GB + MC.GC) - (GA^2 + GB^2 + GC^2) \geq 0$

Suy ra : $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC$.

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC$

$\geq GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Bài toán 16.41: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Đặt $x\hat{O}y = \alpha$, $y\hat{O}z = \beta$, $\widehat{zOx} = \gamma$. Gọi Ox_1, Oy_1, Oz_1 lần lượt là các tia phân giác của các góc xOy, yOz, zOx. Chứng minh rằng:

a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\dfrac{3}{2}$.

b) Nếu Ox_1 vuông góc với Oy_1 thì Oz_1 vuông góc với cả Ox_1 và Oy_1.

Hướng dẫn giải

Lấy E_1, E_2, E_3 lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho

$OE_1 = OE_2 = OE_3 = 1$.

Chọn cơ sở $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$.

a) Do ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng nên:

$(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})^2 > 0 \Leftrightarrow \vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + (2\vec{e}_1.\vec{e}_2 + \vec{e}_2.\vec{e}_3 + \vec{e}_3.\vec{e}_1) > 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) > 0$. Vậy $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\dfrac{3}{2}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} \parallel Ox_1$; $\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3} \parallel Oy_1$; $\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1} \parallel Oz_1$

Vì $Ox_1 \perp Oy_1 \Rightarrow (\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}) = 0$

Hay $\overrightarrow{OE_2}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} = 0$

Ta có: $(\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2})(\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1})$

$= \overrightarrow{OE_1}^2 + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_2}.\overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{OE_1}.\overrightarrow{OE_3} = 0$

Vậy $Ox_1 \perp Oz_1$. Tương tự, ta cũng có $Oy_1 \perp Oz_1$.

Bài toán 16.42: Cho tam diện vuông Oxyz. Một đường thang tùy ý hợp với Ox, Oy, Oz các góc α, β, γ. Chứng minh $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Hướng dẫn giải:

Không mất tổng quát, giả sử d qua O. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{e}$ lần lượt là các vectơ đơn vị của Ox, Oy, Oz và d. Ta chứng minh:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Thật vậy, đặt: $\alpha' = (\vec{i},\vec{e})$, $\beta' = (\vec{j},\vec{e})$, $\gamma' = (\vec{k},\vec{e})$

thì: $\vec{e} = \cos\alpha'.\vec{i} + \cos\beta'.\vec{j} + \cos\gamma'.\vec{k}$

$\Rightarrow 1 = |\vec{e}|^2 = \vec{e}^2 = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'$

Do $\alpha, \beta, \gamma \le \dfrac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \alpha'$ hay $\alpha = \pi - \alpha' \Rightarrow \cos^2\alpha = \cos^2\alpha'$

Tương tự: $\cos^2\beta = \cos^2\beta'$, $\cos^2\gamma = \cos^2\gamma'$

nên $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos2\alpha + \cos2\beta + 2\cos^2\gamma = 0$

Giả sử $\alpha + \beta + \gamma \ge \pi$, $\dfrac{\pi}{2} \ge \gamma \ge \pi - (\alpha + \beta) \ge 0$

$\Rightarrow \cos\gamma \le \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \cos2\alpha + \cos2\beta + 2\cos^2(\alpha + \beta) \ge 0$

$\Rightarrow 2\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \ge 0$

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta \ge 0$: vô lý vì

$\cos(\alpha + \beta) \le -\cos\gamma < 0$ và $\cos\alpha \ge 0$, $\cos\beta \ge 0$. Vậy $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

Bài toán 16.43: Từ O nằm trong đa diện lồi, dựng các vectơ vuông góc các mặt và có môđun bằng diện tích các mặt tương ứng. Chứng minh tổng các vectơ này bằng $\vec{0}$.

Hướng dẫn giải:

Ta chứng minh tổng tất cả vectơ hình chiếu của các vectơ đã cho trên 1 đường thẳng d bất kỳ bằng $\vec{0}$.

Xét hình chiếu của đa diện lên mp (P) vuông góc với d. Hình chiếu của đa diện được phủ bằng hình chiếu của các mặt dưới 2 lớp, vì có thể chia các mặt thành 2 dạng "các mặt phía trên" và "các mặt phía dưới" không cần kể đến các mặt chiếu thành đoạn thẳng). Quy ước diện tích đại số hình chiếu của mỗi mặt là diện tích hình chiếu của mặt đó, lấy dấu (+) đối với mặt "phía trên", lấy dấu (–) đối với mặt "phía dưới", thì tổng số diện tích đại số hình chiếu của các mặt bằng 0.

Mặt khác, diện tích hình chiếu của mỗi mặt bằng độ dài hình chiếu của các vectơ tương ứng trên đường thẳng d. Đồng thời đối với các mặt khác dạng thì hình chiếu các vectơ tương ứng ngược hướng nhau nên suy ra tổng độ dài đại số hình chiếu của các vectơ đã cho trên đường thẳng d bằng 0 (đpcm).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 16. 1: Cho tứ diện ABCD với trọng tâm G:

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$

b) Gọi A' là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh:

$$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$$

Hướng dẫn

a) Dùng M, N là trung điểm của AB, CD

b) Kết quả A' trọng tâm tam giác BCD.

Bài tập 16. 2: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với tâm O. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$

Hướng dẫn

a) Dùng quy tắc 3 điểm

b) O là trung điểm các chéo

Bài tập 16. 3: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

a) Nếu ABCD là hình chữ nhật thì với mọi điểm M trong không gian ta luôn có $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

b) Nếu ABCD là hình bình hành thì $MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trong không gian. Ngược lại có đúng không?

Hướng dẫn

a) Chèn giao điểm O của AC và BD.

b) Chèn giao điểm O của AC và BD là trung điểm mỗi chéo, ngược lại đúng.

Bài tập 16. 4: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi G' là trọng tâm tam giác A'B'C'. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{AG'}$ qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Hướng dẫn

Kết quả $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Bài tập 16. 5: Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn

Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

Bài tập 16. 6: Trong không gian cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' chỉ có chung nhau một điểm A. Chứng minh rằng

a) Các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ đồng phẳng.

b) Hai tam giác BDC', B'D'C cùng trọng tâm.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$.

Bài tập 16. 7: Cho hình tứ diện ABCD, I, K, E, F là các điểm thoả mãn: $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FD} = \vec{0}$. Chứng minh các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AD}$ là đồng phẳng, các vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ là đồng phẳng.

Hướng dẫn

Chọn hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$

Bài tập 16. 8: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$.

Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

Hướng dẫn

Chọn hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$

Kết quả $k = \frac{1}{2}$.

Bài tập 16. 9: : Cho M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ diện ABCD; P là điểm thuộc đường thẳng AD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, k là số cho trước ($k \neq 1$). Xác định điểm Q thuộc đường thẳng BC sao cho PQ và MN cắt nhau. Khi đó, hãy tính tỉ số $k = \frac{QB}{QC}$.

Hướng dẫn

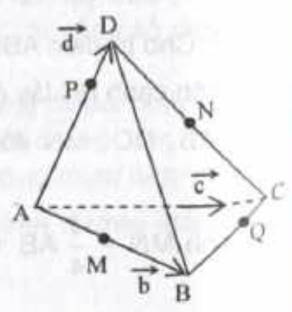
Vì MN luôn cắt mp(PBC) nên MN không song song PQ.

Vậy các đường thẳng MN và PQ cắt nhau hay điểm M, N, P, Q đồng phẳng nên tồn tại x, y sao cho $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ và

$\overrightarrow{BQ} = t\overrightarrow{BC} = -t\vec{b} + t\vec{c}$.

Đưa về lập hệ phương trình:



$$\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}-yt=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{2}+yt=0 \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ yt=-\dfrac{2}{3} \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=1 \\ t=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{BQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên điểm Q chia cạnh BC theo tỷ số –2.

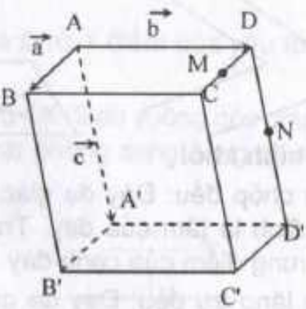
Bài tập 16. 10: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCCD'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

Hướng dẫn

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $= \vec{c}$.

Vì G' là trọng tâm của tứ diện BCC'D' nên:

$\overrightarrow{AG'} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'})$



và G là trọng tâm của tứ diện A'D'MN nên:

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$

Từ đó chứng minh : $\overrightarrow{GG'} = \dfrac{1}{8}(5\vec{a} - \vec{c})$

nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{GG'}$ đồng phẳng.

Bài tập 16. 11: Chứng minh rằng với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ tuỳ ý ta luôn luôn có: $\vec{a}^2 . \vec{b}^2 \geq (\vec{a}.\vec{b})^2$. Dấu = xảy ra khi nào?

Hướng dẫn

Kết quả khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

Bài tập 16. 12: Cho tứ diện ABCD và M là điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $T = \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right|$

b) $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

Hướng dẫn

a) Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ thì I cố định và

$T = \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right| = 7MI.$

b) Kết quả M là trọng tâm G của tứ diện.

Chuyên đề 17: QUAN HỆ VUÔNG GÓC

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Định nghĩa vuông góc

$a \perp b$ khi $g(a,b) = 90^0$.

$a \perp (P)$ khi a vuông góc với mọi đường thẳng của (P).

$(P) \perp (Q)$ khi góc của 2 đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng bằng 90^0.

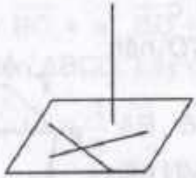
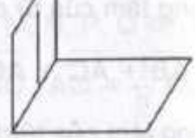
Định lý vuông góc cơ bản

Nếu $a \perp b$, $a \perp c$, $b, c \subset (P)$, b cắt c thì $a \perp (P)$

Nếu (P) chứa 1 đường thẳng vuông góc với (Q) thì hai mặt phẳng $(P) \perp (Q)$.

Nếu $(P) \perp (Q)$, $(P) \cap (Q) = \Delta$ và $a \subset (P)$, $a \perp \Delta$ thì $a \perp (Q)$.

Cho b' là hình chiếu của b lên (P), và $a \subset (P)$. Nếu $a \perp b$ thì $a \perp b'$ và ngược lại.

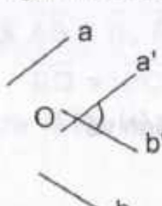




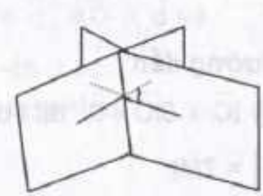
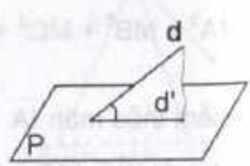
Các hình khối

- Hình chóp đều: Đáy đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Hình chiếu của đỉnh là tâm của đáy. Trung đoạn của hình chóp đều là đoạn nối đỉnh với trung điểm của cạnh đáy.
- Hình lăng trụ đều: Đáy đa giác đều và các cạnh bên vuông góc với đáy (lăng trụ đứng).
- Hình hộp chữ nhật: hộp đứng và có đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương: Hình hộp chữ nhật có 3 kích thước bằng nhau.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

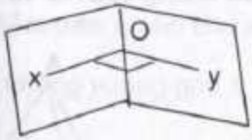
- Góc giữa 2 đường thẳng là góc hợp bởi 2 đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với 2 đường thẳng đã cho.
- Góc giữa 2 mặt phẳng là góc hợp bởi 2 đường thẳng lần lượt nằm trên 2 mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến.
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng đó với hình chiếu của nó lên mặt phẳng. Đặc biệt nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì có số đo 90^0.

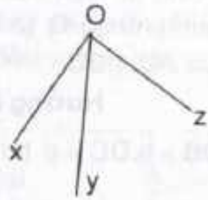


Góc nhị diện, tam diện

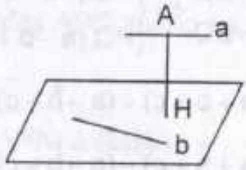
- Góc nhị diện là góc tạo bởi 2 nửa mặt phẳng có chung giao tuyến, số đo bằng góc có đỉnh nằm trên cạnh nhị diện và 2 tia của góc nằm trên 2 mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến.
- Góc tam diện là góc hợp bởi 3 tia không đồng phẳng.





Khoảng cách giữa điểm, đường thẳng và mặt phẳng

- Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng là đoạn vuông góc hạ từ điểm đó đến đường thẳng.
- Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng là đoạn vuông góc hạ từ điểm đó đến mặt phẳng.
- Khoảng cách giữa 2 yếu tố song song là cách từ 1 điểm của yếu tố này đến yếu tố kia.
- Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung, cũng là khoảng cách từ đường thẳng này đến mặt phẳng song song chứa đường kia.



Chú ý:

1) Dùng thêm quan hệ vectơ để giải toán.
2) Nếu một hình có diện tích S nằm trên (P) có hình chiếu lên (Q) với diện tích S' thì: $S' = S.\cos\alpha$, α là góc giữa 2 mặt phẳng. Từ đó suy ra cách tính góc giữa 2 mặt phẳng nhờ diện tích.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 17. 1: Cho hình tứ diện ABCD, trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và CD sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$; $\overrightarrow{QC} = k\overrightarrow{QD}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng AB và PQ vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$

và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \Rightarrow k\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{BD} + k\overrightarrow{DQ}$ nên:

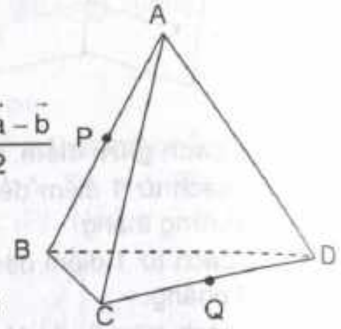
$(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} - k\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CQ} - k\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}$

Do đó $(1-k)\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Mà $k \neq 1$ nên $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow AB \perp PQ$.

Bài toán 17. 2: Cho tứ diện ABCD, gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng PQ là đoạn vuông góc chung của AB và CD $\Leftrightarrow AC = BD$ và $AD = BC$.

Hướng dẫn giải



Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} - \vec{a} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}}{2}$$

Ta có $AC = BD \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{c} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2$

$\Leftrightarrow \vec{b}^2 - (\vec{c} - \vec{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}.(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$.

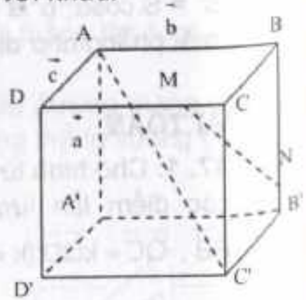
Tương tự $AD = BC \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}.(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0$

Do đó: $\begin{cases} AC = BD \\ AD = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\left[(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})\right] = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\left[(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\vec{c} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}(\vec{b} - \vec{a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PQ \perp CD \\ PQ \perp AB \end{cases}$$

Bài toán 17. 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Trên các cạnh DC và BB' ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho DM = BN = x với $0 \leq x \leq a$. Chứng minh AC' và MN vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

thì $\overrightarrow{BN} = \frac{x}{a}\vec{a}$ và $\overrightarrow{DM} = \frac{x}{a}\vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

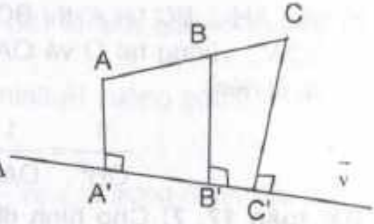
Mà $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).\left[\frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}\right]$

$= \frac{x}{a}\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^2 - \vec{c}^2 = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AC' \perp MN.$

Bài toán 17. 4: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và đường thẳng Δ. A', B', C' là những điểm trên Δ sao cho AA', BB', CC' đều vuông góc với Δ. Chứng minh nếu BC không vuông góc Δ thì $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.



Hướng dẫn giải

Vì A, B, C thẳng hàng nên : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$;

A', B', C' cũng thẳng hàng nên $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{B'C'}$ Δ

Gọi $\vec{v} \neq \vec{0}$ là một vectơ chỉ phương của Δ thì:

$\overrightarrow{AA'}.\vec{v} = \overrightarrow{BB'}.\vec{v} = \overrightarrow{CC'}.\vec{v} = 0$. Từ $\overrightarrow{A'B'} = k'\overrightarrow{B'C'}$ ta suy ra

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = k(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'})\vec{v}$ hay $\overrightarrow{AB}.\vec{v} = k'\overrightarrow{BC}.\vec{v}$

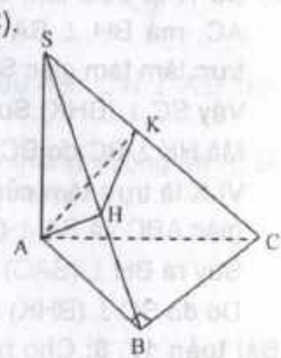
Vì $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ nên từ đó suy ra $k\overrightarrow{BC}.\vec{v} = k'\overrightarrow{BC}.\vec{v}$

Ta có $\overrightarrow{BC}.\vec{v} \neq 0$ nên $k = k'$, hay là $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Bài toán 17. 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông tại B và 2 mặt bên (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh SA $\perp$ (ABC).

b) Hạ AH $\perp$ SB, AK $\perp$ SC. Chứng minh (AHK) $\perp$ (SBC).



