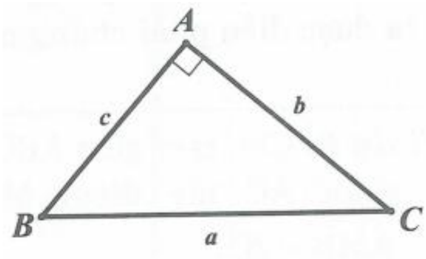
BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC PHẲNG

BÀI TOÁN 1. SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ PYTHAGORE ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

Định lý Pythagore là một định lý rất đẹp của hình học sơ cấp thể hiện mối quan hệ về độ dài giữa các cạnh của một tam giác vuông. Ta có thể ứng dụng định lý Pythagore vào việc chứng minh các quan hệ hình học, đặc biệt là chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức hình học.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý Pythagore. *Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.*



Hình 1

ΔABC vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Chú ý: Nếu đặt $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ thì ta có $a^2 = b^2 + c^2$.

2. Định lý Pythagore đảo

Nếu tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì tam giác ABC vuông tại đỉnh A.

3. Chú ý

Để vận dụng có hiệu quả định lý Pythagore, chúng ta cần trang bị một số kiến thức cơ bản sau:

a) Các đẳng thức được học trong đại số:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

b) Tính chất hình học: Hai đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song thì chúng bằng nhau.

c) Tính chất hình học: Nếu ΔABC vuông tại A và $B = 60°$ thì $BC = 2AC$.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của AB. Kẻ MH vuông góc với BC $(H \in BC)$. Chứng minh $CH^2 - BH^2 = AC^2$.

Lời giải

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông MCH và MBH ta được:

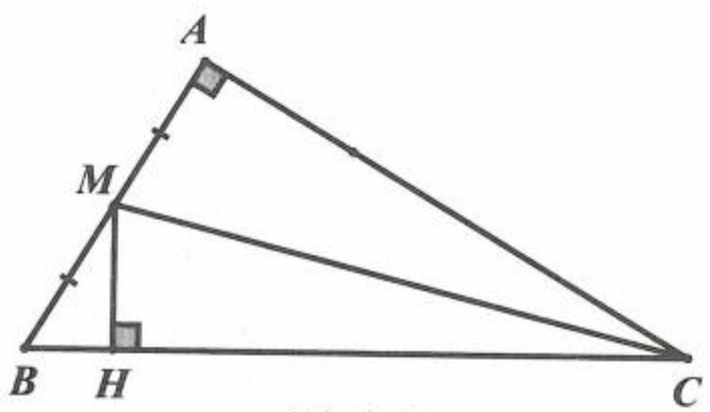
$CH^2 = CM^2 - MH^2 \quad (1)$

$BH^2 = BM^2 - MH^2 \quad (2)$

Trừ (1) cho (2):

$CH^2 - BH^2 = CM^2 - BM^2$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ACM và chú ý $AM = BM$ ta được điều phải chứng minh.



Hình 2

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12cm$; $AC = 18cm$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = 5cm$. Chứng minh rằng: $AMB = 2C$.

Lời giải

Áp dụng định lý Pythagore vào ta
$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 12^2 + 5^2 = 169$.

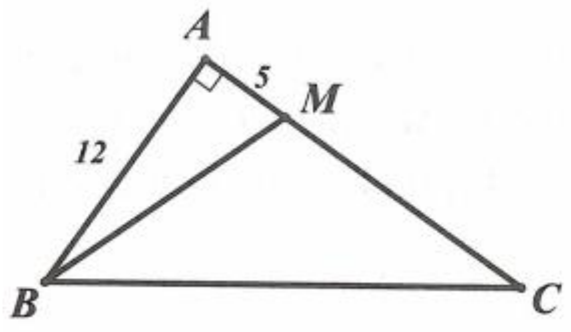
$\Rightarrow BM = 13cm$

Mặt khác $AC = 18cm$; $AM = 5cm$ nên $MC = 13cm$.

Vậy tam giác BMC cân tại M.

Từ đó $MBC = C$.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có
$AMB = MBC + C = 2C$



Hình 3

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, D là điểm bất kì trong trong tam giác. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của D lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $BH^2 + CI^2 + AK^2 = CH^2 + AI^2 + BK^2$.

Lời giải

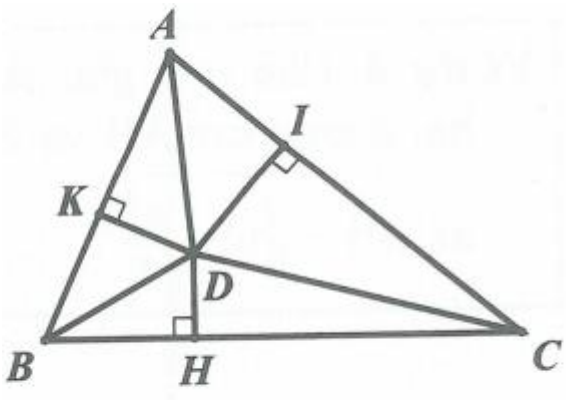
Nối DA, DB, DC. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông BDH và CDH ta được:
$DH^2 = BD^2 - BH^2 = CD^2 - CH^2$.

Suy ra: $BH^2 - CH^2 = BD^2 - CD^2 \quad (1)$.

Tương tự ta có: $CI^2 - AI^2 = CD^2 - AD^2 \quad (2)$;
$AK^2 - BK^2 = AD^2 - BD^2 \quad (3)$.

Cộng các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$BH^2 - CH^2 + CI^2 - AI^2 + AK^2 - BK^2 = 0$. Từ đó:
$BH^2 + CI^2 + AK^2 = CH^2 + AI^2 + BK^2$.



Hình 4

2. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$. $(*)$

Lời giải

Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$.

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABH, ACH và AHM ta được:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \qquad (1)$$

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 \qquad (2)$$

Cộng các vế của đẳng thức (1) và (2):

$$AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = (BM - HM)^2 + (BM + HM)^2 + 2AH^2$$

$$= 2HM^2 + 2AH^2 + \frac{BC^2}{2} = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Từ đó: $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$

Chú ý: 1) Hệ thức $(*)$ cho phép tính độ dài đường trung tuyến của một tam giác thông qua độ dài các cạnh của tam giác đó. Người ta gọi $(*)$ là *công thức trung tuyến.*

2) Nếu tam giác ABC vuông tại A, khi đó AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC. Để ý rằng $AB^2 + AC^2 = BC^2$, thay vào hệ thức $(*)$ ta được: $AM^2 = \dfrac{BC^2}{4}$. Từ đó $AM = \dfrac{1}{2}BC$.

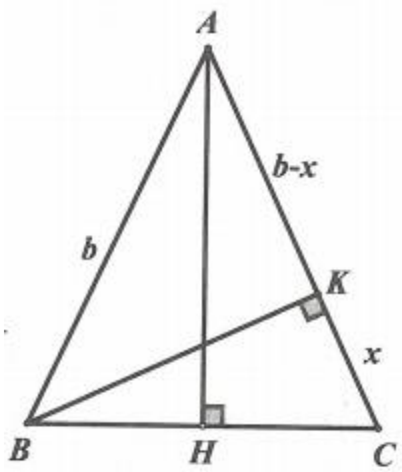
Ta có tính chất quen thuộc: *Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền dài bằng nửa cạnh huyền.*

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân a tại A, có $AB = AC = b$ và $BC = a$. Kẻ hai đường cao AH và BK. Chứng minh:

a) $AH = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$; b) $BK = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^4}{4b^2}}$

3. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ

Lời giải



a) Theo tính chất tam giác cân: $BH = CH = \frac{a}{4}$;

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ABH vuông tại H:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$$

Vậy $AH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

b) Đặt $KC = x \Rightarrow AK = b - x$. Áp dụng định lý Pythagore cho hai tam giác AKB và tam giác CKB ta có:

$$BA^2 - AK^2 = BC^2 - KC^2 \left(= BK^2\right)$$

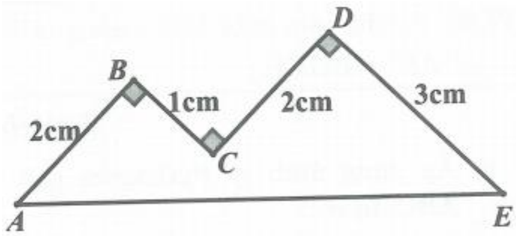
$$\Rightarrow b^2 - (b-x)^2 = a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{2b}.$$

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác BCK vuông tại K, ta có

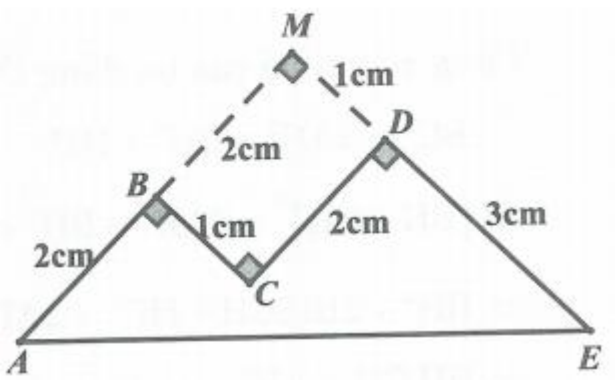
$$BC^2 = BK^2 + KC^2 \Rightarrow BK^2 = BC^2 - CK^2 = a^2 - \frac{a^4}{4b^2}$$

Vậy $BK = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4b^2}}$

Ví dụ 6. Chi hình vẽ có $AB = CD = 2cm$, $DE = 3cm$, $BC = 1cm$. Chứng minh rằng $AE = \sqrt{32}cm$.



Lời giải



Từ B kẻ đường thẳng song song với CD, từ D kẻ đường thẳng song song với BC, chúng cắt nhau tại M.

Áp dụng tính chất về hai đoạn thẳng song song bị chắn bởi các đường thẳng song song

Ta có: $BM = CD = 2cm$

$MD = BC = 1cm$

Suy ra: $AM = EM = 4cm$.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác AME vuông tại M, ta có

$$AM^2 + BM^2 = AE^2 \Rightarrow AE^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

Vậy $AE = \sqrt{32}cm$.

4. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nhọn có ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là 3 số tự nhiên liên tiếp. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh $HC - HB = 4$.

Lời giải

Theo đề bài ta có $AC = BC + 1 = AB + 2$.

Suy ra $AB + AC = 2BC$.

Áp dụng định lý Pythagore vào hai tam giác vuông ABH và ACH ta có

$$HC^2 - HB^2 = AC^2 - AB^2 \left(= AH^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(HC - HB\right)\left(HC + HB\right) = \left(AC - AB\right)\left(AC + AB\right)$$

$$\Rightarrow \left(HC - HB\right)BC = 2.2BC$$

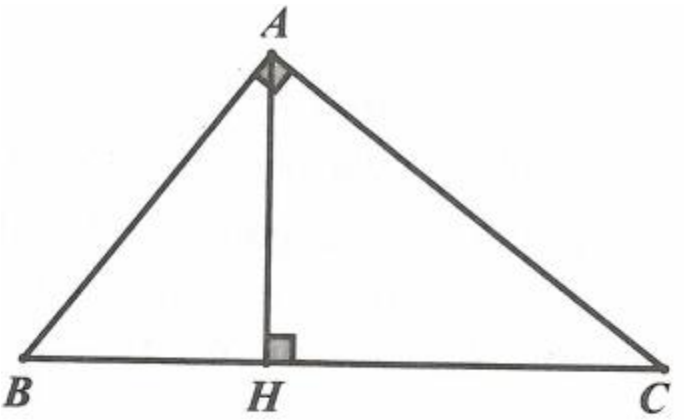
$$\Rightarrow HC - HB = 4$$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh:

a) $AH^2 = BH.CH$; b) $AB^2 = BH.BC$

Lời giải

a) Áp dụng định lý Pythagore cho ba tam giác vuông ABH, AHC và ABC, ta có:



$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1)$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad (2)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của ba đẳng thức trên:

$$BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow \left(BH + CH\right)^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow BH^2 + 2BH.CH + HC^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow BH.CH = AH^2 \quad (4)$$

b) Kết hợp đẳng thức (4) và đẳng thức (1) ta được

$$AB^2 = BH.CH + HB^2 = BH.\left(CH + HB\right) = BH.BC.$$

Ví dụ 9. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$

Lời giải

5. TOÁN HỌC SƠ ĐỒ

Sử dụng kết quả ví dụ 8, ta có:

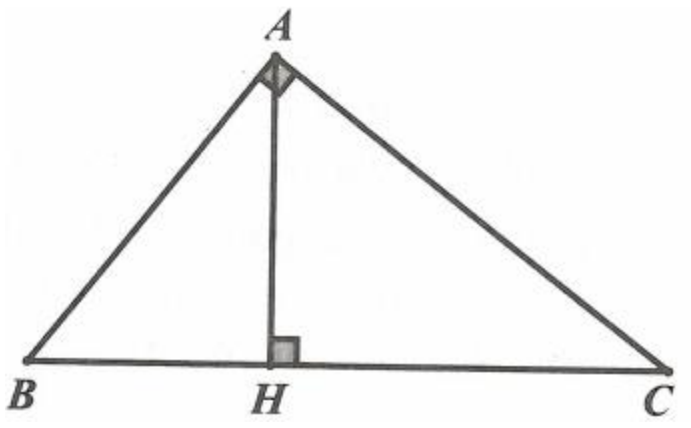
$AB^2 = BH.BC$

$AC^2 = CH.BC$

Khi đó:

$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{BH.BC}+\frac{1}{CH.BC}=\frac{CH+BH}{BC.BH.CH}$$

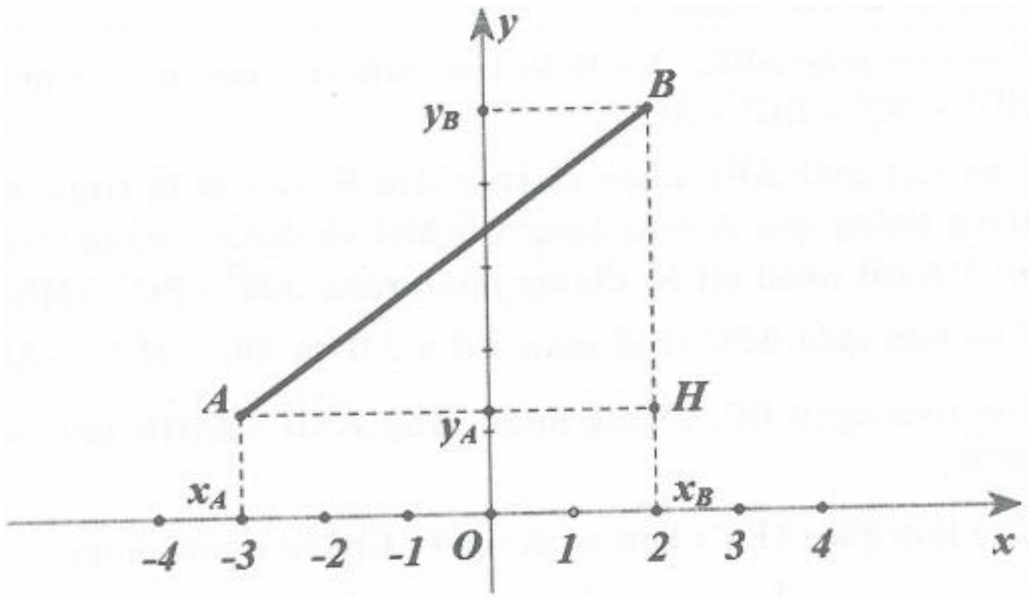
$$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{BC}{BC.BH.CH}=\frac{1}{BH.CH}=\frac{1}{AH^2}$$



III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH $(H \in BC)$. Chứng minh rằng $2AH^2 + BH^2 + CH^2 = BC^2$.

Bài 2. Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong mặt phẳng tọa độ. Chứng minh: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$, đường cao AH, trung tuyến AM. Biết rằng $AH = 40cm; AM = 41cm$. Chứng minh rằng $5AB = 4AC$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 30°$. Chứng minh rằng $BC = 2AB$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $A = 135°$. Biết $BC = 2$; $AB = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng $C = 2B$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Một đường thẳng bất kỳ cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng $BC^2 - CD^2 = BE^2 - DE^2$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $A = 60°$. Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB.AC$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ AH vuông góc với BC $(H \in BC)$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $BDE = 90°$. Đường thẳng qua E song song với BC cắt AH tại F. Chứng minh $AF = HD$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, các đường trung tuyến BM và CN. Chứng minh rằng: $BM^2 + CN^2 = \dfrac{5BC^2}{4}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $5BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài 11*. Cho tam giác ABC vuông tại A. I là giao điểm của các đường phân giác trong. E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A xuống BI và CI. Chứng minh $AI^2 = 2EF^2$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2$.

Bài 13*. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A song song với MH và đường thẳng qua H song song với MA cắt nhau tại N. Chứng minh rằng $AH^2 + BC^2 = MN^2$.

Bài 14*. Cho tam giác ABC thoả mãn $AC > AB$ và $BC = 2(AC - AB)$. D là một điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $ABD = 2ADB$ khi và chỉ khi $BD = 3CD$.

Bài 15*. Cho tam giác ABC nhọn có $A = 60°$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BC + AC} + \frac{1}{BC + AB} = \frac{3}{AB + BC + CA}$$

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi M là điểm nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài 17. Cho tam giác ABC, từ điểm M nằm trong tam giác, ta hạ các đường vuông góc $MD \perp BC$, $ME \perp AB$, $MF \perp AC$. Chứng minh rằng

$$AE^2 + BD^2 + CF^2 = AF^2 + BE^2 + CD^2.$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông AHB và AHC ta được:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1);$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad (2).$$

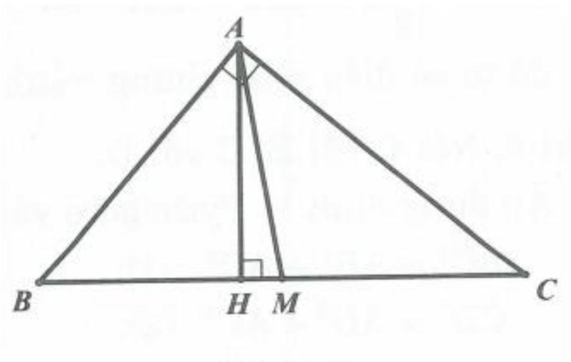
Cộng các đẳng thức (1) và (2) và chú ý $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ta được điều phải chứng minh.

Bài 2. Thấy rằng tam giác ABH vuông tại H và

$$HA = |y_A - y_B|; HB = |x_A - x_B|.$$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ABH cho ta điều phải chứng minh.

Bài 3. Vì AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ABC nên theo nhận xét ở ví dụ 3 ta có $MA = MB = MC = 41cm$. Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHM ta tính được $HM = 9cm$.



Hình 7

Từ đó tính được $HB = 32cm$; $HC = 50cm$.

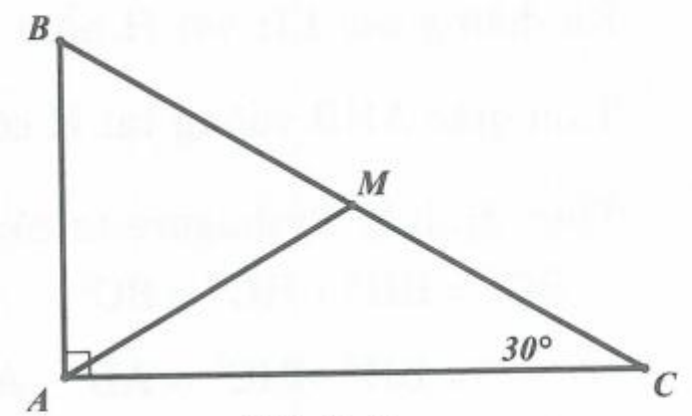
Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABH và ACH ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 40^2 + 32^2 = 2624;$$
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 40^2 + 50^2 = 4100$$

Suy ra $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{2624}{4100} = \dfrac{16}{25}$

Vậy $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$ hay $5AB = 4AC$

Bài 4. Vì tam giác ABC vuông tại A, $C = 30°$ nên $B = 60°$.



Hình 8

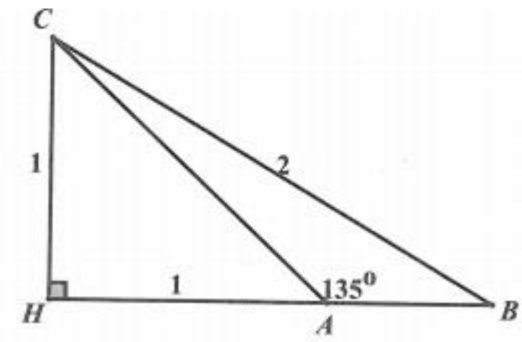
Lại có AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ABC nên $MA = MB = MC$.

Từ đó tam giác MAB đều.

Vậy $AB = MB = \dfrac{1}{2}BC$ hay $BC = 2AB$.

Chú ý: Có thể chứng minh được rằng: *Một tam giác vuông có một cạnh góc vuông dài bằng một nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30°.*

Bài 5. Vẽ đường cao CH của tam giác ABC.



Hình 9

Ta có: $CHA = 180° - 135° = 45°$.

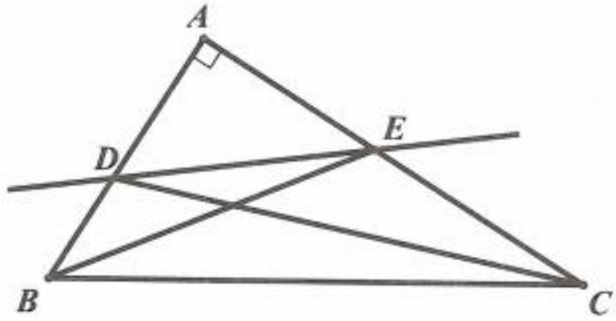
ΔACH có: $H = 90°$; $CAH = 45°$.

Vậy ΔACH vuông cân tại đỉnh H.

Áp dụng định lý Pythagore cho ΔACH ta có: $HC = HA = 1$.

Tam giác CHB vuông tại H ta có $HC = \frac{1}{2}BC$ nên $CBH = 30^\circ$ từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 6. Nối B với E; C với D.



Hình 10

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABC và ADC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \qquad (1);$$

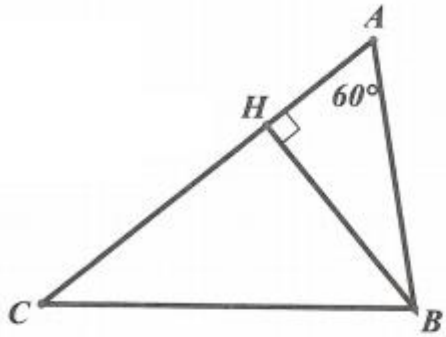
$$CD^2 = AD^2 + AC^2 \qquad (2).$$

Trừ (1) cho (2) ta được $BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2$

Tương tự áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ADE và ABE ta được

$BE^2 - DE^2 = AB^2 - AD^2$. Vậy $BC^2 - CD^2 = BE^2 - DE^2$.

Bài 7. Không mất tính tổng quát giả sử $B > C$.



Hình 11

Kẻ đường cao BH với H nằm trên cạnh AC.

Tam giác AHB vuông tại H có $ABH = 30^\circ$ nên $AH = \frac{1}{2}AB$.

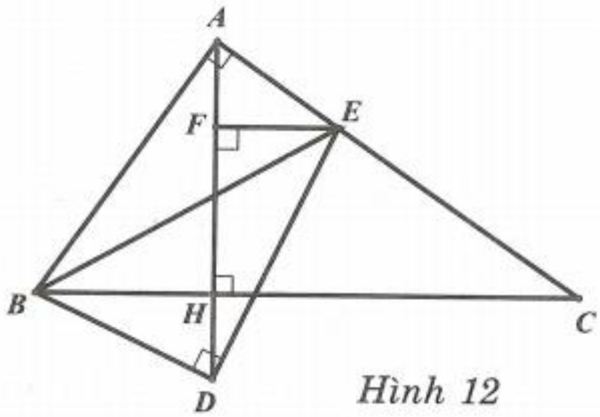
Theo định lý Pythagore ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BC^2$$

$$= BH^2 + HC^2 = AB^2 - AH^2 + (AC - AH)^2$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AC.AH = AB^2 + AC^2 - AB.AC.$$

Bài 8. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABE, ABH, AEF, BDE, BHD, BHA, BAE, EAF ta được



Hình 12

$$BE^2 = AB^2 + AE^2$$

$$= (BH^2 + AH^2) + (AF^2 + EF^2) \qquad (1)$$

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác BDE, BDH, DFE ta được

$$BE^2 = BD^2 + DE^2 = (BH^2 + HD^2) + (DF^2 + EF^2) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH^2 + AF^2 = DF^2 + HD^2 \qquad (3)$

* Nếu $AF > HD$ thì $AH > DF$, khi đó $AH^2 + AF^2 > DF^2 + HD^2$.

* Nếu $AF < HD$ thì $AH < DF$, khi đó $AH^2 + AF^2 < DF^2 + HD^2$.

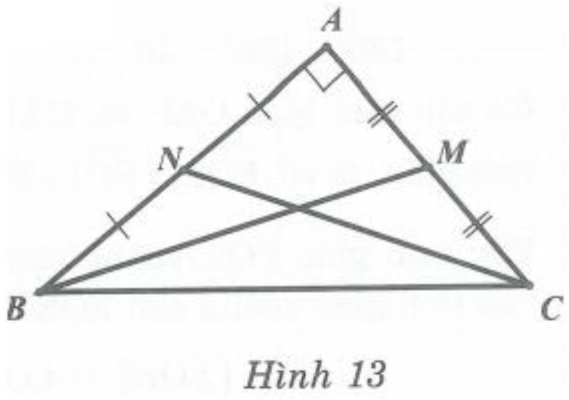
Vậy đẳng thức (3) chỉ xảy ra khi $AF = HD$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 9. *Cách 1*: Sử dụng công thức trung tuyến.

Cách 2: Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác ABM và CAN ta được:

$$BM^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4};\ CN^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

Cộng các đẳng thức trên lại và để ý rằng $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ta có điều phải chứng minh.



Hình 13

Bài 10. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi G là giao điểm của BM và CN, khi đó G là trọng tâm của tam giác. Áp dụng công thức trung tuyến ta được:

$$BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4};\ CN^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Lại có $BM = \frac{3}{2}BG$; $CN = \frac{3}{2}CG$, thay vào công thức trên ta được:

$$\frac{9}{4}BG^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \quad (1)$$

$$\frac{9}{4}CG^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \quad (2)$$

Cộng các đẳng thức (1), (2) và chú ý tam giác BGC vuông tại G, ta có điều phải chứng minh.

Bài 11. Nối AI. Gọi O là trung điểm của AI.

Các tam giác vuông AFI và AEI có FO và EO lần lượt là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AI nên ta có $OF = OE = \frac{AI}{2}$.

Vậy tam giác FOE cân tại O.

Lại có $BIC = 180° - \frac{B+C}{2} = 135°$

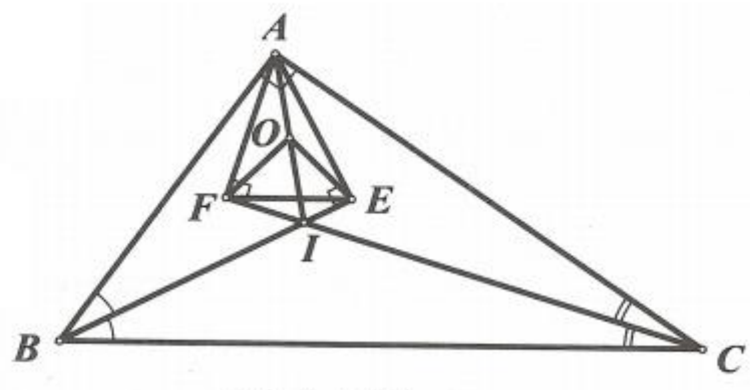
Hay $FIA + EIA = 135°$

Do đó: $FAI + EAI$

$$= (90° - FIA) + (90° - EIA)$$

$$= 180° - (FIA + EIA)$$

$$= 180° - 135° = 45°.$$



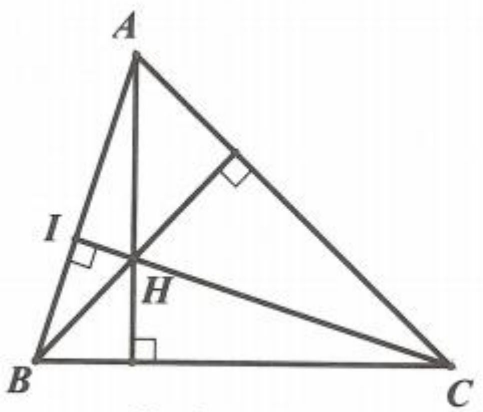
Hình 1.14

Có các tam giác OAF và OAE cân tại O, theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có $FOE = FOI + EOI = 2\left(FAI + EAI\right) = 90°$.

Vậy tam giác FOE vuông cân tại O. Từ đó áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông cân FOE ta được:

$$AI^2 = (2.OE)^2 = 4.OE^2 = 2\left(OE^2 + OF^2\right) = 2EF^2.$$

Bài 12. Gọi I là giao điểm của CH và AB. Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông AHI, BHI, ACI, BCI ta suy ra:



Hình 1.15

$$AH^2 - AI^2 = BH^2 - BI^2 \qquad (1)$$

$$AC^2 - AI^2 = BC^2 - BI^2 \qquad (2)$$

Trừ (2) cho (1) ta được

$$AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2$$

Từ đó: $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2$.

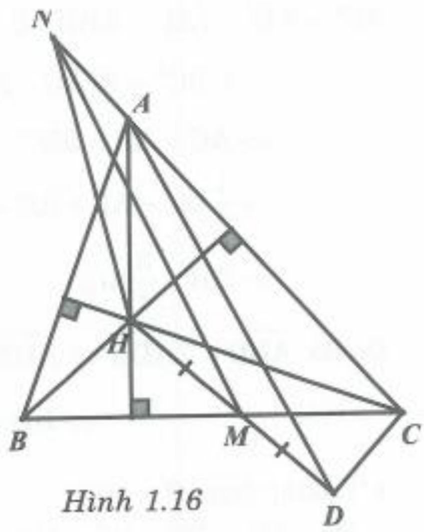
Chú ý:

+ Chứng minh trên vẫn đúng trong trường hợp tam giác ABC là tam giác tù. Trong trường hợp tam giác ABC vuông thì một số điểm trùng nhau nhưng kết quả vẫn đúng.

+ Bằng cách chứng minh tương tự có thể suy ra:

$$AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$$

Bài 13. Lấy D là điểm đối xứng với H qua M.



Hình 1.16

Dễ dàng chứng minh được $BH // DC$, $BH = DC$ từ đó suy ra $DC \perp AC$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác ADC vuông tại C, ta được:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + BH^2$ (vì $BH = CD$).

Theo kết quả bài tập 12 ta có:

$$AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2.$$

Như vậy: $AD^2 = AH^2 + BC^2$.

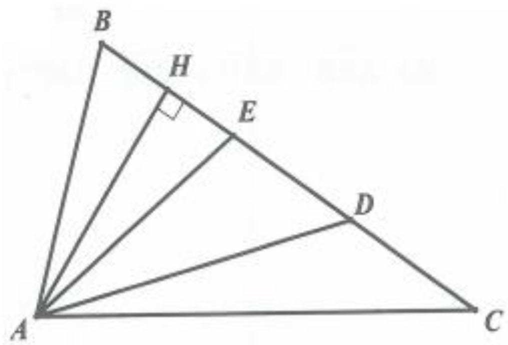
Cuối cùng, dễ dàng chứng minh được $MN = AD$.

Do đó $AH^2 + BC^2 = MN^2$.

Bài 14. Ta xét ba trường hợp:

+ Trường hợp $B < 90°$ (Hình 1.17a)

Hạ $AH \perp BC$. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng CH sao cho $AE = AB$.



Hình 1.17a

Theo định lý Pythagore ta có:

$$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 = (CH + BH)(CH - BH)$$

$$= CE.BC = CE.2(AC - AB)$$

Do vậy $(AC - AB)(AC + AB) = 2CE(AC - AB)$.

Suy ra $AC + AB = 2CE$.

Theo bài ra $BC = 2(AC - AB) \Leftrightarrow 2AB + \frac{1}{2}BC = 2CE.$ $\quad (1)$

Vì vậy $ABD = 2ADB \Leftrightarrow AEB = 2ADB$

$\Leftrightarrow$ Tam giác AED cân tại E

$\Leftrightarrow AB = AE = DE$

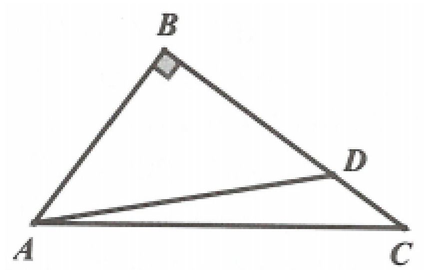
$\Leftrightarrow 2DE + \frac{1}{2}BC = 2CE$. (theo (1))

$\Leftrightarrow BC = 4(CE - DE) = 4CD$

$\Leftrightarrow BD = 3CD$.

+ Trường hợp $B = 90°$

Theo định lý Pythagore ta được:



Hình 1.17b

$$AC^2 - AB^2 = (AC - AB)(AC + AB)$$

$$= BC^2 = 2(AC - AB).BC$$

$$\Leftrightarrow AC + AB = 2BC$$

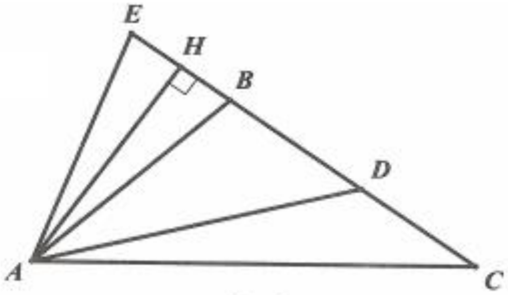
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC + AB + AB = 2BC$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}BC.$$

Do đó $ABD = 2ADB \Leftrightarrow ADB = 45° = BAD \Leftrightarrow AB = BD$

$$\Leftrightarrow BD = \frac{3}{4}BC \Leftrightarrow BD = 3BC.$$

+ Trường hợp $B > 90°$.



Hình 1.17c

Hạ $AH \perp BC$. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng CH sao cho $AE = AB$.

Theo định lý Pythagore ta có:

$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2$

$= (CH + BH)(CH - BH)$

$= CE.BC = CE.2.(AC - AB)$

Do vậy $(AC - AB)(AC + AB) = 2CE(AC - AB)$.

Suy ra $AC + AB = 2CE$.

Theo bài ra $BC = 2(AC - AB) \Leftrightarrow 2AB + \frac{1}{2}BC = 2CE$.

Vì vậy: $ABD = 2ADB \Leftrightarrow 180° - ABE = 2ADB$

$$AEB + 2ADB = ABE + 2ADB = 180° \qquad (2)$$

Mà $AEB + EAD + ADE = 180°$ nên $(2) \Leftrightarrow EAD = ADE$

$\Leftrightarrow$ Tam giác AED cân tại E

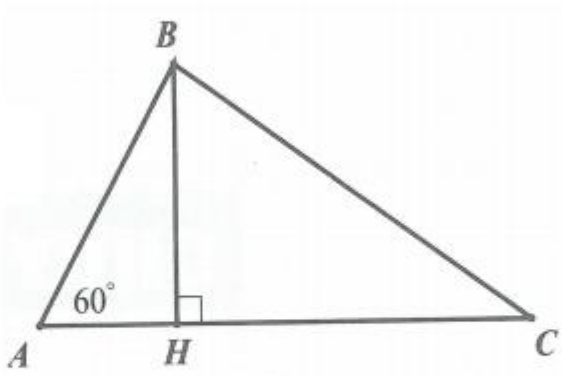
$\Leftrightarrow AB = AE = DE$

$\Leftrightarrow 2DE + \frac{1}{2}BC = 2CE$

$\Leftrightarrow BC = 4(CE - DE) = 4CD$

$\Leftrightarrow BD = 3CD$.

Bài 15. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.



Hình 1.18

Kẻ BH vuông góc với AC (H thuộc AC)

Theo bài ra ta có $A = 60°$ nên $ABH = 30°$.

Theo bài 1.4 ta có $AH = \frac{1}{2}AB$.

Đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1}{BC + AC} + \frac{1}{BC + AB} + \frac{3}{AB + BC + CA}$$

trở thành $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{3}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+c)+(a+b+c)(a+b)=3(a+b)(a+c) \quad (1)$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức (1).

Thật vậy: Theo định lý Pythagore ta có:

$BC^2 = BH^2 + HC^2$; $BH^2 = AB^2 - AH^2$ và $HC^2 = (AC - AH)^2$.

Do đó: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH.AC = AB^2 + AC^2 - AB.AC$.

Hay $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Ta có:

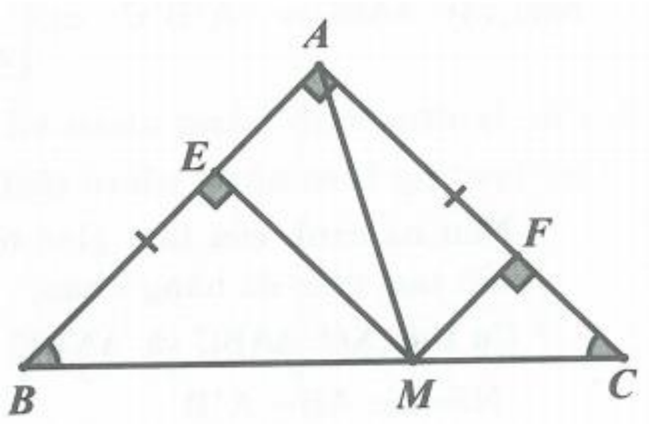
$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 2a^2 + 3ab - 3ab + 3ac - 3ac = b^2 + c^2 - 3bc + 2bc$

$\Leftrightarrow 3(a^2 + ab + ac + bc) = 2a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3ac + 2bc$

$\Leftrightarrow 3(a+b)(a+c) = (a+b+c)(a+c) + (a+b+c)(a+b)$.

Bài 16. Gọi điểm E và điểm F lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AB và AC.



Do tam giác ABC vuông cân tại A nên các tam giác BEM và tam giác CFM lần lượt cân tại E và F.

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác BME vuông tại E:

$MB^2 = EB^2 + EM^2 = 2EM^2 \quad (1)$

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác CMF vuông tại F.

$MC^2 = FM^2 + FC^2 = 2FM^2 \quad (2)$

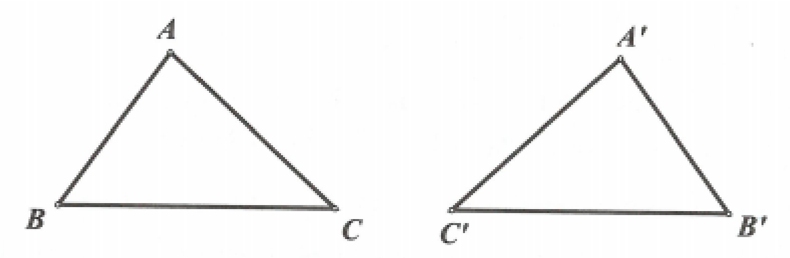
Từ (1) và (2) suy ra: $MB^2 + MC^2 = 2(EM^2 + FM^2)$

Vậy $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

BÀI TOÁN 2.SỬ DỤNG TAM GIÁC BẰNG NHAU ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.



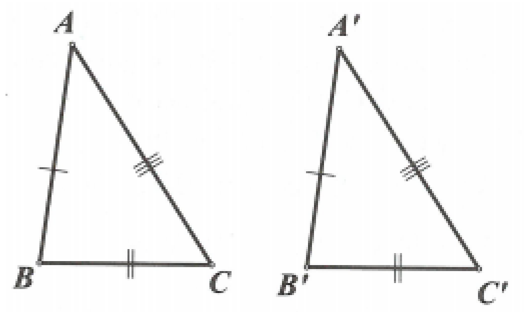
Như vậy: $\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' \\ A = A', B = B', C = C' \end{cases}$

2. Các trường hợp bằng nhau của tam giác

a) Trường hợp bằng nhau thứ nhất cạnh – cạnh – cạnh (c.c.c)

* Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

* Cụ thể: Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$



Nếu có: $AB = A'B'$

$CA = C'A'$

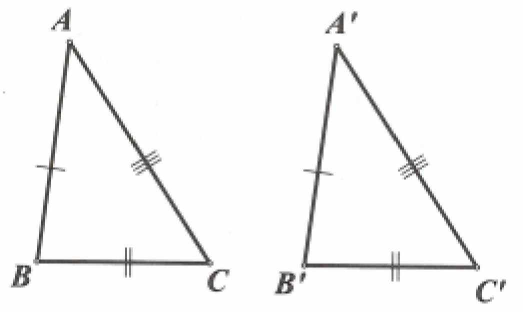
$BC = B'C'$

Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'(\text{c.c.c})$.

b) Trường hợp bằng nhau thứ hai cạnh – góc – cạnh (c.g.c)

* Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

* Cụ thể: Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$



Nếu có: $AB = A'B'$

$B = B'$

$BC = B'C'$

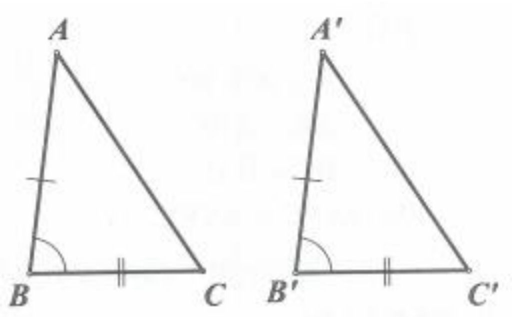
Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'(\text{c.g.c})$.

Chú ý: Từ trường hợp bằng nhau cạnh – góc – cạnh nói trên ta suy ra: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

c) Trường hợp bằng nhau thứ ba góc – cạnh – góc (g.c.g)

* Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

* Cụ thể: Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$



Nếu có: $B = B'$

$BC = B'C'$

$C = C'$

Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c).

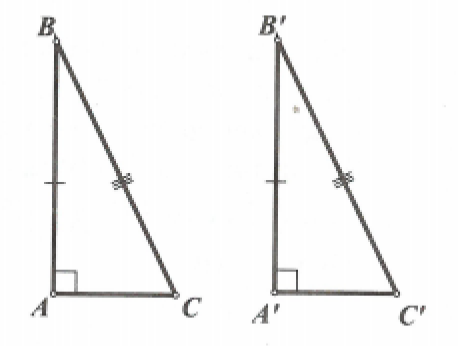
Chú ý: Từ trường hợp bằng nhau góc – cạnh – góc nói trên ta suy ra:

- Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

- Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

d) Trường hợp đặc biệt của tam giác vuông

* Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



* Cụ thể: Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$

Nếu có: $A = A' = 90°$

$AB = A'B'$

$BC = B'C'$

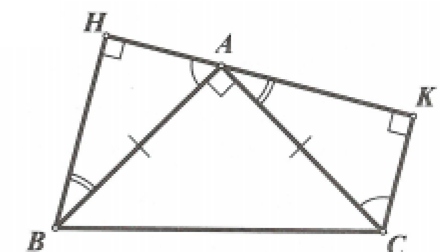
Thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Qua *A* kẻ đường thẳng *d* bất kỳ sao cho *d* không cắt đoạn thẳng *BC*. Từ *B* và *C* kẻ *BH* và *CK* vuông góc với $d\left(H, K \in d\right)$. Chứng minh rằng $BH + CK = HK$.

Lời giải

Ta có $HAB + KAC = 90°$; $KCA + KAC = 90°$.



Hình 1

Từ đó $HAB = KCA$.

Hai tam giác vuông *BHA* và *AKC* có $AB = AC$ (vì tam giác *ABC* cân tại *A*); $HAB = KCA$ (chứng minh trên) nên bằng nhau (cạnh huyền – góc nhọn).

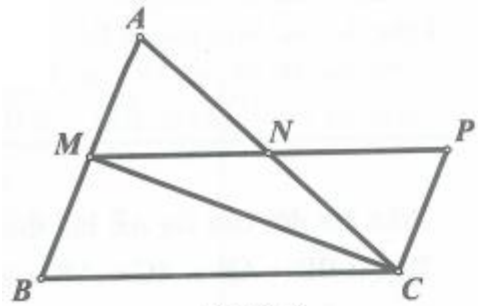
Suy ra $BH = AK$; $CK = AH$ (các cặp cạnh tương ứng).

Từ đó $BH + CK = AK + AH = HK$. ■

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*. Chứng minh rằng $MN = \frac{1}{2}BC$.

Lời giải

Trên tia *MN* lấy *P* sao cho *N* là trung điểm của *MP*.



Hình 2

Ta có $\Delta ANM = \Delta CNP$ (c.g.c). Suy ra: $PC = MA$; $AMN = CPN$.

Vì hai góc AMN và CPN ở vị trí so le trong nên $AB // CP$.

Từ đó $BMC = PCM$.

Hai tam giác *MPC* và *CBM* có $MB = PC\,(= MA)$; *MC* chung;

$BMC = PCM$ nên bằng nhau (c.g.c),

Từ đó $MP = BC$. Vậy $MN = \frac{1}{2}BC$.■

Chú ý:

Theo lời giải của ví dụ trên, vì $\Delta MPC = \Delta CBM$ nên $BCM = PMC$.

Từ đó $MN // BC$. Người ta gọi đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác là *đường trung bình* của tam giác đó, ta có tính chất: *Đường trung bình của một tam giác song song với cạnh còn lại và dài bằng nửa cạnh ấy.*

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* có $A < 90°$, vẽ về phía ngoài tam giác *ABC* các tam giác *ABD* và *ACE* vuông cân tại *A*.

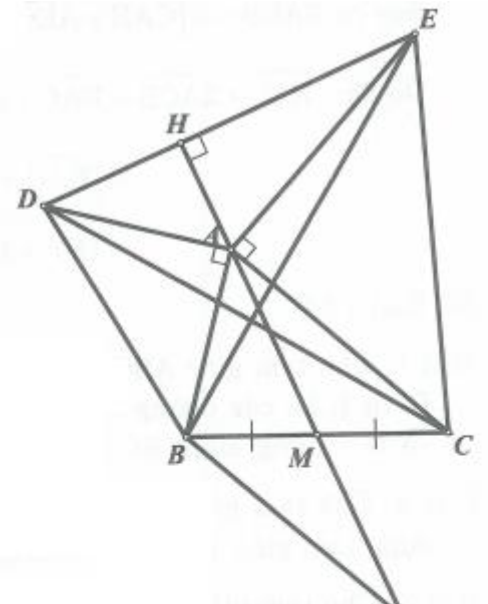
a) Chứng minh $BE = CD$.

b) Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh $AM = \frac{1}{2}DE$.

Lời giải

a) Ta có $DAC = BAE = \left(90° + BAC\right)$.

Hai tam giác *DAC* và *BAE* có $AD = AB$; $AC = AE$; $DAC = BAE$ nên bằng nhau (c.g.c), suy ra $BE = CD$.



Hình 3

b) Trên tia *AM* lấy điểm *N* sao cho *M* là trung điểm của *AN*.

Thấy rằng, $DAE = 180° - BAC = ABC + BAC$.

Mặt khác $\Delta CAM = \Delta BNM$ (c.g.c)

Nên $ACB = CBN$, $BN = AC$.

Ta có $ABN = ABC + CBN = ABC + ACB = DAE$

Vậy $\Delta DAE = \Delta ABN$ (c.g.c).

Từ đó suy ra, $DE = AN = 2AM$ hay $AM = \frac{1}{2}DE$. ■

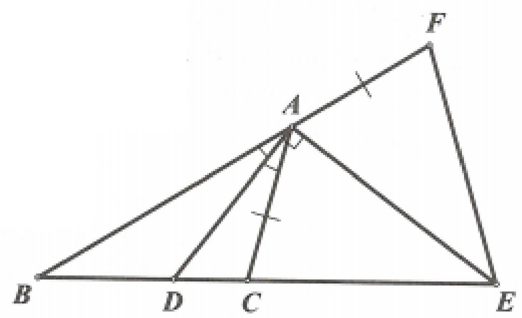
Ví dụ 4. Cho tam giác *ABC*, đường phân giác *AD*. Đường thẳng vuông góc với *AD* tại *A* cắt *BC* tại *E*. Biết *C* nằm giữa *B*, *E* và $BE = AB + AC$. Chứng minh rằng: $BAC + 3ACB = 360°$.

