Chủ đề 6

CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY

F. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY

MỤC LỤC

CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG ĐƯỢC SỬ DỤNG

Cách 1. Lợi dụng định lí về các đường đồng quy trong tam giác

- Sử dụng định lí ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm
- Sử dụng định lí ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trọng tâm của tam giác.
- Sử dụng các định lí: 1.Ba đường phân giác của tam giác đồng quy tại một điểm.
- Giao điểm của hai đường phân giác ngoài nằm trên đường phân giác trong của góc thứ ba.
- Sử dụng định lí ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm.

Cách 2. Sử dụng tính chất các đường chéo cắt nhau tai trung điểm mỗi đường của của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

Cách 3. Lùi về quen thuộc, chứng minh ba điểm thẳng hàng hoặc giao điểm của hai đường nằm trên đường thẳng thứ ba.

Chúc các em học sinh học tập tốt!

Bài tập có giải

Sử dụng tính chất các đường chéo cắt nhau tai trung điểm mỗi đường của của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

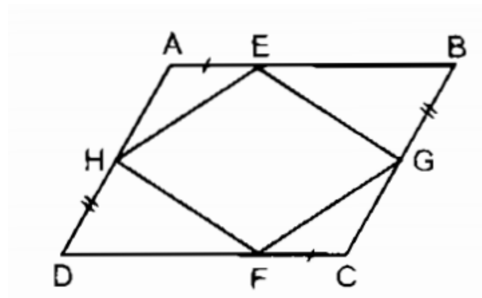
Bài 1: Trên hình vẽ bên, cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng:

a) $EFGH$ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng AC, BD, EF, GH đồng quy.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh rằng $EG = HF; EH = GF$.



b) Gọi O là giao điểm của AC và EF. Tứ giác $AECF$ có $AE = CF, AE//CF$ nên là hình bình hành.. Suy ra O là trung điểm của AC, EF.

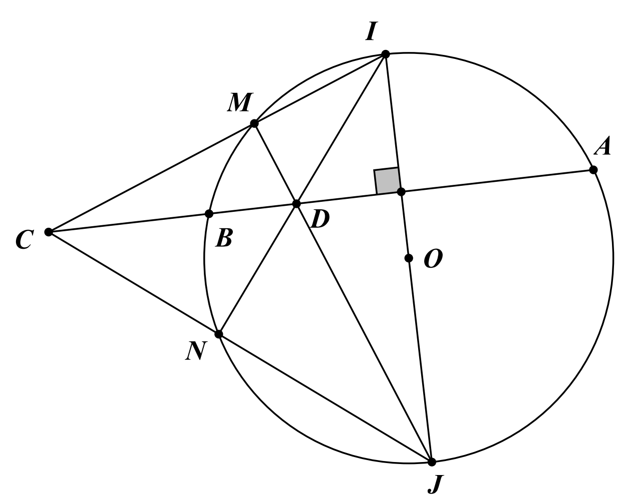
$ABCD$ là hình bình hành, O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của BD.

$EGHF$ là hình bình hành, O là trung điểm của EF nên O là trung điểm của GH.

Vậy AC, BD, EF, GH đồng quy tại O.

Lợi dụng các đường đồng quy trong tam giác: đồng quy tại trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Bài 2: Từ một điểm C ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tuyến CBA. Gọi IJ là đường kính vuông góc với AB. Các đường thẳng CI, CJ theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại M, N. Chứng minh rằng IN, JM, AB đồng quy tại một điểm D.



Hướng dẫn giải

M thuộc đường tròn đường kính IJ nên $\widehat{JMI} = 90°$ hay $JM \perp CI$

Tương tự $IN \perp CJ$

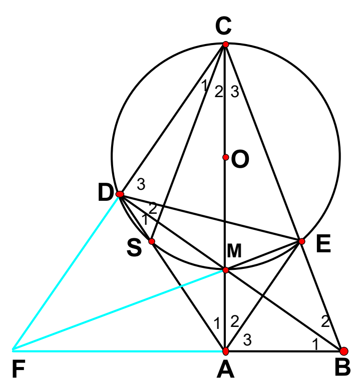
Tam giác CIJ có 3 đường cao CA, JM, IN đồng quy tại D.

Vậy IN, JM, AB đồng quy tại một điểm D.

