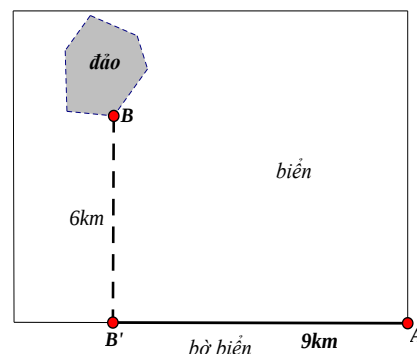


BÀI TOÁN ỨNG DỤNG – THẦY TRẦN TÀI

Nhóm 1: Bài toán về quãng đường

Câu 1. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:



- A. 6.5km B. 6km C. 0km D. 9km

Hướng dẫn giải

Đặt $x = B'C$ (km), $x \in [0; 9]$

$$BC = \sqrt{x^2 + 36}; AC = 9 - x$$

Chi phí xây dựng đường ống là $C(x) = 130.000\sqrt{x^2 + 36} + 50.000(9 - x)$ (USD)

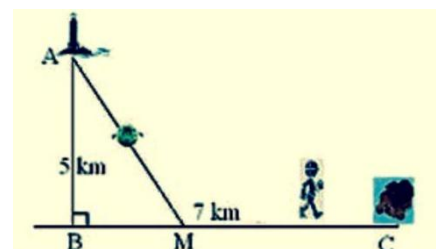
Hàm $C(x)$, xác định, liên tục trên $[0; 9]$ và $C'(x) = 10000 \cdot \left(\frac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 \right)$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow 169x^2 = 25(x^2 + 36) \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$C(0) = 1.230.000; C\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000; C(9) \approx 1.406.165$$

Vậy chi phí thấp nhất khi $x = 2,5$. Vậy C cần cách A một khoảng 6,5km.

Câu 2. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h . Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để người đó đi đến kho nhanh nhất?



- A. 0km B. 7km C. $2\sqrt{5}\text{ km}$ D. $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}\text{ km}$

Hướng dẫn giải

Đặt $BM = x(km) \Rightarrow MC = 7 - x(km), (0 < x < 7)$.

Ta có: Thời gian chèo đò từ A đến M là: $t_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4}(h)$.

Thời gian đi bộ đi bộ đến C là: $t_{MC} = \frac{7-x}{6}(h)$

Thời gian từ A đến kho $t = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$

Khi đó: $t' = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{6}$, cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$

Lập bảng biến thiên, ta thấy thời gian đến kho nhanh nhất khi $x = 2\sqrt{5}(km)$.

Câu 3. Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 60km, khoảng cách từ A đến B là 100km, mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000 USD. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.

A: 40km

B: 45km

C: 55km

D: 60km

Hướng dẫn giải

Gọi $BG = x(0 < x < 100) \Rightarrow AG = 100 - x$

Ta có $GC = \sqrt{BC^2 + BG^2} = \sqrt{x^2 + 3600}$

Chi phí mắc dây điện: $f(x) = 3000.(100 - x) + 5000\sqrt{x^2 + 3600}$

Khảo sát hàm ta được: $x = 45$. Chọn B.

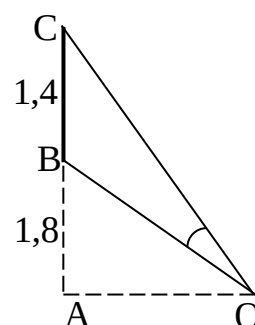
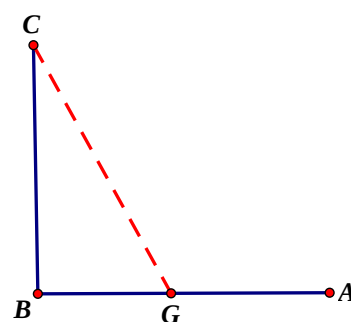
Một màn ảnh chữ nhật cao 1,4 mét được đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho **góc nhìn** lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó ? (BOC gọi là **góc nhìn**)

A. $AO = 2,4m$

B. $AO = 2m$

C. $AO = 2,6m$

D. $AO = 3m$



Hướng dẫn giải

Với bài toán này ta cần xác định OA để góc BOC lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\tan BOC$ lớn nhất. Đặt $OA = x$ (m) với $x > 0$,

$$\text{ta có } \tan BOC = \tan(AOC - AOB) = \frac{\tan AOC - \tan AOB}{1 + \tan AOC \cdot \tan AOB}$$

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

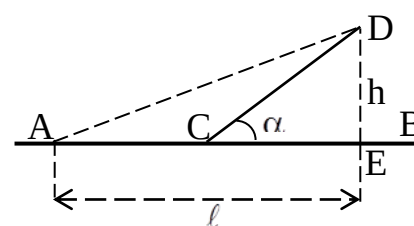
$$f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	2,4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
			-
$f(x)$			$\frac{84}{193}$
			0

Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4m.

Câu 4. Từ cảng A dọc theo đường sắt AB cần phải xác định một trạm trung chuyển hàng hóa C và xây dựng một con đường từ C đến D. Biết rằng vận tốc trên đường sắt là v_1 và trên đường bộ là v_2 ($v_1 < v_2$). Hãy xác định phương án chọn địa điểm C để thời gian vận chuyển hàng từ cảng A đến cảng D là ngắn nhất?

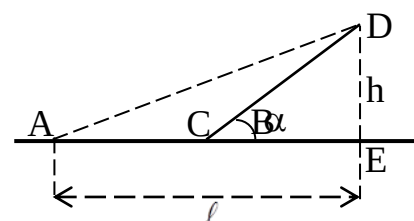


Hướng dẫn giải

Gọi t là thời gian vận chuyển hàng hóa từ cảng A đến cảng D.

$$\text{Thời gian t là: } t = \frac{AC}{v_1} + \frac{CD}{v_2} = \frac{AE - CE}{v_1} + \frac{CD}{v_2} =$$

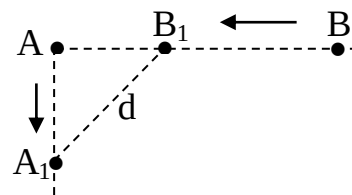
$$= \frac{l - \frac{h}{\tan \alpha}}{v_1} + \frac{\frac{h}{\sin \alpha}}{v_2} = \frac{l - h \cdot \cot \alpha}{v_1} - \frac{h}{v_2 \sin \alpha}$$



Xét hàm số $t(\alpha) = \frac{\ell - h \cdot \cot \alpha}{v_1} - \frac{h}{v_2 \sin \alpha}$. Ứng dụng Đạo hàm ta được $t(\alpha)$ nhỏ nhất khi

$$\cos \alpha = \frac{v_2}{v_1}. \text{ Vậy để } t \text{ nhỏ nhất ta chọn } C \text{ sao cho } \cos \alpha = \frac{v_2}{v_1}.$$

Câu 5. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/ giờ. Hãy xác định mà thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là lớn nhất?



Hướng dẫn giải

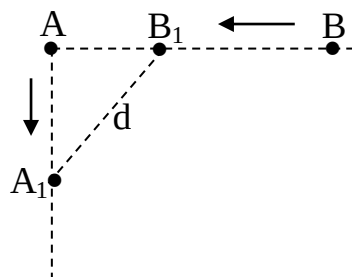
Tại thời điểm t sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d .

$$\text{Ta có } d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5 - 7t)^2 + (6t)^2$$

$$\text{Suy ra } d = d(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}.$$

Áp dụng Đạo hàm ta được d nhỏ nhất

khi $t = \frac{7}{17}$ (giờ), khi đó ta có $d \approx 3,25$ Hải lý.



Nhóm 2: Bài toán diện tích hình phẳng

Câu 6. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(cm^2)$. Hỏi mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

A. $10cm \times 10cm$

B. $20cm \times 5cm$

C. $25cm \times 4cm$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là: $x(cm)$ và $y(cm)$ ($x, y > 0$).

Chu vi hình chữ nhật là: $P = 2(x + y) = 2x + 2y$

Theo đề bài thì: $xy = 100$ hay $y = \frac{100}{x}$. Do đó: $P = 2(x + y) = 2x + \frac{200}{x}$ với $x > 0$

Đạo hàm: $P'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Lập bảng biến thiên ta được: $P_{\min} = 40$ khi $x = 10 \Rightarrow y = 10$.

Kết luận: Kích thước của hình chữ nhật là 10×10 (là hình vuông).

Lưu ý: Có thể đánh giá bằng BĐT Cô-Sy: $P = 2(x + y) \geq 2.2\sqrt{xy} = 4\sqrt{100} = 40$.

Câu 7. Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800(m)$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

A. $200m \times 200m$

B. $300m \times 100m$

C. $250m \times 150m$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là: $x(m)$ và $y(m)$ ($x, y > 0$).

Diện tích miếng đất: $S = xy$

Theo đề bài thì: $2(x + y) = 800$ hay $y = 400 - x$. Do đó: $S = x(400 - x) = -x^2 + 400x$ với $x > 0$

Đạo hàm: $S'(x) = -2x + 400$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 200$.

Lập bảng biến thiên ta được: $S_{\max} = 40000$ khi $x = 200 \Rightarrow y = 200$.

Kết luận: Kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

Lưu ý: Có thể đánh giá bằng BĐT Cô-Sy.

Câu 8. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $S_{\max} = 3600m^2$

B. $S_{\max} = 4000m^2$

C. $S_{\max} = 8100m^2$

D. $S_{\max} = 4050m^2$

Hướng dẫn giải

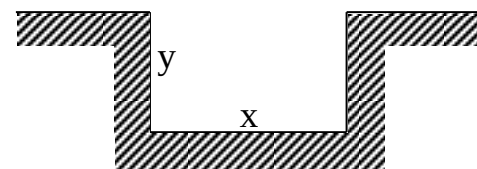
Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu, theo bài ra ta có $x + 2y = 180$. Diện tích của miếng đất là $S = y(180 - 2y)$.

$$\text{Ta có: } y(180 - 2y) = \frac{1}{2} \cdot 2y(180 - 2y) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2y + 180 - 2y)^2}{4} = \frac{180^2}{8} = 4050$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2y = 180 - 2y \Leftrightarrow y = 45m$.

Vậy $S_{\max} = 4050m^2$ khi $x = 90m, y = 45m$.

Câu 9. Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thủy động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)



A. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$

B. $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$

C. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$

D. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$

Hướng dẫn giải

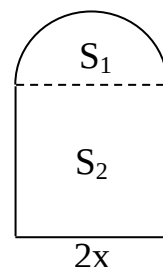
Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của ruộng. Theo bài ra ta có: $S = xy$;

$\ell = 2y + x = \frac{2S}{x} + x$. Xét hàm số $\ell(x) = \frac{2S}{x} + x$. Ta có $\ell'(x) = \frac{-2S}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 2S}{x^2}$.

$\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2S = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2S}$, khi đó $y = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{S}{2}}$.

Dễ thấy với x, y như trên thì ruộng có dạng thủy động học, vậy các kích thước của ruộng là $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$ thì ruộng có dạng thủy động học.

Câu 10. Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là $a(m)$ (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích của sổ là lớn nhất?



A. chiều rộng bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{a}{4 + \pi}$

B. chiều rộng bằng $\frac{a}{4 + \pi}$, chiều cao bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$

C. chiều rộng bằng $a(4 + \pi)$, chiều cao bằng $2a(4 + \pi)$

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt. Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx , tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $a - \pi x$. Diện tích cửa sổ là:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \frac{a - \pi x - 2x}{2} = ax - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x \left(\frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x\right).$$

Dễ thấy S lớn nhất khi $x = \frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x$ hay $x = \frac{a}{4 + \pi}$. (Có thể dùng đạo hàm hoặc đỉnh

Parabol)

Vậy để $S_{\max}$ thì các kích thước của nó là: chiều cao bằng $\frac{a}{4 + \pi}$; chiều rộng bằng $\frac{2a}{4 + \pi}$

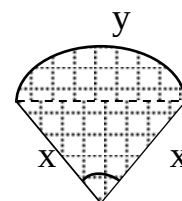
Câu 11. Người ta muốn làm một cánh điều hình quạt sao cho với chu vi cho trước là a sao cho diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?

A. $x = \frac{a}{4}; y = \frac{a}{2}$

B. $x = \frac{a}{3}; y = \frac{a}{3}$

C. $x = \frac{a}{6}; y = \frac{2a}{3}$

D. Đáp án khác



Hướng dẫn giải

Gọi x là bán kính hình quạt, y là độ dài cung tròn. Ta có chu vi cánh điều là $a = 2x + y$. Ta cần tìm mối liên hệ giữa độ dài cung tròn y và bán kính x sao cho diện tích quạt lớn nhất. Dựa vào công thức tính diện tích hình quạt là $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ và độ dài cung tròn $\ell = \frac{2\pi R \alpha}{360}$, ta có diện

tích hình quạt là: $S = \frac{\ell R}{2}$. Vận dụng trong bài toán này diện tích cánh điều là:

$$S = \frac{xy}{2} = \frac{x(a-2x)}{2} = \frac{1}{4}2x(a-2x).$$

Để thấy S cực đại $\Leftrightarrow 2x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \Rightarrow y = \frac{a}{2}$. Như vậy với chu vi cho trước, diện tích của hình quạt cực đại khi bán kính của nó bằng nửa độ dài cung tròn.

Câu 12. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

A. 40cm.

B. $40\sqrt{3}$ cm.

C. 80cm.

D. $40\sqrt{2}$ cm.

Hướng dẫn giải

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x, 0 < x < 60$

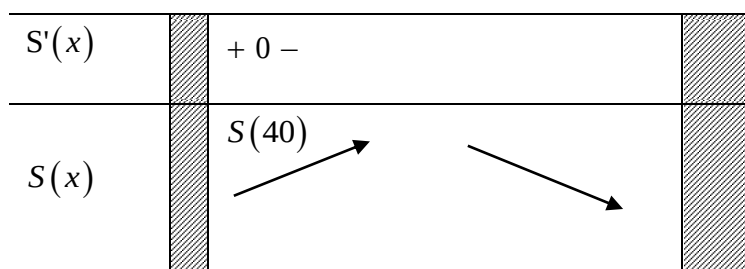
Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$, cạnh góc vuông kia là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{120^2 - 240x}$

Diện tích tam giác ABC là: $S(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{120^2 - 240x}$. Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên khoảng $(0; 60)$

$$\text{Ta có } S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - 240x} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-240}{2\sqrt{120^2 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{2\sqrt{120^2 - 240x}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40$$

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0	40	60
-----	---	----	----



Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $BC = 80$ Từ đó chọn đáp án C

Câu 13. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10cm , biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

A. 80cm^2

B. 100cm^2

C. 160cm^2

D. 200cm^2

Hướng dẫn giải

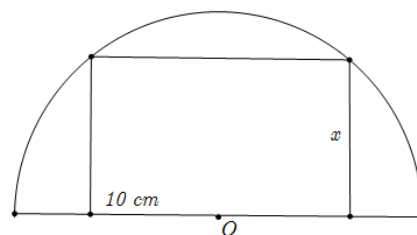
Gọi $x(\text{cm})$ là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn $0 < x < 10$.

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là: $2\sqrt{10^2 - x^2}$ cm.

Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$

Ta có $S' = 2\sqrt{10^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{10^2 - x^2}} = 2.10^2 - 4x^2$

$$S' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10\sqrt{2}}{2} & \text{thỏa} \\ x = -\frac{10\sqrt{2}}{2} & \text{không thỏa} \end{cases}$$

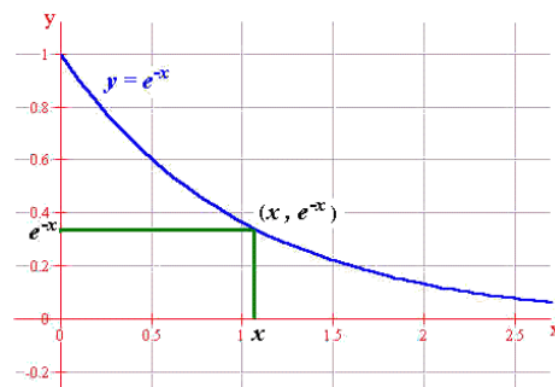


$S'' = -8x \Rightarrow S''\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right) = -40\sqrt{2} < 0$. Suy ra $x = \frac{10\sqrt{2}}{2}$ là điểm cực đại của hàm $S(x)$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là:

$$S = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{10^2 - \frac{10^2}{2}} = 100 \text{ cm}^2$$

Câu 14. Một máy tính được lập trình để vẽ một chuỗi các hình chữ nhật ở góc phần tư thứ nhất của trục tọa độ Oxy, nội tiếp dưới đường cong $y = e^{-x}$. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể được vẽ bằng cách lập trình trên



- A. 0,3679 (đvdt) B. 0,3976 (đvdt)
C. 0,1353(đvdt) D 0,5313(đvdt)

Hướng dẫn giải

Diện tích hình chữ nhật tại điểm x là $S = xe^{-x}$

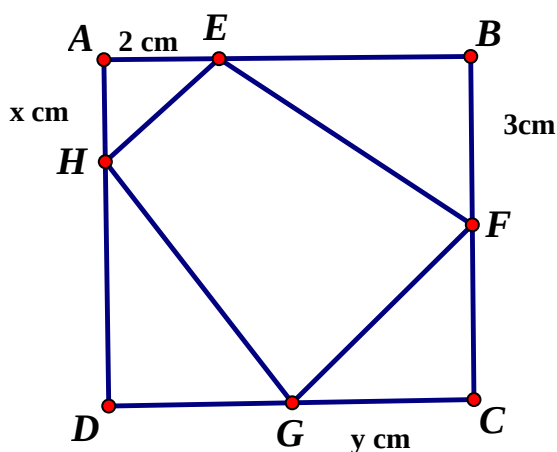
$$S'(x) = e^{-x}(1-x)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $S_{\max} = e^{-1} \approx 0,3679$ khi $x=1$

Đáp án A

Câu 15. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.



- A. 7 B. 5 C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ D. $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

Tính được $2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1)

Mặt khác $\triangle AEH$ đồng dạng $\triangle CGF$ nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - (4x + \frac{18}{x})$. Ta có $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Biểu thức $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$. Vậy đáp án cần chọn là C.