Lời giải

Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *F* sao cho $AF = AC$.

Ta có: $BE = AB + AC = AB + AF = BF$ nên ΔBEF cân tại *B*.

Do đó $F = BEF$ (1).



Hình 4

Lại có $AE \perp AD$, mà *AD* là đường phân giác trong đỉnh *A* của ΔABC nên *AE* là đường phân giác ngoài đỉnh *A* của ΔABC.

Hay $CAE = FAE$.

Do vậy, $\Delta CAE = \Delta FAE$ (c.g.c).

Từ đó suy ra $ACE = F$, $AEC = AEF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $ACE = F = CEF = 2AEC$.

Ta có $ACB = 180° - ACE = CAE + AEC$.

Suy ra $3ACB = 3\left(CAE + AEC\right)$.

Do đó: $BAC + 3ACB = BAC + 3\left(CAE + AEC\right)$

$$= \left(BAC + CAF\right) + \left(AEC + ACE + CAE\right)$$

$$= 180° + 180° = 360°.$$ ■

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác *ABC*, trên cạnh *AB* lấy *D* và *E* sao cho $AD = BE$. Qua *D* và *E* kẻ các đường thẳng song song với *BC* cắt *AC* theo thứ tự tại *M* và *N*. Chứng minh $BC = DM + EN$.

Bài 2. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A = 30°$. Bên ngoài tam giác *ABC*, dựng tam giác đều *BDC*. Chứng minh rằng $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài 3. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A = 100°$. Tia phân giác trong góc *B* cắt *AC* ở *D*. Chứng minh $BC = BD + AD$.

Bài 4. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A = 80°$. Lấy điểm *M* ở miền trong của tam giác và điểm *N* trên cạnh *AC* sao cho $BMC = 150°, MBC = 10°, BMN = 160°$. Chứng minh rằng $BM = MN + NA$.

Bài 5. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* chứa điểm *B*, lấy điểm *D* sao cho *CD* vuông góc với *AC* và $CD = AC$. *M* là điểm trên đoạn thẳng *CD* sao cho $MD = 2MC$. *N* là trung điểm của đoạn thẳng *BD*. Chứng minh $AMC = AMN$.

Bài 6. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có $AC = 3AB$. Trên cạnh *AC* lấy hai điểm *D* và *E* sao cho $AD = DE = EC$ (*D* nằm giữa *A* và *E*). Chứng minh $AEB + ACB = 45°$.

Bài 7. Cho tam giác *ABC*. Vẽ đường phân giác trong *AD* của tam giác. Trên *AD* lấy hai điểm *E* và *F* sao cho $ABE = CBF$. Chứng minh $ACE = BCF$.

Bài 8. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. *E* là một điểm nằm trên cạnh *BC* sao cho $EC = 2EB$. Chứng minh rằng $AC^2 = 3\left(EC^2 - EA^2\right)$.

Bài 9. Cho tam giác *ABC*, đường trung tuyến *AM*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* chứa đỉnh *C* vẽ đoạn thẳng *AE* vuông góc với *AB* và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* chứa đỉnh *B* vẽ đoạn thẳng *AF* vuông góc với *AC* và $AF = AC$. Chứng minh rằng $EF = 2AM$.

Bài 10. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Gọi *E* là trung điểm của *AC*. Qua *A* kẻ đường thẳng vuông góc với *BE* cắt *BC* tại *D*. Chứng minh $AD = 2ED$.

Bài 11. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. *M* là điểm nằm trong tam giác sao cho $ABM = 15°$; $BAM = 30°$. Chứng minh rằng: $BC = 2AM$.

Bài 12. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Lấy các điểm *D* và *E* lần lượt thuộc các cạnh *AB* và *AC* sao cho $AD = AE$. Đường thẳng đi qua *D* và vuông góc với *BE* cắt *CA* ở *K*. Chứng minh rằng $AK = AC$.

Bài 13. Cho tam giác *ABC*. Các tia phân giác trong của góc *B* và *C* cắt nhau tại *I*. Qua *I* kẻ một đường thẳng song song với *BC*, đường thẳng này cắt *AB*, *AC* theo thứ tự ở *D* và *E*. Chứng minh rằng $DE = BD + CE$.

Bài 14. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Kẻ đường phân giác trong *CD*. Qua *D* kẻ đường thẳng vuông góc với *CD* cắt *BC* tại *F*. Đường thẳng kẻ qua *D* song song với *BC* cắt *AC* tại *E*. Tia phân giác góc *BAC* cắt *DE* tại *M*. Chứng minh rằng:

a) $CF = 2BD$

b) $CF = 4MD$

Bài 15. Gọi *I* là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác *ABC*. Chứng minh rằng $AB+BI=AC$ khi và chỉ khi $ABC=2.ACB$.

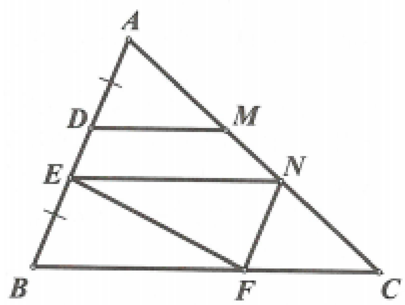
Bài 16. Cho tam giác *ABC* cân tại *A* có $A=20°$. Trên cạnh *AB* lấy điểm *D* sao cho $BDC=30°$. Chứng minh rằng $AD=BC$.

Bài 17. Cho tam giác *ABC* có $A=60°, B=70°$. Lấy điểm *D* trên cạnh *AB* sao cho $ACD=20°$. Chứng minh rằng $AC+AD=BD+BC$.

Bài 18. Cho tam giác *ABC* nhọn, gọi *H* là trực tâm của tam giác. Gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*, *I* là giao điểm các đường phân giác của các góc ABH và ACH. Đường thẳng *MI* cắt *AH* tại *N*. Chứng minh rằng $NA=NH$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



Hình 5

Qua *N* kẻ $NF//AB\left(F\in BC\right)$. Nối EF.

Ta có $\Delta BEF=\Delta NEF\left(\text{g.c.g}\right)$ nên $BE=AD=NF; EN=BF$.

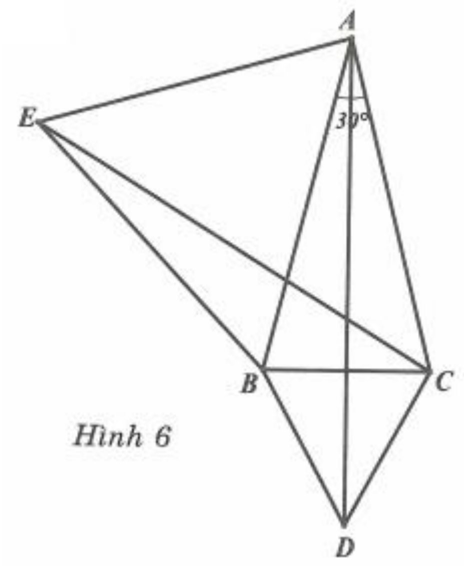
Lại có $NFC=ABC=ADM$ (đồng vị); $NCF=AMD$ (đồng vị).

Do vậy $DAM=FNC$.

Ta có $\Delta ADM=\Delta NFC\left(\text{g.c.g}\right)$ nên $DM=FC$.

Từ đó suy ra $BC=BF+FC=DM+EN$.■

Bài 2.



Hình 6

Dựng ở phía ngoài tam giác *ABC* tam giác *AEB* đều, nối *EC*.

Ta có: $EAC=90°, EBC=ACD$.

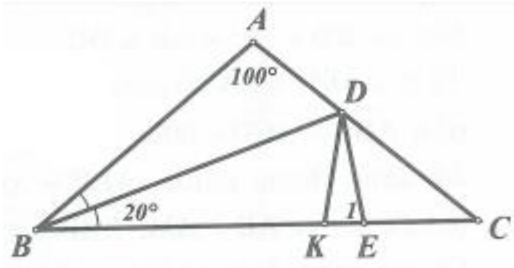
Hai tam giác *EBC* và *ACD* bằng nhau $\left(\text{c.g.c}\right)$, suy ra $EC=AD$.

Lại có tam giác *EAC* vuông tại *A* nên theo định lý Pythagore, ta có: $EC^2=EA^2+AC^2$.

Để ý rằng, $EA=AC, EC=BD$ nên $AD^2=AB^2+AC^2$.■

Bài 3.

Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BDE = 80^\circ$, $BDK = 60^\circ$.



Hình 7

Ta có $\Delta BAD = \Delta BKD\,(\text{g.c.g})$ nên $AD = DK$.

Lại có $KDE = 20^\circ$, $DKE = A = 100^\circ$

suy ra: $E_1 = 80^\circ$, $DEC = 100^\circ$, $EDC = C = 40^\circ$.

Vậy ΔDEC cân tại E, từ đó $DE = EC$.

Dễ dàng chứng minh ΔBDE cân tại B, ΔKDE cân tại D nên $BD = BE$, $DE = DK = AD$.

Cuối cùng, $BC = BE + EC = BD + AD$.■

Bài 4.

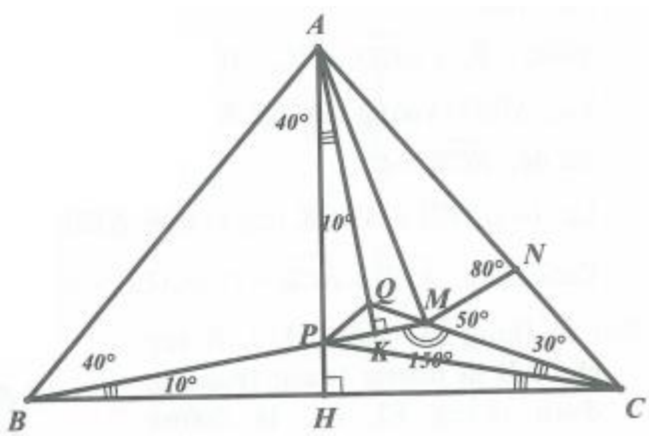
Nối AM. Đường cao AH của ΔABC cắt BM tại P. Kẻ $AK \perp PM$. CM cắt AK tại Q.

Ta có: $PAK = PBH = 10^\circ$ và các tam giác APB và BPC cân tại P.

Tính được số đo các góc:

$MCB = 20^\circ,\ PCB = 10^\circ,\ MPC = 20^\circ,\ QAC = 30^\circ,$

$ANM = APM = 80^\circ,\ APC = 100^\circ$.



Hình 8

Dễ dàng chứng minh ΔPAC cân tại P, ΔQAC cân tại Q nên PQ là đường trung trực của AC và do đó tia PQ là tia phân giác của góc APC.

Như vậy, $QPC = \dfrac{APC}{2} = 50^\circ$

và $QPM = QPC - MPC = 30^\circ$.

Mặt khác, $QMP = 30^\circ$ nên ΔQPM cân tại Q.

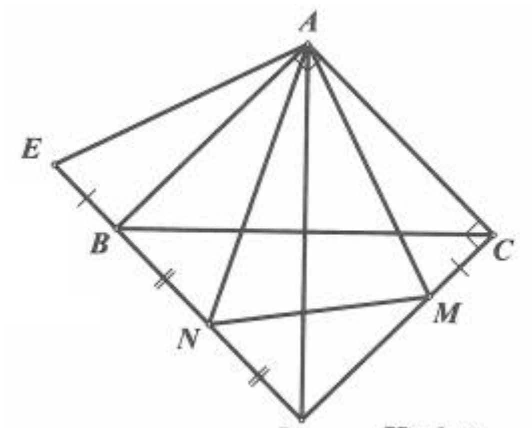
Từ đó, ΔAPM cân tại A.

Vậy $AMP = APM = 80^\circ$, $AMN = PMN - AMP = 80^\circ$.

Chứng minh được hai tam giác cân APM và AMN bằng nhau nên $AP = AN$, $PM = MN$.

Cuối cùng, $BM = BP + PM = AP + PM = MN + AN$.■

Bài 5.



Hình 9

Trên tia đối tia *BD* lấy điểm *E* sao cho $BE = MC$.

Ta có $BA//CD$ (cùng vuông góc với *AC*) nên $ACB = DBC$ (hai góc so le trong). Mặt khác $AB = CD(= AC)$.

Vậy $\Delta ABC = \Delta DCB$ (c.g.c)

Suy ra, $BD = AC = AB = DC$.

Ta có $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.c.c) nên $ABD = ACD = 90°$.

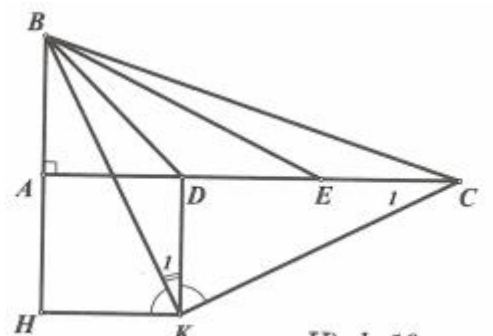
Dễ dàng chứng minh $\Delta ABE = \Delta ACM$ (c.c.c), suy ra

$AE = AM$, $AEB = AMC$.

Chứng minh được $\Delta AEN = \Delta AMN$ (c.g.c) nên ta có $AMN = AEN$.

Vậy $AMN = AMC$.■

Bài 6.



Hình 10

Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa *B* vẽ hình vuông *ADKH*.

Ta có $\Delta BHK = \Delta CDK$ (c.g.c) nên $BK = CK$, $BKH = CKD$.

Tam giác *BKC* có $BK = KC$ nên ΔBKC cân tại *K*.

Hơn nữa, $BKC + K_1 + CKD = K_1 + BKH = 90°$.

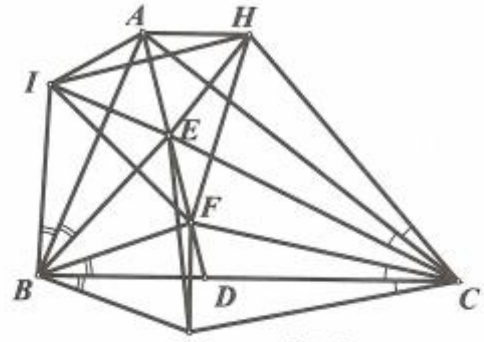
Vậy ΔBKC vuông cân tại *K*.

Từ đó, $KCB = 45°$.

Lại có $\Delta AEB = \Delta DCK$ (c.g.c) nên $AEB = C_1$.

Cuối cùng, $AEB + ACB = C_1 + ACB = KCB = 45°$.■

Bài 7.



Hình 11

Dựng các điểm *H*, *I*, *K* sao cho *AB* là đường trung trực của đoạn thẳng *EI*, *AC* là trung trực của đoạn thẳng *EH*, *BC* là đường trung trực của đoạn thẳng *FK*.

Theo tính chất của điểm nằm trên đường trung trực ta có $AI = AE = AH$. Vậy ΔIAH cân tại *H*.

Mặt khác dễ dàng chứng minh được *AD* là tia phân giác của góc *IAH*. Như vậy, *AD* là đường trung trực của đoạn thẳng *IH*. Do *F* nằm trên *AD* nên ta có $FI = FH$ (1).

Lại có $\Delta FIB = \Delta KEB(\text{c.g.c})$ nên $FI = KE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $FH = KE$.

Xét ΔFHC và ΔKEC có $FH = KE,\ FC = KC,\ HC = EC$.

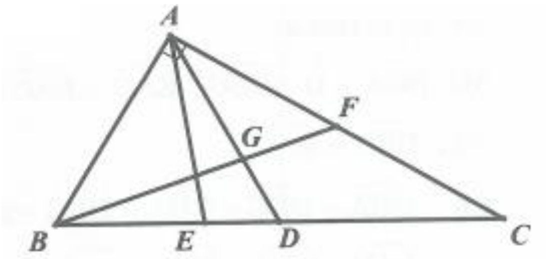
Từ đó $\Delta FHC = \Delta KEC(\text{c.c.c})$.

Vậy $HCF = ECK$. Suy ra $HCE = KCF$.

Cuối cùng, vì $BCF = \dfrac{KCF}{2};\ ACE = \dfrac{HCE}{2}$ nên $ACE = BCF$.■

Bài 8.

Gọi G là giao điểm của hai đường trung tuyến AD và BF của tam giác ABC.



Hình 12

Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông, suy ra $DA = DB = DC = \dfrac{BC}{2}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\dfrac{DG}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, do D là trung điểm của BC nên theo đề bài ra ta có $\dfrac{DE}{BD} = \dfrac{1}{3}$.

Như vậy $\dfrac{DG}{AD} = \dfrac{DE}{BD}\left(=\dfrac{1}{3}\right)$.

Kết hợp với $AD = BD$ ta được $DG = DE$.

Vì $\Delta DGB = \Delta DEA(\text{c.g.c})$ nên $AE = BG$.

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác ABF và ABC ta được:

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 = \left(BC^2 - AC^2\right) + AF^2 \ (*).$$

Thay $BF = \dfrac{3}{2}BG,\ BC = \dfrac{3}{2}EC,\ AF = \dfrac{1}{2}AC$ vào hệ thức (*) ta được:

$$\left(\frac{3}{2}BG\right)^2 = \left(\frac{3}{2}EC\right)^2 - AC^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2$$

Thu gọn hệ thức này ta được điều phải chứng minh.■

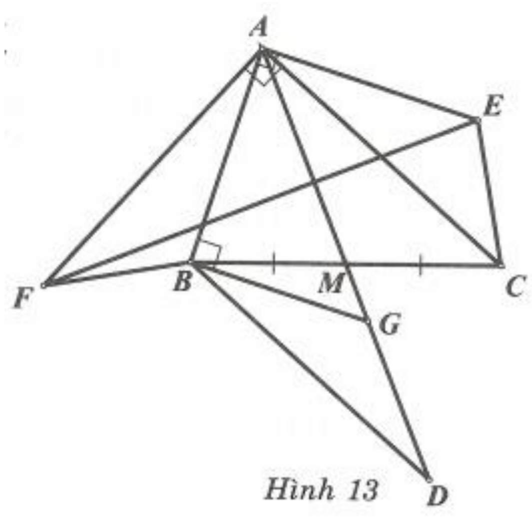
Bài 9.

Trường hợp $BAC = 90°$, kết quả là hiển nhiên.

Ta chứng minh bài toán cho trường hợp $BAC < 90°$ (trường hợp $BAC > 90°$ chứng minh tương tự).

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MA = MD$. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt AD tại G. ta có

$\Delta AMC = \Delta DMB$ (c.g.c) suy ra $D = CAM$, $AC = BD$.



Hình 13

Lại có $BG // AE$ (cùng vuông góc với AB) nên $BGA = EAG$ (Hai góc so le trong).

Mà $BGA = D + DBG$, $EAG = EAC + CAG = EAC + D$.

Vậy $DBG = EAC$.

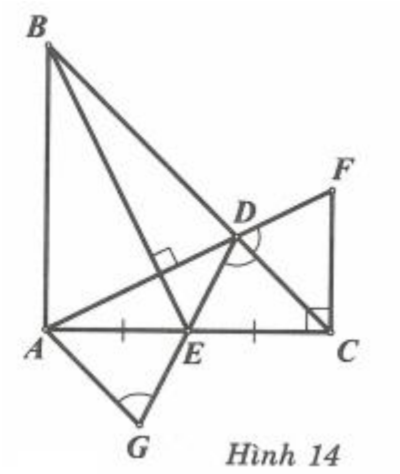
Có $DBA = DBG + GBA = DBG + 90°$,

$FAE = EAC + FAC = EAC + 90°$.

Vậy $DBA = FAE$. Hai tam giác DBA và FAE có $AE = AB$, $AF = BD (= AC)$, $DBA = FAE$ nên bằng nhau (c.g.c)

Do đó $FE = AD$. Mà $AD = 2AM$ nên $FE = 2AM$.■

Bài 10.



Hình 14

Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC, cắt AD tại F.

Do $ABE = CAF$ (cùng phụ với AEB) nên $\Delta BAE = \Delta ACF$ (g.c.g).

Từ đó suy ra $CF = AE = EC$.

Vậy $\Delta CDE = \Delta CDF$ (c.g.c) suy ra $CDE = CDF$.

Trên tia DE lấy điểm G sao cho $ED = EG$.

Ta có $\Delta AEG = \Delta CED$ (c.g.c) nên $CDE = AGE$ và $AG // DC$.

Vì $DAG = FDC$ (hai góc đồng vị) suy ra $DAG = DGA$.

Vậy ΔDAG cân tại D, từ đó $DA = DG = 2DE$.■

Bài 11.

Kẻ đường trung tuyến AD của ΔABC.

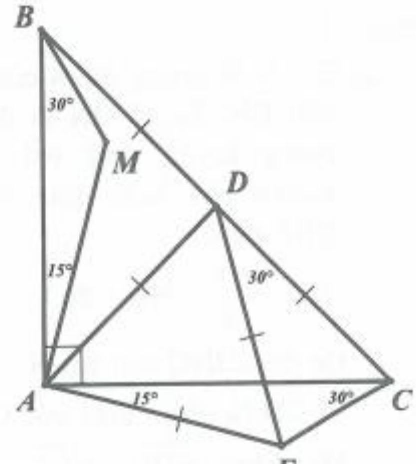
Khi đó AD đồng thời là đường cao và đường phân giác của ΔABC.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa D, lấy điểm E sao cho ΔADE đều.

Dễ dàng tính được số đo các góc: $ACE = 30°$; $CAE = 15°$.

Như vậy: $\Delta AEC = \Delta AMB\,(\text{g.c.g})$.

Từ đó suy ra: $AM = AE = AD = \dfrac{BC}{2}$.■



Hình 15

Bài 12.

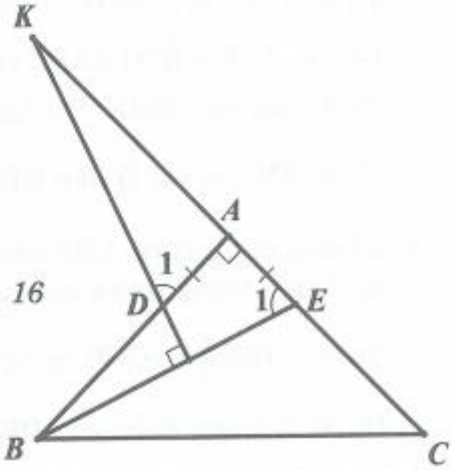
Ta có $D_1 = E_1$ (cùng phụ với góc K).

Do đó $\Delta KAD = \Delta BAE\,(\text{g.c.g})$.

Từ đó suy ra $AB = AK$.

Mà $AB = AC$ (ΔABC vuông cân tại A).

Nên $AK = AC$.■



Hình 16

Bài 13.

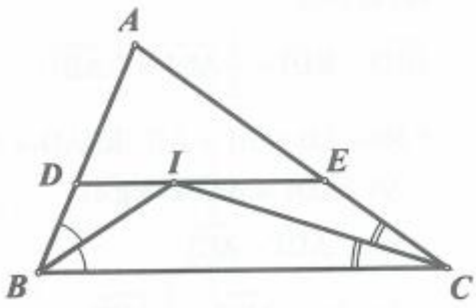
Vì $DE // BC$ nên $DIB = IBC,\ EIC = ICB$.

Mặt khác BI và CI lần lượt là tia phân giác góc B và góc C của tam giác ABC nên $IBC = IBD,\ ICB = ICE$.

Do đó $DIB = IBD,\ EIC = ICE$.

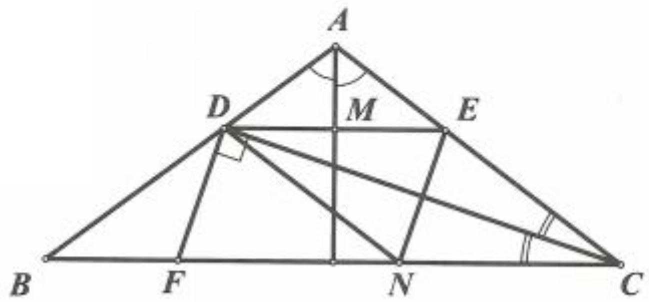
Từ đó suy ra các tam giác BDI và CEI là các tam giác cân lần lượt tại các đỉnh D và E.

Vậy $DE = DI + IE = DB + EC$.■



Hình 17

Bài 14.



Hình 18

a) Gọi N là trung điểm của CF. Nối EN. Ta có DN là đường trung tuyến ứng với cánh huyền của tam giác vuông CDF nên: $ND = \frac{CF}{2} = NF = NC$.

Do đó ΔDNC cân tại N.

Vì CD là phân giác góc C của ΔABC nên $ECD = NCD$.

Mặt khác $NDC = NCD$ (vì ΔDNC cân tại N) nên $NDC = ECD$.

Từ đó $DN//AC$. Vì $DN//AC$ nên $ACB = DNB$ (hai góc đồng vị),

Lại có $ACB = B$ (vì ΔABC cân tại A) nên $B = DNB$.

Từ đó suy ra: ΔDBN cân tại D.

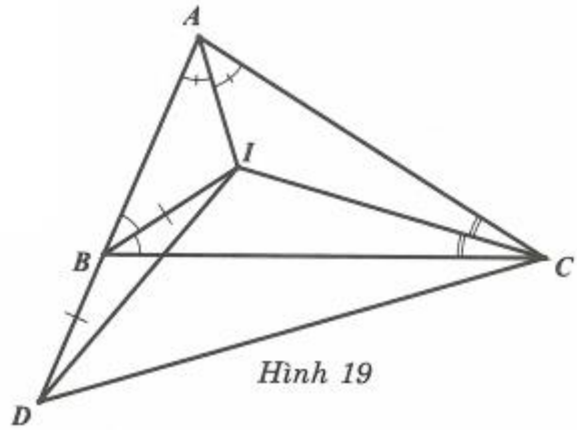
Vì ΔDBN cân tại D nên $BD = DN = \frac{CF}{2}$ hay $CF = 2BD$.

b) Chứng minh được ADE cân tại D và AM vừa là đường phân giác vừa là đường trung tuyến của ΔADE.

Ta có: $\Delta DEN = \Delta CNE\left(\text{g.c.g}\right)$ nên $DE = CN = \frac{CF}{2}$ hay $CF = 2DE$.

Do đó M là trung điểm của DE nên $CF = 4MD$.■

Bài 15.



Hình 19

Trên tia AB lấy điểm D sao cho $BD = BI$. Vì ΔBDI cân tại B nên $BID = BDI = \frac{1}{2}ABI = \frac{1}{4}ABC$.

* Nếu $AB + BI = AB$ thì $AD = AC$.

Vì $\Delta ADI = \Delta ACI\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $ADI = ACI$.

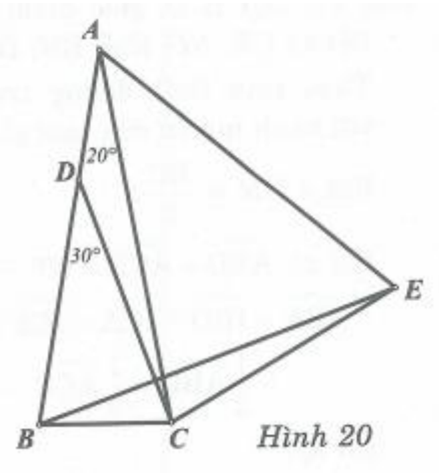
Do đó $\frac{1}{4}ABC = \frac{1}{2}ACB$ hay $ABC = 2.ACB$.

* Nếu $ABC = 2.ACB$ thì $\frac{1}{4}ABC = \frac{1}{2}ACB$, suy ra $ADI = ACI$.

Do đó $\Delta ADI = \Delta ACI\left(\text{g.c.g}\right)$. Nên $AD = AC$.

Mặt khác $AD = AB + BD = AB + BI$. Do vậy $AC = AB + BI$.■

Bài 16.



Hình 20

Vì ΔABC cân tại A và $BAC = 20°$ nên ta có $ABC = ACB = 80°$.

Lại có $BDC = 30°$ nên $ACD = 10°$.

Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng tam giác đều ABE. Theo đó ta có $CAE = 40°$; $AB = BE = AE$. Do ΔACE cân tại A nên:

$$ACE = AEC = 70°.$$

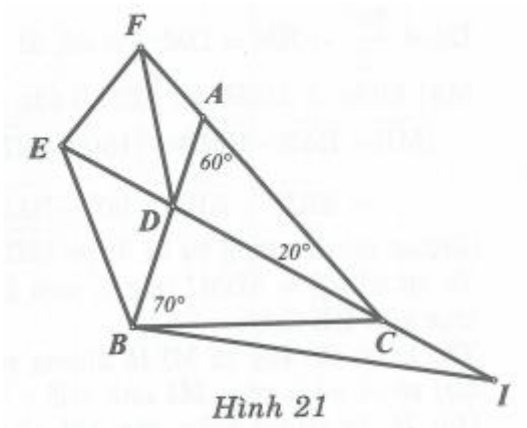
$$BEC = AEC - AEB = 70° - 60° = 10°.$$

$$EBC = ABC - ABE = 80° - 60° = 20°.$$

Ta có $\Delta ADC = \Delta BCE$ (g.c.g) nên $AD = BC$.■

Nhận xét: Ta có thể đưa ra bài toán ngược lại như sau: Cho tam giác ABC có $B = 80°$. Trên cạnh AB lấy điểm D. Biết rằng $BDC = 30°$. Chứng minh rằng $AB = AC$.

Bài 17.



Hình 21

Trên tia đối của tia DC lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm I, trên tia CA lấy điểm F sao cho:
$DE = DB,\ DI = CE,\ CE = CF$.

Ta tính được: $ACB = 50°,\ DCB = 30°,\ CDB = 80°$.

Lai có ΔCEF cân tại C có $C = 20°$ nên $CFE = CEF = 80°$.

Theo phần nhận xét bài 15, ta có ΔIDB với $IDB = 80°$, C là điểm trên cạnh ID thỏa mãn $DCB = 30°$ nên $IB = ID$. Hơn nữa ta có ΔBID cân tại I với $\hat{I} = 20°$.

Ta có $\Delta CEF = \Delta IDB$ (c.g.c) nên $EF = BD = ED$.

Do đó ΔEFD cân tại E. Ta tính được

$$EFD = EDF = 50°, ADF = 30°, AFD = 30°$$

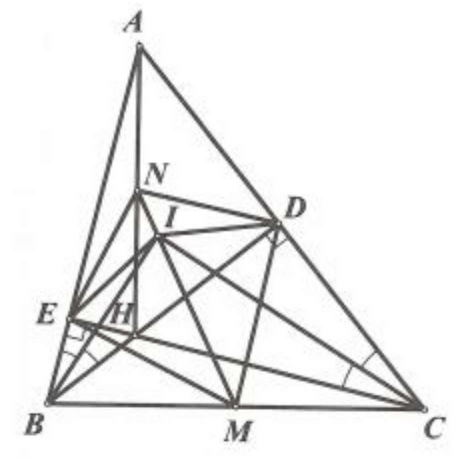
Ta có ΔAFD cân tại A nên $AF = AD$.

Cuối cùng, $AC + AD = AC + AF = CF = CE = CD + DE = CD + DB$.■

Bài 18.

Gọi H là giao điểm các đường cao BD và CE. Nối EM, EN, DM, DN.

Theo tính chất đường trung tuyến ứng với canh huyền của tam giác vuông, ta có $EM = DM = \frac{BC}{2}$.



Hình 22

Lại có $ABD = ACE = 90° - BAC$ nên

$$IBA = IBD = ICA = ICE$$

$$= \frac{1}{2} ABD = \frac{1}{2} ACE = 45° - \frac{1}{2} BAC.$$

Do vậy

$$IBC + ICB = \left(ABC - ABI\right) + \left(ACB - ACI\right) = \left(ABC + ACB\right) - \left(ABI + ACI\right)$$

$$= \left(180° - BAC\right) - 2\left(45° - \frac{1}{2} BAC\right) = 90°.$$

Từ đó ΔBIC vuông tại I.

Ta có IM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của ΔBIC nên $IM = \frac{BC}{2} = EM = DM$. Từ đó, M nằm trên đường trung trực của DE (1).

Mặt khác vì ΔIMB và ΔEMB cân tại M nên

$$IME = IMB - EMB = \left(180° - 2IBC\right) - \left(180° - 2EBC\right) = 2\left(EBC - IBC\right)$$

$$= 2EBI = ABD = 90° - BAC.$$

Chứng minh tương tự ta được $IMD = 90° - BAC$. Do vậy $IME = IMD$.

Ta có $\Delta EMI = \Delta DMI$ (c.g.c) nên $ID = IE$. Từ đó I nằm trên đường trung trực của DE (2).

Từ (1) và (2) suy ra MI là đường trung trực của DE.

Lại có N nằm trên MI nên $NE = ND$.

Gọi N' là trung điểm của AH, theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta cũng có $N'D = N'E$.

Do vậy N' cũng nằm trên đường trung trực của DE.

Từ đó N và N' trùng nhau suy ra N là trung điểm của AH hay $NA = NH$.

BÀI TOÁN 3.SỬ DỤNG QUAN HỆ GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN, QUAN HỆ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, QUAN HỆ ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU, BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện:

Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn. Cho tam giác ABC, ta có:

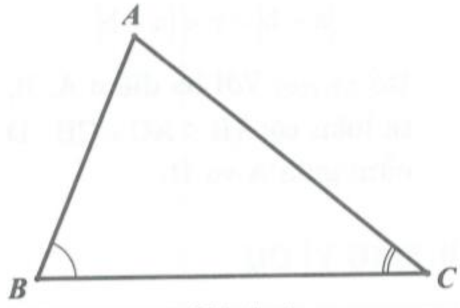
$B < C \Leftrightarrow AC < AB$

$B > C \Leftrightarrow AC > AB$

Chú ý:

* Nếu $B = C$ thì $AC = AB$ và ngược lại.

* Trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh có độ dài lớn nhất.



Hình 1

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu:

Xét tất cả các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng tới đường thẳng đó, ta có các kết luận sau:

* Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.

* Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

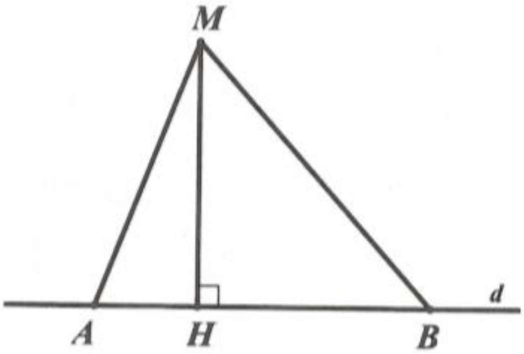
* Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hình chiếu bằng nhau. Ngược lại, nếu hai đường chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Cho một điểm M nằm ngoài đường thẳng d. Qua M kẻ đường vuông góc MH và các đường xiên MA, MB xuống đường thẳng d.

Khi đó ta có:

$MH < MA; MH < MB$

$MB \geq MA \Leftrightarrow HB \geq HA$



Hình 2

3. Bất đẳng thức tam giác

Trong một tam giác, độ dài một cạnh luôn lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại. Cho tam giác ABC, đặt $BC = a; CA = b; AB = c$

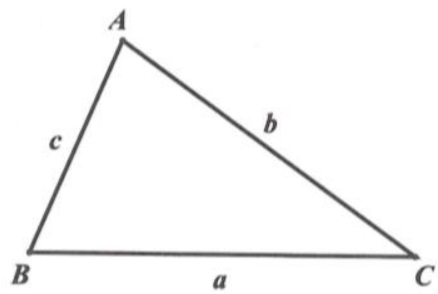
Khi đó

$|b - c| < a < |b + c|$

$|a - c| < b < |a + c|$

$|a - b| < c < |a + b|$

Bổ sung: Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có: $AB \leq AC + CB$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ A, B, C thẳng hàng và C nằm giữa A và B.



Hình 3

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC không cân, M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $AB + AC > 2AM$

b) Biết $AC > AB$, chứng minh $MAB > MAC$

c) Kẻ AH vuông góc với BC (H $\in$ BC). Tia phân giác góc A cắt BC ở D. Chứng minh $MH > MD$

Lời giải

Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA = ME$. Ta có ΔAMB = ΔEMC (c.g.c) nên suy ra $AB = CE, MAB = E$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ΔACE ta được $AC + CE > AE$

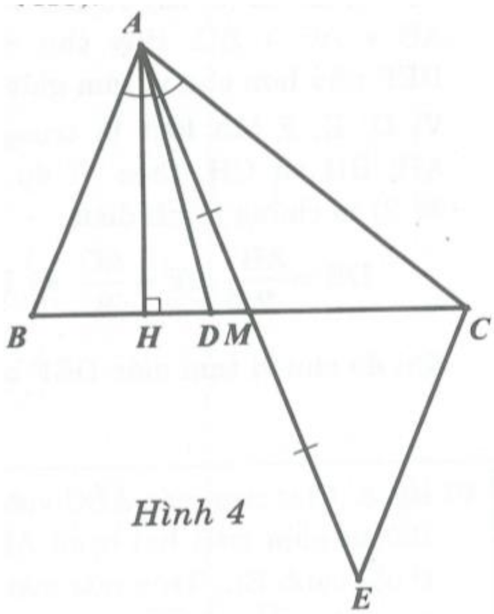
Mà $AB = CE, AE = 2AM$ nên $AB + AC > 2AM$

b) Xét ΔACE có $CE = AB < AC$ suy ra $EAC < E$ hay $MAC < E$

Mà $MAB = E$ nên ta có $MAB > MAC$

c) Không mất tính tổng quát giả sử $(AB < AC)$

(Trường hợp $AB > AC$, đổi vai trò của B và C rồi chứng minh tương tự).



Hình 4

Thấy rằng nếu H nằm ngoài đoạn thẳng BC. Khi ấy B nằm giữa H và C. Mà D và M nằm trên đoạn thẳng BC nên hiển nhiên $MH > MD$

Xét trường hợp H nằm trên đoạn thẳng BC.

Vì $AB < AC$ nên ta có $C < B$

Lại có $BAH = 90° - B; CAH = 90° - C$

Từ đó suy ra $BAH < CAH$

Theo chứng minh câu a, vì $AB < AC$ nên $BAM > CAM$

Do vậy $BAH < BAD < BAM$

Mặt khác H, D, M nằm trên đoạn thẳng BC nên $BH < BD < BM$ hay $MH > MD$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc đoạn thẳng BC). D là điểm nằm giữa A và H, E là điểm nằm giữa B và H, F là điểm nằm giữa C và H. Chứng minh rằng chu vi tam giác DEF nhỏ hơn chu vi tam giác ABC. Tìm một vị trí của các điểm D, E, F để chu vi tam giác DEF bằng $\frac{1}{2}$ chu vi tam giác ABC.

Lời giải

Nối CD. Vì F nằm giữa C và H nên $HF < HC$. Theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, vì $HF < HC$ nên $DF < DC$.

Lại có D nằm giữa A và H nên $HD < HA$. Áp dụng quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, ta được $CD < CA$

Từ đó $DF < DC < CA(1)$

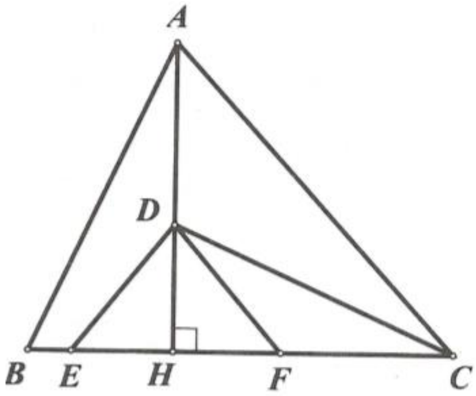
Chứng minh tương tự, ta được $DE < DB < AB(2)$

Ta có $EF = HE + HF < HB + HC = BC(3)$

Từ(1) (2) và (3) suy ra $DE + EF + FC < AB + AC + BC$. Hay chu vi tam giác DEF nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Vì D, E, F lần lượt là trung điểm của AH, BH và CH, theo Ví dụ 2 (Chuyên đề 2) ta chứng minh được

$DE = \frac{AB}{2}; \mathrm{DF} = \frac{AC}{2}; EF = \frac{BC}{2}$



Hình 5

Khi đó chu vi tam giác DEF bằng $\frac{1}{2}$ chu vi tam giác ABC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi D và E là hai điểm theo thứ tự nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $AD = AE$. Gọi K là điểm thuộc cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ điểm I sao cho $EAI = DAK$ và $AI = AK$. Chứng minh rằng $KE + KD \geq AB$

Lời giải

Ta có $AD = AE; AK = AI, EAI = DAK$ nên ΔADK = ΔAEI (c.g.c).

Từ đó suy ra $DK = EI$

Ta có $KE + KD = KE + KI \geq KI\ (1)$

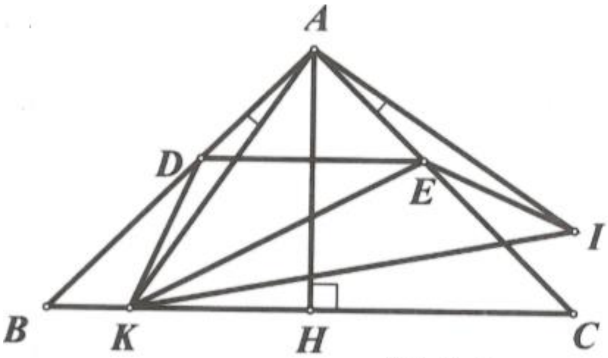
Lại có $EAI = DAK$ nên $KAI = BAC = 90°$

Như vậy ΔKAI vuông cân tại A.

Theo định lý Pythagore ta được

$KI^2 = AK^2 + AI^2 = 2AK^2$

Từ đó suy ra $KI = \sqrt{2}.AK \geq \sqrt{2}.AH\ (2)$



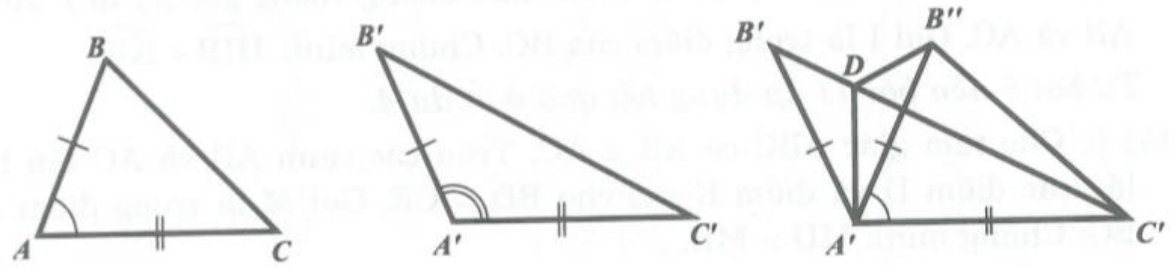
Hình 6

Lại có ΔAHB vuông cân tại H nên $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$, suy ra $AB = \sqrt{2}AH\ (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $KE + KD \geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi K trùng với H.

Ví dụ 4. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB = A'B'; AC = A'C'$. Chứng minh $A < A' \Leftrightarrow BC < B'C'$.

Lời giải



Hình 7

Giả sử tam giác ABC và tam giác A'B'C' có $AB = A'B'; AC = A'C'; A < A'$. Dựng tam giác A'B”C' bằng tam giác ABC (hình vẽ). Tia phân giác của góc B'A'B" cắt B'C' ở D. Ta có ΔB'A'D = ΔB”A'D (c.g.c) nên $DB' = DB''$. Trong tam giác DB"C' ta có $DB'' + DC' > B''C' \Rightarrow B'C' > B''C' = BC$.

Ngược lại, nếu tam giác ABC và tam giác A'B'C' có: $AB = A'B'; AC = A'C'; BC < B'C'$.

Ta sẽ chứng minh $A < A'$. Thật vậy:

* Nếu $A = A'$ thì ΔABC = ΔA'B'C' $\Rightarrow BC = B'C'$ (loại)

* Nếu $A > A'$, áp dụng phần thuận ta suy ra $BC > B'C'$ (loại)

Vậy $A < A'$.

Chú ý: Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện chỉ đúng trong một tam giác hoặc hai tam giác bằng nhau, còn đối với hai tam giác không bằng nhau thì không áp dụng được. Tuy vậy, qua ví dụ trên ta thấy với hai tam giác có thêm điều kiện hai cặp cạnh bằng nhau, ta có một kết quả đáng chú ý trong việc chứng bất đẳng thức hình học.

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC đều. Gọi M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, tia DM cắt AC tại E. Chứng minh rằng $MD < ME$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$. Chứng minh rằng $BAD = EAC < DAE$.

Bài 3*. Cho tam giác ABC nhọn, $B > C$. Kẻ hai đường cao BD và CE. Chứng minh rằng: $AC - AB > CE - BD$

Bài 4*. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $PBA = PCA$. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ P xuống AB và AC. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $HIB < KIC$.

Từ bài 5 đến bài 11 áp dụng kết quả ở ví dụ 4.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và điểm E sao cho

$BD = CE$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $MD > ME$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Trên đoạn thẳng AM lấy điểm O bất kỳ $(O \neq M)$. Chứng minh rằng $OB < OC$.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $BE = CF$. EF cắt BC tại điểm D. Chứng minh $BD > DC$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB < MC$. Trên đoạn thẳng AM lấy điểm O. Chứng minh rằng $BOA > COA$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB < AC; A \neq 90°$. Vẽ về phía ngoài tam giác này các tam giác vuông cân ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $MD < ME$.

Bài 10. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của đoạn thẳng AC. Biết $AB > BC$, chứng minh $CD > DA$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác. Chứng minh $BD < CE$.

Bài 12. Cho tam giác ABC thỏa mãn có $AB > AC$, tia phân giác góc A cắt BC ở D. Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AD (M khác A). Chứng minh rằng $AB - AC > MB - MC$.

Bài 13. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng:

$a) MB + MC < AB + AC$

$b) MA + MB + MC$ lớn hơn nửa chu vi và nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Bài 14. Chứng minh rằng tổng độ dài ba đường trung tuyến lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi tam giác đó.

Bài 15. Cho tam giác ABC có $B > 90°; AB = \frac{1}{2}AC$. Chứng minh rằng $C > \frac{A}{2}$.

Bài 16. Cho tam giác ABC có $C = 90°$, đường cao CH. Chứng minh rằng $AC + BC < AB + CH$.

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại B, đường phân giác AD. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AD tại E. Chứng minh chu vi tam giác ECD lớn hơn chu vi tam giác ABD.

Bài 18. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên các cạnh AC và AB lấy tương ứng các điểm M và N sao cho $AM = AN$. Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng $OB > OC$.

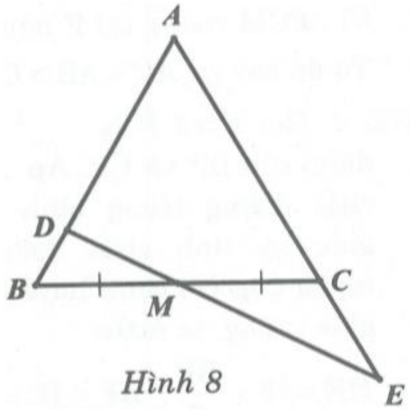
Bài 19. Cho tam giác ABC có $BAC \geq 60°$. Chứng minh rằng $AB + AC \leq 2BC$

Bài 20. Cho tam giác ABC nhọn, gọi H là trực tâm của tam giác đó. Chứng minh

$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



Hình 8

Vì tam giác ABC đều nên $B = ACB = A = 60°$

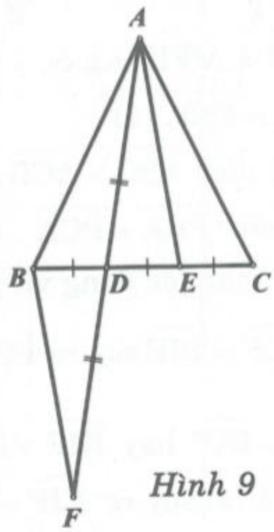
Theo tính chất góc ngoài $BDM = A + E > 60°$

Áp dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác BDM ta được $DM < BM = CM \ (1)$

Tam giác MCE có $MCE = 120°$ và là góc lớn nhất của tam giác MCE nên $MC < ME \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MD < ME$.