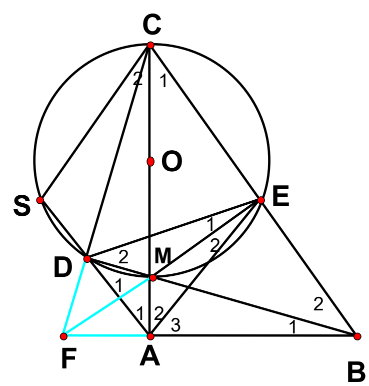
Bài 3: Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại. D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Hướng dẫn giải



Hình a



Hình b

1. Ta có $\widehat{CAB} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\widehat{MDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\widehat{CDB} = 90^0$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\widehat{D_1} = \widehat{C_3}$ (nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\widehat{D_1} = \widehat{C_3}$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\widehat{C_2} = \widehat{C_3}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau) => CA là tia phân giác của góc SCB.

<u>TH2</u> *(Hình b)*

$\widehat{ABC} = \widehat{CME}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$); $\widehat{ABC} = \widehat{CDS}$ (cùng <u>bù</u> $\widehat{ADC}$) => $\widehat{CME} = \widehat{CDS}$

=> $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CS} \Rightarrow \overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\widehat{SCM} = \widehat{ECM}$ => CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có $\widehat{MEC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => $\widehat{MEB} = 90^0$.

Tứ giác AMEB có $\widehat{MAB} = 90^0$; $\widehat{MEB} = 90^0$ => $\widehat{MAB} + \widehat{MEB} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$ (nội tiếp cùng chắn cung CD)

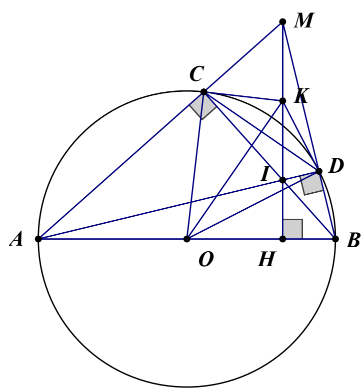
=> $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Bài 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và. D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội

Hướng dẫn giải



1. $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) ….

=> $\widehat{MCI} + \widehat{IDM} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

2. AD, MC, MH là ba đường cao của tam giác BAM nên đồng quy tại I.

3. Chỉ ra KCI là tam giác cân, từ đó

$\widehat{CIK} = \widehat{HIB} = \widehat{CAB} = \widehat{ACO}$

$\widehat{ACO} + \widehat{OCI} = \widehat{KCI} + \widehat{OCI} = 90^0$. Từ đó chỉ ra $\widehat{OCK} = 90^0$ …. (*tự chứng minh*)

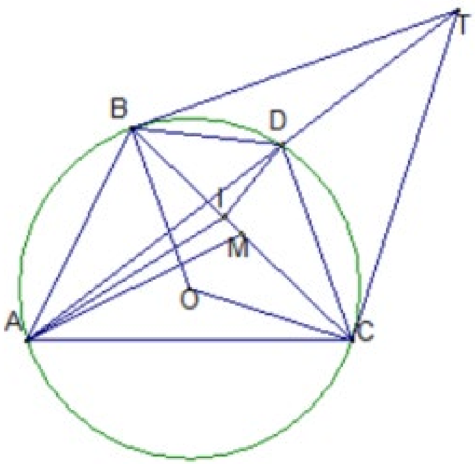
Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O;R) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D khác A.

1.Chứng minh rằng ΔABT" ΔBDT.

2. Chứng minh rằng : AB.CD = BD.AC

3. Chứng minh rằng hai đường phân giác góc BAC; BDC và đường thẳng BC đồng quy tại một điểm

Hướng dẫn giải



1. Xét tam giác ABT và tam giác BDT có:

$\widehat{BTD}$ chung

$\widehat{BAT} = \widehat{TBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung BD).