Hướng dẫn giải

a) Ta có (SAB), (SAC) $\perp$ (ABC) nên giao tuyến SA $\perp$ (ABC).

b) Ta có AB $\perp$ BC nên đường xiên SB $\perp$ BC do đó BC $\perp$ (SAB)

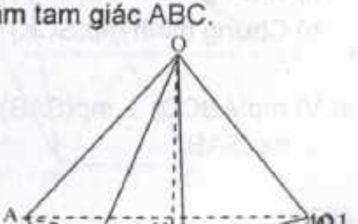
$\Rightarrow$ (SBC) $\perp$ (SAB). Vì AH vuông góc với giao tuyến SB nên AH $\perp$ (SBC)

Mà AH $\subset$ (AHK) nên (AHK) $\perp$ (SBC).

Bài toán 17. 6: Cho hình tứ diện vuông OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Hạ AH vuông góc với (ABC). Chứng minh:

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm tam giác ABC.

b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.



Hướng dẫn giải

a) Các tam giác OAB, OBC, OCA vuông tại O nên:

$AB^2 = OA^2 + OB^2$, $BC^2 = OB^2 + OC^2$

$AC^2 = OA^2 + OC^2$

Do đó $BC^2 < AB^2 + AC^2$ nên góc B của tam giác ABC là góc nhọn. Tương tự thì tam giác ABC nhọn.

Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên $OH \perp (ABC)$.

Mà $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp BC$ do đó hình chiếu $AH \perp BC$.

Tương tự thì $BH \perp CA$. Vậy H là trực tâm tam giác ABC.

b) Nếu $AH \perp BC$ tại A' thì $BC \perp OA'$. Vì OH là đường cao của tam giác vuông AOA', vuông tại O và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC, vuông tại O nên:

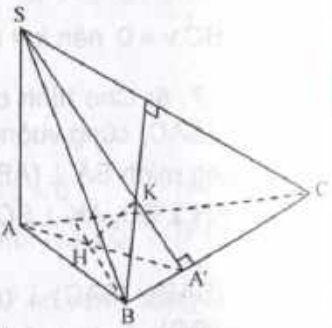
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Bài toán 17. 7: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp mp(ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $HK \perp mp(SBC)$; $(SAC) \perp (BHK)$.

Hướng dẫn giải



a) Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC, do $SA \perp (ABC)$ nên $SA' \perp BC$. Vì H là trực tâm tam giác ABC, K là trực tâm tam giác SBC nên H thuộc AA', K thuộc SA'.

Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'.

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$, mà $BH \perp SA$ nên $BH \perp SC$. Mà K là trực tâm tam giác SBC nên $BK \perp SC$.

Vậy $SC \perp (BHK)$.Suy ra $HK \perp SC$.

Mà $HK \perp BC$ do $BC \perp (SAA')$. Vậy $HK \perp mp(SBC)$.

Vì K là trực tâm của tam giác SBC nên $BK \perp SC$. Vì H là trực tâm của tam giác ABC và $SA \perp (ABC)$ nên $BH \perp AC$, $BH \perp SA$.

Suy ra $BH \perp (SAC)$ nên $BH \perp SC$.

Do đó $SC \perp (BHK)$ nên ta có $(SAC) \perp (BHK)$.

Bài toán 17. 8: Cho hình vuông ABCD và tam giác cân SAB nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I, J là trung điểm AB, AD.

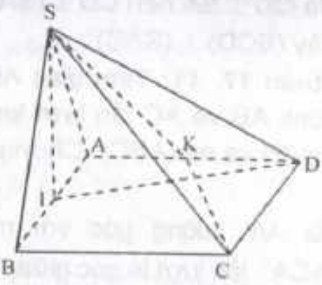
a) Chứng minh $mp(SAD) \perp mp(SAB)$.

b) Chứng minh $mp(SCK) \perp mp(SID)$.

Hướng dẫn giải

a) Vì $mp(ABCD) \perp mp(SAB)$ và $AD \perp AB$ nên $AD \perp mp(SAB)$, do đó $mp(SAD) \perp mp(SAB)$.

b) Ta có 2 tam giác vuông ADI và CDK bằng nhau (c.g.c) nên góc ADI = CDK.
Mà AD ⊥ CD nên DI ⊥ CK.
Vì I trung điểm của AB nên
SI ⊥ AB ⇒ SI ⊥ (ABCD)
⇒ SI ⊥ CK.
Vậy KC ⊥ mp(SID) và do đó mp(SCK) ⊥ mp(SID).



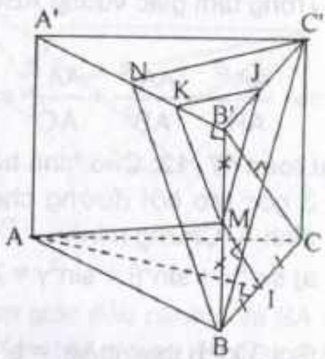
Bài toán 17. 9: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên CC' vuông góc với đáy và CC' = a.

a) Gọi I, M là trung điểm của BC, BB'. Chứng minh AI vuông góc với BC' và BC' vuông góc với AM.

b) Gọi K là điểm trên đoạn A'B' sao cho B'K = $\frac{a}{4}$ và J là trung điểm của B'C'.

Chứng minh AM vuông góc với KJ.

Hướng dẫn giải



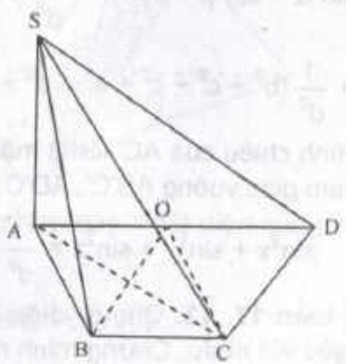
a) Tam giác đều ABC nên trung tuyến AI ⊥ BC. Theo giả thiết, ta có: CC' ⊥ (ABC).
Do đó: CC' ⊥ AI. Suy ra: AI ⊥ (BCC')
Vậy AI ⊥ BC'
Ta đã có: BC' ⊥ AI. Mặt khác, BCC'B' là hình vuông cạnh a nên BC' ⊥ CB'. IM là đường trung bình của tam giác BCB' nên IM // CB'. Từ đó ta có: BC' ⊥ IM.
Ta suy ra: BC' ⊥ (AIM). Vậy: BC' ⊥ AM.

b) Hình chiếu AM lên (A'B'C') là A'B'. Tam giác A'B'C' đều nên C'N ⊥ A'B' mà JK // C'N nên JK ⊥ A'B'. Vậy AM ⊥ JK.

Bài toán 17. 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, B và có AD = 2AB = 2BC, SA vuông góc với đáy. Chứng minh:

a) (SBC) ⊥ (SAB) b) (SCD) ⊥ (SAC).

Hướng dẫn giải



a) Ta có BC ⊥ BA ⇒ BC ⊥ SB nên BC ⊥ (SAB)
Do đó (SBC) ⊥ (SAB).

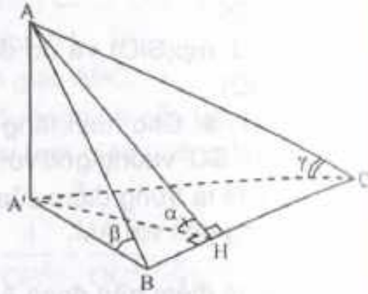
b) Gọi O là trung điểm AD thì OA = AB = BC và OA // BC, ta có góc A, B vuông nên OBCD là hình vuông.
Do đó OB ⊥ AC mà OBCD hình bình hành nên OB // CD, do đó CD ⊥ AC.

Mà CD ⊥ SA nên CD ⊥ (SAC).

Vậy (SCD) ⊥ (SAC).

Bài toán 17. 11: Tam giác ABC vuông có cạnh huyền BC nằm trong mp(α), cạnh AB và AC lần lượt tạo với mp(P) các góc β và γ. Gọi α là góc tạo bởi mp(P) và mp(ABC). Chứng minh $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

Hướng dẫn giải



Hạ AA' vuông góc với mp(P) thì ABA', ACA' lần lượt là góc giữa AB, AC với mp(P), theo giả thiết ABA' = β, ACA' = γ.

Hạ đường cao AH của tam giác vuông ABC thì A'H ⊥ BC nên AHA' = α là góc giữa mp(ABC) và mp(P).

Ta có: $\sin\beta = \dfrac{AA'}{AB}$, $\sin\gamma = \dfrac{AA'}{AC}$, $\sin\alpha = \dfrac{AA'}{AH}$.

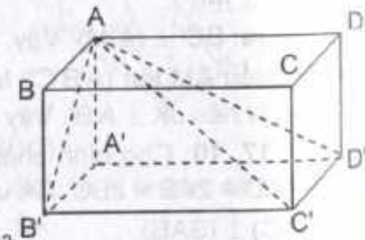
Trong tam giác vuông ABC, ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

$$\Rightarrow \frac{AA'^2}{AH^2} = \frac{AA'^2}{AB^2} + \frac{AA'^2}{AC^2} \Rightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Bài toán 17. 12: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi α, β, γ và x, y, z là 3 góc tạo bởi đường chéo AC' với 3 cạnh chung đỉnh A và 3 mặt chung đỉnh A. Chứng minh:

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ b) $\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = 1$

Hướng dẫn giải



Gọi 3 kích thước AA' = a, AB = b, AD = c và đường chéo d = AC' thì $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

a) Ta có AA', AB, AD là 3 cạnh chung đỉnh A.

Xét 3 tam giác vuông AC'A', AC'B, AC'D:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1}{d^2}(A'C'^2 + BC'^2 + DC'^2)$$

$$= \frac{1}{d^2}(b^2 + c^2 + c^2 + a^2 + a^2 + b^2) = \frac{1}{d^2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2) = 2.$$

b) Hình chiếu của AC' lên 3 mặt chung đỉnh A lần lượt là AB', AD' và AC. Xét 3 tam giác vuông AB'C', AD'C', ACC'.

$$\sin^2x + \sin^2y + \sin^2z = \frac{1}{d^2}(c^2 + b^2 + a^2) = 1.$$

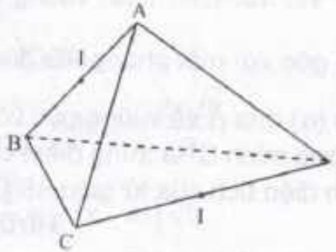
Bài toán 17. 13: Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:

a) Ba đường trung bình của tứ diện bằng nhau.

b) Nếu AB = AC + AD thì $\widehat{ABC}+\widehat{CBD}+\widehat{DBA} = 90^o$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi I, J là trung điểm AB, CD.



$IJ^2 = \overrightarrow{IJ}^2 = (\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI})^2$

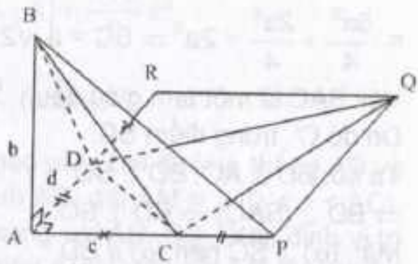
$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2$

$= \frac{1}{4}(AC^2 + AB^2 + AD^2)$

vì AB, AC, AD đôi một vuông góc.

Tương tự thì có 3 đường trung bình cùng bằng $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AC^2+AD^2}$

b) Trên các tia AC và AD lần lượt lấy các điểm P và R sao cho: AP = AR = AB và vẽ hình vuông APQR ⇒ DR = AC và CP = AD. Khi đó, ta có:



$\Delta ABC = \Delta RQD$ và $\Delta ABD = \Delta PQC$

$\Rightarrow \Delta BCD = \Delta QDC$.

Do đó:

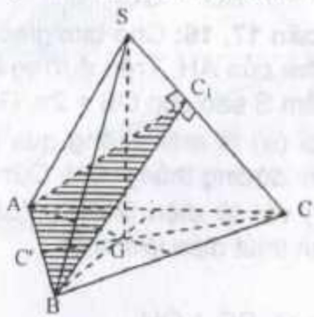
$\widehat{ABC}+\widehat{CBD}+\widehat{DBA} = \widehat{RQD}+\widehat{DQC}+\widehat{CQD} = \widehat{RQP} = 90^o$

Cách khác: Dùng định lý côsin.

Bài toán 17. 14: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA = SB = SC = b. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mp(P).

Hướng dẫn giải

Ta có SG ⊥ mp(ABC).



Vì (P) đi qua A và vuông góc với SC nên AB nằm trong (P). Vẽ đường cao AC_1 của tam giác SAC thì (P) chính là mp(ABC_1). Do tam giác SAC cân tại S nên điểm C_1 nằm trong đoạn thẳng SC khi và chỉ khi ASC < 90°.

$\Leftrightarrow AC^2 < SA^2 + SC^2 \Leftrightarrow a^2 < 2b^2$. Trong trường hợp này, thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (P) là tam giác ABC_1.

$S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB.C'C_1 = \frac{1}{2}a.C'C_1$, với C' là trung điểm của AB.

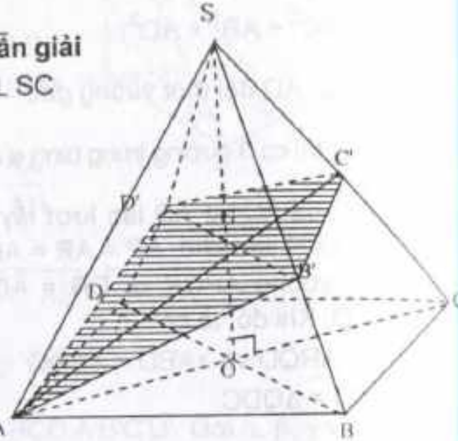
Ta có: $CC_1.SC = SG.CC'$

$$\Rightarrow C'C_1 = \frac{SG.CC'}{SC} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}. \text{Vậy: } S_{ABC_1} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}.$$

Bài toán 17. 15: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ABCD tại O, lấy điểm S sao cho $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'.

a) Chứng minh C' là trung điểm của SC và B'D' song song với BD.

b) Tính diện tích của tứ giác AB'C'D'.



Hướng dẫn giải

a) Ta có: $(\alpha) \perp SC$ và $AC' \subset (\alpha) \Rightarrow AC' \perp SC$

Vì $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SC^2 = SO^2 + DC^2$

$= \frac{6a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{2}$.

Vậy SAC là một tam giác đều.

Do đó C' trung điểm SC.

Ta có: $BD \perp AC$, $BD \perp SO$

$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Mà: $(\alpha) \perp SC$ nên (α) // BD.

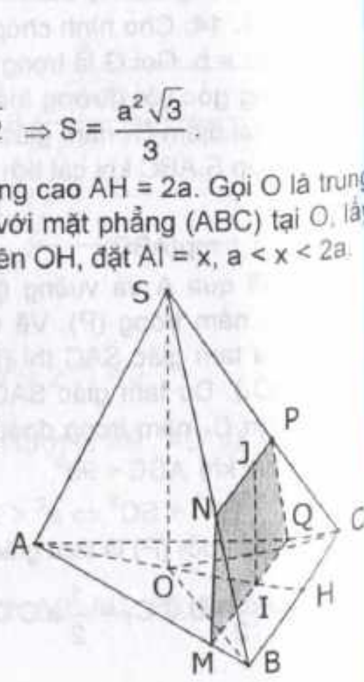
Do đó, (α) cắt (SBD) theo giao tuyến B'D' // BD.

b) Vì $BD \perp (SAC)$ nên $B'D' \perp (SAC)$, do đó $B'D' \perp AC'$

$S = \frac{1}{2}AC'.B'D'$

Ta có: $\frac{B'D'}{BD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2BD}{3} = \frac{2}{3}a\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 17. 16: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm của AH. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2a. Gọi I là một điểm trên OH, đặt AI = x, a < x < 2a. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và vuông góc với đường thẳng OH. Dựng thiết diện của (α) với tứ diện SABC. Với x nào thì diện tích thiết diện lớn nhất.