Bài 2.



Hình 9

Ta có ΔABD = ΔACE (c.g.c) nên $BAD = CAE \ (1)$

Trên tia đối của tia DA lấy điểm F sao cho $DA = DF$.

Vì ΔAED = ΔFBD (c.g.c) nên $DAE = F$; AE = BF .

Vì $AEC > ABC = ACB$ nên trong tam giác AEC ta có $AE < AC$

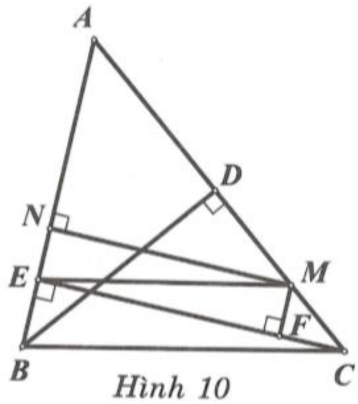
Từ đó suy ra $BF < AB$ (vì $AE = BF; AB = AC$)

Trong tam giác ABF có $BF < AB$ nên $BAD < F$

Mà $DAE = F$ nên $BAD < DAE \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BAD = EAC < DAE$.

Bài 3.



Hình 10

Trong ΔABC, vì $ABC > ACB$ nên $AC > AB$.

Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$.

Gọi N và F lần lượt là hình chiếu của M trên AB và CE.

Ta có ΔABD = ΔAMN (cạnh huyền - góc nhọn) nên $MN = BD$.

Mặt khác vì ΔMNE = ΔEFM (cạnh huyền- góc nhọn) nên MN = EF.

Do vậy $MN = BD = EF$.

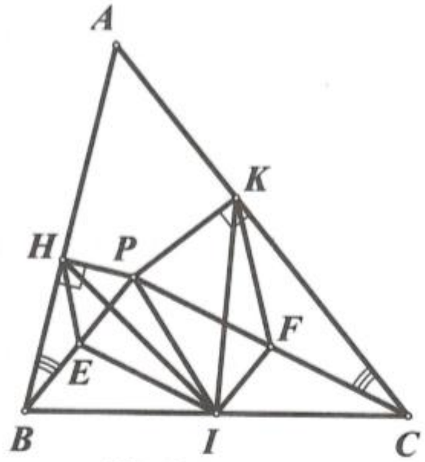
Vì ΔFCM vuông tại F nên $CM > CF$ hay $AC - AM > CE - EF$.

Từ đó suy ra $AC - AB > CE - BD$.

Bài 4.

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BP và CP. Áp dụng tính chất đường trung bình của tam giác và tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta được:

$$HE = IF = \frac{BP}{2}; KF = IE = \frac{CP}{2}; HEI = IFK$$



Hình 11

Từ đó ΔHEI = ΔIFK (c.g.c), suy ra $EIH = FKI\,(1)$

Vì $AB < AC$ nên $ABC > ACB$

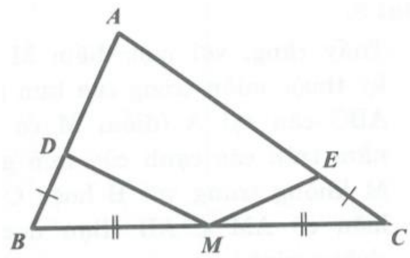
Kết hợp với $PBA = PCA$ suy ra $PBC > PCB$, mà $PBC = CIF$ và $PCB = BIE$ (hai góc đồng vị) nên $CIF > BIE\,(2)$

Từ $CIF > ICF = BIE$ suy ra $FC > FI$. Mà $FC = FK\left(=\frac{PC}{2}\right)$ nên $IF < FK$

Từ đó $KIF > IKF$ hay $KIF > EIH\,(3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $KIF + CIF > BIE + EIH$ hay $HIB < KIC$

Bài 5.



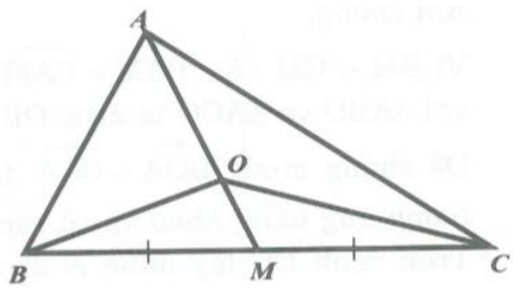
Hình 12

Xét tam giác ABC. Vì $AC > AB$ nên $ABC > ACB$ hay $DBM > ECM$

Với hai tam giác BDM và CEM có $CE = BD; CM = BM$

Vì $DBM > ECM$ nên theo kết quả ở ví dụ 4 ta có $MD > ME$.

Bài 6.



Hình 13

Xét hai tam giác AMB và AMC có $MB = MC$; MA chung, mà $AB < AC$ nên theo kết quả ở ví dụ 4, ta có $AMB < AMC$ hay $OMB < OMC$

Bây giờ ta xét hai tam giác OMB và OMC có $MB = MC$, OM chung, $OMB < OMC$. Theo kết quả ở ví dụ 4 ta được $OB < OC$

Bài 7.

Trước hết ta sẽ chứng minh D là trung điểm của EF. Thật vậy, Kẻ EH và FK vuông góc với đường thẳng BC (H, K $\in$ BC).

Ta có ΔBEH = ΔCFK (cạnh huyền- góc nhọn) nên $EH = FK$

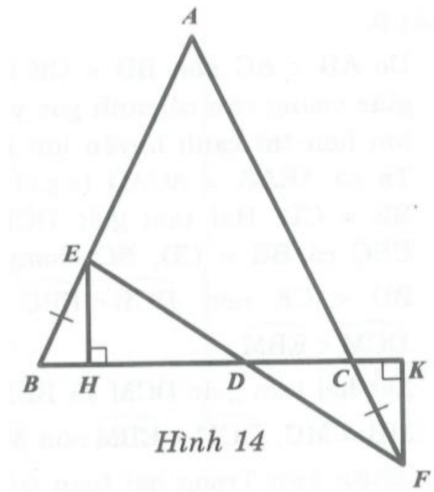
Xét hai tam giác EHD và FKD có

$EHD = FKD = 90°; EH = FK; DEH = DFK$ (hai góc so le trong)

Suy ra: ΔDEH = ΔDFK (g.c.g) $\Rightarrow DE = DF$

Cuối cùng với hai tam giác BED và FCD ta thấy $DE = DF; BE = CF$ mà

$BED > CFD$ (góc BED là góc ngoài của tam giác AFE) nên $BD > CD$ (theo kết quả ở ví dụ 4).



Hình 14

Bài 8.

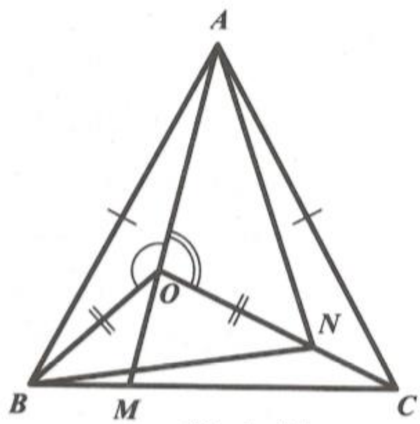
Thấy rằng, với một điểm M bất kỳ thuộc miền trong của tam giác ABC cân tại A (điểm M có thể nằm trên các cạnh của tam giác, M không trùng với B hoặc C) ta luôn có $AM < AB$ (Bạn đọc tự chứng minh).

Quay lại bài toán.

Xét ΔBAM và ΔCAM có $AB = AC$, AM chung.

Vì $BM < CM$ nên $BAM < CAM$. Áp dụng kết quả ở ví dụ 4 một lần nữa với ΔABO và ΔACO ta được $OB < OC$

Để chứng minh $BOA > COA$ ta sẽ dựng hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau và có các góc xen giữa là BOA và COA như sau: Trên cạnh OC lấy điểm N sao cho $OB = ON$. Rõ ràng N nằm ở miền trong tam giác cân ABC nên $AN < AB$. Hai tam giác AOB và AON có $OB = ON$, OA chung, $AB < AN$ nên $BOA > COA$.



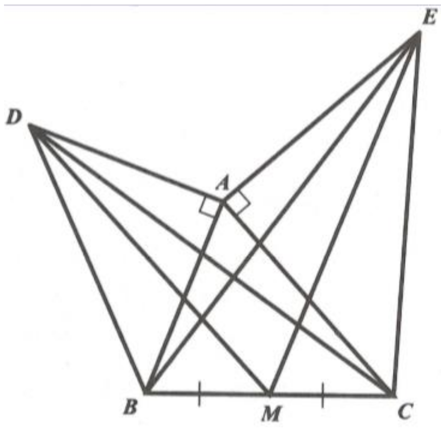
Hình 15

Bài 9. Do $AB < AC$ nên $BD < CE$ (Tam giác vuông cân có cạnh góc vuông lớn hơn thì cạnh huyền lớn hơn). Ta có ΔEAB = ΔCAD (c.g.c) nên $BE = CD$. Hai tam giác DCB và EBC có $BE = CD$, BC chung. Vì

$BD < CE$ nên $DCB < EBC$ hay $DCM < EBM$.

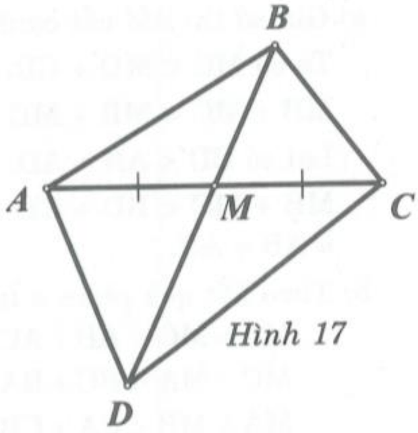
Xét hai tam giác DCM và BEM có $BE = CD; MB = MC, DCM < EBM$ nên $MD < ME$.

Nhận xét: Trong bài toán trên, ta vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A. Nếu vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều thì sao? Chúng ta có bài toán tương tự như sau: Cho tam giác ABC có $AB < AC, A \neq 120°$. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $MD < ME$.



Hình 16

Bài 10.



Hình 17

Gọi M là trung điểm của AC.

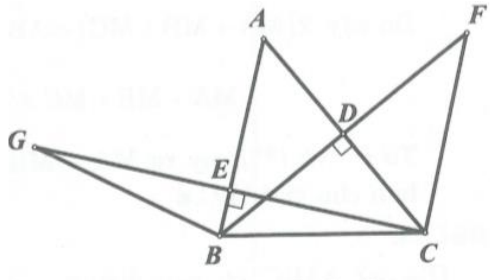
Ta có $AB > BC$, theo kết quả của ví dụ 1 áp dụng vào tam giác ABC, đường trung tuyến BM ta được $ABM < CBM\ (1)$

Cũng từ $AB > BC$ nên $BAM < BCM\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $ABM + BAM < CBM + BCM$ hay $AMD < CMD$. Hai tam giác AMD và CMD có $MA = MC$; cạnh chung MD; $AMD < CMD$ nên theo kết quả ở ví dụ 4, ta được $AD < CD$.

Bài 11.

Vì $AB < AC$ nên ta có $ABC > ACB\ hay\ EBC > DCB$



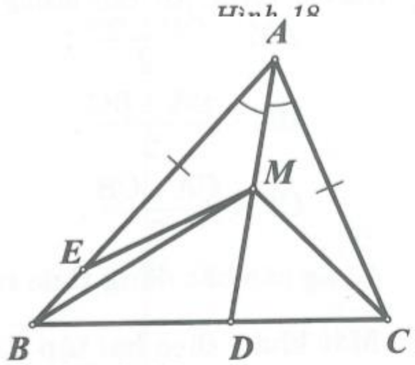
Trên tia đối của tia DB lấy điểm F sao cho $DF = DB$; trên tia đối của tia EC lấy điểm G sao cho $EG = EC$. Ta có ΔEGB = ΔECB (c.g.c) và ΔDFC = ΔDBC (c.g.c) nên $GB = BC = CF$.

Mặt khác $GBC = 2EBC > 2DCB = FCB$.

Áp dụng kết quả ở ví dụ 4 với hai tam giác GBC và FCB ta suy ra $BF < CG$. Từ đó $BD < CE$.

Nhận xét: Từ kết quả của bài toán ta có: Trong một tam giác đường cao ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn.

Bài 12.



Hình 19

Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Ta có ΔAME = ΔAMC (c.g.c) nên $ME = MC$.

Ta có $AB - AC = AB - AE = BE > MB - ME$ (Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ΔEMB).

Từ đó $AB - AC > MB - MC$.

Bài 13.

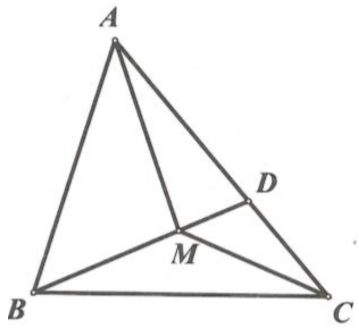
a) Giả sử tia BM cắt cạnh AC tại D.

Ta có $MC < MD + CD$ từ đó $MB + MC < MB + MD + CD = BD + CD$.

Lại có $BD < AB + AD$. Từ đó

$MB + MC < BD + CD < AB + AD + CD = AB + AC$

b) Theo kết quả phần a ta có:



Hình 20

$MB+MC<AB+AC(1)$

$MC+MA<BC+BA(2)$

$MA+MB<CA+CB(3)$

Cộng (1), (2) và (3) ta được $2(MA+MB+MC)<2(AB+BC+CA)$. Từ đó ta có

$MA+MB+MC<AB+BC+CA(*)$

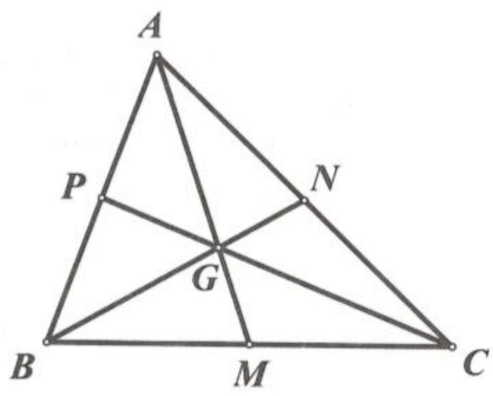
Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức tam giác vào các tam giác MAB, MAC, MBC ta được $MA+MB>AB; MB+MC>BC; MC+MA>CA$

Do vậy $2(MA+MB+MC)<AB+BC+CA$ hay $MA+MB+MC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)(**)$

Từ (*) và (**) suy ra $MA+MB+MC$ lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi ΔABC.

Bài 14.

Giả sử ΔABC có các đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại trọng tâm G. Theo ví dụ 1, ta có



Hình 21

$AM<\frac{AB+AC}{2}$

$BN<\frac{BA+BC}{2}$

$CP<\frac{CA+CB}{2}$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$AM+BN+CP<AB+BC+CA(1)$

Mặt khác, theo bài tập 13 ta có $GA+GB+GC>\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$

hay $\frac{2}{3}(AM+BN+CP)>\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$.

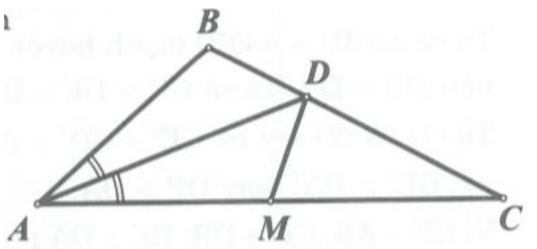
Từ đó $AM+BN+CP>\frac{3}{4}(AB+AC+BC)(2)$

Từ (1) và (2) suy ra tổng độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác đó.

Bài 15.

Gọi M là trung điểm của AC, phân giác góc A cắt cạnh BC tại D.

Ta có ΔABD = ΔAMD (c.g.c) nên $ABD = AMD$.



Hình 22

Lại có $ABD > 90°$ nên $AMD > 90°$.

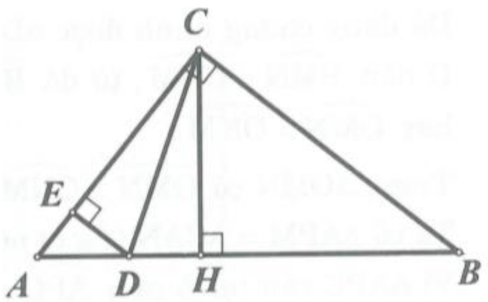
Từ đó $AMD > CMD$

Hai tam giác AMD và CMD có MD là cạnh chung;
$MA = MC; AMD > CMD$ nên $AD > DC$.

Xét trong ΔADC có $AD > DC$ nên $C > DAC$ *hay* $C > \frac{BAC}{2}$.

Bài 16.

Vì ΔABC vuông tại C và ΔCBH vuông tại H nên $AB > CB > BH$. Tồn tại điểm D thuộc đoạn thẳng AH sao cho $BC = BD$. Gọi E là hình chiếu của D trên AC.



Hình 23

Mặt khác vì ΔCBD cân tại B nên $BCD = BDC$.

Lại có $BCD + ECD = 90°; BDC + HCD = 90°$ .Từ đó
$ECD = HCD$

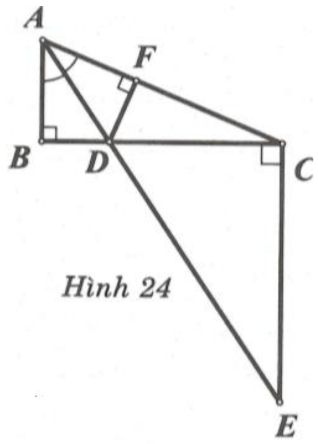
Vì ΔCED = ΔCHD (cạnh huyền-góc nhọn) nên
$CE = CH; DE = DH$.

Ta có $AB + CH = BD + DA + CH > AE + BC + CE = CA + CB$.

Nhận xét: Từ kết quả của bài toán ta có: Trong một tam giác vuông, tổng hai cạnh góc vuông nhỏ hơn tổng của cạnh huyền và đường cao ứng với cạnh huyền ấy.

Bài 17.

Ta có AB // CE (vì cùng vuông góc với BC) nên $ABD = E$ (hai góc so le trong).



Hình 24

Mặt khác do AD là phân giác của góc BAC nên suy ra $E = CAD$

Từ đó ΔCAE cân tại C.

Ta có $CE = CA > AB$ nên $CE^2 > AB^2 (1)$.

Gọi F là hình chiếu của D trên AC.

Ta có ΔABD = ΔAFD (cạnh huyền - góc nhọn) nên $DB = DF$. Ta có
$CD > DF = DB$ nên $CD^2 > BD^2 (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $CE^2 + CD^2 > AB^2 + DB^2 \Rightarrow DE^2 > DA^2$ *hay* $DE > DA$.

Vì $CE > AB; CD > DB; DE > DA$ nên chu vi ΔECD lớn hơn chu vi ΔABD.

Bài 18.

Vì $AB > AC$ nên có điểm P trên cạnh AB sao cho $AP = AC$. Gọi D là giao điểm của CN và PM. Vì $AN = AM < AC = AP$ nên P nằm giữa N và B.

Từ đó $BMN > PMN$

Dễ dàng chứng minh được ΔDMN cân tại D nên $PMN = CNM$;

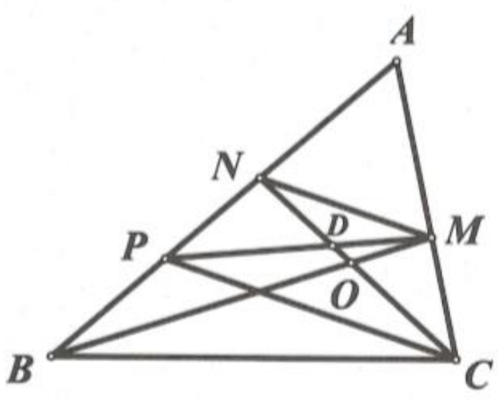
từ đó $BMN > CNM$ hay $OMN > ONM$.

Trong ΔOMN có $OMN > ONM$ nên $ON > OM\ (1)$.

Ta có ΔAPM = ΔCAN (c.g.c) nên $PM = CN$.

Vì ΔAPC cân tại A nên $APC < 90°$

Từ đó $APM < 90°$ hay $BPM > 90°$.



Hình 25

Trong ΔPBM có $BPM > 90°$ là góc lớn nhất nên $BM > PM = CN\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BM - OM > CN - ON$ hay $OB > OC$.

Bài 19.

Ta xét hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: ΔABC có $A = 60°$.

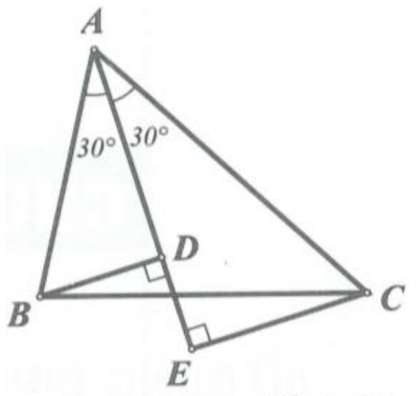
Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B và C lên phân giác góc A của ΔABC.

Các tam giác vuông ABD và AEC lần lượt có các góc nhọn

$BAD = 30°; CAE = 30°$ nên $BD = \frac{1}{2}AB; CE = \frac{1}{2}AC$.

Từ đó $AB + AC = 2(BD + CE) \le 2BC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.



Hình 26a

+ Trường hợp 2: ΔABC có $A = 60°$.

Trên cạnh BC lấy điểm B' sao cho $CAB' = 60°$.

Theo kết quả ở trường hợp 1 ta có $AB' + AC \le 2B'C\ (1)$

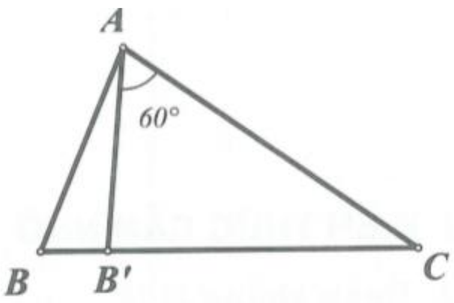
Trong ΔABB' ta có $AB - AB' < BB' < 2\text{BB}'(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC < 2BC$.

Trường hợp này không xảy ra dấu "=".

Tóm lại, ta luôn có $AB + AC \le 2BC$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.



Hình 26b

Bài 20.

Qua H kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB lần lượt tại D và E.

Ta có ΔADH = ΔHEA (g.c.g) nên $AE = DH; AD = EH$.

Xét ΔAHD có $AH < AD + DH$, suy ra $AH < AD + AE\,(1)$

Lại có $EH // AC$ mà $AC \perp BH$ nên $EH \perp BH$.

Từ đó ΔEBH vuông tại H, suy ra $BH < BE\,(2)$. Chứng minh tương tự ta được $CH < CD\,(3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AH + BH + CH < AB + AC\,(4)$

Chứng minh tương tự ta được:

$$AH + BH + CH < AB + BC\,(5)$$
$$AH + BH + CH < AC + BC\,(6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

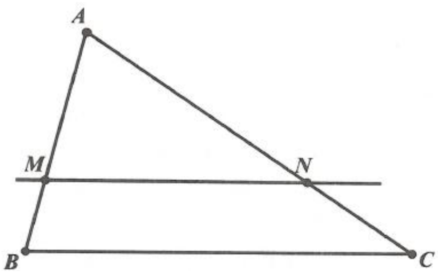
BÀI TOÁN 4. SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ THALES (TA-LÉT) VÀ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$

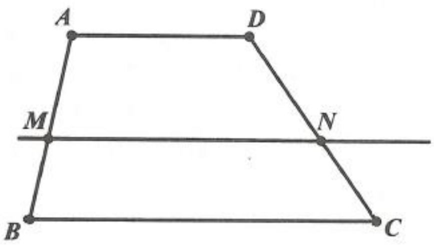
2. Định lý Thales trong tam giác



Nếu $MN // BC$ thì:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}; \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

*** Mở rộng định lý Thales:**

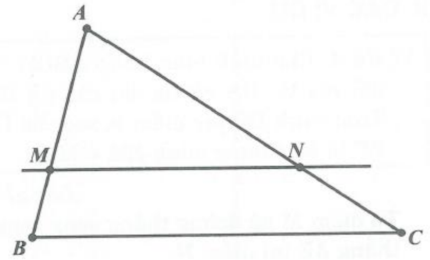


Cho $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$) nếu $MN // AB$ thì:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC}; \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}.$$

3. Định lý Thales đảo

Nếu M, N là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$ thì $MN//BC$.



4. Hệ quả định lý Thales

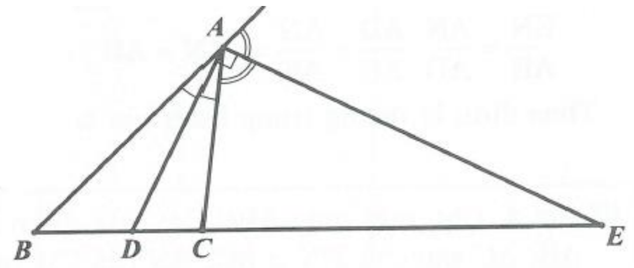
Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với một cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của một tam giác đã cho.

(Chú ý: Hệ quả này vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng đã cho cắt phần kéo dài của hai cạnh kia).

5. Tính chất đường phân giác của tam giác

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

Chú ý: Tính chất vẫn đúng với tia phân giác góc ngoài của tam giác. Cho ΔABC, AD và AE lần lượt là các đường phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác.



Khi đó: $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Bổ sung: Một số tính chất của tỉ lệ thức

Với a,b,c,d khác 0. Nếu $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ thì ta có các hệ thức sau:

$ad=bc$

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

$\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$, $\dfrac{a}{a\pm b}=\dfrac{c}{c\pm d}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\pm c}{b\pm d}$

(Giả sử các tỉ số đều có nghĩa)

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ điểm C kẻ đường thẳng cắt tia đối của tia DA và tia đối của tia BA lần lượt tại điểm E và điểm F. Trên cạnh DC lấy điểm K sao cho $DK=BF$. Gọi giao điểm của AK và EF là M. Chứng minh $EM=MF$.

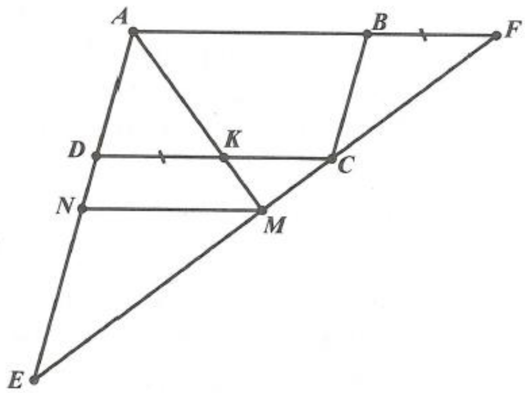
Lời giải

Từ điểm M kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AF và cắt đường thẳng AE tại điểm N.

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{EN}{AE}=\frac{NM}{AF}=\frac{NM}{DK}.\frac{DK}{AF}$ (1)

mà $\frac{NM}{DK}=\frac{AN}{AD}$ (2) do $DK//MN$

và $\frac{DK}{AF}=\frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AE}=\frac{AD}{AE}$ (3)



Từ (1), (2) và (3) ta có:

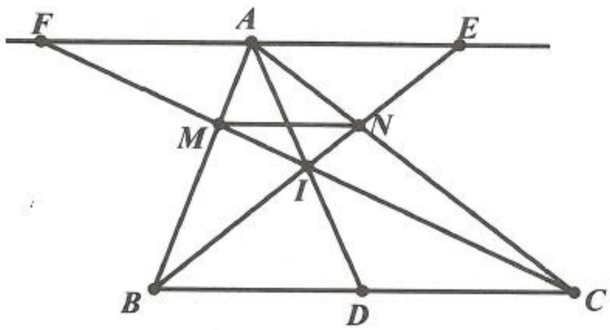
$\frac{EN}{AE}=\frac{AN}{AD}.\frac{AD}{AE}=\frac{AN}{AE}\Rightarrow EN=AN$.

Theo định lý đường trung bình của tam giác thì $EM=MF$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, lấy các điểm M,N lần lượt trên hai cạnh AB,AC sao cho $MN//BC$, BN cắt CM tại điểm I , AI cắt BC tại điểm D. Chứng minh $BD=DC$.

Lời giải

Từ điểm A, kẻ đường thẳng d song song với BC cắt tia BI và tia CI lần lượt tại điểm E và điểm F (hình vẽ).



Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{AF}{BC}=\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{AE}{BC}\Rightarrow AF=AE$ (1)

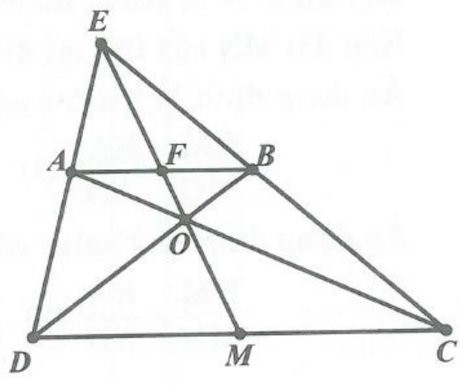
Vì $EF//BC$, theo định lý Thales ta có: $\frac{AF}{DC}=\frac{AI}{ID}=\frac{AE}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD=DC$.

Ví dụ 3. (Bổ đề hình thang) Cho hình thang $ABCD$ $\left(AB//CD\right)$. Hai cạnh bên AD và BC cắt nhau ở điểm E . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm O . Gọi F là giao điểm của AB và EO . Chứng minh $AF=BF$.

Lời giải

Kéo dài tia EO cắt cạnh DC tại điểm M .



Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có: $\frac{AF}{DM}=\frac{BF}{CM}\left(=\frac{EF}{EM}\right)$ (1)

$\frac{AF}{CM}=\frac{BF}{DM}\left(=\frac{FO}{OM}\right)$ (2)

Nhân vế với vế của đẳng thức (1) và (2) ta được:

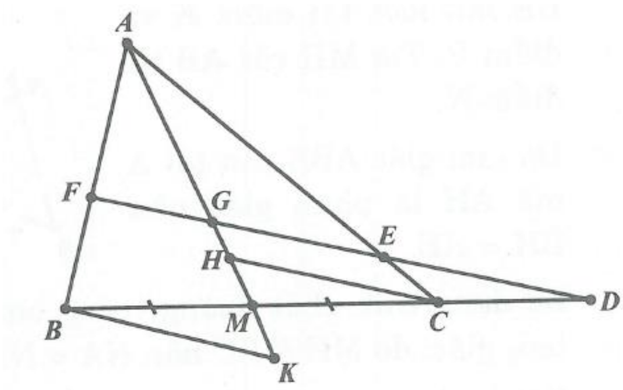
$\frac{AF^2}{DM.CM}=\frac{BF^2}{DM.CM}\Rightarrow AF=BF$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G, từ G kẻ đường thẳng cắt tia đối tia CB tại điểm D và cắt hai cạnh AC, AB lần lượt tại điểm E và điểm F. Chứng minh $\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}=\frac{1}{GF}$.

Lời giải

Kẻ trung tuyến AM đi qua G. Từ điểm B, điểm C kẻ các đường thẳng song song với DF cắt tia AM lần lượt tại điểm K và điểm H.

Do $\Delta BMK=\Delta CMH$ (g.c.g) nên $BK=HC$ và $HM=MK$.



Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác và định lý Thales ta có:

$$\frac{GA}{GD}=2.\frac{GM}{GD}=2.\frac{HM}{HC}=\frac{HK}{BK}\ (1)$$

Do $GE//HC$ nên $\frac{GA}{GE}=\frac{AH}{HC}=\frac{AH}{BK}$ (2)

Do $GF//BK$ nên $\frac{GA}{GF}=\frac{AK}{BK}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{GA}{GF}=\frac{GA}{GD}+\frac{GA}{GE}\Rightarrow\frac{1}{GF}=\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}$.

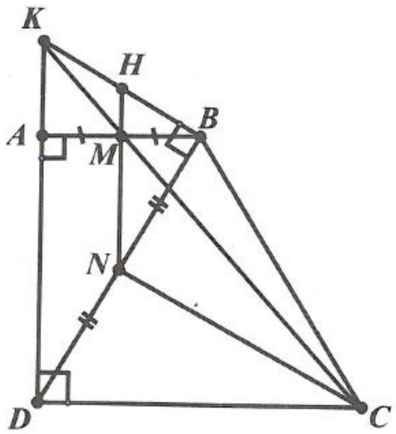
Ví dụ 5. Cho hình thang vuông $ABCD$ $(AB//CD)$ và $A=90^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB, tia CM cắt AD tại K sao cho $DBK=90^\circ$. Chứng minh $CB=CD$.

Lời giải

Lấy điểm N là trung điểm của đoạn BD.

Kéo dài MN cắt BK tại điểm H.

Áp dụng định lý Thales với $AB//CD$



$$\frac{KM}{MC}=\frac{KA}{AD}\ (1)$$

Áp dụng định lý Thales với $HN//KD$

$$\frac{HM}{MN}=\frac{KA}{AD}\ (2)\ \left(=\frac{BM}{BA}\right)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KM}{MC}=\frac{HM}{MN}\Rightarrow KH//CN$ (định lý Thales đảo).

Do đó $CN\perp BD\Rightarrow\Delta CBD$ cân tại $C\Rightarrow CB=CD$.

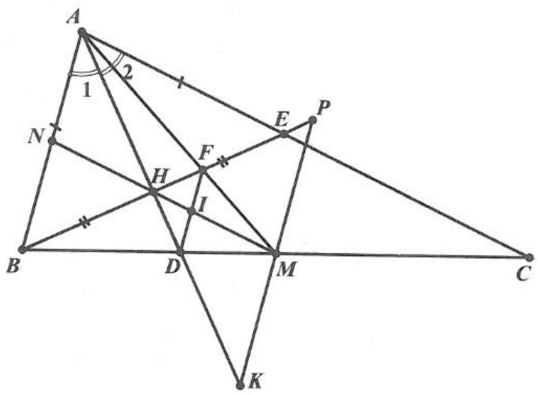
Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $AB<AC$, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE=AB$. Đường thẳng BE cắt AD và AM lần lượt tại điểm H và điểm F, đường thẳng HM cắt DF tại điểm I. Chứng minh $DI=IF$.

Lời giải

Từ điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD, BE lần lượt tại điểm K và điểm P. Tia MH cắt AB tại điểm N.

Do tam giác ABE cân tại A mà AH là phân giác nên $BH = HE$

Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác: do $MH // EC$ nên $NA = NB$.



Xét hình thang $ABKP$ ($AB // KP$).

Ta thấy $NA = NB$ nên $MK = MP$ (theo bổ đề hình thang).

Do $PK // AB$, sử dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

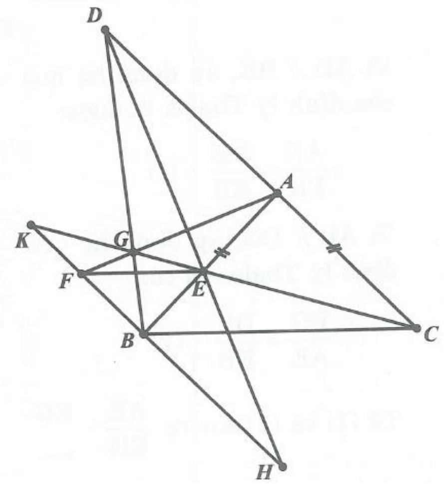
$$\frac{MD}{DB} = \frac{MK}{AB} \text{ và } \frac{MP}{AB} = \frac{MF}{FA} \text{ mà } MK = MP \Rightarrow \frac{MD}{DB} = \frac{MF}{FA}.$$

Áp dụng định lý Thales đảo suy ra $AB // DF$.

Xét hình thang $ABDF$ ($AB // DF$) ta có N là trung điểm của AB nên I là trung điểm của DF. Vậy $DI = IF$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm E. Tia CE cắt đường thẳng vuông góc với AB tại B ở K. Từ E kẻ đường thẳng song song với BC cắt BK tại điểm F. Đường thẳng AF cắt đường thẳng CK tại điểm G, đường thẳng BG cắt AC tại điểm D. Gọi DE cắt BK tại điểm H. Chứng minh $AC = BH$.

Lời giải



Vì $BK // AC$, theo hệ quả định lý Thales ta có: $\frac{AD}{AC} = \frac{FK}{FB}$.

Vì $DC // KH$, theo hệ quả định lý Thales ta có: $\frac{AD}{AC} = \frac{KB}{BH}$.

Từ đó suy ra $\frac{FK}{FB} = \frac{KB}{BH}$. (1)

Do $EF // BC$ nên ta có $\frac{KF}{FB} = \frac{KE}{EC} = \frac{KB}{AC}$ (2)

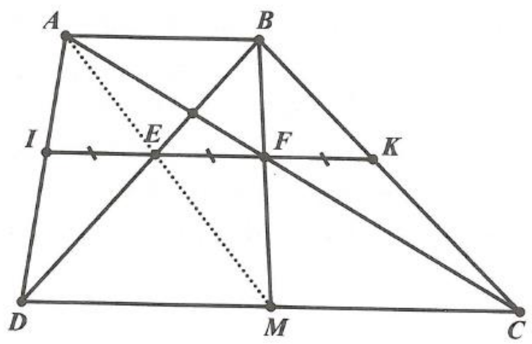
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KB}{BH} = \frac{KB}{AC} \Rightarrow AC = BH$.

Ví dụ 8. Cho hình thang $ABCD$ $(AB // CD)$. Kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AB cắt các cạnh AD, BD, AC, BC lần lượt tại các điểm I, E, F, K sao cho $IE = EF = FK$. Giả sử đường thẳng BF cắt đáy DC tại điểm M. Chứng minh rằng $DM = MC$ và ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Lời giải

Áp dụng hệ quả định lý Thales khi $EK//DC$:

$$\frac{EF}{DM}=\frac{FK}{MC}\left(=\frac{BF}{BM}\right)$$



Do $EF=FK$ nên $DM=MC$ hay M là trung điểm của DC.

Giả sử AE cắt DC tại M' tương tự ta chứng minh được M' là trung điểm của DC.

Suy ra $M\equiv M'$.

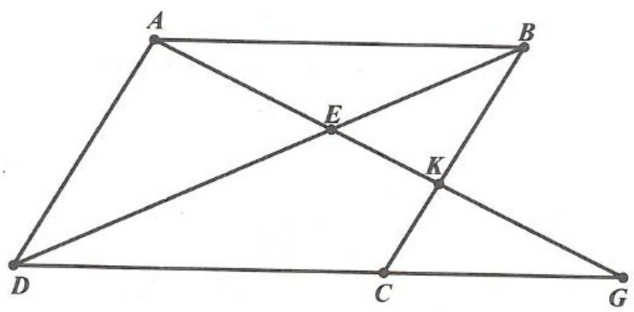
Vậy, ba điểm A,E,M thẳng hàng.

Ví dụ 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K là điểm thuộc cạnh BC. Đường thẳng AK cắt đường chéo BD, cắt đường thẳng DC tại G. Chứng minh $AE^2=EK.EG$

Lời giải

Vì $AD//BK$, áp dụng hệ quả của định lý Thales ta được:

$$\frac{AE}{EK}=\frac{DE}{EB}\ (1)$$



Vì $AB//DG$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

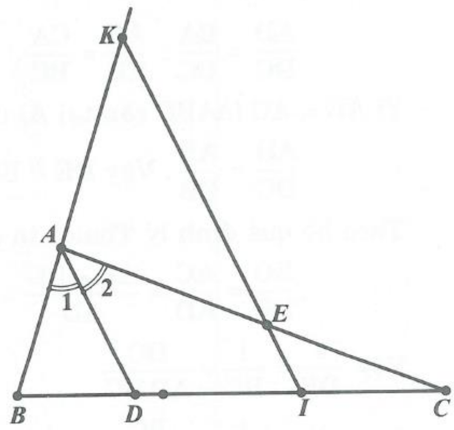
$$\frac{EG}{AE}=\frac{DE}{EB}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AE}{EK}=\frac{EG}{AE}\Rightarrow AE^2=EK.EG$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có $AB<AC$, đường phân giác AD. Lấy điểm I thuộc cạnh BC sao cho $BI=2IC$. Từ điểm I kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB,AC lần lượt tại điểm K và điểm E. Chứng minh $BK=2CE$.

Lời giải

Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ta có: $\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BD}$ (1)



Vì $EI//AD$, áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{AC}{CD}=\frac{CE}{CI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{BD}=\frac{CE}{CI}$ (3)

Vì $AD//KI$, theo định lý Thales ta có: $\frac{AB}{BD}=\frac{BK}{BI}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{CE}{CI}=\frac{BK}{BI}$ mà $BI=2IC$ nên $BK=2CE$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm D. Chứng minh $\frac{AB}{AC} = \frac{DN}{DM}$.

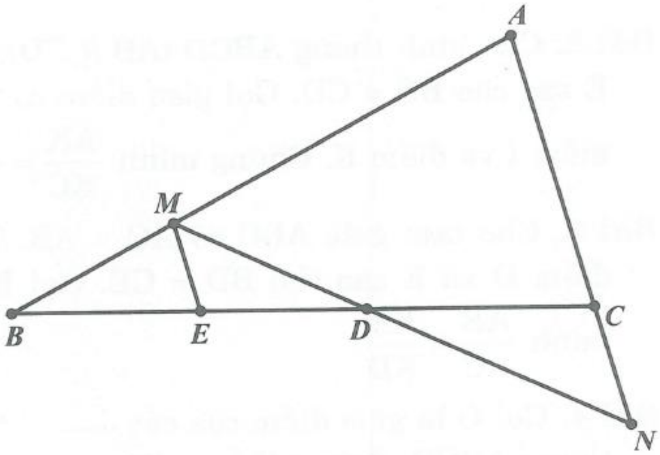
Lời giải

Vì $ME//AC$, áp dụng hệ quả định lý Thales, ta có:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{ME}$ (1)

Do $ME//CN$, áp dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

$\frac{DN}{DM} = \frac{CN}{ME}$ (2)



Mà từ giả thiết ta có $BM = CN$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{DN}{DM}$.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường phân giác BD và CE. Chứng minh rằng $\frac{1}{DE} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$.

Lời giải

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$\frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC}; \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{BC}$.

Vì $AB = AC$ (ΔABC cân tại A) nên

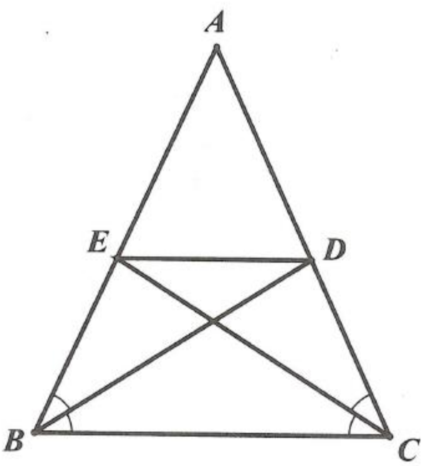
$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$. Vậy $DE//BC$

Theo hệ quả định lý Thalès ta có:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD+DC}{AD} = 1 + \frac{DC}{AD}$$

Vậy $\frac{1}{DE} = \frac{1}{BC} + \frac{DC}{AD.BC}$

$$= \frac{1}{BC} + \frac{BC}{AB.BC} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AB}.$$



III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh là a. Một đường thẳng qua điểm C cắt AB, AD lần lượt tại điểm E và điểm F. Chứng minh $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{a}$

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = CD$. Gọi giao điểm của AC với BD và DE theo thứ tự là điểm I và điểm K. Chứng minh $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm DE và BC. Chứng minh $\frac{AB}{AC} = \frac{KE}{KD}$.

Bài 4. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên của hình thang $ABCD$, đường thẳng đi qua O song song với đáy AB cắt AC, BD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh $OM = ON$.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Một đường thẳng d song song với hai đáy cắt hai cạnh bên AD và BC theo thứ tự ở các điểm M, N và cắt hai đường chéo BD và AC ở điểm H và điểm K. Chứng minh $MH = KN$.

Bài 6. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kì trên cạnh BC. Đường thẳng đi qua I và song song với AC cắt AB tại điểm K. Đường thẳng đi qua I và song song với AB cắt AM, AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng $DE = BK$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ ra ngoài tam giác đó tam giác ABD vuông cân tại B, tam giác ACF vuông cân tại C. Gọi H là giao điểm của AB và CD. Gọi K là giao điểm của AC và BE. Chứng minh $AH = AK$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Kẻ một đường thẳng cắt các cạnh BC, AC theo thứ tự ở điểm D, điểm E và cắt đường thẳng BA ở điểm F. Vẽ hình bình hành $BDEH$. Đường thẳng đi qua điểm F song song với BC cắt tia AH tại điểm I. Chứng minh $FI = DC$.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M là điểm thuộc cạnh BC, N là điểm thuộc tia đối của tia BC sao cho $BN = CM$. Các đường thẳng DN và DM cắt đường thẳng AB lần lượt tại điểm E và điểm F. Chứng minh $AE^2 = EB.EF$.

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng IK cắt AB và CD theo thứ tự ở N và M.

a) Chứng minh $NA = NB$, $MC = MD$.

b) Đường thẳng qua I song song với hai đáy của hình thang $ABCD$ cắt AD và BC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng $\frac{2}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường phân giác BD và CE. Chứng minh rằng $\frac{1}{DE} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Gọi M và N theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên AD. Chứng minh rằng $2AD \le BM + CN$.

Bài 13. Cho tam giác ABC $(AB \ne AC)$. Gọi D là trung điểm của BC. AE và AF lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Chứng minh rằng $EF.DH = AB.AC$

Bài 15. Cho hai điểm A và B nằm cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên đường thẳng xy. Gọi giao điểm của AK và BH là O, gọi I là hình chiếu của điểm O trên đường thẳng xy. Chứng minh rằng $OI\left(AH+BK\right)=AH.BK$.

Bài 16. Cho ba điểm A',B',C' lần lượt nằm trên ba đường thẳng chứa ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC sao cho chúng không có điểm nào hoặc có đúng hai điểm nằm trên hai cạnh của tam giác. Khi đó A',B',C' thẳng

hàng khi và chỉ khi $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ (*Định lý Melelaus*)

Bài 17. Cho ba điểm A',B',C' thuộc ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC. Khi đó AA',BB',CC' đồng quy khi và chỉ khi

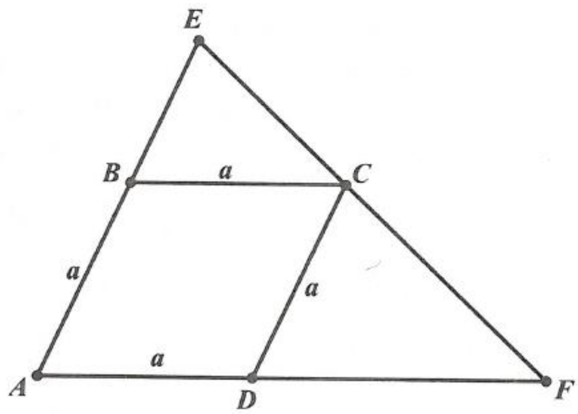
$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$ (*Định lý Ceva*)

Bài 18. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AC,AB lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\frac{CD}{DA}=\frac{AE}{EB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Các đường thẳng BD và CE cắt nhau tại O. Trên đoạn thẳng BD và CE lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho MN song song với AC. Chứng minh $BN>2OM$.

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Do $DC//AE$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:



$\frac{DC}{AE}=\frac{CF}{EF}$ (1)

Do $BC//AF$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{BC}{AF}=\frac{CE}{EF}$ (2)

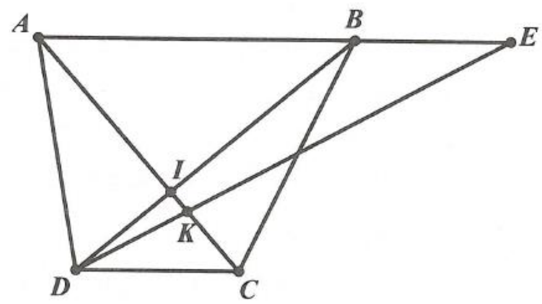
Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{DC}{AE}+\frac{BC}{AF}=\frac{a}{AE}+\frac{a}{AF}=\frac{CF}{EF}+\frac{CE}{EF}=1\Rightarrow\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{1}{a}.$$

Bài 2.