Nhóm 3: Bài toán liên hệ diện tích, thể tích

Câu 16. (ĐMH) Có một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$ rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x=6$ B. $x=3$ C. $x=2$ D. $x=4$

Hướng dẫn giải

Độ dài cạnh đáy của cái hộp: $12-2x$. Diện tích đáy của cái hộp: $(12-2x)^2$.

Thể tích cái hộp là: $V=(12-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ với $x \in (0;6)$

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$. Cho $V'(x) = 0$, giải và chọn nghiệm $x=2$.

Lập bảng biến thiên ta được $V_{\max} = 128$ khi $x=2$.

Câu 17. Một Bác nông dân cần xây dựng một hố ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có thể tích 3200cm^3 , tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hố ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

- A. 1200cm^2 B. 160cm^2 C. 1600cm^2 D. 120cm^2

Hướng dẫn giải

Gọi x, y ($x, y > 0$) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của đáy hố ga.

Gọi h là chiều cao của hố ga ($h > 0$). Ta có $\frac{h}{x} = 2 \Rightarrow h = 2x$

suy ra thể tích của hố ga là: $V = xyh = 3200 \Rightarrow y = \frac{3200}{xh} = \frac{1600}{x^2}$

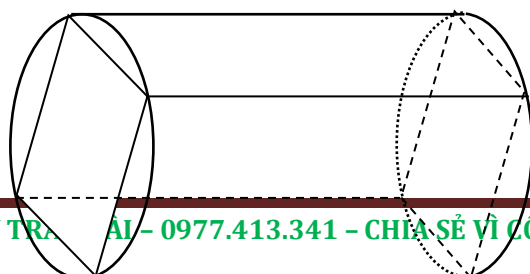
Diện tích toàn phần của hố ga là:

$$S = 2xh + 2yh + xy = 4x^2 + \frac{6400}{x} + \frac{1600}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x} = f(x)$$

Khảo sát hàm số $y = f(x)$, $x > 0$ suy ra diện tích toàn phần của hố ga nhỏ nhất bằng 1200cm^2 khi

$x = 10\text{cm} \Rightarrow y = 16\text{cm}$ Suy ra diện tích đáy của hố ga là $10 \cdot 16 = 160\text{cm}^2$

Câu 18. Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính 1m , chiều dài 8m để được một cây xà hình khối chữ nhật như hình vẽ. Hỏi thể tích cực đại của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu?

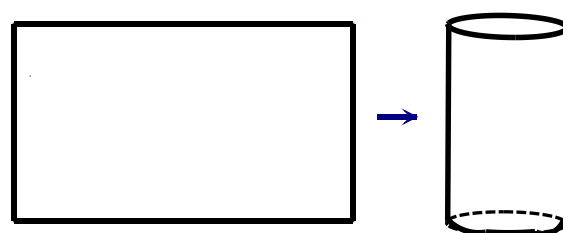


Hướng dẫn giải

Gọi $x, y(m)$ là các cạnh của tiết diện. Theo Định lý Pitago ta có: $x^2 + y^2 = 1^2$ (đường kính của thân cây là $1m$). Thể tích của cây xà sẽ cực đại khi diện tích của tiết diện là cực đại, nghĩa là khi x, y cực đại. Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Thể tích khối gỗ sau khi cưa xong: $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 8 = 4m^3$ (tiết diện là hình vuông).

Câu 19. Bạn An là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em giúp bố bạn chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là:

- A. 35cm; 25cm B. 40cm; 20cm C. 50cm; 10cm D. 30cm; 30cm

Hướng dẫn giải

Gọi một chiều dài là $x \text{ cm}$ ($0 < x < 60$), khi đó chiều còn lại là $60 - x \text{ cm}$, giả sử quấn cạnh có chiều dài là x lại thì bán kính đáy là $r = \frac{x}{2\pi}$; $h = 60 - x$. Ta có: $V = \pi r^2 h = \frac{-x^3 + 60x^2}{4\pi}$.

Xét hàm số: $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in [0; 60]$

$$f'(x) = -3x^2 + 120x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(x) = -x^3 + 60x^2, x \in [0; 60]$ lớn nhất khi $x = 40$. $60 - x = 20$. Khi đó chiều dài là 40 cm; chiều rộng là 20 cm. **Chọn đáp án B**

Câu 20. Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là 2000π lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm vật liệu nhất?

- A. 1m và 2m B. 1dm và 2dm
C. 2m và 1m D. 2dm và 1dm

Hướng dẫn giải

Đổi $2000\pi \text{ (lit)} = 2\pi \text{ (m}^3\text{)}$. Gọi bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $x(m)$ và $h(m)$.

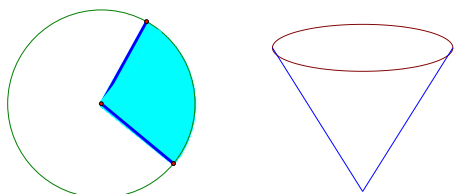
Ta có thể tích thùng phi $V = \pi x^2 \cdot h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{x^2}$

Vật liệu tỉ lệ thuận với diện tích toàn phần nên ta chỉ cần tìm x để diện tích toàn phần bé nhất.

$$S_{tp} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h = 2\pi x \left(x + \frac{2}{x^2} \right) = 2\pi \left(x^2 + \frac{2}{x} \right)$$

Đạo hàm lập BBT ta tìm đc $f(x)$ GTNN tại $x=1$, khi đó $h=2$.

Câu 21. Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 6\text{cm}$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ). Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng



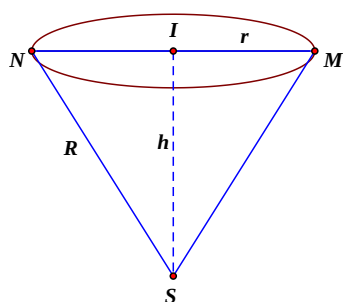
A. $\pi\sqrt{6} \text{ cm}$

B. $6\pi\sqrt{6} \text{ cm}$

C. $2\pi\sqrt{6} \text{ cm}$

D. $8\pi\sqrt{6} \text{ cm}$

Hướng dẫn giải



Gọi $x(x>0)$ là chiều dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.

Như vậy, bán kính R của hình tròn sẽ là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x .

Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón tính theo Định lý Pitago là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$.

$$\text{Thể tích của khối nón: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \leq \frac{4\pi^2}{9} \left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{3} \right)^3 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{R^6}{27}$$

$$\text{Do đó } V \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } \frac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} \Leftrightarrow x = 6\sqrt{6}\pi$$

(Lưu ý bài toán có thể sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, tuy nhiên lời giải bài toán sẽ dài hơn)

Câu 22. Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?

- A. $\approx 66^\circ$ B. $\approx 294^\circ$ C. $\approx 12,56^\circ$ D. $\approx 2,8^\circ$

Hướng dẫn giải

Ta có thể nhận thấy đường sinh của hình nón là bán kính của đĩa tròn. Còn chu vi đáy của hình nón chính là chu vi của đĩa trừ đi độ dài cung tròn đã cắt. Như vậy ta tiến hành giải chi tiết như sau:

Gọi $x(m)$ là độ dài đáy của hình nón (phần còn lại sau khi cắt cung hình quạt của đĩa).

$$\text{Khi đó } x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

$$\text{Chiều cao của hình nón tính theo định lí PITAGO là } h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

$$\text{Thể tích khối nón sẽ là : } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{x^2}{4\pi^2} \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Đến đây các em đạo hàm hàm $V(x)$ tìm được GTLN của $V(x)$ đạt được khi $x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} = 4\pi$

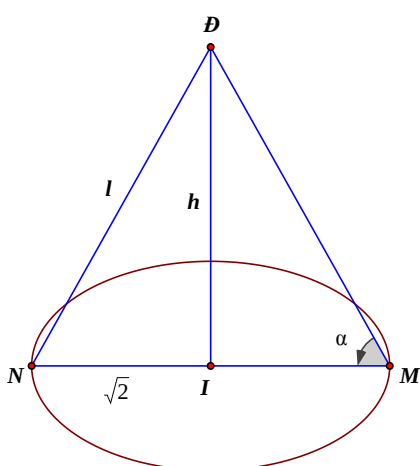
$$\text{Suy ra độ dài cung tròn bị cắt đi là : } 2\pi R - 4\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi - 4\pi}{2\sqrt{6}\pi} 360^\circ \approx 66^\circ$$

Câu 23. Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh

sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

- A. 1m B. 1,2m C. 1.5 m D. 2m

Hướng dẫn giải



Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn ($h > 0$); D là bóng điện; I là hình chiếu của D lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn. (như hình vẽ)

Ta có $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c \frac{\sqrt{l^2 - 2}}{l^3}$ ($l > \sqrt{2}$).

$$C'(l) = c \cdot \frac{6 - l^2}{l^4 \cdot \sqrt{l^2 - 2}} > 0 \quad (\forall l > \sqrt{2})$$

$$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6} \quad (l > \sqrt{2})$$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó $h = 2$

Câu 24. Nhân ngày phụ nữ Việt Nam 20 -10 năm 2017, ông A quyết định mua tặng vợ một món quà và đặt nó vào trong một chiếc hộp có thể tích là 32 (đvtt) có đáy hình vuông và không có nắp . Để món quà trở nên thật đặc biệt và xứng đáng với giá trị của nó ông quyết định mạ vàng cho chiếc hộp , biết rằng độ dày lớp mạ tại mọi điểm trên hộp là như nhau . Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là $h; x$. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của $h; x$ phải là ?

A. $x=2;h=4$

B. $x=4;h=2$

C. $x=4;h=\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $x=1;h=2$

Hướng dẫn giải

Ta có
$$\begin{cases} S = 4xh + x^2 \\ V = x^2h \rightarrow h = \frac{V}{x^2} = \frac{32}{x^2} \Rightarrow S = 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2 = \frac{128}{x} + x^2 \end{cases}$$
, để lượng vàng cần dùng là nhỏ nhất

thì Diện tích S phải nhỏ nhất ta có

$$S = \frac{128}{x} + x^2 = f(x) \rightarrow f'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4, h = 2$$

Chọn đáp án B

Câu 25. Một người có một dải ruy băng dài 130cm, người đó cần bọc dải ruy băng đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải dây duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là là nhiêu ?



A. $4000\pi \text{ cm}^3$

B. $1000\pi \text{ cm}^3$

C. $2000\pi \text{ cm}^3$

D. $1600\pi \text{ cm}^3$

Hướng dẫn giải

Gọi $x(\text{cm}); y(\text{cm})$ lần lượt là bán kính đáy và chiều của hình trụ ($x, y > 0; x < 30$).

Dải dây duy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120 cm

Ta có $(2x + y) \cdot 4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2(30 - 2x)$

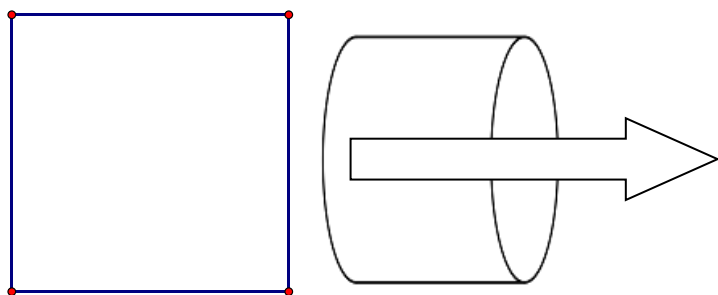
Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2(30 - 2x)$ với $0 < x < 30$ đạt giá trị lớn nhất.

$f'(x) = -6x^2 + 60x$, cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Rightarrow x = 10$

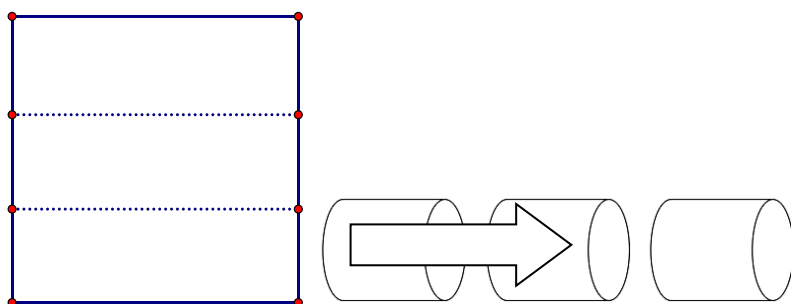
Lập bảng biến thiên, ta thấy thể tích đạt giá trị lớn nhất là $V = 1000\pi(\text{cm}^3)$.

Câu 26. Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là 3dm, một người dự tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: gò hai mép hình vuông để thành mặt xung quanh của một hình trụ, gọi thể tích là của khối trụ đó là V_1



Cách 2: cắt hình vuông ra làm ba, và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2 .



Khi đó, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

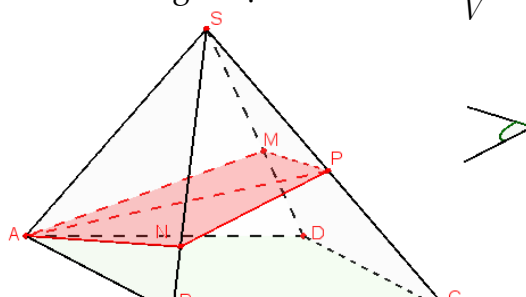
Hướng dẫn giải

.Gọi R_1 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có $2\pi R_1 = 3 \Rightarrow R_1 = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow V_1 = \pi R_1^2 h = \frac{27}{4\pi}$

. Gọi R_2 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có $2\pi R_2 = 1 \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow V_2 = 3\pi R_2^2 h = \frac{9}{4\pi}$

Vậy đáp án là A.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Điểm P là trung điểm của SC , một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?



A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{8}$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{SM}{SD}$; $y = \frac{SN}{SB}$, ($0 < x, y \leq 1$) khi đó ta có: $V_{SABC} = V_{SADC} = V_{SABD} = V_{SBCD} = \frac{V}{2}$

Ta có:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{SAMPN}}{V} = \frac{V_{SAMP} + V_{SANP}}{V} = \frac{V_{SAMP}}{2V_{SADC}} + \frac{V_{SANP}}{2V_{SABC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SD} \cdot \frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \right) = \frac{1}{4} (x + y) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_1}{V} = \frac{V_{SAMPN}}{V} = \frac{V_{SAMN}}{2V_{SABD}} + \frac{V_{SMNP}}{2V_{SBCD}} = \frac{1}{2} \left(xy + \frac{1}{2} xy \right) = \frac{3}{4} xy \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{1}{4} (x + y) = \frac{3}{4} xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x - 1} \text{ do } 0 < y \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x - 1} \leq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ (2) suy ra } \frac{V_1}{V} = \frac{3}{4} xy = \frac{3}{4} x \frac{x}{3x - 1} = \frac{3x^2}{4(3x - 1)} = \frac{3}{4} f(x), \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$$

$$\text{Khảo sát hàm số } y = f(x), \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right) \Rightarrow \min_{x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$$

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30° . Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp $S.ABH$ đạt giá trị lớn nhất bằng?

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Hướng dẫn giải

Ta có góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là $CSB = 30^\circ$

Trong tam giác SBC có $SB = BC \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}$

Trong tam giác SAB có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp S.ABH là: $V_{S.ABH} = \frac{1}{3} S_{ABH} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} HA \cdot HB \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6} HA \cdot HB$

Ta có $HA^2 + HB^2 = AB^2 = a^2$ và theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^2 = HA^2 + HB^2 \geq 2 \cdot HA \cdot HB \Rightarrow HA \cdot HB \leq \frac{a^2}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $HA = HB \Leftrightarrow ABM = 45^\circ \Leftrightarrow M \equiv D$

$$\text{Khi đó } V_{S.ABH} = \frac{a\sqrt{2}}{6} HA \cdot HB \leq \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Nhóm 4: Bài toán lãi suất ngân hàng

Câu 29. Một người nọ đem gửi tiết kiệm ở một ngân hàng với lãi suất là 12% năm. Biết rằng cứ sau mỗi một quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền, bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu.

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

Hướng dẫn giải

Gọi số tiền người đó gửi là A, lãi suất mỗi quý là 0,03

Sau n quý, tiền mà người đó nhận được là: $A(1+0,03)^n$

$$\text{. ycbt} \Leftrightarrow A(1+0,03)^n = 3A \Leftrightarrow n = \log_{1,03} 3 \approx 37,16$$

Vậy số năm tối thiểu là xấp xỉ 9,29 năm. Vậy đáp án là C.

Câu 30. Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 27507768,13 (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu. B. 180 triệu và 140 triệu.

C. 200 triệu và 120 triệu. D. 120 triệu và 200 triệu.

Hướng dẫn giải

Tổng số tiền cả vốn và lãi (lãi chính là lợi tức) ông Năm nhận được từ cả hai ngân hàng là 347,507 76813 triệu đồng. Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng X, khi đó $320 - x$ (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Y.

Theo giả thiết ta có: $x(1 + 0,021)^5 + (320 - x)(1 + 0,0073)^9 = 347,507 76813$

Ta được $x = 140$. Vậy ông Năm gửi 140 triệu ở ngân hàng X và 180 triệu ở ngân hàng Y.

Đáp án: A.

Câu 31. Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền đã gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

A. 50 triệu 730 nghìn đồng B. 48 triệu 480 nghìn đồng

C. 53 triệu 760 nghìn đồng D. 50 triệu 640 nghìn đồng

Hướng dẫn giải

Số tiền tháng 1 mẹ được nhận là 4 triệu, gửi đến đầu tháng 12 (được 11 kỳ hạn), vậy cả vốn lẫn lãi do số tiền tháng 1 nhận sinh ra là: $4 \cdot (1 + \frac{1}{100})^{11} = 4 \times 1,01^{11}$ (triệu đồng).

Tương tự số tiền tháng 2 nhận sẽ sinh ra: $4 \times 1,01^{10}$ (triệu đồng)

.....

Số tiền tháng 12 mẹ lĩnh luôn nên là: 4 (triệu đồng).

Vậy tổng số tiền mẹ lĩnh là: $4 \times 1,01^{11} + 4 \times 1,01^{10} + \dots + 4 \times 1,01 + 4 = 4 \frac{1 - 1,01^{12}}{1 - 1,01} \approx 50,730$ (50 triệu 730 nghìn đồng). Đáp án A.