Hướng dẫn giải

Ta có: $BC \perp OH$

Qua I, dựng MQ // BC ($M \in AB$, $Q \in AC$) thì $MQ \perp OH$. Mặt khác, ta có: $SO \perp OH$.

Dựng IJ // OS ($J \in SH$) thì $IJ \in OH$.

Ta có: MQ // BC $\Rightarrow (\alpha)$ // BC

Do đó, qua J dựng đường thẳng song song với BC, cắt SB và SC tại N và P ta được hình thang MNPQ là thiết diện cần dựng.

Ta có: $\Delta SOB = \Delta SOC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow SBA = SCA$ và : $BN = CP$, $BM = CQ$, do đó: $\Delta BMN = \Delta CQP$.

Do đó: MN = QP. Vậy thiết diện là hình thang cân.

Do $AH = 2a$ nên $BC = \dfrac{4a\sqrt{3}}{4}, \dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{AI}{AH} = \dfrac{x}{2a} \Rightarrow MQ = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{SJ}{SH} = \frac{OI}{OH} = \frac{x-a}{a} \Rightarrow NP = \frac{x-a}{a}.\frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}(x-a))\sqrt{3}$$

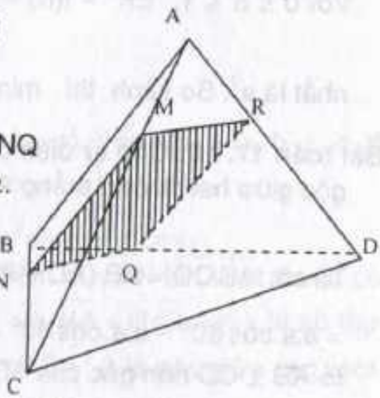
$$\frac{IJ}{OS} = \frac{HI}{HO} = \frac{2a-x}{a} \Rightarrow IJ = 2(2a - x)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ+NP)\,IJ = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}a\right)(2a - x) \le \frac{8\sqrt{3}}{9}a^2$$

Dấu = xảy ra khi $x - \dfrac{2}{3}a = 2a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{4a}{9}$ (chọn).

Bài toán 17. 17: Cho tứ diện ABCD trong đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng α. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh AC, đặt $AM = x$ $(0 < x < AC)$. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với AB, CD. Xác định vị trí điểm M để diện tích thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(P) đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Thiết diện là hình bình hành MNQR.

$S_{MNQR} = NM.NQ.\sin MNQ$

Do MN // AB, NQ // CD nên góc giữa MN và NQ bằng góc giữa AB và CD nên $\sin MNQ = \sin\alpha$.

Ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{AC - x}{AC} \Rightarrow MN = \dfrac{AB}{AC}(AC - x)$

$NQ = MR$, $\dfrac{MR}{CD} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{x}{AC} \Rightarrow MR = \dfrac{CD}{AC}x$

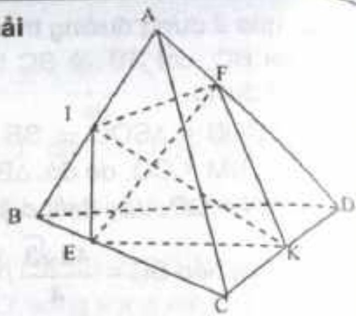
nên $S_{MNQR} = \dfrac{AB.CD}{AC^2}(AC - x)x.\sin\alpha \le \dfrac{1}{4}AB.CD.\sin\alpha$

Từ đó S_{MNQR} max $\Leftrightarrow AC - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{AC}{2}$.

Vậy khi M là trung điểm của AC thì diện tích lớn nhất.

Bài toán 17. 18: Cho hình tứ diện đều cạnh a, I và K lần lượt là trung điểm của cạnh AB và CD, mặt phẳng (P) chứa IK cắt hình tứ diện đều theo một thiết diện. Tìm thiết diện có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



Mặt phẳng (P) cắt cạnh BC tại E thì cắt cạnh AD tại F và đặt $\overrightarrow{BE} = \alpha\overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AD}$ với $0 \le \alpha \le 1$.

Nếu $\alpha = 0$ thì $E \equiv B$ và $F \equiv A$, thiết diện là tam giác ABK.

Nếu $\alpha = 1$ thì $E \equiv C$ và $F \equiv D$, thiết diện là tam giác CID.

Nếu $0 < \alpha < 1$ thì E thuộc cạnh BC; F thuộc cạnh AD và thiết diện là tứ giác IEKF. Chọn hệ cơ sở gốc B: $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}), \overrightarrow{EF} = -\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c}$ nên: $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{EF} = 0$.

Do đó $IK \perp EF$ nên: $S_{IEKF} = \frac{1}{2}IK.EF$.

Ta có $IK^2 = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 = \frac{1}{4}(2a^2) \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

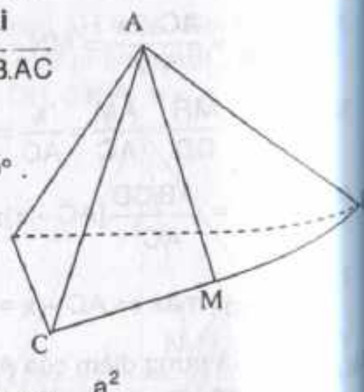
$EF^2 = (-\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{c})^2 = a^2[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]$

Vì IK không đổi nên diện tích IEKF lớn nhất, nhỏ nhất khi độ dài EF lớn nhất, nhỏ nhất.

Với $0 \le \alpha \le 1$, $EF^2 = f(\alpha) = a^2[2\alpha^2 - 2\alpha + 1]$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{a^2}{2}$, lớn nhất là a^2. So sánh thì $\min S = \frac{1}{4}a^2$; $\max S = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Bài toán 17. 18: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M là trung điểm CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD, BC và AM.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= a.a.\cos 60^\circ - a.a.\cos 60^\circ = 0$

$\Rightarrow AB \perp CD$ nên góc của AB và CD bằng 90°.

Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})$

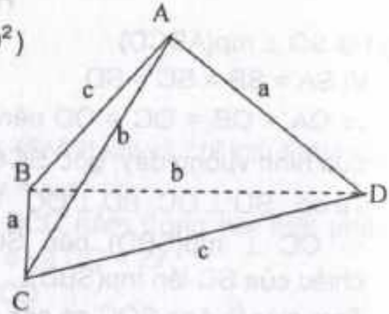
$= \frac{1}{2}(a^2 + a.a.\cos 60^\circ - a.a.\cos 60^\circ - a.a.\cos 60^\circ) = \frac{a^2}{4}$

mà BC = a, AM = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}) = \frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}}{BC.AM} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Vậy góc giữa BC và AM là góc nhọn α có $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Bài toán 17. 19: Cho tứ diện ABCD có BC = AD = a, AC = BD = b, AB = CD = c. Tính các góc α là góc giữa BC và AD ; β là góc giữa AC và BD ; γ là góc giữa AB và CD. Chứng minh rằng trong ba số hạng $a^2\cos\alpha$, $b^2\cos\beta$, $c^2\cos\gamma$ có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

$= \frac{1}{2}(BC^2 + BA^2 - CA^2) - \frac{1}{2}(BC^2 + BD^2 - CD^2)$

Nên: $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}) = \frac{2c^2 - 2b^2}{2a^2} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}$

Vậy nếu góc giữa BC và AD bằng α thì:

$\cos\alpha = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$ hay $a^2\cos\alpha = |c^2 - b^2|$

Tương tự như trên, nếu gọi β là góc giữa AC và BD thì:

$\cos\beta = \frac{|a^2 - c^2|}{b^2} \Rightarrow b^2\cos\beta = |a^2 - c^2|$ và γ là góc giữa AB và CD thì

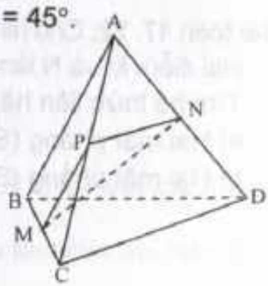
$\cos\gamma = \frac{|b^2 - a^2|}{c^2} \Rightarrow c^2\cos\gamma = |b^2 - a^2|$.

Với a, b, c là độ dài của BC, CA, AB, ta có thể xét $a \geq b \geq c$ thì $a^2\cos\alpha = |c^2 - b^2|$; $b^2\cos\beta = |a^2 - c^2|$; $c^2\cos\gamma = |b^2 - a^2|$

Từ đó, trong trường hợp này ta có $b^2\cos\beta = a^2\cos\alpha + c^2\cos\gamma$

Bài toán 17. 20: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng BC và AD sao cho $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$ với k là số thực cho trước. Đặt α là góc giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$; β là góc giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$. Tìm mối liên hệ giữa AB và CD để $\alpha = \beta = 45°$.

Hướng dẫn giải



Vẽ MP // AB thì NP // CD. Từ đó, góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BA}$ bằng góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$, đó là góc PMN.

Góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng góc giữa $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$, đó là góc PNM.

Vậy hai góc trên bằng nhau và bằng 45° khi và chỉ khi:

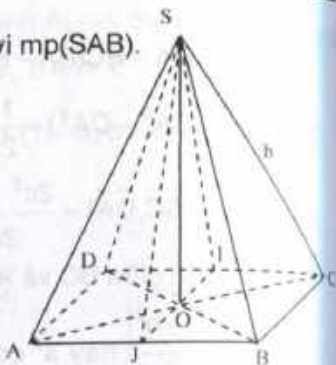
$$MN = NP \text{ và } MPN = 90°.$$

Suy ra $\frac{CP}{CA}.AB = \frac{AP}{AC}.CD$ và $AB \perp CD$. Mà $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = |k|$.

Vậy điều kiện là $\frac{AB}{CD} = |k|$ và $AB \perp CD$.

Bài toán 17. 21: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, cạnh bên SA = SB = SC = SD = b cùng hợp với đáy góc 60^o.Gọi I là trung điểm của CD. Tính góc hợp bởi đường thẳng:

a) SC với mp(SBD)   b) SI với mp(SAB).



Hướng dẫn giải

a) Hạ SO ⊥ mp(ABCD).

Vì SA = SB = SC = SD

⇒ OA = OB = OC = OD nên O là tâm của hình vuông đáy, góc SCO = 60^o.

Ta có: SO ⊥ OC, BD ⊥ OC

⇒ OC ⊥ mp(SBD) nên SO là hình chiếu của SC lên mp(SBD).

Tam giác vuông SOC có góc C = 60^o nên góc S = 30^o.

Vậy góc giữa đường thẳng SC với mp(SBD) bằng 30^o.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Ta có IJ ⊥ AB mà SO ⊥ AB nên AB ⊥ mp(SIJ), do đó hình chiếu của đường thẳng SI lên mp(SAB) là đường thẳng SJ.

Hình vuông ABCD có đường chéo AC = SA = SB = b nên IJ = BC = $\frac{b}{\sqrt{2}}$,

tam giác đều SAC có đường cao SO = $\frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng SI và SJ, tam giác vuông SOI:

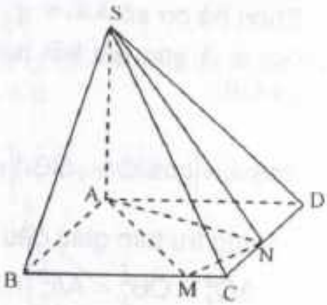
$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{OI}{SO} = \frac{\frac{b}{2\sqrt{2}}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Bài toán 17. 22: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt CM = x, CN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để:

a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^o.

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải



a) Ta có AM, AN cùng vuông góc với SA nên góc nhọn $\widehat{MAN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN). Hai mặt phẳng đó tạo với nhau góc 45^o khi và chỉ khi $\widehat{MAN} = 45^o$, $N \in CD$.

$\Leftrightarrow \widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^o$.

$\Leftrightarrow 1 = \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$

Dùng công thức cộng và có $\tan\widehat{BAM} = \dfrac{a-x}{a}$, $\tan\widehat{DAN} = \dfrac{a-y}{a}$ thì điều kiện cần tìm là:

$$2a^2 + xy = 2a(x+y)$$

b) Vì $SA \perp MN$, $(SAM) \perp (ABCD)$ nên: $(SAM) \perp (SMN)$ khi và chỉ khi $AMN = 90^o$

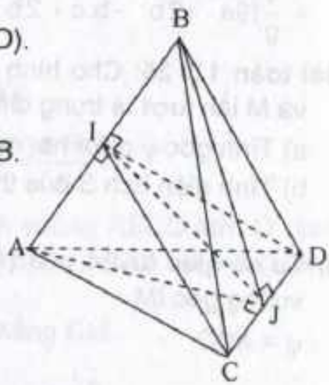
$\Leftrightarrow a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a-y)^2 \Leftrightarrow ay = x(a-x)$.

Bài toán 17. 23: Cho hai tam giác ABC và BCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, AC = AD = BC = BD = a và CD = 2x.

a) Xác định đoạn vuông góc chung của AB và CD.

b) Xác định x sao cho (ABC) vuông góc với (ABD).

Hướng dẫn giải



a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Tam giác ACB cân đỉnh C và IA = IB nên $CI \perp AB$.

Tương tự $DI \perp AB$ nên $AB \perp (CID)$

Do đó $IJ \perp AB$.

Tương tự $CD \perp (AJB)$ nên $IJ \perp CD$.

b) Ta có góc giữa (ABC) và (ABD) là $CID = 2CIJ$

$(BCD) \perp (ACD)$ và $BJ \perp CD \Rightarrow BJ \perp (ACD)$.

Vậy $BJ \perp AJ$.

mà $AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > x) \Rightarrow AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$

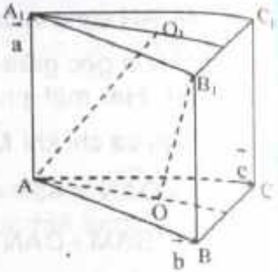
nên $IJ = \sqrt{AJ^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{2}}$

Do đó: $(ABC) \perp (ABD) \Leftrightarrow CIJ = 45^0$

$\Leftrightarrow IJ = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{2}} = x \Leftrightarrow 3x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 17. 24: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ với cạnh đáy bằng a và cạnh bên $AA_1 = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của hai tam giác đáy. Tính góc giữa AO_1 và OB_1.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ cơ sở $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$,

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng AO_1 và OB_1

$$\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AO_1}.\overrightarrow{OA_1}\right|}{AO_1.OB_1}$$

Vì lăng trụ tam giác đều nên :

$$AO_1^2 = OB_1^2 = AA_1^2 + A_1O_1^2 = a^2$$

và $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}) = = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CB_1}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$$

Do đó : $\overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{OB} = \frac{1}{9}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$

$= \frac{1}{9}(9\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 - \vec{b}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} - \vec{c}^2) = \frac{5}{6}a^2$. Vậy $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

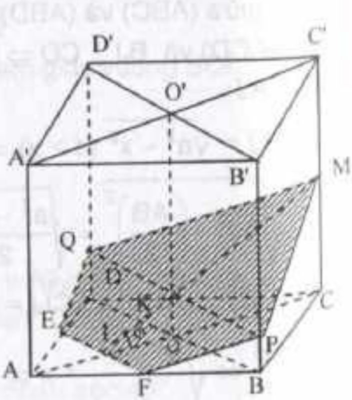
Bài toán 17. 25: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là a. Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'.

a) Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM).

b) Tính diện tích S của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (EFM).

Hướng dẫn giải

a) Ta có giao tuyến của (ABCD) và (EFM) là EF vuông góc với AC nên EF vuông góc IM.



$\varphi = MIC$

$$\tan\phi = \frac{CM}{IC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2\phi = \frac{1}{1+\tan^2\phi} = \frac{1}{1+\frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$$

$$\cos\phi = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông ABCD và A'B'C'D'. IM cắt OO' tại K. Đường thẳng qua K song song với BD cắt BB' và DD' tại P và Q. Thiết diện là ngũ giác EFPMQ.

Gọi S' là diện tích hình chiếu EFBCD của thiết diện.

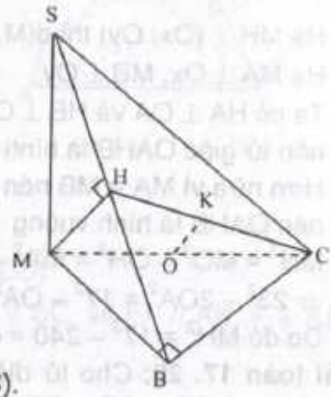
Ta có: $S' = \frac{7a^2}{8} = S\cos\varphi$ nên $S = \frac{7a^2}{8}.\frac{\sqrt{11}}{3} = \frac{7a^2\sqrt{11}}{24}$.