Áp dụng hệ quả định lý Thales:

$\frac{AK}{KC}=\frac{AE}{DC}$ (1)



Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{AI}{CI}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{AC}{CI}=\frac{AI+CI}{CI}=\frac{AB+DC}{DC}$

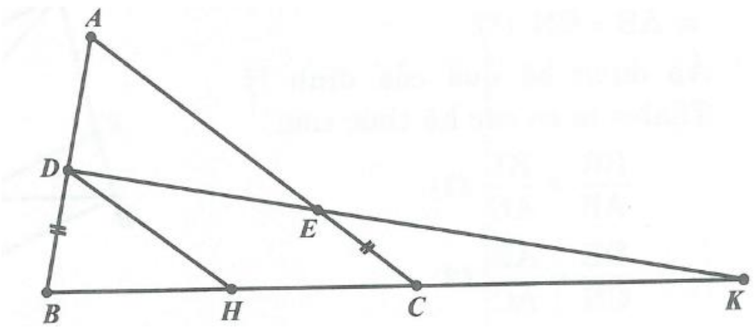
$=\frac{AB+BE}{DC}=\frac{AE}{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KC}=\frac{AC}{CI}$.

Bài 3.

Từ điểm D kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng BC tại điểm H. Ta có $DH//AC$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DH}=\frac{EC}{DH}$ (1)



Do $EC//DH$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:

$\frac{KE}{KD}=\frac{EC}{DH}$ (2)

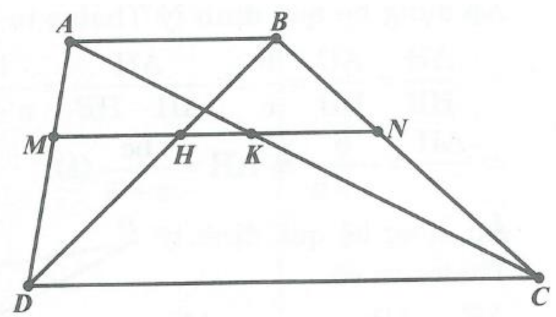
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{AC}=\frac{KE}{KD}$.

Bài 4.

Áp dụng hệ quả định lý Thales với $(OM//DC)$ ta có: $\frac{OM}{DC}=\frac{OA}{AD}$ (1)

Áp dụng hệ quả định lý Thales với $(ON//DC)$ ta có:

$\frac{ON}{DC}=\frac{OB}{BC}$ (2)



Áp dụng định lý Thales cho ODC $(AB//DC)$ ta có:

$\frac{OA}{AD}=\frac{OB}{BC}$ (3)

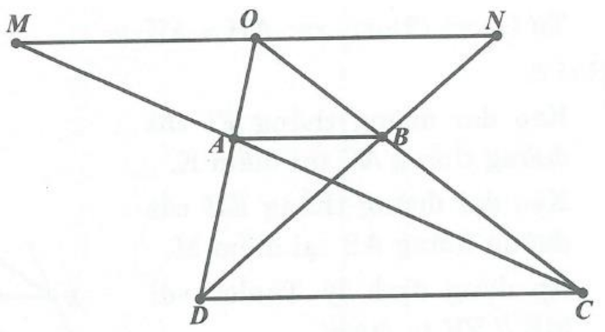
Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{OM}{DC}=\frac{ON}{DC}\Rightarrow OM=ON$.

Bài 5.

Sử dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

$\frac{MH}{AB}=\frac{MD}{AD}$ (1)

$$\frac{KN}{AB} = \frac{NC}{BC} \ (2)$$



Áp dụng định lý Thales mở rộng cho hình thang ABCD

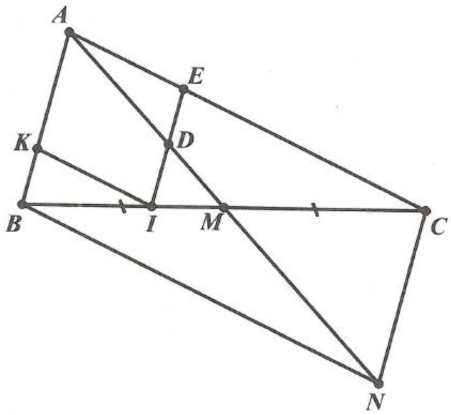
ta được: $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{CB}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{MH}{AB} = \frac{KN}{AB} \Rightarrow MH = KN$.

Bài 6.

Lấy điểm N trên tia đối của tia MA sao cho $MA = MN$. Suy ra $ABNC$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AB = CN$ (*).



Áp dụng hệ quả của định lý Thales ta có các hệ thức sau:

$$\frac{BK}{AB} = \frac{KI}{AC} \ (1)$$

$$\frac{DE}{CN} = \frac{AE}{AC} \ (2)$$

mà $KI = AE$, kết hợp với (1) và (2) suy ra $\frac{BK}{AB} = \frac{DE}{CN}$

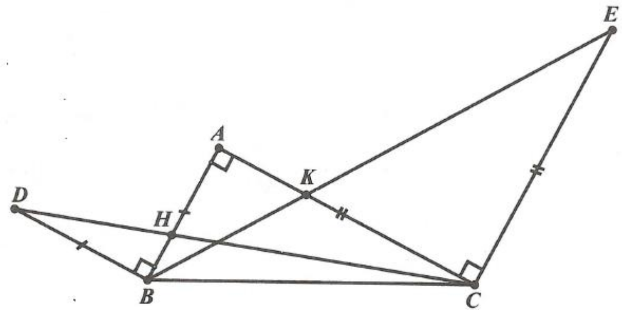
Từ (*) ta có $AB = CN$ nên $BK = DE$.

Bài 7.

Đặt $AB = BD = c$

$AC = CE = b$

Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có



$$\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{AH + HB} = \frac{b}{c + b}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{c + b} \Rightarrow AH = \frac{bc}{c + b} \ (1)$$

Áp dụng hệ quả định lý Thales ta có

$$\frac{AK}{CK} = \frac{AB}{CE} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{AK + CK} = \frac{c}{c + b}$$

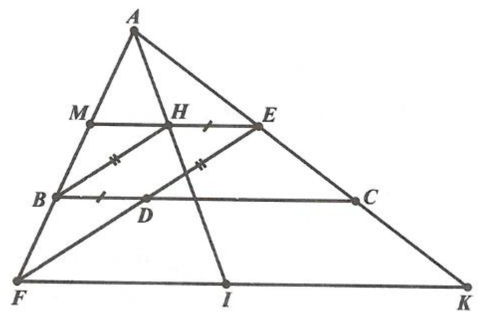
$$\Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{c + b} \Rightarrow AK = \frac{bc}{c + b} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = AK$.

Bài 8.

Kéo dài đường thẳng FI cắt đường thẳng AC tại điểm K. Kéo dài đường thẳng EH cắt đường thẳng AB tại điểm M. Áp dụng định lý Thales với $ME//FK$ ta được:

$\frac{FI}{FK}=\frac{MH}{ME}$ (1)



mà $BH//EF$ nên $\frac{MH}{ME}=\frac{BH}{EF}=\frac{ED}{EF}$ (2)

Do $DC//FK$, áp dụng định lý Thales ta được: $\frac{ED}{EF}=\frac{DC}{FK}$ (3)

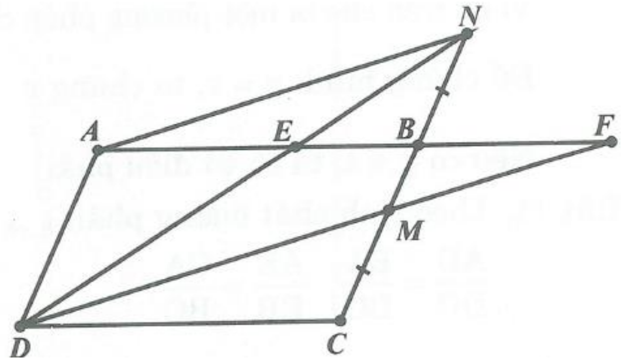
Kết hợp (1), (2) và (3) ta được: $\frac{FI}{FK}=\frac{DC}{FK}\Rightarrow FI=DC$.

Bài 9.

Nối điểm A với điểm N.

Ta có $AD//MN$ và $AD=MN$ nên tứ giác $ADMN$ là hình bình hành.

Do $AN//DM$, áp dụng hệ quả định lý Thales ta có:



$\frac{AE}{EF}=\frac{EN}{ED}$ (1)

Do $AD//BN$, áp dụng hệ quả của định lý Thales ta có:

$\frac{EN}{ED}=\frac{EB}{AE}$ (2)

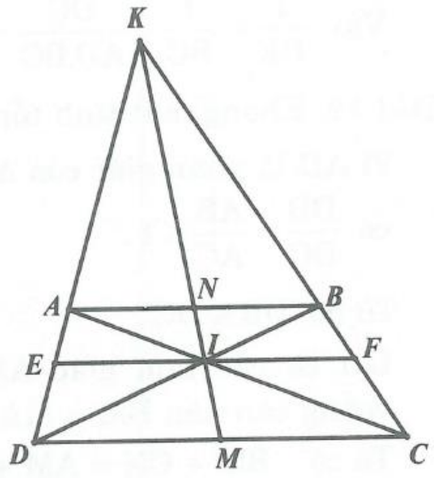
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AE}{EF}=\frac{EB}{AE}\Rightarrow AE^2=EB.EF$.

Bài 10.

a) Vì $AN//DM, NB//DM, AN//MC, NB//MC$ nên theo hệ quả định lý Thalès ta có:

$\frac{AN}{DM}=\frac{KN}{KM}=\frac{BN}{CM}$ (1)

$\frac{AN}{CM} = \frac{IN}{IM} = \frac{BN}{DM}$ (2)



Do đó $\frac{AN}{DM} \cdot \frac{AN}{CM} = \frac{BN}{DM} \cdot \frac{BN}{CM}$

hay $AN^2 = BN^2$

Vậy $AN = BN$. Kết hợp với (1) ta có $DM = CM$.

b) Vì $EI // DC, IF // DC, AB // CD$ nên theo hệ quả định lý Thalès ta có:

$\frac{EI}{DC} = \frac{AI}{AC} = \frac{BI}{BD} = \frac{IF}{DC}$ (*). Vậy $IE = EF$

Lại có $EI // AB$ nên $\frac{EI}{AB} = \frac{DI}{DB}$. Kết hợp với (*) ta được:

$\frac{EI}{AB} + \frac{EI}{CD} = \frac{BI}{BD} + \frac{CI}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$. Hay $\frac{1}{EI} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

Để ý rằng vì $IE = IF, IE + IF = EF$ nên $\frac{1}{EI} = \frac{2}{EF}$

Từ đó $\frac{2}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

Ví dụ trên cho ta một phương pháp chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau.

Để chứng minh $x = z$, ta chứng minh tỉ lệ thức $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

Nếu có $y = t$, ta sẽ có điều phải chứng minh.

Bài 11.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$\frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC}; \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{BC}$.

Vì $AB = AC$ (ΔABC cân tại A) nên $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$. Vậy $DE // BC$.

Theo hệ quả định lý Thalès ta có:

$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD + DC}{AD} = 1 + \frac{DC}{AD}$.

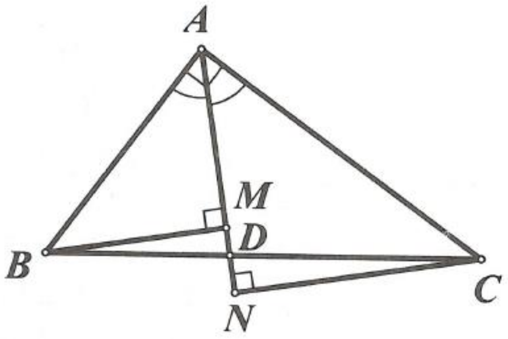
Vậy $\frac{1}{DE} = \frac{1}{BC} + \frac{DC}{AD.BC} = \frac{1}{BC} + \frac{BC}{AB.BC} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AB}$.

Bài 12.

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB \le AC$.

Vì AD là tia phân giác của ΔABC nên ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \le 1$

Từ đó $DB \le DC$.



Lại có các tam giác AMB và ANC vuông cân nên $BM = MA; CN = NA$.

Ta có $BM + CN = AM + AN$

$= 2AD + \left(DN - DM\right)$ (1)

Vì $BM\,//\,CN$ (cùng vuông góc với AD) nên theo định lý Thales ta có $\dfrac{DM}{DN} = \dfrac{DB}{DC} \le 1$, từ đó suy ra $DM \le DN$ hay $DN - DM \ge 0$ (2).

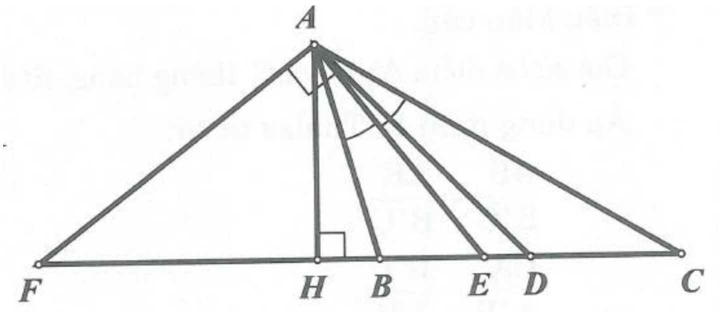
Từ (1) và (2) suy ra $BM + CN \ge 2AD$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A.

Bài 13.

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$. Vì AE và AF lần lượt là phân giác trong và ngoài của tam giác ABC nên ta có:

$\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{FB}{FC} = \dfrac{AB}{AC}$.



Suy ra $\dfrac{EB}{EB + EC} = \dfrac{AB}{AB + AC}$

hay $\dfrac{EB}{BC} = \dfrac{AB}{AB + AC}$.

Từ đó $EB = \dfrac{AB.BC}{AB + AC}$.

Mặt khác $\dfrac{FB}{FC - FB} = \dfrac{AB}{AC - AB}$ suy ra $\dfrac{FB}{BC} = \dfrac{AB}{AC - AB} \Rightarrow FB = \dfrac{AB.BC}{AC - AB}$

Ta có $EF = EB + FB = \dfrac{AB.BC}{AB + AC} + \dfrac{AB.BC}{AC - AB} = \dfrac{2AB.BC.AC}{AC^2 - AB^2}$ (1)

Áp dụng định lý Pythagore vào các tam giác vuông ABH và ACH ta được

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = AH^2 + \left(\frac{BC}{2} + DH\right)^2$$

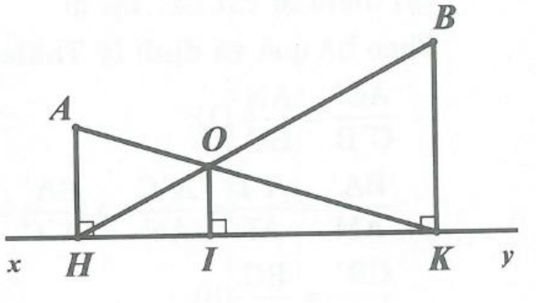
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = AH^2 + \left(\frac{BC}{2} - DH\right)^2$$

Từ đó $AC^2 - AB^2 = 2BC.DH$ hay $DH = \dfrac{AC^2 - AB^2}{2BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EF.DH = \dfrac{2AB.BC.AC}{AC^2 - AB^2}.\dfrac{AC^2 - AB^2}{2BC} = AB.AC$.

Bài 15.

Ta có $AH // OI // BK$ (vì cùng vuông góc với xy). Theo hệ hệ quả định lý Thalès ta có



$\dfrac{OI}{AH} = \dfrac{IK}{KH}; \dfrac{OI}{BK} = \dfrac{HI}{KH}$.

Vậy $\dfrac{OI}{AH} + \dfrac{OI}{BK} = \dfrac{IK}{KH} + \dfrac{HI}{KH} = \dfrac{KH}{KH} = 1$

Hay $OI.\left(\dfrac{1}{AH} + \dfrac{1}{BK}\right) = 1$

Từ đó suy ra $OI\left(AH + BK\right) = AH.BK$.

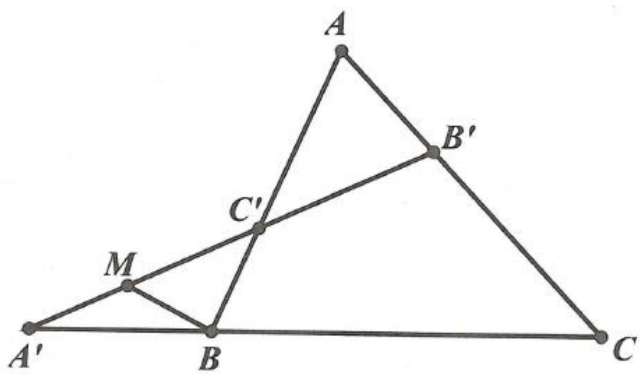
Bài 16.

Hình vẽ cho 1 điểm nằm trên phần kéo dài, trường hợp còn lại làm tương tự.

* Điều kiện cần:

Giả sử ba điểm $A'; B'$ và C' thẳng hàng, từ điểm B kẻ $BM // AC$ ($M \in A'B'$).

Áp dụng định lý Thales ta có:



$\dfrac{AB'}{B'C} = \dfrac{AB'}{B'C'}$,

$\dfrac{CA'}{A'B} = \dfrac{B'C}{BM}$,

$\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{BM}{AB'}$.

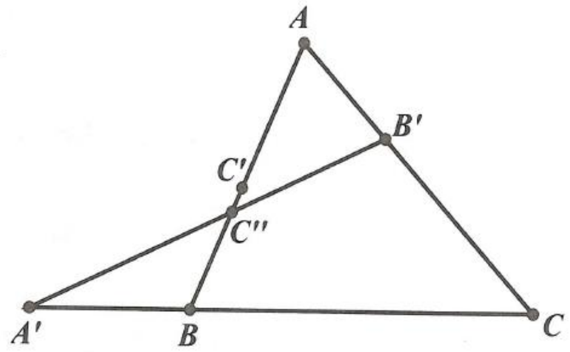
$\Rightarrow \dfrac{AB'}{B'C}.\dfrac{CA'}{A'B}.\dfrac{BC'}{C'A} = \dfrac{AB'}{B'C}.\dfrac{B'C}{BM}.\dfrac{BM}{AB'} = 1$

* Điều kiện đủ:

Giả sử: $\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A}=1$ (1)

và $A'B'\cap AB=\{C''\}$

Ta có: $\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC''}{C''A}=1$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra:

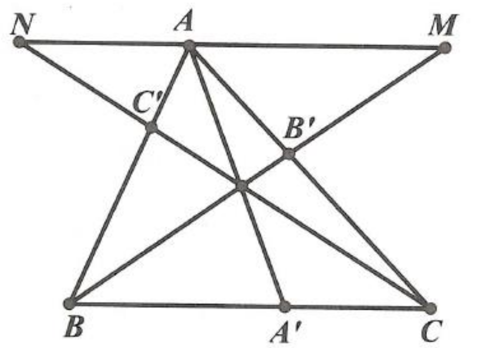
$\frac{BC'}{C'A}=\frac{BC''}{C''A}$

$\Rightarrow C'\equiv C''\Rightarrow A',B',C'$ là ba điểm thẳng hàng.

Bài 17.

* Điều kiện cần: Kẻ qua điểm A đường thẳng song song với BC cắt BB’ tại điểm M cắt CC’ tại điểm N.

Theo hệ quả và định lý Thales:



$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AN}{BC}$ (1);

$\frac{BA'}{AM}=\frac{A'I}{AI}=\frac{A'C}{AN}\Rightarrow\frac{BA'}{A'C}=\frac{AM}{AN}$ (2);

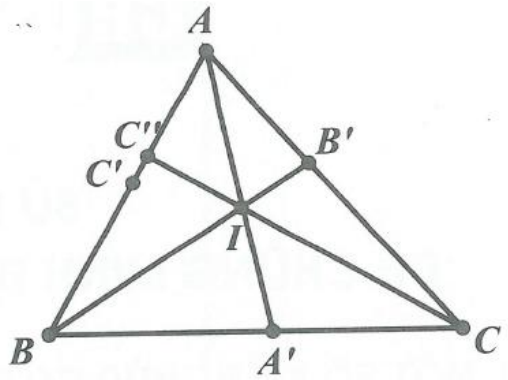
$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AM}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có:

$\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=\frac{AN}{BC}.\frac{AM}{AN}.\frac{BC}{AM}=1$

* Điều kiện đủ:

Giả sử 3 điểm $A';B'$ và C' được lấy lần lượt trên ba cạnh BC,CA,AB như hình thỏa mãn $\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=1$ (1)



và $AA'\cap BB'=\{I\}$. Kẻ CI cắt AB tại C''.

Khi đó $\frac{AC''}{C''B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A}=1$ (2)

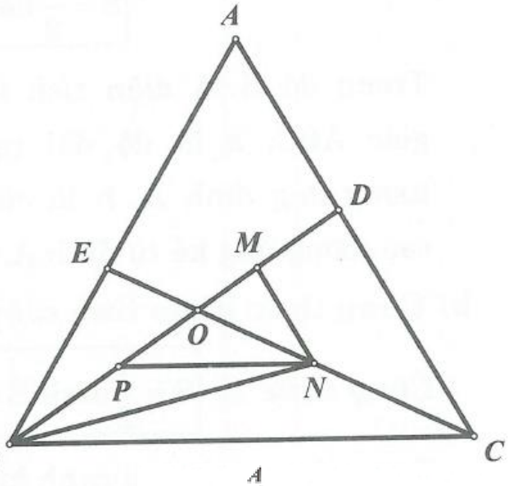
Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC''}{C''B}\Rightarrow C'\equiv C''$.

Vậy ba đường thẳng AA'; BB' và CC' đồng quy.

Bài 18.

Áp dụng định lý Menalaus với ΔABD và ba điểm thẳng hàng E, O, C ta được:



$$\frac{EA}{EB}.\frac{OB}{OD}.\frac{CD}{CA}=1 \ (*)$$

Theo bài ra $\frac{CD}{DA}=\frac{EA}{EB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

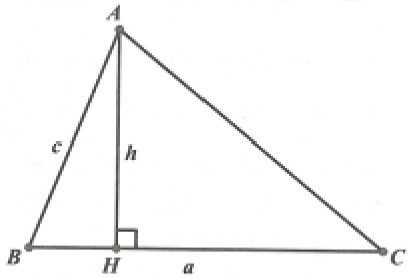
$$\Rightarrow \frac{CD}{CA}=\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.$$

Thay các kết quả trên vào hệ thức (*) ta được

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{OB}{OD}.\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OB}=1 \text{ hay } OB=OD \ (1)$$

Từ N kẻ đường thẳng song song với BC, cắt BD tại P.



Vì $MN//BC$ nên ta có $\frac{OP}{OB}=\frac{ON}{OC}=\frac{OM}{OD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM=OP$.

Ta có $PMN=PDC>60°; PNM=BCA=60°$ nên $PMN>PNM$.

Từ đó $PN>PM=2OM$.

Mặt khác $BPN=180°-MPN=180°-DBC>180°-ABC=120°$ nên $BN>PN>2OM$.

BÀI TOÁN 5.SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

a) Công thức tính diện tích tam giác:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ha}$$

Trong đó S là diện tích tam giác ABC, a là độ dài cạnh tương ứng đỉnh A, h là chiều cao tương ứng kẻ từ đỉnh A.

b) Công thức khác tính diện tích tam giác:

Công thức 1:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ac\sin B \ (1)}$$

Trong đó: a, c là hai cạnh kề của góc B.

Thật vậy: Ta có: $h = c.\sin B$ thay vào công thức $S = \frac{1}{2}ha$

Ta được $S = \frac{1}{2}ac\sin B$.

Công thức 2: $\boxed{S = pr \ (2)}$

Trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Thật vậy:

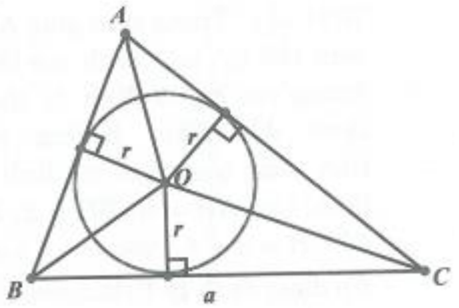
$$S = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}$$

$$= \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$$

$$S = \frac{1}{2}r\left(a+b+c\right) = pr.$$

Công thức 3: $\boxed{S = \left(p-a\right)r_a \ (3)}$

Trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC, r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp đỉnh A của tam giác ABC.



Thật vậy,

$$S = S_{AEIF} - S_{BDIE} - S_{DCFI}$$

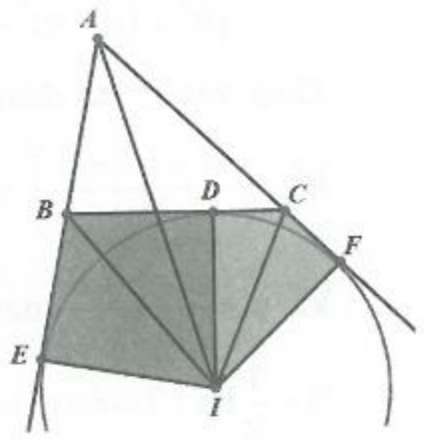
$$S = \frac{1}{2}r_a\left(c + BE + b + CF\right) - \frac{1}{2}r_a\left(2BE + 2CF\right)$$

$$S = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)r_a = \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)r_a$$

$$= \left(p-a\right)r_a$$

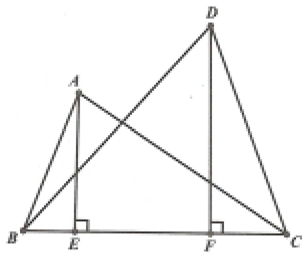
Công thức 4: $\boxed{S = \frac{abc}{4R} \ (4)}$

Trong đó a, b, c là ba cạnh của tam giác, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Thật vậy, Áp dụng định lý hàm sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow \sin B=\frac{b}{2R}$$



Thay vào công thức tính diện tích tam giác $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ ta được:

$$S=\frac{1}{2}ac.\frac{b}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

Công thức 5: $$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ (5)}$$

(công thức Hê-rông)

Trong đó a, b, c là ba cạnh của tam giác, p là nửa chu vi tam giác ABC.

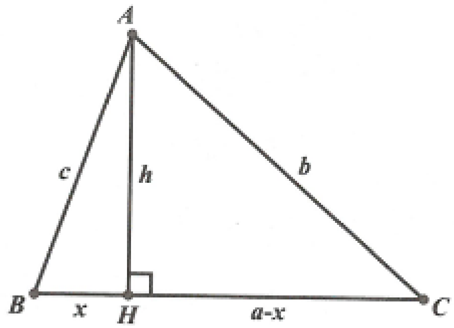
Thật vậy: Trong tam giác ABC luôn tồn tại một đỉnh mà chân đường cao hạ từ đỉnh đó thuộc cạnh đối diện. Không mất tính tổng quát, giả sử đỉnh đó là A. Gọi $AH=h$, $BH=x$, khi đó $CH=a-x$. (với $0\le x\le a$). Áp dụng định lý Pythagore cho hai tam giác vuông:

$$\begin{cases} h^2+x^2=c^2 (*) \\ h^2+(a-x)^2=b^2 \end{cases}\Rightarrow x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}.$$

Thay vào (*) ta được:

$$h^2+\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2=c^2\Rightarrow h^2=\frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}.$$

Vì $p=\frac{a+b+c}{2}$ nên $h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$ thay vào công thức $S=\frac{1}{2}ha$. Ta được z.



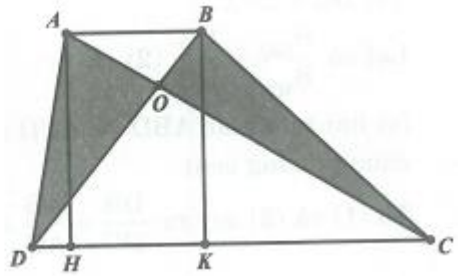
c) Tính chất cơ bản về diện tích của tam giác.

Tính chất 1: Nếu hai tam giác có cùng đáy thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao.

Chứng minh:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}}=\frac{\frac{1}{2}AE.BC}{\frac{1}{2}DF.BC}=\frac{AE}{DF}.$$

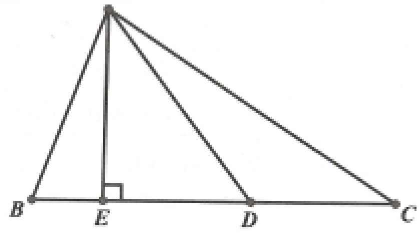
Tính chất 2: Nếu hai tam giác có cùng đường cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.



Chứng minh:

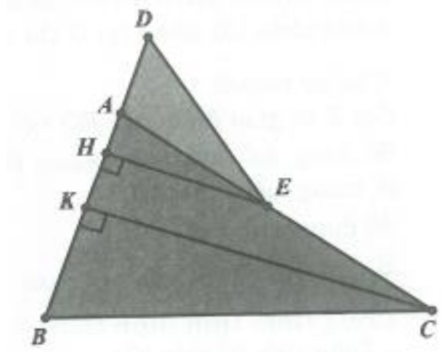
$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}}=\frac{\frac{1}{2}AE.DC}{\frac{1}{2}AE.BD}=\frac{DC}{BD}.$$

Hệ quả: Đường trung tuyến của tam giác chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Tính chất 3: Cho tam giác ABC, gọi điểm D và điểm E là các điểm thuộc đường thẳng AB và AC.

Khi đó $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{AD}{AB}.\frac{AE}{AC}$.



Chứng minh:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{\frac{1}{2}AD.EH}{\frac{1}{2}AB.CK} \text{ mà } \frac{EH}{CK}=\frac{AE}{AC}$$

(định lý Thales)

Vì thế $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{AD}{AB}.\frac{AE}{AC}$

Tính chất 4: Tỉ số diện tích hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

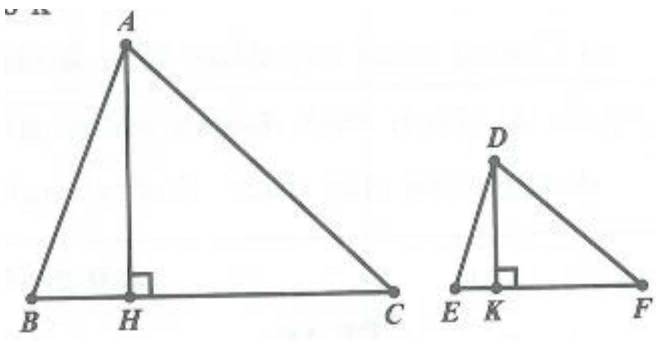
Chứng minh:

Giả sử $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ theo tỉ số k

Nghĩa là $\frac{BC}{EF}=k$ và $\frac{AH}{DK}=k$

Ta có:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{1}{2}DK.EF}=k^2$$



Tính chất 5: Cho tứ giác ABCD và điểm O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Khi đó, $AB//CD \Leftrightarrow S_{ADO}=S_{BCO}$

Chứng minh:

• Nếu $AB//CD$, vẽ $AH \perp DC; BK \perp DC$

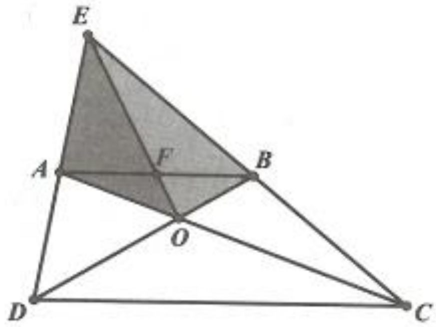
Thì $AH = BK \Rightarrow S_{ADC} = S_{BDC}$

$\Rightarrow S_{ADO} + S_{DOC} = S_{BCO} + S_{DOC}$

$\Rightarrow S_{ADO} = S_{BCO}$.

• Nếu $S_{ADO} = S_{BCO} \Rightarrow \frac{1}{2}AH.\text{DC} = \frac{1}{2}BK.DC \Rightarrow AH = BK$ mà $AH//BK$ nên ABHK là hình bình hành. Vậy $AB//CD$.

Tính chất 6: Nếu hai cạnh bên của hình thang ABCD ($AB//CD$) cắt nhau tại E, hai đường chéo cắt nhau tại O thì $S_{AOE} = S_{BOE}$.



Chứng minh:

Gọi F là giao điểm của EO với AB. Sử dụng ***bổ đề hình thang*** thì F là trung điểm của AB.

Sử dụng tính chất 2 thì: $S_{AEF} = S_{BEF}; S_{AOF} = S_{BOF} \Rightarrow S_{AEO} = S_{BOE}$

Công thức tính diện tích của tứ giác.

- Diện tích tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo nhân với góc tạo bởi hai đường chéo.

- Nếu tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì diện tích tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo.

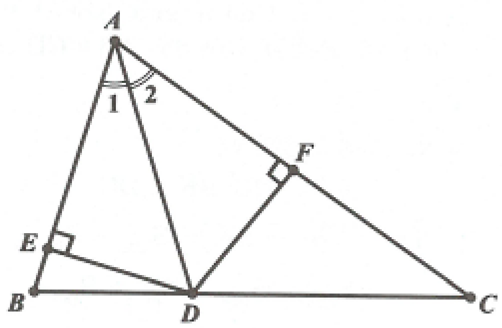
1. Ứng dụng của diện tích trong việc giải toán

a) Chứng minh các đẳng thức hình học

Ví dụ 1. (Tính chất đường phân giác). Cho tam giác ABC, AD là đường phân giác trong. Chứng minh rằng $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Lời giải

Ta có $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DE.AB}{\frac{1}{2}DF.AC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

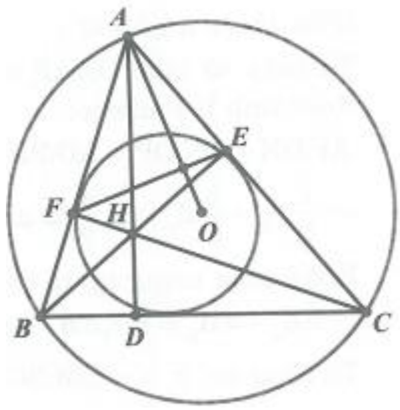


(vì $DE = DF$).

Lại có $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{DB}{DC}$ (2)

(vì hai tam giác ABD và ACD có chung đường cao).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.■



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{r}{R}$, trong đó r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

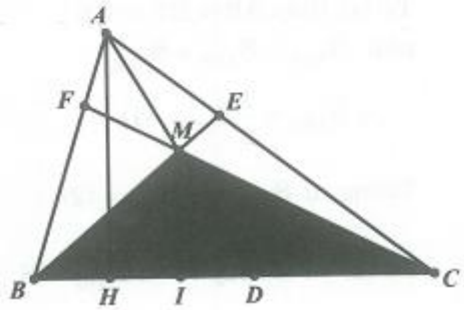
Ta chứng minh được $OA \perp EF$, $OB \perp DF$, $OC \perp DE$.

Vì tam giác ABC nhọn nên O nằm bên trong tam giác, từ đó ta có:

$$S_{ABC} = S_{OEAF} + S_{ODBF} + S_{ODCE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} r.P_{ABC} = \frac{1}{2} DE.OA + \frac{1}{2} DF.OB + \frac{1}{2} CE.OC$$

$$\Leftrightarrow r.P_{ABC} = R.P_{DEF} \Leftrightarrow \frac{P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{r}{R}.\blacksquare$$



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác AM, BM và CM cắt các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1$.

Lời giải

Ta có $\frac{MD}{AD} = \frac{AH}{MI}$.

Áp dụng tính chất về tỉ số diện tích ta có:

$$\frac{MD}{AD} = \frac{S_{BMD}}{S_{BAD}} = \frac{S_{CMD}}{S_{CAD}} = \frac{S_{BMD} + S_{CMD}}{S_{BAD} + S_{CAD}} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\frac{ME}{BE} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}} \ (2), \quad \frac{MF}{CF} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} \ (3).$$

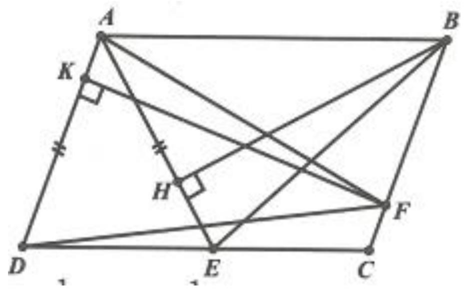
Cộng (1), (2) và (3) ta có điều cần chứng minh.■

Ví dụ 4. (Định lý Carnot) Cho tam giác ABC nhọn có $d_a, d_{b,} d_c$ lần lượt là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến các cạnh BC, CA, AB. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Khi đó ta có hệ thức: $d_a + d_b + d_c = R + r$

Lời giải

(Phụ thuộc hình vẽ)

Ta thấy tứ giác ONAP nội tiếp trong đường tròn đường kính AO nên theo định lí Ptoleme:



$$AP.ON + AN.OP = AO.PN$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2}d_b + \frac{b}{2}d_c = R.\frac{a}{2} \Rightarrow cd_b + bd_c = R.a.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$b.d_a + a.d_b = R.c, a.d_c + c.d_a = R.b$$

Ta cũng có: $d_a.a = OM.BC = 2S_{OBC}$.

Tương tự: $d_b.b = S_{OCA}, d_c.c = S_{OAB}$.

Cộng tất cả các đẳng thức trên lại, ta có:

$$(a+b+c)(d_a + d_b + d_c) = R(a+b+c) + (S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA})$$

$$\Rightarrow 2p(d_a + d_b + d_c) = R.2p + 2S \Rightarrow d_a + d_b + d_c = R + r.$$

Ví dụ 5. Cho hình bình hành ABCD, trên DC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi F là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B và F trên AE và AD. Chứng minh rằng $BH = FK$.

Lời giải

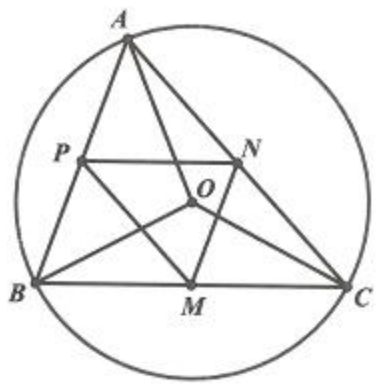
Vì $DC // AB$ nên đường cao kẻ từ E đến AB bằng đường cao kẻ từ A và B đến DC.

Ta lại thấy $AB = DE + CE$

nên $S_{ABE} = S_{ADE} + S_{BCE}$

$$\Rightarrow S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \quad (1)$$

Tương tự $S_{ADF} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra

$$\Rightarrow S_{ABE} = S_{ADF} \Rightarrow \frac{1}{2}AE.BH = \frac{1}{2}AD.FK \Rightarrow BH = FK. \blacksquare$$

Ví dụ 6. Cho hình bình hành ABCD, trên cạnh AB và CB lần lượt lấy điểm E và điểm F sao cho $AF = CE$. Gọi điểm O là giao điểm CE và AF. Chứng minh $AOD = COD$.

Lời giải

Kẻ $DH \perp AF$ và $DI \perp CE$

Theo ví dụ 5 thì:

$$S_{ADF} = S_{DCE} \Rightarrow \frac{1}{2}DH.AF = \frac{1}{2}DI.CE$$

Theo giả thiết thì $AF = CE$

$\Rightarrow DH = DI \Rightarrow OD$ là phân giác AOC

Vậy, $AOD = COD$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC, M là một điểm nằm trên đoạn BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm N, trên đoạn AC lấy điểm E. Đường thẳng NE cắt BC tại P sao cho $S_{ABM} = S_{MNP} = S_{CPE}$. Chứng minh rằng: $PB = PC$.

Lời giải

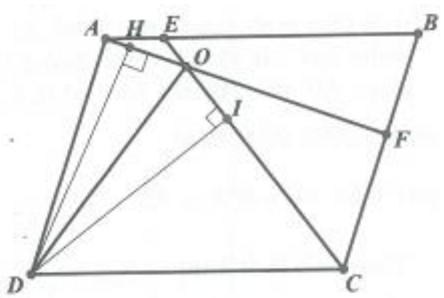
Do $S_{MNP} = S_{CPE} \Rightarrow ME // NC$ (tính chất 5)

Áp dụng tính chất 6 ta có:

$S_{AMP} = S_{AEP}$. Mà theo giả thiết

$S_{ABM} = S_{MNP} = S_{CPE} \Rightarrow S_{ABP} = S_{ACP}$

Từ tính chất 2 suy ra: $PB = PC$.■

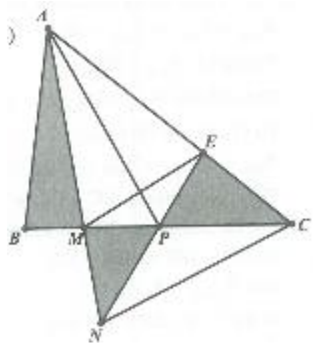


II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = 3AE$. Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = 4FC$. Gọi D là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng $CD = DE$.

Bài 2. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho A là trung điểm của DC, trên tia đối của BA lấy điểm E sao cho B là trung điểm của AE, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $S_{DEF} = 7S_{ABC}$. Chứng minh rằng $CB = CF$.

Bài 3. Cho hình thang ABCD có đáy lớn AB, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Một đường thẳng song song với hai đáy cắt các đoạn AD, BC, MN lần lượt tại E, I, F. Chứng minh $EI = FI$



III. HƯỚNG DẪN GIẢI

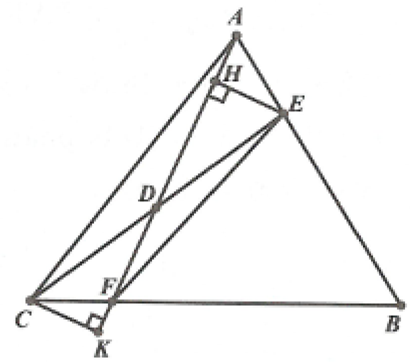
Bài 1. Do $BE = 3EA \Rightarrow AE = \frac{1}{4}AB$.

Theo tính chất 2 thì $\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{4}S_{ABF}$ (1).

Do $CF = \frac{1}{4}BF \Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{4}S_{ABF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{AEF} = S_{ACF}$.

Kẻ hai đường cao EH và CK của hai tam giác AEF và tam giác ACF.



Suy ra $EH = CK \Rightarrow \Delta EHD = \Delta CKD$ (g.c.g) $\Rightarrow CD = DE$.■

Bài 2. Vì A là trung điểm của DC, theo tính chất 2 thì:

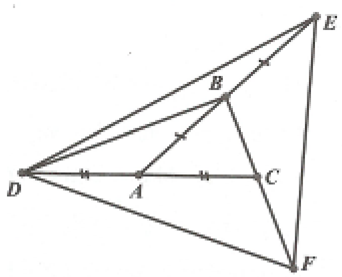
$S_{ABD} = S_{ABC} \Rightarrow S_{ADE} = 2S_{ABC}$ (1)

Tương tự: $S_{DCF} = 2S_{ABC}$ (2)

Theo đề bài $S_{DEF} = 7S_{ABC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$S_{BEF} = 2S_{ABC} \Rightarrow S_{BEF} = 2S_{BCE} \Rightarrow S_{BCE} = S_{DEF}$.



Theo tính chất 2: $BC = CF$.■

Bài 3. Kẻ đường cao EH và FK của hai tam giác EMN và FMN.

Vì $AM = BM$ và $DN = CN$

nên $S_{AMND} = S_{BMNC}$ (1)

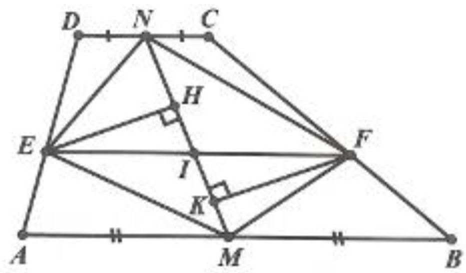
Vì $EF // AB, EF // DC$ nên

$S_{AME} = S_{BMF}$ (2) và $S_{DNE} = S_{CNF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$S_{EMN} = S_{FMN} \Rightarrow EH = FK$

$\Rightarrow \Delta EHI = \Delta FKI \Rightarrow EI = FI$.■



BÀI TOÁN 6.SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP VẼ HÌNH BÌNH HÀNH

ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

2. Tính chất:

- Cạnh: Các cạnh đối song song và bằng nhau.
- Góc: Các góc đối bằng nhau.
- Đường chéo: Các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

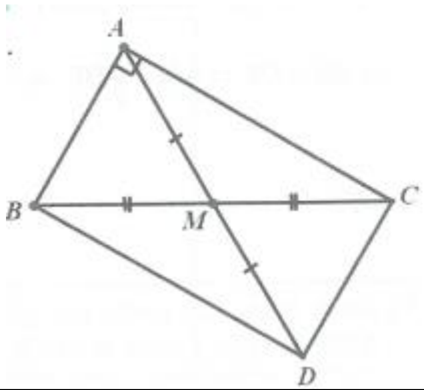
Lời giải

Lấy D sao cho D đối xứng với A qua M. Suy ra ABDC là hình bình hành.

Lại có $BAC = 90^\circ$.

Nên ABDC là hình chữ nhật.

Vậy nên: $AM = \frac{1}{2}BC$.■



Ví dụ 2. Chứng minh rằng: Trong một tam giác, ba đường trung tuyến đồng quy.

Lời giải

Xét tam giác ABC, trung tuyến AM. Lấy G trên AM sao cho $AG = 2GM$.

Vẽ hình bình hành BGCD.

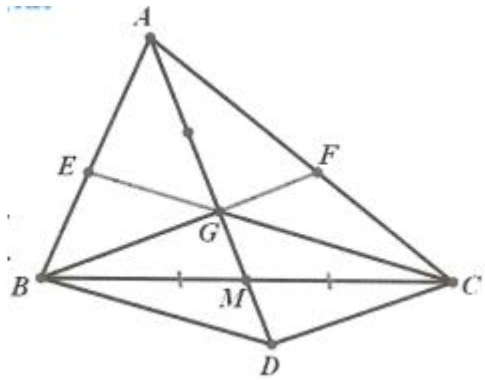
Tia CG cắt AB tại E.

Vì $GE//BD$ và G là trung điểm AD. Nên GE là đường trung bình ΔABD.

Suy ra E là trung điểm AB.

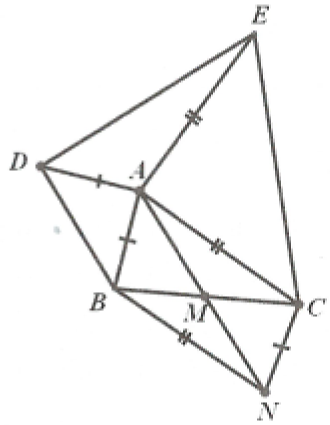
Tương tự BG kéo dài cắt AC ở F thì F là trung điểm AC.

Vậy ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy.■



Ví dụ 3. Vẽ ra ngoài tam giác ABC hai tam giác vuông cân tại A là: $\Delta ABD, \Delta ACE$. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng: $AM = \frac{1}{2}DE$.

Lời giải



Vẽ hình bình hành ABNC

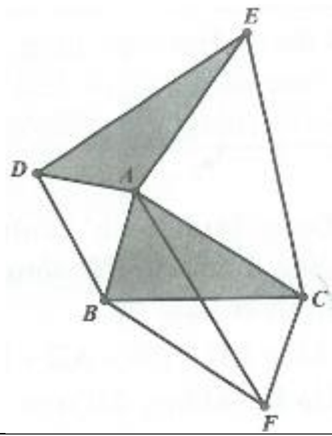
Khi đó $DAE = ACN = \left(180° - A\right)$.