=> $\Delta ABT \backsim \Delta BDT$. (g-g)

2. Có $\Delta ABT \backsim \Delta BDT$. (g-g)

=> $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AT}{BT}$ (1)

Chứng minh được $\Delta ACT \backsim \Delta CDT$ (g-g)

=> $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AT}{CT}$ (2)

Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại T nên BT = CT (3)

Từ (1), (2), (3) có $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} \Rightarrow AB.CD = BD.AC$

3. Phân giác góc BAC cắt BC tại I, theo tính chất phân giác trong tam giác ta có:

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

Từ AB.CD = BD.AC => $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD} \Rightarrow \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{BD}{CD}$

=> DI là phân giác góc BDC

Do đó hai đường phân giác góc BAC và BDC và đường thẳng BC đồng quy.

Bài 6: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ 2 tiếp tuyến Ax và By. Lấy M trên đường tròn sao cho AM < BM. AM cắt By tại F, BM cắt Ax tại E.

a. Chứng minh: $AB^2 = AE.BF$

b. Tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt AE, BF tại C và D. Chứng minh C và D là trung điểm của AE và BF.

c. Chứng minh các đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.

Hướng dẫn giải

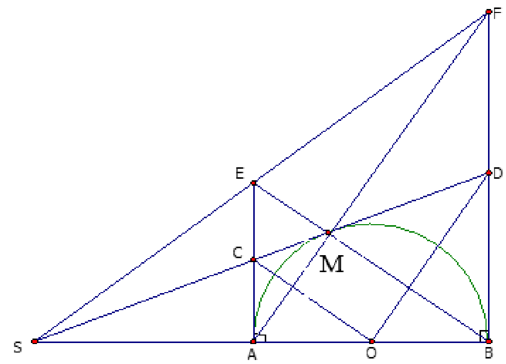
a. Ta có $\widehat{AMB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AM \perp BE$

Xét ΔEAB và ΔABF có:

$\widehat{EAB} = \widehat{ABF}$; $\widehat{AEB} = \widehat{FAB}$ (cùng phụ với $\widehat{EAM}$)

Suy ra ΔEAB ~ ΔABF (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BF}=\dfrac{AE}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AE.\ BF$



b. CA = CM và CO là tia phân giác

của $\widehat{ACM}$

$\Rightarrow$ ΔAMC cân tại C và CO là đường cao $\Rightarrow CO \perp AM$

Do đó trong ΔABE có OA=OB, OC//BE nên CA=CE.

c. Gọi giao điểm của AB và EF là S. Ta sẽ chứng minh S, C, D thẳng hàng.

Giả sử SC cắt BF tại D′. Vì AE // BF nên theo định lí Ta-let, có:

$\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{BD'}{D'F}=1 \Rightarrow$ D′ là trung điểm của BF

$\Rightarrow$D trùng với D′ hay S, C, D thẳng hàng.

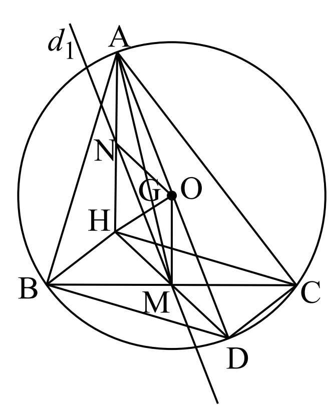
Vậy ba đường thẳng AB, EF, CD đồng quy tại S.

Bài 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. H là trực tâm của tam giác ABC. Vẽ đường kính AD của đường tròn (O); vẽ $OM \perp BC$ tại M.

a) Chứng minh rằng $OM = \dfrac{1}{2}AH$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng H,G,O thẳng hàng và $HG = 2GO$.

c) Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của các cạn CA, AB. Đường thẳng d_1 qua M song song với OA, đường thẳng d_2 qua B' song song với OB, đường thẳng d_3 qua C' song song với OC.
Chứng minh rằng các đường thẳng d_1,d_2,d_3 đồng qui.



Hướng dẫn giải

a) $HB \perp AC$ (H là trực tâm của ΔABC)
AD là đường kính nên $\widehat{ACD} = 90^0$ $BH \perp AC, DC \perp AC$
$\Rightarrow BH \parallel DC$
Chứng minh tương tự có: $CH \parallel DB$
Do đó tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

Ta có: $O'A \perp BC$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của HD

OM là đường trung bình của ΔAHD nên $OM = \frac{1}{2}AH$

b) ΔABC có AM là đường trung tuyến, G thuộc đoạn thẳng AM và $AG = \frac{2}{3}AM$ nên G là trọng tâm của tam giác AHD. HO là đường trung tuyến nên HO đi qua G và $HG = 2GO$

Gọi N là giao điểm của d_1 với AH

ΔHAD có $MN \parallel AD$, M là trung điểm của HD

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AH

Ta có: $NH = OM(=\frac{1}{2}AH), NH \parallel OM$

Do đó $HNOM$ là hình bình hành.