Bài toán 17. 26: Tứ diện SABC có tam giác ABC vuông cân đỉnh B và AC = 2a, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = a.

a) Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BC.

b) Hạ $AH \perp SB$. Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến đường thẳng CH.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$

nên $SB \perp BC \Rightarrow d(S; BC) = SB$.

Tam giác ABC vuông cân tại B,

$AC = 2a$ nên $AB = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A.

$SB^2 = SA^2 + AB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$.

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

nên $AH \perp SB$ thì $AH \perp (SBC)$.

Gọi K là trung điểm của $OK // AH \Rightarrow OK \perp (SBC)$.

nên $OK \perp CH$ do đó $d(O; CH) = OK = \frac{AH}{2}$

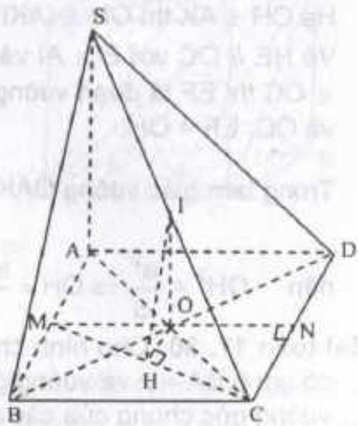
Xét tam giác vuông SAB với đường cao AH ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Bài toán 17. 27: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của AB.

Tính khoảng cách từ I đến (ABCD), đến đường thẳng CM.

Hướng dẫn giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ mà $IO // SA$

do đó $IO \perp (ABCD)$ nên

$d(I; (ABCD)) = IO = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

Hạ $IH \perp CM$ thì $OH \perp CM$

và $d(I; CM) = IH$

Gọi N là trung điểm của cạnh CD.

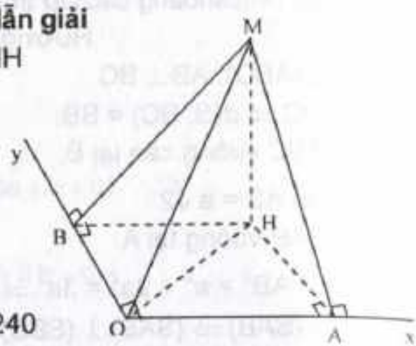
Hai tam giác vuông MHO và MNC đồng dạng nên:

$\frac{OH}{CN} = \frac{OM}{HC}$. Do đó $OH = \frac{CN.OM}{MC} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$

nên $IH^2 = IO^2 + OH^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{20} = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Bài toán 17. 28: Cho góc vuông $\widehat{xOy}$ và một điểm M nằm ngoài mặt phẳng chứa góc vuông. Khoảng cách từ M đến đỉnh O của góc vuông bằng 23cm và khoảng cách từ M tới hai cạnh Ox và Oy đều bằng 17cm. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (xOy) chứa góc vuông.

Hướng dẫn giải



Hạ MH ⊥ (Ox, Oy) thì d(M, (xOy)) = MH

Hạ MA ⊥ Ox, MB ⊥ Oy

Ta có HA ⊥ OA và HB ⊥ OB

nên tứ giác OAHB là hình chữ nhật.

Hơn nữa vì MA = MB nên HA = HB

nên OAHB là hình vuông

$MH^2 = MO^2 - OH^2 = MA^2 - AH^2$

$\Rightarrow 23^2 - 2OA^2 = 17^2 - OA^2 \Rightarrow OA^2 = 240$

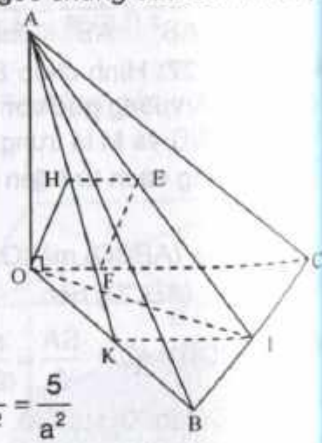
Do đó $MH^2 = 17^2 - 240 = 49$ nên MH = 7cm.

Bài toán 17. 29: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng.

a) OA và BC　　　　b) AI và OC.

Hướng dẫn giải

a) Ta có OI ⊥ BC, OI ⊥ OA nên OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC, OI $= \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



b) Gọi K trung điểm OB thì IK // OC nên OC // mp(AKI). Ta có CO ⊥ (OAB) nên IK ⊥ (OAB), do đó (OAB) ⊥ (AKI).

Hạ OH ⊥ AK thì OH ⊥ (AKI).

Vẽ HE // OC với E ∈ AI và vẽ EF // OH với F ∈ OC thì EF là đoạn vuông góc chung của AI và OC, EF = OH.

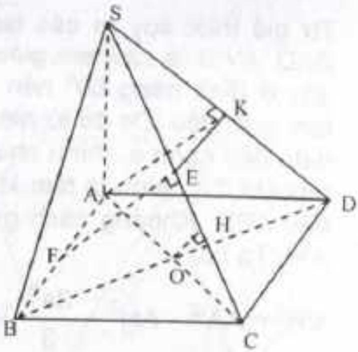
Trong tam giác vuông OAK: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{5}{a^2}$

nên $OH^2 = \frac{a^2}{5} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 17. 30: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, có cạnh SA = x và vuông góc với mặt phẳng đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các đường thẳng.

a) SB và CD　　　　b) SC và BD; SC và AB.

Hướng dẫn giải



a) Ta có BC ⊥ SA, AB nên BC ⊥ (SAB)
$\Rightarrow$ BC ⊥ SB.

Mà có BC ⊥ CD nên BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD, d(SB; CD) = BC = a.

b) Ta có: BD ⊥ SA, AC nên BD ⊥ (SAC) tại O. Hạ OH ⊥ SC.

Ta có OH ⊥ SC và OH ⊥ BD nên OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vì: $\frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC}$ .nên OH = $\frac{OC.SA}{SC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có AB // CD $\Rightarrow$ AB // (SCD).

CD ⊥ AD, SA nên CD ⊥ (SAD) $\Rightarrow$ (SAD) ⊥ (SCD)

Hạ AK ⊥ SD thì AK ⊥ (SCD).Vẽ KE // CD, K ∈ SC, vẽ EF // AK, F ∈ AB thì EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

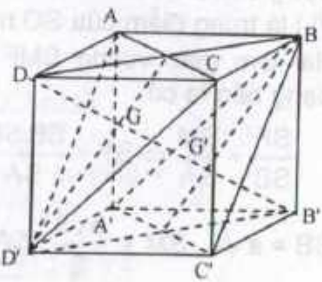
Ta có EF = AK = $\frac{AS.AD}{SD} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 17. 31: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) AA' và DB' b) BC' và CD'.

Hướng dẫn giải

a) Ta có AA' // BB' $\Rightarrow$ AA' // mp(BB', DD')
nên d(AA'; DB') = d(AA', (BB', DD')) = d(A; (BB', DD')
= d(A; DB) = $\frac{1}{2}$AC = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



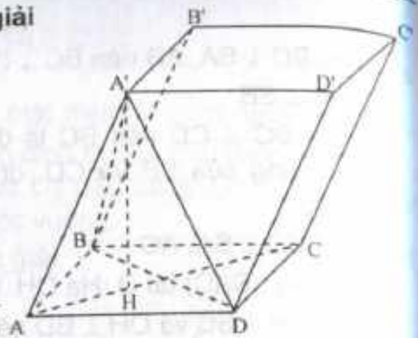
b) Ta có CD' nằm trong mp(ACD') và BC' nằm trong mp(A'BC'). Vì D và B' cách đều các đỉnh của 2 tam giác đều ACD', A'BC' nên: DB' ⊥ (ACD'), (A'BC') do đó (ACD') //(A'BC').

Ta có B'D cắt hai mặt phẳng (ACD') và (A'BC') lần lượt tại G, G' thì DG = GG' = G'B'.

Vậy d(CD'; BC') = $\frac{DB'}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 17. 32: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^o$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D').

Hướng dẫn giải

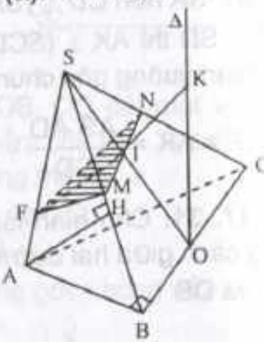


Từ giả thiết suy ra các tam giác A'AD, BAD, A'AB là các tam giác cân cùng có góc ở đỉnh bằng 60° nên chúng là các tam giác đều. Do đó tứ diện A'ABD là tứ diện đều cạnh a, hình chiếu của A' trên mp(ABCD) chính là tâm H của tam giác đều ABD. Khoảng cách giữa hai đáy là A'H. Ta có:

$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = \dfrac{2a^2}{3}$. Vậy $A'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài toán 17. 33: Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a, SA vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi (α) là mặt trung trực của SB, O là trung điểm của BC, Δ là đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng ABC. Dựng giao điểm K của Δ và mặt phẳng (α). Tính OK.

Hướng dẫn giải



Gọi M là trung điểm của đoạn SB.

Dựng đường cao AH của tam giác SAB rồi dựng MF // HA, F $\in$ SA, ta được: MF $\perp$ SB.

Mặt khác ta có: BC $\perp$ (SAB) $\Rightarrow$ BC $\perp$ SB.

Dựng MN // BC, N $\in$ SC, thì: MN $\perp$ SB

Suy ra (α) là mặt phẳng (MNF).

Vì $\Delta \perp$ (ABC) nên Δ // AS.

Gọi β là mặt phẳng (SA, Δ). Trong (SBC) gọi I là giao điểm của MN và SO thì: $\beta \cap \alpha$ = FI. Đường thẳng FI cắt Δ tại K thì K chính là giao điểm cần dựng của Δ và α.

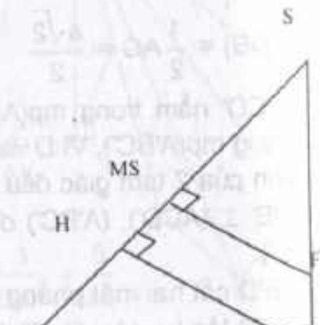
Vì I là trung điểm của SO nên OK = SF

Hai tam giác vuông SMF và SAB đồng dạng nên ta có:

$$\frac{SF}{SB} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow SF = \frac{SB.SM}{SA}$$

$SB = a\sqrt{3}$, $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = a\sqrt{2}$.

Ta có $SF = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. Vậy $OK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.



Bài toán 17. 34: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với A'D và AC' với AD.

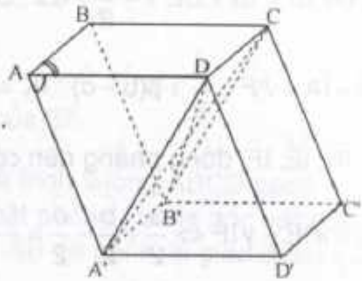
b) Tính diện tích các hình A'B'CD và ACC'A'.

Hướng dẫn giải

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z}$ thì $\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = a^2$

$\vec{x}.\vec{y} = \dfrac{a^2}{2}$; $\vec{y}.\vec{z} = -\dfrac{a^2}{2}$

$\vec{x}.\vec{z} = -\dfrac{a^2}{2}$



a) Vì AB // A'B' nên góc giữa AB và A'D bằng góc A'B' và A'D, đó là góc $D\hat{A}'B'$ hay $180° - D\hat{A}'B'$.

Đặt $D\hat{A}'B' = \alpha$.

Ta có $DB'^2 = A'D^2 + A'B'^2 - 2A'D.A'B.\cos\alpha$

Với $A'D = a\sqrt{3}$, $A'B' = a$

$\overrightarrow{DB'} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{DB'}^2 = 3a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 2a^2$

nên $2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a.a\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})\vec{y} = \dfrac{a^2}{2} + a^2 - \dfrac{a^2}{2} = a^2$

hay $\left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\varphi = a^2 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45°$

Vậy góc giữa AD và AC' bằng 45°.

b) $S_{A'B'C'D'} = A'D.A'B'\sin\widehat{BA'B} = a\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy diện tích $S_{A'B'C'D'} = a^2\sqrt{2}$

Đặt $\widehat{ACC'} = \beta$ thì $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC.CC'\cos\beta$

hay $2a^2 = 3a^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}.a.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

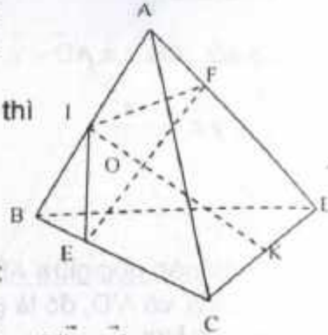
Vậy diện tích $S_{ACC'A'} = AC.CC'\sin\beta = a\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$

Bài toán 17. 35: Cho hình tứ diện ABCD, I và K lần lượt là các trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (P) qua IK, cắt BC tại E, cắt AD tại F. Chứng minh

a) Nếu $\overrightarrow{BE} = \alpha\overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}$ đồng phẳng.

b) Nếu $IK \perp AB$ và $IK \perp CD$ thì $IK \perp EF$ tại trung điểm O của EF.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ vectơ cơ sở : $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b}, \overrightarrow{BA} = \vec{c}$

a) Ta có $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} = -\dfrac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}$. Đặt $\overrightarrow{AF} = \beta.\overrightarrow{AD}$ thì

$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = \dfrac{\vec{c}}{2} + \beta(\vec{b} - \vec{c})$; $\overrightarrow{IK} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2} - \dfrac{\vec{c}}{2}$

Vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}$ đồng phẳng nên có x, y sao cho :

$$\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IE} + y\overrightarrow{IF} \Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2} = -\frac{x\vec{c}}{2} + x\alpha\vec{a} + \frac{y\vec{c}}{2} + y\beta(\vec{b} - \vec{c})$$

$$= x\alpha\vec{a} + y\beta\vec{b} + \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2} - y\beta\right)\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\alpha = \dfrac{1}{2} \\ y\beta = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{2} - \dfrac{x}{2} - y\beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \alpha = \beta \\ x\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ nên } \overrightarrow{AF} = \beta.\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AD}$$

Ta có: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\alpha\vec{a} + \vec{c} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})$

$= \alpha(\vec{b} - \vec{a}) + (1-\alpha)\vec{c} = \alpha\overrightarrow{CD} + (1-\alpha)\overrightarrow{BA}$:đpcm.

b) Ta có: $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IK}\left[\alpha\overrightarrow{CD} + (1-\alpha)\overrightarrow{BA}\right]$

$= \alpha.\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{CD} + (1-\alpha)\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{BA} = 0$

Vậy $IK \perp EF$ tại O.

Vì I, O, K thẳng hàng nên có số γ sao cho : $\overrightarrow{IO} = \gamma\overrightarrow{IK}$

Vì E, O, F thẳng hàng nên có số z sao cho :

$$z\overrightarrow{IE} + (1-z)\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IO} = \gamma\overrightarrow{IK}$$

Mà $\overrightarrow{IE} = -\dfrac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}; \overrightarrow{IF} = \dfrac{\vec{c}}{2} + \beta(\vec{b} - \vec{c}) = \dfrac{\vec{c}}{2} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})$

$$\text{nên } z\left(-\frac{\vec{c}}{2} + \alpha\vec{a}\right) + (1-z)\left[\frac{\vec{c}}{2} + \alpha(\vec{b} - \vec{c})\right] = \gamma\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{c}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z\alpha\vec{a} + (1-z)\alpha\vec{b} + \left(\frac{-z}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \alpha + z\alpha\right)\vec{c} = \frac{\gamma}{2}\vec{a} + \frac{\gamma}{2}\vec{b} - \frac{\gamma}{2}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\alpha = \dfrac{\gamma}{2} \\ (1-z) = \dfrac{\gamma}{2} \\ \dfrac{1}{2} - z - \alpha + z\alpha = -\dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) \Rightarrow$ O là trung điểm của EF

Bài toán 17. 36: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a và có mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I, M, P lần lượt là trung điểm của AD, AB, SB và gọi K là giao điểm của BI và CM.

a) Chứng minh (CMF) vuông góc với (SIB) và tam giác BKF cân.

b) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM.

Hướng dẫn giải

a) $\Delta IAB = \Delta MBC$ (c.g.c) nên góc $\widehat{ABJ} = \widehat{BCM}$ mà $AB \perp BC$.