Câu 32. Một Bác nông dân vừa bán một con trâu được số tiền là 20.000.000 (đồng). Do chưa cần dùng đến số tiền nên Bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8.5% một năm thì sau 5 năm 8 tháng Bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi. Biết rằng Bác nông dân đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kỳ hạn 0.01% một ngày (1 tháng tính 30 ngày)

A. 31802750,09 đồng

B. 30802750,09 đồng

C. 32802750,09 đồng

D. 33802750,09 đồng

Hướng dẫn giải

Một kì hạn 6 tháng có lãi suất là $\frac{8.5\%}{12} \cdot 6 = \frac{4.25}{100}$. Sau 5 năm 6 tháng (có nghĩa là 66 tháng tức là 11 kỳ hạn), số tiền cả vốn lẫn lãi Bác nông dân nhận được là :
 $A = 20000000 \cdot \left(1 + \frac{4.25}{100}\right)^{11}$ (đồng). Vì 5 năm 8 tháng thì có 11 kỳ hạn và dư 2 tháng hay dư 60 ngày nên số tiền A được tính lãi suất không kỳ hạn trong 60 ngày là :

$B = A \cdot \frac{0.01}{100} \cdot 60 = 120000 \cdot \left(1 + \frac{4.25}{100}\right)^{11}$ (đồng). Suy ra sau 5 năm 8 tháng số tiền bác nông dân nhận được là

$$C = A + B = 20000000 \cdot \left(1 + \frac{4.25}{100}\right)^{11} + 120000 \cdot \left(1 + \frac{4.25}{100}\right)^{11} = 31802750,09 \text{ đồng}$$

Câu 33. Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 20 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72%/tháng. Sau một năm, bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi lại theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78%/tháng. Sau khi gửi được đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc nên bác gửi thêm một số tháng nữa thì phải rút tiền trước kỳ hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 23263844,9 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước thời hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong một số tháng bác gửi thêm lãi suất là:

A. 0,4%

B. 0,3%

C. 0,5%

D. 0,6%

Hướng dẫn giải

. Gửi được 1 năm coi như gửi được 4 kỳ hạn 3 tháng; thêm một kỳ hạn 6 tháng số tiền khi đó là: $20000000 \cdot 1 + 0,72 \cdot 3 : 100^4 \cdot 1 + 0,78 \cdot 6 : 100$

. Giả sử lãi suất không kỳ hạn là A%; gửi thêm B tháng khi đó số tiền là:
 $20000000 \cdot 1 + 0,72 \cdot 3 : 100^4 \cdot 1 + 0,78 \cdot 6 : 100 \cdot 1 + A : 100^B = 23263844,9$

. Lưu ý: $1 \leq B \leq 5$ và B nguyên dương, nhập máy tính:
 $20000000 \cdot 1 + 0,72 \cdot 3 : 100^4 \cdot 1 + 0,78 \cdot 6 : 100 \cdot 1 + A : 100^B - 23263844,9$ thử với $A = 0,3$ rồi thử B từ 1 đến 5, sau đó lại thử $A = 0,5$ rồi thử B từ 1 đến 5, ... cứ như vậy đến bao giờ kết quả đúng bằng 0 hoặc xấp xỉ bằng 0 thì chọn.

Kết quả: $A = 0,5; B = 4$ chọn C

Nhóm 5: Bài toán liên quan đến mũ, loga

Câu 34. Cho biết chu kì bán hủy của chất phóng xạ Plutoni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t . Hỏi sau bao nhiêu năm thì 10 gam Pu^{239} sẽ phân hủy còn 1 gam có giá trị gần nhất với giá trị nào sau?

- A. 82135 B. 82335 C. 82235 D. 82435

Hướng dẫn giải

Vì Pu^{239} có chu kì bán hủy là 24360 năm nên $e^{r \cdot 24360} = \frac{S}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow r \approx -0,000028$

$\Rightarrow$ Công thức phân hủy của Pu^{239} là $S = A \cdot e^{-0,000028t}$

Theo giả thiết: $1 = 10 \cdot e^{-0,000028t} \Rightarrow t \approx 82235,18$ năm

Câu 35. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu?

A. $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{5730}}$ B. $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5730}{t}}$ C. $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{100t}{5730}}$ D. $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{100t}{5730}}$

Hướng dẫn giải

Theo công thức $m(t) = m_0 e^{-kt}$ ta có:

$$m(5730) = \frac{100}{2} = 50 = 100 \cdot e^{-k \cdot 5730} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5730} \text{ suy ra } m(t) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$$

Đáp án: A.

Câu 36. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cabon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cabon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2378 năm

B. 2300 năm

C. 2387 năm

D. 2400 năm

Hướng dẫn giải

Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Carbon là m_0 , tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$$m_t = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t} \Leftrightarrow \frac{3m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t} \Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln \left(\frac{3}{4} \right)}{-\ln 2} \approx 2378 (\text{năm})$$

Đáp án: A.

Câu 37. Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}$, $x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

A. 333

B. 343

C. 330

D. 323

Hướng dẫn giải

Khi có 100 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P_{100} = \frac{100}{1 + 49e^{-1.5}} \approx 9.3799\%$$

Khi có 200 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P_{200} = \frac{100}{1 + 49e^{-3}} \approx 29.0734\%$$

Khi có 500 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P_{500} = \frac{100}{1 + 49e^{-7.5}} \approx 97.3614\%$$

Đáp án: A.

Câu 38. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $f(x) = Ae^{rx}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần

A. $5\ln 20$ (giờ)

B. $5\ln 10$ (giờ)

C. $10\log_5 10$ (giờ)

D. $10\log_5 20$ (giờ)

Hướng dẫn giải

Thời gian cần tìm là t . Ta có: $5000 = 1000 \cdot e^{10r}$ nên $r = \frac{\ln 5}{10}$.

Do đó, $10000 = 1000 \cdot e^{rt}$ suy ra $t = \frac{\ln 10}{r} = \frac{10\ln 10}{\ln 5} = 10\log_5 10$ giờ nên chọn câu C.

Nhóm 6: Bài toán ứng dụng tích phân, mối quan hệ đạo hàm-nguyên hàm

Câu 39. Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1+2t)^{-2} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là 30 m/s . Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị).

A. $S = 106 \text{ m}$.

B. $S = 107 \text{ m}$.

C. $S = 108 \text{ m}$.

D. $S = 109 \text{ m}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int -20(1+2t)^{-2} dt = \frac{10}{1+2t} + C$. Theo đề ta có $v(0) = 30 \Leftrightarrow C + 10 = 30 \Leftrightarrow C = 20$. Vậy quãng đường vật đó đi được sau 2 giây là:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{10}{1+2t} + 20 \right) dt = \left(5 \ln(1+2t) + 20t \right) \Big|_0^2 = 5 \ln 5 + 100 \approx 108 \text{ m}.$$

Câu 40.

Một ô tô chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh còn được gọi là “thắng”. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20 \text{ (m/s)}$. Trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu?

A. 2 m

B. 3 m

C. 4 m

D. 5 m

Hướng dẫn giải

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu phanh ($t = 0$)

Gọi T là thời điểm ô tô dừng lại. Khi đó vận tốc lúc dừng là $v(T) = 0$

Vậy thời gian từ lúc đạp phanh đến lúc dừng là $v(T) = 0 \Leftrightarrow -40T + 20 = 0 \Leftrightarrow T = \frac{1}{2}$

Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian T .

Ta có $v(t) = s'(t)$ suy ra $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$

Vậy trong $\frac{1}{2} \text{ (s)}$ ô tô đi được quãng đường là: $\int_0^{\frac{1}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20) dt = \left(-20t^2 + 20t \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 5 \text{ (m)}$

Câu 41. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) \text{ (m/s)}$ có gia tốc $a(t) = 3t^2 + t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s) . Hỏi vận tốc của vật sau 2 s .

A. 10 m/s

B. 12 m/s

C. 16 m/s

D. 8 m/s .

Hướng dẫn giải

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int (3t^2 + t) dt = t^3 + \frac{t^2}{2} + C \text{ (m/s)}$.

Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s) $\Rightarrow v(0) = 2 \Rightarrow C = 2$.

Vậy vận tốc của vật sau 2s là: $V(2) = 2^3 + \frac{2^2}{2} + 2 = 12$ (m/s).

Đáp án B.

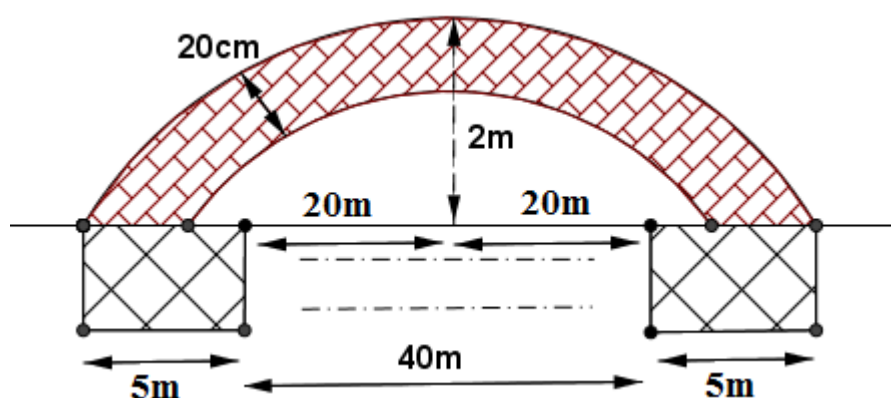
Câu 42. Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài 500m, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau 40m, biết 2 bên đầu cầu và giữa mỗi nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày nhịp cầu không đổi là 20cm. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (bỏ qua diện tích cốt sắt trong mỗi nhịp cầu)

A: $20m^3$

B: $50m^3$

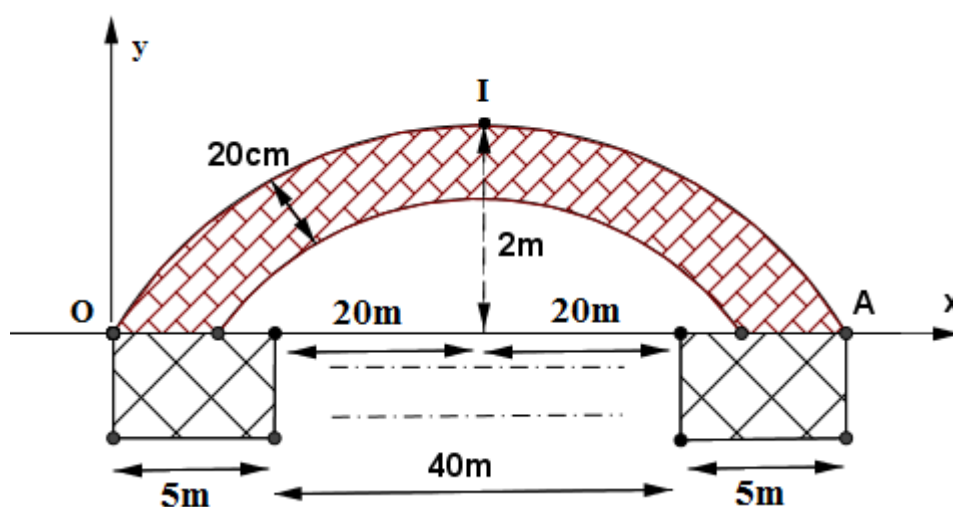
C: $40m^3$

D: $100m^3$



Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu (điểm tiếp xúc Parabol trên), đỉnh $I(25; 2)$, điểm $A(50;0)$ (điểm tiếp xúc Parabol trên với chân đế)



Gọi Parabol trên có phương trình $(P_1): y_1 = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx$ (do (P) đi qua O)

$\Rightarrow y_2 = ax^2 + bx - \frac{20}{100} = ax^2 + bx - \frac{1}{5}$ là phương trình parabol dưới

Ta có (P_1) đi qua I và A $\Rightarrow (P_1): y_1 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{1}{5}$

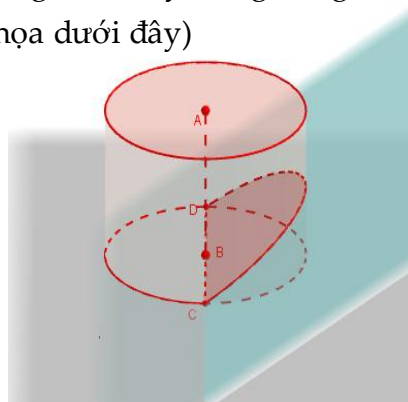
Khi đó diện tích mỗi nhịp cầu là $S = 2S_1$ với S_1 là phần giới hạn bởi $y_1; y_2$ trong khoảng $(0; 25)$

$$S = 2\left(\int_0^{0,2} \left(-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x\right)dx + \int_{0,2}^{25} \frac{1}{5}dx\right) \approx 9,9m^2$$

Vì bề dày nhịp cầu không đổi nên coi thể tích là tích diện tích và bề dày $V = S \cdot 0,2 \approx 9,9 \cdot 0,2 \approx 1,98m^3 \Rightarrow$ số lượng bê tông cần cho mỗi nhịp cầu $\approx 2m^3$

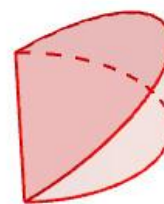
Vậy 10 nhịp cầu 2 bên cần $\approx 40m^3$ bê tông. Chọn đáp án **C**

Câu 43. Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Hình 1

Hình 2



Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính V .

A. $V = 2250(cm^3)$ B. $V = \frac{225\pi}{4}(cm^3)$ C. $V = 1250(cm^3)$ D.

$V = 1350(cm^3)$

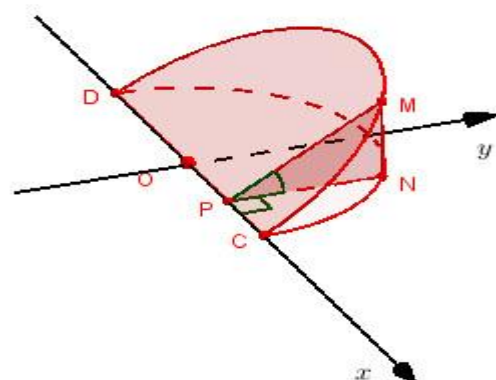
Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình :

$$y = \sqrt{225 - x^2}, x \in [-15; 15]$$

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-15; 15]$)

cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).



Dễ thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan 45^\circ = y = \sqrt{15 - x^2}$ khi đó $S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot (225 - x^2)$

suy ra thể tích hình nêm là : $V = \int_{-15}^{15} S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-15}^{15} (225 - x^2) dx = 2250 (cm^3)$

Nhóm 7: Bài toán kinh tế

Câu 44. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n(gam)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất ?

A. 10 B. 12

C. 16

D. 24

Hướng dẫn giải

Gọi n là số con cá trên một đơn vị diện tích hồ ($n > 0$). Khi đó :

Cân nặng của một con cá là : $P(n) = 480 - 20n(gam)$

Cân nặng của n con cá là : $n \cdot P(n) = 480n - 20n^2(gam)$

Xét hàm số : $f(n) = 480n - 20n^2, n \in (0; +\infty)$. Ta có : $f'(n) = 480 - 40n$, cho $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Lập bảng biến thiên ta thấy số cá phải thả trên một đơn vị diện tích hồ để có thu hoạch nhiều nhất là 12 con.

Câu 45. Một chuyến xe bus có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu một chuyến xe chở x hành khách thì giá cho mỗi hành khách là $\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ \$. Chọn câu đúng:

A. Xe thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.

B. Xe thu được lợi nhuận cao nhất bằng 135\$.

C. Xe thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160\$.

D. Không có đáp án đúng.

Hướng dẫn giải

Số tiền thu được là : $f(x) = x\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 = 9x - \frac{3}{20}x^2 + \frac{x^3}{1600}$

Đạo hàm, lập bảng biến thiên ta tìm được GTLN của $f(x)$ là 160 khi $x = 40$.

Vậy lợi nhuận thu được nhiều nhất là 160\$ khi có 40 hành khách.

Câu 46. Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần ($x \in [1; 2500]$, đơn vị: cái)

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho tương ứng là $10 \cdot \frac{x}{2} = 5x$

Số lần đặt hàng mỗi năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là: $\frac{2500}{x}(20 + 9x)$

Khi đó chi phí mà cửa hàng phải trả là: $C(x) = \frac{2500}{x}(20 + 9x) + 5x = 5x + \frac{50000}{x} + 22500$

Lập bảng biến thiên ta được: $C_{\min} = C(100) = 23500$

Câu 47. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x ($x > 0$, đơn vị: triệu đồng) là giá bán mới. Khi đó:

Số tiền đã giảm là: $31 - x$. Số lượng xe tăng lên là: $200(31 - x)$.

Vậy tổng số sản phẩm bán được là: $600 + 200(31 - x) = 6800 - 200x$

Doanh thu mà doanh nghiệp sẽ đạt được là: $(6800 - 200x)x$

Tiền vốn mà doanh nghiệp phải bỏ ra là: $(6800 - 200x) \cdot 27$

Lợi nhuận mà công ty đạt được sẽ là:

$$L(x) = \text{Doanh thu} - \text{Tiền vốn} = (6800 - 200x)x - (6800 - 200x) \cdot 27 = -200x^2 + 12200x - 183600$$

$$L'(x) = -400x + 12200. \text{ Cho } L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30,5$$

Lập BBT ta thấy lợi nhuận lớn nhất khi $x = 30,5$. Vậy giá bán mới là 30,5 (triệu đồng)

Câu 48. Một công ti bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100 000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ti đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá trị bao nhiêu một tháng? (đồng/tháng)

- A. 2 250 000 B. 2 450 000 C. 2 300 000 D. 2 225 000

Hướng dẫn giải

Gọi x (đồng/tháng) là số tiền tăng thêm của giá cho thuê mỗi căn hộ. ($x \geq 0$)

Khi đó số căn hộ bị bỏ trống là: $\frac{2x}{100\,000}$ (căn hộ).

Khi đó, số tiền công ti thu được là:

$$T(x) = 2\,000\,000 + x \left(50 - \frac{2x}{100\,000} \right) = 100\,000\,000 + 50x - \frac{2x^2}{100\,000} \text{ (đồng/tháng)}.$$

Khảo sát hàm số $T(x)$ trên $[0; +\infty)$.

$$T'(x) = 50 - \frac{4x}{100\,000}.$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 100\,000 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 25\,000.$$

Bảng biến thiên

x	0	25 000	$+\infty$
T'	+ 0	—	
T	2 250 000		

Do đó $\max_{x \geq 0} T(x) = T(25\,000)$.