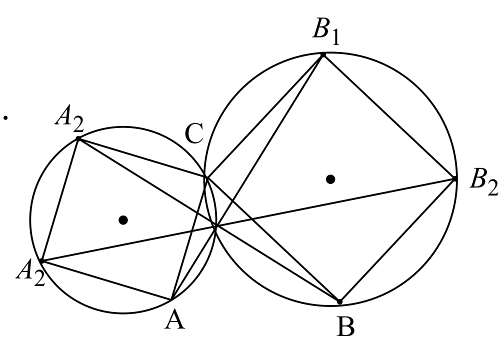
$\Rightarrow d_1$ đi qua trung điểm I của OH

Chứng minh tương tự có d_2, d_3 đi qua I

Vậy các đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy

Bài 8: Trên các cạnh AB, BC của tam giác ABC dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ACA_1A_2 và BCB_1B_2. Chứng minh rằng các đường thẳng AB_1, A_1B, A_2B_2 đồng quy.

Hướng dẫn giải



Trường hợp 1: $\widehat{C} = 90^0$. Rõ ràng AB_1, A_1B, A_2B_2 đồng quy tại C.

Trường hợp 2: $\widehat{C} \neq 90^0$

Các đường tròn ngoại tiếp hình vuông ACA_1A_2 và BCB_1B_2

Có điểm chung c sẽ cắt nhau tại M (khác C)

Ta có: $\widehat{AMA_2} = 45^0$ (góc nội tiếp chắn cung một phần tư đường tròn)

$\widehat{A_2MC} = \widehat{A_2AC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự: $\widehat{CMB_1} = 45^0$

Vì tia MA_2 nằm giữa hai tia MA và MC ,tia MC nằm giữa hai tia MB và MA_2

nên $\widehat{AMA_2} + \widehat{A_2MC} + \widehat{CMB_1} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$

hay A, M, B thẳng hàng.

Chứng minh tương tự A_1, M, B và A_2, M, B_2 thẳng hàng

Vậy AB_1, A_1B và A_2B_2 cùng đi qua M

Hay AB_1, A_1B và A_2B_2 đồng quy.

Bài 9: Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC, A là điểm trên đường tròn (A khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC và đường tròn (O) tại D, E, F

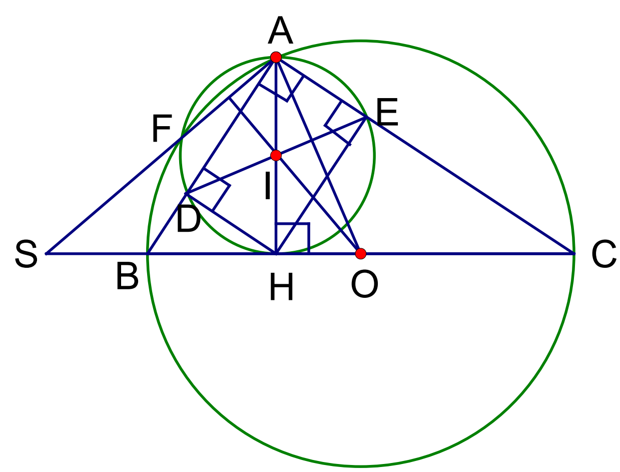
a) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp

b) Chứng minh OA vuông góc với DE

c) Chứng minh các đường thẳng AF, DE, BC đồng quy

d) Cho biết sđ $\overset{\frown}{AB} = 60°$. Tính theo R diện tích tứ giác $BDEC$

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp:

Ta có: $\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta lại có: $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

$\widehat{AHE} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{EHC}$)

Vậy tứ giác $BDEC$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện) *b) Chứng minh $OA \perp DE$:*

Ta có: ΔOAB cân tại O ($OA = OB = R$)

$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Mà $\widehat{OBA} + \widehat{ACB} = 90°$ (ΔABC vuông tại A)

$\widehat{AHE} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{OAB} + \widehat{ADE} = 90°$ hay $OA \perp DE$

c) Chứng minh các đường thẳng AF, DE, BC đồng quy:

Gọi S là giao điểm của AF và BC

ΔSAO có: $AH \perp BC$ (gt)

$OI \perp AS$ (tính chất đường nối tâm của 2 đtr cắt nhau)

$\Rightarrow SI \perp OA$ (đường cao thứ ba trong ΔSAO)

Mà $OA \perp DE$ (câu b)

$\Rightarrow S, D, I, E$ thẳng hàng hay đường thẳng DE qua S.