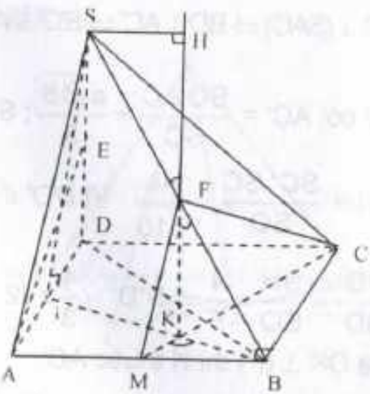
nên $CM \perp BI$ và có $CM \perp SI$, do đó $CM \perp (SIB)$.

Vậy $(CMF) \perp (SIB)$

Xét tam giác vuông BCM

có $CM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ và $BK.CM = BM.BC$

$\Rightarrow BK = \dfrac{BM.BC}{CM} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$



Xét 2 tam giác vuông SIB, BKF:

$SB^2 = SI^2 + IB^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4} = 2a^2$.

nên $FK^2 = BF^2 + BK^2 - 2BF.BK.\cos B = \dfrac{a^2}{5}$ nên FK = BK (đpcm).

b) Vì $CD \perp (SAD)$ nên $(SCD) \perp (SDA)$. Hạ $AE \perp SD$ thì E là trung điểm SD,

đoạn vuông góc chung của SD và AB là $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì SA // (CMF) nên d(SA; CM) = d(SA; (CMF))

Hạ $SH \perp FK$ thì $SH \perp (CMF)$. Do đó (SA, CM) = SH, ta có :

$SH = SF.\sin\widehat{SFH} = SF.\sin\widehat{KFB} = SF.\sin\widehat{SBI} = SF.\dfrac{SI}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài toán 17. 37: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

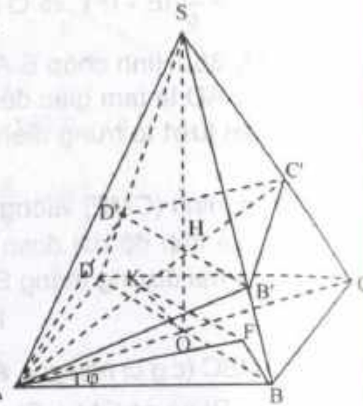
b) Xác định và tính thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua A, vuông góc với SC. Gọi φ là góc giữa AB và (P). Tính sinφ.

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD thì SO là khoảng cách từ S đến (ABCD)

Ta có: $SO^2 = SC^2 - OC^2 = 3a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$

Vậy $SO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.



b) Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$.

Hạ $AC' \perp SC$, AC' cắt SO tại H và cắt SC tại C'. Trong (SBD), đường thẳng qua H và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.

Ta có: $B'D' \perp SC$ nên $SC \perp p(AB'C'D')$ và thiết diện cần tìm là tứ giác AB'C'D'.

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow B'D' \perp AC'$ nên $S = \frac{1}{2}AC'.B'D'$.

Ta có: $AC' = \frac{SO.AC}{SC} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$; $SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = \frac{4a^2}{3}$

$SH = \frac{SC'.SC}{SO} = \frac{4a}{\sqrt{10}}$. Vì B'D' // BD nên:

$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SH}{SO} = \frac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \frac{4}{3}a\sqrt{2}$. Vậy $S = \frac{2a^2.\sqrt{30}}{15}$.

Hạ $OK \perp (P)$ thì K thuộc AC'.

Hạ $BF \perp (P)$ thì $BF = OK = \frac{CC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Ta có $\sin\varphi = \sin\widehat{BAF} = \frac{BF}{BA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài toán 17. 38: Cho tứ diện gần đều ABCD có AB = CD = a, AD = BC = b, AC = BD = c. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của 2 cạnh đối AB, CD

Hướng dẫn giải:

Gọi M, N là trung điểm AB, CD nên $2\overline{MN}.\overline{AB} = \overline{AD}.\overline{AB} - \overline{BC}.\overline{BA}$

$$= \frac{1}{2}[(AD^2 + AB^2 - DB^2) - (BC^2 + BA^2 - CA^2)] = 0$$

do đó $MN \perp AB$. Tương tự $MN \perp CD$

$$MN^2 = \frac{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2}{4} = \frac{AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}}{4}$$

$$= \frac{AD^2 + BC^2 + (AC^2 + DB^2 - AB^2 - DC^2)}{4}$$

$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - 2a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

Bài toán 17. 39: Cho tứ diện ABCD gọi là tứ diện trực tâm. khi các cạnh đối diện vuông góc với nhau.

a) Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương:

(i) ABCD là tứ diện trực tâm.

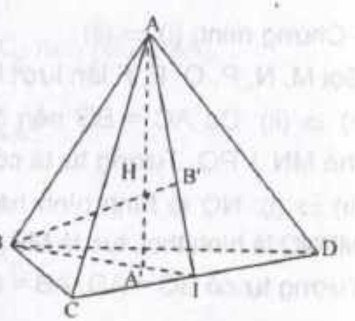
(ii) Chân đường cao của tứ diện hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.

(iii) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

b) Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện nói trên.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (ii)



Hạ $AA' \perp (BCD)$ thì A' là hình chiếu của A lên mp(BCD).

Nếu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ thì $BA' \perp CD$, $CA' \perp BD$.

Vậy A' là trực tâm tam giác BCD.

Ngược lại, nếu A' là trực tâm tam giác BCD thì $BA' \perp CD$, từ đó suy ra $AB \perp CD$.

Tương tự, ta cũng có $AC \perp BD$.

Từ kết quả trên, ta suy ra: đpcm.

- Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Ta có:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

Tương tự: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DC \perp AB$.

$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DB \perp AC$.

b) Vì ABCD là tứ diện trực tâm nên nếu vẽ các đường cao AA' và BB' của tứ diện thì A', B' lần lượt là trực tâm của tam giác BCD và ACD. Khi đó BA', AB' và CD đồng quy tại I. Như vậy AA', BB' là hai đường cao của tam giác

ABI nên AA' và BB' cắt nhau. Tương tự, nếu kẻ đường cao CC' của tứ diện thì ta cũng có AA', CC' cắt nhau và BB', CC' cắt nhau. Mặt khác, AA', BB', CC' không cùng nằm trong một mặt phẳng nên AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm. Tương tự ta có AA', BB', DD' đồng quy (DD' là đường cao của tứ diện ABCD).

Vậy, khi ABCD là tứ diện trực tâm thì các đường cao AA', BB', CC', DD' đồng quy tại một điểm.

Bài toán 17. 40: Một tứ diện gọi là gần đều nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một.

a) Với tứ diện ABCD, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương:

(i) Tứ diện ABCD là gần đều ;

(ii) Các đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau ;

(iii) Các trọng tuyến (đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) bằng nhau ;

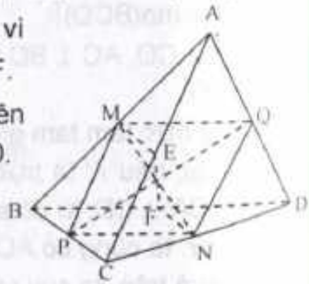
(iv) Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng $180°$.

b) Chứng tỏ hình khai triển của tứ diện gần đều ABCD trên mp(BCD) làm thành một tam giác nhọn.

Hướng dẫn giải

a) – Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.



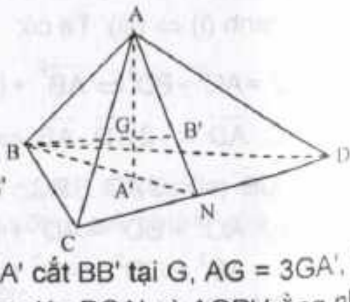
(i) $\Rightarrow$ (ii): Do AC = BD nên MPNQ là hình thoi, vì thế $MN \perp PQ$. Tương tự ta có $MN \perp EF$, $PQ \perp EF$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): NQ là hình bình hành mà $MN \perp PQ$ nên MPNQ là hình thoi, tức là MP = MQ, từ đó AC = BD.

Tương tự có BC = AD, AB = CD.

– Chứng minh (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

Gọi A', B' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD và ACD.



(i) $\Rightarrow$ (iii): Ta có $\Delta BCD = \Delta ADC$ (c.c.c) nên BN = AN, từ đó A'N = B'N .

Vậy $\Delta AA'N = \Delta BB'N$ (c.g.c), suy ra AA' = BB'

Tương tự ta có đpcm.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Do giả thiết ta có BB' = AA', mà AA' cắt BB' tại G, AG = 3GA', BG = 3GB' nên BG = AG và GA' = GB'. Các tam giác BGA' và AGB' bằng nhau nên BA' = AB' , BN = AN.

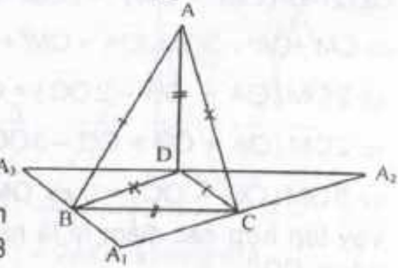
mà $AC^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{CD^2}{2}$; $BC^2 + BD^2 = 2BN^2 + \frac{CD^2}{2}$

do đó $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$.

Tương tự $CA^2 + CB^2 = DA^2 + DB^2$.

Suy ra AD = BC và AC = BD.

Tương tự ta có AB = CD.



Chứng minh (i) ⇔ (iv)

(i) ⇒ (iv): Do sự bằng nhau của các tam giác ABC, CDA, BAD với tam giác CDB nên tổng các góc tại B bằng 180°. Đối với các đỉnh còn lại cũng được lý luận tương tự như trên.

(iv) ⇒ (i): Trải các mặt ABC, ACD, ABD lên mặt phẳng (BCD).

Do tổng các góc tại B cũng như tại C, tại D đều bằng 180° nên các bộ ba điểm A_1, C, A_2 ; A_2, D, A_3 ; A_3, B, A_1 là những bộ ba điểm thẳng hàng.

Như vậy BC, CD, BD là ba đường trung bình của tam giác $A_1A_2A_3$.

Từ đó $BD = A_1C = CA_2 = CA$. Tương tự AD = BC, CD = AB.

b) Theo chứng minh trên thì ta có hình khai triển của tứ diện ABCD trên mặt phẳng (BCD) là tam giác $A_1A_2A_3$.

Ta chứng minh tam giác $A_1A_2A_3$ có ba góc nhọn.

Thật vậy, xét tam giác $A_1A_2A_3$ có $AC = A_1C = AC_2$ nên $AA_1 \perp AA_2$.

Tương tự thì AA_1, AA_2, A_1A_3 đôi một vuông góc.

Ta có: $A_1A_2^2 = AA_1^2 + AA_2^2$; $A_2A_3^2 = AA_2^2 + AA_3^2$;

$$A_3A_1^2 = AA_3^2 + AA_1^2$$

$\Rightarrow A_1A_2^2 + A_2A_3^2 > A_1A_3^2$; $A_2A_3^2 + A_3A_1^2 > A_1A_2^2$;

$$A_3A_1^2 + A_1A_2^2 > A_2A_3^2$$

Dùng định lý hàm số côsin cho tam giác $A_1A_2A_3$ ⇒ đpcm..

Bài toán 17. 41: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thoả mãn mỗi hệ thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM}$ (1) b) $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ (2)

Hướng dẫn giải

a) (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow MB \perp AC$.

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với đường thẳng AC.

b) Gọi G là trọng tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có:(2) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2 = 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC})^2$

$\Leftrightarrow OM^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} + OM^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = 2OM^2 + 2OC^2 - 4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) = 0$ (vì OA = OB = OC)

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{OM}(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OC}) = 0$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{CG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp CG$.

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng CG.

Bài toán 17. 42: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với (ABCD) và SA = a. Gọi M là điểm di động trên đoạn CD, ta đặt CM = x. Gọi K là hình chiếu của S trên BM.

a) Tính độ dài đoạn SK theo a và x.

b) Tìm tập hợp các điểm K.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$S_{AMB} = \frac{1}{2}AB.MH = \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow AK = \frac{2S_{AMB}}{BM} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$SK^2 = SA^2 + AK^2 \Rightarrow SK = a\sqrt{\frac{2a^2 + x^2}{a^2 + x^2}}$$

b) $\widehat{AKB} = 90^0$, do đó K ở trên đường tròn đường kính AB trong mặt phẳng (ABCD). Mặt khác vì M di động trên đoạn CD nên điểm K luôn luôn nằm trong góc CBD. Do đó điểm K ở trên cung OB với O là tâm của hình vuông ABCD.

Đảo lại, ta chứng minh mọi điểm K thuộc cung OB đều thoả điều kiện của bài toán. Vậy tập hợp các điểm K cần tìm là cung OB của đường tròn đường kính AB trên mp(ABCD).

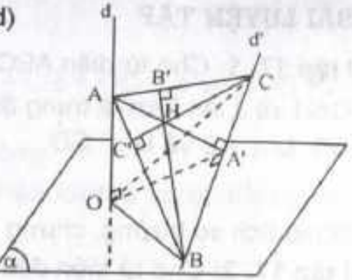
Bài toán 17. 43: Cho d là một đường thẳng vuông góc với mp(α) và cắt (α) tại O. Giả sử A là một điểm cố định trên d, B và C là hai điểm di động trên một đường thẳng d' cố định trên (α) và không đi qua O sao cho mp(B; d) $\perp$ m(C; d). Gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường cao AA', BB', CC' của ΔABC.

a) Chứng minh A'B .A'C không đổi, $AB^2 + AC^2 - BC^2$ không đổi và trực tâm H của ΔABC luôn cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm B' và C'.

Hướng dẫn giải

a) Vì AA' $\perp$ BC nên OA' $\perp$ BC.



Theo giả thiết (B; d) ⊥ (C; d) và do (α) ⊥ (C; d)

nên giao tuyến OB ⊥ (C; d)

⇒ OB ⊥ OC.

Do O và d' cố định nên A' cố định.

Trong tam giác vuông BOC có:

$A'B.A'C = OA'^2$ (bằng hằng số).

Ta có: $AB^2 + AC^2 - BC^2$

$= (AO^2 + OB^2) + (AO^2 + OC^2) - (OB^2 + OC^2) = 2AO^2$: không đổi.

Do O là hình chiếu của B xuống mp(C; d) và BB' ⊥ AC nên OB' ⊥ AC

⇒ AC ⊥ mp(OBB') ⇒ AC ⊥ OH. Mặt khác do BC ⊥ mp(OAA') nên BC ⊥ OH

⇒ OH ⊥ mp(ABC) ⇒ OH ⊥ AA'. Vì tam giác vuông OAA' cố định nên H cố định.

b) Các điểm B', C' thuộc mặt phẳng cố định (A; d') và đều nhìn đoạn thẳng AH cố định dưới một góc vuông nên chúng đều thuộc đường tròn (C) đường kính AH trong mặt phẳng (A; d').

Do AA' ⊥ BC nên BA và BH không thể vuông góc với AA' nên B' ≠ A, H, tương tự C' ≠ A, H.

Ngược lại, lấy B' ∈ (C) \ {A; H}. Gọi C = AB' ∩ d' và B = HB' ∩ d'. Ta phải chứng minh: mp(C; d) ⊥ mp(B; d).

Thật vậy, do AC ⊥ BB', AC ⊥ OH nên AC ⊥(OBB') ⇒ OB ⊥ AC.

Mà OB ⊥ OA ⇒ OB ⊥ mp(OAC) ⇒ mp(B; d) ⊥ mp(C; d).

Chứng minh tương tự đối với C'. Vậy tập hợp các điểm B', C' là đường tròn (C) trừ hai điểm A, H và trong mặt phẳng (A; d')

Bài toán 17. 44: Cho tứ diện ABCD và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc d để $X = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 + 4MD^2$ bé nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm sao cho: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{ID} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

Do đó I cố định. Hạ IH ⊥ d thì H cố định.

Ta có $X = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 + 4\overrightarrow{MD}^2$

$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2$

$= 10MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2IC^2 + 4ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{ID})$

$= 10MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 4ID^2$

$\geq 10.HI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 4ID^2$: không đổi.

Vậy X bé nhất khi M là hình chiếu H của I lên d.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 17. 1: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng : AB ⊥ CD, IJ ⊥ AB và IJ ⊥ CD.

Hướng dẫn

Dùng tích vô hướng, chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = 0$, $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = 0$.

Bài tập 17. 2: Cho tứ diện đều ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm I, J, K lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AC, AD sao cho $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KD}$ trong đó k là số cho trước.

a) Chứng minh rằng MN ⊥ IJ và MN ⊥ JK.

b) Chứng minh rằng AB ⊥ CD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh tích vô hướng bằng 0.

b) Chứng minh tích vô hướng bằng 0.

Bài tập 17. 3: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a và BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

Hướng dẫn

Dùng tích vô hướng: $\cos(AB, SC) = |\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{SC})| = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}}{AB.SC}$

Kết quả góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng 60°.