Vậy để có thu nhập cao nhất thì số tiền cho thuê một căn hộ mỗi tháng là 2 250 000 đồng.

Đáp án A

TỔNG HỢP

GV: Trần Tiến Đạt

BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 49. Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích 12π (cm³) và chiều cao là 4cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miếng giấy bạc cần thêm là.

- A. $(12\sqrt{13} - 15)\pi$ (cm²). B. $12\pi\sqrt{13}$ (cm²).
C. $\frac{12\sqrt{13}}{15}$ (cm²). D. $(12\sqrt{13} + 15)\pi$ (cm²)

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đường tròn đáy hình nón lúc đầu; h_1 là chiều cao của hình nón lúc đầu.

Gọi R_2 là bán kính đường tròn đáy hình nón sau khi tăng thể tích; h_2 là chiều cao của hình nón sau khi tăng thể tích.

$$\text{Ta có: } V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi R_1^2 \cdot 4 \Rightarrow R_1 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \\ V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2 \\ h_2 = h_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 4 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 6$$

$$\text{Diện tích xung quanh hình nón lúc đầu: } S_{xp1} = \pi R_1 l_1 = \pi \cdot 3 \sqrt{16 + 9} = 15\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích xung quanh hình nón sau khi tăng thể tích: } S_{xp2} = \pi R_2 l_2 = \pi \cdot 6 \sqrt{16 + 36} = 12\pi\sqrt{13} \text{ (cm}^2\text{)}$$

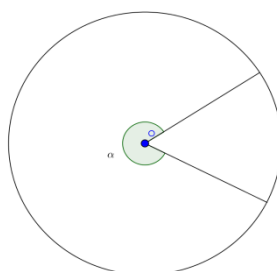
$$\text{Diện tích phần giấy bạc cần tăng thêm là: } S = (12\sqrt{13} - 15)\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu 50. Cho một tấm tôn hình tròn có diện tích 4π dm². Người ta cắt thành một hình quạt có góc ở tâm là α ($0 < \alpha < 2\pi$) như Hình 1 để làm thành một cái gầu mức nước hình nón như Hình 2. Thể tích lớn nhất

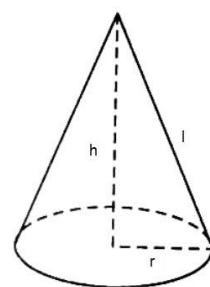
A. $\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$ (dm³)

B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ (dm³)

C. $\frac{3\sqrt{7}\pi}{9}$ (dm³)



Hình 1



Hình 2

$$D. \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(dm\sqrt{3})$$

Hướng dẫn giải:

Ta có: đường sinh l của hình nón là bán kính $R = \frac{4\pi}{2\pi} = 2dm$ của hình tròn

Bán kính đáy của hình nón: $r = \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi}$

Đường cao của hình nón: $h = \sqrt{2^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

Khi đó thể tích hình nón: $V(\alpha) = \frac{1}{3} \pi \frac{\alpha^2}{\pi^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \frac{1}{3\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

$$\begin{aligned} V'(\alpha) &= \frac{1}{3\pi^2} \left(2\alpha \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \right) \\ &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{-3\alpha^2 + 8\alpha\pi^2}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \right) \end{aligned}$$

$$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \notin (0; 2\pi) \\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3\pi^2} \times \frac{8}{3} \pi^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi = \frac{16\sqrt{3}\pi}{27} (dm^3) \\ \alpha = -\frac{2\sqrt{6}\pi}{3} \notin (0; 2\pi) \end{cases}$$

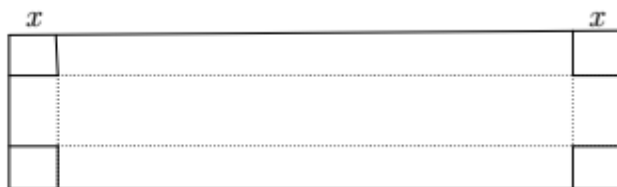
Bảng biến thiên:

α	0	$\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$	2π
$V'(\alpha)$	+	0	-
$V(\alpha)$	$V_{\max}$ $\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$		

Chọn đáp án A

Câu 51. Một tấm bìa cứng hình chữ nhật có kích thước $3m \times 8m$. Người ta cắt mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh là x để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp. Với giá trị nào của x thì thể tích hình hộp chữ nhật đạt giá trị lớn nhất?

Hình vẽ :



A. $x = \frac{1}{3}m$

B. $x = 1m$

C. $x = \frac{2}{3}m$

D. $x = \frac{4}{3}m$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $0 < x < \frac{3}{2}$ Gọi thể tích hình hộp là: $V(x)$. Khi đó:

$$V(x) = x(3 - 2x)(8 - 2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x^2 - 11x + 6)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3
$V'(x)$	+	0	-	0
$V(x)$	$V_{\max}$			
	0		0	

Chọn đáp án C

Câu 52. Một người vay 100 triệu đồng, trả góp theo tháng trong vòng 36 tháng, lãi suất là 0,75%/ tháng. Số tiền người đó phải trả hàng tháng (trả tiền vào cuối tháng, số tiền làm tròn đến hàng nghìn) là:

A. 3180000 8099000	B. 3179000	C. 75000000	D.
-----------------------	------------	-------------	----

Hướng dẫn giải:

* Bài toán: Vay A đồng, lãi suất r / tháng. Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu để sau n tháng thì hết nợ (trả tiền vào cuối tháng)?

Gọi a là số tiền trả hàng tháng

Cuối tháng 1: còn nợ $A(1+r) - a$

Cuối tháng 2: còn nợ $[A(1+r) - a](1+r) - a = A(1+r)^2 - a(1+r) - a$

Cuối tháng 3: còn nợ $[A(1+r)^2 - a(1+r) - a](1+r) - a = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$

....

Cuối tháng n : còn nợ $A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a = A(1+r)^n - a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Để hết nợ sau n tháng thì số tiền a phải trả là: $A(1+r)^n - a \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

* Giải: Số tiền người đó phải trả hàng tháng: $\frac{100000000 \cdot 0,75\% \cdot (1+0,75\%)^{36}}{(1+0,75\%)^{36} - 1} \approx 3180000$

* **Chọn đáp án A**

GV: ĐỖ THỦY

Bài toán lãi suất

Câu 53. Bác Bình có 100 triệu đồng đem gửi vào một ngân hàng. Ngân hàng cho biết lãi suất là 1%/tháng và được tính theo thể thức lãi kép. Để thu được số tiền lãi lớn nhất sau 2 năm thì bác Bình gửi theo kỳ hạn bao nhiêu tháng trong các kỳ hạn sau?

A. Kỳ hạn 3 tháng

B. Kỳ hạn 4 tháng

C. Kỳ hạn 6 tháng

D. Kỳ hạn 12 tháng

Hướng dẫn giải:

Số tiền lãi bác Bình nhận được

- Theo kỳ hạn 3 tháng: $100 \cdot 10^6 \cdot (1+0,03)^8 - 100 \cdot 10^6 = 26677008$ (đồng).

- Theo kỳ hạn 4 tháng: $100 \cdot 10^6 \cdot (1+0,04)^6 - 100 \cdot 10^6 = 26531902$ (đồng).

- Theo kỳ hạn 6 tháng: $100.10^6.(1+0,06)^4 - 100.10^6 = 26247696$ (đồng).

- Theo kỳ hạn 12 tháng: $100.10^6.(1+0,12)^2 - 100.10^6 = 25440000$ (đồng).

Đáp án: A

Câu 54. Một người hàng tháng gửi vào ngân hàng 10 triệu đồng với lãi kép là 0,6%/ tháng. Biết lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi. Hỏi sau 2 năm người đó lãi bao nhiêu?

A. 528 645 120 đồng

B. 298 645 120 đồng

C. 538 645 120 đồng

D. 418 645 120 đồng

Hướng dẫn giải:

Gọi T_n là số tiền vốn lẫn lãi sau n tháng, a là số tiền hàng tháng gửi vào ngân hàng và $r(\%)$ là lãi suất kép. Ta có:

$$T_1 = a.r,$$

$$T_2 = (ar + a)(1+r) = a(1+r)^2$$

$$T_3 = (a(1+r)^2 + a)(1+r) = a(1+r)^3 + a(1+r)$$

....

$$T_n = a(1+r)^{n-1} + \dots + a(1+r) = a \cdot \frac{r+1}{r} \left((1+r)^n - 1 \right), n \geq 2$$

Áp dụng với $a = 20.10^6$ đồng, $r = 0,08$, $n = 24$ tháng, ta có số tiền lãi.

Đáp án: B

Câu 55. Một người vay ngân hàng 1 tỷ đồng với lãi kép là 12%/năm. Hỏi người đó phải trả ngân hàng hàng tháng bao nhiêu tiền để sau đúng 5 năm người đó trả xong nợ ngân hàng?

A. 88 848 789 đồng.

B. 14 673 315 đồng.

C. 47 073 472 đồng.

D. 111 299 776 đồng.

Hướng dẫn giải:

Gọi A là số tiền người đó vay ngân hàng (đồng), a là số tiền phải trả hàng tháng và $r(\%)$ là lãi suất kép. Ta có:

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ nhất: $R_1 = A(1+r)$

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ hai : $R_2 = (A(1+r) - a)(1+r) = A(1+r)^2 - a(1+r)$

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ ba:

$$R_3 = (A(1+r)^2 - a(1+r) - a)(1+r) = A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r)$$

....

- Số tiền nợ ngân hàng tháng thứ n : $R_n = A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - \dots - a(1+r)$

$$\text{Tháng thứ } n \text{ trả xong nợ: } R_n = a \Leftrightarrow a = \frac{A \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Áp dụng với $A = 1.10^9$ đồng, $r = 0,01$, và $n = 24$, ta có $a = 47073472$

Đáp án: C

GV: CAO HUU TRUONG

Câu 56. Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó: chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

- A. 50 và 25 B. 35 và 35 C. 75 và 25 D. 50 và 50

Hướng dẫn giải

Gọi x (m) ($0 < x < 50$) là chiều rộng của hình chữ nhật

Khi đó, chiều dài của hình chữ nhật là $100 - 2x$

Nên diện tích của hình chữ nhật là $x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$

Gọi $f(x) = -2x^2 + 100x$ với điều kiện $0 < x < 100$

$\Rightarrow f'(x) = -4x + 100$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 100 = 0 \Rightarrow x = 25$

Bảng biến thiên:

x	0	25	50
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	1250	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max_{(0;50)} f(x) = f(25) = 1250$

Vậy: Để rào khu đất ấy có diện tích lớn nhất theo hình chữ nhật có chiều rộng bằng 25 và chiều dài bằng 50

Đáp án: A

Câu 57. Một xe chở hàng chạy với vận tốc 25 m/s thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 25$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe còn di chuyển bao nhiêu mét?

- A. $\frac{625}{4}$ m B. $\frac{625}{2}$ m C. 2 m D. $\frac{25}{2}$ m

Hướng dẫn giải:

Xe chở hàng còn đi thêm được $\frac{25}{2}$ giây

Quãng đường cần tìm là: $s = \int_0^{\frac{25}{2}} (-2t + 25) dt = \frac{625}{4}$

Đáp án: A

Câu 58. Một loại bèo Hoa dâu có khả năng sinh trưởng rất nhanh. Cứ sau một ngày (24 giờ) thì số lượng bèo thu được gấp đôi số lượng bèo của ngày hôm trước đó. Ban đầu

người ta thả một cây bèo vào hồ nước (hồ chưa có cây bèo nào) rồi thống kê số lượng bèo thu được sau mỗi ngày. Hỏi trong các kết quả sau đây, kết quả nào không đúng với số lượng bèo thực tế.

A. 32768

B. 1048576

C. 33554432

D. 1073741826

Hướng dẫn giải :

Số bèo trong hồ thỏa hàm số mũ $f(t) = 2^t$ với t (ngày)

Nên $2^{15} = 32768$

$2^{20} = 1048576$

$2^{25} = 33554432$

$2^{30} = 1073741824$

Đáp án : D

GV: ĐẶNG NGỌC

Câu 59. Ông An gửi a VNĐ vào ngân hàng với lãi suất 0,5%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu, Để sau 10 tháng ông An sẽ nhận được 20 000 000 VNĐ thì a ít nhất là bao nhiêu:

A. 19 026 958

B. 19 026 959

C. 19 026 960

D. 19 026 958,8

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức lãi kép: $c = p(1+r)^n$ trong đó p là số tiền gửi, r là lãi suất mỗi kỳ, n là số kỳ gửi, ta có: $20000000 = a(1+0,005)^{10} \Rightarrow a = 19026958,81$

Đáp án A

Câu 60. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng. Hỏi nếu theo kì hạn 3 tháng với lãi suất 1,65% một quý thì sau hai năm người đó nhận được số tiền (triệu đồng) là bao nhiêu?

A. $10.(1,0165)^8$.B. $10.(0,0165)^8$.C. $10.(1,165)^8$.D. $10.(0,165)^8$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức lãi kép: $c = p(1+r)^n$ trong đó p là số tiền gửi, r là lãi suất mỗi kỳ, n

là số kỳ gửi, Vậy sau 2 năm (8 quý) người đó thu được số tiền là: $c = 10 \left(1 + \frac{1,65}{100} \right)^8$

Đáp án A

Câu 61. Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ

nằm trên mặt đáy của nón (như hình dưới) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón.

Tính diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước.

A. $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2}(dm^3)$.

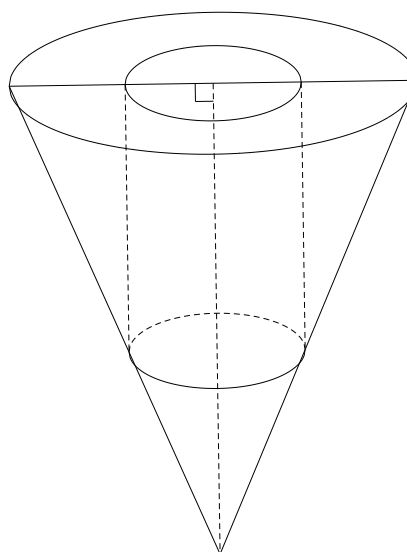
$S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}(dm^3)$.

C. $S_{xq} = 4\pi(dm^3)$.

$S_{xq} = \frac{4\pi}{2}(dm^3)$.

B.

D.



Hướng dẫn giải

- Gọi bán kính đáy hình nón là R , chiều cao h

Ta có $h = 3R$

- Chiều cao của khối trụ là $h_1 = 2R$, bán kính đáy là r

- Trong tam giác OHA có $H'A' // HA$

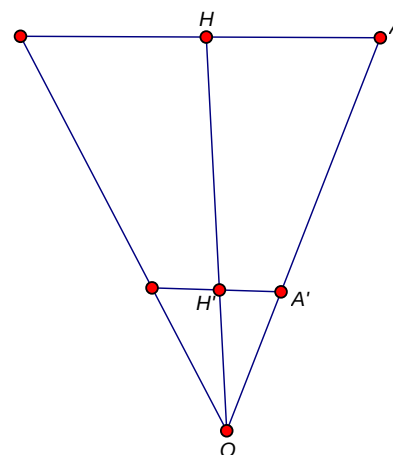
$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H'A'}{HA} = \frac{OH'}{OH} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$

- Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h_1 = \frac{2\pi R^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow R = 2$

- Đường sinh của hình nón là

$$l = OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{9R^2 + R^2} = 2\sqrt{10}$$

- Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước $S_{xq} = \pi R l = 4\pi\sqrt{10}$



Đáp án B

Câu 62. Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{n.i}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là số dân sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2016 dân số Việt Nam là 94000000 người, tỉ lệ tăng dân số là $i = 1,06\%$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm nữa thì dân số Việt Nam vượt quá 100 triệu người với giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

A. 6

B. 5

C. 8

D. 7

Hướng dẫn giải

Giả sử sau ít nhất n năm nữa thì dân số Việt Nam vượt quá 100 triệu người, áp dụng công thức trên ta có: $94000000.e^{n \cdot 0,0106} > 100000000$. Giải bất phương trình ẩn n suy ra $n > 6$

Đáp án A.

GV: ĐỖ MẠNH HÀ

Câu 63. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

A. 2.225.000.

B. 2.100.000

C. 2.200.000

D. 2.250.000

Giải:

Nếu tăng giá thuê mỗi căn hộ là x (đồng/tháng) thì sẽ có $\frac{2x}{100.000}$ căn hộ bỏ trống.

Khi đó số tiền công ty thu được là:

$$S = (2.000.000 + x) \left(50 - \frac{2x}{100.000} \right)$$

Xét hàm số $f(x) = (2.000.000 + x) \left(50 - \frac{2x}{100.000} \right), \forall x > 0$

$$f'(x) = 10 - \frac{4x}{100.000} = 0 \Leftrightarrow x = 250.000$$

Hàm số $f(x)$ đạt max $\Leftrightarrow x = 250.000$

Giá tiền thuê mỗi căn hộ là: 2.250.000 đ.

Đáp án: **D. 2.250.000**

Câu 64. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào là 27 (triệu đồng) và bán với giá 31 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định bán với giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

A. 29.

B. 29,5.

C. 32.

D. 30,5.

Giải:

Giả sử giảm x (triệu đồng) một xe thì số xe bán ra tăng lên là $200x$

Lợi nhuận thu được là $S = (31 - x - 27)(600 + 200x)$

Xét hàm số $S(x) = 200(4 - x)(3 + x) = 200(12 + x - x^2), x > 0$

$$S'(x) = 200(1 - \frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0.5$$

Max $S(x)$ đạt được $\Leftrightarrow x = 0.5$.

Vậy doanh nghiệp bán xe với giá là 30.5 triệu đồng.

Đáp án D.

Câu 65. Ta có một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước $a(\text{cm})$, ta muốn cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông cạnh bằng $x(\text{cm})$ để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

A. $x = \frac{a}{4}..$

B. $x = \frac{a}{5}..$

C. $x = \frac{a}{6}..$

D. $x = \frac{a}{7}..$

Giải:

Gọi cạnh của hình vuông bị cắt là $x, (0 < x < a)$.