Vậy các đường thẳng AF, DE, BC đồng quy

d) Tính theo R diện tích tứ giác $BDEC$:

Ta có: ΔABC vuông tại A, $\widehat{ACB} = \dfrac{sd\,\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

$AB = BC.\sin 30° = 2R.\dfrac{1}{2} = R$; $\quad AC = BC.\cos 30° = 2R.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

$AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{R.R\sqrt{3}}{2R} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Ta lại có: ΔADE đồng dạng ΔACB

$$\Rightarrow \frac{S_{ACB}}{S_{ADE}} = \left(\frac{BC}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{AH}\right)^2 = \left(\frac{2R}{\frac{R\sqrt{3}}{2}}\right) = \left(\frac{4R}{R\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACB}}{16} = \frac{S_{ADE}}{3} = \frac{S_{ACB} - S_{ADE}}{16-3} = \frac{S_{BDEC}}{13} \Rightarrow S_{BDEC} = \frac{13.S_{ACB}}{16} = \frac{13}{16}\cdot\frac{AB.AC}{2} = \frac{13}{16}\cdot\frac{R.R\sqrt{3}}{2} = \frac{13R^2\sqrt{3}}{32}$$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, I là một điểm trên cạnh AC. Đường tròn đường kính IC cắt BC ở E và cắt BI ở D.

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.

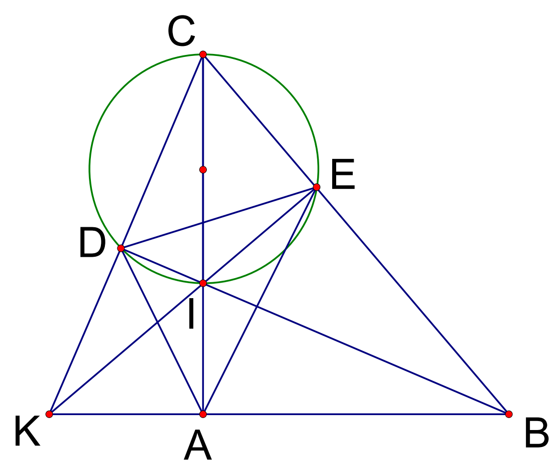
b) Chứng minh DB là phân giác của góc ADE.

c) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

d) Chứng minh AB, CD, EI đồng qui.

Hướng dẫn giải

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.



Ta có

$\widehat{BDC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{CAB} = 90°$ (tam giác ABC vuông tại A).

Mặt khác hai đỉnh D, A cùng nhìn BC dưới một góc $90°$.

Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh DB là phân giác của góc ADE.

Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.

Nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB).

$\widehat{IDE} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung IE của đường tròn đường kính IC).

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BDE}$.

Vậy DB là phân giác của góc $\widehat{ADE}$.

c) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Chứng minh được tứ giác $ABEI$ nội tiếp được trong đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung IE).

Mặt khác vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.

Nên $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD).

$\Rightarrow \widehat{CAE}=\widehat{CAD}$ $\Rightarrow AC$ là phân giác của góc DAE.

Mà DB cắt AC tại I. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

d) Chứng minh AB, CD, EI đồng qui.

Gọi K là giao điểm của AB và CD.

Ta có $\widehat{BDC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BD\perp KC$.

$\widehat{CAB}=90^\circ$ (tam giác ABC vuông tại A)$\Rightarrow CA\perp KB$.

ΔCKB có BD và CA là hai đường cao cắt nhau tại I nên I là trực tâm của ΔCKB

$\Rightarrow KE$ là đường cao của $\Delta CKB \Rightarrow KE\perp BC (1)$.

Mặt khác $\widehat{IEC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow IE\perp CE$ $\Rightarrow IE\perp BC (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra E, I, K thẳng hàng.