Bài tập 17. 4: Cho tứ diện ABCD có CD = $\dfrac{4}{3}$AB. Gọi I, J, K là trung điểm của BC, AC, BD mà CD vuông góc với IJ và AB. Tính $\dfrac{AB}{JK}$

Hướng dẫn

Kết quả $\dfrac{AB}{JK} = \dfrac{6}{5}$

Bài tập 17. 5: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt chia các đoạn thẳng AD' và DB theo cùng tỉ số k (k ≠ 0, 1). Chứng minh:

a) MN luôn luôn song song với mp(A'D'BC)

b) Nếu $k = -\dfrac{1}{2}$ thì MN // A'C và MN ⊥ AD' và MN ⊥ DB.

Hướng dẫn

Chọn cơ sở $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

a) Biểu diễn $\overline{MN}$ theo $\overline{A'D'}; \overline{A'B}$

b) Chứng minh cùng phương.

Bài tập 17. 6: Tứ diện OABC có các cạnh OA = OB = OC = a và $A\hat{O}B = A\hat{O}C = 60^o$, $B\hat{O}C = 90^o$.

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

b) Chứng minh rằng $OA \perp BC$ và nếu gọi I, J lần lượt là trung điểm của OA, BC thì $IJ \perp OA$ và $IJ \perp BC$. Tính đoạn IJ.

Hướng dẫn

a) Ta chứng minh $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) Kết quả $IJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài tập 17. 7: Cho tam giác ABC vuông tại B, AB = 2a, BC = a. Trên hai tia Ax và Cy vuông góc với mp(ABC) và ở cùng phía đối với (ABC), lần lượt lấy hai điểm A' và C' sao cho AA' = 2a, CC' = x. Xác định x sao cho:

a) $A'BC' = 90^o$.

b) $B\hat{A'}C = 90^o$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'BC').

Hướng dẫn

a) Kết quả $x = 0$;

b) Kết quả $x = 4a$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Bài tập 17. 8: Tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a, SA vuông góc với (ABC), SA = a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α).

Hướng dẫn

Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB nên song song với BC. Kết quả $S = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{32}$.

Bài tập 17. 9: Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên nửa đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng (ABC) ta lấy một điểm S di động. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Tìm tập hợp các điểm H và K.

b) Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

a) Kết quả Tập hợp các điểm K là nửa đường tròn (L_1) đường kính AC nằm trong mặt phẳng (C, At) và nằm về phía nửa đường thẳng At, trừ điểm C. Tập hợp các điểm H là nửa đường tròn đường kính AB nằm trong mặt phẳng (B; At) và nằm về phía nửa đường thẳng At, trừ điểm B.

b) Kết quả I là giao điểm của BC và HK.

Bài tập 17. 10: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính:

a) Khoảng cách từ A đến mp(A'BD).

b) Khoảng cách từ A', B, C, D' đến đường thẳng AC'.

Hướng dẫn

a) Hình chiếu A lên mp(A'BD) là trực tâm H của tam giác A'BD.

Kết quả d(A; (A'BD)) = $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

b) Kết quả khoảng cách từ A', B, C, D' đến AC' đều bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài tập 17. 11: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^o. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh AA' và B'C' vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

Hướng dẫn

a) Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') là trung điểm B'C'.

Kết quả AH = $\dfrac{a}{2}$.

b) Kết quả HK = $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài tập 17. 12: Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M thuộc mp(ABC) sao cho :

a) $|\ 4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MD}\ |$ nhỏ nhất.

b) $2MA^2 + 4MB^2 + 5MC^2 - 2014MD^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Kết quả M là hình chiếu của điểm I là điểm sao cho $4\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - 6\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ lên mặt phẳng (ABC).

b) Kết quả M là hình chiếu của điểm E là điểm sao cho $2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} + 5\overrightarrow{EC} - 2014\overrightarrow{ED} = \vec{0}$ lên mặt phẳng (ABC).

Chuyên đề 18: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN VÀ KHỐI CẦU

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Thể tích của khối đa diện

- Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó: $V = S_đ.\,h$.
- Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích số của ba kích thước: $V = abc$.
- Thể tích của một khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp đó: $V = \frac{1}{3}\; S_đ.\,h$.
- Thể tích khối chóp cụt: $V = \frac{1}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')h$.

Chú ý:

1) Tứ diện hay hình chóp tam giác có 4 cách chọn đỉnh.
2) Tứ diện nội tiếp hình hộp, tứ diện gần đều (có 3 cặp cạnh đối bằng nhau) nội tiếp hình hộp chữ nhật và tứ diện đều nội tiếp hình lập phương.
3) Khi tính toán các đại lượng, nếu cần thì đặt ẩn rồi tìm phương trình để giải ra ẩn đó.
4) Để tính diện tích, thể tích có khi ta tính gián tiếp bằng cách chia nhỏ các phần hoặc lấy phần lớn hơn trừ đi các phần dư hoặc dùng tỉ số diện tích, tỉ số thể tích: $\frac{S(AB'C')}{S(ABC)} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$; $\frac{V(S.A'B'C')}{V(S.ABC)} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

Mặt cầu và khối cầu

Tập hợp các điểm trong không gian, cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng R. Kí hiệu là S(O; R): $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$

Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $S = 4\pi R^2$

Khối cầu bán kính R có thể tích là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Chú ý:

1) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng, mặt phẳng: dựa vào so sánh bán kính R và khoảng cách d từ tâm mặt cầu O đến đường thẳng, mặt phẳng tương ứng. Nếu $d < R$ thì mp cắt mặt cầu theo đường tròn giao tuyến có tâm là hình chiếu O lên mp, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
2) Qua điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O; R), có vô số tiếp tuyến với mặt cầu, các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

Mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình đa diện

– Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của hình chóp đó có đường tròn ngoại tiếp.

– Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là lăng trụ đứng và đáy của hình lăng trụ đó có đường tròn ngoại tiếp.

Xác định tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn (C), gọi Δ là trục của đường tròn đó và gọi O là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, chẳng hạn cạnh SA_1 thì $OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

– Mặt cầu tiếp xúc với mọi mặt của hình đa diện gọi là mặt cầu nội tiếp hình đa diện và hình đa diện gọi là ngoại tiếp mặt cầu đó.

Xác định tâm I của mặt cầu nội tiếp khối đa diện. Với 2 mặt song song thì I thuộc mặt phẳng song song cách đều, với 2 mặt phẳng cắt nhau thì I thuộc mặt phân giác (chứa giao tuyến và qua một đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng lần lượt thuộc 2 mặt phẳng, vuông góc với giao tuyến).

Chú ý:

1) Với hình chóp đều, lăng trụ đều thì sử dụng trục của hình khối.

2) Nếu khối đa diện có mặt cầu nội tiếp thì bán kính $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$

3) Bài toán cực trị có thể dùng bất đẳng thức cơ bản và đạo hàm.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 18. 1: Tính thể tích của khối tám mặt đều có cạnh bằng a.

Hướng dẫn giải

Ta phân chia khối tám mặt đều cạnh a với các đỉnh là A, B, C, D, E, F thành hai khối chóp tứ giác đều A.BCDE và F.BCDE . Vì hai khối chóp đó bằng nhau nên có thể tích bằng nhau, do đó thể tích V của khối tám mặt đều bằng hai lần thể tích V_1 của khối chóp A.BCDE.

Vì BCDE là hình vuông cạnh a với tâm O và tam giác ABD là tam giác vuông cân đỉnh A

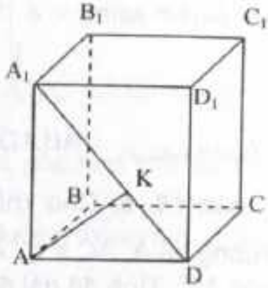
nên: $V_1 = \dfrac{1}{3}S_{BCDE}.AO = \dfrac{1}{3}a^2.a\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^3\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

Suy ra khối tám mặt đều có thể tích là: $V = 2V_1 = a^3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài toán 18. 2: Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5.

a) Hạ $AK \perp A_1D$ ($K \in A_1D$). Chứng minh rằng: AK = 2.

b) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.



Hướng dẫn giải

a) $AB \,//\, A_1B_1 \Rightarrow AB \,//\, (A_1B_1D)$

$\Rightarrow d(A, (A_1B_1D)) = d(AB, A_1D)$

Ta có $A_1B_1 \perp (AA_1D_1D) \Rightarrow A_1B_1 \perp AK$.

Mặt khác: $A_1D \perp AK \Rightarrow AK \perp (A_1B_1D)$.

Vậy $AK = d(A, (A_1B_1D)) = d(AB, A_1D) = 2$.

b) Xét tam giác vuông A_1AD, ta có: $AK^2 = A_1K.KD$

Đặt $A_1K = x \Rightarrow 4 = x(5 - x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

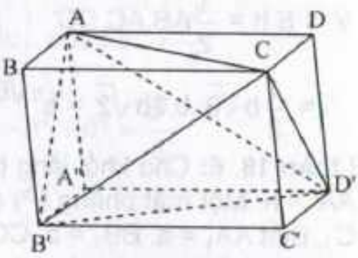
Với x = 1, $AD = \sqrt{AK^2 + KD^2} = 2\sqrt{5}$, $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{5}$

Khi đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 20\sqrt{5}$.

Với x = 4, tương tự ta có : $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 10\sqrt{5}$.

Bài toán 18. 3: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích V. Hãy tính thể tích của tứ diện ACB'D'.

Hướng dẫn giải

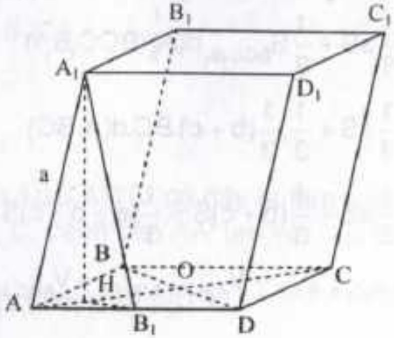


Các tứ diện BACB', C'B'CD', DD'AC, A'AB'D' đều có thể tích bằng $\frac{V}{6}$.

Do đó: $V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{V}{6} = \frac{V}{3}$

Bài toán 18. 4: Cho khối hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a, $\widehat{A_1AB} = \widehat{BAD} = \widehat{A_1AD} = \alpha$ $(0^o < \alpha < 90^o)$. Hãy tính thể tích của khối hộp.

Hướng dẫn giải



Hạ $A_1H \perp AC$ ($H \in AC$)

Tam giác A_1BD cân (do $A_1B = A_1D$) suy ra $BD \perp A_1O$.

Mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (A_1AO)$

$\Rightarrow BD \perp A_1H$. Do đó $A_1H \perp (ABCD)$.

Đặt $\widehat{A_1AD} = \varphi$

Hạ $A_1K \perp AD \Rightarrow HK \perp AK$. Ta có:

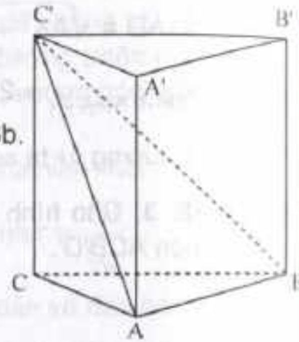
$\cos\varphi.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA_1}.\frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA_1} = \cos\varphi$ nên $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

$$\Rightarrow A_1H = a\sin\varphi = a\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$$

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AB.AD.\sin\alpha.A_1H = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

Bài toán 18. 5: Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A, AC = b, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mp(AA'C'C) một góc 30°. Tính độ dài đoạn thẳng AC' và thể tích khối lăng trụ đã cho.

Hướng dẫn giải



Ta có $BA \perp AC$, $BA \perp AA'$ nên $BA \perp (ACC'A')$.

Vậy AC' là hình chiếu của BC' trên mp(ACC'A').

Do đó góc BC'A bằng 30° nên:

$AC' = AB\cot30^\circ = AC\tan60^\circ\cot30^\circ = b\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3b$.

Ta có: $CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 8b^2$

Do đó $CC' = 2b\sqrt{2}$.

$$V = S.h = \frac{1}{2}AB.AC.CC'$$

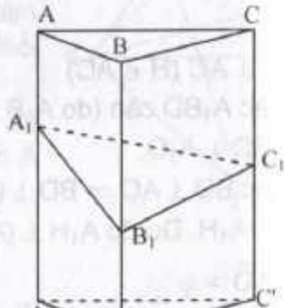
$$= \frac{1}{2}b\sqrt{3}.b.2b\sqrt{2} = b^3\sqrt{6}.$$

Bài toán 18. 6: Cho khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S và AA' = h. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại A_1, B_1 và C_1. Biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

a) Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được chia bởi mp (P).

b) Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BCC_1B_1}$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}S_{BCC_1B_1}d(A_1(BCC_1B_1))$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(b+c).BC.d(A,BC)$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}(b+c)S = \frac{1}{3}(a+b+c)S$$

$$V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} - V_{ABC.A_1B_1C_1}$$

$$= Sh - \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{3}(3h-a-b-c)S$$

b) Điều kiện $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'}$

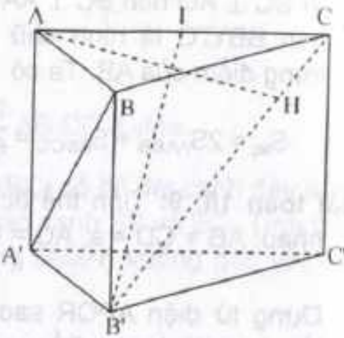
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{2}Sh \Leftrightarrow 2(a+b+c) = 3h.$$

Bài toán 18. 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng d. Hãy tính:

a) Khoảng cách từ điểm A tới đường thẳng B'C và góc hợp bởi hai đường thẳng A'B và B'C.

b) Thể tích tứ diện A'BB'C và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C.

Hướng dẫn giải



a) Tam giác AB'C là tam giác cân

$B'C = B'A = d\sqrt{2}$, $AC = d$,

gọi B'I và AH là các đường cao.

Ta có $AH \cdot B'C = AC.B'I$

$\Rightarrow AH.d\sqrt{2} = d.B'I$

Vậy $AH = \dfrac{B'I}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{B'C^2 - IC^2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{d\sqrt{14}}{4}$

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ thì $\vec{b}.\vec{c} = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|.\cos 60^\circ = \dfrac{d^2}{2}$

Ta có: $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{B'C} = \left(\vec{b} - \vec{a}\right).\left(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}\right) = \dfrac{d^2}{2} - d^2 + d^2 = \dfrac{d^2}{2}$

Do đó $\cos(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'C}) = \dfrac{\left|\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{B'C}\right|}{A'B.B'C} = \dfrac{1}{4}$.

b) $V_{A'BB'C} = V_{A'.BB'C}\ \dfrac{1}{3}.\dfrac{d^2}{2}.\dfrac{d\sqrt{3}}{2} = \dfrac{d^3\sqrt{3}}{12}$

Gọi h là khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C thì $V_{(A'BB'C)} =$ $\dfrac{1}{6}A'B.B'C.h.\sin\varphi$, suy ra: $\dfrac{d^3\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1}{6}d\sqrt{2}.d\sqrt{2}.h\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}$

Từ đó ta tính được: $h = \dfrac{d\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 18. 8: Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C, cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°.

Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

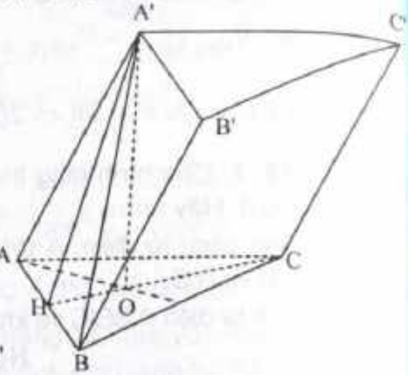
Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Vì A'A = A'B = A'C nên $A'O \perp mp(ABC)$.

Do đó $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Ta có:

$A'O = AO\tan60^\circ$

$$= AO\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$$



Vậy thể tích cần tìm là:

$$V = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

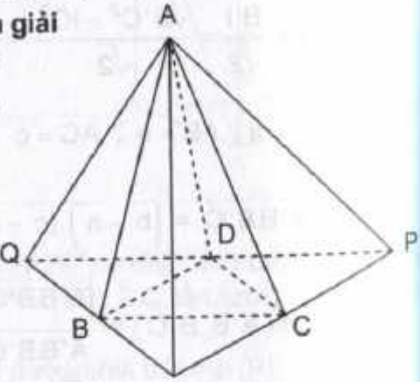
Vì $BC \perp AO$ nên $BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$ nên BB'C'C là hình chữ nhật. Gọi H là trung điểm của AB. Ta có:

$$S_{xq} = 2S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} = 2A'H.AB + BB'.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{13}+2).$$

Bài toán 18. 9: Tính thể tích khối tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau: AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.