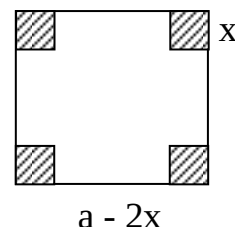
Ta có thể tích hình hộp là: $V = x(a - 2x)^2 = \frac{1}{4}4x(a - 2x)^2$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho 3 số: $4x, a - 2x, a - 2x > 0$

$$\text{Ta có: } V \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4x + a - 2x + a - 2x}{3} \right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8a^3}{27} = \frac{2a^3}{27}$$

$$V \text{ lớn nhất khi và chỉ khi: } 4x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$$

Vậy để thể tích hộp lớn nhất, cần cắt bốn góc bốn hình vuông có cạnh $\frac{a}{6}$.



GV: HOANG ANH DINH

Câu 66. Giả sử rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của một doanh nghiệp X được cho theo hàm $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$; Q_D là lượng gạo thị trường cần và P là giá bán cho một tấn gạo. Lại biết chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$; C là chi phí doanh nghiệp X bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Để đạt lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp X cần sản xuất lượng gạo gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 51 tấn

B. 52 tấn

C. 2 tấn

D. 3 tấn

Hướng dẫn:

Do $Q_D > 0 \Rightarrow P < 1312$

Số tiền thu được khi bán Q_D tấn gạo là $Q_D \cdot P = 656P - \frac{1}{2}P^2$

$$C(Q_D) = Q_D^3 - 77Q_D^2 + 1000Q_D + 100$$

Chi phí sản xuất Q_D tấn là
$$= \left(656 - \frac{1}{2}P\right)^3 - 77\left(656 - \frac{1}{2}P\right)^2 + 1000\left(656 - \frac{1}{2}P\right) + 100$$

Suy ra số tiền lãi là : $y = Q_D \cdot P - C(Q_D)$

Lợi nhuận lớn nhất khi y đạt giá trị lớn nhất.

$$y = 656P - \frac{1}{2}P^2 - \left(656 - \frac{1}{2}P\right)^3 + 77\left(656 - \frac{1}{2}P\right)^2 - 1000\left(656 - \frac{1}{2}P\right) - 100$$

$$y' = \frac{3}{2}\left(656 - \frac{1}{2}P\right)^2 - 77\left(656 - \frac{1}{2}P\right) + 1156 - P$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 1208 \text{ (n)} \\ P = 1316 \text{ (l)} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta được y đạt giá trị lớn nhất khi $P = 1208$

Vậy $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P = 52$ nên chọn B

Câu 67. Người ta khâu ghép các mảnh da hình lục giác đều màu sáng và ngũ giác đều màu sẫm để tạo thành quả bóng như hình vẽ.

a) Hỏi có bao nhiêu mảnh da mỗi loại?

- A. 12 hình ngũ giác và 20 hình lục giác
- B. 20 hình ngũ giác và 12 hình lục giác
- C. 10 hình ngũ giác và 20 hình lục giác
- D. 12 hình ngũ giác và 24 hình lục giác



Câu 68. Biết rằng quả bóng có bán kính là 13cm, hãy tính gần đúng độ dài cạnh của các mảnh da. (Hãy xem các mảnh da như các hình phẳng và tổng diện tích các mảnh da đó xấp xỉ bằng diện tích mặt cầu quả bóng)

- A. 5,00cm
- B. 5,41cm
- D. 4,8cm
- D. 5,21cm

Hướng dẫn:

Gọi m là số mặt ngũ giác và n là số mặt lục giác.

Khi đó số mặt của hình đa diện là $M = m + n$.

Mỗi mặt ngũ giác tiếp xúc với 5 mặt lục giác, mỗi mặt lục giác tiếp xúc với 3 mặt lục giác khác do đó ta có phương trình: $5m = 3n$.

Số cạnh của đa diện là $C = \frac{5m + 6n}{2}$

Số đỉnh của đa diện là $D = 5m$

Theo công thức Euler ta có $D + M = C + 2$ từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5m = 3n \\ 5m + m + n = \frac{5m + 6n}{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ n = 20 \end{cases}$$

b) Áp dụng công thức tính diện tích của đa giác lồi đều n cạnh là: $S = \frac{a^2 n}{4 \tan \frac{180^\circ}{n}}$

và công thức tính diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$ ta được phương trình

$$12 \cdot \frac{5a^2}{4 \tan \frac{180^\circ}{5}} + 20 \cdot \frac{6a^2}{4 \tan \frac{180^\circ}{6}} = 4 \cdot \pi \cdot 13^2 \Rightarrow a \approx 5,41 \text{ cm}$$

GV: HOÀNG HẠNH

Câu 69. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% một năm. Hỏi rằng người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất $\frac{5}{12}\%$ một tháng.

A. Nhiều hơn 1811486 đồng.

B. Ít hơn 1811486 đồng.

C. Như nhau.

D. Nhiều hơn 1811478 đồng.

Hướng dẫn giải

Gọi số a là tiền gửi tiết kiệm ban đầu, r là lãi suất, sau 1 tháng sẽ là: $a(1+r)$

...

sau n tháng số tiền cả gốc lãi $T = a(1 + r)^n$

$$\Rightarrow \text{số tiền sau 10 năm: } 10000000(1 + \frac{5}{12})^{10} = 162889462,7 \text{ đồng}$$

Số tiền nhận sau 10 năm (120 tháng) với lãi suất $5/12\%$ một tháng:

$$10000000(1 + \frac{5}{12 \cdot 100})^{120} = 164700949,8 \text{ đồng}$$

⇒ số tiền gửi theo lãi suất 5/12% một tháng nhiều hơn: 1811486,1 đồng

Đáp án: A.

Câu 70. Một người muốn sau 1 năm phải có số tiền là 20 triệu đồng để mua xe. Hỏi người đó phải gửi vào ngân hàng 1 khoản tiền như nhau hàng tháng là bao nhiêu. Biết lãi suất tiết kiệm là 0,27% / tháng.

A. 1637640 đồng.

B. 1637639 đồng.

C. 1637641 đồng.

D. 1637642 đồng.

Hướng dẫn giải

Xây dựng bài toán: Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là a (đồng). Biết lãi suất hàng tháng là $m\%$. Hỏi sau n tháng, người ấy có bao nhiêu tiền?

Cuối tháng thứ I, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a.m = a(1 + m)$.

Đầu tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$a(1 + m) + a = a[(1+m)+1] = \frac{a}{[(1+m)-1]}[(1+m)^2 - 1] = \frac{a}{m}[(1+m)^2 - 1]$$

Cuối tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$T_2 = \frac{a}{m}[(1+m)^2 - 1] + \frac{a}{m}[(1+m)^2 - 1].m = \frac{a}{m}[(1+m)^2 - 1] (1+m)$$

Cuối tháng thứ n , người đó có số tiền cả gốc lẫn lãi là T_n :

$$T_n = \frac{a}{m}[(1+m)^n - 1] (1+m)$$

$$\Rightarrow a = \frac{T_n.m}{(1+m)[(1+m)^n - 1]}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{T_n.m}{a} + 1 + m\right)}{\ln(1+m)} - 1$$

Áp dụng công thức với $T_n = 20\,000\,000$; $m = 0,27\% = 0,0027$; $n = 12$. ta suy ra:

$a = 1\,637\,639,629$ đồng

Đáp án: A.

Câu 71. Một người vay vốn ở một ngân hàng với số vốn là 50 triệu đồng, thời hạn 48 tháng, lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ, trả đúng ngày qui định. Hỏi hàng tháng, người đó phải đều đặn trả vào ngân hàng một khoản tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu để đến tháng thứ 48 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng?

A. 1361312 đồng.

B. 1361313 đồng.

C. 1361314 đồng.

D. 1361315 đồng.

Hướng dẫn giải

Gọi số tiền vay của người đó là N đồng, lãi suất m% trên tháng, số tháng vay là n, số tiền phải đều đặn trả vào ngân hàng hàng tháng là a đồng.

- Sau tháng thứ nhất số tiền gốc còn lại trong ngân hàng là: $N\left(1 + \frac{m}{100}\right) - a$ đồng.

- Sau tháng thứ hai số tiền gốc còn lại trong ngân hàng là:

$$\left[N\left(1 + \frac{m}{100}\right) - a\right]\left(1 + \frac{m}{100}\right) - a = N\left(1 + \frac{m}{100}\right)^2 - a\left[\left(1 + \frac{m}{100}\right) + 1\right] \text{ đồng.}$$

- Sau tháng thứ ba số tiền gốc còn lại trong ngân hàng là:

$$\left\{N\left(1 + \frac{m}{100}\right)^2 - a\left[\left(1 + \frac{m}{100}\right) + 1\right]\right\}\left(1 + \frac{m}{100}\right) - a = N\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3 - a\left[\left(1 + \frac{m}{100}\right)^2 + \left(1 + \frac{m}{100}\right) + 1\right] \text{ đồng}$$

Tương tự : Số tiền gốc còn lại trong ngân hàng sau tháng thứ n là :

$$N\left(1 + \frac{m}{100}\right)^n - a\left[\left(1 + \frac{m}{100}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{m}{100}\right)^{n-2} + \dots + \left(1 + \frac{m}{100}\right) + 1\right] \text{ đồng.}$$

Đặt $y = \left(1 + \frac{m}{100}\right)$, thì ta có số tiền gốc còn lại trong ngân hàng sau tháng thứ n sẽ là:

$Ny^n - a(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)$. Vì lúc này số tiền cả gốc lẫn lãi đã trả hết nên ta có :

$$Ny^n = a(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{Ny^n}{y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1} = \frac{Ny^n(y-1)}{y^n - 1}}$$

Thay bằng số với N = 50 000 000 đồng, n = 48 tháng, y = 1,0115 ta có :

$$a = 1361312,807 \text{ đồng.}$$

Đáp án: B.

Câu 72. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu?

A. $m(t) = 100.e^{-\frac{t \ln 2}{5730}}$ B. $m(t) = 100. \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5730}{t}}$ C. $m(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{100t}{5730}}$ D. $m(t) = 100.e^{-\frac{100t}{5730}}$

Hướng dẫn giải

Theo công thức $m(t) = m_0 e^{-kt}$ ta có:

$$m(5730) = \frac{100}{2} = 50 = 100.e^{-k \cdot 5730} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5730} \text{ suy ra } m(t) = 100e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

Đáp án: A.

Câu 73. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cabon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cabon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2378 năm B. 2300 năm C. 2387 năm D. 2400 năm

Hướng dẫn giải

Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Cabon là m_0 , tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow \frac{3m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln \left(\frac{3}{4} \right)}{-\ln 2} \approx 2378 (\text{năm})$$

Đáp án: A.

Câu 74. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. 24.79 tháng B. 23 tháng C. 24 tháng D. 22 tháng

Hướng dẫn giải

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$$75 - 20\ln(1+t) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3.25 \Leftrightarrow t \geq 24.79$$

Đáp án: A.

Câu 75. Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}$, $x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

A. 333

B. 343

C. 330

D. 323

Hướng dẫn giải

Khi có 100 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(100) = \frac{100}{1 + 49e^{-1.5}} \approx 9.3799\%$$

Khi có 200 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(200) = \frac{100}{1 + 49e^{-3}} \approx 29.0734\%$$

Khi có 500 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(500) = \frac{100}{1 + 49e^{-7.5}} \approx 97.3614\%$$

Đáp án: A.

Câu 76. Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 27507768,13 (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu.

B. 180 triệu và 140 triệu.

C. 200 triệu và 120 triệu.

D. 120 triệu và 200 triệu.

Hướng dẫn giải

Tổng số tiền cả vốn và lãi (lãi chính là lợi tức) ông Năm nhận được từ cả hai ngân hàng là 347,50776813 triệu đồng.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng X, khi đó $320 - x$ (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Y. Theo giả thiết ta có:

$$x(1 + 0,021)^5 + (320 - x)(1 + 0,0073)^9 = 347,50776813$$

Ta được $x = 140$. Vậy ông Năm gửi 140 triệu ở ngân hàng X và 180 triệu ở ngân hàng Y.

Đáp án: A

Câu 77. (Lê Gia) Hiện tại hệ thống các cửa hàng điện thoại của Thế giới di động đang bán Iphone 7 32GB với giá 18.790.000đ. Người mua có thể chọn 03 hình thức mua điện thoại. Hình thức 1 trả tiền ngay lập tức 18.790.000đ. Hình thức 2 trả trước 50% còn lại 50% chia đều cho 08 tháng mỗi tháng, tiền phí bảo hiểm 64.500đ/tháng. Hình

thức 3 trả trước 30%, số tiền còn lại chia đều cho 12 tháng, tiền bảo hiểm 75.500đ/tháng. Nếu lãi suất ở hình thức 2 là 0%, thì tổng số tiền hàng tháng khách hàng phải trả là (làm tròn đến 500đ).

- A. 1.238.500đ B. 1.174.000đ C. 1.283.500đ D. 1.238.000đ

Hướng dẫn giải

Ở hình thức số 2 số tiền khách phải trả ngay là $18.790.000đ \times 0,5 = 9.395.000đ$

Số tiền còn lại phải trả trong 8 tháng là: 9.395.000đ

Tiền lãi là 0% có nghĩa là số tiền còn lại chia đều trong 8 tháng

Vậy mỗi tháng phải trả góp là: $9.395.000đ + 64.500đ = 1.2385.500đ$

Đáp án A.

Câu 78. (Lê Gia) Hiện tại hệ thống các cửa hàng điện thoại của Thế giới di động đang bán Iphone 7 32GB với giá 18.790.000đ. Người mua có thể chọn 03 hình thức mua điện thoại. Hình thức 1 trả tiền ngay lập tức 18.790.000đ. Hình thức 2 trả trước 50% còn lại 50% chia đều cho 08 tháng mỗi tháng, tiền phí bảo hiểm 64.500đ/tháng. Hình thức 3 trả trước 30%, số tiền còn lại chia đều cho 12 tháng, tiền bảo hiểm 75.500đ/tháng. Nếu lãi suất ở hình thức 3 là 1,37%/tháng, thì tổng số tiền hàng tháng khách hàng phải trả là (làm tròn đến 500đ).

- A. 1.351.500đ B. 1.276.000đ C. 1.276.500đ D. 1.352.000đ

Hướng dẫn giải

Số tiền khách phải trả ngay lúc đầu theo hình thức mua thứ 3 là:

$$18.790.000đ \times 0,3 = 5.637.000đ$$

Số tiền còn lại phải trả trong 12 tháng là: $18.790.000đ - 5.637.000đ = 13.153.000đ$

Lãi suất 1,37%/tháng

Vậy lãi suất 1 năm là: $12 \times 1,37\% = 16,44\%/năm$

Tổng số tiền phải trả cả lãi là: $13.153.000đ \times (1 + 16,44\%) = 15.315.353,2đ$

Mỗi tháng người mua phải trả góp số tiền là: $15.315.353,2 : 12 = 1.276.279đ$ làm tròn thành 1.276.000đ

Kể cả tiền bảo hiểm tổng số tiền người mua phải nộp 1 tháng là:

$$1.276.000đ + 75.500đ = 1.351.500đ$$

Đáp án A.

Câu 79. (Lê Gia) Hiện tại hệ thống các cửa hàng điện thoại của Thế giới di động đang bán Iphone 7 32GB với giá 18.790.000đ. Người mua có thể chọn 03 hình thức mua điện thoại. Hình thức 1 trả tiền ngay lập tức 18.790.000đ. Hình thức 2 trả trước 50% còn lại 50% chia đều cho 08 tháng mỗi tháng, tiền phí bảo hiểm 64.500đ/tháng. Hình thức 3 trả trước 30%, số tiền còn lại chia đều cho 12 tháng, tiền bảo hiểm 75.500đ/tháng. Nếu lãi suất ở hình thức 2 là 0%, thì số tiền khách hàng phải trả khi mua sản phẩm là .

- A. 19.303.000đ B. 18.790.000đ C. 21.855.000đ D. 19.855.000đ

Hướng dẫn giải

Số tiền ban đầu khách phải trả khi mua theo hình thức 2 là : 9.395.000đ (một nửa số tiền)

Với lãi suất 0% trong 8 tháng người khách hàng phải trả một nửa số tiền còn lại và tiền bảo hiểm trong 8 tháng

Vậy tổng số tiền khách phải trả để mua hàng theo hình thức 2 là

$$9.393.000đ \times 2 + 64.500đ \times 8 = 19.303.000đ$$

Số tiền này nhiều hơn so với mua ngay sản phẩm là 513.000đ

Đáp án A.

Câu 80. (Lê Gia) Hiện tại hệ thống các cửa hàng điện thoại của Thế giới di động đang bán Iphone 7 32GB với giá 18.790.000đ. Người mua có thể chọn 03 hình thức mua điện thoại. Hình thức 1 trả tiền ngay lập tức 18.790.000đ. Hình thức 2 trả trước 50% còn lại 50% chia đều cho 08 tháng mỗi tháng, tiền phí bảo hiểm 64.500đ/tháng. Hình thức 3 trả trước 30%, số tiền còn lại chia đều cho 12 tháng, tiền bảo hiểm 75.500đ/tháng. Nếu lãi suất ở hình thức 3 là 1,37%/tháng, thì số tiền khách hàng phải trả khi mua sản phẩm là (làm tròn đến 500đ).

A. 21.858.000đ B. 20.952.000đ C. 19.303.000đ D. 21.800.000đ

Hướng dẫn giải

Lãi suất 1 năm của hình thức số 3 là: $12 \times 1,37\% = 16,44\%$

Số lãi này tính vào số tiền khách hàng chưa trả được ngay khi mua điện thoại. Tức là tính vào $18.790.000đ \times 0,7 = 13.153.000đ$

Tổng số tiền cả lãi là: $13.153.000đ \times (1 + 16,44\%) = 15.315.353,2đ$

Tổng số tiền người mua phải trả là:

Số tiền trả ngay ban đầu + số tiền cả lãi trong 12 tháng + số tiền bảo hiểm 12 tháng
 $= 5.637.000đ + 15.315.353,2đ + 75.500đ \times 12 = 21.858.353,2đ$

Làm tròn thành 21.858.000đ – Giá này đắt hơn mua ngay 3.068.000đ

Đáp án A.