Do đó, $\Delta DAE = \Delta NCA$ (c.g.c)

$\Rightarrow AN = DE \Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}DE$. ■

Ví dụ 4. Dựng bên ngoài tam giác ABC hai tam giác vuông cân tại A là: ABD và ACE. Chứng minh: $S_{ABC} = S_{ADE}$

Lời giải



Dựng hình bình hành ABFC

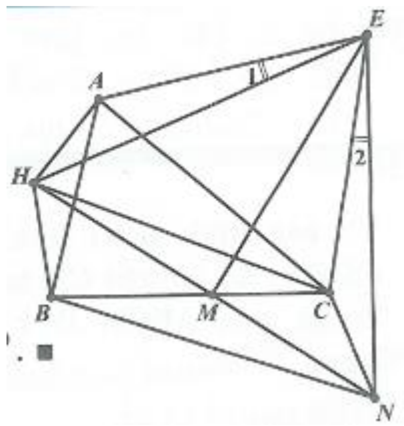
$\Rightarrow S_{ABC} = S_{ABF}\left(= \dfrac{1}{2}S_{ABFC}\right)$ (1)

Lại có: $\Delta ADE = \Delta ABF \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{ABC} = S_{ADE}$. ■

Ví dụ 5. Bên ngoài tam giác ABC vẽ hai tam giác cân tại A lần lượt là: ΔABH và ΔACE sao cho $H = 120°$ và $E = 60°$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $HME = 90°$.

Lời giải



Vẽ hình bình hành BNCH.

$\Rightarrow HA = CN$ và $HAE = NCE\left(= 90° + A\right)$

Vì vậy $\Delta HAE = \Delta NCE$ (c.g.c) $\Rightarrow HE = NE$ (1)

mà $E_1 = E_2 \Rightarrow HEN = 60°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔHNE đều $\Rightarrow HME = 90°$. ■

Ví dụ 6. Vẽ bên ngoài tam giác ABC hai tam giác vuông cân tại M và N là ΔABM và ΔACN. Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ΔMNE vuông cân.

Lời giải

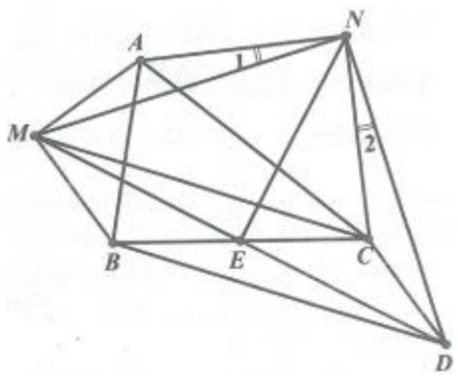
Dựng hình bình hành CMBD

$\Rightarrow MA = CD$ và $MAN = DCN\left(= 90° + A\right)$

$\Rightarrow \Delta MAN = \Delta DCN$ (c.g.c) $\Rightarrow N_1 = N_2$

$\Rightarrow \Delta MND$ vuông cân tại N

Mà E là trung điểm của MD nên ΔMNE vuông cân. ■



Ví dụ 7. Hai ngôi làng A, B nằm hai bên sông, cần xây cầu DE như thế nào để đường đi ADEB ngắn nhất (biết 2 bờ sông song song với nhau, cầu vuông góc với bờ).

Lời giải

Dựng hình bình hành ADEK, F là giao điểm của bờ sông với BK (như hình vẽ) khi đó:

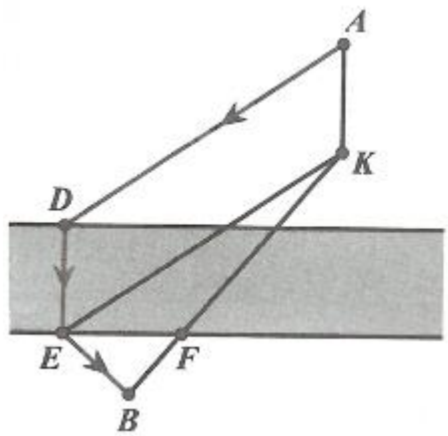
$AD + ED + EB = AK + KE + BE \geq AK + BK$

Do DE không đổi nên AK không đổi

$\Rightarrow K$ cố định $\Rightarrow F$ cố định.

$\Rightarrow AD + ED + EB \geq AK + BK$ (không đổi)

Vậy đoạn thẳng ngắn nhất khi $E \equiv F$ ■



Ví dụ 8. Cho lục giác ABCDEF có các cạnh thỏa mãn điều kiện $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$ và cạnh đối diện song song với nhau. Chứng minh lục giác ABCDEF có các góc bằng nhau.

Lời giải

Vẽ các hình bình hành APEF, CDEN. Kẻ AP cắt CN tại M. Suy ra tứ giác ABCM là hình bình hành.

Theo bài ra ta có:

$BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$.

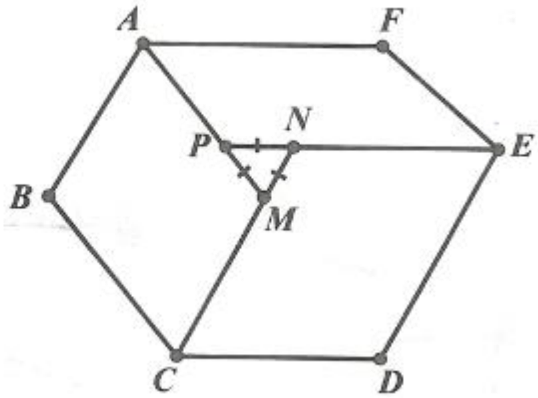
Thế nên, tam giác PMN đều

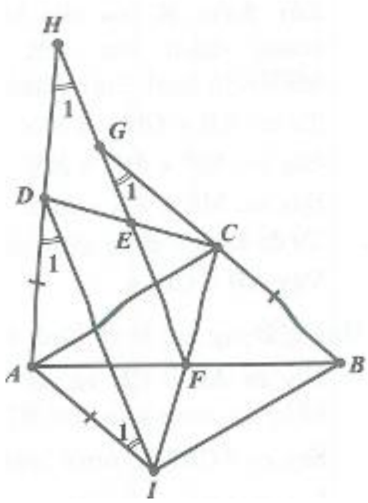
Ta thấy: $B = AMC = 120°; F = APE = 120°; D = CNE = 120°$.

Ta cũng thấy: $BAF = AMN + EPM = 60° + 60° = 120°$.

Tương tự: $FED = DCB = 120°$

Kết luận: $A = B = C = D = E = F = 120°$. ■





Ví dụ 9. Cho tứ giác lồi ABCD với $AD = BC$, gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD và AB. Gọi giao điểm của AD và FE là H và giao điểm của BC và FE là G. Chứng minh rằng: $AHF = BGF$.

Lời giải

Lấy điểm I sao cho F là trung điểm của CI.

Lúc ấy, ACBI là hình bình hành.

Vì thế EF là đường trung bình của tam giác CDI.

$\Rightarrow G_1 = I_1$ (1) (góc tạo bởi hai cạnh tương ứng song song).

$\Rightarrow D_1 = H_1$ (2) (hai góc đồng vị và $DI // HF$).

Do $AD = AI$ nên tam giác ADI là tam giác cân tại A $\Rightarrow D_1 = I_1$ (3)

Từ (1) (2) và (3) ta suy ra: $AHF = BGF$. ■

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng, nếu $AB + CD = 2MN$ thì $AB // CD$.

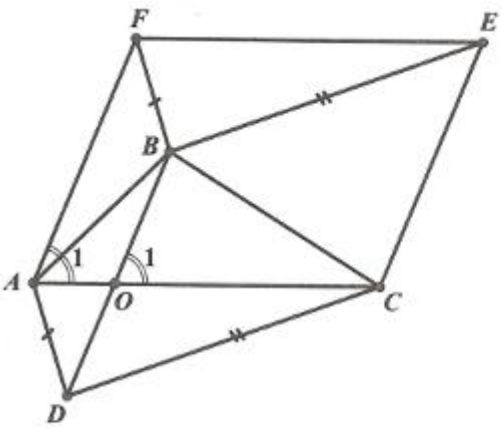
Bài 2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo $AC = x, BD = y$ (không đổi). Góc tạo bởi AC và BD là a (không đổi). Xác định hình dạng của tứ giác ABCD để chu vi ABCD nhỏ nhất?

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn, có $B = 2C$. Kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Chứng minh $EA = HC$.

Bài 4. Chứng minh rằng độ dài đường trung tuyến luôn nhỏ hơn nửa tổng hai cạnh bên.

Bài 5. Chứng minh rằng độ dài ba đường trung tuyến của tam giác luôn nhỏ hơn chu vi và lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi của tam giác.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi K là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia KA lấy điểm D sao cho $KD = 2KA$. Gọi M là trung điểm của AK. Chứng minh rằng: $BM \perp BD$



IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Vẽ hai hình bình hành CDME và ABFM (như hình vẽ bên)

Từ đó suy ra: CEBF là hình bình hành vì có một cặp cạnh đối vừa song song và bằng nhau.

Suy ra, E, N, F thẳng hàng.

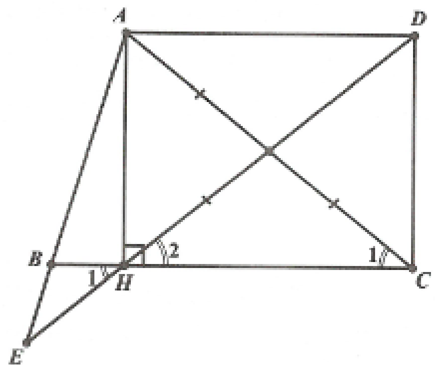
Lấy điểm K sao cho N là trung điểm của MK thì MFKE là hình bình hành.

Ta có: $AB + CD = 2MN = MK$.

Suy ra: $MF + ME = MK$

Suy ra: $MF + FK = MK$.

Từ đó E và F cùng nằm trên MK. Vậy $AB // CD$. ■



Bài 2. Dựng hai hình bình hành là ADBF và BDCE.

Suy ra $AF // CE$ và $AF = CE$ (do cùng bằng và song song với BD).

Suy ra ACEF là hình bình hành

Lại có $AF = y$ và $EF = x$, $FAC = \alpha$ (không đổi)

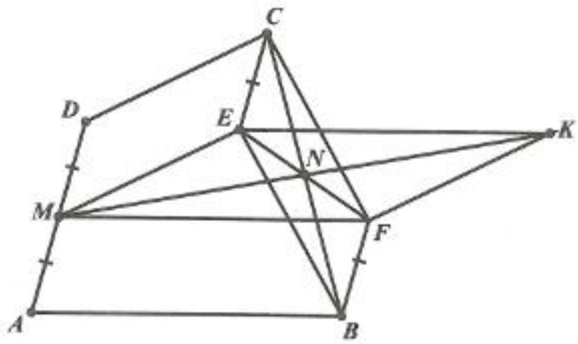
Do đó $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$

$$P_{ABCD} = (AB + BE) + (BC + BF)$$

$$P_{ABCD} \geq AE + CF \text{ (không đổi)}$$

Nên chu vi của ABCD nhỏ nhất khi A, B, E và C, B, F thẳng hàng.

Vậy lúc đó ABCD là hình bình hành.■



Bài 3. Dựng hình bình hành AHCD mà $H = 90°$ nên AHCD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow C_1 = H_1 = D_1 \qquad (1)$$

$$\text{Vì } \Rightarrow \begin{cases} B = 2H_1 \\ B = 2C_1 \end{cases} \Rightarrow H_1 = C_1 \quad (2)$$

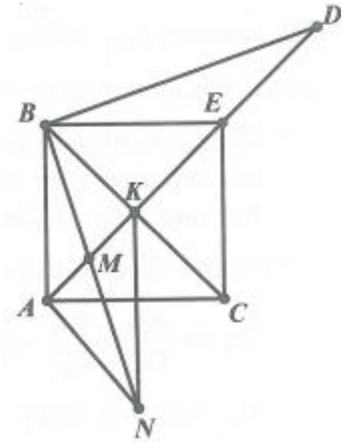
Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow H_1 = H_2$ suy ra E, H, D thẳng hàng.

Từ đó suy ra $E = D_1$

$\Rightarrow \Delta AED$ cân tại A $\Rightarrow AE = AD$

$\Rightarrow AE = HC$. ■

Bài 4. Vẽ hình bình hành ABDC (như hình bên)



Khi đó $\Rightarrow AM = \dfrac{AD}{2}$ (tính chất hình bình hành)

Mà $AD < AC + AB$(bất đẳng thức tam giác)

Từ đó: $\Rightarrow AM < \dfrac{AB + AC}{2}$. ■

Bài 5. Gọi 3 đường trung tuyến của tam giác lần lượt là AM, BN, CE.

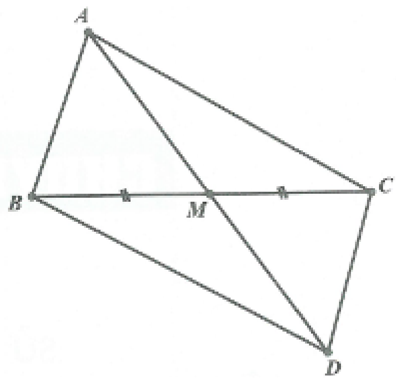
Theo kết quả của bài 12 thì:

$$AM < \frac{AB + AC}{2}; BN < \frac{AB + BC}{2}; CE < \frac{BC + AC}{2}$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$AM + BN + CE < AB + BC + CA$ (1)

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có



$$GA + GB > AB \Rightarrow \frac{2}{3}(AM + BN) > AB$$

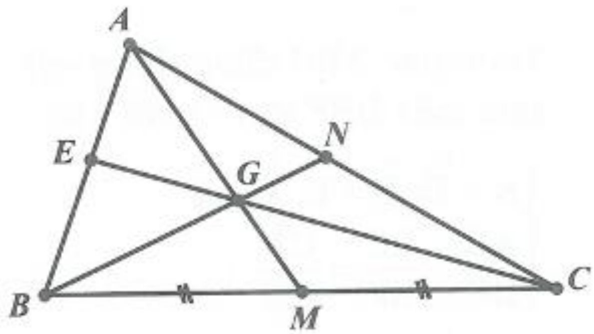
Tương tự ta có:

$$\frac{2}{3}(CE + BN) > BC; \frac{2}{3}(CE + AM) AC$$

Từ đó suy ra: $AM + BN + CE > \dfrac{3}{4}(AB + BC + CA)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 6. Lấy E là trung điểm của DK, vẽ hình bình hành ABKN như hình vẽ bên.

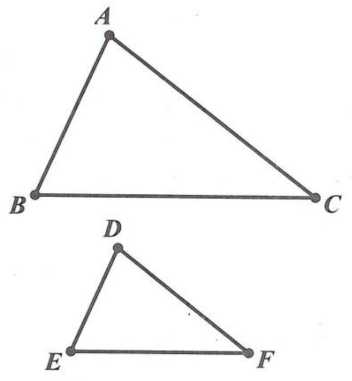


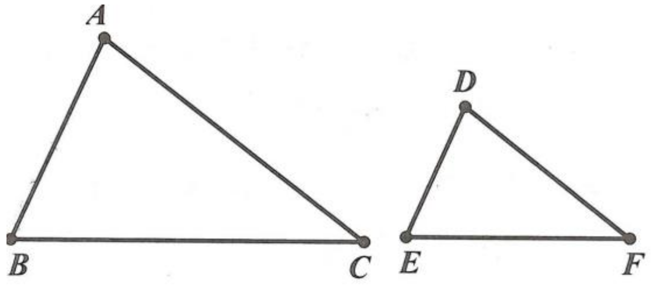
Khi đó: $\Delta ABN = \Delta EBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow ABN = EBD$

mà $\Rightarrow ABE = 90° \Rightarrow NBD = 90°$

Vậy $BM \perp BD$.■





BÀI TOÁN 7.

SỬ DỤNG TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A = D; B = E; C = F \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} \end{cases}$$

Kí hiệu: $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$.

2. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

a) Trường hợp đồng dạng cạnh - cạnh - cạnh:

* Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh. của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

* Cụ thể: Xét ΔABC và ΔDEF

Ta có $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$

Thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (c.c.c)

b) Trường hợp đồng dạng cạnh - góc - cạnh

* Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

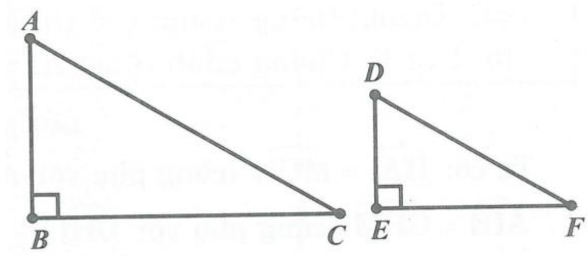
* Cụ thể: Xét ΔABC và ΔDEF

Ta có:

$\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD}$

$A = D$

Thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (c.g.c)



* *Chú ý*: Hai góc đang xét phải là hai góc xen giữa các cặp cạnh tỉ lệ đang xét.

c) Trường hợp đồng dạng góc - góc

* Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

* Cụ thể: Xét ΔABC và ΔDEF

Ta có $A = D$

$B = E$ Thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (g.g)

*** Chú ý:** Nếu một góc nhọn của tam giác vuông này bằng một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

d) Trường hợp đồng dạng cạnh huyền - cạnh góc vuông:

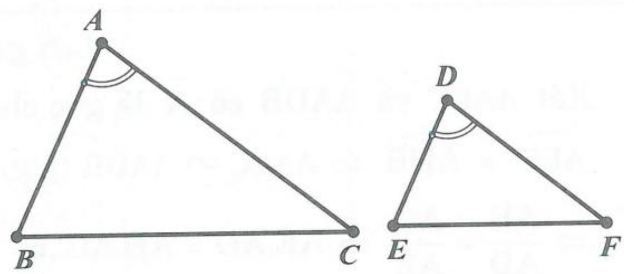
* Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

* Cụ thể: Xét ΔABC và ΔDEF

Ta có $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

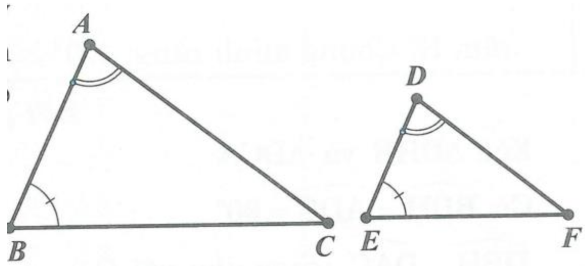
$B = E = 90^o$

thì $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)



Chú ý: Trường hợp này đặc biệt ở chỗ hai góc bằng nhau không phải là hai góc xen giữa của hai cặp cạnh tỉ lệ đang xét.

II. CÁC VÍ DỤ



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE. Chứng minh rằng: $AE.AB = AD.AC$.

Lời giải

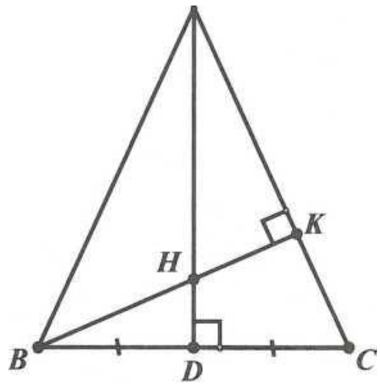
Xét ΔAEC và ΔADB có A là góc chung

$AEC = ADB \Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta ADB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AE.AD = AD.AC.$

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, $\left(A = 90^o\right)$ có đường cao *AD*, trực tâm *H*. Chứng minh rằng: $CD^2 = DH.DA$

Lời giải



Xét ΔDHB và ΔDCA

Có $BDH = ADC = 90^o$

$DBH = DAC$ (cùng phụ với C)

Suy ra $\Delta DHB \backsim \Delta DCA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{DB}{DA} \Rightarrow DH.DA = DC.DB$

$\Rightarrow CD^2 = DH.DA.$

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* nhọn, trực tâm *H*. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Đường thẳng vuông góc với *MH* tại *H* cắt *AB* và *AC* theo thứ tự tại *I* và *K*. Chứng minh rằng: *HI* = *HK*.

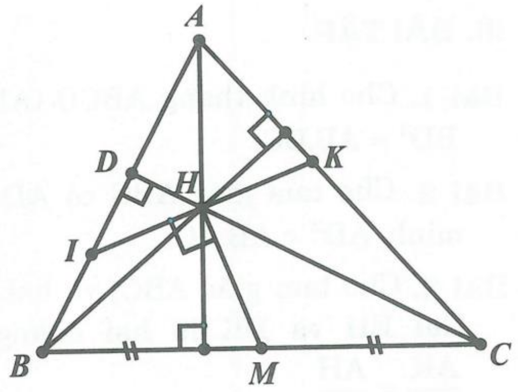
Lời giải

Ta có: $HAI = MCH$ (cùng phụ với ABC)

$AHI = CHM$ (cùng phụ với DHI)

Từ đó suy ra: $\Delta AIH \backsim \Delta CHM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IH}{HM} = \dfrac{AH}{CM}$ (1)



Ta có: $HAK = MBH$ (cùng phụ với C)

$AHK = BMH$ (sử dụng tính chất góc ngoài của tam giác)

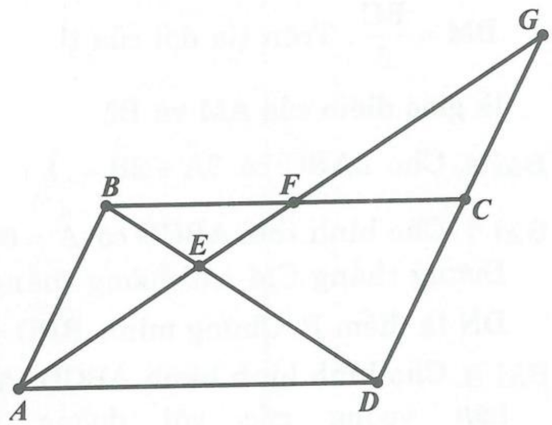
Từ đó suy ra: $\Delta AHK \backsim \Delta BMH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HK}{MH} = \dfrac{AH}{BM}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{IH}{HM} = \dfrac{HK}{HM} \Rightarrow IH = HK.$

Ví dụ 4. Cho hình bình hành *ABCD*. Một đường thẳng đi qua điểm *A* cắt đoạn *BC* tại điểm *F*, cắt đường thẳng *DC* tại điểm *G*. Chứng minh rằng: $BF.DG = AB.AD$

Lời giải



Gọi giao điểm của *AF* và *BD* là điểm *E*.

Do $\Delta DEG \backsim \Delta BEA$ (g.g)

nên $\dfrac{DG}{AB} = \dfrac{ED}{EB}$ (1)

Do $\Delta AED \backsim \Delta FEB$ (g.g)

Nên $\dfrac{AD}{BF} = \dfrac{ED}{EB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

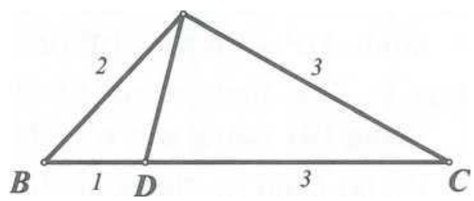
$\dfrac{AD}{BF} = \dfrac{DG}{AB} \Rightarrow BF.DG = AD.AB$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $AB = 2;\ AC = 3;\ BC = 4$. Chứng minh rằng $BAC = ABC + 2ACB$

Lời giải

Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $BD = 1$.

Ta có $CD = BC - BD = 3.$



Vì ΔACD cân tại C nên ta suy ra $ADC = DAC$ (1)

Lại có $\Delta ABD \backsim \Delta CBA$ (c.g.c) nên ta có $BAD = C$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BAC = BAD + DAC = ACB + ADC$

$= ACB + ABC + BAD = BAC = ABC + 2ACB$

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thang *ABCD (AB//CD)* sao cho $BAD = DBC$. Chứng minh $BD^2 = AB.DC$.

Bài 2. Cho tam giác *ABC* có *AD* là phân giác của tam giác *ABC*. Chứng minh $AD^2 < AB.AC$.

Bài 3. Cho tam giác *ABC*, vẽ hai đường cao *BD* và *CE* của tam giác *ABC*. Gọi *EH* và *DK* là hai đường cao của tam giác *ADE*. Chứng minh $\frac{AK}{AB} = \frac{AH}{AC}$.

Bài 4. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, vẽ hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại điểm *H*. Chứng minh $BH.BD + CH.CE = BC^2$.

Bài 5. Cho hình vuông *ABCD*, trên cạnh *BC* lấy điểm *M* sao cho $BM = \frac{BC}{3}$. Trên tia đối của tia *CD* lấy điểm *N* sao cho $CN = \frac{BC}{2}$. Gọi *I* là giao điểm của *AM* và *BN*. Chứng minh $CIM = 90^o$.

Bài 6. Cho AABC có $3A + 2B = 180°$. Chứng minh $BC^2 = AB.(AB - AC)$.

Bài 7. Cho hình thoi *ABCD* có $A = 60°$. Gọi *M* là một điểm thuộc cạnh *AD*. Đường thẳng *CM* cắt đường thẳng *AB* tại *N*. Gọi giao điểm của *BM* và *DN* là điểm *P*. Chứng minh $BPD = 60^o$.

Bài 8. Cho hình bình hành *ABCD (AB > AD)*. Từ điểm C kẻ CE và CF lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng $AD\left(E \in AB,\ F \in AD\right)$. Chứng minh $\mathrm{AB.AE+AD}.AF = AC^2$.

Bài 9. Cho tam giác *ABC* nhọn, kẻ các đường cao *BD* và *CE* của tam giác *ABC*. Chứng minh $AED = ACB$.

Bài 10. Cho tam giác *ABC*, vẽ phân giác *AD* của tam giác *ABC*. Chứng minh $AD^2 = AB.AC - DB.DC$.

Bài 11. Cho hình vuông *ABCD*. Trên cạnh *AB* lấy điểm *M*. Kẻ đường thẳng *BH* vuông góc với $CM\ \left(H \in CM\right)$. Vẽ *HN* vuông góc với *DH* cắt *BC* tại điểm *N*. Chứng minh rằng $AM.NB = NC.MB$.

Bài 12. Cho hình vuông *ABCD*, trên cạnh *AB, BC* lần lượt lấy hai điểm *E* và điểm *F* sao cho *BE = BF*. Gọi *H* là hình chiếu của *B* trên *CE*. Chứng minh $DHF = 90^o$.

Bài 13. Cho tam giác *ABC* nhọn, ba đường cao của tam giác là *AD, BE, CF* cắt nhau tại điểm *H*. Chứng minh $DEH = FEH$.

Bài 14. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường phân giác *BD* cắt đường cao *AH* tại điểm *I*. Chứng minh $AD.BD = BI.DC$.

Bài 15. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, trên cạnh *AC* lấy điểm *D*. Gọi điểm *E* là hình chiếu của điểm *C* trên *BD*. Chứng minh $AB.CE + AE.BC = AC.BE$.

Bài 16. Cho tam giác *ABC* đều, gọi *O* là trọng tâm của tam giác. Lấy *M* là một điểm bất kì thuộc cạnh *BC*, (*M* không trùng với trung điểm của cạnh *BC*). Kẻ *MP* và *MQ* lần lượt vuông góc với *AB* và *AC* sau đó cắt *OB*, OC thứ tự tại *I* và *K*. Gọi *D* là giao điểm của *PQ* và *OM*. Chứng minh $PD = QD$.

Bài 17. Cho tứ giác *ABCD* có *M, N* lần lượt là trung điểm của hai đường chéo *BD* và *AC* sao cho điểm *M* không trùng với điểm *N*. Đường thẳng *MN* cắt hai cạnh bên *AD* và *BC* lần lượt tại điểm *P* và *Q*. Chứng minh $\frac{PA}{PD}=\frac{QC}{QB}$.

Bài 18. Cho tam giác *ABC* có $AB=c,\ AC=b,\ BC=a$ thỏa mãn $A=2B$. Chứng minh $a^2=b^2+bc$.

Bài 19. Cho tam giác *ABC*. Các đường phân giác góc ngoài tại các đỉnh *B* và *C* của tam giác cắt nhau ở *K*. Đường thẳng vuông góc với *AK* tại *K* cắt các đường thẳng *AB, AC* theo thứ tự ở *D* và *E*. Chứng minh $DE^2=4BD.CE$.

Bài 20. Cho tam giác *ABC* nhọn. Các đường cao *AD, BE, CF* cắt nhau tại điểm *H*. Chứng minh rằng:

a) $AB.AF=AC.AE$

b) $BH.BE+CH.CF=BC^2$.

Bài 21. Cho tam giác *ABC* cân tại *C* có $C=15^o$. Vẽ điểm *D* nằm ở miền trong của tam giác sao cho $ADB=105^o$ và $AD=2BD$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{5}AD.BC=2CD.AB$.

Bài 22. Cho tam giác *ABD*, đường phân giác *AD*. Chứng minh rằng $AD^2<AB.AC$

Bài 23. Cho tứ giác *ABCD* có $BAC=DAC$ và $ABC=ACD$, các đường thẳng *AD* và *BC* cắt nhau ở *E*, các đường thẳng *AB* và *CD* cắt nhau ở *F*. Chứng minh rằng $AB.\ DE=BC.\ CE$ và $2AC^2<AD.\ AF+AB.\ AE$.

Bài 24. Cho tam giác cân $ABC\left(AB=AC\right)$, *I* là trung điểm của *BC*. Trên các cạnh *AB, AC* lấy lần lượt các điểm *K, H* sao cho $BK.CH=BI^2$. Chứng minh $IH.KB+HC.IK>HK.BI$.

Bài 25. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Lấy các điểm *M* và *N* lần lượt nằm trên các cạnh *AB* và *AC*; các điểm *P* và *Q* nằm trên cạnh *BC* sao cho *MNPQ* là hình vuông. Chứng minh rằng $BC\ge 3PQ$.

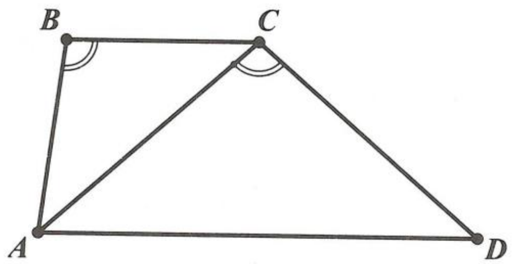
Bài 26. Cho tứ giác *ABCD*. Chứng minh rằng $AB.CD+AD.BC\ge AC.BD$.

Bài 27. Cho lục giác lồi *ABCDEF* có $AB=BC,\ CD=DE,\ EF=FA$. Chứng minh rằng

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



Xét ΔABD và ΔBDC

Có : $BAD=DBC$ (gt)

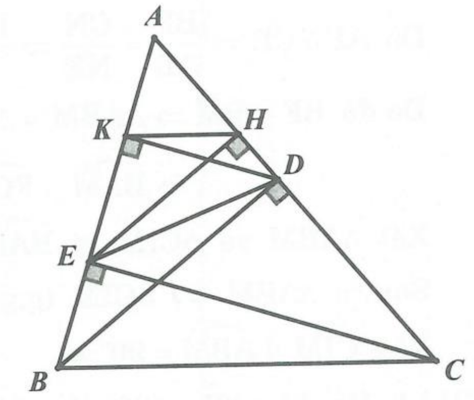
$ADB=BDC$ (so le trong)

Suy ra $\Delta ABD\backsim\Delta BDC$ (g.g)

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow BD^2=AB.DC.\ \blacksquare$$

Bài 2.

Giả sử $AB < AC$, trên đoạn AC lấy điểm M sao cho $ADM = ABD$

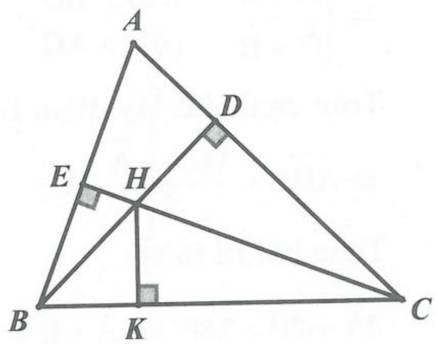


Xét ΔABD và ΔADM có $ABD = ADM$

Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta ADM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AM}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow AD^2=AM.AB\Rightarrow AD^2<AB.AC.\blacksquare$$

Bài 3. Xét trường hợp tam giác ABC nhọn, các trường hợp khác tương tự.



Do $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}\ (1)$$

Do $\Delta AHE \backsim \Delta AKD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AK}{AH}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AK}{AH}\Rightarrow \frac{AK}{AB}=\frac{AH}{AC}$$

Bài 4. Kẻ HK vuông góc với BC $\left(K \in BC\right)$

Xét ΔBHK và ΔBCD có B chung $K = D = 90^o$.

Suy ra $\Delta BHK \backsim \Delta BCD$ (g.g)

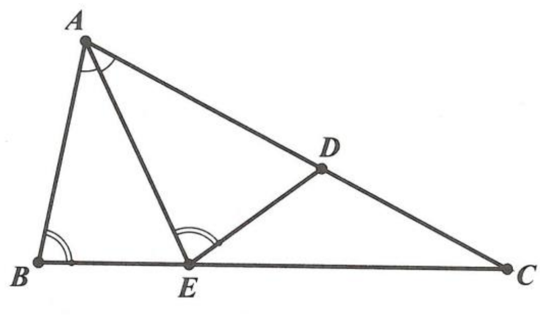
nên $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{BK}{BD}\Rightarrow BH.BD=BC.BK$ (1)

Tương tự $\Delta CKH \backsim \Delta CEB$ (g.g)

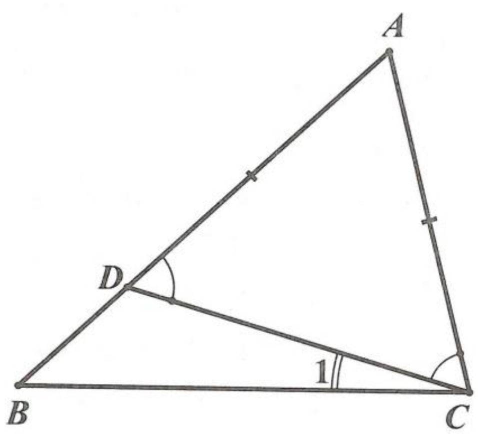
$\Rightarrow CH.CE = CK.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH.BD+CH.CE=BC\left(BK+CK\right)=BC^2$

Bài 5. Gọi E là giao điểm của AI và DC.



Gọi F là giao điểm của CI và AB .



Đặt cạnh của hình vuông $ABCD$ là a

Do $\Delta ABM \backsim \Delta EMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CE}{AB} = \dfrac{CM}{BM} = 2 \Rightarrow CE = 2a.$

Mà $CN = \dfrac{a}{2} \Rightarrow NE = 2a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}.$

Do $AF // CE \Rightarrow \dfrac{BF}{AB} = \dfrac{CN}{NE} \Rightarrow \dfrac{BF}{a} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{3a}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow BF = \dfrac{a}{3}.$

Do đó $BF = BM \Rightarrow \Delta ABM = \Delta CBF$ (c.g.c)

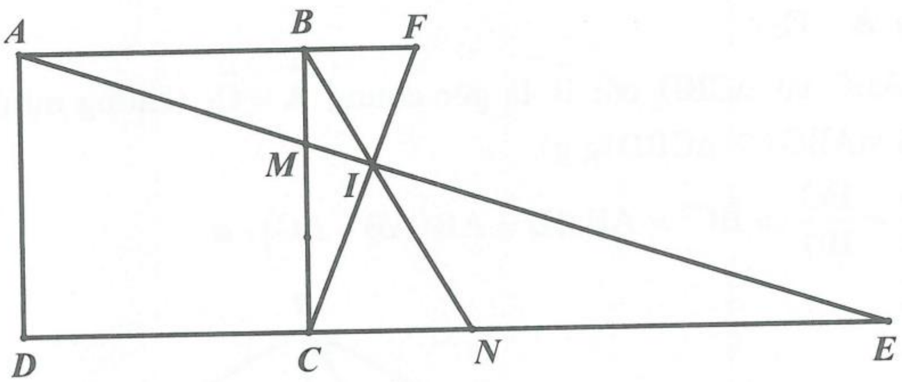
$$\Rightarrow BAM = FCB \Rightarrow BAM = ICM$$

Xét ΔABM và ΔCIM có $BAM = ICM$ (cmt), $AMB = CMI$ (đối đỉnh)

Suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta CIM$ (g.g).

Vậy $CIM = ABM = 90^o$.■

Bài 6. Do $3A + 2B = 180^o$ nên $3A + 2B = A + B + C \Rightarrow 2A + B$



$\Rightarrow \begin{cases} C > A \\ C > B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB > BC \\ AB > AC \end{cases}.$

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

$\Rightarrow ADC = \dfrac{180^o - A}{2}$ (1)

Theo bài ra ta có:

$3A+2B=180^o \Rightarrow A+B=\dfrac{180^o-A}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow ADC=A+B$.

Mà $ADC=C_1+B$ (tính chất góc ngoài của tam giác).

Suy ra $A=C_1$.

Xét ΔABC và ΔCBD có: B là góc chung $A=C_1$ (chứng minh trên).

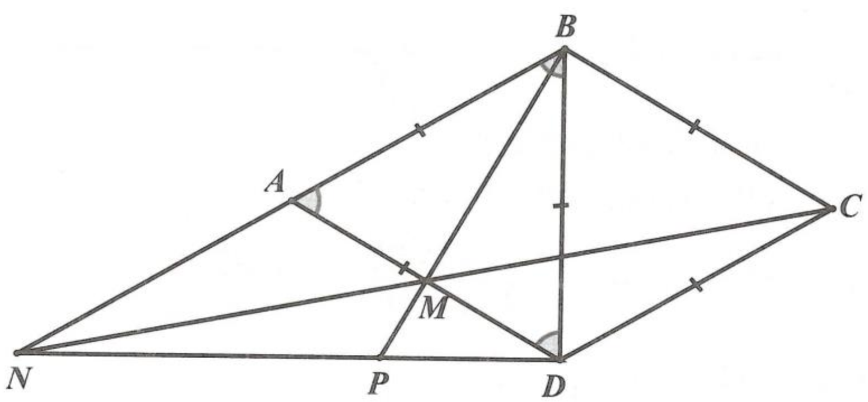
Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BC^2=AB.BD=AB\left(AB-AC\right)$

Bài 7.

Do $\Delta NAM \backsim \Delta NBC \Rightarrow \dfrac{NA}{NB}=\dfrac{AM}{BC} \Rightarrow \dfrac{NA}{AM}=\dfrac{NB}{BD}$ (1) (do $BC=BD$)

Do



$\Delta NAM \backsim \Delta CDM \Rightarrow \dfrac{NA}{AM}=\dfrac{CD}{DM} \Rightarrow \dfrac{NA}{AM}=\dfrac{BD}{DM}$ (2) (do $CD=BD$)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$

Xét ΔBND và ΔBDM có $DMN = MDB = 60^o$ (gt)

$\frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\Delta BND \backsim \Delta DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow BND = DBM$

Mà $BPD = BND + NBP$ (tính chất góc ngoài)

$\Rightarrow BPD = DBM + NBP = DBN = 60^o$

Bài 8.

Gọi các điểm *M* và điểm *N* lần lượt là hình chiếu của điểm *D* và điểm *B* trên đường thẳng *AC*.

Do $\Delta ANB \backsim \Delta AEC$ (g.g)

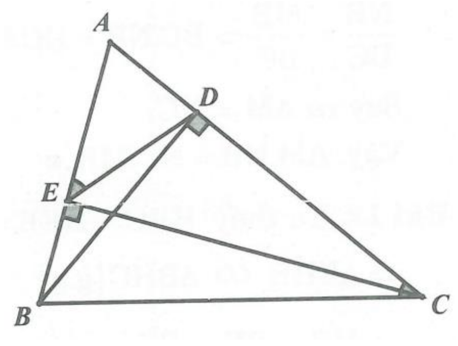
$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AN$ (1)

Do $\Delta AMD \backsim \Delta AFC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AF} \Rightarrow AD.AF = AC.AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$AB.AE + AD. = AC\left(AN + AM\right) = AC^2$.



Bài 9. Do $\Delta ADB \backsim \Delta AEC$ (g.g)

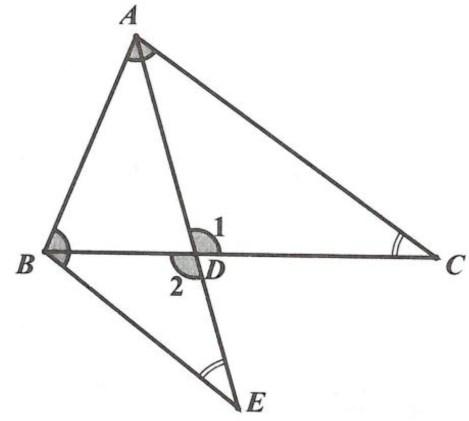
$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Xét ΔAED và ΔACB có A là góc chung

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AED \backsim \Delta ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow AED = ACB$.

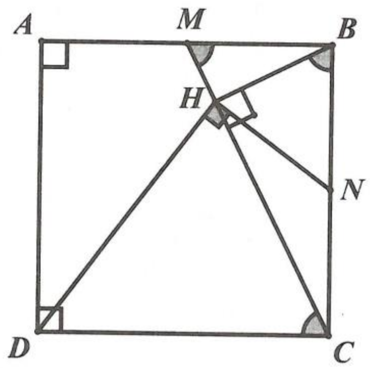
Bài 10. Theo tính chất tam giác ngoài của tam giác, ta có $ADC > ABC$. Trên tia đối của ta DA lấy điểm E sao cho $ADC = ABE$



$$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta ABE\ (g.g) \Rightarrow \begin{cases} C = E \quad (*) \\ \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AE} \end{cases}$$

$\Rightarrow AD.AE = AB.AC \Rightarrow AD\left(AD + DE\right) = AB.AC$

$\Rightarrow AD^2 = AB.AC - AD.DE$ (1)



Xét ΔADC và ΔABE có $D_1 = D_2$ (đối đỉnh)

$C = E$ (chứng minh ở (*))

Suy ra $\Delta ADC \backsim \Delta ABE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{DC}{DE} \Rightarrow AD.DE = BD.DC$ (2)

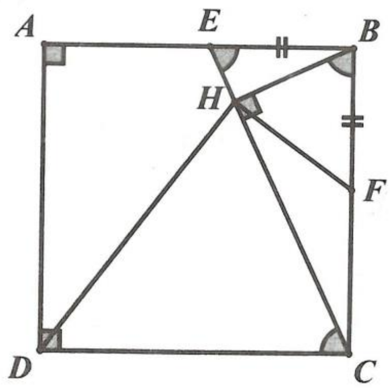
Từ (1) và (2) suy ra $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

Bài 11. Xét ΔDHC và ΔNHB có $DCH = NBH$ (cùng phụ BCH)

$DHC = NHB$ (cùng phụ CHN)

$\Rightarrow \Delta DHC \backsim \Delta NHB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{DC} = \dfrac{HB}{HC}$ (1)



Do $\Delta MBH \backsim \Delta BCH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BH}{HC} = \dfrac{MB}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{NB}{DC} = \dfrac{MB}{DC} \Rightarrow BC.NB = DC.MB \Rightarrow NB = MB$ (do $BC = DC$).

Suy ra $AM = NC$.

Vậy $AM.NB = NC.MB$

Bài 12. Tha thấy $HBC = HEB = HCD$

$\Rightarrow \Delta EHB \backsim \Delta BHC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BF}{CD}$ (do $BE = BF; BC = CD$)

Xét ΔHBF và ΔHCD có $HBF = HCD$ (chứng minh trên)

và $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{BF}{CD}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\Delta HBF \backsim \Delta HCD$ (c.g.c) $\Rightarrow BHF = CHD \Rightarrow DHF = 90^o$.

Bài 13. $\Delta BHF \backsim \Delta CHE$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BH}{HF} = \frac{CH}{HE}$

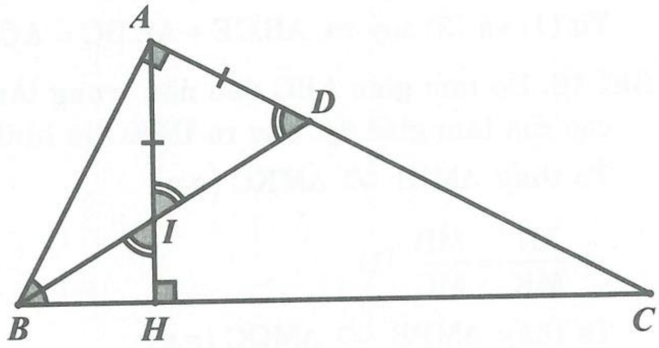
Xét ΔBHC và ΔFHE

Có $BHC = FHE$ (đối đỉnh)

$\frac{BH}{HF} = \frac{CH}{HE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta BHC \backsim \Delta FHE$ (c.g.c)

$\Rightarrow C_1 = E_1$ (1)



Tương tự, chứng minh được $\Delta AHB \backsim \Delta EHD$ (c.g.c) $\Rightarrow A_2 = E_2$ (2)

Mà $\Rightarrow C_1 = A_2$ (3) (cùng phụ với A_1)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $E_1 = E_2$. Vậy $DEH = FEH$.

Bài 14. Ta có $\Delta ABH \backsim \Delta CBA$ (g.g)

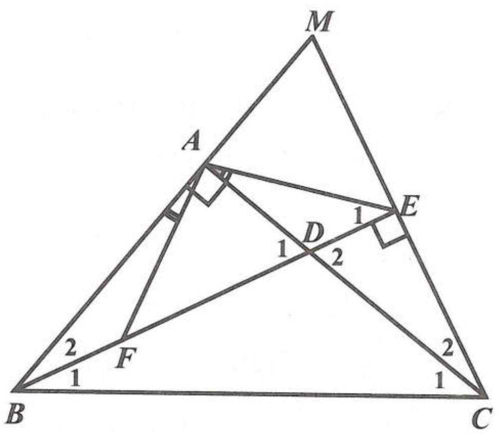
$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC}$ mà $\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{DC}$

(tính chất đường phân giác)

$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{AD}{DC}$ (1)

Do $\Delta BHI \backsim \Delta BAD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BH}{BA} = \frac{BI}{BD}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AD}{DC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow AD.BD = DC.BI$.

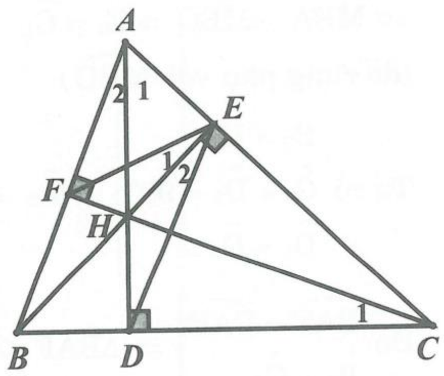
Bài 15. Giả sửa AB và CE cắt nhau tại điểm M. Trên BE lấy điểm F sao cho $BAF = EAC \Rightarrow EAF = 90^o$

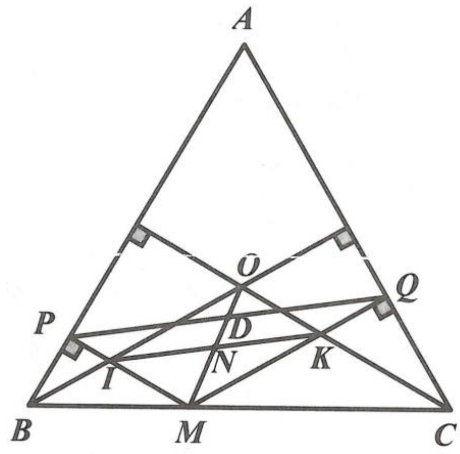
Do $\Delta MEB \backsim \Delta MAC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{ME}{MB}$.

Xét ΔMAE và ΔMCB có M là góc chung

$\frac{MA}{MC} = \frac{ME}{MB}$ (chứng minh trên)

$\Delta MAE \backsim \Delta MCB$ (c.g.c)





$\Rightarrow MEA = MBC \Rightarrow E_1 = C_1$

(do cùng phụ với MBC)

Ta có $\left.\begin{array}{l} B_2 = D_1 \\ C_2 = D_2 = 90^o \\ D_1 = D_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B_2 = C_2$

Do $\left.\begin{array}{l} BAF = CAE \\ B_2 = C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BAF \backsim \Delta CAE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow AB.CE = AC.\text{BF} \ (1)$$

Do $\left.\begin{array}{l} \text{EAF} = \text{CAB} = 90^0 \\ E_1 = C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EAF \backsim \Delta CAB$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow AE.BC = AC.EF \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB.CE + AE.BC = AC\left(BF + EF\right) = AC.BE.$

Bài 16. Do tam giác *ABC* đều nên trọng tâm *O* là giao điểm của các đường cao của tam giác ấy. Suy ra *IMKO* là hình bình hành.