Hướng dẫn giải

Dựng tứ diện APQR sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm các cạnh QR, RP, PQ.



Ta có $AD = BC = \frac{1}{2}PQ$

$\Rightarrow AQ = \frac{1}{2}PQ$ mà D là trung điểm của PQ $\Rightarrow AQ \perp AP$.

Tương tự: $AQ \perp AR$, $AR \perp AP$.

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR} = \frac{1}{4}.\frac{1}{6}AP.AQ.AR$

Xét các tam giác vuông APQ, AQR, ARP ta có:

$AP^2 + AQ^2 = 4c^2$, $AQ^2 + AR^2 = 4a^2$, $AR^2 + AP^2 = 4b^2$

$\Rightarrow AP = \sqrt{2}.\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$, $AQ = \sqrt{2}.\sqrt{a^2-b^2+c^2}$

$AR = \sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

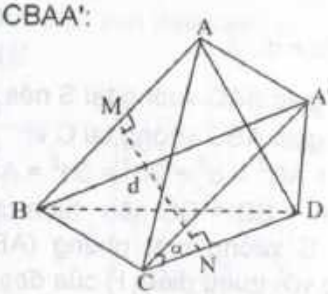
Vậy: $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2).(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

Đặc biệt : Khi a=b=c thì tứ diện đều $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Bài toán 18. 10: Cho tứ diện ABCD.

Chứng minh $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.\ d(AB,CD).\sin(AB,CD)$

Hướng dẫn giải



Trong mặt phẳng (ABC) vẽ hình bình hành CBAA':

Ta có AA'//BC nên $V_{ABCD} = V_{A'BCD}$

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD với M ∈ AB, N ∈ CD.

Vì BM // CA' nên $V_{BA'CD} = V_{MA'CD}$

Ta có: MN ⊥ AB nên MN ⊥ CA'.

Ngoài ra MN ⊥ CD.

nên MN ⊥ mp(CDA').

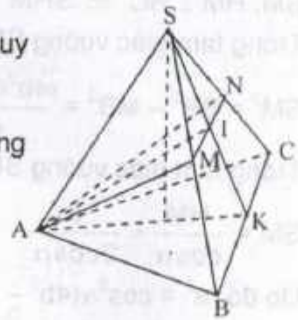
Ta có: g(AB,CD) = g(A'C, CD) = α, do đó:

$V_{MA'CD} = \frac{1}{3}S_{A'CD}.MN = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CA'.CD.\sin\alpha.MN = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha.$

Bài toán 18. 11: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của BC và I = SK ∩ MN.



Từ giả thiết suy ra $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, MN // BC, suy ra I là trung điểm của SK và MN.

Ta có ΔSAB = ΔSAC nên hai trung tuyến tương ứng AM = AN, do đó ΔAMN cân tại A, suy ra AI ⊥ MN.

Mà (SBC) ⊥ (AMN) ⇒ AI ⊥ (SBC) ⇒ AI ⊥ SK.

Do đó ΔSAK cân tại A, suy ra $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{a^2}{2}$ nên: $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

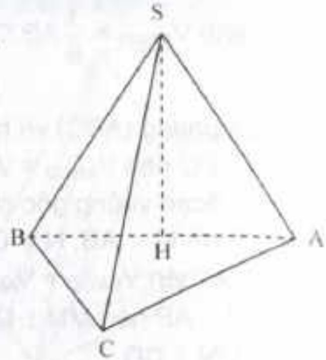
Vậy: $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt).

Bài toán 18. 12: Cho tứ diện SABC có các cạnh bên SA = SB = SC = d và $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Tính thể tích tứ diện SABC.

Hướng dẫn giải

Tam giác SBC đều nên BC = d.

Tam giác SAB cân và góc ASB = 120°
nên SBA = SAB = 30°. Gọi H là trung
điểm của AB ta có AH = BH = $\frac{d\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow$ AB = d$\sqrt{3}$.



Tam giác SAC vuông tại S nên AC = d$\sqrt{2}$.
Tam giác ABC vuông tại C vì:
$BC^2 + AC^2 = d^2 + 2d^2 = 3d^2 = AB^2$.
Vì SA = SB = SC nên hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC) phải trùng với trung điểm H của đoạn AB.

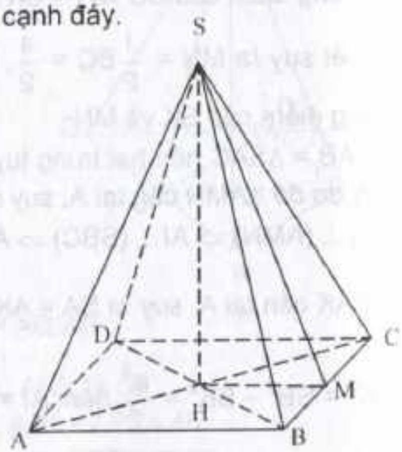
Vì ASB = 120° nên SH = $\frac{SB}{2} = \frac{d}{2}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AC = \frac{d^2\sqrt{2}}{2}$

$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{d}{2}.\frac{d^2\sqrt{2}}{2} = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}$.

Bài toán 18. 13: Tính thể tích hình chóp đều S.ABCD biết SA = b và góc giữa mặt bên và đáy bằng α.

Hướng dẫn giải

Hạ SH ⊥ (ABCD) thì H là tâm hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm BC thì SM, HM ⊥ BC $\Rightarrow$ SHM = α. Gọi a là cạnh đáy.



Trong tam giác vuông SMB có:

$SM^2 = SB^2 - MB^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4}$

Trong tam giác vuông SMH có:

$SM = \frac{HM}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

Do đó: $a^2 = \cos^2\alpha(4b^2 - a^2)$

$\Rightarrow a^2 = \frac{4b^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$ nên a

$= \frac{2b\cos\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}$

Trong tam giác SHM có: SH = HM.tanα = $\frac{b\sin\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1+\cos^2\alpha}$

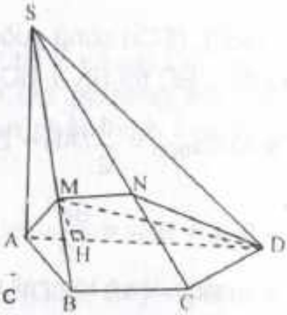
Suy ra $V = \frac{1}{3}.SH.a^2 = \frac{4}{3}\frac{b^3\sin\alpha.\cos^2\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{(1+\cos^2\alpha)^2}$.

Bài toán 18. 14: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là nửa lục giác đều AB = BC = CD = a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = a $\sqrt{3}$.

a) Tính thể tích hình chóp.

b) Tìm trên cạnh bên SB một điểm M khác B sao cho $\widehat{AMD} = 90^\circ$. Mặt phẳng (AMD) cắt hình chóp theo một thiết diện, tính diện tích thiết diện đó.

Hướng dẫn giải



a) $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.3.\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$

b) Ta dùng vectơ với hệ vectơ cơ sở:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$.

Đặt $\overrightarrow{SM} = \alpha.\overrightarrow{SB} = \alpha(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) = \alpha(\vec{a} - \vec{c})$

Với $0 \le \alpha < 1$. Ta có:

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SM} = -\vec{c} - \alpha(\vec{a} - \vec{c}) - \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}$

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}$.

Ta có: $\widehat{AMD} = 90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = 0$

$\Leftrightarrow [-\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}][-\alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c} + \vec{b}] = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2a^2 - \alpha(a^2) + (\alpha - 1)^2.3a^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + (\alpha^2 - 2\alpha + 1)3 = 0$

$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 7\alpha + 3 = 0$, chọn $\alpha = \frac{3}{4}$

Do đó $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$ nên M $\in$ đoạn SB sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{3}{4}$.

Thiết diện là hình thang AMND.

$\frac{MN}{BC} = \frac{SM}{SB} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{3}{4}a$. Hạ MH $\perp$ AD.

Đặt $\overrightarrow{AH} = \beta\overrightarrow{AD}$ thì $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} = \beta\vec{b} - \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow [\beta\vec{b} - \alpha\vec{a} + (\alpha - 1)\vec{c}]\vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \beta(4a^2) - \alpha(a^2) + 0 = 0 \Leftrightarrow \beta(4a^2) - \frac{3}{4}a^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{16}$.

Do đó $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{16}\overrightarrow{AD}$. Ta có $\overrightarrow{MH} = \frac{3}{16}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}$

Nên $MH^2 = \left(\frac{3}{16}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{256}(36a^2 + 144a^2 + 48a^2 - 72a^2) = \frac{156a^2}{256}$

$\Rightarrow MH = \frac{a}{16}\sqrt{156} = \frac{a}{8}\sqrt{39}$

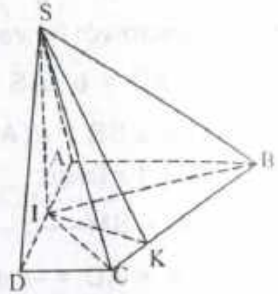
Diện tích $S_{AMND} = \frac{1}{2}(AD+MN).MH = \frac{11a^2}{64}\sqrt{39}$

Bài toán 18. 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^o. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Hướng dẫn giải

Vì (SBI), (SCI) cùng vuông góc với đáy nên SI ⊥ (ABCD).

Hạ IK ⊥ BC thì SK ⊥ BC ⇒ SKI = 60^o.



Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) . AD = 3a^2$

Và $S_{ABI} + S_{CDI} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow S_{IBC} = \frac{3a^2}{2}$.

Ta có $BC = (AB - CD)^2 + AD^2 = 5a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{5}$

và $S_{IBC} = \frac{1}{2}BC.IK \Rightarrow IK = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = \frac{9a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} . SI = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

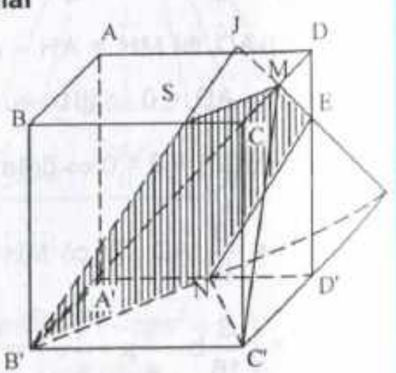
Bài toán 18. 16: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm của CD và N là trung điểm của A'D'. Tính:

a) Thể tích khối tứ diện B'MC'N, góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng B'M và C'N.

b) Thể tích hai phần của khối lập phương bị phân chia bởi mặt phẳng đi qua B', M, N.

Hướng dẫn giải

a) Xem tứ diện B'MC'N là khối chóp đỉnh M và đáy là tam giác B'C'N thì diện tích đáy là $\frac{a^2}{2}$ và đường cao là a, vậy thể tích của nó là $V = \frac{a^3}{6}$.



Gọi M' là trung điểm của C'D' thì B'M có hình chiếu trên mp(A'B'C'D') là B'M'.

Ta có B'M' ⊥ C'N nên B'M ⊥ C'N.

$B'M^2 = B'C'^2 + CC'^2 + CM^2 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow B'M = \frac{3a}{2}$

$$C'N^2 = C'D'^2 + D'N^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow C'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Thể tích tứ diện B'MC'N:

$V = \frac{1}{6}B'M.C'N.d.\sin 90^\circ$, trong đó d là khoảng cách giữa B'M và C'N nên V =

$$\frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.d = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}d \Rightarrow\ d = \frac{4a\sqrt{5}}{15}.$$

b) Kéo dài B'N cắt C'D' tại I, đường thẳng MI cắt DD' tại E và cắt CC' tại J. Nối JB' cắt BC tại K. Ta được thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mp(B'MN) là ngũ giác B'NEMK. Gọi V_1 là thể tích phần hình hộp bị phân chia có chứa điểm C', C và D'.

$D'I = a,\ ED' = \frac{2a}{3},\ CK = \frac{a}{4}$

Ta có $V_1 = V_{KCMB'C'I} - V_{(END'I)}$ trong đó KCMB'C'I là một khối chóp cụt có đường cao là a và diện tích hai đáy là

$$S_{B'C'I} = a^2,\ S_{KCM} = \frac{1}{2}CM.CK = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{4} = \frac{a^2}{16}$$

$$V_{(KCMB'I)} = \frac{a}{3}\left(a^2 + \frac{a^2}{16} + \sqrt{a^2.\frac{a^2}{16}}\right) = \frac{21a^3}{48}$$

$$V_{(END'I)} = \frac{1}{3}S_{(ND'I)}.ED' = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}.\frac{2a}{3} = \frac{a^3}{18} \Rightarrow\ V_1 = \frac{21a^3}{48} - \frac{a^3}{18} = \frac{55a^3}{144}$$

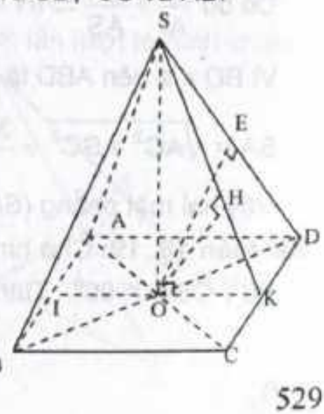
Và phần còn lại: $V_2 = a^3 - V_1 = a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144}$.

Bài toán 18. 17: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD tâm O có cạnh AB = a. Đường cao SO của hình chóp vuông góc với mặt đáy (ABCD) và có SO = a.

a) Tính thể tích hình chóp.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng : AC và SD; SC và AB.

Hướng dẫn giải



a) $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.a = \frac{a^3}{3}$

b) Ta có $AC \perp BD$, $AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SOD)$.

Hạ $OE \perp SD$ thì d(AC; SO) = OE

Tam giác SOD vuông tại D

$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vì AB // CD nên AB // (SCD).

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD thì ta có O là trung điểm của IK.

Do đó:

$d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = d(I; (SCD)) = 2d(O; (SCD))$

Ta có $CD \perp SO$, OK nên $CD \perp (SOK) \Rightarrow (SCD) \perp (SOK)$

Hạ $OH \perp SK$ thì $OH \perp (SCD)$ nên $d(O; (SCD)) = OH$

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

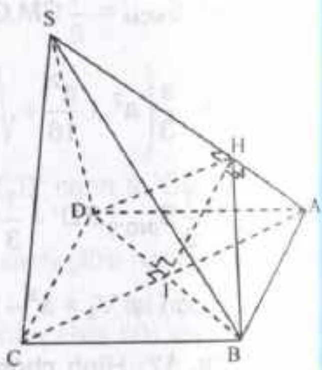
Vậy $d(SC; AB) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 18. 18: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm I, có cạnh bằng a và đường chéo BD = a. Cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a) Tính thể tích hình chóp.

b) Chứng minh (SAB) vuông góc (SAD).

Hướng dẫn giải



a) $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SC = \frac{1}{3}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

b) Vì ABCD là hình thoi nên $BD \perp AC$

mà $BD \perp SC \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SA$.

Trong mặt phẳng (SAC) hạ $IH \perp SA$ thì $SA \perp (BDH)$.

Do đó $BH \perp SA$ và $DH \perp SA$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc giữa hai đường thẳng HB, HD.

Hai tam giác vuông AHI và ACS có góc nhọn A chung nên đồng dạng.

Do đó $\frac{IH}{AI} = \frac{SC}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI.SC}{AS}$

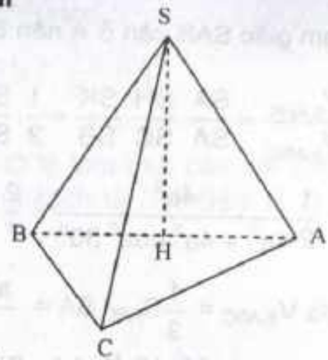
Vì BD = a nên ABD là tam giác đều, do đó: $AC = 2AI = a\sqrt{3}$.

$SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$ nên tam giác BHD vuông tại H.

Vậy hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc.