Vậy AB, CD, EI đồng qui tại K.

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm M không trùng với A và C. Vẽ đường tròn đường kính MC, cắt cạnh BC tại D. Các đường thẳng BM và AD lần lượt cắt đường tròn tại các điểm E, F. Chứng minh rằng:

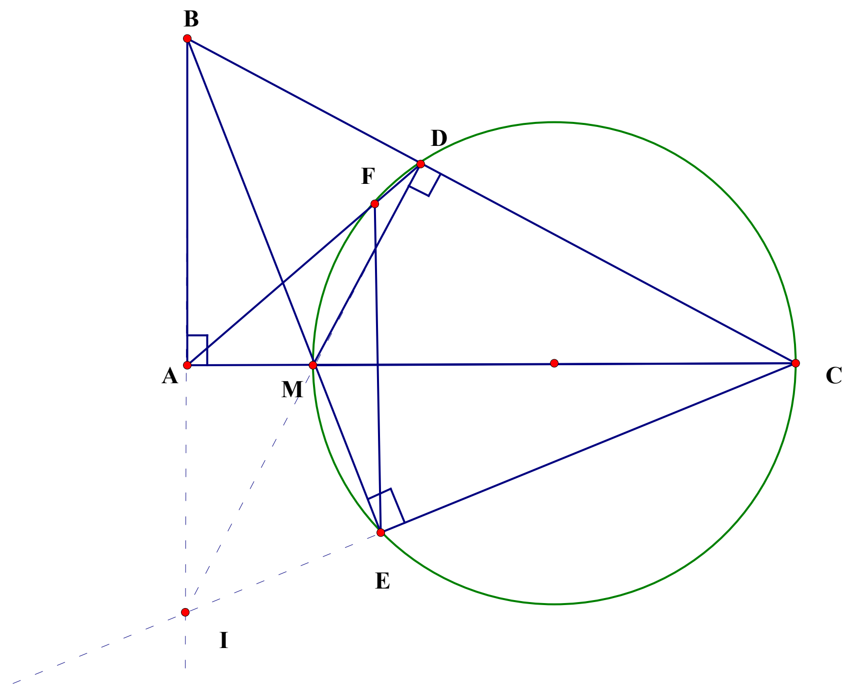
a) $\Delta ABC \backsim \Delta DMC$. Suy ra $AB.MC = BC.DM$.

b) Các tứ giác $ABDM$ và $AECB$ nội tiếp

c) $AB // EF$.

d) Các đường thẳng AB, CE, MD đồng quy.

Hướng dẫn giải



a) Vì $\widehat{BAC} = \widehat{MDC} = 90°$ và $\widehat{BCA}$ chung nên $\Delta ABC \backsim \Delta DMC$.

Do đó $\dfrac{AB}{DM} = \dfrac{BC}{MC} \Rightarrow AB.MC = BC.DM$.

b) Vì $\widehat{BAM} + \widehat{MDB} = 180°$ nên tứ giác $AMDB$ nội tiếp.

Vì $\widehat{BAC} = \widehat{BEC} = 90°$ nên tứ giác $AECB$ nội tiếp.

c) Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{ADM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

$\widehat{MEF} = \widehat{ADM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MF}$)

Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{MEF} \Rightarrow AB // EF$.

d) Giả sử AB cắt EC tại I. Ta có CA, BE là đường cao của tam giác BIC.

$\Rightarrow M$ là trực tâm của $\Delta BIC \Rightarrow IM \perp BC$.

Mà $MD \perp BC \Rightarrow I, M, D$ thẳng hàng. Vậy AB, EC, MD đồng quy tại M.

Bài 12: Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';\text{r})$ tiếp xúc ngoài tại $C(R>r)$ gọi AC và BC là hai đường kính đi qua C của đường tròn (O) và (O'). DE là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Tia DC cắt đường tròn (O') tại điểm thứ 2 là F