Ta thấy $\Delta MIB \backsim \Delta MKC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MI}{MK} = \frac{MB}{MC}$ (1)

Ta thấy $\Delta MPB \backsim \Delta MQC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MP}{MQ}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MI}{MK} = \frac{MP}{MQ} \Rightarrow \frac{MI}{MP} = \frac{MK}{MQ} \Rightarrow IK // PQ.$

Vì *IMKO* là hình hình hành nên $NI = NK$ mà $IK // PQ$.

Vậy $PD = QD$ (định lý Thales).

Bài 17.

Từ điểm *A* và điểm *C* kẻ các đường thẳng song song với đường thẳng *BD* cắt đường thẳng *MN* lần lượt tại điểm *E* và điểm *F*.

$\Rightarrow \Delta ANE = CNF$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = CF$

Vì $\Rightarrow \Delta APE \backsim \Delta DPM$

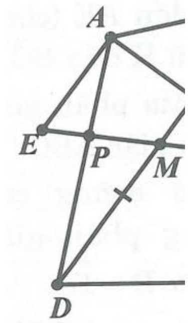
$$\Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{AE}{DM} \ (1)$$

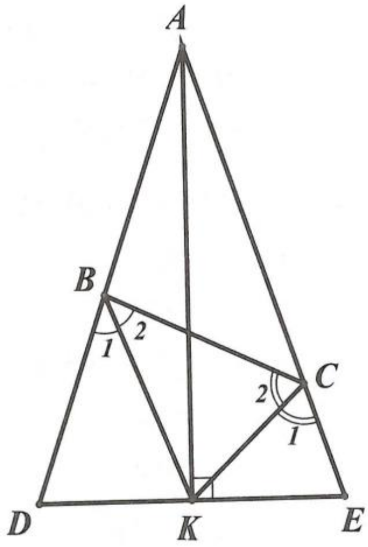
Vì $\Delta CQF \backsim \Delta BQM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CQ}{QB} = \frac{CF}{BM} \ (2)$$

Mà $\frac{AE}{DM} = \frac{CF}{BM}$ (3) do $AE = CF; DM = BM$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{PA}{PD} = \frac{QC}{QB}$.





Bài 18. Vẽ phân giác AD của ΔABC. Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ta có:

$$\frac{c}{b} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{c+b}{b} = \frac{BD+DC}{DC} \Rightarrow DC = \frac{ab}{c+d}.$$

Xét ΔABC và ΔDAC có: C chung và

$$ABC = DAC \left(= \frac{1}{2} A\right).$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DAC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow AC^2 = BC.DC \Rightarrow b^2 = a.\frac{ab}{b+c} \Leftrightarrow b(b+c) = a^2.$$

Vậy $a^2 = b^2 + bc$

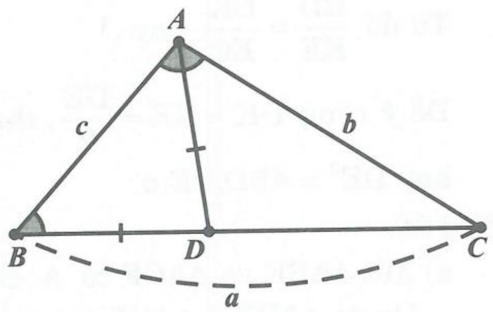
Chú ý: Mở rộng bài toán.

Nếu giả thiết bài toán trở thành $A + 2B = 4C$ thì khi đó $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Thật vậy, áp dụng bài 18 ta có:

Do

$$\left.\begin{array}{l} A = 2B \Rightarrow a^2 = b^2 + bc \\ B = 2C \Rightarrow b^2 = c^2 + ac \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = c^2 + ac + bc = c(a+b+c).$$



$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{b+c}{a^2} = \frac{1}{2} + \frac{b+c}{b(b+c)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Bài 19.

Theo tính chất điểm nằm trên tia phân giác của góc, khoảng cách từ K đến AD bằng khoảng cách từ K đến AE (cùng bằng khoảng cách từ K đến BC).

Do đó K nằm trên tia phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Tam giác ADE có đường cao đồng thời là đường phân giác nên cân tại A. Từ đó $D = E$.

Có tổng 4 góc của tứ giác $BCED$ bằng 360^o .

Mà $B_1 = B_2; C_1 = C_2; D = E$ nên $B_1 + C_1 + E = \frac{360^o}{2} = 180^o$

Cũng có $CKE = C_1 + E = 180^o$ nên $CKE = B_1$

Hai tam giác BDK và KEC có $CKE = B_1, D = E$ nên chúng đồng dạng (g.g).

Từ đó $\frac{BD}{KE} = \frac{DK}{EC}$ hay $BD.EC = DK.KE$ (*) .

Để ý rằng $DK = KE = \frac{DE}{2}$, thay vào (*) ta được $BD.CE = \frac{DE^2}{4}$ hay $DE^2 = 4BD.CE$

Bài 20.

a) Xét ΔABE và ΔACF có A , $AEB = AFC = 90^o$

Do đó $\Delta ABE \,\Delta\, \Delta ACF$ (g.g)

Từ đó suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$ hay $AB.AF = AC.AE.$

b) Dễ dàng chứng minh được:

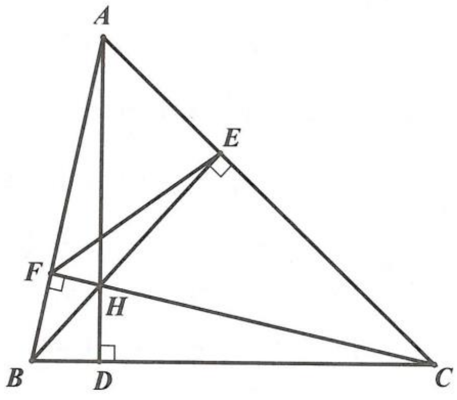
+ $\Delta BHD \,\Delta\, \Delta BCE$ (g.g) suy ra $\frac{BH}{BD} = \frac{BC}{BE}$

Hay $BH.BE = BD.BC$ (1)

+ $\Delta CHD \,\Delta\, \Delta CBF$ (g.g) suy ra $\frac{CH}{BC} = \frac{CD}{CF}$

Hay $CH.CF = CD.BC$ (2)

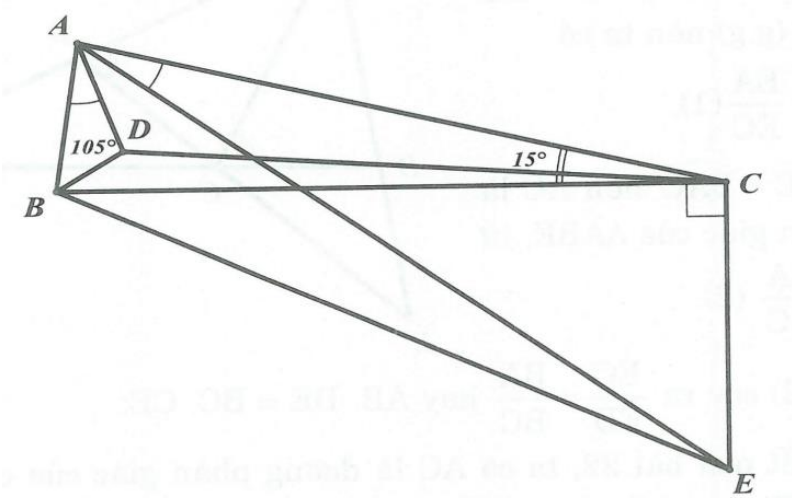
Cộng (1) và (2) ta được:



$BH.BE + CH.CF = BD.BC + CD.BC = BC\left(BD.CD\right) = BC^2.$

Chú ý: Qua bài tập trên, để chứng minh được hệ thức dạng $x.y = s.t = r^2$, ta có thể chứng minh hai hệ thức $x.y = r.a; s.t = r.b$ với $a + b = r$. Cộng hai hệ thức này cho ta điều phải chứng minh.

Bài 21.



Trên nửa mặt phẳng bờ *BC* không chứa *A* vẽ tia *Cx* vuông góc với *BC*. Lấy điểm *E* trên tia *Cx* sao cho *BC = 2CE.*

Thấy rằng: $ACE = 105^o; \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{CE} = 2$ (vì $CA = CB; CB = 2CE$).

Nên ΔADB và ΔACE đồng dạng (c.g.c). Từ đó: $CAE = DAB; \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE}.$

Hai tam giác DAC và BAE đồng dạng (c.g.c) nên $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{BE}$ hay $AD.BE = CD.AB\,(*)$

Mặt khác tam giác *BCE* vuông tại *C*. Nếu đặt $CE = x$ thì $BC = 2x$.

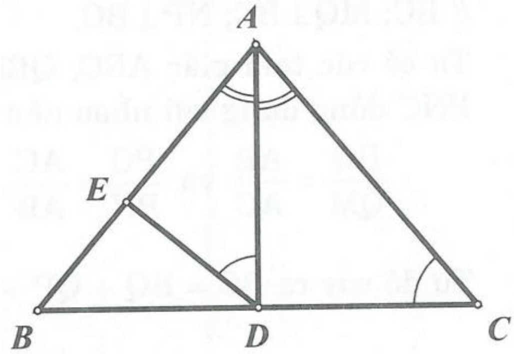
Theo định lý Pythagore: $BE^2 = BC^2 + CE^2 = x^2 + \left(2x\right)^2 = 5x^2 \Rightarrow BE = x\sqrt{5}.$.

Từ đó $BE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}BC$. Thay vào hệ thức (*) ta được $\sqrt{5}AD.BC = 2CD.AB.$

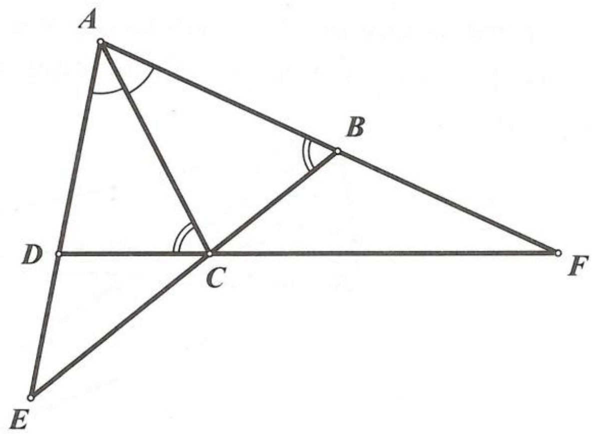
Bài 22. Ta có $C = ADB$. Trong góc ADB vẽ tia DE (E thuộc AB) sao cho $ADE = C$, khi đó điểm E nằm trên đoạn thẳng AB. Từ đó suy ra $AE < AB$

Mặt khác $\Delta AED \backsim \Delta ADC$ (g.g) nên

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AD}{AC}$ hay $AE.AC = AD^2$.



Từ đó $AD^2 = AE.AC < AB.AC$



Bài 23. Ta có $DAC = BAC, ABC = ACD$ nên $ACB = ADC$

Từ đó $ACE = EDC$

Hai tam giác ACE và CDE đồng dạng (g.g) nên ta có

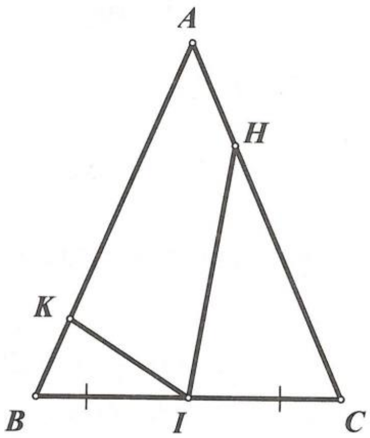
$\frac{EC}{ED} = \frac{EA}{EC}$ (1)

Lại có $DAC = BAC$ nên AC là đường phân giác của ΔABE, từ đó $\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EC}{ED} = \frac{BA}{BC}$ hay $AB.DE = BC.CE.$

Áp dụng kết quả bài 22, ta có AC là đường phân giác của tam giác ABE và ACF nên $AE.AB > AC^2$ và $AD.AF > AC^2$.

Từ đó $2AC^2 < AB.AE + AD.AF$.



Bài 24. Ta có $BK.CH = BI^2 \Rightarrow \frac{BK}{BI} = \frac{BI}{CH} = \frac{CI}{CH}$ (vì $BI = CI$)

Từ đó $\Delta BKI \backsim \Delta CIH$ (c.g.c)

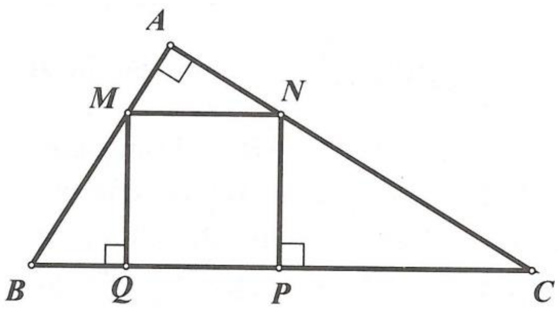
Suy ra $\frac{BK}{CI} = \frac{BI}{CH} = \frac{KI}{IH}$

$\Rightarrow IH.KB = IK.CI = IK.BI; HC.IK = BI.IH.$

Như vậy $IH.KB + IK.HC = IK.BI + IH.BI$

$= BI\left(IH.IK\right) > BI.HK$

Bài 25



Vì MNPQ là hình vuông nên

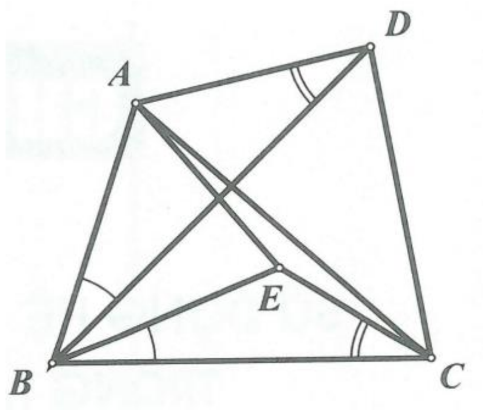
$MN // BC; MQ \perp BC; NP \perp BC$

Ta có tam giác ABC, QBM, PNC đồng dạng với nhau nên

$\frac{BQ}{QM} = \frac{AB}{AC}$ và $\frac{PC}{PN} = \frac{AC}{AB}$.

Từ đó suy ra $BC = BQ + QP + PC = QP\left(\frac{BQ}{QP} + 1 + \frac{PC}{QP}\right)$

$$= QP\left(\frac{BQ}{QM} + 1 + \frac{PC}{PN}\right) = QP\left(1 + \frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) \geq 3QP.$$



Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$.

Chú ý: Bài toàn trên sử dụng bất đẳng thức đại số đơn giản sau:

Với hau số dương *a* và *b*, ta luôn có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$

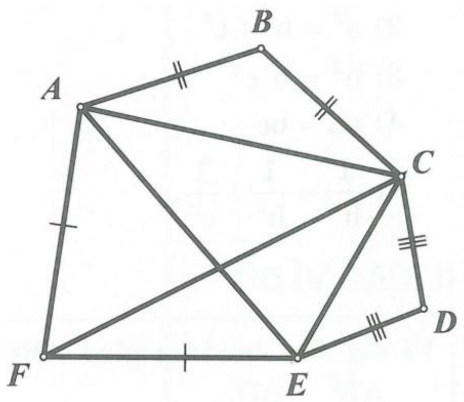
Bài 26. Trong góc ABC lấy điểm E sao cho

$ABD = EBC; ADB = ECB$

Khi đó ta có $\Delta ABD \backsim \Delta EBC$ (g.g)

Suy ra $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{EC}.$

Từ đó $AD.BC = BD.EC$ (1)



Xét ΔABE và ΔDBC có $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}$; ABE = DBC

Do vậy $\Delta ABE \backsim \Delta DBC$ (c.g.c),

Suy ra $\frac{AB}{DB} = \frac{AE}{DC}$ hay $AB.DC = AE.DB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$AB.CD + AD.BC = AE.DB + EC.DB = DB\left(AE + EC\right) \geq AC.BD.$$

Chú ý: Kết quả của bài tập 18 là nội dung *định lý Ptolemy*. Dấu "=" ở bất đẳng thức Ptolemy xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp (trong trường hợp này có đẳng thức Ptolemy).

Bài 27. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy (bài 15) vào tứ giác ACEF

ta được $AC.EF + AF.CE \geq AE.FC.$

Theo bài ra $AF = FE$ nên ta có

$AC.AF + AF.CE \geq AE.\text{FC}$

$\Rightarrow \text{AF}\left(AC + CE\right) \geq AE.FC$

$\Rightarrow \frac{FA}{FC} \geq \frac{AE}{AC + CE}.$

Tương tự ta có $\frac{DE}{DA} \geq \frac{AC}{AE + AC}$ và $\frac{BC}{BE} \geq \frac{AC}{EC + AE}.$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$\frac{FA}{FC}+\frac{DE}{DA}+\frac{BC}{BE}\ge \frac{AE}{AC+CE}+\frac{CE}{AE+AC}+\frac{AC}{CE+AE}\ge \frac{3}{2}$.

Chú ý: Bài toán trên sử dụng bất đẳng thức đại số quen thuộc sau: Với ba số a,b và c dương, ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge \frac{3}{2}$.

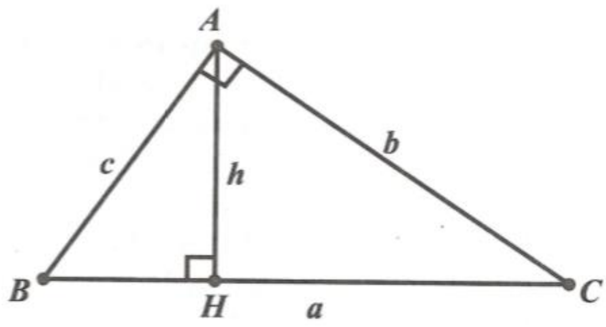
BÀI TOÁN 8. SỬ DỤNG HỆ THỨC GIỮA CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho tam giác ABC vuông tại A (hình bên). Gọi $BC=a; AC=b; AB=c; AH=h; BH=c'; HC=b'$

Khi đó ta có các hệ thức:



$1) b^2=ab'; c^2=ac'$

$2) a^2=b^2+c^2$

$3) h^2=b'c'$

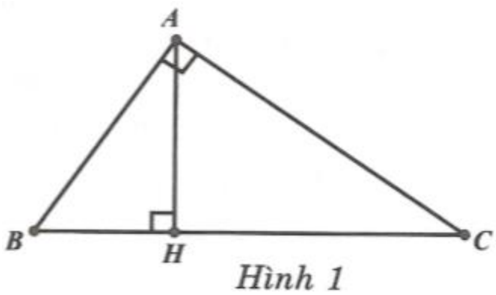
$4) ah=bc$

$5) \frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BH}{BC}$

Lời giải



Hình 1

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông ta có:
$AB^2=BH.BC\,(1)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông ta có:
$AC^2=CH.BC\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BH.BC}{CH.BC}=\frac{BH}{CH}$

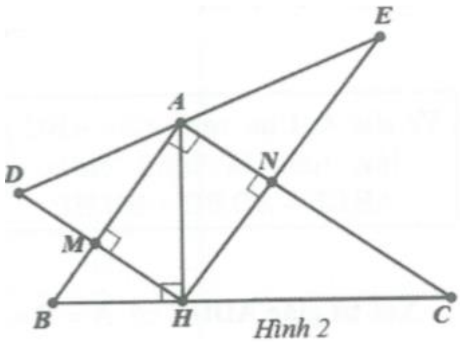
Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có: $\frac{AB^2}{AB^2+BC^2}=\frac{BH}{BH+CH}\Rightarrow \frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BH}{BC}$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH, gọi D và E là điểm đối xứng của H qua AB và AC. Chứng minh $HD^2+HE^2=4BH.\text{HC}$

Lời giải

Do D đối xứng với H qua AB nên: $DAH = 2.BAH\ (1)$

Do E đối xứng với H qua AC nên: $EAH = 2.CAH\ (2)$



Hình 2

Từ (1) và (2) ta suy ra: $DAH + EAH = 180° \Rightarrow$ D, A, E thẳng hàng.

Vì tứ giác AMHN có $A = M = N = 90° \Rightarrow DHE = 90°$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A:

$AH^2 = BH.CH \Rightarrow (2AH)^2 = 4BH.CH$

Do D và H đối xứng qua AB, E và H đối xứng với nhau qua AC nên $2.AH = DE$

Vì thế: $DE^2 = 4.BH.CH$

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác DHE vuông tại H, ta có: $DE^2 = HD^2 + HE^2$

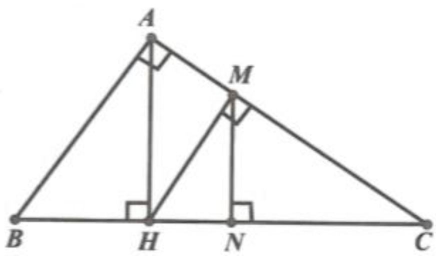
Từ đó: $HD^2 + HE^2 = 4BH.HC$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Từ H kẻ $HM \perp AC\ (M \in AC)$, gọi N là hình chiếu của M trên BC. Chứng minh $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{MN^2}$

Lời giải

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác HMC vuông tại M:

$$\frac{1}{MN^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{MC^2}\ (1)$$



Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác AHC vuông tại H:

$$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HC^2}\ (2)$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác ABC vuông tại A:

$$\frac{1}{HA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\ (3)$$

Từ (1) (2) và (3) ta suy ra: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{MN^2}$

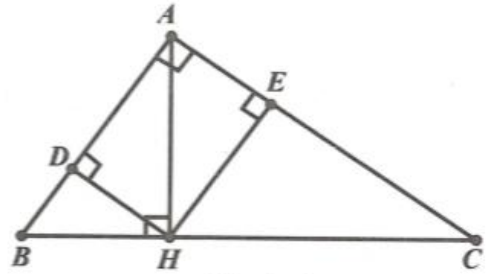
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh $AE.CE + AD.BD = BH.HC$

Lời giải

Xét tứ giác ADHE có $A = D = E = 90^\circ$ nên ADHE là hình chữ nhật.

Suy ra: $DE = AH \Rightarrow DE^2 = AH^2 \Rightarrow HE^2 + HD^2 = AH^2\,(*)$

(áp dụng định lý Pythagore cho tam giác DHE vuông tại H).



Hình 4

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHC vuông tại H:
$HE^2 = AE.CE\,(1)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHC vuông:
$HD^2 = AD.BD\,(2)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông: $AH^2 = BH.HC\,(3)$

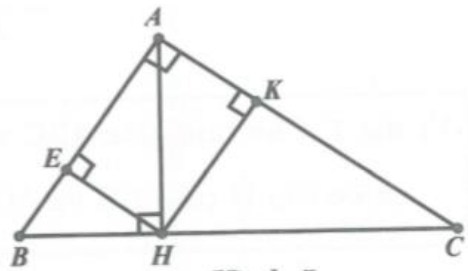
Lấy (1), (2) và (3) thay vào (*) ta được: $AE.CE + AD.BD = BH.HC$

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, gọi E và K lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{HB^2}$

Lời giải

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHB vuông ta có:

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{AH^2}\,(1)$$



Hình 5

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\,(2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{HB^2}$

Tứ giác AEHK là hình chữ nhật do có 3 góc vuông nên $AK = HE$.

Vậy $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{HB^2}$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi E, K lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC còn I là hình chiếu của A trên EK. Chứng minh $\dfrac{2}{AB^2} + \dfrac{2}{AC^2} = \dfrac{1}{AI^2} - \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2}$

Lời giải

Ta thấy tứ giác AEHK là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông nên $HK = AE; HE = AK$

Áp dụng hệ thức trong tam giác AKE vuông: $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AK^2}$

Suy ra $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{HE^2}\,(1)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHC vuông: $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{AH^2}+\dfrac{1}{HC^2}(2)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHB vuông: $\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{AH^2}+\dfrac{1}{HB^2}(3)$

Áp dụng hệ thức trong tam giác ABC vuông: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}(4)$

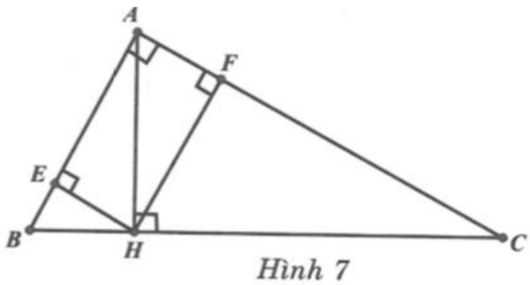
Từ (1) (2) (3) và (4) ta có: $\dfrac{1}{AI^2}=2\left(\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}\right)+\dfrac{1}{HA^2}+\dfrac{1}{HB^2}\Rightarrow\dfrac{2}{AB^2}+\dfrac{2}{AC^2}=\dfrac{1}{AI^2}-\dfrac{1}{HB^2}-\dfrac{1}{HC^2}$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Gọi E, F là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng: $\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BE}{CF}$

Lời giải

Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông:

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BH.BC}{CH.BC}=\frac{BH}{CH}$$
$$\Rightarrow\frac{AB^4}{AC^4}=\frac{BH^2}{CH^2}=\frac{BE.AB}{CF.AC}$$
$$\Rightarrow\frac{AB^3}{AC^3}=\frac{BE}{CF}$$



Hình 7

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB, kẻ HF vuông góc với AC $(E\in AB;F\in AC)$ Gọi M, N lần lượt là hình chiếu E, F trên BC. Chứng minh: $\dfrac{AB^4}{AC^4}=\dfrac{BM}{CN}$

Lời giải

Sử dụng kết quả của ví dụ 7 ta được: $\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BE}{CF}\Rightarrow\dfrac{AB^6}{AC^6}=\dfrac{BE^2}{CF^2}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $\dfrac{AB^6}{AC^6}=\dfrac{BE^2}{CF^2}=\dfrac{BM.BH}{CN.CH}(1)$

Mà ta có: $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BH.BC}{CH.BC}=\dfrac{BH}{CH}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{AB^6}{AC^6}=\dfrac{BM.AB^2}{CN.AC^2}\Rightarrow\dfrac{AB^4}{AC^4}=\dfrac{BM}{CN}$

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DIL là một tam giác cân.

b) Tổng $\frac{1}{DI^2}+\frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC > AB)$. Trên cạnh AC lấy điểm B' sao cho $AB' = AB$. Từ B' kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD tại điểm E. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BC^2}$

Bài 3. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = k.AD$ (k > 0, k không đổi). Qua điểm A kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại M cắt DC tại điểm I. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{(k.AI)^2}$ không đổi.

Bài 4. Cho hình vuông ABCD cạnh a không đổi. Trên đoạn AD lấy điểm F sao cho $AD = k.\text{FD}$ (k > 0, k không đổi). Từ điểm F kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại điểm M, cắt DC tại điểm I. Chứng minh $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(k.\text{FI})^2}$ không đổi khi đường thẳng qua F thay đổi.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD cạnh a không đổi, lấy E và F lần lượt trên DC và AD sao cho $EC=\frac{a}{m}; FD=\frac{a}{n}$ (m, n > 0, m và n không đổi). Từ F kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại M, cắt DC tại I. Từ E kẻ đường thẳng bất kì cắt AB tại N cắt BC tại K. Chứng minh: $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{EC^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD cạnh a lấy E, F lần lượt trên cạnh DC và DA sao cho $EC=\frac{a}{m}; FD=\frac{a}{n}(m,n>0)$. Từ F kẻ đường thẳng bất kì cắt BC tại M, cắt DC tại I. Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với FI cắt AB tại N, cắt BC tại K. Chứng minh: $\frac{EK}{FI}=\frac{m}{n}$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Gọi I là giao điểm của AH và EF. Chứng minh rằng: $BH.CH = 4.IE.IF$

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên đoạn HC và HB lần lượt lấy M và N sao cho $AMB = ANC = 90°$. Chứng minh $AM = AN$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC không đổi. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Xác định hình dạng của tam giác ABC để diện tích ADHE đạt giá trị lớn nhất.

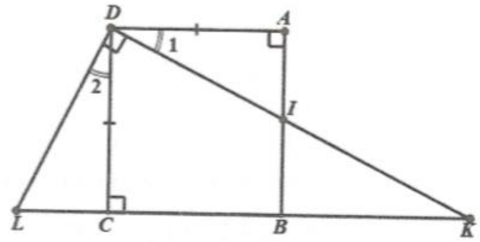
Bài 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của AC. Đường thẳng qua A vuông góc với BM cắt BC tại D. Tính $\frac{DC}{DB}$

Bài 11. Cho ABCD là hình thang có AB // CD sao cho tồn tại điểm O cách đều bốn cạnh của hình thang. Một đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt AB và CD lần lượt tai E và F. Chứng minh $\frac{BE}{AE}=\frac{DF}{CF}$

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HD vuông góc với AB, HE vuông góc với AC (D $\in$ AB; E $\in$ AC). Chứng minh rằng: $AD.AB = AE.\text{AC} = \text{HB.HC}$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.



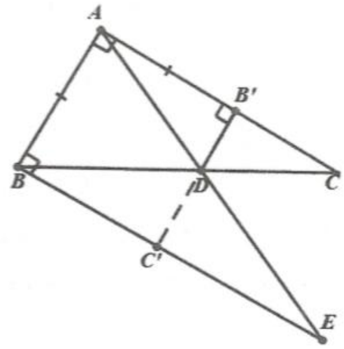
a) ΔADI = ΔCDL(g.c.g)

$\Rightarrow DI = DL \Rightarrow$ ΔDIL cân.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác DLK vuông tại D:

$\frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2} \Rightarrow \frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$ không đổi

Bài 2.



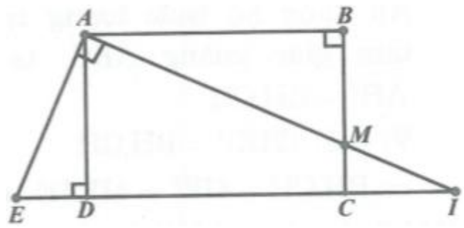
Gọi C’ là giao điểm của B’D với BE như hình vẽ:

$\Rightarrow$ ABC’B’ là hình vuông cạnh a.

Theo bài trên thì: $\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2}$ và $\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2}$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 3.

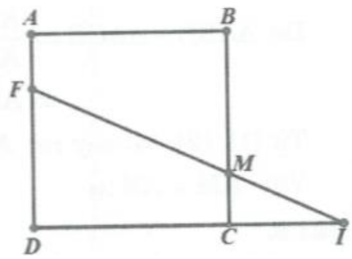


Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM cắt cắt DC tại E. Ta thấy:

$\Delta ABM \sim \Delta ADE(g.g) \Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{AB}{AD} = k \Rightarrow AM = k.AE$

Vậy $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{(k.AI)^2} = \frac{1}{(k.AE)^2} + \frac{1}{(k.AI)^2} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AI^2}\right) = \frac{1}{k^2 AD^2}$ không đổi

Bài 4.

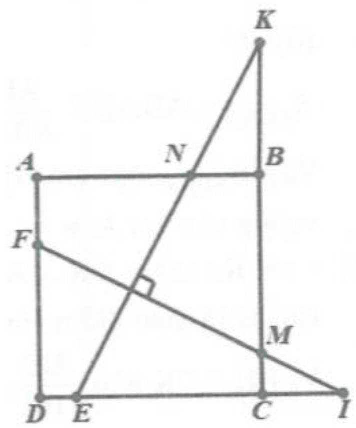


Theo bài 3 thì $\frac{1}{FM^2} + \frac{1}{(k.FI)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{FD^2}$

Cơ mà $FD = \frac{a}{k}$ nên $\frac{1}{FM^2} + \frac{1}{(k.FI)^2} = \frac{1}{a^2}$ không đổi

Bài 5.

Theo bài 4 thì: $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{a^2}$ và $\frac{1}{EN^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}=\frac{1}{a^2}$ $\Rightarrow$ đpcm



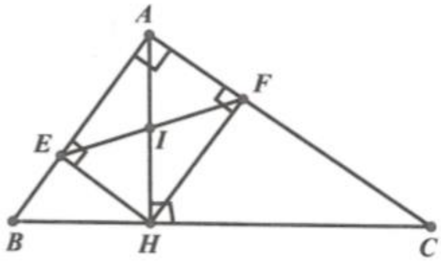
Bài 6.

Theo bài 4 thì: $\frac{1}{FM^2}+\frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{EN^2}+\frac{1}{(m.EK)^2}$

Vì $EN\perp FM\Rightarrow EN=FM\Rightarrow \frac{1}{(n.FI)^2}=\frac{1}{(m.EK)^2}$

$\Rightarrow \frac{EK}{FI}=\frac{n}{m}$ (đpcm).

Bài 7.



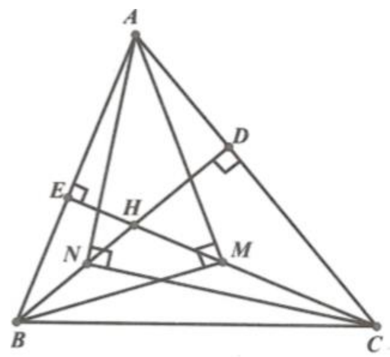
Ta thấy ΔEHF là hình chữ nhật nên: $2IE=2IF=AH$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có

$AH^2=BH.CH$

Vì thế $(2IE)^2=BH.CH\Rightarrow BH.CH=4IE^2=4IE.IF$

Bài 8.



Áp dụng hệ thức cho tam giác ABM vuông tại M

$AM^2=AE.AB(1)$

Áp dụng hệ thức cho tam giác ACN vuông tại N

$AN^2=AD.AC(2)$

Do ΔABD ~ ΔACE $\Rightarrow\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AD.AC=AE.AB(3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $AM^2=AN^2$

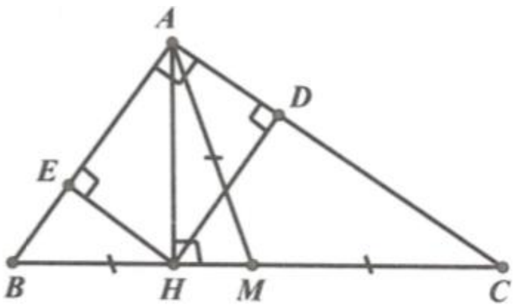
Vậy $AM=AN$

Bài 9.

Gọi AM là đường trung tuyến của tam giác ABC $\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}$ không đổi

Áp dụng hệ thức trong tam giác AHB

$$AE.AB = AH^2 \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$$



Áp dụng hệ thức trong tam giác AHC

$$AD.AC = AH^2 \Rightarrow AD = \frac{AH^2}{AC}$$

Khi đó

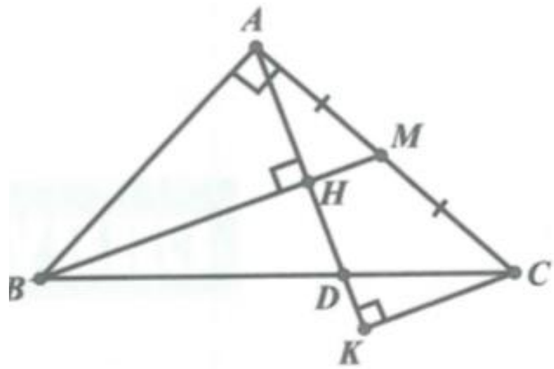
$S_{ADHE} = AD.AE = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{AH.BC} = \frac{AH^3}{BC} \le \frac{AM^3}{BC} = \frac{BC^2}{8}$ (không đổi)

Vậy S_{ADHE} đạt giá trị lớn nhất khi H trùng với M hay ABC là tam giác vuông cân tại A

Bài 10.

Kẻ thêm $CK \perp AD; K \in AD$

Gọi H là giao điểm của AD với BM.



Vì BH // CK nên: $\frac{DC}{DB} = \frac{CK}{BH} (1)$

Mà $CK = 2HM$ nên $\frac{DC}{DB} = \frac{2HM}{BH} (2)$

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác ta có:

$$\frac{AM^2}{AB^2} = \frac{HM.BM}{BH.BM} \Rightarrow \frac{HM}{BH} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

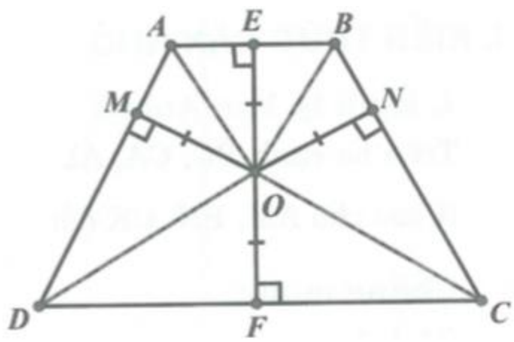
Thay vào (2) ta được: $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$

Bài 11.

Do AB // CD nên $A + D = 180°$

$\Rightarrow A + ADO = 90° \Rightarrow$ ΔAOD vuông tại O.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông. Ta có



$$\left.\begin{matrix} OM^2 = AM.DM \\ ON^2 = BN.CN \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM.DM = BN.CN$$

Vì theo tính chất tam giác bằng nhau nên:

$$AM = AE; DM = DF; BN = BE; CN = CF$$

Từ đó suy ra: $AE.DF = BE.CF \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF}$

Bài 12.

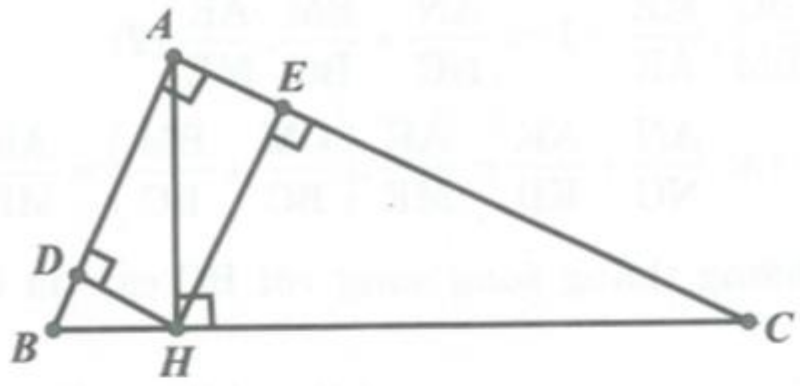
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$AD.AB = AH^2$

$AE.AC = AH^2$

$BH.CH = AH^2$

Từ đó suy ra: $AD.AB = AE.AC = HB.HC$



BÀI TOÁN 9.

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ VAN AUBEL ĐỂ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý Van Aubel:

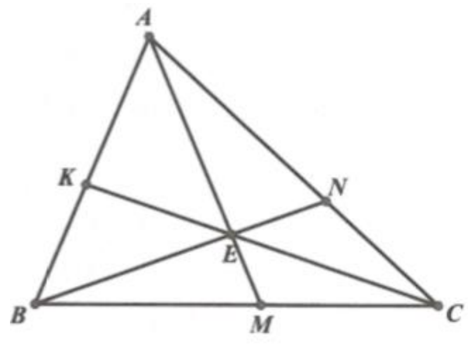
Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm M, N, K sao cho AM, BN, CK đồng quy tại E. Khi đó: $\dfrac{AE}{EM} = \dfrac{AK}{KB} + \dfrac{AN}{NC}$

Chứng minh:

Cách 1:

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABM đối với ba điểm K, E, C thẳng hàng, ta có:

$$\frac{AK}{KB}.\frac{BC}{CM}.\frac{ME}{AE} = 1 \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{CM}{BC}.\frac{AE}{ME} (1)$$



Hình 1

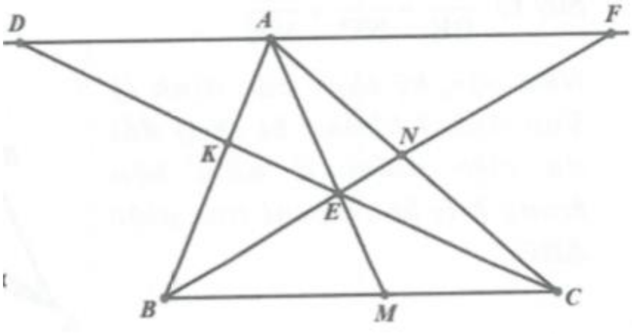
Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACM đối với ba điểm B, E, N thẳng hàng, ta có:

$$\frac{AN}{NC}.\frac{BC}{BM}.\frac{ME}{AE} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{BM}{BC}.\frac{AE}{ME} (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AN}{NC} + \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{AE}{ME}.\left(\dfrac{CM}{BC} + \dfrac{BM}{BC}\right) = \dfrac{AE}{ME}$

Cách 2: Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia CK, tia BN lần lượt tại D và F.

Áp dụng hệ quả định lý Thales, ta có: $\dfrac{AE}{EM}=\dfrac{AD}{CM}=\dfrac{AF}{BM}$



Hình 1

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được

$$\frac{AE}{EM}=\frac{AD+AF}{CM+BM}=\frac{AD+AF}{BC}=\frac{AD}{BC}+\frac{AF}{BC}(1)$$

Áp dụng hệ quả định lý Thales, ta có:

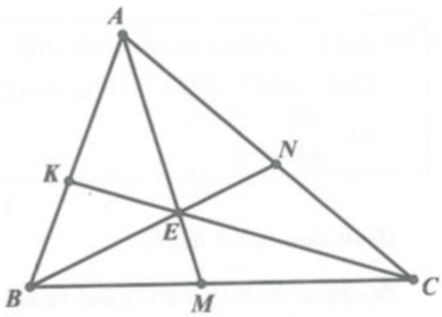
$$\frac{AD}{BC}=\frac{AK}{KB}(2)$$

Và $\dfrac{AF}{BC}=\dfrac{AN}{NC}(3)$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được $\dfrac{AE}{EM}=\dfrac{AK}{KB}+\dfrac{AN}{NC}$

Cách 3.

Ta có



Hình 2

$$\frac{AK}{KB}=\frac{S_{AKE}}{S_{BKE}}=\frac{S_{AEC}}{S_{BEC}}$$

$$\frac{AN}{NC}=\frac{S_{ANE}}{S_{CEN}}=\frac{S_{AEB}}{S_{BEC}}$$

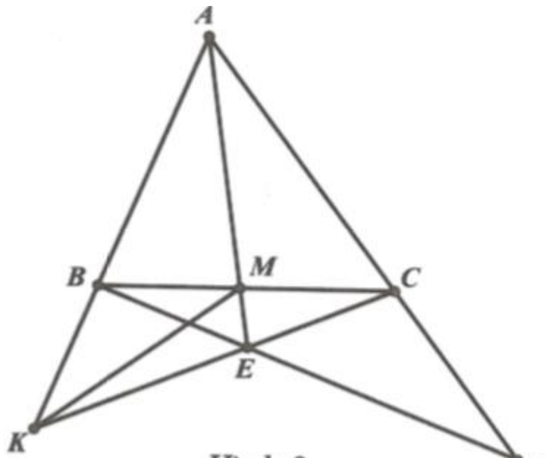
Suy ra $\dfrac{AK}{KB}+\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{S_{AEC}+S_{AEB}}{S_{BEC}}(1)$

Lại có $\dfrac{AE}{ME}=\dfrac{S_{AEB}}{S_{BEM}}=\dfrac{S_{AEC}}{S_{CEM}}=\dfrac{S_{AEB}+S_{ABC}}{S_{BEM}+S_{CEM}}=\dfrac{S_{AEB}+S_{AEC}}{S_{BEC}}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AK}{KB}+\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AE}{ME}$

2. Nhận xét:

* Trường hợp: Điểm E nằm ngoài tam giác ABC, điểm M nằm trên cạnh BC còn điểm K, N là hai điểm nằm trên tia AB, tia AC, (hình 4) khi đó:



Hình 3

Ta có $\frac{AE}{EM}=\frac{S_{ABE}}{S_{BEM}}=\frac{S_{ACE}}{S_{CEM}}=\frac{S_{ABE}+S_{ACE}}{S_{BEM}+S_{CEM}}=\frac{S_{ABEC}}{S_{BEC}}$

Ta có $\frac{AK}{BK}=\frac{S_{AKC}}{S_{BKC}}=\frac{S_{AKE}}{S_{BKE}}=\frac{S_{AKC}-S_{AKE}}{S_{BKC}-S_{BKE}}=\frac{S_{AEC}}{S_{BEC}}$

Tương tự $\frac{AN}{NC}=\frac{S_{AEB}}{S_{BEC}}$

Suy ra $\frac{AK}{BK}+\frac{AN}{NC}=\frac{S_{AEC}}{S_{BEC}}+\frac{S_{AEB}}{S_{BEC}}=\frac{S_{ABEC}}{S_{BEC}}$

Suy ra $\frac{AK}{BK}+\frac{AN}{NC}=\frac{AE}{ME}$

Như vậy, hệ thức của định lý Van Auhel không bị thay đổi do việc điểm E nằm bên trong hay bên ngoài tam giác ABC.

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Chứng minh tính chất trọng tâm của tam giác)

Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CK cắt nhau tại E. Khi đó $\frac{AE}{AM}=\frac{2}{3}$

Lời giải

(Bạn đọc tự vẽ hình)

Áp dụng định lý Van Aubel ta có: $\frac{AE}{AM}=\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}=1+1=2\Rightarrow AE=2EM$

Vậy $\frac{AE}{AM}=\frac{2}{3}$

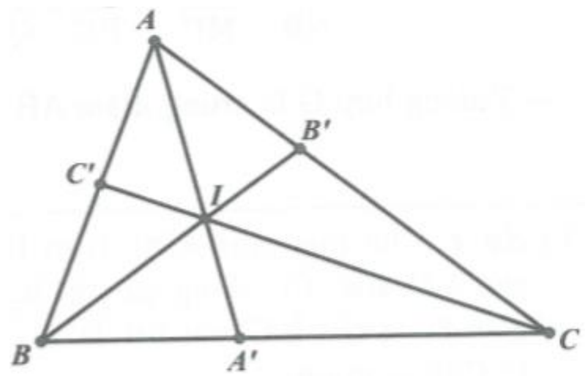
Nhận xét: Bài này có thể chứng minh bằng sử dụng đường trung bình của tam giác.

Ví dụ 2. Cho ΔABC có $BC=a;AC=b;AB=c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tia AI cắt BC tại A'. Chứng minh $\frac{AI}{IA'}=\frac{c+b}{a}$

Lời giải

Gọi tia CI cắt AB tại C', tia BI cắt AC tại B'

Áp dụng định lý Van Aubel cho ΔABC ta có:



Hình 5

$$\frac{AI}{IA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác thì:

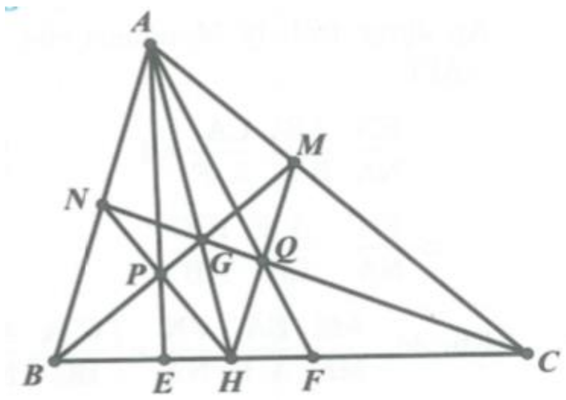
$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{c}{a}; \frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}$$

Từ đó $\frac{AI}{IA'} = \frac{c+b}{a}$

Ví dụ 3. Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy 3 điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN với BM và HM với CN. Tia AP, AQ cắt cạnh BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3.\left(\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}\right)$

Lời giải

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác ABH với AE, BG, HN đồng quy:



Hình 6

$$\frac{AP}{PE} = \frac{AN}{NB} + \frac{AG}{GH} (1)$$

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác AHC với AF, CG, HM đồng quy:

$$\frac{AQ}{QF} = \frac{AM}{MC} + \frac{AG}{GH} (2)$$

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác ABC với AH, CN, BM đồng quy

$$\frac{AG}{GH} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3.\left(\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}\right)$

Nhận xét:

- Trường hợp H là trung điểm BC thì MN // BC hay $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 6.\frac{AN}{NB}$

- Trường hợp G là trung điểm AH thì $\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, trên BC, CA, AB lần lượt lấy A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại K. Gọi giao điểm của A'B' với CC' là N, giao điểm của A'C' với BB' là M. Tia AM, AN lần lượt cắt BC tại E và F. Chứng minh:

a) *EN, FM, AA'* đồng quy tại I.

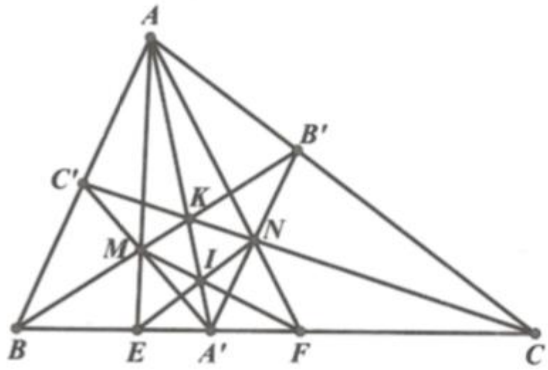
$b) AI.KA' = 3.IA'.AK$

Lời giải

a) Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABE

$$\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A}=1$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{ME}=\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{EA'}$$



Hình 7

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔAFC

$$\frac{FN}{NA}.\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'F}=1$$

$$\Rightarrow \frac{FN}{NA}=\frac{A'F}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}$$

Khi đó $\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'F}.\frac{FN}{NA}=\left(\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{EA'}\right).\frac{EA'}{A'F}.\left(\frac{A'F}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}\right)$

$=\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}=1$ (do AA',BB',CC' đồng quy tại K)

Vì $\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'F'}.\frac{FN}{NA}=1$ theo định lý Ceva thì AA', EN và FM đồng quy tại điểm I.

b) Áp dụng định lý Van Aubel cho ΔABA', ΔACA', ΔAEF ta được:

$$\frac{AM}{ME}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}(1);\frac{AN}{NF}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AB'}{B'C}(2);\frac{AM}{ME}+\frac{AN}{NF}=\frac{AI}{IA'}(3)$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $2.\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{AI}{IA'}(4)$

Áp dụng tiếp định lý Van Aubel cho tam giác ABC: $\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{AK}{KA'}$

Thay vào (4) ta được $3.\frac{AK}{KA'}=\frac{AI}{IA'}$

$\Rightarrow 3.AK.IA'=KA'.AI$

Ví dụ 5. Cho K là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D là giao điểm của AK với BC, E là giao điểm của BK với AC còn F là giao điểm của CK với AB. Chứng minh rằng $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}\geq 6$

Lời giải

Áp dụng định lý Van Aubel cho tam giác ABC:

$$\frac{AK}{KD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB};\frac{BK}{KE}=\frac{FB}{AF}+\frac{BD}{DC};\frac{KC}{FK}=\frac{EC}{AE}+\frac{DC}{BD}$$

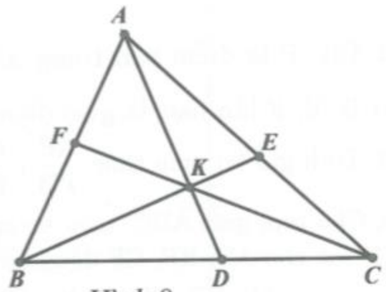
Cộng hai vế của các đẳng thức ta được:

$$\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{KC}{FK}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}+\frac{FB}{AF}+\frac{BD}{DC}+\frac{EC}{AE}+\frac{DC}{BD}=\left(\frac{AE}{EC}+\frac{EC}{AE}\right)+\left(\frac{AF}{FB}+\frac{FB}{AF}\right)+\left(\frac{BD}{DC}+\frac{DC}{BD}\right)\geq 6$$

(theo bất đẳng thức AM - GM)

Dấu "=" xảy ra khi K là trọng tâm của tam giác ABC.

Nhận xét: Lời giải sử dụng định lý Van Aubel rất tự nhiên và đơn giản hơn phương pháp sử dụng diện tích để chứng minh bài này!!



Hình 8

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD, gọi M là trung điểm AD, giao điểm của BM với AC là E, giao điểm của CM với AB là F. Chứng minh rằng: $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}=1$

Lời giải

Áp dụng định lý Van Aubel và do D là trung điểm của BC nên:

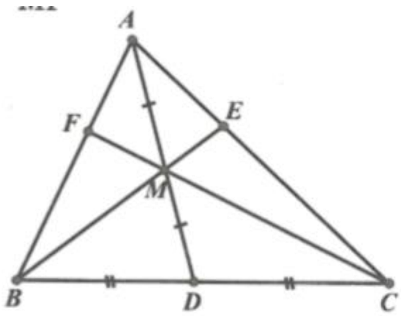
$$\frac{BM}{ME}=\frac{BF}{AF}+\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{BF}{AF}=\frac{BM}{ME}-1=\frac{BM-ME}{ME}\ (1)$$

$$\frac{CM}{MF}=\frac{CE}{AE}+\frac{CD}{BD}\Rightarrow\frac{EC}{AE}=\frac{CM}{MF}-1=\frac{CM-MF}{MF}\ (2)$$

Áp dụng định lý Van Aubel và do M là trung điểm của AD nên:

$$\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{AM}{MD}\Rightarrow\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{BF}=1\ (3)$$

Từ (1) (2) và (3) ta có: $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}=1$



Hình 9

III. MỘT SỐ BÀI TẬP ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VAN AUBEL

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đặt $\frac{BD}{DC}=x;\frac{CE}{EA}=y;\frac{AF}{FB}=z$. Chứng minh rằng

$$\frac{h_a}{xz+z+1}+\frac{h_b}{\text{yx}+x+1}+\frac{h_c}{zy+y+1}=R+r$$

Bài 2. Cho P là điểm bên trong ΔABC có thỏa mãn $\frac{S_{PBC}}{a}=\frac{S_{PAC}}{b}=\frac{S_{PBA}}{c}$ Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AP với BC, BP với AC và CP với AB. Tính giá trị biểu thức $\frac{AP}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{CP}{PF}$ theo a, b, c

Bài 3. Cho tam giác ABC, trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy 3 điểm D, E, F sao cho AD, BE, CF đồng quy tại P. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PD}.\frac{PB}{PE}.\frac{CP}{PF}=\frac{AP}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{CP}{PF}+2(*)$

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB=c;BC=a;CA=b$, và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, AC, AB tại A’ , B’ , C’ . Chứng minh rằng $\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}\le\frac{8}{27}$

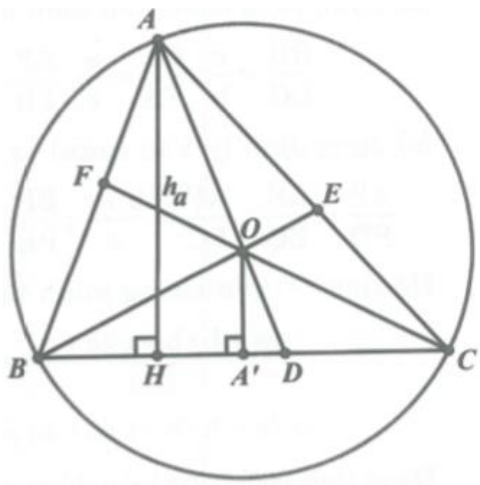
IV. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Sử dụng định lý Ceva: $\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}.\frac{AF}{BF}=1\Rightarrow xyz=1$

Sử dụng định lý Van Aubel:

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AO}{OD}=z+xz$$

$$\Rightarrow xz+z+1=\frac{AD}{OD}\Rightarrow\frac{h_a}{xz+z+1}=\frac{OD}{AD}.h_a$$



Hình 9

Gọi A’ là trung điểm BC, sử dụng Thales:

$$\frac{OA'}{h_a}=\frac{OD}{AD}\Rightarrow\frac{h_a}{xz+z+1}=OA'$$

Tương tự gọi B’ và C’ lần lượt là trung điểm AC và AB ta có:

$$\frac{h_a}{xz+z+1}+\frac{h_b}{\text{yx}+x+1}+\frac{h_c}{zy+y+1}=OA'+OB'+OC'$$

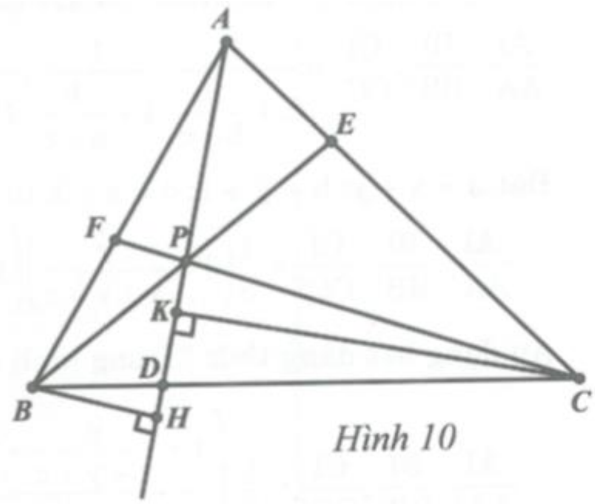
Sử dụng hệ thức Carnot thì: $OA'+OB'+OC'=R+r$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2. Sử dụng công thức tính diện tích tam giác:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}}=\frac{BH}{CK}=\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$$

Tương tự $\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c};\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$



Hình 10

Áp dụng định lý Van Aubel:

$$\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{c+a}{a}$$
$$\frac{PB}{PE}=\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}=\frac{a+c}{b}$$
$$\frac{CP}{PF}=\frac{CE}{AE}+\frac{CD}{DB}=\frac{a+b}{c}$$

Từ đó sẽ tính được giá trị của biểu thức $\frac{AP}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{CP}{PF}$

Bài 3. Kí hiệu $S_{PBC}=a;S_{APC}=b;S_{BPA}=c$

Sử dụng công thức tính diện tích tam giác ta có:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b};\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c};\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$$

Sử dụng định lý Van Aubel ta có:

$$\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FC}=\frac{b+c}{a};\frac{BP}{PE}=\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}=\frac{a+c}{b};\frac{CP}{PF}=\frac{CD}{DB}+\frac{CE}{EA}=\frac{a+b}{c}$$

Hệ thức (*) cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+2$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$$

Đẳng thức cuối cùng luôn đúng, vậy nên đẳng thức (*) đã được chứng minh.

Bài 4.

Ta có $\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}=\frac{1}{1+\frac{IA'}{AI}}.\frac{1}{1+\frac{IB'}{BI}}.\frac{1}{1+\frac{IC'}{CI}}$

Sử dụng định lý Van Aubel có kết quả ở ví dụ 2 ta được:

$$\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'}=\frac{1}{1+\frac{a}{b+c}}.\frac{1}{1+\frac{b}{a+c}}.\frac{1}{1+\frac{c}{a+b}}=\frac{b+c}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}.\frac{a+b}{a+b+c}$$

Đặt $a = x + y; b = y + z; c = z + x$ ta có

$$\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'} = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{y}{x+y+z}\right)\left(1 + \frac{z}{x+y+z}\right)\left(1 + \frac{x}{x+y+z}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức "Trung bình cộng - Trung bình nhân" ta có:

$$\frac{AI}{AA'}.\frac{BI}{BB'}.\frac{CI}{CC'} \le \frac{1}{8}\left(\frac{1 + \frac{y}{x+y+z} + 1 + \frac{z}{x+y+z} + 1 + \frac{x}{x+y+z}}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Dấu = xảy ra khi ABC là tam giác đều.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRÍCH TRONG CÁC ĐỀ THI

Bài 1. Cho đường tròn tâm *O*, bán kính *R*. Từ một điểm *M* ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến *MA* và *MB* với đường tròn (*A*, *B* là các tiếp điểm). Qua *A*, kẻ đường thẳng song song với *MO* cắt đường tròn tại *E* (*E* khác *A*), đường thẳng *ME* cắt đường tròn tại *F* (*F* khác *E*), đường thẳng *AF* cắt *MO* tại *N*, *H* là giao điểm của *MO* và *AB*.

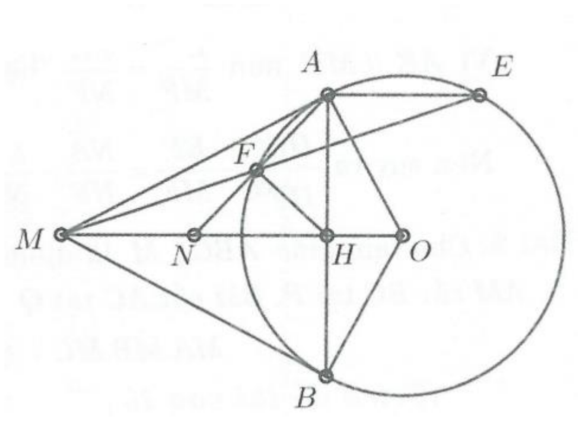
1) Chứng minh: Tứ giác *MAOB* nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$.

3) Chứng minh: $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$

(Trích đề thi vào 10, Hải Dương, Năm học 2017 - 2018)

LỜI GIẢI



1) $MAO = MBO = 90° \Rightarrow MAO + MBO = 180°$

Mà hai góc đối nhau nên tứ giác *MAOB* nội tiếp.

2) Chỉ ra $\Delta MNF \backsim \Delta ANM$ (g.g)

suy ra $MN^2 = NF.NA$

Chỉ ra $\Delta NFH \backsim \Delta AFH$ (g.g)

suy ra $NH^2 = NF.NA$

Vậy $MN^2 = NH^2$ suy ra $MN = NH$.

Có $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB = R$.

Suy ra *MO* là đường trung trực của *AB*, nên $AH \perp MO$ và $HA = HB$.

Xét hai tam giác ΔMAF và ΔMEA có:

AME chung, $MAF = AEF$

nên $\Delta MAF \backsim \Delta MEA$ (g.g), suy ra $\dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MF}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ME$

Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông MAO, có: $MA^2 = MH.MO$

Do đó: $ME.MF = MH.MO$ hay $\dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MO}{MF}$

Suy ra $\Delta MFH \backsim \Delta MOE$, do đó $MHF = MEO$.

Vì BAE là góc vuông nội tiếp (O) nên E, O, B thẳng hàng.

Suy ra $FEB = FAB\left(=\dfrac{1}{2}sdEB\right) \Rightarrow MHF = FAB$

Nên $ANH + NHF = ANH + FAB = 90^\circ \Rightarrow HF \perp NA$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông NHA, có:

$NH^2 = NF.NA \Rightarrow NM^2 = NH^2 \Rightarrow NM = NH$

3) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông NHA, có:

$HA^2 = FA.NA$ và $HF^2 = FA.FN$

Mà $HA = HB$ nên $\dfrac{HB^2}{HF^2} = \dfrac{HA^2}{HF^2} = \dfrac{FA.NA}{FA.FN} = \dfrac{NA}{NF}$,

suy ra $HB^2 = AF.AN$ (vì $HA = HB$)

Vì $AE//MN$ nên $\dfrac{EF}{MF} = \dfrac{FA}{NF}$ (hệ quả của định lí Thales)

Nên suy ra $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = \dfrac{NA}{NF} - \dfrac{FA}{NF} = \dfrac{NF}{NF} = 1$ (đpcm)

Bài 2. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì nằm trong tam giác. Kéo dài AM cắt BC tại P, BM cắt AC tại Q, CM cắt AB tại K. Chứng minh rằng

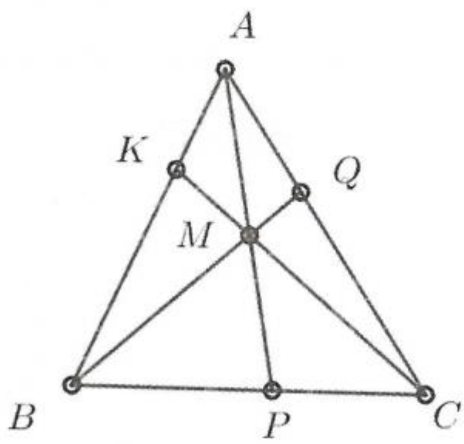
$$MA.MB.MC \geq 8MP.MQ.MK$$

(Trích đề thi vào 10 , Tỉnh Thái Bình, Năm học 2017 - 2018)

LỜI GIẢI

Đặt $a = S_{\Delta MBC}; b = S_{\Delta MAC}; c = S_{\Delta MAB}$. Ta có:

$\dfrac{MA}{MP} = \dfrac{b+c}{a} \geq \dfrac{2\sqrt{bc}}{a}, \dfrac{MB}{MQ} = \dfrac{a+b}{c} \geq \dfrac{2\sqrt{ab}}{c},$



$$\frac{MC}{MK}=\frac{a+c}{b}\geq\frac{2\sqrt{ac}}{b}.$$

Suy ra $\frac{MA}{MP}.\frac{MB}{MQ}.\frac{MC}{MK}\geq 8$

$\Rightarrow MA.MB.MC\geq 8MP.MQ.MK$

Dấu "=" xảy ra khi M là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 3. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn $O;R$. Gọi *I* là giao điểm *AC* và *BD*. Kẻ *IH* vuông góc với *AB*; *IK* vuông góc với *AD* ($H\in AB;K\in AD$).

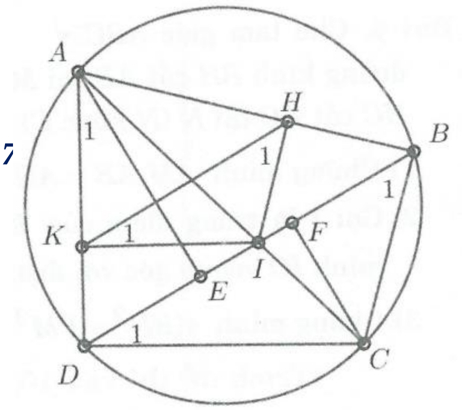
1) Chứng minh tứ giác *AHIK* nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh rằng $IA.IC=IB.ID$.

3) Chứng minh rằng tam giác *HIK* và tam giác *BCD* đồng dạng.

4) Gọi *S* là diện tích tam giác *ABD*, *S'* là diện tích tam giác *HIK*. Chứng minh rằng:

$$\frac{S'}{S}\leq\frac{HK^2}{4.AI^2}$$



(Trích đề thi vào 10, Tỉnh Phú Thọ, năm học 2017

LỜI GIẢI

1) Tứ giác *AHIK* có: $AHI=90^\circ\ \ IH\perp AB$,

$AKI=90^\circ\ \ IK\perp AD$

$\Rightarrow AHI+AKI=180^\circ$

Do đó tứ giác *AHIK* nội tiếp.

2) Xét ΔIAD và ΔIBC có:

$A_1=B_1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DC của O)

$AID=BIC$ (2 góc đối đỉnh),

suy ra $\Delta IAD\backsim\Delta IBC$ (g.g)

do đó $\frac{IA}{IB}=\frac{ID}{IC}\Rightarrow IA.IC=IB.ID$

3) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác *AHIK* có $A_1=H_1$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

Mà $A_1=B_1\Rightarrow H_1=B_1$

Chứng minh tương tự, ta được $K_1 = D_1$

Xét ΔHIK và ΔBCD có: $H_1 = B_1; K_1 = D_1$ nên $\Delta HIK \backsim \Delta BCD$ (g.g)

4) Gọi S_1 là diện tích của ΔBCD. Vì $\Delta HIK \backsim \Delta BCD$ nên:

$$\frac{S'}{S_1} = \frac{HK^2}{BD^2} = \frac{HK^2}{IB + ID^{\ 2}} \le \frac{HK^2}{4IB.ID} = \frac{HK^2}{4IA.IC} \quad (1)$$

Vẽ $AE \perp BD, CF \perp BD \Rightarrow AE // CF \Rightarrow \frac{CF}{AE} = \frac{IC}{IA}$

ΔABD và ΔBCD có chung cạnh đáy BD nên:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{IC}{IA} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{S'}{S_1}.\frac{S_1}{S} \le \frac{HK^2}{4IA.IC}.\frac{IC}{IA} \Leftrightarrow \frac{S'}{S} \le \frac{HK^2}{4IA^2} \text{ (đpcm).}$$

Bài 4. Cho tam giác *ABC* vuông tai *A* đường cao *AH* đường tròn tâm *E* đường kính *BH* cắt *AB* tại *M* (*M* khác *B*), đường tròn tâm *F* đường kính *HC* cắt *AC* tại *N* (*N* khác *C*)

1) Chứng minh $AM.AB = AN.AC$ và $AN.AC = MN^2$.

2) Gọi *I* là trung điểm của *EF*, *O* là giao điểm của *AH* và *MN*. Chứng minh *IO* vuông góc với đường thẳng *MN*.

3) Chứng minh $4\ EN^2 + FM^2\ = BC^2 + 6AH^2$.

(Trích đề thi vào 10, Tỉnh Nam Định, Năm học 2017 - 2018)

LỜI GIẢI

1) Ta có $BMH = HNC = 90°$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $HM \perp AB, HN \perp AC$.

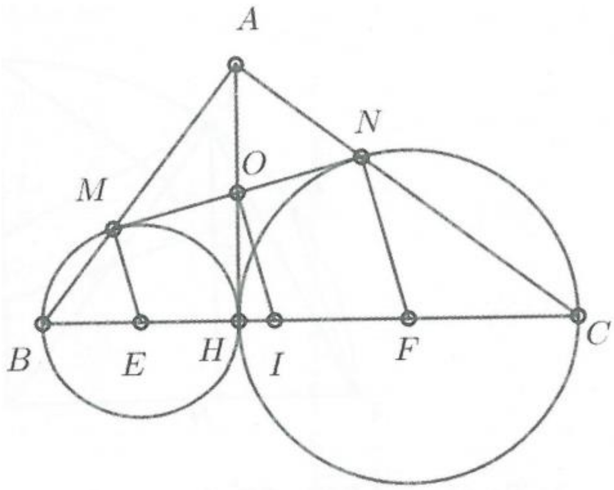
Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông *AHB* và *AHC*, có

$AH^2 = AM.AB$ và $AH^2 = AN.AC \Rightarrow AM.AB = AN.AC$

Mặt khác, tứ giác *AMHN* có ba góc vuông nên là hình chữ nhật khi đó $AH = MN \Rightarrow AN.AC = MN^2$

2) Tứ giác AMHN là hình chữ nhật, có O là giao điểm của AH và MN. Suy ra O là trung điểm của AH và MN. Khi đó $\Delta EMO = \Delta EHO$ (c.c.c)

$\Rightarrow EMO = EHO = 90°$



$\Rightarrow EM \perp MN$

Chứng minh tương tự ta có $FN \perp MN$
.

Suy ra $ME//NF \Rightarrow MEFN$ là hình thang vuông.

Mà OI là đường trung bình của hình thang vuông $MEFN$ nên $OI \perp MN$.

3) Đặt $MN = AH = h, x, y$ lần lượt là bán kính của đường tròn (E) và (F).

Ta có $4(EN^2 + FM^2) = 4\left[(ME^2 + MN^2) + (ME^2 + MN^2)\right]$

$= 4(x^2 + y^2 + 2h^2)$

$BC^2 + 6AH^2 = (HB + HC)^2 + 6h^2 = HB^2 + HC^2 + 2HB.HC + 6h^2$

$= 4x^2 + 4y^2 + 2h^2 + 6h^2 = 4(x^2 + y^2 + 2h^2)$

Vậy $4(EN^2 + FM^2) = BC^2 + 6AH^2$

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB* và *C* là một điểm trên nửa đường tròn (*C* khác *A* và *B*). Trên cung *AC* lấy điểm *D* (*D* khác *A* và *C*). Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *C* trên *AB* và *E* là giao điểm của *BD* và *CH*.

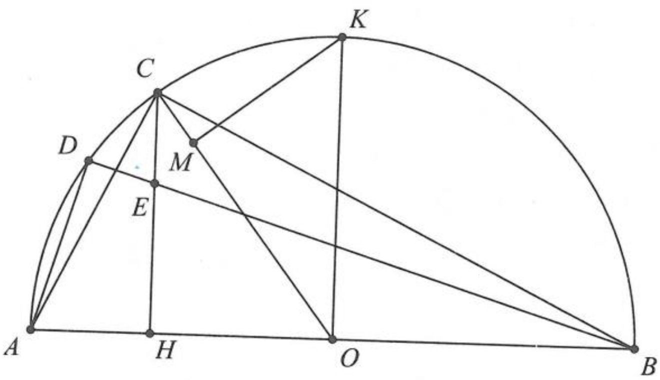
1) Chứng minh *ADEH* là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $ACO = HCB$ và $AB.AC = AC.AH + CB.CH$

3) Trên đoạn *OC* lấy điểm *M* sao cho $OM = CH$. Chứng minh rằng khi *C* chạy trên nửa đường tròn đã cho thì *M* chạy trên một đường cố định.

(Trích đề thi vào 10 TP Đà Nẵng, năm học 2017 - 2018)

LỜI GIẢI



1) Ta có: $ADE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

và $AHE = 90^\circ$ (do $CH \perp AB$)

Suy ra $ADE + AHE = 180^\circ$ suy ra, tứ giác *ADEH* nội tiếp.

2) Ta có: $ACO = CAO$ (ΔOAC cân tại *O*).

$ACO = HCB$ (cùng phụ CBH).

Suy ra: $ACO = HCB$.

Xét ΔACB và ΔCHB có: $ACB = CHB = 90^\circ$, ABC chung.

Suy ra $\Delta ACB \backsim \Delta CHB \Rightarrow \dfrac{AC}{CH} = \dfrac{BC}{BH} \Rightarrow AC.BH = CB.CH$ (*)

Mà $BH = AB - AH$ thay vào (*) ta được:

$AC.AB = AC.AH + CB.CH$ (đpcm).

3) Gọi *K* là điểm chính giữa cung *AB* (chứa điểm *C*).

Suy ra $OK \perp AB \Rightarrow OK // HC$.

Xét ΔOMK và ΔCHO có:

$MOK = HCO$ (so le trong), $OM = CH$ (giả thiết), $OK = CO$ (cùng bằng bán kính). Suy ra $\Delta OMK = \Delta CHO$ (c.g.c).

Suy ra $OMK = CHO$ (hai góc tương ứng bằng nhau)

Mà $CHO = 90^\circ \Rightarrow OMK = 90^\circ$

Vậy *M* chạy trên đường tròn đường kính *OK* cố định. (đpcm).

Bài 6. Cho hình vuông *ABCD* nội tiếp đường tròn O. Điểm *M* thuộc cung nhỏ *CD* của O, *M* khác *C* và *D*. *MA* cắt *DB*, *DC* theo thứ tự *X*, *Z*; *MB* cắt *CA*, *CD* tại *Y*, *T*; *CX* cắt *DY* tại *K*.

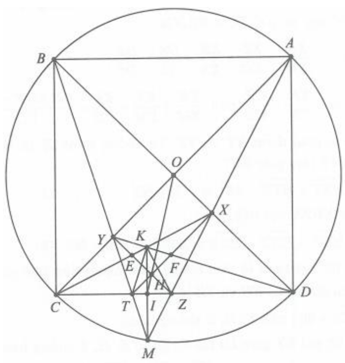
1) Chứng minh rằng: $MXT = TXC, MYZ = ZYD$ và $CKD = 135^\circ$.

2) Chứng minh rằng: $\dfrac{KX}{MX} + \dfrac{KY}{MY} + \dfrac{ZT}{CD} = 1$.

3) Gọi *I* là giao điểm của *MK* và *CD*. Chứng minh rằng *XT*, *YZ*, *OI* cùng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KZT*.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, ĐHSP HN, năm học 2012 - 2013)

LỜI GIẢI



a) Ta có $DXM = \frac{1}{2}\ sd\,DM + sd\,AB\ = DTM$ nên tứ giác *DXTM* nội tiếp.

Mà $DMT = 90^\circ \Rightarrow DXT = 90^\circ$

Suy ra $TX \perp BD$, mà $AC \perp \text{BD} \Rightarrow TX\,//\,AC$

Do đó $MXT = ZAC = XCA = TXC$

Tương tự, tứ giác *MCYZ* nội tiếp

Suy ra $ZY\,//\,BD$ nên $MYZ = MBD = BDY = ZYD$

Ta có tứ giác *ADZY* nội tiếp nên $YDC = YAZ = MDC$

Tương tự tứ giác *BCTX* nội tiếp nên $XCD = XBM = MCD$

Nên $\Delta DMC = \Delta DKC\ \ g.c.g\ \Rightarrow DKC = DMC = 135^\circ$

Ta có $XKD = 180^\circ - DKC = 45^\circ = DMX$ nên tứ giác *DXKM* nội tiếp.

Mà *DXTM* nội tiếp nên 5 điểm *D*, *X*, *K*, *T*, *M* cùng nằm trên một đường tròn tâm *E* đường kính *DT*.

Tương tự 5 điểm *Y*, *K*, *Z*, *M*, *C* nằm trên đường tròn tâm *F* đường kính *ZC* suy ra $XK.XC = XZ.XM$

Suy ra $\frac{XK}{XM} = \frac{XZ}{XC} = \frac{XZ}{XA} = \frac{DZ}{BA} = \frac{DZ}{DC}$

Tương tự $\frac{YK}{YM} = \frac{CT}{CD}$ nên $\frac{XK}{XM} + \frac{KY}{YM} + \frac{ZT}{CD} = \frac{DZ + CT + ZT}{CD} = 1$

c) Gọi *H* là giao điểm *XT* và *YZ*. Ta chứng minh *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KZT*.

Ta có $HZT = HTZ = 45^\circ \Rightarrow HT = HZ$ (1)

Tứ giác *KHZX* nội tiếp, nên:

$HKZ = HXZ = HXK = HZH \Rightarrow HK = HZ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KZT*.

Gọi giao điểm của *XC* và *YZ* là *F*.

Do $FKZ = 90^\circ$ nên *F*, *H*, *Z* thẳng hàng.

Tương tự, gọi XT giao ID tại E. Ta có E, H, T thẳng hàng

$\Delta HEF \backsim \Delta COD$ suy ra $\frac{HF}{OC}=\frac{EF}{CD}=\frac{HT}{OC}=\frac{FT}{CB}$

Vì $FT//BC$ nên $\frac{FT}{BC}=\frac{IT}{IC}\Rightarrow\frac{HT}{OC}=\frac{IT}{IC}$, mà $HTI=OCI=45^\circ$

Nên suy ra $\Delta ITH \backsim \Delta IOC$ do đó $HTI=OCT$, hay O, I, H thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, nội tiếp trong đường tròn O. Trên cung BC không chứa A, lấy điểm M tuỳ ý (M khác C). P là điểm trên cạnh BC sao cho $BAM=PAC$. Trên các tia AB, AC lấy lần lượt các điểm E, F sao cho $BE=CF=BC$.

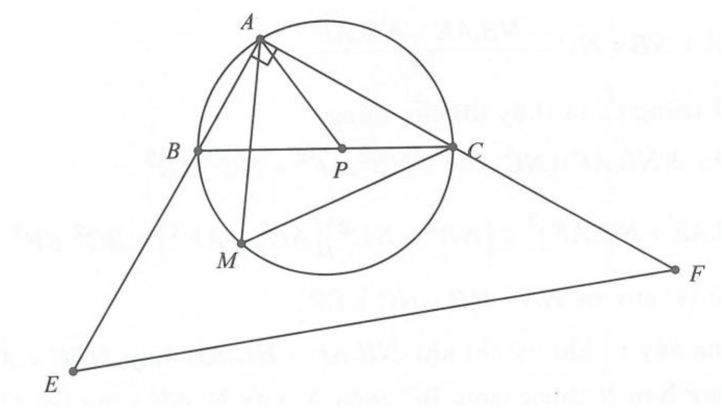
1) Chứng minh: $\Delta ABP \backsim \Delta AMC$ và $MC.AB+MB.AC=MA.BC$.

2) Chứng minh $MA+MB+MC=\frac{MB.AE+MC.AF}{BC}$

3) Xác định vị tri điểm N trên đường tròn O để tổng $NA+NB+NC$ lớn nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Quảng Bình, năm học 2012 - 2013)

LỜI GIẢI



Ta có: $ABP=AMC$ (cùng chắn cung AC)

$BAM=PAC\Rightarrow BAP=MAC$

Nên: $\Delta ABP \backsim \Delta AMC$

Suy ra: $\frac{AB}{MA}=\frac{BP}{MC}\Rightarrow MC.AB=MA.BP\quad(1)$

Mặt khác: $BMA=BCA, BAM=PAC\Rightarrow\Delta ABM \backsim \Delta APC$

$$\Rightarrow \frac{MB}{PC} = \frac{MA}{AC} \Rightarrow MB.AC = MA.PC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $MC.AB + MB.AC = MA.BC$

Từ kết quả câu a) ta có: $MA = MB.\dfrac{AC}{BC} + MC.\dfrac{AB}{BC}$

Do đó: $MA + MB + MC = MB.\left(\dfrac{AC}{BC} + 1\right) + MC\left(\dfrac{AB}{BC} + 1\right)$

$$= MB.\left(\frac{AC + BC}{BC}\right) + MC.\left(\frac{AB + BC}{BC}\right)$$

$$= MB.\left(\frac{AC + CE}{BC}\right) + MC.\left(\frac{AB + BF}{BC}\right)$$

$$= \frac{MB.AE + MC.AF}{BC}$$

Xét trường hợp N thuộc cung BC không chứa A.

- Nếu N khác C theo kết quả câu b) ta có

$$NA + NB + NC = \frac{NB.AE + NC.AF}{BC} \qquad (3)$$

- Nếu N trùng C, ta thấy (3) vẫn đúng.

Mặt khác $2\ NB.AF\quad NC.AE\ \le NB^2.AF^2 + NC^2.AE^2$

$$\Leftrightarrow\ NB.AE + NB.AF\ ^2 \le\ NB^2 + NC^2\quad AE^2 + AF^2\ = BC^2.EF^2 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $NA + NB + NC \le EF$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $NB.AF = NC.AE$ hay $NBC = AEF$.

Xét trường hợp N thuộc cung BC chứa A. Lấy N’ đối xứng N qua BC, khi đó N’ thuộc cung BC không chứa A, $N'A < NA, N'B = NB, N'C = NC$.

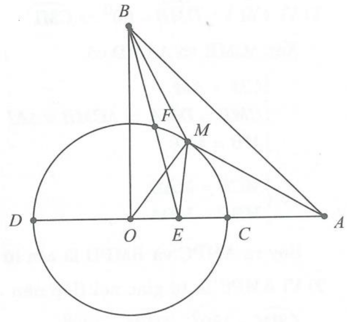
Áp dụng trường hợp trên ta có:

$$NA + NB + NC < N'A + N'B + N'C \le EF$$

Vậy trong mọi trường hợp thì $NA + NB + NC$ có giá trị lớn nhất là EF, đạt được khi $NBC = AEF$

Bài 8. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = 2a$. Gọi O là đường tròn tâm O bán kính a. Tìm điểm M thuộc O sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, TP HCM, năm học 2010 - 2011)



LỜI GIẢI

Đường thẳng OA cắt O tại C và D, B

với C là trung điểm của OA. Gọi E là

trung điểm của OC.

* Trường hợp M không trùng với C và D.

Hai tam giác OEM và OMA đồng dạng

(do $MOE = AOM, \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{OE}{OM}$)

Suy ra $\dfrac{ME}{AM} = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MA = 2.EM$

* Trường hợp M trùng với C: $MA = CA = 2.EC = 2.EM$

* Trường hợp M trùng với D: $MA = DA = 2.ED = 2.EM$

Vậy ta luôn có $MA = 2.EM$. Do đó

$$MA + 2.MB = 2\ \ EM + MB\ \ \geq 2.EB$$

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn O.

Vậy $MA + 2.MB$ nhỏ nhất khi M là giao điểm của đoạn BE với đường tròn O.

Bài 9. Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

1) Chứng minh AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$.

3) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh CDFE là hình thang.

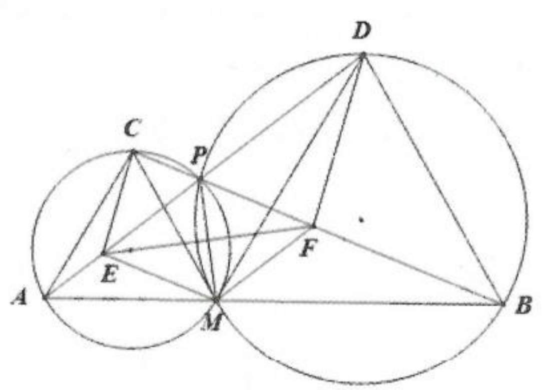
(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 1), ĐHSP Hà Nội, năm học 2016-2017)

LỜI GIẢI

1) Vì $CMA = DMB = 60^\circ \Rightarrow CMB = DMA = 120^\circ$

- Xét ΔCMB và ΔAMD có

$$\begin{cases} CM = AM \\ CMB = DMA \Rightarrow \Delta CMB = \Delta AMD \text{ (c.g.c)} \\ MB = MD \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} MCB = MAD \\ MBC = MDA \end{cases}$$

Suy ra AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp.

2) Vì AMPC là tứ giác nội tiếp nên

$$CPM = 180^\circ - CAM = 120^\circ = CMB$$

$$\Rightarrow \Delta CPM \backsim \Delta CMB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CP}{CM} = \frac{CM}{CB}$$

$$\Rightarrow CP.CB = CM^2 \Rightarrow \sqrt{CP.CB} = CM$$

Tương tự $\sqrt{DP.DA} = DM$

Vậy $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = CM + DM = AM + BM = AB$

3) Ta có EF là đường trung trực của PM

$\Rightarrow EB = EM$, suy ra ΔEPM cân tại E

Mặt khác $EPM = ACM = 60^\circ$ (do AMPC là tứ giác nội tiếp)

nên ΔEPM đều, nên $PM = PE$.

Tương tự $PF = PM$.

Ta có $CM//DB$ nên $PCM = PBD$

Mà BMPD là tứ giác nội tiếp nên $PBD = PMD$.

Suy ra $PCM = PMD$

Ta lại có $CPM = DPM = 120^\circ$

$$\Rightarrow \Delta CPM \backsim \Delta MPD (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{CP}{MP} = \frac{PM}{PD} \Rightarrow \frac{CP}{PF} = \frac{PE}{PD}$$

Theo định lý Thales đảo ta có $CE//DF$, suy ra CDFE là hình thang.

Bài 10. Cho tam giác *ABC*. Trên các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt lấy các điểm *D, E, F*. Gọi d_1 là đường thẳng qua *D* và vuông góc với *BC*, d_2 là đường thẳng qua *E* và vuông góc với *CA*, d_3 là đường thẳng qua *F* và vuông góc với *AB*. Chứng minh rằng d_1, d_2 và d_3 đồng quy khi và chỉ khi có đẳng thức sau: $DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$.

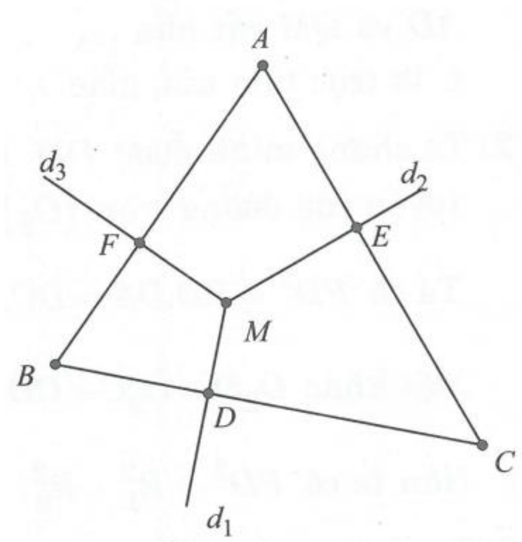
(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Toán THTH, ĐHSP TP HCM năm học 2014 - 2015)

LỜI GIẢI

Gọi M là giao điểm của d_1 và d_2 và F' là hình chiếu của *M* lên *AB*.

Ta có

$$DB^2 - DC^2 \ + \ EC^2 - EA^2 \ + \ FA^2 - FB^2 \ = 0$$



$$\Leftrightarrow BM^2 - MD^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow BM^2 - MC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow BM^2 - ME^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow BM^2 - MA^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F'B^2 - F'A^2 + FA^2 - FB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F'B - F'A + FA - FB = 0 \qquad (1)$$

Mà $\Leftrightarrow F'A + F'B = FA + FB = AB$

nên $1 \Leftrightarrow F'B = FB \Leftrightarrow F' \equiv F \Leftrightarrow d_1, d_2, d_3$ đồng quy.

Bài 11. Cho hai đường tròn $O_1; R_1$ và $O_2; R_2$ với $R_1 > R_2$ tiếp xúc trong với nhau tại *A*. Đường thẳng cắt $O_1; R_1$ và $O_2; R_2$ lần lượt tại *B* và *C* khác *A* . Đường thẳng đi qua trung điểm *D* của *BC* vuông góc với *BC* cắt $O_1; R_1$ tại *P* và *Q*.

1) Chứng minh *C* là trực tâm tam giác *APQ*.

2) Chứng minh $DP^2 = R_1^2 - R_2^2$.

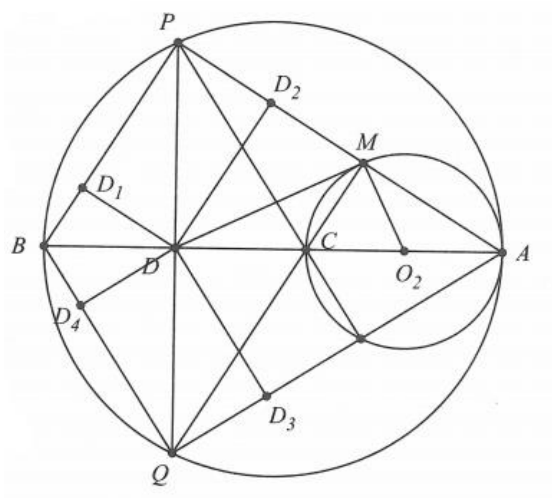
3) Giả sử $D_1; D_2; D_3; D_4$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của *D* xuống các đường thẳng $BP; PA; AQ; QB$. Chứng minh:

$$DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \le \frac{1}{2} \ BP + PA + AQ + QB$$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 1) Lê Hồng Phong, Nam Định, năm 2014 - 2015)

LỜI GIẢI

1) Gọi *M* là giao điểm của *AP* với đường tròn O_2 .



Ta có *PBQC* là hình thoi, nên $QC // BP$, mà $CM // BP$ (cùng vuông góc với *AP*) nên ta có *Q, C, M* thẳng hàng. Tam giác *APQ* có hai đường cao *AD* và *QM* cắt nhau tại *C* nên *C* là trực tâm tam giác *APQ*.

2) Ta chứng minh được *DM* là tiếp tuyến của đường tròn O_2 .

Ta có $PD^2 = BD.DA = DC.DA = DM^2 = O_2D^2 - R_2^2$

Mặt khác $O_2D = O_2C + CD = \dfrac{AC}{2} + \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB}{2} = R_1$

Nên ta có $PD^2 = R_1^2 - R_2^2$

3) Ta Chứng minh được $DD_1 = DD_4, DD_2 = DD_3, BP = BQ, PA = PB$

nên $DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \le \dfrac{1}{2}\ BP + PA + AQ + QB$

$\Leftrightarrow 2\ DD_1 + DD_2\ \le PA + PB$

Ta có $PB^2 = BD^2 + DP^2 \ge 2DB.DP \Rightarrow PB \ge \dfrac{2DB.DP}{PB} = 2DD_1$.

Tương tự: $AP \ge \dfrac{2DA.DP}{PA} = 2DD_2$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $DA = DB = DP$.

Bài 12. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn O. Đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác *ABC* cắt nhau tại *H*. Đường thẳng AA_1 cắt O tại $K \ne A$.

1) Chứng minh rằng: A_1 là trung điểm *HK*.

2) Tính $\dfrac{HA}{AA_1} + \dfrac{HB}{BB_1} + \dfrac{HC}{CC_1}$.

3) Gọi *M* là hình chiếu vuông góc của *O* lên *BC*. Đường thẳng BB_1 cắt O tại giao điểm thứ hai là *E*, đường thẳng MB_1 cắt *AE* tại *N*.

Chứng minh rằng: $\dfrac{AN}{NE} = \left(\dfrac{AB_1}{EB_1}\right)^2$.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán (Vòng 2) Lê Hồng Phong, Nam Định, năm 2014 - 2015)

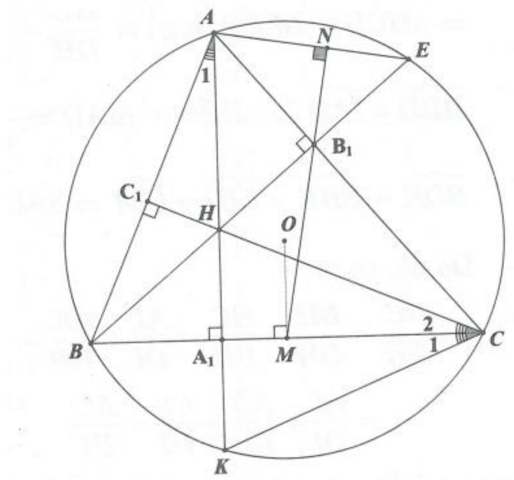
LỜI GIẢI

1)Ta có $A_1 = C_2 = C_1$ nên ΔCHK cân tại *C*.

Mà CA_1 là đường cao nên CA_1 là đường trung trực, suy ra A_1 là trung điểm của *HK*.

2) Ta có:

$\dfrac{HA}{AA_1} + \dfrac{HB}{BB_1} + \dfrac{HC}{CC_1}$



$$=\left(1-\frac{HA_1}{AA_1}\right)+\left(1-\frac{HB_1}{BB_1}\right)+\left(1-\frac{HC_1}{CC_1}\right)$$

$$=3-\left(\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1}\right)$$

$$=3-\left(\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HBA}}{S_{ABC}}\right)=3-1=2$$

3) Từ giả thiết ta có *M* là trung điểm *BC*, suy ra ΔB_1MC cân tại *M*, do đó

$$MB_1C=MCB_1=AB_1N\Rightarrow \Delta CBB_1 \backsim \Delta B_1AN\ \ (\text{g.g})\Rightarrow \text{B}_1N\perp AE$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

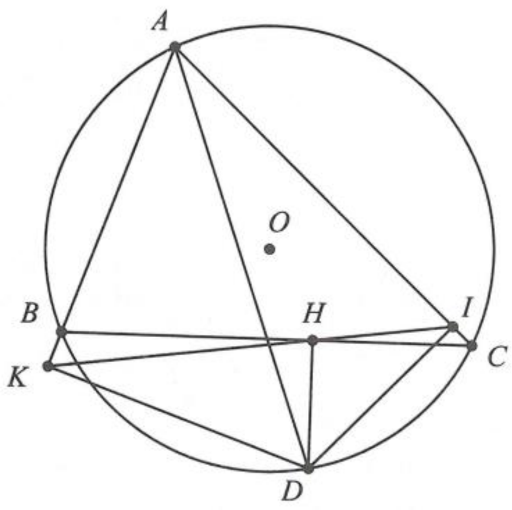
$$\left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2=\frac{AN.AE}{EN.EA}=\frac{AN}{EN}\ (\text{đpcm}).$$

Bài 13. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn O. Lấy điểm *D* trên cung *BC* không chứa điểm *A* (*D* khác *B*, *C*). Gọi *H*, *I*, *K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *D* trên các đường thẳng *BC*, *CA* và *AB*. Chứng minh: $\dfrac{BC}{DH}=\dfrac{AC}{DI}+\dfrac{AB}{DK}$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Nguyễn Du, Đăk Lăk, năm học 2014 - 2015)

LỜI GIẢI

Ta có các tứ giác *BHDK*, *DHIC*, *ABDC* nội tiếp $\Rightarrow KHD=KBD=ACD$



Mà $DHI+ACD=180^\circ$

$\Rightarrow DHI+KHD=180^\circ\Rightarrow KHI=180^\circ$

$\Rightarrow K,H,I$ thẳng hàng.

Mặt khác $HCD=KAD$

$$\Rightarrow \Delta HCD \backsim \Delta KAD\ \ (\text{g.g})\Rightarrow \frac{HC}{DH}=\frac{KA}{DK}$$

$$HBD=IAD\Rightarrow \Delta HBD \backsim \Delta IAD\Rightarrow \frac{HB}{DH}=\frac{IA}{AD}$$

$$BDK=BHK=CHI=CDI\Rightarrow \Delta BDK \backsim \Delta CDI\Rightarrow \frac{BK}{KD}=\frac{IC}{DI}$$

Do đó, ta có:

$$\frac{BC}{DH}=\frac{BH}{DH}+\frac{HC}{DH}=\frac{AI}{DI}+\frac{AK}{KD}=\frac{AI}{DI}+\frac{AB}{KD}+\frac{BK}{KD}$$

$$=\frac{AI}{DI}+\frac{AB}{KD}+\frac{CI}{DI}=\frac{AC}{DI}+\frac{AB}{DK}.$$

Bài 14. Cho hai đường tròn O , O' cắt nhau tại *A* và *B*. Từ điểm *C* thuộc tia đối của tia *AB* kẻ hai tiếp tuyến đến O tại *D* và *E*, *E* nằm trong O' . Các đường thẳng *AD*, *AE* cắt O' tại điểm thứ hai tương ứng là *M*, *N*. Gọi *I* là giao điểm của *DE* và *MN*.

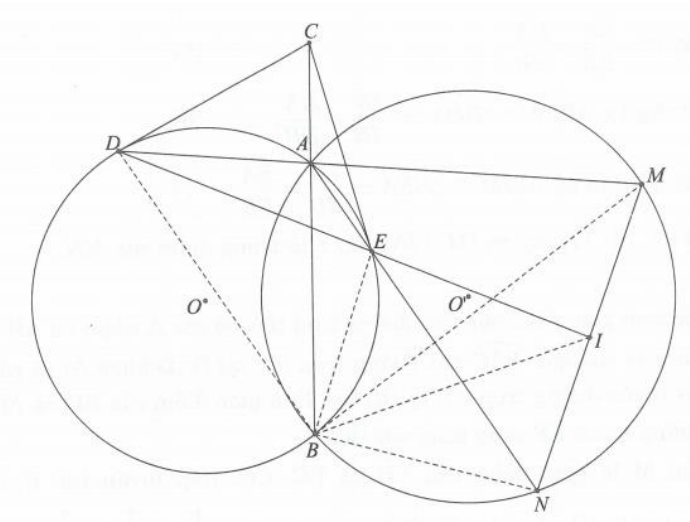
1) Chứng minh rằng tứ giác *BEIN* nội tiếp và $\Delta BIN \backsim \Delta BDA$.

2) Chứng minh rằng $\frac{CA}{CB}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2=\left(\frac{DA}{DB}\right)^2$.

3) Chứng minh rằng *I* là trung điểm của *MN*.

(Trích đề thi vào Chuyên Toán (Vòng 2), ĐHV, năm học 2015-2016)

LỜI GIẢI



1) Vì tứ giác *ABNM* nội tiếp nên $BNI = BAD$. (1)

Vì tứ giác *DAEB* nội tiếp nên $BAD = BED$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác *BEIN* nội tiếp.

Theo chứng minh trên, $BNI = BAD$.

Ta lại có $BIN = BEN = BDA$ (do các tứ giác *BEIN*, *AEBD* nội tiếp).

Suy ra $\Delta BIN \backsim \Delta BDA$ (g.g).

2) Vì *CD* là tiếp tuyến của O nên $CA.CB = CD^2$. Từ đó suy ra

$$\frac{CA}{CB}=\frac{CA.CB}{CB^2}=\frac{CD^2}{CB^2}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2 \qquad (3)$$

Lại có, từ $\Delta CAD \backsim \Delta CDB \quad g.g \;\Rightarrow \frac{CD}{CB}=\frac{DA}{DB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{CA}{CB}=\left(\frac{CD}{CB}\right)^2=\left(\frac{DA}{DB}\right)^2$.

3) Tương tự câu b) ta có $\frac{CA}{CB}=\left(\frac{CE}{CB}\right)^2=\left(\frac{EA}{EB}\right)^2$

Suy ra $\frac{EA}{EB}=\frac{DA}{DB}$ (5)

Từ câu 1), $\Delta BIN \backsim \Delta BDA \Rightarrow \frac{IN}{IB}=\frac{DA}{DB}$ (6)

Tương tự ta có $\Delta BIM \backsim \Delta BEA \Rightarrow \frac{IM}{IB}=\frac{EA}{EB}$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra $IM=IN$, hay I là trung điểm của MN.

Bài 15.

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O, có góc A nhọn và $AB>AC$. Tia phân giác của góc BAC cắt đường tròn O tại D (D khác A) và cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn O tại E. Gọi F là giao điểm của BD và AC

a) Chứng minh EF song song với BC.

b) Gọi M là giao điểm của AD và BC. Các tiếp tuyến tại B, D của đường tròn O cắt nhau tại N. Chứng minh rằng: $\frac{1}{BN}=\frac{1}{BE}+\frac{1}{BM}$

2) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O, đường cao AH. Gọi M là giao điểm của AO và BC. Chứng minh $\frac{HB}{HC}+\frac{MB}{MC}\geq 2\frac{AB}{AC}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

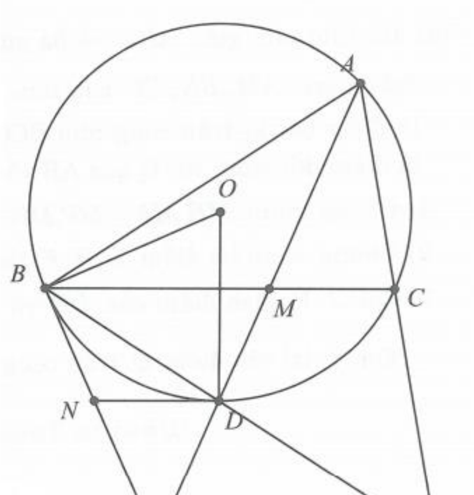
(Trích đề thi vào 10 Chuyên Hưng Yên, năm học 2015 - 2016)

LỜI GIẢI

1) a) Do $EBF=BAD=EAF$ nên BEAF nội tiếp được.

Suy ra $BEF+BAF=180°$

Mà $BAF=CBE$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)



Nên $BEF + BCE = 180^\circ$, mà đây là hai góc trong cùng phía nên

$BC // EF$.

b) $NDB = BAD = CAD = CBD$,

suy ra $ND // BC$.

Theo Thales: $\frac{NB}{BE} = 1 - \frac{NE}{BE}$

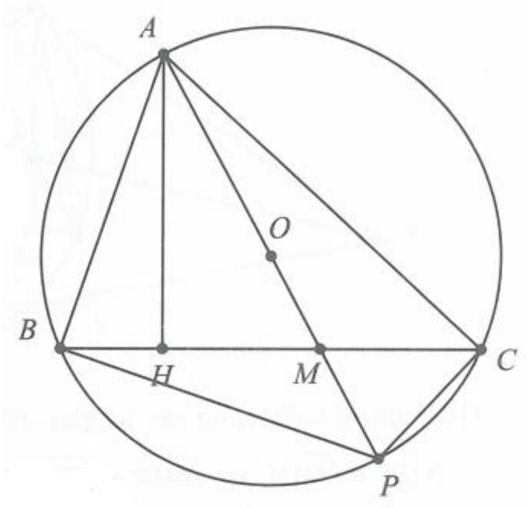
$= 1 - \frac{ND}{BM}$

$\Rightarrow \frac{NB}{BE} + \frac{ND}{BM} = 1$

Mà $ND = NB$. Do đó $\frac{NB}{BE} + \frac{NB}{BM} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{BN} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{BM}$

2) Kẻ đường kính AP



Dễ dàng chứng minh được:

$\Delta AHB \backsim \Delta ACP$ nên: $\frac{HB}{PC} = \frac{AH}{AC}$

Tương tự: $\frac{HC}{PB} = \frac{AH}{AB}$

Suy ra: $\frac{HB}{HC} . \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$,

Suy ra: $\frac{HB}{HC} = \frac{PC}{PB} . \frac{AB}{AC}$

Lại có: $\Delta AMC \backsim \Delta BMP$ nên: $\frac{MC}{AC} = \frac{MP}{PB}$

Tương tự: $\frac{MB}{AB} = \frac{MP}{PC}$

Suy ra: $\frac{MB}{MC} . \frac{AC}{AB} = \frac{PB}{PC}$ nên: $\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PC} . \frac{AB}{AC}$

Cộng lại, ta có: $\frac{HB}{HC} + \frac{MB}{MC} = \left(\frac{PB}{PC} + \frac{PC}{PB} \right) . \frac{AB}{AC} \geq 2 . \frac{AB}{AC}$

Bài 16. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn O. Các đường cao *AM*, *BN*, *CP* của tam giác *ABC* cùng đi qua điểm *H*. Gọi *Q* là điểm bất kì trên cung nhỏ *BC* (*Q* khác *B* và *C*). Gọi *E*, *F* theo thứ tự là điểm đối xứng với *Q* qua *AB* và *AC*.

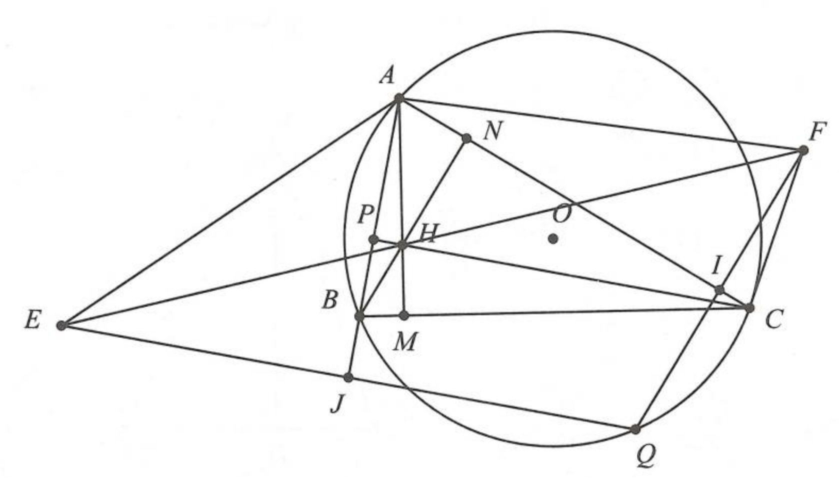
1) Chứng minh $MH.MA = MP.MN$.

2) Chứng minh ba điểm *E*, *H* ,*F* thẳng hàng.

3) Gọi *J* là giao điểm của *QE* và *AB*, *I* là giao điểm của *QF* và *AC*. Tìm vị trí của điểm *Q* trên cung nhỏ *BC* để $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

(Chuyên Toán TP Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

LỜI GIẢI



1) Dễ dàng thấy rằng các tứ giác CNHM, BMHP nội tiếp. Cho nên $NCH = NMH$ và $NMP = HBP$, kết hợp với $ACH = ABH$ (cùng phụ với BAC) ta suy ra $NMH = HMP$ (1)

Mặt khác tứ giác ANMB nội tiếp nên $MNH = MAB$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

$\Delta HMN \backsim \Delta PMA$ dẫn đến $\frac{HM}{MP} = \frac{MN}{MA}$

$\Rightarrow MH.MA = MN.MP$

2) Trước hết dễ thấy $\Delta ACQ = \Delta ACF$ (c.c.c)

nên $AFC = AQC = ABC = CHM$ dẫn đến tứ giác AFCH nội tiếp và $ACH = AFH = 90^\circ - BAC$ (3)

Mặt khác do tính chất đối xứng ta có $AF = AQ = AE$.

hay tam giác AEF cân tại A để có

$$AFE = AEF = 90^\circ - \frac{1}{2}EAF = 90^\circ - \frac{1}{2}\ FAQ + EAQ$$

$$= 90^\circ - \ CAQ + BAQ \ = 90^\circ - BAC$$

Do đó ta được $AFH = AFE$ hay ba điểm E, H, F thẳng hàng.

3) Trước hết thấy rằng $AB.QJ = 2S_{ABQ}, AC.QI = 2S_{AQC}$

Và đặt $P = \dfrac{AB}{QJ} + \dfrac{AC}{QI}$

Khi đó áp dụng BĐT Cauchy-Shwarz ta có:

$$P = \frac{AB^2}{AB.QJ} + \frac{AC^2}{AC.QI} = \frac{AB^2}{2S_{ABQ}} + \frac{AC^2}{2S_{ACQ}}$$

$$\geq \frac{AB + AC^{\ 2}}{2\ S_{ABQ} + S_{ACQ}} = \frac{AB + AC^{\ 2}}{2\ S_{ABC} + S_{QBC}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $QI = QJ$.

Mặt khác nếu gọi G là điểm chính giữa của cung nhỏ BC thì luôn có

$S_{QBC} \leq S_{GBC}$, do đó $P \geq \dfrac{AB + AC^{\ 2}}{2\ S_{ABC} + S_{GBC}}$

Vậy $P = \left(\dfrac{AB}{QJ} + \dfrac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi Q là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Bài 17. Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H và nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F tương ứng là các chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C. Gọi M là giao điểm của tia AO và cạnh BC. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh CA, AB.

1) Chứng minh: $HE.MN = HF.MP$.

2) Chứng minh tứ giác FENP nội tiếp.

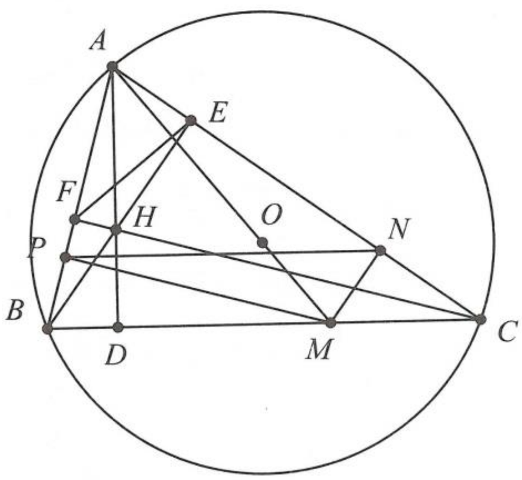
3) Chứng minh rằng: $\dfrac{BD.BM}{CD.CM} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Vĩnh Phúc, năm học 2015 - 2016)

LỜI GIẢI

1) Ta có $FHE = PMN = 180^\circ - A$,

$FEH = FAH = MAN = NPM$



(do tứ giác HFAE, PMNA nội tiếp).

Do đó $\Delta PMN \backsim \Delta EHF$

$\Rightarrow HE.MN = HF.MP$

2) Từ phần 1) thì

$FEN = FEH + 90^\circ$

$= NPM + 90^\circ = BPN$

Nên tứ giác FENP nội tiếp.

3) Ta có $BAD = CAM \Rightarrow BAM = DAC$

Suy ra $\dfrac{S_{BAD}}{S_{CAM}} = \dfrac{BD}{CM} = \dfrac{\sin\angle BAD.AB.AD}{\sin\angle CAM.AC.AM} = \dfrac{AB.AD}{AC.AM}$

$$\dfrac{S_{BMA}}{S_{CAD}} = \dfrac{BM}{CD} = \dfrac{\sin\angle BAM.AB.AM}{\sin\angle CAD.AC.AD} = \dfrac{AB.AM}{AC.AD}$$

Do đó $\dfrac{BD.BM}{CD.CM} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

Bài 18. Cho đường tròn $O;R$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn O (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

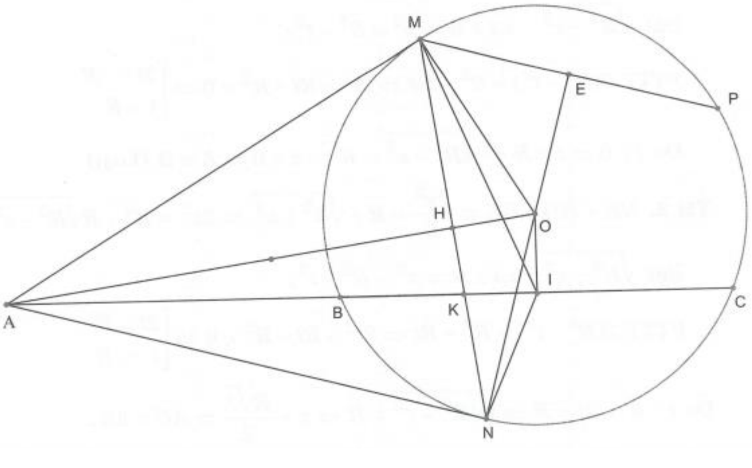
1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN.

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt O tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình binh hành.

(Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2015 - 2016)

LỜI GIẢI



1) Theo giả thiết $AMO = ANO = AIO = 90^\circ$

$\Rightarrow$ 5 điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow AIN = AMN, AIM = ANM$ (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại $A \Rightarrow AMN = ANM$

$\Rightarrow AIN = AIM \Rightarrow$ (đpcm)

2) $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} \Leftrightarrow 2AB.AC = AK \;\; AB + AC$

$\Leftrightarrow AB.AC = AK.AI$ (Do $AB + AC = 2AI$)

ΔABN đồng dạng với $\Delta ANC \Rightarrow AB.AC = AN^2$

ΔAHK đồng dạng với $\Delta AIO \Rightarrow AK.AI = AH.AO$

Tam giác ΔAMO vuông tại M có đường cao $MH \Rightarrow AH.AO = AM^2$

$\Rightarrow AK.AI = AM^2$. Do $AN = AM \Rightarrow AB.AC = AK.AI$

3) Ta có $AN \perp NO, MP \perp NO, M \notin AN \Rightarrow AN // MP$

Do đó AMPN là hình bình hành $\Leftrightarrow AN = MP = 2x$

Tam giác ANO đồng dạng với $\Delta NEM \Rightarrow \dfrac{AN}{NE} = \dfrac{NO}{EM} \Rightarrow NE = \dfrac{2x^2}{R}$

TH1. $NE = NO - OE \Rightarrow \dfrac{2x^2}{R} = R - \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 - R\sqrt{R^2 - x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2$

PTTT $2 \;\; R^2 - t^2 \;\; = R^2 - Rt \Leftrightarrow 2t^2 - Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = -R \\ t = R \end{array}\right.$

Do $t \geq 0 \Rightarrow t = R \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A \equiv B$ (Loại)

TH2. $NE = NO + OE \Rightarrow \dfrac{2x^2}{R} = R + \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 + R\sqrt{R^2 - x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2$

PTTT $2\left(R^2-t^2\right)=R^2+Rt \Leftrightarrow 2t^2+Rt-R^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t=R \\ t=-R \end{array}\right.$

Do $t \geq 0 \Rightarrow 2t=R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2-x^2}=R \Leftrightarrow x=\dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO=2R$

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hình bình hành.

Bài 19. Cho đường tròn tâm O đường kính BC, A là điểm di chuyển trên đường tròn (O) (A khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. M là điểm đối xứng của điểm A qua điểm B.

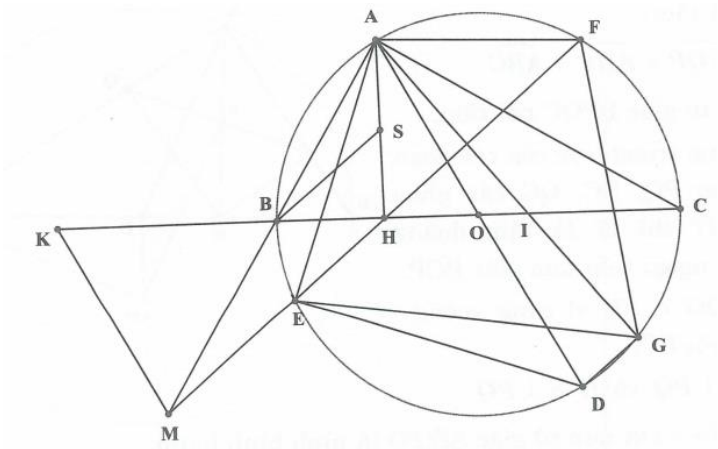
1) Chứng minh điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

2) Đường thẳng MH cắt (O) tại E và F (E nằm giữa M và F). Gọi I là trung điểm của HC, đường thẳng AI cắt (O) tại G (G khác A). Chứng minh: $AF^2+FG^2+GE^2+EA^2=2BC^2$.

3) Gọi P là hình chiếu vuông góc của H lên AB. Tìm vị trí của điểm A sao cho bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP đạt giá trị lớn nhất.

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Toán, Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2016-2017)

LỜI GIẢI



1) Lấy K là điểm đối xứng của O qua B, vì B và O cố định nên K cố định. Tứ giác OAKM là hình bình hành nên $KM=OA$.

Do $OA=\dfrac{BC}{2}$ không đổi.

$\Rightarrow$ M nằm trên đường tròn tâm K, bán kính $\dfrac{BC}{2}$.

2) Xét ΔAHB và ΔCHA có

$BHC = BHA = 90^\circ, BAH = ACB$ (cùng phụ với ABC)

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CHA$.

Gọi S là trung điểm của AH, I là trung điểm của HC nên

$\Rightarrow \Delta ABS \backsim \Delta CAI \Rightarrow ABS = CAI$

Ta lại có BS là đường trung bình của ΔAMH

$BS // MH \Rightarrow ABS = AMH \Rightarrow AMH = CAI$

Mà $CAI + MAI = 90^\circ \Rightarrow AMH + MAI = 90^\circ \Rightarrow AI \perp MF$

Xét tứ giác AEGF nội tiếp O , có $AG \perp EF$

Kẻ đường kính AD, do $GD \perp AG$ và $EF \perp AG$ nên $EF // GD$, do đó tứ giác nội tiếp EFGD là hình thang cân

$\Rightarrow FG = ED \Rightarrow AE^2 + FG^2 = AE^2 + ED^2 = AD^2 = BC^2$

Tương tự ta chứng minh được: $AF^2 + EG^2 = BC^2$

Vậy $AE^2 + FG^2 + AF^2 + EG^2 = 2BC^2$.

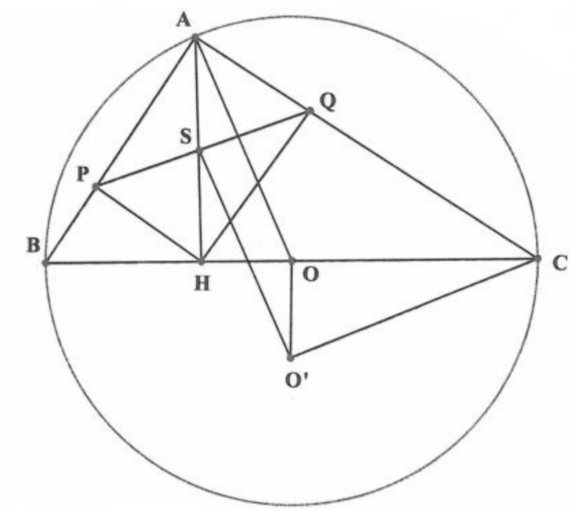
3) Gọi Q là hình chiếu của H trên $AC \Rightarrow$ Tứ giác APHQ là hình chữ nhật (S là tâm)

$\Rightarrow AQP = AHP = ABC$

nên tứ giác BPQC nội tiếp.

Đường trung trực của các đoạn thẳng PQ, BC, QC cắt nhau tại O’ thì O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP.

Có OO’ // AH vì cùng vuông góc với BC.



$OA \perp PQ$ và $O'S \perp PQ$

$\Rightarrow O'S // OA$ nên tứ giác ASO’O là hình hình hành

$\Rightarrow OO' = AS = \frac{AH}{2}$

Trong trường hợp A nằm chính giữa cung BC thì ta vẫn có:

$OO' = AS = \frac{AH}{2}$

Tam giác OO’C vuông tại O nên

$O'C = \sqrt{OC^2 + \frac{AH^2}{4}}$

Do OC không đổi nên O’C lớn nhất khi AH lớn nhất

$\Leftrightarrow$ A chính giữa cung BC.

Bài 20. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

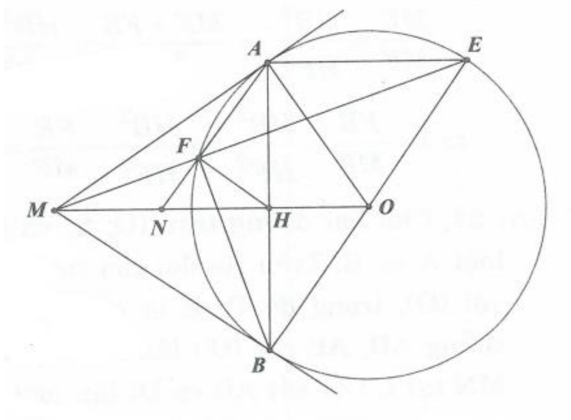
1) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$.

3) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.

(Trích đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương (Vòng 1), năm học 2017 - 2018)

LỜI GIẢI



1) Ta có $MAO = 90°, MBO = 90°$

(theo tính chất của tiếp tuyến và bán kính)

Suy ra: $MAO + MBO = 180°$

Vậy tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Ta có $AE // MO \Rightarrow AEM = EMN$,

mà $AEM = MAF$, suy ra $EMN = MAF$

ΔNMF và ΔNAM có

MNA chung; $EMN = MAF$ nên ΔNMF đồng dạng với ΔNAM

$\Rightarrow \dfrac{NM}{NF} = \dfrac{NA}{NM} \Rightarrow NM^2 = NF.NA \quad (1)$

Mặt khác có: $ABF = AEF \Rightarrow ABF = EMN$ hay $HBF = FMH$

$\Rightarrow$ MFHB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow FHM = FBM = FAB$ hay $FHN = NAH$.

Xét ΔNHF và ΔNAH có:

ANH chung; $NHF = NAH \Rightarrow \Delta NHF$ đồng dạng ΔNAH

$\Rightarrow \dfrac{NH}{NF} = \dfrac{NA}{NH} \Rightarrow NH^2 = NF.NA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $NH = HM$.

3) Xét ΔMAF và ΔMEA có: AME chung, $MAF = MEA$

suy ra ΔMAF đồng dạng với ΔMEA

$$\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MA}{MF} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{AE^2}{AF^2} \quad (3)$$

Vì MFHB là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MFB = MHB = 90^\circ \Rightarrow BFE = 90^\circ$

Và $AFH = AHN = 90^\circ \Rightarrow AFE = BFH$.

ΔAEF và ΔHBF có: $EFA = BFH; FEA = FBA$

suy ra ΔAEF đồng dạng với ΔHBF

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{HB}{HF} \Rightarrow \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{HB^2}{HF^2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$\frac{ME}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2} \Leftrightarrow \frac{MF+FE}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{FE}{MF} = \frac{HB^2}{HF^2} \Leftrightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{FE}{MF} = 1$$

Bài 21. Cho hai đường tròn $O; R$ và $O'; R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C, kẻ tiếp tuyến CD, CE với O, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong O'. Đường thẳng AD, AE cắt O' lần lượt tại M và N (M, N khác A). Tia DE cắt MN tại I, OO' cắt AB và DI lần lượt tại H và F.

1) Chứng minh: $FE.HD = FD.HE$.

2) Chứng minh: $MB.EB.DI = IB.AN.BD$.

3) Chứng minh: $O'I$ vuông góc với MN.

(Trích đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi (vòng 2), Hải Dương 2017 - 2018)

LỜI GIẢI

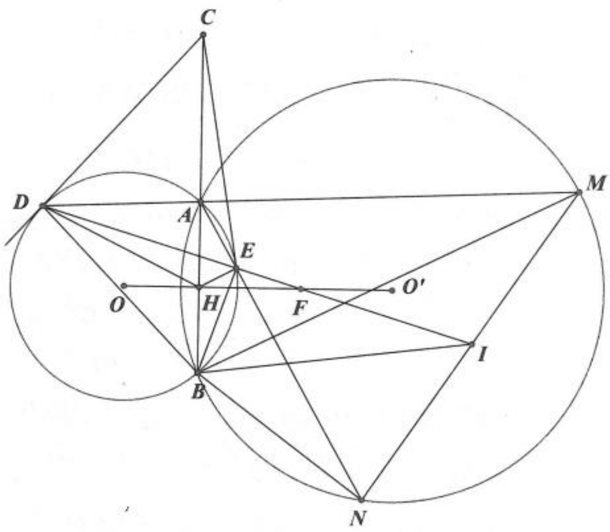
1) O cắt O' tại A, B

$\Rightarrow OO' \perp AB \Rightarrow CHO = 90^\circ$ (1)

CD, CE là tiếp tuyến của O tại D, E

$\Rightarrow CDO = CEO = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C, D, O, H, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính $CO \Rightarrow \begin{cases} CHE = CDE \\ CHD = CED \end{cases}$



Mà $CD = CE \Rightarrow CDE = CED \Rightarrow CHE = CHD$

$\Rightarrow HC$ là đường phân giác của DHE.

Mặt khác $OO' \perp AB$ tại H hay $FH \perp HC$ tại H

$\Rightarrow HF$ là phân giác ngoài tại H của ΔDHE

$\Rightarrow \dfrac{FE}{FD} = \dfrac{HE}{HD} \Rightarrow FE.HD = FD.HE$

2) Trong (O) có: $BMN = BAN$

Trong (O') có: $BAN = BDE \Rightarrow BMN = BDE$

$\Rightarrow$BDMI là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MBI = MDI = ABE$

Xét ΔMIB và ΔAEB có: $MBI = ABE; BMI = BAE$

$\Rightarrow \Delta MIB \backsim \Delta AEB \Rightarrow \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{IB}{EB}$ (3)

Xét ΔABN và ΔDBI có: $BAN = BDI; BNA = BID$

$\Rightarrow \Delta ABN \backsim \Delta DBI \Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AN}{DI}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{MB}{AB}.\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{IB}{EB}.\dfrac{AN}{DI} \Rightarrow MB.EB.DI = IB.AN.DB$

3) Xét ΔIBN và ΔDBA có:

$IBN = DBA$ (vì $= DEA = IEN$), $BIN = BDA$ (vì BDMI nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta IBN \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{DA}{DB}$ (5)

Xét ΔCDA và ΔCBD có: DCB chung; $CDA = CBD$

$\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CBD \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CD}{CB}$

Mà $CD = CE \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CE}{CB}$ (6)

Xét ΔCEA và ΔCBE có: BCE chung; $CEA = CBE$

$\Rightarrow \Delta CEA \backsim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{EA}{EB}$ (7)

Mặt khác $\Delta MIB \backsim \Delta AEB$ (theo phần b)

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{IM}{IB}$ (8)

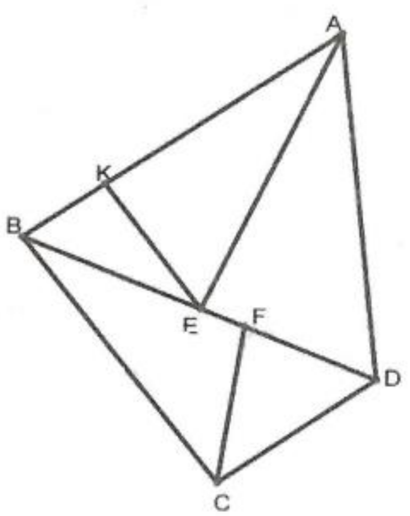
Từ (5), (6), (7), (8) $\Rightarrow \dfrac{IN}{IB} = \dfrac{IM}{IB} \Rightarrow IN = IM \Rightarrow O'I \perp MN$

Bài 22. Cho tứ giác ABCD có $BAD = 60°, BCD = 90°$. Đường phân giác trong của BAD cắt BD tại E. Đường phân giác trong của BCD cắt BD tại F. Chứng minh: $\dfrac{\sqrt{3}}{AE} + \dfrac{\sqrt{2}}{CF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CD} + \dfrac{1}{DA}$

(Trích đề thi vào 10 Chuyên Long An, năm học 2016 - 2017)

LỜI GIẢI

Gọi K là hình chiếu vuông góc của E lên AB.



Diện tích tam giác ABE là:

$\dfrac{KE.AB}{2} = \dfrac{AE.\sin 30°.AB}{2} = \dfrac{AE.AB}{4}$

Diện tích tam giác ADE là: $\dfrac{AE.AD}{4}$

Diện tích tam giác ABD là: $\dfrac{AB.\sin 60°.AD}{2} = \dfrac{\sqrt{3}AB.AD}{4}$

Ta có: Diện tích tam giác ABE + Diện tích tam giác ADE

= Diện tích tam giác ABD.

Suy ra: $\dfrac{\sqrt{3}}{AE} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD}$ (1)

Tương tự như trên ta tìm được $\dfrac{\sqrt{3}}{CF} = \dfrac{1}{CB} + \dfrac{1}{CD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{\sqrt{3}}{AE} + \dfrac{\sqrt{2}}{CF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CD} + \dfrac{1}{DA}$

Bài 23. Cho đường tròn $O;R$ và điểm A cố định trên $O;R$. Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn $O;R$ và $A;R$; H là điểm thay đổi trên cung nhỏ MN của đường tròn $A;R$. Đường thẳng qua H và vuông góc với AH cắt $O;R$ tại B, C. Kẻ $HI \perp AB$ $I \in AB$, $HK \perp AC$ $K \in AC$.

1) Chứng minh rằng IK luôn vuông góc với một đường thẳng cố định và $AB.AC = 2R^2$.

2) Tìm giá trị lớn nhất của điện tích ΔAIK khi H thay đổi.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Phú Thọ, năm học 2016 - 2017)

LỜI GIẢI

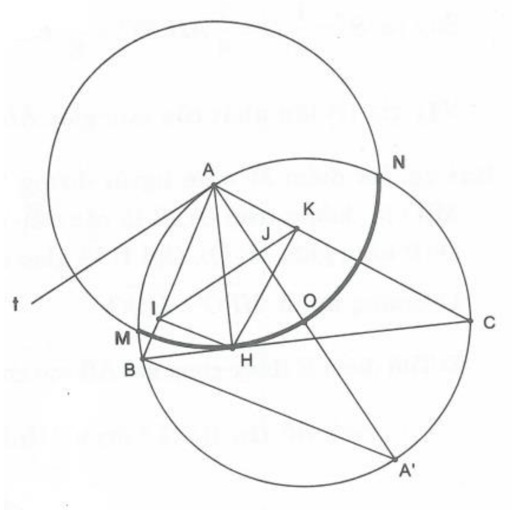
1) Ta có $AIH = 90°; AKH = 90°$

Vì $AIH + AKH = 180°$

nên tứ giác AJHK nội tiếp.

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn

$O; R$ tại A.



Ta có: $\begin{cases} ACB + HAC = 90° \\ AHK + HAC = 90 \end{cases}$

$\Rightarrow ACB = AHK$ (1)

Ta lại có: $AHK = AIK$

(do tứ giác AIHK nội tiếp) (2)

và $BAt = ACB$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ AB) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: . $BAt = AIK \Rightarrow At // IK$

Mặt khác $OA \perp At \Rightarrow IK \perp OA$. Vậy IK luôn vuông góc với đường thẳng cố định OA.

Gọi J là giao điểm của AO và IK; A' là điểm đối xứng với A qua O.

Ta có $\Delta ACH \backsim \Delta AA'B$ $AHC = ABA' = 90°; ACH = AA'B$.

$$\Rightarrow \frac{AC}{AA'} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB.AC = 2R.AH = 2R^2$$

2) Ta có $\Delta AKH \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AK.AC = AH^2$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích các tam giác ABC và AIK.

Ta có $\Delta AIK \backsim \Delta ACB \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{IK}{BC} = \frac{AJ}{AH}$, suy ra:

$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{1}{2}AJ.IK}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{AJ}{AH}.\frac{IK}{BC}=\left(\frac{AK}{AB}\right)^2=\left(\frac{AK.AC}{AB.AC}\right)^2$$

$$=\frac{AH^4}{AH.2R^{\ 2}}=\frac{AH^2}{4R^2}=\frac{1}{4}$$

Suy ra $S'=\frac{1}{4}.S=\frac{1}{8}AH.BC=\frac{R}{8}.BC\le\frac{R}{8}.2R=\frac{R^2}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của tam giác AJK bằng $\frac{R^2}{4}$, đạt khi $H\equiv O$.

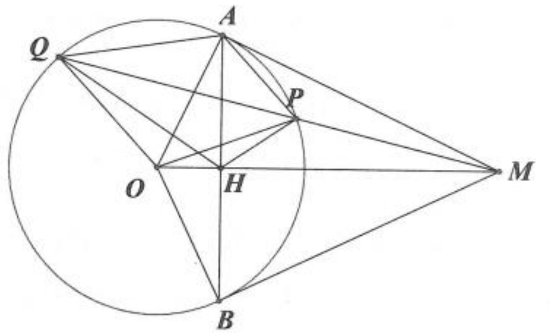
Bài 24. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O .Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB.

1) Chứng minh $HPO=HQO$.

2) Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Nghệ an, năm học 2015 - 2016)

LỜI GIẢI



1) ΔMPA đồng dạng ΔMAQ (g.g),

suy ra $MA^2=MP.MQ$ (1)

ΔMAO vuông tại A, có đường cao

AH nên $MA^2=MH.MO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$P.MQ=MH.MO$ hay $\frac{MP}{MH}=\frac{MO}{MQ}$ (*)

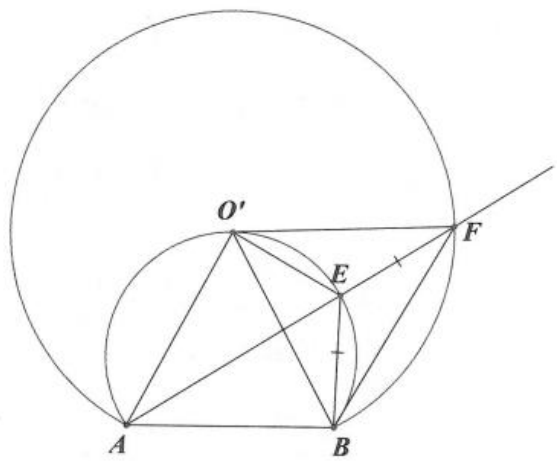
ΔMPH và ΔMOQ có góc M chung, kết hợp (*) ta suy ra ΔMPH đồng dạng ΔMOQ (c.g.c). Suy ra $MHP=MQO$

Do đó tứ giác PQOH là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow HPO=HQO=\frac{1}{2}sdOH$ (đpcm)

2) Trên tia đối của tia EA lấy điểm F

sao cho $EB=EF$ hay ΔEBF



cân tại E, suy ra $BFA = \frac{1}{2} BEA$

Đặt $AEB = \alpha$ khi đó $AFB = \frac{\alpha}{2}$

nên F di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC.

Ta có: $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \geq \frac{4}{EA + EB}$.

Như vậy $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ nhỏ nhất khi $EA + EB$ lớn nhất

hay $EA + EF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AF$ lớn nhất (**)

Gọi O' là điểm chính giữa của cung lớn AB

suy ra $\Delta O'AB$ cân tại O' suy ra $O'A = O'B$ (3)

$\Delta O'EB$ và $\Delta O'EF$ có EB = EF, O'E chung

Và $FEO' = BEO'$ (cùng bù với BAO')

$\Rightarrow \Delta O'EB = \Delta O'EF$ (c.g.c) suy ra $O'B = O'F$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra O' là tâm cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC (cung đó và cung lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB).

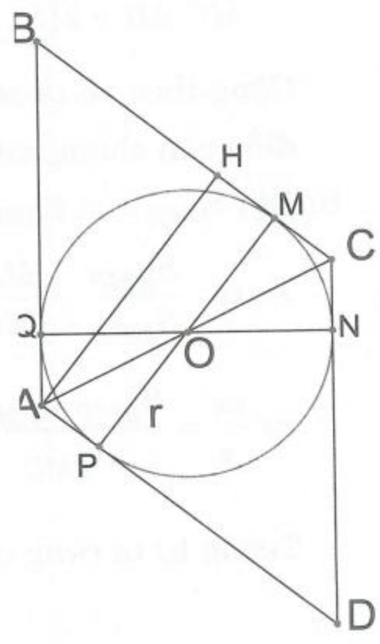
Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của O' khi $E \equiv O'$ (***).

Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ giá trị nhỏ nhất.

Bài 25. Trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn $O;r$, hãy tìm hình bình hành có diện tích nhỏ nhất.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Hải Dương, năm học 2011 - 2012)

LỜI GIẢI



Theo bài ta suy ra các cạnh của hình hành là tiếp tuyến của đường tròn $O;r$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với các cạnh như hình vẽ.

$\Rightarrow CM = CN; AP = AQ, BM = BQ; PD = DN$

$\Rightarrow CM + BM + AP + PD = CN + DN + AQ + BQ$

$\Rightarrow 2BC = 2AB \Rightarrow BC = AB$

Kẻ $AH \perp BC$. Ta có $AB \geq AH$, dấu "=" xảy ra khi

$ABC = 90^\circ$

Ta có: $OM \perp BC, OP \perp AD, AD//BC$

$\Rightarrow$ P, O, M thẳng hàng, do đó $AH = PM = 2r$.

$S_{ABCD} = AH.BC = 2r.AB \geq 2r.2r$

$\Rightarrow S_{ABCD} \geq 4r^2$, dấu "=" xảy ra khi $ABC = 90^\circ$.

Vậy trong các hình bình hành ngoại tiếp đường tròn $O;r$ thì hình vuông có diện tích nhỏ nhất và bằng $4r^2$.

Bài 26. Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác, các đường thẳng AM, BM, CM, lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại P, R, Q. Kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.

1) Chứng minh rằng: $MA.BC + MB.CA + MC.AB \geq 4S_{ABC}$

2) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác PQR lớn nhất.

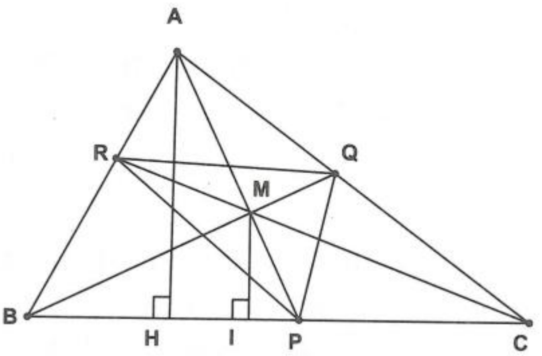
(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Bình Định, năm học 2010 - 2011)

LỜI GIẢI

a) Ta có: $\dfrac{PM}{PA} = \dfrac{MI}{AH} = \dfrac{S_{BMC}}{S_{ABC}}$

$$\Rightarrow \frac{S_{BMC}}{S_{ABC} - S_{BMC}} = \frac{PM}{MA} \geq \frac{MI}{MA} = \frac{MI.BC}{MA.BC} = \frac{2S_{BMC}}{MA.BC}$$

$\Rightarrow MA.BC \geq 2\ S_{ABC} - S_{BMC}$



Tương tự ta cũng có:

$MB.AC \geq 2\ S_{ABC} - S_{AMC}$;

$MC.AB \geq 2\ S_{ABC} - S_{AMB}$

Cộng theo vế ta sẽ được điều cần chứng minh.

b) Đặt $S_{PMQ} = x; S_{QMR} = y; S_{RMP} = z \Rightarrow S_{PQR} = x + y + z$

Ta có $\dfrac{S_{RMP}}{S_{MCP}} = \dfrac{MR}{MC}; \dfrac{S_{PMQ}}{S_{PMB}} = \dfrac{MQ}{MB} \Rightarrow \dfrac{z.x}{S_{MCP}S_{PMB}} = \dfrac{MR.MQ}{MC.MB} = \dfrac{y}{S_{BMC}}$

$$\Rightarrow \frac{zx}{y} = \frac{S_{BMP}.S_{PMC}}{S_{BMC}} \le \frac{S_{BMC}^2}{4S_{BMC}} = \frac{S_{BMC}}{4} \qquad (1)$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{xy}{z} \le \frac{S_{CMA}}{4}$ (2); $\frac{yz}{x} \le \frac{S_{AMB}}{4}$ (3)

Cộng theo vế các BĐT (1), (2) và (3) ta được: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \le \frac{S_{ABC}}{4}$ (4)

Mặt khác dùng BĐT Cô-si ta sẽ chứng minh được

$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \ge x + y + z$ nên từ (4) suy ra:

$$x + y + z \le \frac{S_{ABC}}{4} \Rightarrow S_{PQR} \le \frac{S_{ABC}}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} S_{PMB} = S_{PMC}; S_{CMQ} = S_{QMA}; S_{AMR} = S_{RMB} \\ x = y = z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy khi M là trọng tâm của tam giác ABC thì max $S_{PQR} = \frac{S_{ABC}}{4}$

Bài 27. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

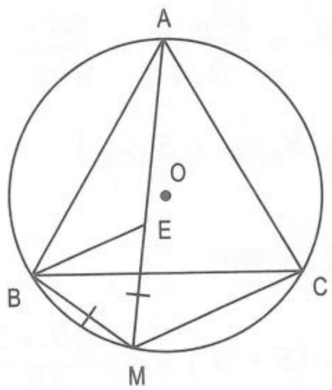
1) Chứng minh $MB + MC = MA$

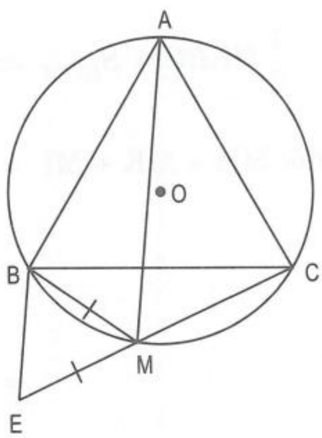
2) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}\ S + 2S'}{3R}$$

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Bình Định, năm học 2016 - 2017)

LỜI GIẢI





a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$.

Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$\Delta BMA = \Delta BEC \Rightarrow MA = EC$

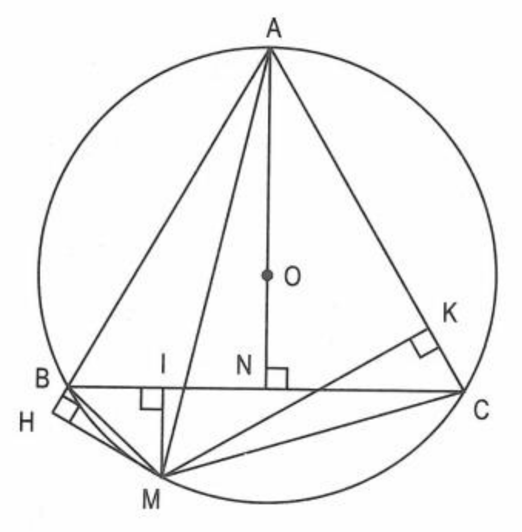
Do đó: $MB + MC = MA$

Cách 2: Trên AM lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$\Delta MBC = \Delta EBA(\text{c.g.c}) \Rightarrow \text{MC} = \text{AE}$. Do đó: $MB + MC = MA$

b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N



Vì ΔABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng $\Rightarrow AN = \frac{3}{2}R$

Ta có: $AN = AB.\sin ABN$

$$\Rightarrow AB = \frac{AN}{\sin ABN} = \frac{3}{2}R : \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

Ta có: $\frac{1}{2}MH.AB = S_{ABM}$

$$\Leftrightarrow MH = \frac{2S_{ABM}}{AB} = \frac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2}MK.AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \frac{2S_{ACM}}{AC} = \frac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2}MI.BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \frac{2S_{BCM}}{BC} = \frac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \frac{2S'}{R\sqrt{3}}$$

Do đó: $MH + MK + MI = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}\ \ S_{ABM} + S_{ACM}$

$$= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.S_{ABMC}$$

$$= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}.\ S + S' \ = \frac{2\sqrt{3}\ \ S + 2S'}{3R}$$

Bài 28. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp là r. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Biết rằng:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{r}$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

(Trích đề thi HSG Lớp 9, Tỉnh Thái Bình, năm học 2015 - 2016)

LỜI GIẢI

Gọi đường cao tương ứng với cạnh BC là AH. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

Ta dễ thấy: $\frac{S}{AM} \le \frac{S}{AH} = \frac{BC}{2}$

Tương tự ta có: $\frac{S}{BN} \le \frac{AC}{2}, \frac{S}{CP} \le \frac{AB}{2}$

Cộng vế theo vế ta được:

$\frac{S}{AM} + \frac{S}{BN} + \frac{S}{CP} \le p$, trong đó p là nửa chu vi.

$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \le \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

------------------------- THCS.TOANMATH.com -------------------------