Câu 81. (Lê Gia) Hiện tại hệ thống các cửa hàng điện thoại của Thế giới di động đang bán Iphone 7 32GB với giá 18.790.000đ. Người mua có thể chọn 03 hình thức mua điện thoại. Hình thức 1 trả tiền ngay lập tức 18.790.000đ. Hình thức 2 trả trước 50% còn lại 50% chia đều cho 08 tháng mỗi tháng, tiền phí bảo hiểm 64.500đ/tháng, lãi suất của hình thức này là 0%. Hình thức 3 trả trước 30%, số tiền còn lại chia đều cho 12 tháng, tiền bảo hiểm 75.500đ/tháng. Sau 12 tháng tổng số tiền người mua phải trả là 21.858.000đ. Hỏi người mua trả góp theo hình thức 3 phải mua trả góp với lãi suất bao nhiêu phần trăm / tháng (làm tròn đến hàng thập phân số 2)?

A. 1,37% B. 16,44% C. 12% D. 2,42%

Hướng dẫn giải

Số tiền bảo hiểm 12 tháng là: $12 \times 75.500đ = 906.000đ$

Số tiền khách hàng trả ngay ban đầu là: $18.790.000đ \times 0,3 = 5.637.000đ$

Số tiền tính cả lãi khách hàng phải trả là:

$$21.858.000đ - 5.637.000đ - 906.000đ = 15.315.000đ$$

Số tiền thực phải trả: $18.790.000đ \times 0,7 = 13.153.000đ$

Số tiền lãi trong 12 tháng phải trả là: $15.315.000đ - 13.153.000đ = 2.162.000đ$

Lãi suất 1 năm là: $(2.162.000 : 13.153.000) \times 100\% = 16,44\%$

Vậy lãi suất 1 tháng là: $16,44 : 12 = 1,37\%$

Đáp án A.

GV: LÊ MINH NHỰT

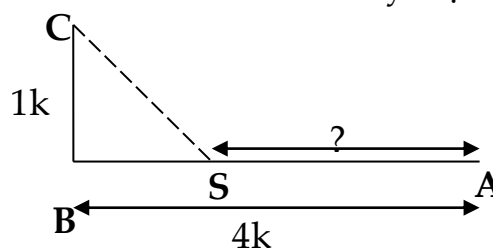
Câu 82. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1km. Khoảng cách từ B đến A là 4km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000USD, còn đặt dưới đất mất 3000USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất

A. $\frac{15}{4}$

B. $\frac{13}{4}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{19}{4}$



Bài giải chi tiết

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính tổng chi phí sử dụng.

Đặt $BS = x$ thì ta được: $SA = 4 - x$, $CS = \sqrt{x^2 + 1}$. Theo đề bài, mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000USD, còn đặt dưới đất mất 3000USD, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$$f(x) = 3000 \cdot (4 - x) + 5000 \cdot \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{với } x \in [0; 4]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được số tiền ít nhất cần sử dụng và từ đó xác định được vị trí điểm S.

$$f'(x) = -3000 + 5000 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3000 + 5000 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow -3000\sqrt{x^2 + 1} + 5000x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 1} = 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 = 9 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$.

Ta có: $f(0) = 17000$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = 16000$, $f(4) = 20615,52813$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 16000 và tại $x = \frac{3}{4}$. Khi đó chi phí là thấp nhất và điểm S nằm cách A một đoạn $SA = 4 - x = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$.

Vậy đáp án là **B**.

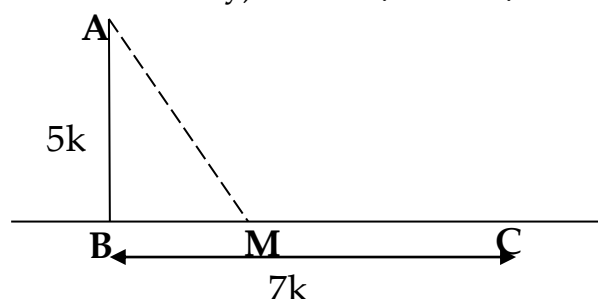
Câu 83. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h (xem hình vẽ dưới đây). Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.

A. $\frac{\sqrt{74}}{4}$

B. $\frac{29}{12}$

C. $\sqrt{29}$

D. $2\sqrt{5}$



Bài giải chi tiết.

Trước tiên, ta xây dựng hàm số $f(x)$ là hàm số tính thời gian người canh hải đăng phải đi.

Đặt $BM = x$ thì ta được: $MC = 7 - x$, $AM = \sqrt{x^2 + 25}$. Theo đề bài, Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h, như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7 - x}{6} = \frac{3\sqrt{x^2 + 25} - 2x + 14}{12} \text{ với } x \in [0; 7]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được thời gian ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2\sqrt{x^2 + 25} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 25} = 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 = 100 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{5} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 7]$ và ta có:

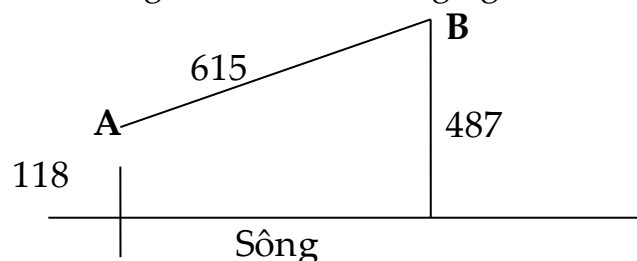
$$f(0) = \frac{29}{12}, f(2\sqrt{5}) = \frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}, f(7) = \frac{\sqrt{74}}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$ tại $x = 2\sqrt{5}$. Khi đó thời gian đi là ít nhất và điểm M nằm cách B một đoạn $BM = x = 2\sqrt{5}$.

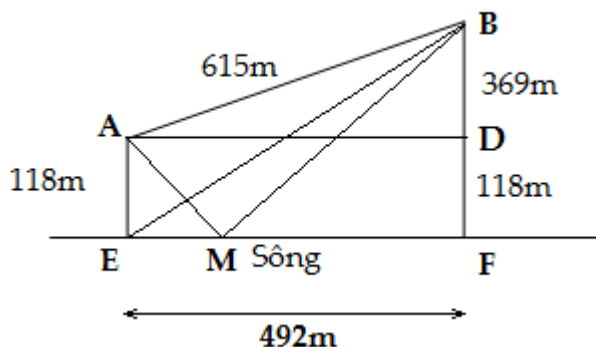
Vậy đáp án là **D**.

Câu 84. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi là:

- A. 569,5m B. 671,4m
C. 779,8m D. 741,2m



Bài giải chi tiết



Ta giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B.

Ta dễ dàng tính được $BD = 369$, $EF = 492$. Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \quad \text{với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \\ &\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605} \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta

có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8m$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ 779,8m.

Vậy đáp án là **C**.

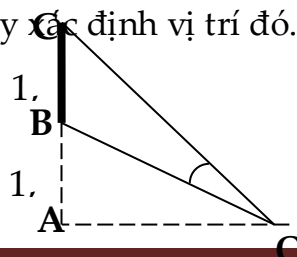
Câu 85. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng cách màn ảnh sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó.

A. 2,5 m

B. 2,7 m

C. 2,4 m

D. Đáp án khác



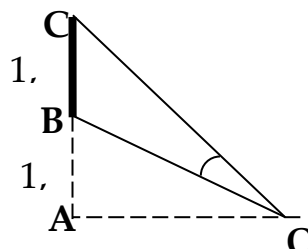
Bài giải chi tiết.

Vì góc nhìn $\angle BOC$ nằm trong khoảng $(0, 90)$ nên số đo $\angle BOC = \alpha$ sẽ tỉ lệ nghịch với $\cos \alpha$. Khi đó, để tìm vị trí sao cho góc nhìn lớn nhất, ta có thể tìm vị trí sao cho $\cos \alpha$ là bé nhất.

Đặt $AO = x$

Khi đó, ta có: $BO = \sqrt{x^2 + 1,8^2}$; $CO = \sqrt{x^2 + 3,2^2}$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{BO^2 + CO^2 - BC^2}{2 \cdot BO \cdot CO} \\ &= \frac{x^2 + 5,76}{\sqrt{x^2 + 1,8^2} \cdot \sqrt{x^2 + 3,2^2}} \end{aligned}$$



Đặt $\cos \alpha = f(x)$. Khảo sát hàm $f(x)$ ta thấy tại $x = 2,4$ thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất. (Thay vào đạo hàm bậc nhất của $f(x)$, ta thấy $x = 2,4$ là nghiệm)

Vậy, $x = 2,4$.

Vậy đáp án là **C**.

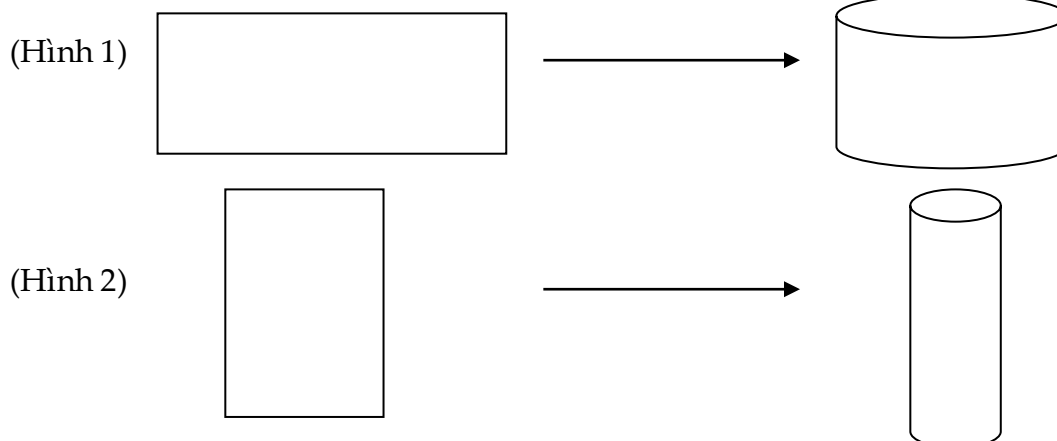
CHƯƠNG II: THỂ TÍCH

Câu 86. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50cm X 120cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều (xem hình dưới đây):

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng có chiều cao 50cm. (Hình 1)

Cách 2: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng có chiều cao 120cm. (Hình 2)

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là thể tích của thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$

C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{5}$

Bài giải chi tiết.

Ta có:

$$V_1 = S.h = \left(\frac{120}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot 50$$

$$V_2 = S.h = \left(\frac{50}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot 120$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{5}.$$

Vậy đáp án là **D**.

Câu 87. Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3 . Với chiều cao h và bán kính đáy là r . Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$

C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$

D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

Bài giải chi tiết.

Ta có thể tích của cốc giấy hình nón đó là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \Leftrightarrow h = \frac{3^4}{\pi r^2}$

Khi đó, diện tích xung quanh của cốc giấy là

$$\begin{aligned} s_{xq} &= \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \pi r \sqrt{r^2 + \frac{3^8}{\pi^2 r^4}} = \sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{3^8}{r^2}} \end{aligned}$$

Để lượng giấy tiêu thụ ít nhất, nghĩa là diện tích xung quanh của cốc giấy là nhỏ nhất.

Đặt $s_{xq} = f(r)$. Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $f(r)$

$$\text{Ta có } f'(r) = \frac{4\pi^2 r^3 - \frac{2 \cdot 3^8}{r^3}}{2\sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{3^8}{r^2}}} = \frac{2\pi^2 r^3 - \frac{3^8}{r^3}}{\sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{3^8}{r^2}}}$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\pi^2 r^3 - \frac{3^8}{r^3} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$$

Dựa vào bảng biến thiên của $f(r)$, ta kết luận $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy đáp án là **B**.

GV: MAI VĨNH PHÚ

Câu 88. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$), T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 10000 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 200g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu?

A. $m(t) = 200.e^{-\frac{t \ln 2}{10000}}$ **B.** $m(t) = 200.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10000}}$ **C.** $m(t) = 200.\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{t}{50}}$ **D.**

$$m(t) = 200.e^{-\frac{t}{50}}$$

Hướng dẫn giải

Theo công thức $m(t) = m_0 e^{-kt}$ ta có:

$$m(10000) = \frac{200}{2} = 100 = 200.e^{-k \cdot 10000} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{10000} \text{ suy ra } m(t) = 200e^{-\frac{\ln 2}{10000}t}$$

Đáp án: A.

Câu 89. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$), T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 4857 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cabon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cabon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2016 năm **B.** 2015 năm **C.** 2014 năm **D.** 2017 năm

Hướng dẫn giải

Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Cabon là m_0 , tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{4857}t} \Leftrightarrow \frac{3m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{4857}t} \Leftrightarrow t = \frac{4857 \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right)}{-\ln 2} \approx 2016 \text{ (năm)}$$

Đáp án: A.

Câu 90. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm sinh viên được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm sinh viên được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$, $t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm sinh viên nhớ được danh sách đó dưới 12%?

- A. 11.43 tháng B. 11 tháng C. 9 tháng D. 8 tháng

Hướng dẫn giải

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$$75 - 20\ln(1+t) \leq 12 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 2.52 \Leftrightarrow t \geq 11.42859666$$

Đáp án: A.

Câu 91. Ông Bảy gửi 350 triệu đồng ở hai ngân hàng Bình Phước và Bình Dương theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng Bình Phước với lãi suất 2,3% một quý trong thời gian 24 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Bình Dương với lãi suất 0,69% một tháng trong thời gian 14 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 47,1841059 triệu đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Bảy lần lượt gửi ở ngân hàng Bình Phước và Bình Dương là bao nhiêu?

- A. 120 triệu và 230 triệu. B. 230 triệu và 120 triệu.
C. 100 triệu và 250 triệu. D. 250 triệu và 100 triệu.

Hướng dẫn giải

Tổng số tiền cả vốn và lãi (lãi chính là lợi tức) ông Bảy nhận được từ cả hai ngân hàng là 397,1841059 triệu đồng.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Bình Phước, khi đó $320 - x$ (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Bình Dương. Theo giả thiết ta có:

$$x(1 + 2,1\%)^8 + (350 - x)(1 + 0,73\%)^{14} = 397,1841059$$

Ta được $x = 120$. Vậy ông Bảy gửi 120 triệu ở ngân hàng Bình Phước và 230 triệu ở ngân hàng Bình Dương.

Đáp án: A.

GV: NGUYỄN ĐÌNH HẢI

Câu 92. Khi nuôi một loại virus trong một dưỡng chất đặc biệt sau một khoảng thời gian, người ta nhận thấy số lượng virus có thể được ước lượng theo công thức $m(t) = m_0 \cdot 2^{kt}$, trong đó m_0 là số lượng virus (đơn vị “con”) được nuôi tại thời điểm

ban đầu; k là hệ số đặc trưng của dưỡng chất đã sử dụng để nuôi virus; t là khoảng thời gian nuôi virus (tính bằng phút). Biết rằng sau 2 phút, từ một lượng virus nhất định đã sinh sôi thành đàn 112 con, và sau 5 phút ta có tổng cộng 7168 con virus. Hỏi sau 10 phút nuôi trong dưỡng chất này, tổng số virus có được là bao nhiêu?

A. 7.340.032 con.

B. 874.496 con.

C. 2.007.040 con.

D. 4.014.080 con.

Hướng dẫn giải

Theo công thức $m(t) = m_0 2^{kt}$ ta có:

$$\begin{cases} 112 = m(2) = m_0 \cdot 2^{2k} \\ 7168 = m(5) = m_0 \cdot 2^{5k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = 7 \\ k = 2 \end{cases}.$$

Vậy sau 10 phút, tổng số virus có được là suy ra $m(10) = 7 \cdot 2^{2 \times 10} = 7.340.032$ con.

Đáp án: A.

Câu 93. Số các chữ số của số 2^{337549} là bao nhiêu?

A. 101.613 chữ số.

B. 233.972 chữ số.

C. 101.612 chữ số.

D. 233.971 chữ số.

Hướng dẫn giải

Số các chữ số của số n được cho bởi công thức $[\log n] + 1$, trong đó $[x]$ là phần nguyên của số thực x , ví dụ $[2,99] = 2$, $[3,01] = 3$. Vậy số các chữ số của 2^{337549} là $[\log 2^{337549}] + 1 = [337549 \log 2] + 1 = 101.613$

Đáp án: A.

Câu 94. Mức lương khởi điểm của một nhân viên văn phòng là 6 triệu đồng. Công ty quy định cứ sau khi kết thúc 12 tháng hợp đồng thì tiền lương của người này sẽ tăng lên 7%. Biết rằng thuế thu nhập cá nhân của người hưởng lương tại một tháng bất kỳ được tính như sau:

- Lấy tiền lương tại tháng này trừ đi 3,6 triệu đồng, được khoản A

- Nếu $A > 5$ triệu đồng thì người này đóng một lượng tiền thuế là $5\% \times A$.¹

Vậy ở năm làm việc thứ bao nhiêu thì anh này bắt đầu đóng thuế? Và tại năm đó, mỗi tháng anh phải đóng thuế bao nhiêu (làm tròn đến đơn vị trăm đồng)?

A. Bắt đầu đóng thuế ở năm thứ 6, tiền thuế phải đóng mỗi tháng là 270.200 đồng.

B. Bắt đầu đóng thuế ở năm thứ 6, tiền thuế phải đóng mỗi tháng là 450.200 đồng.

C. Bắt đầu đóng thuế ở năm thứ 5, tiền thuế phải đóng mỗi tháng là 240.800 đồng.

D. Bắt đầu đóng thuế ở năm thứ 5, tiền thuế phải đóng mỗi tháng là 420.800 đồng.

Hướng dẫn giải

Để tính năm mà người này bắt đầu phải đóng thuế, ta tìm nghiệm nguyên dương n bé nhất của bất phương trình

¹ Cách tính thuế này không nằm trong Luật pháp của nước CHXHCN Việt Nam, chỉ nhằm mục đích giáo dục cho học sinh về sự hiện diện và cách tạm tính thuế thu nhập cá nhân.

$$6 \times (1 + 7\%)^n - 3,6 > 5.$$

Dễ thấy $n > 5,32$ (xấp xỉ), nghĩa là vào năm thứ 6 thì anh này bắt đầu đóng thuế.

Mức thuế phải đóng là

$$[6 \times (1 + 7\%)^6 - 3,6] \times 5\% \approx 270.200 \text{ đồng}$$

Đáp án: A.

GV: PHẠM THỊ LIÊN

Câu 95. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Tàu thứ nhất chạy theo hướng nam với vận tốc 6 hải lí/giờ, còn tàu thứ 2 chạy theo hướng về tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi sau bao lâu khoảng cách giữa hai con tàu là lớn nhất?

- A. $\frac{7}{17}$ giờ. B. $\frac{17}{7}$ giờ. C. 2 giờ. D. 3 giờ.

Hướng dẫn giải

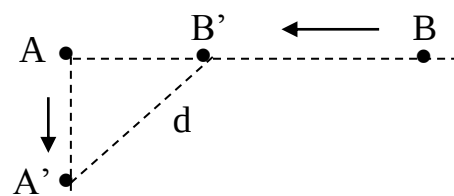
Phân tích: Khó nhất của bài toán này là học sinh không hình dung được hướng đi của hai con tàu để thiết lập hàm khoảng cách. Cụ thể:

Giả sử A, A', B, B' lần lượt là vị trí ban đầu và vị trí lúc sau của tàu 1 và tàu 2.

- Vì tàu 1 đi về hướng nam (hướng AA') mà hai con tàu lúc đầu lại ở cùng 1 vĩ tuyến nên hướng AA' là hướng xuống và vuông góc với AB .

- Tàu 2 đi về phía tàu 1 nên đi theo hướng $\overline{BA}$.

Ta có hình vẽ như bên cạnh, từ đây đi thiết lập hàm d .



Gọi d là khoảng cách lớn nhất giữa hai con tàu và t là thời gian từ ban đầu đến lúc đạt khoảng cách đó.

Ta có: $d = A'B' = \sqrt{AB'^2 + AA'^2} = \sqrt{(AB - BB')^2 + AA'^2}$, trong đó:

$AB = 5; BB' = 7t; AA' = 6t$ (BB' và AA' lần lượt là quãng đường của tàu 2 và tàu 1 đi được trong thời gian t).

Suy ra, $d = \sqrt{(5 - 7t)^2 + (6t)^2}$. Khảo sát hàm d với $t > 0$ ta tìm được kết quả d đạt

$$\text{GTLN tại } t = \frac{7}{17}.$$

Đáp án: A.

Câu 96. Một đĩa tròn bằng thép trắng có bán kính bằng R . Người ta phải cắt đĩa theo một hình quạt, sau đó gấp lại thành hình nón để làm một cái phễu. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để thể tích cái phễu lớn nhất?

- A. $\approx 66^\circ$ B. $\approx 294^\circ$ C. $\approx 12,56^\circ$ D. $\approx 2,8^\circ$

Hướng dẫn giải

Gọi x là độ dài đường tròn đáy của cái phễu (bằng chu vi đĩa tròn trừ đi độ dài cung hình quạt bị cắt đi) $\Rightarrow x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$ (r là bán kính đường tròn đáy hình nón).

Đường sinh của hình nón chính bằng bán kính đĩa là R .

$$\text{Đường cao hình nón: } h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

Khảo sát hàm V ta tìm được V đạt GTLN khi $x = \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}$.

$$\text{Suy ra, độ dài cung hình quạt bị cắt là: } 2\pi R - \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi R - \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}}{2\pi R} \cdot 360 \approx 66^\circ$$

Đáp án: A.

Chú ý: Bài này các em có thể thiết lập theo suy luận diện tích xung quanh hình nón chính bằng diện tích đĩa tròn trừ diện tích hình quạt bị cắt.

Câu 97. Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10\text{km/h}$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. $\approx 15(\text{km/h})$.

B. $\approx 8(\text{km/h})$.

C. $\approx 20(\text{km/h})$.

D. $\approx 6.3(\text{km/h})$.

Hướng dẫn giải

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc của tàu $\Rightarrow$ thời gian tàu đi 1km là $\frac{1}{x}$ giờ.

Phần chi phí thứ nhất là: $480 \cdot \frac{1}{x} = \frac{480}{x}$ (ngàn).

Giả sử, phần chi phí thứ 2 kí hiệu là y thì $y = kx^3 \Rightarrow k = \frac{y}{x^3}$.

Với $x = 10 \Rightarrow y = \frac{1}{10} \cdot 30 = 3$ (ngàn) $\Rightarrow k = \frac{3}{1000} = 0,003 \Rightarrow y = 0,003x^3$.

Do đó, tổng chi phí là: $T = \frac{480}{x} + 0,003x^3$. Khảo sát T ta tìm được T đạt GTNN khi

$$x \approx 15(\text{km/h}).$$

Đáp án A.

GV: QUANG DAO

Câu 98. Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 24t$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. 18m/s^2 .

B. -18m/s^2 .

C. -6m/s^2 .

D. 6m/s^2 .

Hướng dẫn giải

Ta có vận tốc $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 24$. Vận tốc triệt tiêu khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases} (L)$

Gia tốc $a(t) = v'(t) = 6t - 6$. Vậy gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là $a(4) = 6 \cdot 4 - 6 = 18 \text{ m/s}^2$ **Đáp án A.**

Câu 99. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = \frac{-1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Tại thời điểm nào, vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

- A. $t = \sqrt{2}$. B. $t = 1$. C. $t = \sqrt{3}$. D. $t = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có vận tốc $v(t) = S'(t) = -t^3 + 6t - 2$. $v'(t) = -3t^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases} (L)$. Lập bảng

biến thiên ta có $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = \sqrt{2}$. **Đáp án A**

Câu 100. Cần phải đặt một ngọn đèn ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a . Hỏi cần phải treo đèn ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất? Biết rằng cường độ ánh sáng C được biểu thị bằng công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$, trong đó α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỉ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng.

- A. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi h là độ cao của đèn so với mặt bàn ($h > 0$). Các kí hiệu như trên hình vẽ, ta có

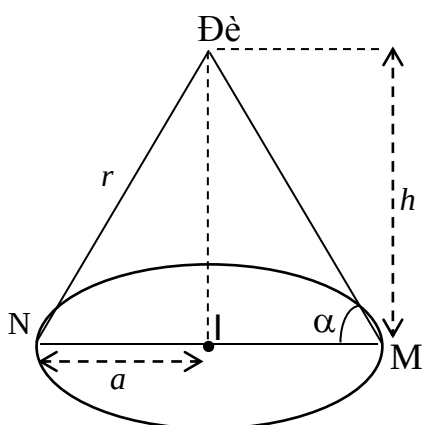
$\sin \alpha = \frac{h}{r}$ và $h^2 = r^2 - a^2$. Suy ra cường độ ánh sáng là $C = C(r) = k \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3}$ ($r > 0$).

Ta cần tìm r sao cho $C(r)$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có

$C'(r) = k \frac{-2r^2 + 3a^2}{r^4 \sqrt{r^2 - a^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = a\sqrt{\frac{3}{2}} \\ r = -a\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} (L)$. Lập bảng biến thiên ta có $C(r)$ đạt giá trị

lớn nhất khi $r = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, suy ra $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án A.



Câu 101. Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất ban đầu là 5%/ năm và lãi hàng tháng được nhập vào vốn. Cứ sau 2 năm, lãi suất giảm 0,2%. Hỏi sau 6 năm, tổng số tiền người đó nhận được gần với số nào nhất sau đây?

A. 119,5 triệu đồng.

B. 132,5 triệu đồng.

C. 132 triệu đồng.

D. 119 triệu đồng.

Giải: Gọi số tiền ban đầu là A .

Sau 2 năm đầu, người đó nhận được số tiền là $A \cdot 1,05^2$

Sau 2 năm tiếp theo, người đó nhận được số tiền là $A \cdot 1,05^2 \cdot 1,048^2$

Sau 2 năm tiếp theo, người đó nhận được số tiền là $A \cdot 1,05^2 \cdot 1,048^2 \cdot 1,046^2 \approx 132,484$ triệu

Vậy, chọn đáp án B.

Câu 102. Một sinh viên mới ra trường đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 4 triệu/ tháng. Cứ sau 1 năm, lương được tăng thêm 10%. Biết rằng, tiền sinh hoạt phí hàng tháng là 2,5 triệu đồng. Hỏi sau 4 năm, sinh viên đó tiết kiệm được số tiền gần với số nào nhất sau đây?

A. 105 triệu đồng.

B. 106 triệu đồng.

C. 102 triệu đồng.

D. 103 triệu đồng.

Giải:

Tổng số lương lĩnh được sau một năm làm việc là $4 \cdot 12 = 48$ triệu đồng.

Tổng số lương lĩnh được sau 2 năm làm việc là $48 + 12 \cdot 4 \cdot 1,1 = 100,8$ triệu đồng.

Tổng số lương lĩnh được sau 3 năm làm việc là $100,8 + 12 \cdot 4 \cdot 1,1^2 = 158,88$ triệu đồng.

Tổng số lương lĩnh được sau 4 năm làm việc là $158,88 + 12 \cdot 4 \cdot 1,1^3 = 222,768$ triệu đồng.

Tiền sinh hoạt phí trong 4 năm đó là $2,5 \cdot 4 \cdot 12 = 120$ triệu đồng.

Vậy, số tiền tiết kiệm được sau 4 năm là $222,768 - 120 = 102,768$ triệu đồng.

(Thực hiện phép tính $4 \cdot 12 \cdot (1 + 1,1 + 1,1^2 + 1,1^3) - 2,5 \cdot 4 \cdot 12$)

Chọn đáp án D.

Câu 103. Lãi suất của một ngân hàng là 6% / năm và 1,4% / quý. Ông A gửi 100 triệu với lãi suất tính theo năm, ông B gửi 100 triệu với lãi suất tính theo quý. Hỏi sau 2 năm, số tiền nhận được của ông A hơn ông B gần với số nào nhất sau đây biết rằng trong

khoảng thời gian đó, lãi suất không thay đổi, người gửi không rút lãi tiền lãi sau mỗi kỳ được nhập vào vốn ban đầu?

A. 596 ngàn đồng.

B. 595 ngàn đồng.

C. 600 ngàn đồng.

D. 590 ngàn đồng.

Giải: 2 năm = 8 quý.

Sau 2 năm, số tiền ông A nhận được là $100 \cdot 1,06^2$ triệu đồng

Sau 2 năm, số tiền ông B nhận được là $100 \cdot 1,014^8$ triệu đồng

Vậy, sau 2 năm số tiền ông A nhận được hơn ông B là

$$(100 \cdot 1,06^2 - 100 \cdot 1,014^8) \cdot 1000 \approx 595,562 \text{ nghìn đồng}$$

Vậy, chọn đáp án A.

GV: THÂN MINH ĐỨC

Câu 104. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}, \text{ trong đó } m_0 \text{ là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm } t$$

$= 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu?

A. $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{5730}}$ B. $m(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5730}{t}}$ C. $m(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{100t}{5730}}$ D.

$$m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{100t}{5730}}$$

Hướng dẫn giải

Theo công thức $m(t) = m_0 e^{-kt}$ ta có:

$$m(5730) = \frac{100}{2} = 50 = 100 \cdot e^{-k \cdot 5730} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5730} \text{ suy ra } m(t) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$$

Đáp án: A.

Câu 105. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}, \text{ trong đó } m_0 \text{ là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm } t$$

$= 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cabon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cabon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2378 năm

B. 2300 năm

C. 2387 năm

D. 2400 năm

Hướng dẫn giải

Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Carbon là m_0 , tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow \frac{3m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln\left(\frac{3}{4}\right)}{-\ln 2} \approx 2378 \text{ (năm)}$$

Đáp án: A.

Câu 106. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ được danh sách đó dưới 10%?

- A. 24.79 tháng B. 23 tháng C. 24 tháng D. 22 tháng

Hướng dẫn giải

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$$75 - 20\ln(1+t) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3.25 \Leftrightarrow t \geq 24.79$$

Đáp án: A.

Câu 107. Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}, x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

- A. 333 B. 343 C. 330 D. 323

Hướng dẫn giải

Khi có 100 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(100) = \frac{100}{1 + 49e^{-1.5}} \approx 9.3799\%$$

Khi có 200 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(200) = \frac{100}{1 + 49e^{-3}} \approx 29.0734\%$$

Khi có 500 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(500) = \frac{100}{1 + 49e^{-7.5}} \approx 97.3614\%$$

Đáp án: A.

Câu 108. Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 27507768,13 (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

- A. 140 triệu và 180 triệu. B. 180 triệu và 140 triệu.
C. 200 triệu và 120 triệu. D. 120 triệu và 200 triệu.

Hướng dẫn giải

Tổng số tiền cả vốn và lãi (lãi chính là lợi tức) ông Năm nhận được từ cả hai ngân hàng là 347,50776813 triệu đồng.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng X, khi đó $320 - x$ (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Y. Theo giả thiết ta có:

$$x(1 + 0,021)^5 + (320 - x)(1 + 0,0073)^9 = 347,50776813$$

Ta được $x=140$. Vậy ông Năm gửi 140 triệu ở ngân hàng X và 180 triệu ở ngân hàng Y.

Đáp án: A.

Giả thiết dùng chung cho câu 109, 110, 111.

Mức lạm phát của VN là 12% /3 năm, nghĩa là giá sản phẩm sẽ tăng lên 12% sau mỗi 3 năm. Một ngôi nhà ở TPHCM có giá là 1.000.000.000 (1 tỉ) đồng vào năm 2016. Một người ra trường đi làm với lương khởi điểm là 4.000.000 (4 triệu đồng) một tháng. Giả sử sau 3 năm thì được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của người đó là 50% lương.

Câu 109. Hỏi sau khi đi làm 21 năm thì người đó tiết kiệm được bao nhiêu tiền?

- A. 683.076.312 B. 823.383.943
C. 504.000.000 D. 982.153.418

Hướng dẫn giải

Gọi A_0 là số tiền tiết kiệm được trong 3 năm đầu.

Ta có: $A_0 = 2.000.000 \times 36 = 72.000.000$

Gọi A_i là số tiền tiết kiệm được sau 3 năm thứ i . Ta có: $A_i = A_0 \cdot (1+R)^{i-1}$ với $R=0.1$.

Tổng số tiền tiết kiệm được sau 21 năm là:

$$\begin{aligned} S &= A_0 + A_1 + \dots + A_6 \\ &= A_0 \frac{(1+R)^7 - 1}{(1+R) - 1} \\ &= 683.076.312 \end{aligned}$$

Câu 110. Hỏi sau bao nhiêu năm đi làm thì người đó tiết kiệm được 1.000.000.000 ?

- A. 28
C. 26
B. 27
D. 25

Hướng dẫn giải

Gọi A_0 là số tiền tiết kiệm được trong 3 năm đầu.

Ta có: $A_0 = 2.000.000 \times 36 = 72.000.000$

Gọi A_i là số tiền tiết kiệm được sau 3 năm thứ i . Ta có: $A_i = A_0 \cdot (1+R)^{i-1}$ với $R=0.1$.

Tổng số tiền tiết kiệm được sau 3*i* năm là:

$$\begin{aligned}
 S &= A_0 + A_1 + \dots + A_{i-1} \\
 &= A_0 \frac{(1+R)^i - 1}{(1+R) - 1} \\
 &= A_0 \frac{(1+R)^i - 1}{R}
 \end{aligned}$$

Ta có:

$$S = 1.000.000.000 \Leftrightarrow i \approx 9,14$$

Vậy sau 28 năm đi làm người đó tiết kiệm được 1.000.000.000

Câu 111. Nếu muốn mua nhà sau 21 năm đi làm thì lương khởi điểm phải là bao nhiêu? Biết mức lạm phát và mức tăng lương không đổi.

A. 6.472.721

B. 12.945.443

C. 17.545.090

D. 8.772.545

Hướng dẫn giải

Gọi G_0 là giá nhà ban đầu. Ta có: $G_0 = 1.000.000.000$

Gọi A_0 là số tiền tiết kiệm được trong 3 năm đầu.

Gọi A_i là số tiền tiết kiệm được sau 3 năm thứ i . Ta có: $A_i = A_0 \cdot (1+R)^{i-1}$ với $R = 0.1$

Tổng số tiền tiết kiệm được sau 21 năm là:

$$\begin{aligned}
 S &= A_0 + A_1 + \dots + A_6 \\
 &= A_0 \frac{(1+R)^7 - 1}{(1+R) - 1} \\
 &= A_0 \frac{(1+R)^7 - 1}{R}
 \end{aligned}$$

Giá nhà sau 21 năm là: $G = G_0(1+r)^7$ với $r = 0.12$.

Ta có:

$$S = G$$

$$\Leftrightarrow A_0 = \frac{G_0(1+r)^7 \cdot R}{(1+R)^7 - 1}$$

$$\Leftrightarrow A_0 = 233.017.978$$

Suy ra lương khởi điểm là: $\frac{A_0}{36 \times 0.5} = 12.945.443$

GV: TRẦN ANH TUẤN

Câu 112. Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là 10%/ 1 năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

A. 10

B. 15

C. 17

D. 20

Hướng dẫn giải

Gọi n là số năm ông An đã gửi tiền. Khi đó, số tiền ông rút ra là:

$$100(1+0,1)^n = 100.1,1^n$$

triệu.

Theo giả thiết ta có: $250 \leq 100.1,1^n \leq 260$ hay $\log_{1,1} 2,5 \leq n \leq \log_{1,1} 2,6$ nên $n = 10$.

Đáp án: A.

Câu 113. Một ô tô đang chạy với tốc độ 36 km/h thì hãm phanh, chuyển động chậm dần đều với phương

trình vận tốc $v = 10 - 0,5t$ (m/s). Hỏi ô tô chuyển động được quãng đường bao nhiêu thì dừng lại?

A. 100m.

B. 200m

C. 300 m

D. 400 m

Hướng dẫn giải

Ta có: $v_0 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$ ứng với $t_0 = 0$

$$v_1 = 10 - 0,5t_1 = 0 \text{ nên } t_1 = 20$$

$$\text{Do đó: quãng đường } s = \int_0^{20} (10 - 0,5t) dt = 100 \text{ (m)}.$$

Đáp án: A.

Câu 114. Cường độ một trận động đất M (richer) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ với A là biên độ rung chấn tối đa, và A_0 một biên độ chuẩn. Đầu thế kỉ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richer. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

A. 8,9

B. 33,2

C. 2,075

D. 11

Hướng dẫn giải

Theo công thức tính $M = \log A - \log A_0 = \log \frac{A}{A_0}$.

$$\text{Ta có: } M_F = \log \frac{A_F}{A_0} = 8 \text{ và } A_{NM} = 4A_F \text{ nên } M_{NM} = \log \frac{A_{NM}}{A_0} = \log \frac{4A_F}{A_0} = \log 4 + \log \frac{A_F}{A_0} \approx 8,9$$

Đáp án: A.

GV: TRẦN DUY PHƯƠNG

Câu 115. Một tấm thiếc hình chữ nhật dài 45 cm, rộng 24 cm được làm thành một cái hộp không nắp bằng cách cắt bốn hình vuông bằng nhau từ mỗi góc và gấp mép lên. Hỏi các hình vuông được cắt ra có cạnh là bao nhiêu để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

A. $x = 18$.B. $x = 5$.C. $x = 12$.

D. Đáp án khác.

Hướng dẫn

Gọi x cm ($0 < x < 12$) là cạnh của các hình vuông bị cắt rời ra. Khi đó, chiều cao của hộp là x , chiều dài là $45 - 2x$, và chiều rộng là $24 - 2x$.

$$\text{Thể tích } V(x) = x(45 - 2x)(24 - 2x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x.$$

$$\text{Suy ra } V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080.$$

Cho $V'(x) = 0$, suy ra được giá trị x cần tìm là $x = 5$.

$$V''(x) = 24x - 276 \Rightarrow V''(5) = -156 < 0. \text{ Do đó } x = 5 \text{ là điểm cực đại.}$$

Câu 116. Một sợi dây có chiều dài 28 m là được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện của hình vuông và hình tròn là tối thiểu?

- A. 14. B. $\frac{196}{4 + \pi}$. C. $\frac{112}{4 + \pi}$. D. $\frac{28\pi}{4 + \pi}$

Hướng dẫn

Gọi l ($0 < l < 28$) là chiều dài đoạn dây làm thành hình vuông. Khi đó đoạn dây làm thành hình tròn có chiều dài là $28 - l$.

Cạnh hình vuông là $\frac{l}{4}$, bán kính hình tròn là $\frac{1}{2\pi}(28 - l)$.

$$\text{Tổng diện tích } S(l) = \frac{l^2}{16} + \frac{1}{4\pi}(28 - l)^2, \text{ suy ra } S'(l) = \frac{l}{8} - \frac{1}{2\pi}(28 - l).$$

$$\text{Cho } S'(l) = 0, \text{ ta được } l = \frac{112}{4 + \pi}, \text{ suy ra chiều dài đoạn dây còn lại là } \frac{28\pi}{4 + \pi}.$$

$$\text{Kiểm tra lại bằng đạo hàm cấp 2, } S''\left(\frac{112}{4 + \pi}\right) > 0$$

$$\text{Vậy } S \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{196}{4 + \pi} \text{ khi } x = \frac{112}{4 + \pi}.$$

Câu 117. Một viên đá được bắn thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là 40 m/s từ một điểm cao 5 m cách mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t) = 40 - 10t$ m/s. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

- A. 85 m. B. 80 m. C. 90 m. D. 75 m.

Hướng dẫn

Gọi h là quãng đường lên cao của viên đá.

$$v(t) = h'(t) \Rightarrow h(t) = \int v(t) dt = \int (40 - 10t) dt = 40t - 5t^2 + c$$

Tại thời điểm $t = 0$ thì $h = 5$. Suy ra $c = 5$.

$$\text{Vậy } h(t) = 40t - 5t^2 + 5$$

$$h(t) \text{ lớn nhất khi } v(t) = 0 \Leftrightarrow 40 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 4. \text{ Khi đó } h(4) = 85 \text{ m}$$

GV: TRẦN HẢI HẠNH

Câu 118. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian t thì khối lượng còn bao nhiêu?

A. $m(t) = 100.e^{-\frac{t \ln 2}{5730}}$ B. $m(t) = 100. \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5730}{t}}$ C. $m(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{100t}{5730}}$ D. $m(t) = 100.e^{-\frac{100t}{5730}}$

Hướng dẫn giải

Theo công thức $m(t) = m_0 e^{-kt}$ ta có:

$$m(5730) = \frac{100}{2} = 50 = 100.e^{-k \cdot 5730} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{5730} \text{ suy ra } m(t) = 100e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

Đáp án: A.

Câu 119. Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cabon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cabon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2378 năm B. 2300 năm C. 2387 năm D. 2400 năm

Hướng dẫn giải

Giả sử khối lượng ban đầu của mẫu đồ cổ chứa Cabon là m_0 , tại thời điểm t tính từ thời điểm ban đầu ta có:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow \frac{3m_0}{4} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln \left(\frac{3}{4} \right)}{-\ln 2} \approx 2378 (\text{năm})$$

Đáp án: A.

Câu 120. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ được danh sách đó dưới 10%?

A. 24.79 tháng B. 23 tháng C. 24 tháng D. 22 tháng

Hướng dẫn giải

Theo công thức tính tỉ lệ % thì cần tìm t thỏa mãn:

$$75 - 20\ln(1+t) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3.25 \Leftrightarrow t \geq 24.79$$

Đáp án: A.

Câu 121. Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0.015x}}$, $x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

A. 333

B. 343

C. 330

D. 323

Hướng dẫn giải

Khi có 100 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(100) = \frac{100}{1 + 49e^{-1.5}} \approx 9.3799\%$$

Khi có 200 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(200) = \frac{100}{1 + 49e^{-3}} \approx 29.0734\%$$

Khi có 500 quảng cáo phát ra thì tỉ lệ người xem mua sản phẩm là:

$$P(500) = \frac{100}{1 + 49e^{-7.5}} \approx 97.3614\%$$

Đáp án: A.

Câu 122. Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở hai ngân hàng là 27507768,13 (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 140 triệu và 180 triệu.

B. 180 triệu và 140 triệu.

C. 200 triệu và 120 triệu.

D. 120 triệu và 200 triệu.

Hướng dẫn giải

Tổng số tiền cả vốn và lãi (lãi chính là lợi tức) ông Năm nhận được từ cả hai ngân hàng là 347,50776813 triệu đồng.

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng X, khi đó $320 - x$ (triệu đồng) là số tiền gửi ở ngân hàng Y. Theo giả thiết ta có:

$$x(1 + 0,021)^5 + (320 - x)(1 + 0,0073)^9 = 347,50776813$$

Ta được $x = 140$. Vậy ông Năm gửi 140 triệu ở ngân hàng X và 180 triệu ở ngân hàng Y.

Đáp án: A.

Câu 123. Số giờ có ánh sáng mặt trời của TPHCM năm không nhuận được cho bởi

$$y = 4 \sin \left(\frac{\pi}{178} (x - 60) \right) + 10 \quad \text{với } 1 \leq x \leq 365 \text{ là số ngày trong năm. Ngày } 25/5 \text{ của năm thì}$$

số giờ có ánh sáng mặt trời của TPHCM gần với con số nào nhất ?

- 14h B. 16h C. 12h D. 13h30

Hướng dẫn giải

Giải : Ngày 25/5 là ngày 25 + 30,5 - 32,5 = 145 trong năm nên

$$y = 4 \sin \left(\frac{\pi}{178} (145 - 60) \right) + 10 = 14$$

Tổng quát (cái khó của bài toán là tìm ra công thức tính ngày 25/5 là ngày thứ mấy của năm)

Gọi a, b, c lần lượt là ngày, tháng, năm và $a, b, c \in \mathbb{N}, a \leq 31, b \leq 12$ và y là số lượng ngày tính từ ngày 1/1 cho tới ngày a tháng b (không tính năm nhuận).

Nếu b lẻ và $b \leq 7$ thì $y = a + 30,5b - 32,5$

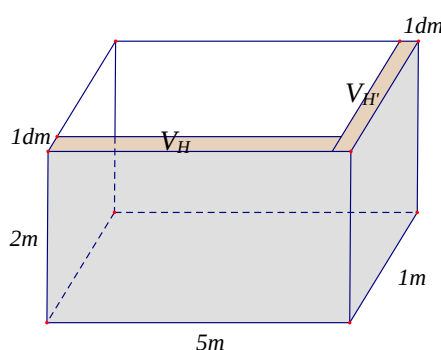
Nếu b chẵn và $b \neq 2$ thì $y = a + 30,5b - 32$

Nếu b lẻ và $b > 7$ thì $y = a + 30,5b - 31,5$

Nếu $b = 2$ thì $y = 31 + a$

Câu 124.

Người ta muốn xây một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một phòng tắm. Biết chiều dài, chiều rộng, chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5m, 1m, 2m, chỉ xây 2 vách (hình vẽ bên). Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20cm, chiều rộng 10cm, chiều cao 5cm. Hỏi người ta sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bồn đó và thể tích thực của bồn chứa bao nhiêu lít nước? (Giả sử lượng xi măng và cát không đáng kể)



- A.
1180 viên ; 882
B.
1180 viên ; 880
C.
1182 viên ; 882
D.
1182 viên ; 880

H

ướn

g dẫn giải

Giải :

Đáp án **chọn A**

Gọi V là thể tích khối hộp chữ nhật

$$\text{Ta có : } V = 5m.1m.2m = 10m^3$$

$$V_H = 0,1m.4,9m.2m = 0,98m^3$$

$$V_{H'} = 0,1m.1m.2m = 0,2m^3$$

$$V_H + V_{H'} = 1,18m^3$$

Thể tích mỗi viên gạch là

$$V_G = 0,2m.0,1m.0,05m = 0,001m^3$$

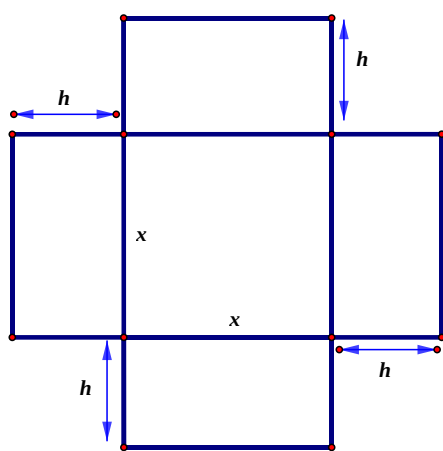
Số viên gạch cần sử dụng là

$$\frac{V_H + V_{H'}}{V_G} = \frac{1,18}{0,001} = 1180 \text{ viên}$$

Thể tích thực của bồn là : $V' = 10m^3 - 1,18m^3 = 8,82m^3 = 8820dm^3 = 8820 \text{ lít}$

Câu 125.

Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông như hình bên dưới. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), đường cao là h (cm) và có thể tích là 500 cm^3 . Tìm giá trị của x sao diện tích của mảnh các tông là nhỏ nhất.



A. $x = 5$

B. $x = 10$

C. $x = 15$

D. $x = 20$

Hướng dẫn giải

Giải: Chọn đáp án B

$$V = x^2 \cdot h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}$$

Gọi $S(x)$ là diện tích của mảnh các tông $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{2000}{x}; x > 0$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất $S(x)$ trên $(0; +\infty)$

$$S'(x) = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}; S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Lập bảng biến thiên

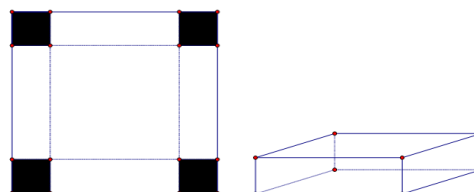
x	0	10	$+\infty$
$S'(x)$		-	+
$S(x)$	$+\infty$		$+\infty$

300

Dựa vào bảng biến thiên diện tích của mảnh cáctông nhỏ nhất tại điểm $x=10$ (cạnh hình vuông).

Câu 126.

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A:3 B:

5 C:

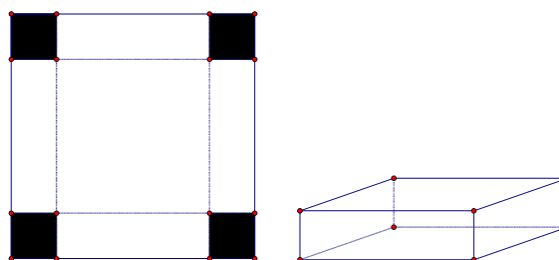
4 D: 2

Giải : chọn đáp án A

Điều kiện: $0 < x < 9$

$$V = h.B = x.(18 - 2x)^2 = f(x)$$

Bấm mod 7 và tìm được $x=3$



Cách khác: Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số không âm $4x; 18-2x; 18-2x$

$$V = x \cdot (18 - 2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x(12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4x + (18 - 2x) + (18 - 2x)}{3} \right)^3 =$$

Dấu “=” xảy ra khi $4x = 18 - 2x \Leftrightarrow x = 3$

Vậy: $x=3$ thì thể tích lớn nhất

Câu 127.

Một anh công nhân được lĩnh lương khởi điểm là 700.000đ/tháng. Cứ ba năm anh ta lại được tăng lương thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc anh công nhân được lĩnh tổng cộng bao nhiêu tiền (lấy chính xác đến hàng đơn vị)

- A.** 456.788.972 **B.** 450.788.972 **C.** 452.788.972 **D.**
454.788.972

Hướng dẫn giải

Giải:

+ Tiền lương 3 năm đầu: $T_1 = 36 \times 700 \text{ nghìn}$

+ Tiền lương 3 năm thứ hai: $T_2 = T_1 + T_1 \times 7\% = T_1(1 + 7\%)$

+ Tiền lương 3 năm thứ ba: $T_3 = T_1(1 + 7\%) + T_1(1 + 7\%) \times 7\% = T_1(1 + 7\%)^2$

+ Tiền lương 3 năm thứ tư: $T_4 = T_1(1 + 7\%)^3$

.....

+ Tiền lương 3 năm thứ 12: $T_{12} = T_1(1 + 7\%)^{11}$

Tổng tiền lương sau 36 năm $T = T_1 + T_2 + \dots + T_{12} = \frac{u_1(1 - q^{12})}{1 - q} = \frac{T_1[1 - (1 + 7\%)^{12}]}{1 - (1 + 7\%)} = 450.788.972$

GV: VĂN TÀI

Câu 128. Ông A có 200 triệu đồng, gửi ngân hàng với lãi suất 8%/năm. Sau 5 năm ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

- $200 \cdot (1 + 0.08)^5$ (triệu đồng) **C.** $200 \cdot (1 + 0.8)^5$ (triệu đồng)
 $200 \cdot (1 - 0.08)^5$ (triệu đồng) **D.** $200 \cdot (1,8)^5$ (triệu đồng)

Hướng dẫn giải

Ngày đầu tiên gửi A đồng.

Sau 1 kỳ hạn số tiền có là: $A + A \cdot r = A(1 + r)$

Sau 2 kỳ hạn số tiền có là: $A(1+r) + A(1+r).r = A(1+r)^2$

Sau 3 kỳ hạn số tiền có là: $A(1+r)^2 + A(1+r)^2.r = A(1+r)^3$

Sau n kỳ hạn số tiền có là: $A(1+r)^n$

A: 200 triệu đồng

$$r = \frac{8}{100} = 0,08\%$$

$$n = 5$$

Số tiền thu được sau 5 năm $A(1+r)^n = 200.(1+0,08)^5$

Đáp án : câu A

Câu 129. Ông A có 800 triệu đồng, gửi ngân hàng với lãi suất 10%/năm. Sau 3 năm ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

$$800.(1,001)^3 \text{ (triệu đồng) } \quad \mathbf{G.}$$

$$800.(1,01)^3 \text{ (triệu đồng)}$$

$$800.(1,1)^3 \text{ (triệu đồng) } \quad \mathbf{H.}$$

$$800.(1-0,1)^3 \text{ (triệu đồng)}$$

Hướng dẫn giải

A: 800 triệu đồng

$$r = \frac{10}{100} = 0,1\%$$

$$n = 3$$

Số tiền thu được sau 3 năm $A(1+r)^n = 800.(1+0,1)^3$

Đáp án : câu B

Câu 130. Ông A có 650 triệu đồng, gửi ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Sau 18 tháng ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

$$650.(1+0,06)^{18} \text{ (triệu đồng) } \quad \mathbf{K.}$$

$$650.(1+0,06)^{1,5} \text{ (triệu đồng)}$$

$$650.(1+0,6)^{1,5} \text{ (triệu đồng) } \quad \mathbf{L.}$$

$$650.(1+0,6)^{18} \text{ (triệu đồng)}$$

Hướng dẫn giải

A: 650 triệu đồng

$$r = \frac{6}{100} = 0,06\% \quad 650.(1+0,06)^{1,5}$$

$$n = \frac{18}{12} = 1,5$$

Số tiền thu được sau 18 tháng là: $A(1+r)^n = 650.(1+0,06)^{1,5}$

Đáp án : câu C

Câu 131. Giả sử bạn An gửi đều đặn một số tiền trích từ 20% lương của An, biết An có lương 10 triệu đồng mỗi tháng. Theo hình thức lãi kép với lãi suất 0.5% tháng. Vậy sau 1 năm thì An nhận được tổng số tiền là bao nhiêu?

$$2.10^6 \cdot (1 + 0.005) \cdot \frac{(1 + 0.005)^{12} - 1}{0.005} \text{ (đồng)}$$

$$2.10^6 \cdot (1 + 0.005) \cdot \frac{(1 + 0.005)^{12} - 1}{12} \text{ (đồng)}$$

$$2.10^6 \cdot (1 + 0.005) \cdot \frac{0.005}{(1 + 0.005)^{12} - 1} \text{ (đồng)}$$

$$2.10^6 \cdot (1 - 0.005) \cdot \frac{(1 - 0.005)^{12} - 1}{0.005} \text{ (đồng)}$$

Hướng dẫn giải

Số tiền bạn An gửi: $A = 0,2 \times 10.10^6 = 2.10^6$ đồng

Lãi suất tính theo tháng: $r = \frac{0,5}{100} = 0,005\%$

Số tháng bạn An đã gửi: $n = 12$

Số tiền thu được sau 1 năm là: $S = A(1+r)^n \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 2.10^6 \cdot (1 + 0.005) \cdot \frac{(1 + 0.005)^{12} - 1}{0.005}$

CÒN TIẾP...