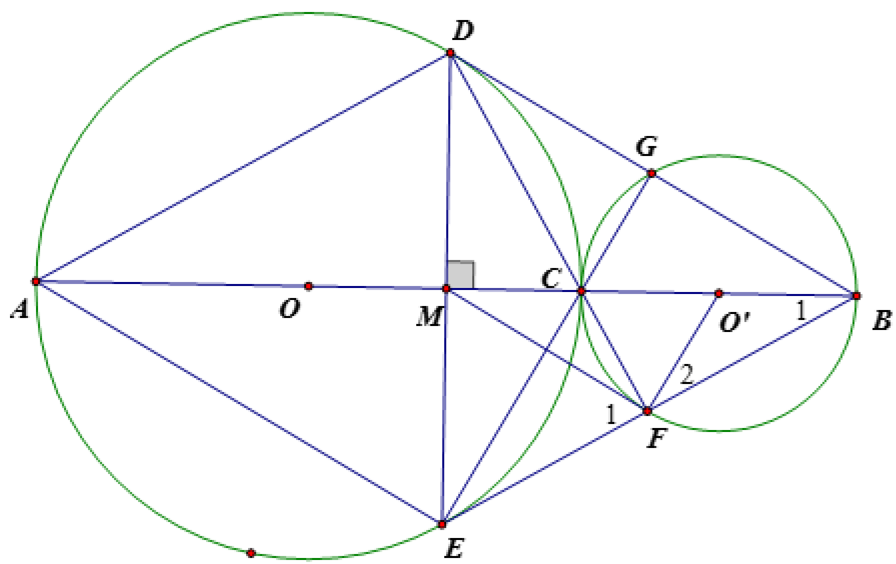
a) Tứ giác ADBE là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh ba điểm B, F, E thẳng hàng

c) DB cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là G. Chứng minh DF, EG và AB đồng quy

d) Chứng minh MF là tiếp tuyến của (O')

Hướng dẫn giải



a) Tứ giác ADBE là hình thoi vì AM = MB; MD = ME và $DE \perp AB$

b) Ta có $BE//DA$. Nối BF ta có $\widehat{ADF} = \widehat{BFD} = 90^0 \Rightarrow BF//DA$. Như vậy $BE//DA$ và $BF//DA$ mà qua B chỉ có duy nhất một đường thẳng song song với DA do đó 3 điểm B, F, E phải thẳng hàng

c) Ta có CG vuông góc với DB, mặt khác EC vuông góc với DB. Nhưng qua C chỉ tồn tại duy nhất một đường vuông góc với DB nên E, C , G phải thẳng hàng và DF, EG, AB phải đồng quy tại điểm C, chính là trực tâm tam giác EDB

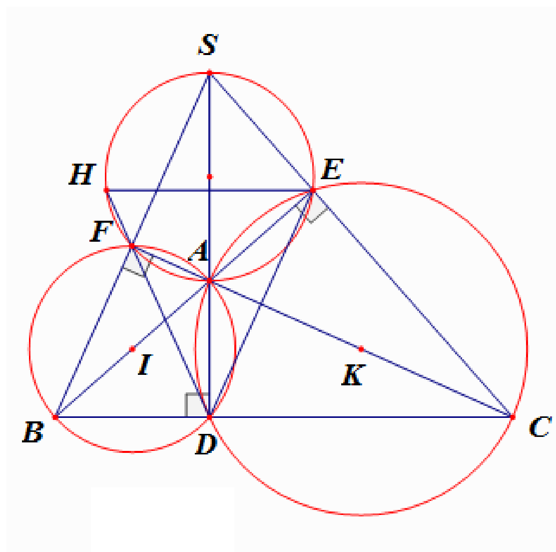
d) Nhận thấy $\widehat{MEF} = \widehat{F_1}$ và $\widehat{O'BF} = \widehat{F_2}$ mà $\widehat{MEF} + \widehat{O'BF} = 90^0$ nên $\widehat{F_1} + \widehat{F_2} = 90^0$, suy ra $\widehat{MFO'} = 90^0$. Vậy MF là tia tiếp tuyến của đường tròn tâm O′.

Bài 13: Cho ΔABC (AC > AB, $\widehat{BAC} = 90^0$). Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểmt hứ hai E; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F

a) Chứng minh B, C, D thẳng hàng
b) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp
c) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.
d) Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, hãy so sánh DH và DE.

Hướng dẫn giải

a)) Áp dụng định lý góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có :



$\widehat{ADB} = 90^0; \widehat{ADC} = 90^0$.
Suy ra $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^0$.
Vậy B, D, C thẳng hàng.
b) Áp dụng định lý góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, ta có:
$\widehat{BFA} = 90^0; \widehat{CEA} = 90^0$;
suy ra $\widehat{BFC} = \widehat{BEC}\left(=90^0\right)$. Khi đó $E;F$ là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau.

Vậy tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

c) Xét tam giác ABC có $AD \perp BC; BF \perp AC; CE \perp AB$.
Suy ra AD, BF, CE là ba đường cao. Vậy chúng cắt nhau tại một điểm S.

d) Ta có $AEHF$ nội tiếp nên $\widehat{EHF} = \widehat{FAB}$ mặt khác $\widehat{FAB} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{FDB}$
$\Rightarrow HE // BC \Rightarrow AD \perp HE$. (1)

Vận dụng góc nội tiếp, tứ giác nội tiếp ta có: $\widehat{FDA} = \widehat{FBA} = \widehat{FCE} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow$ DA là đường phân giác $\widehat{EDF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra DEH cân tại D suy ra $DE = DH$.

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn (O) đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm thứ hai là F, G. Chứng minh rằng :

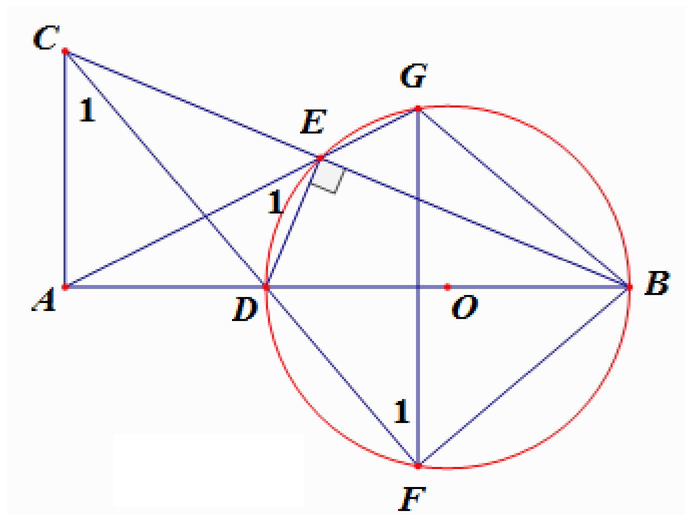
a) Các tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp

b) AD.AB = AG.AE

c) AC//FG

d) AC, DE và BF đồng quy.

Hướng dẫn giải



a) $\widehat{CAD}=90^0, \widehat{CED}=90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ADEC$ nội tiếp.

$\widehat{CAB}=90^0, \widehat{CFB}=90^0 \Rightarrow$ tứ giác $AFBC$ nội tiếp.

b) Ta có $\Delta AED \backsim \Delta ABG\left(g.g\right) \Rightarrow$

$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AG} \Rightarrow AD.AB = AE.AG.$

c) Tứ giác $ACED$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{E_1}$.

Tứ giác $DFGE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{F_1}=\widehat{E_1}$.

Suy ra $\widehat{C_1}=\widehat{F_1} \Rightarrow AC//GF$.

d) ΔBCD có CA, BF, DE là đường cao $\Rightarrow CA, BF, DE$ đồng quy.

Một số bài tập tự rèn:

Bài 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Kẻ đường kính AC của (O) cắt đường tròn (O') tại F. Kẻ đường kính AE của (O') cắt đường tròn (O) tạo G.

Chứng minh:

a) Tứ giác GFEC nội tiếp ;

b) GC, FE, AB đồng quy.

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB, gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên dây cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

a. Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp.
b. Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K
c. Kẻ DN $\perp$ CB, DM $\perp$ AC. Chứng minh các đường thẳng MN, AB, CD đồng quy.

Bài 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB, gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên dây cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

a) Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp.

b) Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K

c) Kẻ DN $\perp$ CB, DM $\perp$ AC. Chứng minh các đường thẳng MN, AB, CD đồng quy

Bài 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB, Gọi I là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ. AK cắt CD tại H
a, Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp

b, Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm K .

c, kẻ $DN \perp CB, DM \perp AC$. chứng minh MN,AB, CD đồng quy .

d, Cho BC = 25cm . Hãy tính diện tích xung quanh hình trụ tạo thành khi cho tứ giác MCND quay quanh MD.

Chúc các em học sinh học tập tốt!