Bài toán 18. 19: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = a, $ASB = 120^\circ$, $BSC = 60^\circ$, $CSA = 90^\circ$. Tính thể tích hình chóp.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết suy ra AC = a $\sqrt{2}$

BC = a, AB = a $\sqrt{3}$

nên $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

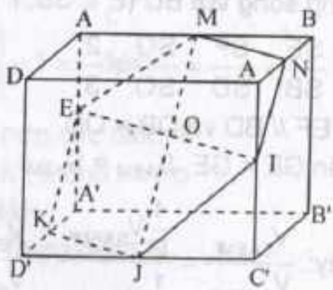
Hạ SH ⊥ mp(ABC), do SA = SB = SC nên HA = HB = HC mà ΔABC vuông tại C, nên H là trung điểm của cạnh huyền AB. Ta có:

$$SH^2 = SA^2 - \frac{AB^2}{4} = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$$

Thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3}\ S_{ABC}.\ SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Bài toán 18. 20: Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng sáu trung điểm của sáu cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A' và A'A nằm trên một mặt phẳng và mặt phẳng đó chia khối hộp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Gọi M, N, I, J, K, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A', A'A của khối hộp ABCD.A'B'C'D', còn O là giao điểm của các đường chéo của khối hộp.

Ta có ba đường thẳng MN, EI và KJ đôi một song song và chúng lần lượt đi qua ba điểm thẳng hàng M, O, J nên ba đường thẳng đó đồng phẳng.

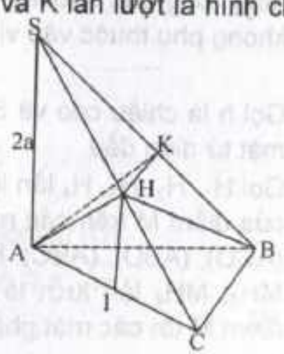
Vậy sáu điểm M, N, I, J, K, E cùng nằm trên một mặt phẳng (α).Mặt phẳng (α) chia khối hộp thành hai khối đa diện, đối xứng nhau qua điểm O nên có thể tích bằng nhau.

Bài toán 18. 21: Cho khối chóp S.ABC có đường cao SA bằng 2a, tam giác ABC vuông ở C có AB = 2a, $\widehat{CAB} = 30^o$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB.

a) Chứng minh rằng AH ⊥ SB và SB ⊥ (AHK).

b) Tính thể tích khối đa diện ABCHK.

Hướng dẫn giải



a) Ta có AH ⊥ SC, AH ⊥ CB

Suy ra AH ⊥ (SBC) ⇒ AH ⊥ SB.

Mà SB ⊥ AK, suy ra SB ⊥ (AHK).

b) Tam giác SAB cân ở A nên $SK = \frac{1}{2}SB$.

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SC}.\frac{SK}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}\frac{SH.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SA^2 + AC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2\cos^2 30^o} = \frac{2}{7} \Rightarrow V_{ABCHK} = \frac{5}{7}V_{S.ABC}$$

Mà $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{ABCHK} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{21}$.

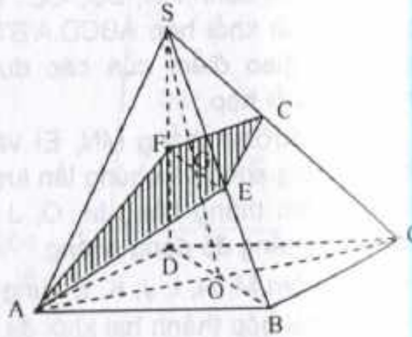
Bài toán 18. 22: Khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC. Một mặt phẳng (α) đi qua AM và song song với BD chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của đáy ABCD, AM cắt SO tại G

Vì G là trọng tâm của tam giác SAC nên $\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$

Mặt khác mp(α) // BD nên sẽ cắt mp(SBD) theo giao tuyến EF qua G và song song với BD ($E \in SB$, $F \in SD$), vì vậy:



$$\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$$

Vì EF // BD và OB = OD

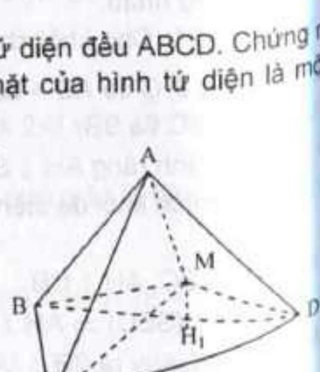
Nên GE = GE, $S_{AEM} = S_{AFM}$.

Vậy: $$\frac{V_{SAEMF}}{V_{SABCD}} = \frac{\frac{1}{2}V_{SAEMF}}{\frac{1}{2}V_{SABCD}} = \frac{V_{SAEM}}{V_{SABC}}$$

$$= \frac{SA}{SA}.\frac{SE}{SB}.\frac{SM}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Bài toán 18. 23: Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. .

Hướng dẫn giải



Gọi h là chiều cao và S là diện tích các mặt tứ diện đều.

Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Khi đó MH_1, MH_2, MH_3, MH_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M tới các mặt phẳng đó. Ta có:

$$V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} = V_{ABCD}.$$

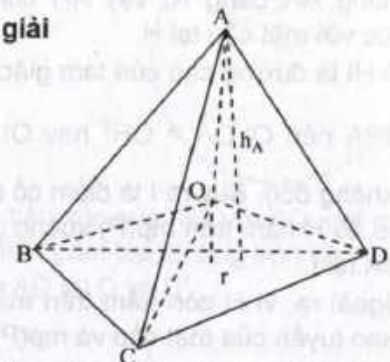
$$\Rightarrow \frac{1}{3}S.MH_1 + \frac{1}{3}S.MH_2 + \frac{1}{3}S.MH_3 + \frac{1}{3}S.MH_4 = \frac{1}{3}S.h$$

$\Rightarrow MH_1 + MH_2 + MH_3 + MH_4 = h$: Không đổi.

Bài toán 18. 24: Cho tứ diện ABCD có điểm O là tâm mặt cầu nội tiếp, bán kính r. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện.

Chứng minh rằng $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}$

Hướng dẫn giải



Khối tứ diện ABCD được phân chia thành bốn khối tứ diện OBCD, OCAD, OABD, OABC,

ta có: $\frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_A}, \frac{V_{O.CAD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_B}$

$\frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_C}, \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = \frac{r}{h_D}$

Cộng lại thì $\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right) = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 18. 25: Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2, \text{ k cho trước.}$$

Hướng dẫn giải

Gọi I, J là trung điểm cạnh AB, CD và G là trung điểm IJ.

Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} + 2MJ^2 + \frac{CD^2}{2} = k^2$$

$$\Leftrightarrow 2(MI^2 + MJ^2) = k^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(MG^2 + \frac{IJ^2}{2}\right) = k^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{4}\left(k^2 - IJ^2 - \frac{AB^2 + CD^2}{2}\right) = m \text{ hằng số}$$

Nếu $m < 0$ thì tập điểm là $\varnothing$. Nếu $m = 0$ thì tập điểm là $\{G\}$

Nếu $m > 0$ thì tập điểm là mặt cầu tâm G có bán kính $R = \sqrt{m}$

Cách khác: Sử dụng hệ thức: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{O}$.

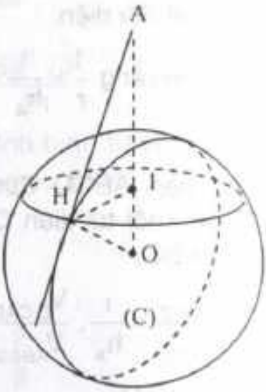
Bài toán 18. 26: Cho điểm A ở ngoài mạt cầu S(O; R).

Một mặt phẳng bất kì đi qua AO, cắt mặt cầu S(O; R) theo một đường tròn (C). Gọi AH là một tiếp tuyến của đường tròn đó tại H.

a) Chứng minh rằng AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H.

b) Hạ HI vuông góc với OA tại I. Chứng minh rằng I là điểm cố định không phụ thuộc vào tiếp tuyến AH. Suy ra quỹ tích các tiếp điểm H.

Hướng dẫn giải



a) Vì AH là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại H nên khoảng cách từ O tới đường thẳng AH bằng R, vậy AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

b) Vì HI là đường cao của tam giác vuông OHA nên $OI.OA = OH^2$ hay $OI = \dfrac{R^2}{d}$ (không đổi). Suy ra I là điểm cố định và do đó H nằm trên mp(P) vuông góc với OA tại I.

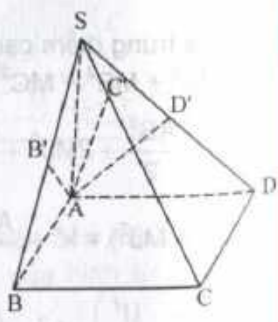
Ngoài ra, vì H còn nằm trên mặt cầu S(O; R) nên H nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mp(P).

Bài toán 18. 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD. Chứng minh:

a) Các điểm A, B', C', D' đồng phẳng

b) Bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp AB'$.

Mà $AB' \perp SB$ nên $AB' \perp (SBC)$, suy ra $AB' \perp SC$.

Tương tự $AD' \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AB'D')$

Gọi I là giao điểm của SO với B'D', gọi C" là giao của AI với SC thì AC" thuộc (AB'D') nên $AC'' \perp SC$. Vậy $C' \equiv C''$

Từ đó A, B', C', D' cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC, tức là các điểm A, B', C', D' đồng phẳng.

b) Theo giả thiết ta có $AB \perp BC$, $AD \perp DC$.

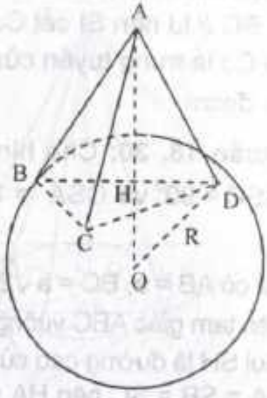
Theo chứng minh trên ta có $AB' \perp B'C$, $AD' \perp D'C$, $AC' \perp C'C$. Từ đó các điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông, do đó chúng cùng thuộc mặt cầu đường kính AC.

Bài toán 18. 28: Cho một tứ diện đều ABCD cạnh a. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, AD lần lượt tại B, C và D.

a) Tính bán kính R của mặt cầu (S).

b) Một mặt cầu (S') có bán kính R' < R, tiếp xúc với mặt cầu (S) và cũng nhận các đường thẳng AD, AB, AC làm các tiếp tuyến. Tính thể tích khối cầu (S').

Hướng dẫn giải

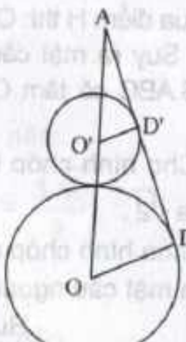


a) Gọi O là tâm của mặt cầu (S) thì OB = OC = OD = R và OBA, OCA, ODA là những tam giác vuông tại các đỉnh B, C, D. Gọi H là giao điểm của AO và mp(BCD) thì H là tâm của tam giác đều BCD.

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $R = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

b) Gọi O' là tâm mặt cầu (S') và D' là điểm tiếp xúc của (S') với AD, cắt cả hai mặt cầu bởi mặt phẳng (ADO) ta được hình gồm hai đường tròn tâm O, tâm O' tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với AD tại D và D'.



Ta có $\dfrac{O'D'}{OD} = \dfrac{AO'}{AO} \Rightarrow \dfrac{R'}{R} = \dfrac{AO - R - R'}{AO}$

Mà $AO = \sqrt{R^2 + a^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + a^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó $R' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{3})$

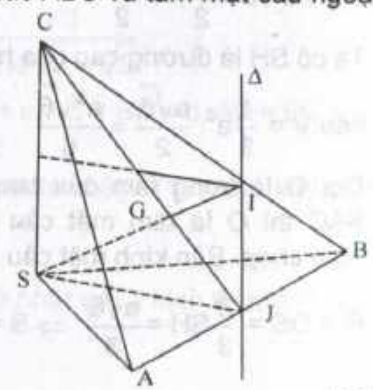
Vậy: $V' = \dfrac{4}{3}\pi R'^3 = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{3})^3$.

Bài toán 18. 29: Cho hình chóp S.ABC biết rằng SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp

b) Chứng minh rằng điểm S, trọng tâm tam giác ABC và tâm mặt cầu ngoại tiếp đó thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Gọi J là trung điểm của AB. Vì tam giác SAB vuông ở S nên trục Δ là đường thẳng vuông góc với mp(SAB) tại J. Gọi I là giao điểm của Δ và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SC thì I cách đều bốn điểm S, A, B, C.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC có tâm I và có bán kính R = IA.

Ta có: $R^2 = IA^2 = IJ^2 + AJ^2 = \left(\frac{SC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$

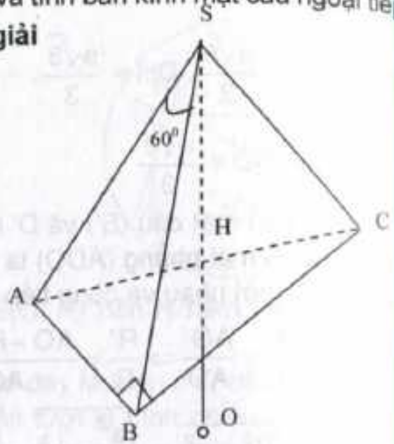
Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = \pi(a^2+b^2+c^2)$

b) Vì SC // IJ nên SI cắt CJ tại một điểm G và do SC = 2IJ nên CG = 2GJ.

Vì CJ lả trung tuyến của tam giác ABC nên G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 18. 30: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 60^0$, BSC = 90^0 và CSA = 120^0. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Hướng dẫn giải



Ta có AB = a, BC = $a\sqrt{2}$ và AC = $a\sqrt{3}$ nên tam giác ABC vuông ở B.

Gọi SH là đường cao của hình chóp, do SA = SB = SC nên HA = HB = HC suy ra H là trung điểm của cạnh AC.

Tâm mặt cầu thuộc trục SH.

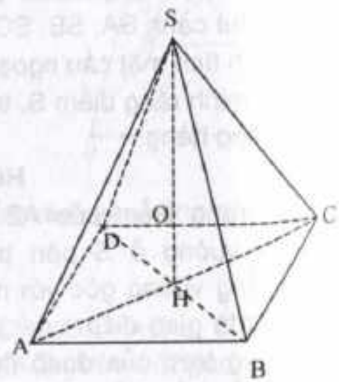
Vì góc HSA = 60^0 nên gọi O là điểm đối xứng với S qua điểm H thì: OS = OA = OC = OB = a. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có tâm O và có bán kính R = a..

Bài toán 18. 31: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính thể tích của hình chóp đã cho.

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Hướng dẫn giải



a) Tam giác SAC là tam giác đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên có đường cao:

$SH = a\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có SH là đường cao của hình chóp

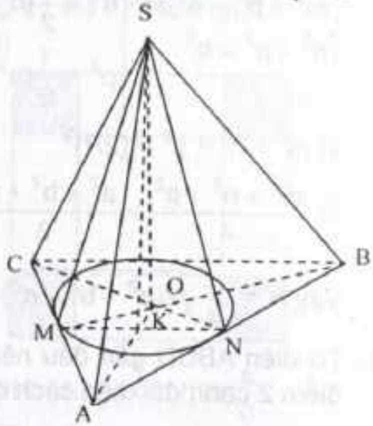
nên $V = \frac{1}{3}a^2\,\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

b) Gọi O là trọng tâm của tam giác đều SAC thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Bán kính mặt cầu là:

$R = OS = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{8}{3}\pi a^2$.

Bài toán 18. 32: Cho hình chóp tam giác đều SABC có đường cao SO = 1 và cạnh đáy bằng $2\sqrt{6}$. Điểm M, N là trung điểm của cạnh AC, AB tương ứng. Tính thể tích hình chóp SAMN và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp đó.

Hướng dẫn giải



Do ABC là tam giác đều nên:

$$AM = MN = NA = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$$

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Do đó: $V_{SAMN} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì SABC là hình chóp đều nên O trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Do đó OM ⊥ AC, ON ⊥ AB và do SO ⊥ (ABC) nên ta suy ra SM ⊥ AC, SN ⊥ AB và SM = SN.

Xét tam giác vuông AOM; SOM:

$$OM = AT\tan 30^0 = \sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2} = ON$$

$SM^2 = OM^2 + SO^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow SM = \sqrt{3}$, nên:

$$S_{SAM} = \frac{1}{2}AM.SM = \frac{3\sqrt{2}}{2};\ S_{SAN} = \frac{1}{2}AN.SN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Gọi K là trung điểm của MN thì SK ⊥ MN.

$SK^2 = SM^2 - KM^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow SK = \frac{\sqrt{6}}{2}$ nên:

$$S_{SMN} = \frac{1}{2}MN.SK = \frac{3}{2};\ S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Do đó bán kính hình cầu nội tiếp: $r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Bài toán 18. 33: Cho tứ diện ABCD với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a.

a) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện R.

b) Chứng minh rằng có mặt cầu nội tiếp hình tứ diện. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp r.

Hướng dẫn giải

a) Xem tứ diện ABCD là một phần của hình chữ nhật với 3 kích thước m, n, p thì ta có hệ: