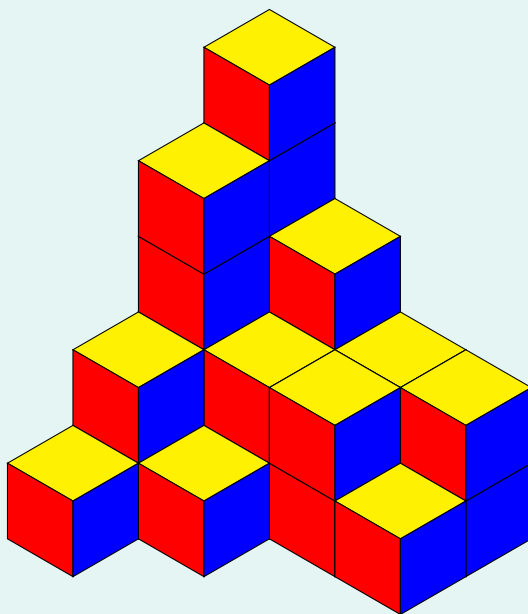


LỚP TOÁN THẦY ĐĂNG

CÁC CHUYÊN ĐỀ TỔNG ÔN
KỲ THI THPT QUỐC GIA
MÔN TOÁN



MỤC LỤC

Chuyên đề 1	KHẢO SÁT HÀM SỐ	1
A	Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên $\mathbb{K}$	1
1	Ví dụ	1
2	Bài tập tương tự và phát triển	2
	<i>Bảng đáp án</i>	3
B	Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm hợp	3
1	Ví dụ	4
2	Bài tập tương tự và phát triển	5
	<i>Bảng đáp án</i>	8
C	Đơn điệu và cực trị của hàm số hợp	8
1	Bài tập mẫu	9
2	Bài tập tương tự và phát triển	11
	<i>Bảng đáp án</i>	13
Chuyên đề 2	Phương trình mũ và lôgarít	14
A	Dạng phương trình cô lập tham số	14
1	Ví dụ	14
2	Bài tập tương tự và phát triển	14
	<i>Bảng đáp án</i>	16
B	Bài toán sử dụng hàm đặc trưng	16
1	Ví dụ	16
2	Bài tập tương tự và phát triển	17
Chuyên đề 3	NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN	20
A	Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức	20
1	Ví dụ	20
2	Bài tập tương tự và phát triển	20
	<i>Bảng đáp án</i>	22
B	Tích phân kết hợp: Đổi biến & từng phần	22
1	Ví dụ	22
2	Bài tập tương tự và phát triển	22
	<i>Bảng đáp án</i>	23
C	Tích phân hàm ẩn	23
1	Ví dụ	23
2	Bài tập tương tự và phát triển	24
	<i>Bảng đáp án</i>	25
D	Diện tích hình phẳng và thể tích vật thể tròn xoay	25
1	Ví dụ	25
2	Bài tập tương tự và phát triển	28
	<i>Bảng đáp án</i>	31

Chuyên đề 4 SỐ PHỨC

32

A	Xác định các thuộc tính của số phức	32
1	Ví dụ	32
2	Bài tập tương tự và phát triển	32
B	Cực trị của biểu thức chứa mô-đun số phức	33
1	Ví dụ	33
2	Bài tập tương tự và phát triển	35
	<i>Bảng đáp án</i>	36

Chuyên đề 5 HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

37

A	Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	37
1	Ví dụ	37
2	Bài tập tương tự và phát triển	37
	<i>Bảng đáp án</i>	39
B	Thể tích có chứa dữ liệu góc	39
1	Ví dụ	39
2	Bài tập tương tự và phát triển	40
	<i>Bảng đáp án</i>	42
C	Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng	42
1	Ví dụ	42
2	Bài tập tương tự và phát triển	43
	<i>Bảng đáp án</i>	44
D	Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	44
1	Ví dụ	44
2	Bài tập tương tự và phát triển	44
	<i>Bảng đáp án</i>	45
E	Góc giữa hai mặt phẳng	45
1	Ví dụ	45
2	Bài tập tương tự và phát triển	46
	<i>Bảng đáp án</i>	47
F	Thể tích khối đa diện liên quan góc, khoảng cách	48
1	Ví dụ	48
2	Bài tập tương tự và phát triển	49
	<i>Bảng đáp án</i>	51
G	Bài toán cực trị (thực tế) trong nón trụ cầu	51
1	Ví dụ	51
2	Bài tập tương tự và phát triển	53
	<i>Bảng đáp án</i>	53

Chuyên đề 6 PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

54

A	Phương trình mặt phẳng, đường thẳng	54
1	Ví dụ	54
2	Bài tập tương tự và phát triển	54
	<i>Bảng đáp án</i>	56
B	Cực trị hình học <i>Oxyz</i>	57
1	Ví dụ	57
2	Bài tập tương tự phát triển	58
	<i>Bảng đáp án</i>	59

KHẢO SÁT HÀM SỐ

KHẢO SÁT HÀM SỐ

A TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN $\mathbb{K}$

1. VÍ DỤ

Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên khoảng $\mathcal{H}$.

☑ Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{R} \rightarrow$ sử dụng Δ .

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Khi đó

$$\textcircled{A} f(x) \geq 0 \text{ với mọi } x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

$$\textcircled{B} f(x) \leq 0 \text{ với mọi } x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

☑ Nếu $\mathbb{K} \subset \mathbb{R} \rightarrow$ cô lập m .

$$\textcircled{C} m \geq g(x) \text{ với mọi } x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow m \geq \max_{\mathcal{H}} g(x).$$

$$\textcircled{D} m \leq g(x) \text{ với mọi } x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathcal{H}} g(x).$$

(Nếu $\max_{\mathcal{H}} g(x)$, $\min_{\mathcal{H}} g(x)$ tồn tại).

📌 Câu 1 (Câu 41 - Đề tham khảo lần 2 BGD&ĐT 2020).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

🔑 Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0$ với mọi $x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2; 2].$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

📌 Câu 2 (Câu 36 - Đề tham khảo BGD&ĐT 2019).

Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ là

A. $(-\infty; 0]$.

B. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

C. $\left(+\infty; -\frac{3}{4}\right]$.

D. $[0; +\infty)$.

🔑 Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0 \forall x \in (-\infty; -1)$.

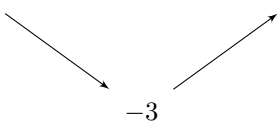
Khi đó

$$\begin{aligned} -3x^2 - 12x + 4m - 9 &\leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \\ \Leftrightarrow 4m &\leq 3x^2 + 12x + 9, \forall x \in (-\infty; -1) \\ \Leftrightarrow 4m &\leq \min_{x \in (-\infty; -1)} (3x^2 + 12x + 9) \quad (*). \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 12x + 9$. Khi đó $g'(x) = 6x + 12$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

$$(*) \Leftrightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 3 (Câu 40 - Đề TN THPT BGD&ĐT 2020).

Tập hợp tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là

- A.** $[4; 7)$. **B.** $(4; 7]$. **C.** $(4; 7)$. **D.** $(4; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -m$.

Ta có $y' = \frac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ khi và chỉ khi $y' > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ -m \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (4; 7].$$

Chọn đáp án **(B)**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** 7. **B.** 5. **C.** 54. **D.** 6.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-5)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m < 1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $-4 < m < 1$.

Câu 3. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A.** $m \leq 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m < 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Tìm số phần tử của S .

- A.** 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

- Câu 5.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 10}{2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?
- A. 4. B. 5. C. 9. D. 6.
- Câu 6.** Số giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = \frac{2x - m + 3}{x - m}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ là
- A. 4. B. 3. C. 2. D. vô số.
- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \frac{x + 1}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- A. $m \geq 2$. B. $m \leq -2$. C. $m = -2$. D. $-2 \leq m < 1$.
- Câu 8.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3(m^2 - 1)x + 12$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?
- A. 4. B. Vô số. C. 5. D. 3.
- Câu 9.** Số giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = -x^3 + (m + 1)x^2 + 2x - 3$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ là
- A. 6. B. 7. C. 9. D. 8.
- Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- A. $m \in (-\infty; -5)$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in [-5; 2)$. D. $m \in (-\infty; 2]$.
- Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3mx + m$ có độ dài khoảng nghịch biến bằng 4.
- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = -3$. D. $m = -4$.
- Câu 12.** Cho hàm số $y = \frac{(4 - m)\sqrt{6 - x} + 3}{\sqrt{6 - x} + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m trong khoảng $(-10; 10)$ sao cho hàm số đã cho đồng biến trên $(-8; 5)$?
- A. 14. B. 13. C. 12. D. 15.
- Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-8; 8)$ để hàm số $y = \frac{2 \cos x + 3}{2 \cos x - m}$ đồng biến trên $(0; \frac{\pi}{3})$?
- A. 9. B. 7. C. 5. D. 11.
- Câu 14.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 10) + mx + m^2 + 1$ luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?
- A. 3. B. 7. C. 8. D. 4.
- Câu 15.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3})$?
- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$?
- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 17.** Cho hàm số $y = \frac{2\sqrt{9 - x^2} - m}{\sqrt{9 - x^2} - m}$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên không vượt quá 2020 để hàm số đồng biến trên $(0; \sqrt{5})$. Tính tổng các phần tử của tập hợp S .
- A. 2041205. B. 2039190. C. 2039191. D. 2041210.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. D	4. C	5. D	6. A	7. D	8. C	9. D	10. D
11. C	12. A	13. D	14. A	15. C	16. C	17. D			

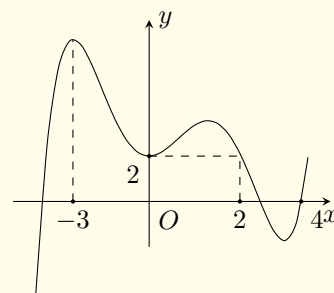
B GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM HỢP

1. VÍ DỤ

Câu 1 (Câu 39 - Đề tham khảo - Bộ GD & ĐT năm 2021).

Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ bằng

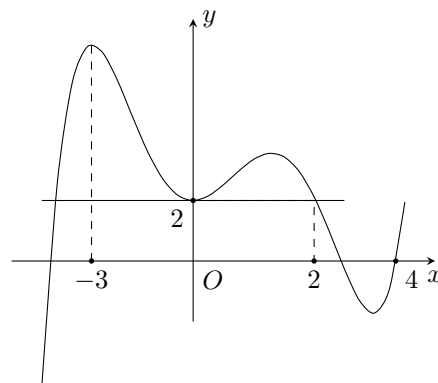
- A. $f(0)$. B. $f(-3) + 6$. C. $f(2) - 4$. D. $f(4) - 8$.



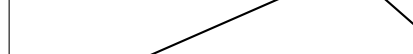
Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(2x) - 4, \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$.

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2f'(2x) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$



Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	
$g'(x)$	+	0	+	0	-
$g(x)$	$f(2) - 4$ 				

Từ bảng biến thiên ta được $\max_{\left[-\frac{3}{2}; 2\right]} g(x) = f(2) - 4$.

Cách 2: Đặt $t = 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ thì $t \in [-3; 4]$.

Hàm số trở thành $h(t) = f(t) - 2, \forall t \in [-3; 4]$.

Ta có $h'(t) = f'(t) - 2, h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}, \forall t \in [-3; 4]$.

x	-3	0	2	4	
$h'(t)$	+	0	+	0	-
$h(t)$	$f(2) - 4$				

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max_{t \in [-3; 4]} h(t) = h(2) = f(2) - 4$.

Chọn đáp án 

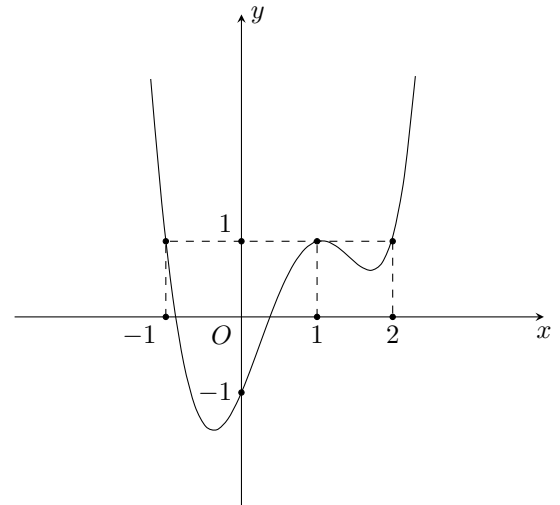
□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 2x + 1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ bằng

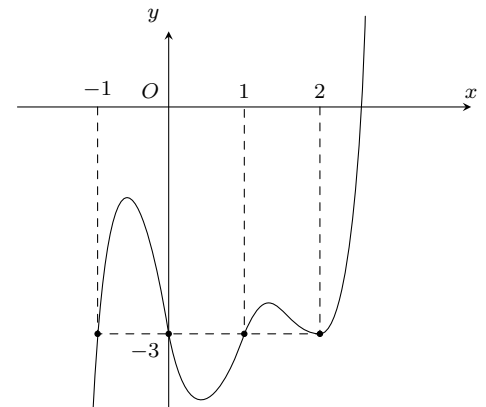
- A. $f(0) - 1$. B. $f(1)$. C. $f(2) - 1$. D. $f(-1) + 2$.



Câu 2.

Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2x - 1) + 6x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ bằng

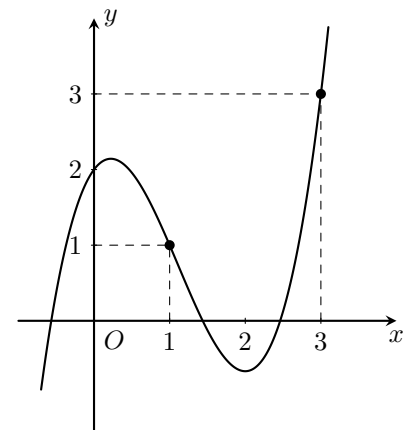
- A. $f\left(\frac{1}{2}\right)$. B. $f(0) + 3$. C. $f(1) + 6$. D. $f(3) + 12$.



Câu 3.

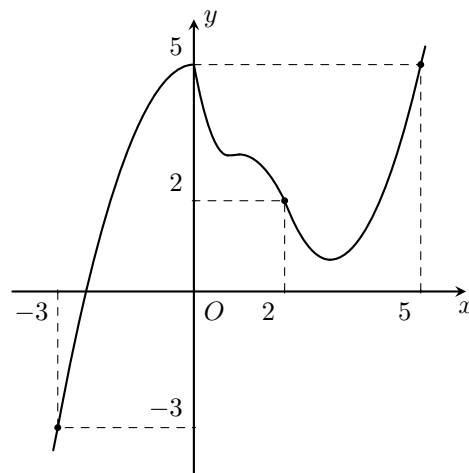
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln(x^2 + 8x + 16)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 4]$ tại $x = x_0$. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. C. $(-1; 0)$. D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.



Câu 4.

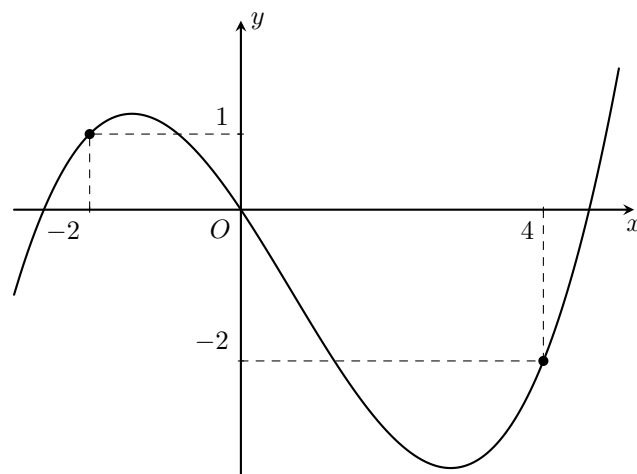
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(5) = 12$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(1 - 2x) - 2x^2 + 2x$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng



- A. 0. B. $f(-3) - 4$. C. 1. D. $f(1)$.

Câu 5.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có $f(0) = \frac{3}{2}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 4f(x+1) + x^2 + 2x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

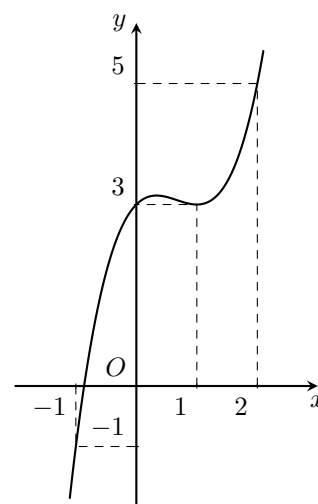


- A. $4f(-2) + 3$. B. $4f(4) + 15$.
C. 5. D. $4f(3) + 8$.

Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$.

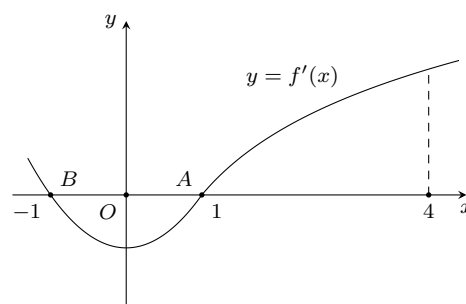
Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A. $g(-1) > g(1)$.
B. $g(-1) = g(1)$.
C. $g(1) = g(2)$.
D. $g(1) > g(2)$.

Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng các điểm $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ lần lượt là

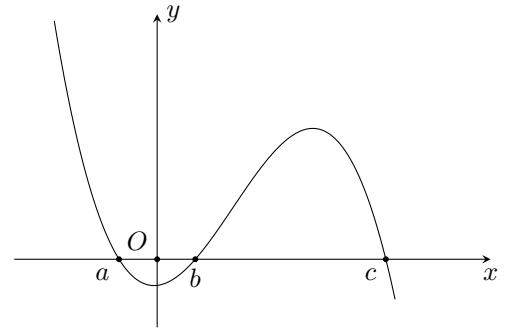


- A. $f(1); f(-1)$. B. $f(0); f(2)$. C. $f(1); f(4)$. D. $f(-1); f(4)$.

Câu 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

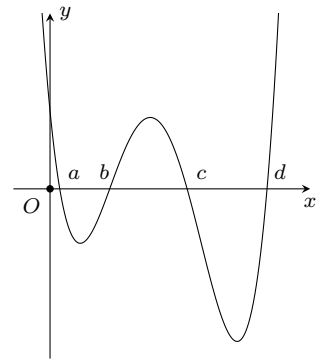
- A. $f(c) > f(b) > f(a)$.
B. $f(b) > f(a) > f(c)$.
C. $f(a) > f(c) > f(b)$.
D. $f(c) > f(a) > f(b)$.



Câu 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ theo thứ tự từ trái sang phải trên trục hoành là a, b, c, d ($a < b < c < d$) như hình vẽ bên. Chọn khẳng định đúng.

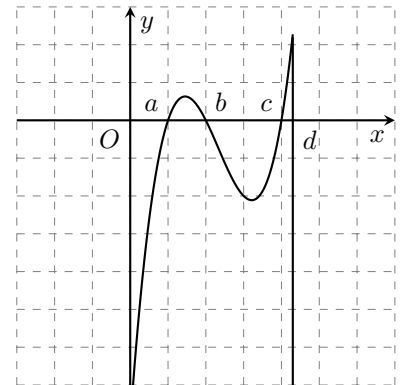
- A. $f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$.
B. $f(c) > f(a) > f(d) > f(b)$.
C. $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.
D. $f(a) > f(c) > f(d) > f(b)$.



Câu 10.

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $M + m = f(0) + f(c)$.
B. $M + m = f(d) + f(c)$.
C. $M + m = f(b) + f(a)$.
D. $M + m = f(0) + f(a)$.



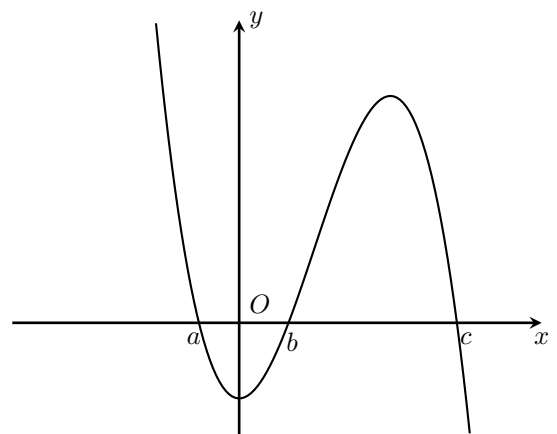
Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Xét 4 mệnh đề sau:

- (1): $f(c) < f(a) < f(b)$.
(2): $f(c) > f(b) > f(a)$.
(3): $f(a) > f(b) > f(c)$.
(4): $f(a) > f(b)$.

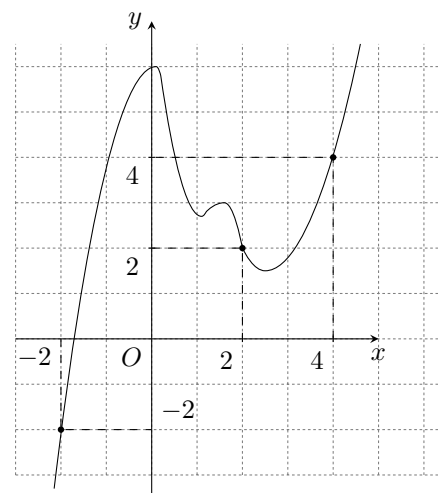
Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.



Câu 12.

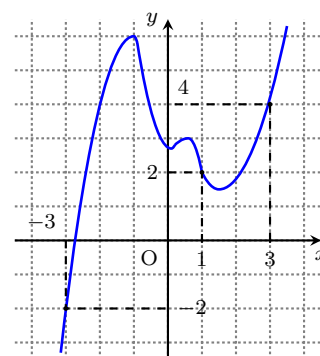
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.
- B. Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- C. Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.
- D. Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

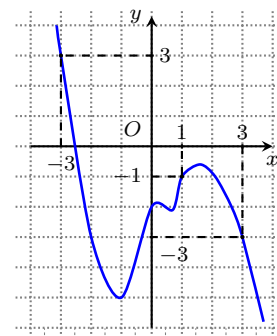
Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x + 1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $g(-3) > g(3) > g(1)$.
- B. $g(1) > g(-3) > g(3)$.
- C. $g(3) > g(-3) > g(1)$.
- D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.

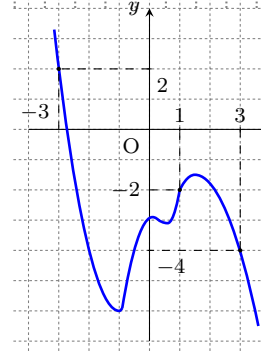
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $g(3) < g(-3) < g(1)$.
- B. $g(1) < g(3) < g(-3)$.
- C. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
- D. $g(-3) < g(3) < g(1)$.

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + (x + 1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.
- B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
- C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.
- D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. B	5. B	6. D	7. C	8. D	9. A	10. A
11. B	12. C	13. D	14. B	15. A					

ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP

1. BÀI TẬP MẪU

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = f(x^2 - 2mx + m^2 + 1)$ nghịch biến trên miền $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. -10. B. -12. C. 15. D. 14.

Lời giải.

Ta có $y = f(x^2 - 2mx + m^2 + 1) = f((x - m)^2 + 1) \Rightarrow y' = 2(x - m)f'((x - m)^2 + 1)$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 0 \\ f'((x - m)^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ (x - m)^2 + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$$

Với $x = m + 2$, ta có $y'(m + 2) = 4f'(5) > 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$m-1$	m	$m+1$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu, hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq m - 1 \\ m \leq 0 < \frac{1}{2} \leq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 0 \end{cases}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{2; 3; 4; 5\}$.

Tổng các phần tử của m là 14.

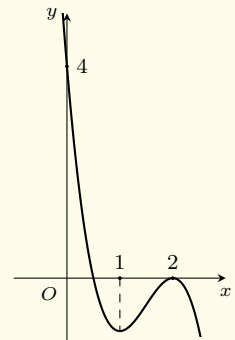
Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 2.

Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị $f'(x) = -2x^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. Biết hàm số $y = f(x) - 2mx + m$ đạt cực trị tại điểm $x = 1$. Mệnh đề nào đúng?

- A. $m \in (-\infty; -5)$. B. $m \in [-4; 0)$. C. $m \in [0; 3)$. D. $m \in [3; 5)$.



Lời giải.

Ta có $f''(x) = -6x^2 + 2bx + c$ và từ hình vẽ thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = 1$; $x = 2$ nên

$$\begin{cases} f''(1) = 0 \\ f''(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 6 \\ 4b + c = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 \\ c = -12 \end{cases}$$

Do đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt Oy tại $A(0; 4)$ nên $d = 4$.

Do đó $f'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4$.

Ta có $y' = f'(x) - 2m$ và hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 1$ nên

$$y'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) - 2m = 0 \Leftrightarrow -1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $m \in [-4; 0)$.

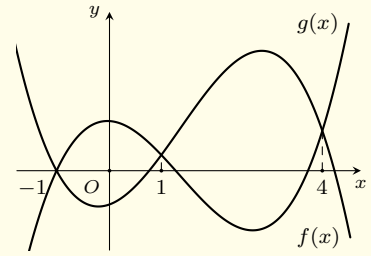
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 3.

Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là các hàm đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, số điểm cực đại của hàm số $y = |h(|x|)|$ là

- A. 5. B. 7. C. 3. D. 4.



Lời giải.

Xét $h(x) = a(x+1)(x-1)(x-4) = a(x^3 - 4x^2 - x + 4)$, ($a < 0$ do nhánh phải có $f(x) - g(x) < 0$).

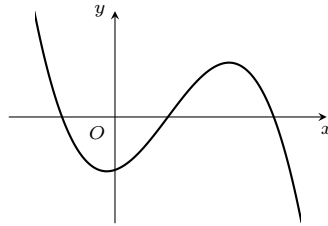
$$\text{Có } h'(x) = a(3x^2 - 8x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 - \sqrt{19}}{3} < 0 \\ x_2 = \frac{4 + \sqrt{19}}{3} > 0. \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty \\ h(0) = 4a < 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \in (-\infty; 0)$.

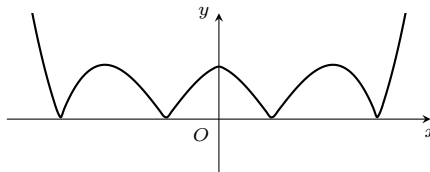
Tương tự $\begin{cases} h(0) = 4a < 0 \\ h(x_2) \approx -8,2a > 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \in (0; x_2)$.

Và $\begin{cases} h(x_2) \approx -8,2a > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty < 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x \in (x_2; +\infty)$.

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = h(x)$ có hình dáng sau



Thực hiện phép biến đổi đồ thị hàm số $y = |h(|x|)|$ có 3 điểm cực đại và 4 điểm cực tiểu.



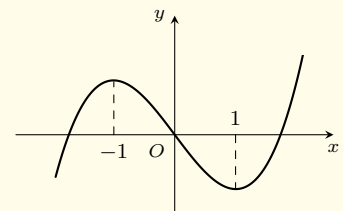
Chọn đáp án **C**

□

Câu 4.

Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $f(1) = 1$, hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |4f(\ln x) - \ln^2 x + 1 - m|$ nghịch biến trên $(1; e)$?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.



Lời giải.

Đặt $t = \ln x$, với $x \in (1; e) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Hàm số trở thành $y = |4f(t) - t^2 + 1 - m|$, $\forall t \in (0; 1)$.

Xét hàm số $g(t) = 4f(t) - t^2 + 1 - m$ có $g'(t) = 4f'(t) - 2t$.

Hàm số $y = |g(t)|$ nghịch biến trên $(0; 1)$ nên đồ thị $g(t)$ không nằm đồng thời về hai phía đối với Ox trên $(0; 1)$. Ta có hai trường hợp sau

t	0	1
$g(t)$	$g(0)$	$g(1) \leq 0$
$ g(t) $	$ g(0) $	$ g(1) $

t	0	1
$g(t)$	$g(0)$	$g(1) \geq 0$
$ g(t) $	$ g(0) $	$ g(1) $

✓ **TH1:** $\begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g'(t) \geq 0 \end{cases}, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \leq 0 \\ f'(t) \geq \frac{t}{2} \end{cases}$.

Từ đồ thị $f'(x)$, ta thấy $f'(t) < \frac{t}{2}, \forall t \in (0; 1)$ nên không xét thêm trường hợp này.

✓ **TH2:** $\begin{cases} g(1) \geq 0, \forall t \in (0; 1) \\ g'(t) \leq 0, \forall t \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(1) - m \geq 0 \\ f'(t) \leq \frac{t}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 4 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án **A**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$, với m, n là các tham số thực thỏa mãn $m + n > 0$ và $7 + 4m + 2n < 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ là

- A.** 5. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m với $|m| < 10$ để hàm số $y = |x^3 - (m - 2)x^2 - mx - m^2|$ có 3 điểm cực tiểu?

- A.** 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng bên dưới. Hàm số $g(x) = f(|x^2 - 1| + 1)$ đồng biến trên khoảng nào?

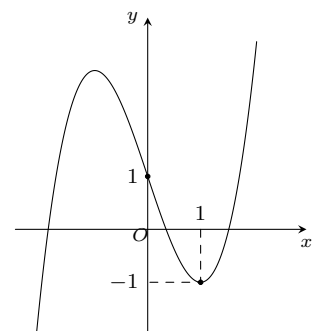
x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

- A.** $(-1; 1)$. **B.** $(-\infty; -\sqrt{2})$. **C.** $(-\frac{6}{5}; -1)$. **D.** $(0; \sqrt{2})$.

Câu 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(\sin x) - 3 \sin x|$ với mọi $x \in (0; \pi)$ bằng

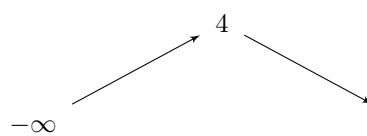
- A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.



Câu 5. Biết rằng hàm số $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6x + 1$ và $g(x) = 2x^3 + 3bx^2 + 12x + 4$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a| + |b|$ bằng

- A.** $2\sqrt{2} + 2$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in (1; 4)$ và $f'(4) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = e^{-x^2+mx+1}f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

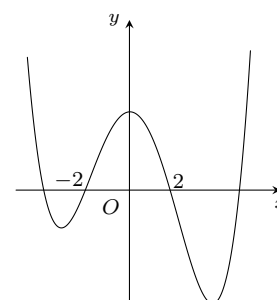
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$			

- A. 2010. B. 2012. C. 2007. D. 2008.

Câu 7.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|^3 - 3|x|)$ là

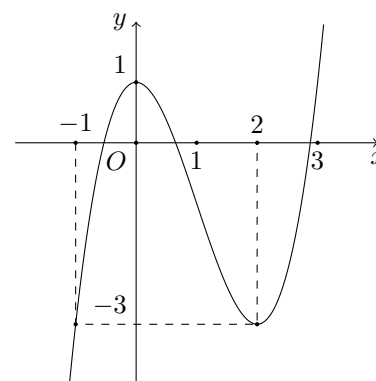
- A. 5. B. 9. C. 7. D. 11.



Câu 8.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu số tự nhiên $m \leq 2018$ để hàm số $y = f(m - x) + (m - 1)x$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

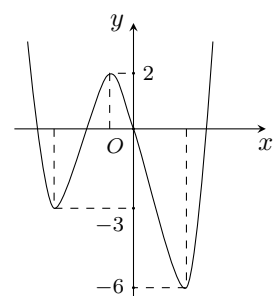
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 2018.



Câu 9.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x + 1) + m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.



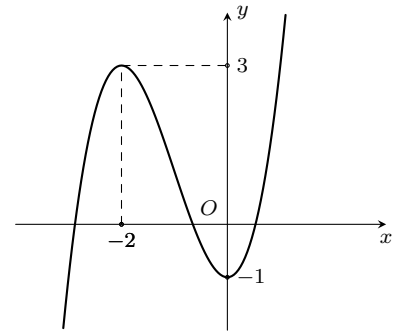
Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0, c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ là

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 3.

Câu 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $m < 2$. B. $m > 2$. C. $m > -2$. D. $m < -2$.



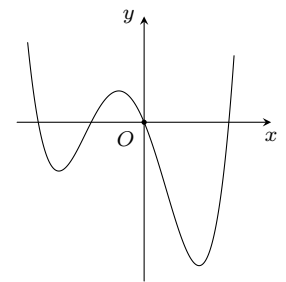
Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a > 0, c > 2017$ và $a + b + c < 2017$. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2017|$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 13.

Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = \ln |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

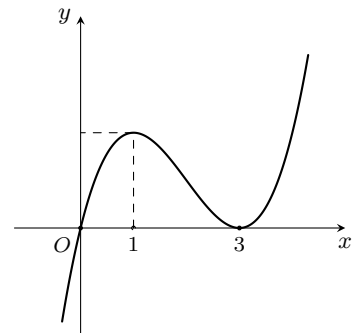
- A. 7. B. 2. C. 0. D. 4.



Câu 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(x+2) + 4f(x+2) + 3m|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

- A. 5047. B. 5049. C. 5050. D. 5043.



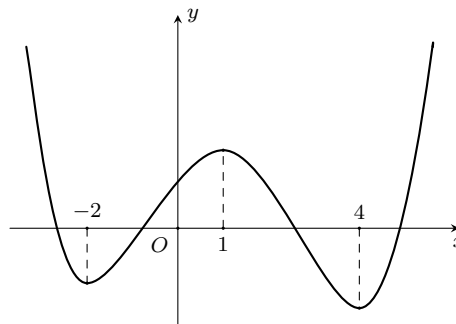
Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. 15. B. 6. C. 7. D. 16.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 42. B. 21. C. 40. D. 20.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - \frac{x^2 + 2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3. B. 7. C. 6. D. 4.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. A	5. B	6. B	7. C	8. C	9. C	10. C
11. D	12. D	13. C	14. B	15. D	16. A	17. A			

CHUYÊN ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARÍT

БНДЦИС ТБРИН МУ ЛУ ГОНВЛ

A DẠNG PHƯƠNG TRÌNH CÔ LẬP THAM SỐ

1. VÍ DỤ

Câu 1. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của c để tồn tại các số thực $a > 1$ và $b > 1$ thỏa mãn $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(5b - a) - \log_{16} c$?

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Đặt $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(5b - a) - \log_{16} c = \log_{16} \frac{5b - a}{c} = t$. Do $a > 1$, $b > 1$ nên $t > 0$. Suy ra

$$\begin{cases} a = 9^t \\ b = 12^t \\ \frac{5b - a}{c} = 16^t \end{cases} \Rightarrow \frac{5 \cdot 12^t - 9^t}{c} = 16^t \Rightarrow 5 \cdot 12^t - 9^t = c \cdot 16^t \Rightarrow c = 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t - \left(\frac{3}{4}\right)^{2t}.$$

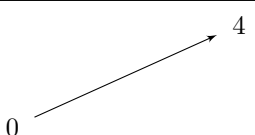
Đặt $x = \left(\frac{3}{4}\right)^t$. Do $t > 0$ nên $0 < \left(\frac{3}{4}\right)^t < \left(\frac{3}{4}\right)^0$ hay $x \in (0; 1)$.

Khi đó $c = 5x - x^2$ với $x \in (0; 1)$ (*).

Xét hàm số $f(x) = 5x - x^2$ với $x \in (0; 1)$.

Đạo hàm $f'(x) = 5 - 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \notin (0; 1)$.

Bảng biến thiên

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có nghiệm thuộc $(0; 1)$ khi $0 < c < 4$. Mà c nguyên dương nên $c \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án **C**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số thực m để phương trình

$$16^x - 2 \cdot 12^x + (m - 2) \cdot 9^x = 0$$

có nghiệm dương?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-18; 0]$ để phương trình

$$(x - 2) \log_4(x + m) = x - 1$$

có đúng một nghiệm dương?

- A. 18. B. 19. C. 17. D. 16.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-8; 10]$ để phương trình

$$\ln[(m + 1)x] = 2 \ln(x + 2)$$

có nghiệm duy nhất?

- A. 2. B. 8. C. 7. D. 12.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để phương trình

$$\log_2(x^2 - 3x + 2m) = \log_2(x + m)$$

có nghiệm?

- A. 25. B. 9. C. 24. D. 10.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-2021; 2021]$ sao cho tồn tại duy nhất số thực x thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}(x + 3) = \log_3(ax)$?

- A. 2020. B. 2021. C. 2022. D. 2023.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình

$$\log_2(x^2 - 2x + 4) = \log_5(x^2 - 2x + m)$$

có hai nghiệm phân biệt?

- A. 3. B. 4. C. 6. D. 0.

Câu 7. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m \in (-10; 10)$ sao cho phương trình $\log_6(2020x + m) = \log_4(1010x)$ có đúng 2 nghiệm phân biệt?

- A. 13. B. 3. C. 2. D. 12.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{\log_5(mx)}{\log_5(x + 1)} = 2$ có nghiệm duy nhất?

- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.

Câu 9 (Đề thử nghiệm năm 2017). Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3 - m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

- A. $[3; 4]$. B. $[2; 4]$. C. $(2; 4)$. D. $(3; 4)$.

Câu 10 (Đề tham khảo năm 2017). Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2 \log(x + 1)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 2017. B. 4014. C. 2018. D. 4015.

Câu 11 (Đề tham khảo năm 2018). Cho phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m - 2)9^x = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình có nghiệm dương?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 12. Cho phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$. Tìm số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình có nghiệm.

- A. 2018. B. 2017. C. 2019. D. 2020.

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-50; 50]$ sao cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^2) - 2 \log_2(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có nghiệm duy nhất?

- A. 16. B. 14. C. 13. D. 15.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $e^{3x} - 2e^{2x + \ln 3} + e^{x + \ln 9} + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\ln 2; +\infty)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15. Tập các giá trị của m để phương trình $4 \cdot (\sqrt{5} + 2)^x + (\sqrt{5} - 2)^x - m + 3 = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt là

- A. $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. B. $(7; 8)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(7; 9)$.

Câu 16. Cho phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

- A. 8. B. 7. C. 10. D. 9.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. A	5. C	6. D	7. D	8. C	9. C	10. C
11. B	12. A	13. C	14. A	15. B	16. C				

B BÀI TOÁN SỬ DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG

1. Ví dụ

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq y \leq 2020$ và $2^{x-1} = \log_4(x + 2y) + y$?

- A. 11. B. 10. C. 6. D. 5.

Lời giải.

Điều kiện $x + 2y > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2^x &= \log_2(x + 2y) + 2y \\ \Leftrightarrow 2^x + \log_2 2^x &= (x + 2y) + \log_2(x + 2y) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ với $t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$.

Do đó $f(2^x) = f(x + 2y) \Leftrightarrow 2^x = x + 2y \Leftrightarrow 2y = 2^x - x$.

Ta có $1 \leq y \leq 2020 \Leftrightarrow 2 \leq 2y < 4040 \Rightarrow 2 \leq 2^x - x \leq 4040$.

Do x nguyên nên $x \in \{2; 3; \dots; 11\}$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ suy ra $x : 2$ suy ra $x \in \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Vậy có 5 cặp $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Dấu hiệu nhận dạng cơ bản của việc sử dụng phương pháp đánh giá $(f(u), f(v))$ hoặc bất đẳng thức, ... là trong bài toán chứa hai hàm khác loại. Nếu chứa đồng thời mũ và lôgarit thì có thể sử dụng công thức $f(x) = a^{\log_a f(x)}$ hoặc đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II hoặc gần đối xứng.

Chọn đáp án **D**

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên a với $a \geq 2$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2.$$

- A. 8. B. 9. C. 1. D. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x > 2$.

Nhận xét rằng $a^{\log x} = x^{\log a}$.

Ta có $(a^{\log x} + 2)^{\log a} = x - 2 \Leftrightarrow (x^{\log a} + 2)^{\log a} + (x^{\log a} + 2) = x^{\log a} + x$.

Xét hàm số $f(t) = t^{\log a} + t$ trên $(2; +\infty)$.

$f'(t) = \log a \cdot t^{\log a - 1} + 1 > 0, \forall t > 2$ và $a \geq 2$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Khi đó $f(x^{\log a} + 2) = f(x) \Leftrightarrow x^{\log a} + 2 = x \Leftrightarrow x^{\log a} = x - 2 \Leftrightarrow \log a = \frac{\log(x-2)}{\log x}$.

Mà $\begin{cases} \log(x-2) < \log x, \forall x > 2 \\ \log x > 0, \forall x > 2 \end{cases}$ nên $\frac{\log(x-2)}{\log x} < 1, \forall x > 2$.

Do đó $\log a < 1 \Leftrightarrow a < 10$.

Đồng thời do $a \in \mathbb{Z}$ và $a \geq 2$ nên $a \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y < 2020$ và $3^x + 3x - 6 = 9y + \log_3 y^3$?

- A. 9. B. 8. C. 7. D. 2019.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại cặp số dương $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\frac{\log_2 y}{x} = 1 - y$ và $\log_3^2(x^2y + y - 1) - 8(m+2) \cdot \log_3(2x - xy) + 5m^2 + 16 = 0$?

- A. 9. B. 8. C. 16. D. 17.

Câu 3. Cho phương trình $\log_3 \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + 1} = x^2 + x + 4 - m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

- A. 2022. B. 2021. C. 2016. D. 2015.

Câu 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m sao cho phương trình $8^x + 3x \cdot 4^x + (3x^2 + 1) \cdot 2^x = (m^3 - 1)x^3 + (m - 1)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 10)$?

- A. 101. B. 100. C. 102. D. 103.

Câu 5. Cho hệ thức $\log_3(4^x + 2^{x+1}y + 4y^2) - \log_3(2^{x+1}y) = \frac{2^x(4y - 2^x)}{4y^2}$ với $1 \leq y \leq 2020$. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức trên?

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 6. Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 16. B. 9. C. 14. D. 15.

Câu 7. Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9. B. 25. C. 24. D. 26.

Câu 8. Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9. B. 19. C. 17. D. 18.

Câu 9. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a + 2b + 5}{a + b} \right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Câu 10. Xét x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{x + 4y}{x + y} \right) = 2x - 4y + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x + y)^3}$ bằng

- A. $\frac{25}{9}$. B. 4. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{16}{9}$.

Câu 11. Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$2a(x^{\log_2 a} + 1)^{\log_2 a} = x - 2.$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 12. Có bao nhiêu số nguyên a ($a \geq 2$) sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$(a^{\ln x} + 3)^{\ln x} = x - 3.$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của số thực y nhỏ hơn 10 sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $\sqrt{y + \sqrt{y + e^x}} = e^x$?

- A. 9. B. 8. C. 10. D. 7.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn

$$\ln[y + 3 \sin x + \ln(y + 4 \sin x)] = \sin x.$$

- A. 6. B. 10. C. 5. D. 9.

Câu 15. Có tất cả bao nhiêu số nguyên y sao cho có đúng 2 số thực $x \in (0; 10)$ thỏa mãn:

$$8^x + 3x \cdot 4^x + (3x^2 + 1) \cdot 2^x = (y^3 - 1)x^3 + (y - 1)x$$

- A. 101. B. 100. C. 102. D. 103.

Câu 16. Gọi $a > 1$ là số thực sao cho tồn tại duy nhất số thực x thỏa mãn $a^x = \log_a x$. Mệnh đề nào **đúng** ?

- A. $a \in (1, 2; 1, 3)$. B. $a \in (1, 3; 1, 4)$. C. $a \in (1, 4; 1, 5)$. D. $a \in (1, 5; 1, 6)$.

Câu 17. Phương trình $2^{x+\sqrt[3]{m-3x}} + x(x-3)^2 \cdot 2^x = (8-m) \cdot 2^x + 4$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Khi đó $b^2 - a^2$ bằng?

- A. 48. B. 36. C. 64. D. 72.

Câu 18. Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3x} + b \cdot 10^{2x}$ đúng với mọi các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log(x+y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. $\frac{31}{2}$. B. $\frac{29}{2}$. C. $-\frac{31}{2}$. D. $-\frac{25}{2}$.

Câu 19. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2(4x + 16) + x - 3y - 8^y = -2$. Gọi $(x_0; y_0)$ là cặp $(x; y)$ khi biểu thức $P = x^2 + 3x + 1 + 8^y$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_0^3 + 3y_0$ bằng?

- A. 9. B. 7. C. -7. D. -9.

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$ và $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4) \log_2 x + m^2 + 4 = 0$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 21. Cho phương trình $\log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ và $0 < x < 100$ thỏa mãn phương trình đã cho?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 22. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $0 < x \leq 2020$ và $(x + 1) \cdot 3^x = y \cdot 27^y$?

- A. 2020. B. 673. C. 672. D. 2019.

Câu 23. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $0 \leq x \leq 2020$, $1 \leq y \leq 2020$ và $4^{x+1} + \log_2(y + 3) = 16 \cdot 2^y + \log_2(2x + 1)$?

- A. 2019. B. 2020. C. 1010. D. 1011.

Câu 24. Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \text{ và } (xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2$$

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $\log_{2020} (x^2 - 3x)^2 = \log_{\sqrt{2020}} (x + m)$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

- A. 4035. B. 2023. C. 2022. D. 4036.

Câu 26. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để phương trình $\log_{2021} (x^2 + 3x)^2 = \log_{\sqrt{2021}} (x - m)$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

- A. -203. B. -206. C. 3. D. 6.

Câu 27. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $y \in (-10; 10)$ để tồn tại 2 số thực x thỏa mãn

$$\log_3 (x^2 - 2x + 4) = \log_5 (x^2 - 2x + y)$$

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 9.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị của $y \in (0; 2020)$ để tồn tại số thực x thỏa mãn

$$4^x + 4 = 2^{x+2} \cdot \cos(x + y)?$$

- A. 324. B. 322. C. 320. D. 321.

Câu 29. Với giá trị nào của y thì tồn tại đúng 1 số thực x thỏa mãn $9^x + 9 = 3^x y \cos(\pi x)$?

- A. $y = 3$. B. $y = -6$. C. $y = -3$. D. $y = 6$.

CHUYÊN ĐỀ 3

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN

A TÍCH PHÂN HÀM SỐ CHO BỞI NHIỀU CÔNG THỨC

1. VÍ DỤ

 **Câu 1 (Câu 41 - Đề minh họa lần 1 BGD 2020 - 2021).**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x \, dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$.

B. $\frac{23}{6}$.

C. $\frac{17}{6}$.

D. $\frac{17}{3}$.

 **Lời giải.**

Phân tích.

1) Đây là dạng toán tìm giá trị của tích phân của hàm số.

2) HƯỚNG GIẢI:

☒ **B1:** Dựa vào biểu thức bên trong dấu tích phân, ta sử dụng phương pháp đổi biến số để xử lý bài toán.

☒ **B2:** Sử dụng tính chất $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \forall c \in (a; b)$.

☒ **B3:** Lựa chọn hàm $f(x)$ thích hợp để tính giá trị tích phân.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x \, dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2 \sin x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \cos x \, dx.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow t = 3. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_2^3 f(x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) \, dx + \int_2^3 (x^2 - 1) \, dx \right] = \frac{23}{6}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\pi} \sin 2x f(\cos x) \, dx$ bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $-\frac{9}{2}$.

C. $-\frac{7}{6}$.

D. $\frac{7}{6}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1 & \text{khi } x \geq 5 \\ 2x - 6 & \text{khi } x < 5 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 2} f(3e^x + 1)e^x dx$ bằng

A. $\frac{77}{3}$.

B. $\frac{77}{9}$.

C. $\frac{68}{3}$.

D. $\frac{77}{6}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Tích phân $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$ bằng

A. 40.

B. 60.

C. $\frac{32}{3}$.

D. $\frac{71}{6}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$,

tổng $a + b + 3c$ bằng

A. -10.

B. -12.

C. -17.

D. -19.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ với a, b là các tham số thực. Khi đó

$\int_{-3}^{-1} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{82}{3}$.

B. $-\frac{22}{3}$.

C. -14.

D. 10.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_1^{13} f(\sqrt{x+3} - 2) dx$.

A. $-\frac{231}{5}$.

B. $\frac{97}{6}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{113}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4 - 2x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(3 - 4\cos^2 x) \sin 2x dx$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{21}{4}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^4 + 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 1 \\ 3 - x^2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_1^{e^4} f(\sqrt{4 - \ln x}) \frac{1}{x} dx$.

A. $\frac{16}{3}$.

B. 17.

C. $\frac{11}{6}$.

D. $\frac{6}{11}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(2 - 7\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

A. $\frac{201}{77}$.

B. $\frac{34}{103}$.

C. $\frac{155}{7}$.

D. $\frac{109}{21}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Tính $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx + 2 \int_0^2 f(3-2x) dx$.

A. $I = \frac{7}{3}$. B. $I = \frac{8}{3}$. C. $I = 3$. D. $I = \frac{11}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. B	5. D	6. B	7. A	8. C	9. D	10. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

B TÍCH PHÂN KẾT HỢP: ĐỔI BIẾN & TỪNG PHẦN

1. VÍ DỤ

Câu 1. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với $a, c > 0$. Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải.

- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx$.
- Đặt $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$.
- Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$.
- Suy ra $I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t-3)(t-2)} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt$
 $= (\ln |t-3| - \ln |t-2|) \Big|_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = 1 \cdot \ln \frac{4}{3} + 0$.
- Do đó $a = 1; b = 0; c = 3$ suy ra $a + b + c = 4$.

Chọn đáp án **D**

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos 2x + 3 \cos x + 2} dx = a \ln 3 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a^3 + 2ab - 3b^2$ bằng

A. 26. B. -6. C. 3. D. -4.

Câu 2. Nếu $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} - 3} dx = 3 \ln a - \ln b$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$) thì ab bằng

A. 20. B. -10. C. 15. D. 10.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a+\pi}{b}$ thì $b-a$ bằng

A. 0. B. 12. C. -4. D. 4.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}, \forall x > -1$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$ với $a; b; c; d \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a + b + c + d$ bằng

A. 8. B. 5. C. 6. D. 10.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(3) = 4$ và $f'(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$, $\forall x > 2$. Biết $\int_3^5 f(x) dx = a + b \ln 3$ với $a; b$ là các số hữu tỉ. Khi đó $a - 4b^2$ bằng

A. 10. B. -6. C. 6. D. -10.

Câu 6. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x + \cos x + 2x}{\sin x + 2} dx = \frac{\pi^2}{a} + \ln \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = abc$.

A. $P = 24$. B. $P = 13$. C. $P = 48$. D. $P = 96$.

Câu 7. Biết $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab = -1$. B. $2ab = 1$. C. $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$. D. $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.

Câu 8. Biết $\int_1^e \frac{(x+1) \ln x + 2}{1 + x \ln x} dx = a \cdot e + b \cdot \ln \left(\frac{e+1}{e} \right)$, trong đó $a; b$ là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ là

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x$ và $f(0) = 0$. Khi đó $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$. Tính $a + b + c$.

A. $a + b + c = 2$. B. $a + b + c = 3$. C. $a + b + c = 1$. D. $a + b + c = 0$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln \sqrt{2}$ và $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(x) dx = \frac{a\sqrt{2} \ln \sqrt{2} + b\sqrt{2} + c}{2}$; với a, b, c là các số nguyên. Khi đó $a + b + c$ bằng

A. 2. B. 0. C. -1. D. 1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D 2. D 3. D 4. D 5. C 6. C 7. A 8. B 9. D 10. B

C TÍCH PHÂN HÀM ẨN

1. Ví dụ

Lấy nguyên hàm (khi cho $f(x_0) = k$) hoặc lấy tích phân hai vế với cận thích hợp.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa $3f(x) + xf'(x) = x^{2020}$.

Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{2021 \cdot 2023}$. B. 1. C. 2021. D. $\frac{1}{2021 \cdot 2020}$.

Lời giải.

Ta có: $3f(x) + xf'(x) = x^{2020} \Leftrightarrow 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^{2022} \Leftrightarrow [x^3 f(x)]' = x^{2022} (*)$

$\Leftrightarrow \int_0^1 [x^3 f(x)]' dx = \int_0^1 x^{2022} dx \Leftrightarrow x^3 f(x) \Big|_0^1 = \frac{x^{2023}}{2023} \Big|_0^1 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2023}$.

Từ (*), lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\int [x^3 f(x)]' dx = \int x^{2022} dx \Leftrightarrow x^3 f(x) = \frac{x^{2023}}{2023} + C$.

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{2023} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^{2020}}{2023}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^{2020}}{2023} dx = \frac{x^{2021}}{2021 \cdot 2023} \Big|_0^1 = \frac{1}{2021 \cdot 2023}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ thỏa mãn $f(x) - \frac{\ln x}{x} = \frac{f(2\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}}$. Khi đó $\int_3^4 f(x)dx$ bằng

- A.** $3 + 2\ln^2 2$. **B.** $2\ln^2 2$. **C.** $\ln^2 2$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x)dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

- A.** $\frac{29}{2}$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 37.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3) + f(x^2 - 1) = e^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x)dx$ bằng

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $3e$. **C.** $3(1 - e)$. **D.** $3(e - 1)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(e^x + 1) + f(x) + f'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2f(\ln 2) - 1$.

Khi đó $\int_{\frac{1}{2}}^3 f(x)dx$ bằng

- A.** $\frac{1}{2} \ln 2 - 1$. **B.** $2 \ln 2$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $2 \ln 2 - 2$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 + x + 2) = x^2 + x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-8}^4 x^2 f'(x)dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(-20; -10)$. **B.** $(20; 25)$. **C.** $(10; 20)$. **D.** $(-25; -20)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm không âm trên đoạn $[0; 1]$ thỏa

$(f(x))^4 \cdot (f'(x))^2 \cdot (x^2 + 1) = 1 + (f(x))^3$ và $f(x) > 0, \forall x \in [0; 1]$. Biết $f(0) = 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $2 < f(1) < \frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2} < f(1) < 3$. **C.** $\frac{3}{2} < f(1) < 2$. **D.** $3 < f(1) < \frac{7}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30}, \int_0^1 (2x - 1)f(x)dx =$

$-\frac{1}{30}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

- A.** $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{11}{30}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{11}{4}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1$.

Tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$ bằng

- A.** $\frac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 4.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, biểu thức $f'(x) = f(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $2 < f(5) < 3$. B. $4 < f(5) < 5$. C. $1 < f(5) < 2$. D. $3 < f(5) < 4$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1 + e^{-2x}}$. Khi đó:

- A. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{e^2 + 1}} - \frac{1}{2}$. B. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{2\sqrt{e^2 + 1}} - \frac{1}{4}$.
C. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2 + 1)\sqrt{e^2 + 1} - \sqrt{8}}{3}$. D. $e^3 f(1) - f(0) = (e^2 + 1)\sqrt{e^2 + 1} - \sqrt{8}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$, với mọi $x \in [0; 1]$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{1}{2018 \cdot 2021}$. B. $I = \frac{1}{2019 \cdot 2020}$. C. $I = \frac{1}{2019 \cdot 2021}$. D. $I = \frac{1}{2018 \cdot 2019}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $(x + 2)f(x) + (x + 1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = \frac{e}{3}$. B. $f(2) = \frac{e}{6}$. C. $f(2) = \frac{e^2}{3}$. D. $f(2) = \frac{e^2}{6}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x + 1)f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = 1$. B. $I = 8$. C. $I = -12$. D. $I = -8$.

Câu 14. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và $g(x) \cdot f'(x) = x(x - 2)e^x$. Tính $I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx$.

- A. $I = -4$. B. $I = e - 2$. C. $I = 4$. D. $I = 2 - e$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \text{ và } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4.$$

Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

- A. $(11; 12)$. B. $(5; 6)$. C. $(6; 7)$. D. $(12; 13)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. D	4. D	5. D	6. B	7. C	8. A	9. D	10. C
11. C	12. D	13. D	14. C	15. B					

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG VÀ THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

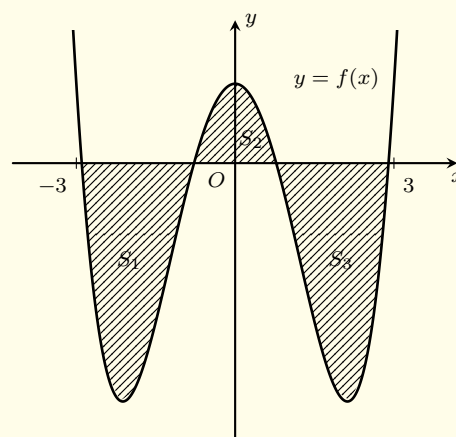
1. VÍ DỤ

Câu 1. Cho $y = f(x)$ xác định trên $[-3; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Biết

S_1, S_2, S_3 có diện tích lần lượt là 3, 1 và 3. Khi đó $\int_{-1}^1 (1-x)f'(3x) dx$

bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{5}{9}$. C. -5 . D. 7 .



Lời giải.

Đặt: $t = 3x \Rightarrow dt = 3 dx \Rightarrow \frac{dt}{3} = dx$.

Đổi cận:

☒ Với $x = -1$ thì $t = -3$;

☒ Với $x = 1$ thì $t = 3$.

Khi đó, ta có

$$\int_{-1}^1 (1-x)f'(3x) dx = \int_{-3}^3 \left(1 - \frac{t}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} f'(t) dt = \frac{1}{9} \int_{-3}^3 (1-x)f'(x) dx.$$

Đặt:

☒ $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$;

☒ $dv = f'(x) dx$ chọn $v = f(x)$.

Khi đó, ta có

$$\frac{1}{9} \int_{-3}^3 (1-x)f'(x) dx = \frac{1}{9} \left[(1-x)f(x) \Big|_{-3}^3 + \int_{-3}^3 f(x) dx \right] = \frac{1}{9} \left[-2 \underbrace{f(3)}_0 - 4 \underbrace{f(-3)}_0 + \int_{-3}^3 f(x) dx \right]$$

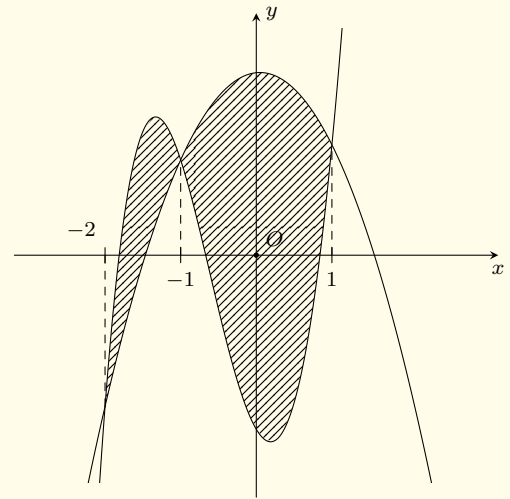
$$= \frac{1}{9} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{9} (-S_1 + S_2 - S_3) = \frac{1}{9} (-3 + 1 - 3) = -\frac{5}{9}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 2. (Đề thi THPT QG năm 2018 – Mã đề 102 Câu 36) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{37}{6}$. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{37}{12}$.



Lời giải.

Ta có: $f(x) - g(x) = a(x+2)(x+1)(x-1) = ax^3 + 2ax^2 - ax - 2a$ (1)

Mà $f(x) - g(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4$ (2)

Từ (1), (2) so sánh hệ số tự do, suy ra: $-2a = -4 \Leftrightarrow a = 2$

Khi đó ta có $f(x) - g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$.

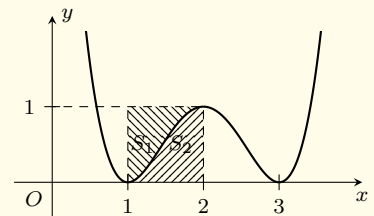
$$\text{Do đó } S = \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 |2x^3 + 4x^2 - 2x - 4| dx = \frac{37}{6}.$$

Chọn đáp án **A**

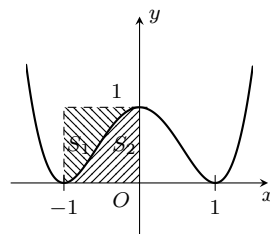
□

Câu 3. Cho đồ thị hàm số trùng phương (C): $y = f(x)$ như hình vẽ và S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên. Biết $\frac{S_1}{S_2} = \frac{k_1}{k_2}$ là một phân số tối giản. Khi đó $k_1^2 + k_2^2$ bằng

- A. 103. B. 274. C. 113. D. 289.



Lời giải.



Tính tiến đồ thị (C): $y = f(x)$ theo vectơ $\vec{v} = (-2; 0)$, ta được đồ thị $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Ta có: $g(x) = a(x-1)^2(x+1)^2 = a(x^2-1)^2$ và $A(0; 1) \in g(x) \Rightarrow a = 1$.

$$\Rightarrow g(x) = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1.$$

$$\Rightarrow S_2 = \int_{-1}^0 |x^4 - 2x^2 + 1| dx = \frac{8}{15}.$$

$$\text{Diện tích hình vuông: } S = S_1 + S_2 = 1 \Rightarrow S_1 = 1 - S_2 = \frac{7}{15}.$$

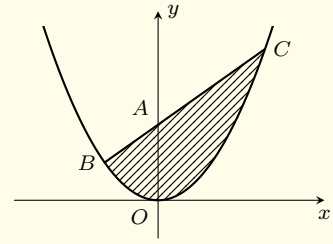
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{7}{8} \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = 113.$$

Chọn đáp án **C**

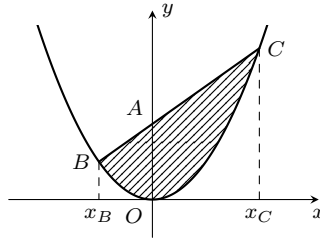
□

Câu 4. Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và điểm $A(0; 1)$. Một đường thẳng đi qua A cắt (P) tại hai điểm B, C sao cho $AC = 2AB$ như hình vẽ bên. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay phần gạch chéo quanh trục hoành gần với giá trị nào nhất sau đây ?

- A. 13,3. B. 8. C. 7,3. D. 11.



Lời giải.



Gọi $B(b; b^2), C(c; c^2) \in (P)$. Ta có: $AC = 2AB \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|b|}{|b| + |c|} = \frac{1}{3}$.

Mà $b < 0, c > 0 \Rightarrow \frac{-b}{-b + c} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = -2b$.

$\Rightarrow B(b; b^2), C(-2b; 4b^2) \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{b^4 - b^2 + 1} \\ AC = \sqrt{16b^4 - 4b^2 + 1} \end{cases}$

Mà $AC = 2AB \Rightarrow 16b^4 - 4b^2 + 1 = 4(b^4 - b^2 + 1) \Leftrightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right), C\left(\sqrt{2}; 2\right)$. Do đó đường thẳng BC qua $A(0; 1), C\left(\sqrt{2}; 2\right) \Rightarrow BC : y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$.

Thể tích cần tìm là: $V = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \right)^2 - (x^2)^2 \right| dx \approx 7,997$.

Chọn đáp án **B**

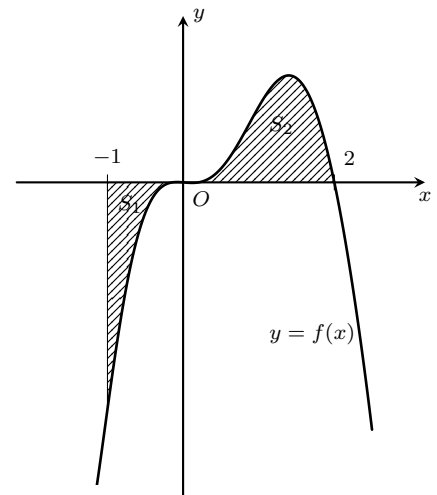
□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ có đồ thị như hình vẽ.

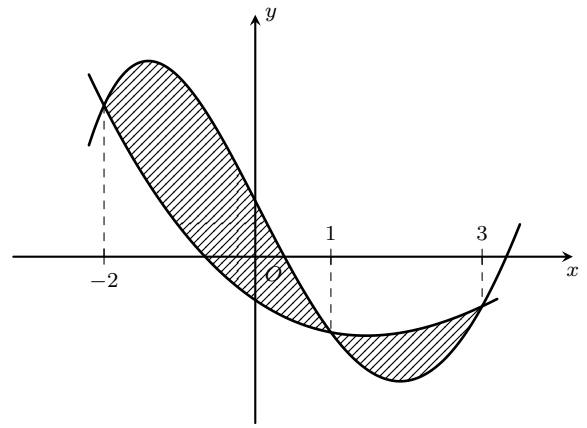
Biết S_1, S_2 có diện tích lần lượt là 2 và 6. Tích phân $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (x+1)f'(2x) dx$ bằng

- A. 1. B. -1. C. 4. D. -4.



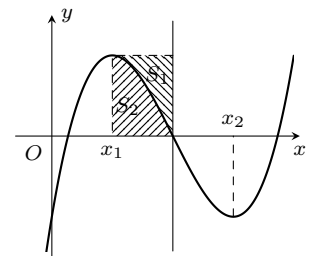
Câu 2. Người ta dự định trồng hoa Lan Ý để trang trí vào phần tô đậm (như hình vẽ). Biết rằng phần tô đậm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai đồ thị đó cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-2; 1; 3$ và chi phí trồng hoa là 960000 đồng / 1m^2 và đơn vị trên các trục được tính là 1 mét. Số tiền cần để trồng hoa là

- A. 5060000 đồng. B. 6500000 đồng.
C. 8400000 đồng. D. 10000000 đồng.



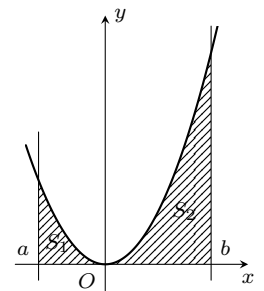
Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 4$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{3}{5}$. C. 1. D. $\frac{3}{4}$.



Câu 4. Cho parabol $y = x^2$ có đồ thị như hình vẽ, diện tích $S_2 = 2S_1$. Gọi V_1, V_2 là thể tích hình phẳng S_1, S_2 quay quanh trục hoành. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

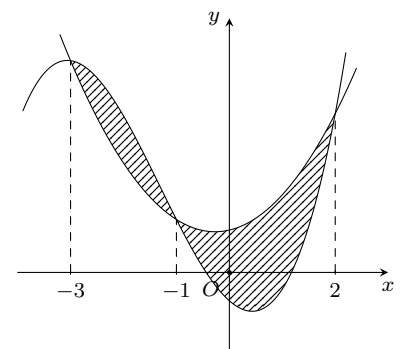
- A. $2\sqrt[3]{4}$. B. $3\sqrt[4]{2}$. C. 2. D. 4.



Câu 5.

Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

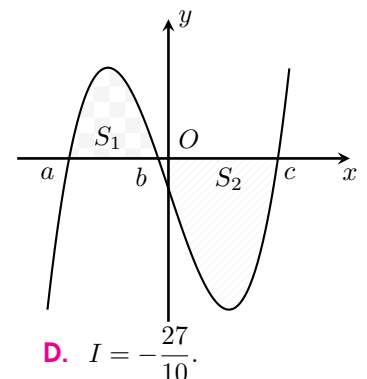
- A. $\frac{253}{12}$. B. $\frac{125}{12}$. C. $\frac{253}{48}$. D. $\frac{125}{48}$.



Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c ($a < b < c$). Biết phần hình phẳng nằm phía trên trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox có diện tích là $S_1 = \frac{7}{10}$, phần hình phẳng nằm phía dưới trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox có diện tích là $S_2 = 2$ (như hình vẽ). Tính $I = \int_a^c f(x) dx$.

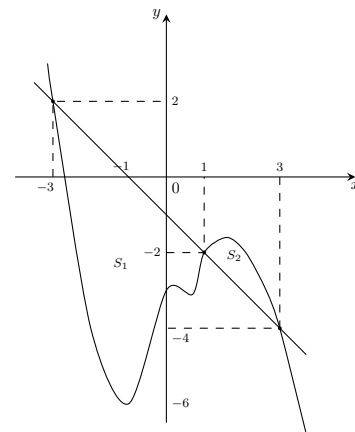
- A. $I = -\frac{13}{10}$. B. $I = \frac{13}{10}$. C. $I = \frac{27}{10}$. D. $I = -\frac{27}{10}$.



Câu 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = -x - 1$ lần lượt là M, m . Tính tích phân $\int_{-3}^3 f(x) dx$.

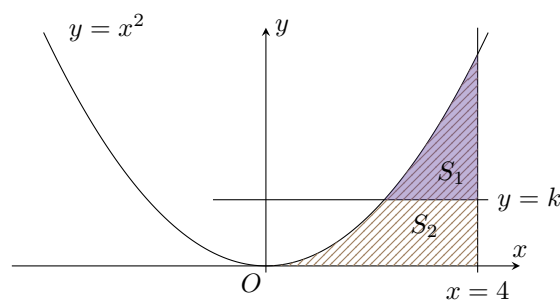
- A. $6 + m - M$. B. $6 - m - M$. C. $M - m + 6$. D. $m - M - 6$.



Câu 8.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 4$. Đường thẳng $y = k$ ($0 < k < 16$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1 = S_2$.

- A. $k = 8$. B. $k = 4$. C. $k = 5$. D. $k = 3$.



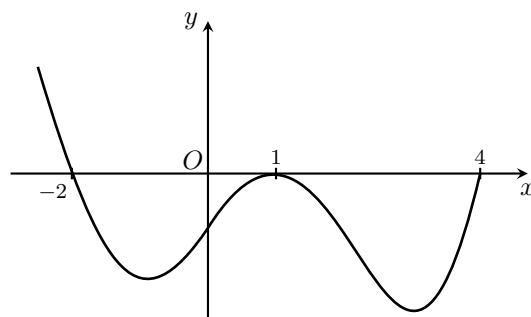
Câu 9. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $m \in (-1; 1)$. B. $m \in (2; 3)$. C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (5; +\infty)$.

Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị của biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

- A. 21. B. 9. C. 3. D. 2.



Câu 11. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và các tiếp tuyến kẻ từ điểm $A\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ đến đồ thị (P) . Giá trị của S bằng

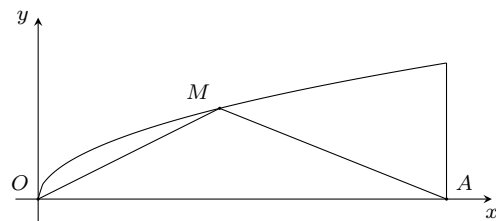
- A. 9. B. $\frac{9}{8}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 12. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm, trục nhỏ 25cm. Biết cứ 1000cm³ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000đ. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- A. 183.000đ. B. 180.000đ. C. 185.000đ. D. 190.000đ.

Câu 13.

Cho đồ thị $(C) : y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (C) , đường thẳng $x = 9$, Ox . Cho điểm M thuộc (C) , $A(9; 0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh Ox . Biết $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi (C) , OM (hình vẽ không thể hiện chính xác điểm M).

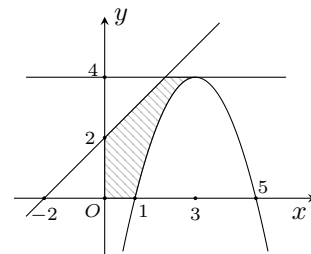


- A. $S = 3$. B. $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. C. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $S = \frac{4}{3}$.

Câu 14.

Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng và đường cong parabol (được tô màu đen trong hình bên) quanh trục Ox .

- A. $\frac{61\pi}{15}$. B. $\frac{88\pi}{5}$. C. $\frac{8\pi}{5}$. D. $\frac{424\pi}{15}$.



BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. A	5. C	6. A	7. D	8. B	9. B	10. C
11. C	12. A	13. B	14. B						

SỐ PHỨC

20 BÀI

A XÁC ĐỊNH CÁC THUỘC TÍNH CỦA SỐ PHỨC

1. VÍ DỤ

 **Câu 1 (ĐỀ THAM KHẢO BDG 2020-2021).**

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và $(z + 2i)(\bar{z} - 2)$ là số thuần ảo?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 4.

 **Lời giải.**

Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ thì $\bar{z} = x - yi$ và

$$\begin{aligned} (z + 2i)(\bar{z} - 2) &= [x + (y + 2)i][(x - 2) - yi] \\ &= [x(x - 2) + y(y + 2)] + [(x - 2)(y + 2) - xy]i \\ &= (x^2 - 2x + y^2 + 2y) + (2x - 2y - 4)i. \end{aligned}$$

Theo đề ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ (z + 2i)(\bar{z} - 2) \text{ là số thuần ảo} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có 2 số phức thỏa đề bài.

Chọn đáp án **C**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3 + 2i|z|^2 = 0$.

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 6.

Câu 2. Cho số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 3| = |z - 1|$ và $(z + 2)(\bar{z} - i)$ là số thực. Tính $a + b$.

- A. -2. B. 0. C. 2. D. 4.

Câu 3. Tìm số phức z thỏa mãn $\frac{2 - iz}{2 + i} - \frac{z + 2i}{1 - 2i} = 2\bar{z}$ và $|z| > 1$. Khi đó $a^2 + b^2 - ab$ bằng

- A. -5. B. -1. C. 5. D. 1.

Câu 4. Cho số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $2z\bar{z} - (5 + 7i)|z|^2 = (17 + i)\bar{z}$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức z khác gốc tọa độ là

- A. $N(-1; 2)$. B. $P(2; -1)$. C. $Q(-2; 1)$. D. $M(1; -2)$.

Câu 5. Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị của S bằng

- A. 20. B. 12. C. 14. D. 8.

Câu 6. Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz - (3i + 1)\bar{z}}{1 + i} = |z|^2$. Số phức $w = \frac{26iz}{9}$ có môđun bằng

- A. 9. B. $\sqrt{26}$. C. $\sqrt{6}$. D. 5.

Câu 7. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2) - 12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $P = (|z| - 2)^2$. B. $P = (|z|^2 - 4)^2$. C. $P = (|z| - 4)^2$. D. $P = (|z|^2 - 2)^2$.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|2z - 1| = |\bar{z} + 1 + i|$ và điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn có tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Khi đó tích môđun của tất cả các số phức z thỏa mãn các yêu cầu trên là

- A. $\sqrt{5}$. B. 3. C. $3\sqrt{5}$. D. 1.

Câu 9. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ và $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \bar{z}_3$. Biết z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Tính góc $\widehat{ACB}$.

- A. 150° . B. 90° . C. 120° . D. 45° .

Câu 10. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn: $|z - \bar{z} - 2i| = |z + \bar{z} - 6|$ và $|z - 6 - 2i| = 2\sqrt{2}$.

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 11. Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = \omega + 3i$, $z_2 = \omega + 9i$, $z_3 = 2\omega - 4$, trong đó ω là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a + b + c|$.

- A. $P = 84$. B. $P = 36$. C. $P = 136$. D. $P = 208$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$. Môđun của số phức z bằng

- A. 2. B. 1. C. 16. D. 4.

Câu 13. Cho A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

- A. Đều. B. Cân tại O . C. Vuông tại O . D. Vuông cân tại O .

Câu 14. Trên hệ tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức z có môđun lớn nhất thỏa mãn $|z + 4 - 3i| = 5$. Tọa độ điểm M là

- A. $M(-6; 8)$. B. $M(8; -6)$. C. $M(8; 6)$. D. $M(-8; 6)$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Môđun của số phức $w = M + mi$ là

- A. $|w| = 3\sqrt{137}$. B. $|w| = \sqrt{1258}$. C. $|w| = 2\sqrt{309}$. D. $|w| = 2\sqrt{314}$.

Câu 16. Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = |\bar{z} - 2 + i|$. Tính $P = a^2 + b^2$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $\frac{293}{9}$. B. $\frac{449}{32}$. C. $\frac{481}{32}$. D. $\frac{137}{9}$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi $M_{\max}$ là giá trị lớn nhất và $M_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = |z^2 + z + 1| + |z^3 + 1|$. Tính $P = M_{\max} + M_{\min}$.

- A. $P = 8$. B. $P = 5$. C. $P = 7$. D. $P = 6$.

1. A	2. B	4. A	5. B	6. B	7. D	8. A	9. C
10. D	11. C	12. A	13. A	14. D	15. B	16. B	17. D

B CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC CHỨA MÔ-ĐUN SỐ PHỨC

1. VÍ DỤ

Câu 1. Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ bằng

- A. 32. B. 33. C. 13. D. 12.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn của $z = x + yi$ thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ nên $M \in (C)$ có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.
Ta có $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [x^2 + (y - 1)^2] \Leftrightarrow 4x + 2y + 3 - P = 0$.

Gọi đường thẳng $\Delta: 4x + 2y + 3 - P = 0$. Để tồn tại số phức z thì

$$d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 - P|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |P - 23| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33.$$

Suy ra $\max P = 33$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Xét các số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1 - 4| = 1$ và $|iz_2 - 2| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + 2z_2 - 6i|$ bằng
A. $2\sqrt{2} - 2$. B. $4 - \sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2} + 9$. D. $4\sqrt{2} + 3$.

Lời giải.

Đặt $z_3 = -2z_2$, ta có

$$|z_1 + 2z_2 - 6i| = |z_1 - (-2z_2) + (-6i)| = |z_1 - z_3 + (-6i)| \leq |z_1 - z_3| + |-6i| = MN + 6.$$

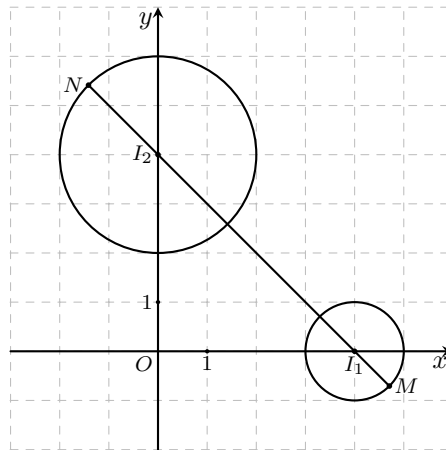
Trong đó M, N lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z_1, z_3 .

Vì $|z_1 - 4| = 1$ nên $M \in (C_1)$ có tâm $I_1(4; 0)$ và bán kính $R_1 = 1$.

Vì

$$|iz_2 - 2| = 1 \Leftrightarrow \left| i \cdot \frac{-1}{2} \cdot z_3 - 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{2}i \cdot |z_3 - 4i| \right| = 1 \Leftrightarrow |z_3 - 4i| = 2$$

nên $N \in (C_2)$ có tâm $I_2(0; 4)$ và bán kính $R_2 = 2$.



Khi đó

$$|z_1 + 2z_2 - 6i| \leq MN + 6 \leq I_1I_2 + R_1 + R_2 + 6 = 4\sqrt{2} + 9.$$

Vậy $\max |z_1 + 2z_2 - 6i| = 4\sqrt{2} + 9$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 3. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = 3$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|2z_1 - 3z_2 + 4 - 3i|$ bằng
A. $\sqrt{97} - 5$. B. $\sqrt{115} + 5$. C. $5 + \sqrt{97}$. D. $5 + \sqrt{43}$.

Lời giải.

Gọi M, N là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 , ta có

$$|z_1| = |\vec{OM}| = OM = 2, |z_2| = |\vec{ON}| = ON = 3 \text{ và } |z_1 - z_2| = |\vec{OM} - \vec{ON}| = MN = 4.$$

Lại có

$$|2z_1 - 3z_2 + 4 - 3i| = |(2z_1 - 3z_2) + (4 - 3i)| \leq |2z_1 - 3z_2| + |4 - 3i| = |2z_1 - 3z_2| + 5.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 4^2 = MN^2 &= (\vec{OM} - \vec{ON})^2 = OM^2 + ON^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{ON} \\ &= 2^2 + 3^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{ON} \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -\frac{3}{2}$.

Do đó

$$|2z_1 - 3z_2|^2 = (2\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{ON})^2 = 4OM^2 + 9ON^2 - 12\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 9 - 12 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 115.$$

Suy ra $|2z_1 - 3z_2| = \sqrt{115}$.

Vậy $\max |2z_1 - 3z_2 + 4 - 3i| = \sqrt{115} + 5$.

Chọn đáp án **(B)**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 + 4i| = 1$ và $|z_2 + 2 - 3i| = |z_2 - 3 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

- A. $2\sqrt{3} - 1$. B. $2\sqrt{3} + 1$. C. $3\sqrt{2} - 1$. D. $3\sqrt{2} + 1$.

Câu 2. Xét các số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1 - 5 + 3i| = 3$ và $|iz_2 + 4 + 2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|3iz_1 + 2z_2|$ bằng

- A. $\sqrt{554} + 5$. B. $\sqrt{578} + 13$. C. $\sqrt{578} + 5$. D. $\sqrt{554} + 13$.

Câu 3. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 13$, $|z_2| = 15$ và $|z_1 - z_2| = 24$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - 3z_2 + 3 - 4i|$ bằng

- A. $2\sqrt{685} + 5$. B. $2\sqrt{685} - 5$. C. $5 + \sqrt{13}$. D. $5 + 3\sqrt{13}$.

Câu 4. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|\bar{z}_1 - 3 + 2i| = |\bar{z}_2 - 3 + 2i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2 - 3 - 5i|$. Khi đó $m + 2n$ bằng

- A. $3\sqrt{10} - 2$. B. $6 - \sqrt{10}$. C. $6 - \sqrt{34}$. D. $3\sqrt{34} - 2$.

Câu 5. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 + 3i| = 2$ và $|z_2 - 1 - i| + |z_2 - 4 - i| = 3$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{13} + 2$. C. $\sqrt{13} + 1$. D. $\sqrt{13} - 1$.

Câu 6. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

- A. $\sqrt{10} + 1$. B. $3\sqrt{5} - 1$. C. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$. D. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - i| = 2\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 3 - 2i| + |z - 3 + 4i|$. Giá trị $M + m$ bằng

- A. $16\sqrt{2}$. B. $11\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{26} + 8\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{26} + 6\sqrt{2}$.

Câu 8. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Nếu $|z_1 - z_2| = 3$ thì giá trị lớn nhất của $|z_1 + 2z_2|$ bằng

- A. $3\sqrt{2} - 3$. B. $3 + 3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} + 1$. D. $\sqrt{2} - 1$.

Câu 9. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2 - i| + |z_1 - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 + z_2|$ bằng

- A. $\sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $2\sqrt{2} + 1$. D. $2\sqrt{2} - 1$.

Câu 10. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1 + 1 - 4i| = 2$, $|z_2 - 4 - 6i| = 1$ và $|z_3 - 1| = |z_3 - 2 + i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_3 - z_1| + |z_3 - z_2|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{14}}{2} + 2$. B. $\sqrt{29} - 3$. C. $\frac{\sqrt{14}}{2} + 2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{85} - 3$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| = |z - 2i|$. Tìm số phức z biết $\left|z + \frac{3}{2} - 5i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $z = \sqrt{\frac{331}{8}}$. B. $z = 1 + i$. C. $z = \frac{7}{4} + \frac{7}{4}i$. D. $z = -\frac{3}{2} + 5i$.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 4\sqrt{5}$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z - 4 + 4i|$.

- A. $\max P = 4\sqrt{5}$. B. $\max P = 7\sqrt{5}$. C. $\max P = 5\sqrt{5}$. D. $\max P = 6\sqrt{5}$.

Câu 13. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 3i| + |z + 2 - i| = 8$. Giá trị nhỏ nhất m của $|2z + 1 + 2i|$ là

- A. $m = 4$. B. $m = 9$. C. $m = 8$. D. $m = \sqrt{39}$.

Câu 14. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.

- A. $\sqrt{313} + 16$. B. $\sqrt{313}$. C. $\sqrt{313} + 8$. D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i|$.

- A. $1 + \sqrt{10}$. B. 4. C. $\sqrt{17}$. D. 5.

Câu 16. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1 - 1 - 2i| = |z_2 - 1 - 2i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 3$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2 - 3 - i|$. Khi đó $m + n$ bằng

- A. $\sqrt{10} + \sqrt{7}$. B. $\sqrt{10} - \sqrt{7}$. C. $2\sqrt{7}$. D. $2\sqrt{10}$.

Câu 17. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 18. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 + i| = 2$ và $|z_2 - 2 + i| + |z_2 - 3 - 3i| = \sqrt{17}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$ bằng

- A. 0. B. $\sqrt{17}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 19. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 + i| = 2$ và $|z_2 - 2 + i| + |z_2 - 3 - 3i| = \sqrt{17}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng

- A. 0. B. $\sqrt{17}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 20. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Nếu $|z_1 - z_2| = 3$ thì giá trị lớn nhất của $|z_1 + 2z_2|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{37}}{4} - 1$. B. $\frac{\sqrt{37}}{4} + 1$. C. $\frac{\sqrt{37}}{4}$. D. $\sqrt{37}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. D	5. A	6. B	7. A	8. B	9. A	10. B
11. C	12. A	13. D	14. A	15. C	16. D	17. A	18. C	19. A	20. A

CHUYÊN ĐỀ 5

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

A GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

1. VÍ DỤ

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải.

Ta có: $SB \cap (SAC) = S$. (1)

Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$ tại H . (2)

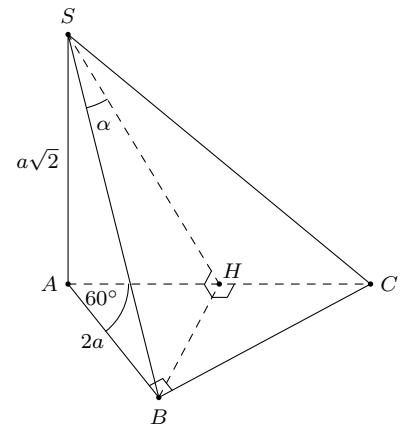
Từ (1) và (2) $\Rightarrow HS$ là hình chiếu của SB lên (SAC) .

$\Rightarrow (SB, (SAC)) = (SB, SH) = \widehat{BSH} = \alpha$. Mà $\tan \alpha = \frac{BH}{SH}$. (*)

Suy ra $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

Trong $\triangle SAH$ có: $\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Với $BH = a\sqrt{3}$, $SH = a\sqrt{3}$ thế vào (*) $\Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.



□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1.

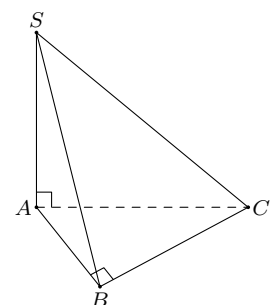
Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ bên). Biết $SA = AB = BC$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

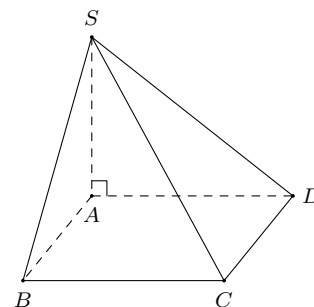
D. 90° .



Câu 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

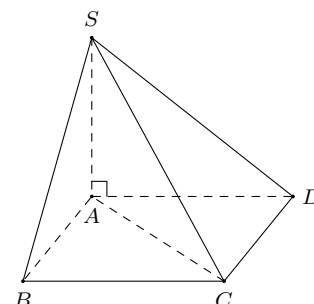
- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .



Câu 3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$ (tham khảo hình vẽ bên). Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Khi đó $\sin \alpha$ bằng

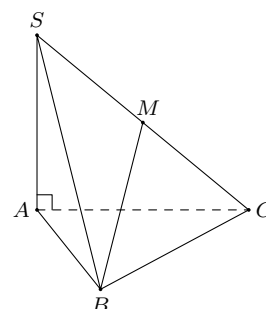
- A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{5}$.



Câu 4.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC (tham khảo hình vẽ bên). Gọi α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\cos \alpha$ bằng

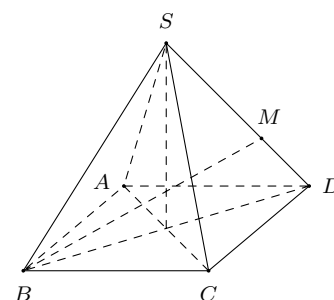
- A. $\frac{\sqrt{7}}{14}$. B. $0,2$. C. $0,5$. D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.



Câu 5.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$ (tham khảo hình vẽ bên). Gọi α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. 1 . C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{5}$.



Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Kẻ $AP \perp SB$, $AQ \perp SD$ lần lượt tại P và Q . Gọi M là trung điểm của SD . Tính giá trị $\cos \varphi$ với φ là góc giữa CM và (APQ) .

- A. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. B. $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. C. $\cos \varphi = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. D. $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AB . Tính giá trị $\sin \varphi$ với φ là góc giữa SD và (SBC) .

- A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

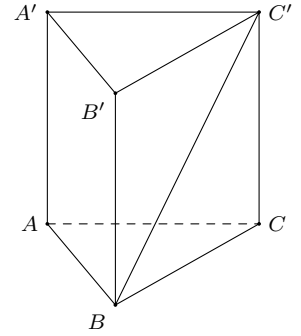
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Tính giá trị $\sin \varphi$ với φ là góc giữa SN và mặt phẳng (SCM) .

- A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\sin \varphi = \frac{3}{2}$. D. $\sin \varphi = \frac{3}{5}$.

Câu 9.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AA' = a$. Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$, H là trung điểm của AB , K là trung điểm của AD . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại H lấy điểm S khác H . Tính góc giữa CK với mặt phẳng (SDH) .

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 11. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AB = 2a$. Gọi H là trung điểm AB . Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S thay đổi khác H . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{4}BC$. Tính theo a độ dài của SH để góc giữa SC và (SAD) có số đo lớn nhất.

- A. $SH = \sqrt[4]{\frac{21}{4}}a$. B. $SH = \sqrt[3]{\frac{21}{4}}a$. C. $SH = \sqrt[4]{\frac{21}{5}}a$. D. $SH = \sqrt[4]{\frac{21}{2}}a$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90^\circ$, $BC = CD = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 14. Tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $(AD, BC) = 60^\circ$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{43}}{86}$. B. $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. C. $\frac{\sqrt{43}}{43}$. D. $\frac{2\sqrt{43}}{43}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA = BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SC lần lượt là M và N . Tang của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. 3 .

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. D	5. D	6. A	7. D	8. D	9. A	10. D
11. A	12. B	13. A	14. D	15. C					

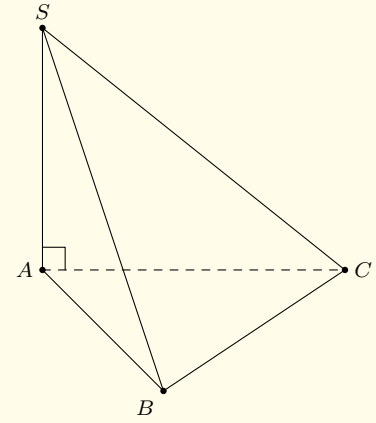
B THỂ TÍCH CÓ CHỨA DỮ LIỆU GÓC

1. VÍ DỤ

Câu 1 (Câu 43 - Đề minh họa lần 1, BGD 2020 - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là 45° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối chóp bằng $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3}{8}$. B. $\frac{3a^3}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

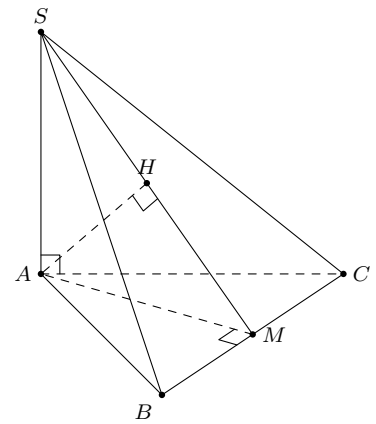


Lời giải.

Gọi M trung điểm của cạnh BC và H là hình chiếu của A lên SM , khi đó $AH \perp (SBC) \Rightarrow (\overline{SA}, (SBC)) = \widehat{ASH} = \widehat{ASM} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle SAM$ vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.



Chọn đáp án **A**

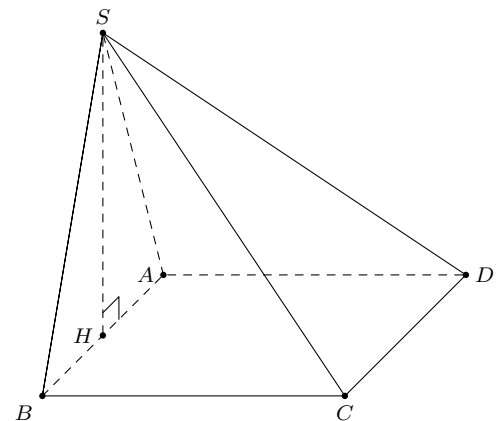


2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là trung điểm H của AB , SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

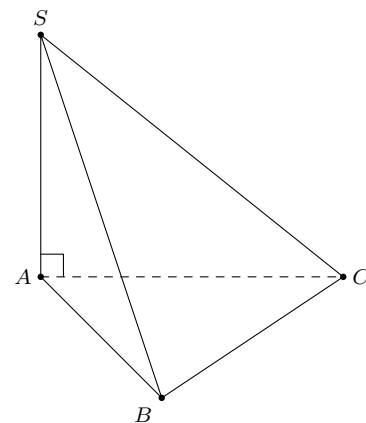
- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.



Câu 2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối chóp bằng $S.ABC$ bằng

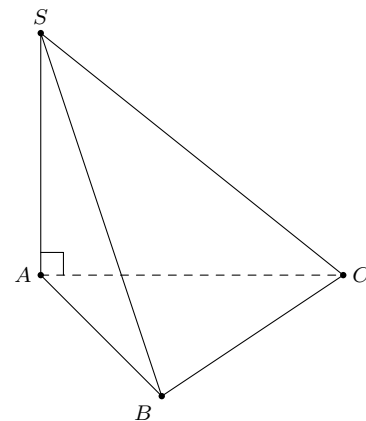
- A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $2\sqrt{6}a^3$.



Câu 3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối chóp bằng $S.ABC$ bằng

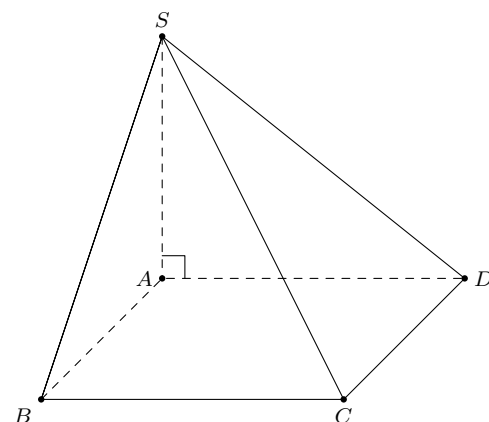
- A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. B. $\sqrt{6}a^3$. C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.



Câu 4.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

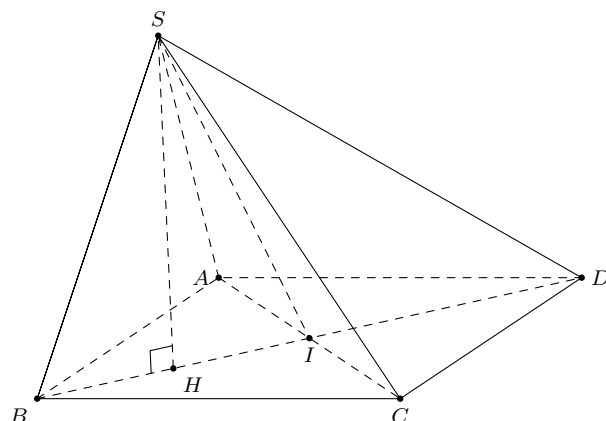
- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $\sqrt{2}a^3$.



Câu 5.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là trung điểm H của BI , SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 45° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{39}a^3}{24}$. B. $\frac{\sqrt{39}a^3}{12}$. C. $\frac{\sqrt{39}a^3}{8}$. D. $\frac{\sqrt{39}a^3}{48}$.



Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang cân. $AB = 2a$; $BC = CD = DA = a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 45° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $a^3\sqrt{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , SA vuông góc với với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAD) bằng 30° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ theo a .

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{16}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 9. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(A'C'CA)$ góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $a^3\sqrt{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC) , góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là 60° , $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{15}$. B. $V = 2\sqrt{3}a^3$. C. $V = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C , $AB = 2a$, $AC = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $A'A = A'B = A'D = 2a$. Biết khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. a^3 . D. $3a^3$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên (SAB) , (SAC) lần lượt tạo với đáy các góc bằng 60° và 30° . Biết hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên đoạn BC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. C. $\frac{a^3}{32}$. D. $\frac{a^3}{16}$.

Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Mặt bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60° . Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm G của tam giác SAC cắt SC, SD lần lượt tại M và N . Thể tích khối chóp $S.ABMN$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $a^3\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tam giác ABC có các cạnh $AB = 15$; $BC = 14$; $CA = 13$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $V_{S.ABC} = 112\sqrt{3}$. B. $V_{S.ABC} = 336$. C. $V_{S.ABC} = \frac{98\sqrt{3}}{3}$. D. $V_{S.ABC} = 336\sqrt{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. B	5. A	6. D	7. A	8. D	9. B	10. D
11. C	12. D	13. D	14. A	15. A					

© KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG

1. VÍ DỤ

Câu 1 (Câu 44 - Đề thi TN THPT năm 2020 - mã đề 102).

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của CC' . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải.

Trong $(AA'C'C)$, gọi $N = AM \cap A'C$.

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BC và $A'I$.

Ta có $MC \parallel AA'$ nên $\frac{NM}{NA} = \frac{MC}{AA'} = \frac{1}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} MA \cap (A'BC) &= N \\ \Rightarrow \frac{d(M, (A'BC))}{d(A, (A'BC))} &= \frac{NM}{NA} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow d(M, (A'BC)) &= \frac{1}{2}d(A, (A'BC)). \end{aligned}$$

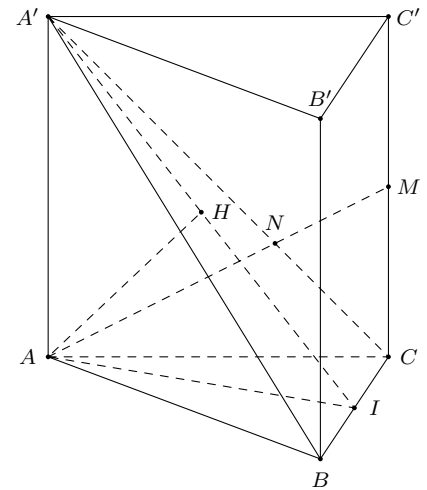
Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow BC \perp AH$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp A'I \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH$.

Xét tam giác $A'AI$, ta có $AH = \frac{AA' \cdot AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Chọn đáp án **(D)**



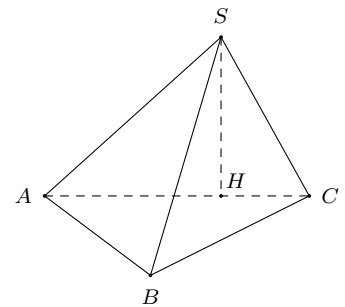
2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1.

Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$, điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$, dựng đoạn thẳng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH = 2a$ (tham khảo hình vẽ).

Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

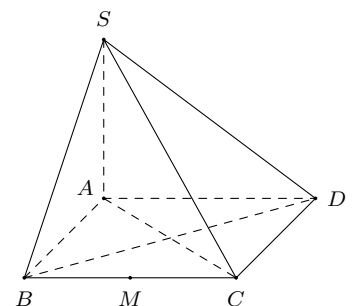
- A.** $\frac{3a}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **D.** $3a$.



Câu 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Cho biết $SA = 2a$, $AB = a$, $AD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.



Câu 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm đáy, cho cạnh đáy và chiều cao cùng bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác SAD . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

- A.** $\frac{4a\sqrt{5}}{15}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC , $SD = \frac{4a}{3}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

- A.** $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** a . **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với O . Biết tam giác $A'AC$ vuông cân tại A' . Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng

$(BCC'B')$.

- A. a . B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B 2. A 3. A 4. B 5. C

D KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. VÍ DỤ

Câu 1 (Câu 3 - Đề minh họa lần 1 BGD 2020 - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

- A. $\frac{\sqrt{10}a}{5}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Qua M dựng $MN \parallel AC \Rightarrow N$ là trung điểm của AB .

Vì $AC \parallel (SMN)$ nên

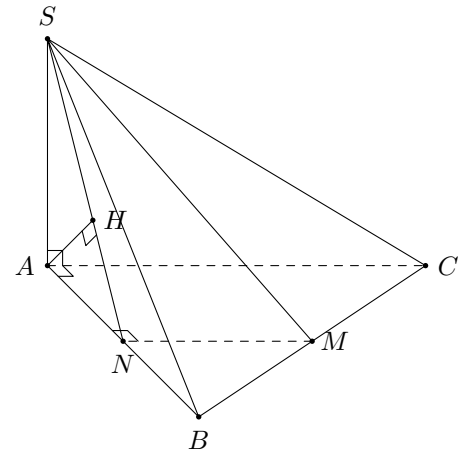
$$d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(A, (SMN)) = AH$$

với $AH \perp (SMN)$

$$\text{Mà } SA = a\sqrt{2}, AM = MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a.$$

Trong tam giác vuông SAN vuông tại A có AH là chiều cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AN}{\sqrt{SA^2 + AN^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$



Chọn đáp án **C**

□

2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{3}a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. C. $a\sqrt{5}$. D. $\frac{2\sqrt{17}a}{17}$.

Câu 3. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

- A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 4. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

- A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 5. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \parallel (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\sqrt{6}a$. C. $a\sqrt{3}$. D. a .

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AA_1 = 2a, AD = 4a$. Gọi M là trung điểm của cửa AD . đây là hình vuông cạnh $a, SA \parallel (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

- A. $3a$. B. $2\sqrt{2}a$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Câu 7 (THPT Quốc Gia năm 2015). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a, SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC .

- A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $\triangle SAB$ vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = a$ và cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc bằng 30° Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a .

- A. $\frac{2\sqrt{17}a}{17}$. B. $\frac{\sqrt{17}a}{17}$. C. $2\sqrt{17}a$. D. $\sqrt{17}a$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của đoạn AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a .

- A. $\frac{2a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{3}a}{5}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD theo a .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. C. $\frac{\sqrt{7}a}{7}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{7}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. D	4. D	5. A	6. B	7. A	8. A	9. B	10. C
11. B									

E GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

1. VÍ DỤ

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

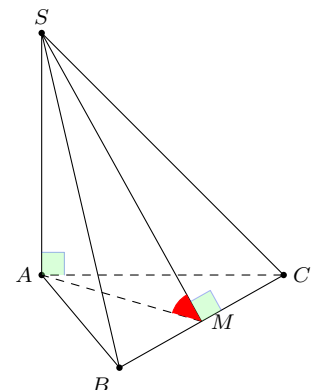
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC, SM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AM \subset (ABC) \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (AM, SM) = \widehat{SMA}. \\ BC \perp SM \subset (SBC) \end{cases}$

Mà $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2} = a = SA$.

Suy ra tam giác AAM vuông cân tại $S \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh bên SA , vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Cho biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) bằng

A. $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$. B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Lời giải.

Đựng $CH \perp AB$, (CH cắt hai mặt và vuông với giao tuyến SB) và $HK \perp SB$.

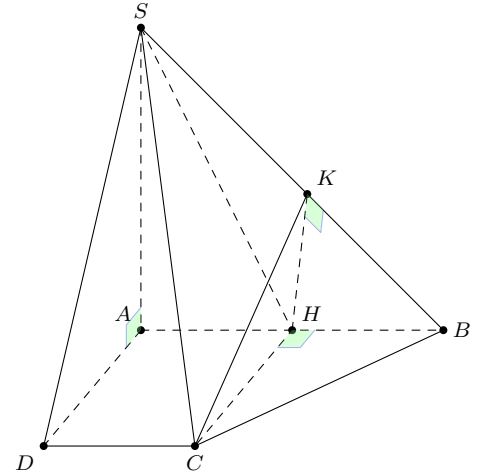
$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ SB \perp HK \subset (SAB) \\ SB \perp CK \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SAB), (SBC)) = (HK, CK) = \widehat{HCK}.$$

$$\text{Mà } \triangle HKB \sim \triangle SAB \Leftrightarrow \frac{HK}{SA} = \frac{HB}{SB}$$

$$\Leftrightarrow HK = \frac{HB \cdot SA}{SB} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Do đó } \tan \widehat{HCK} = \frac{CH}{HK} = a : \frac{a\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{HCK} = 60^\circ.$$



Chọn đáp án **(D)**

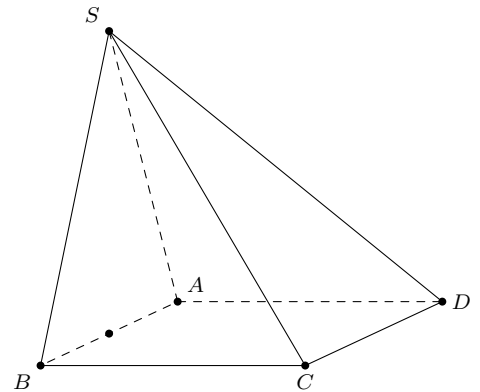


2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật thỏa mãn $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

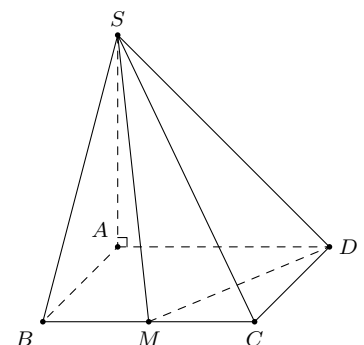
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .



Câu 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$ bằng

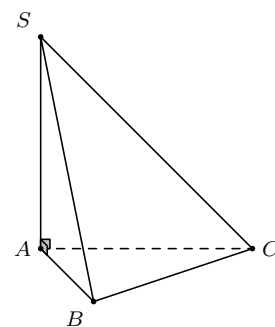
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.



Câu 3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SB = BC = 2a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{BSA} = \alpha$ (tham khảo hình vẽ). Giá trị của $\sin \alpha$ để góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 45° là

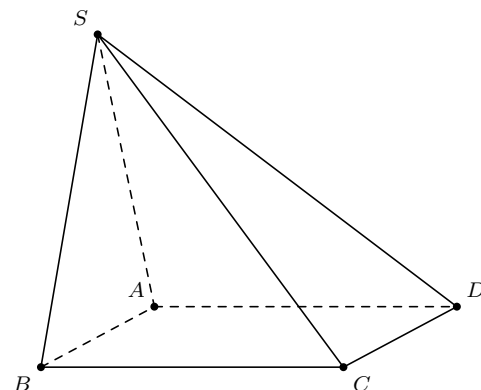
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{7}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{14}}{14}$.



Câu 4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $AB = a$, $SA = 2SD$, mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

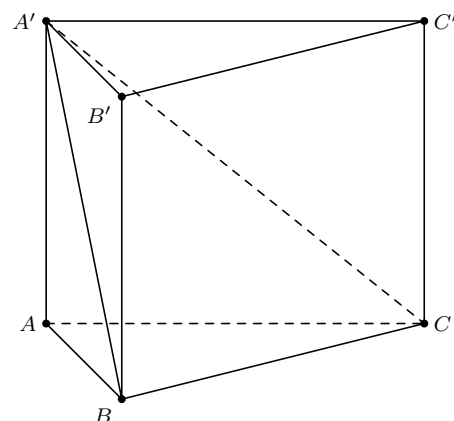
- A. $\frac{5a^3}{2}$. B. $5a^3$. C. $\frac{15a^3}{2}$. D. $\frac{3a^3}{2}$.



Câu 5.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8 (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $8\sqrt{3}$. B. $16\sqrt{3}$. C. $64\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.



Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , biết SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cho $AB = a$; $SB = a$; $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Câu 7. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Trên các tia AA' , BB' , CC' lần lượt lấy A_1 , B_1 , C_1 cách mặt phẳng đáy (ABC) một khoảng lần lượt là $\frac{a}{2}$, a , $\frac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A_1B_1C_1)$.

- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AD = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABC'D')$ và $(ABCD)$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Câu 9. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tính giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc nhau.

- A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $x = \frac{a}{3}$. D. $x = \frac{a}{2}$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Khi đó cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. B. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. A	5. A	6. A	7. C	8. A	9. A	10. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

F THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN LIÊN QUAN GÓC, KHOẢNG CÁCH

Hướng 1. Đề cho cách đều hoặc góc bằng nhau $\rightarrow$ Chân chiều cao $\equiv$ tâm ngoại tiếp đa giác đáy.

Hướng 2. Đề cho góc giữa hai mặt vuông $\rightarrow$ Dựng thêm hình để đưa về bài toán quen sách giáo khoa.

Hướng 3. Đề bài cho chân chiều cao, nhưng tính toán thông qua khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt.

1. VÍ DỤ

Câu 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$ và $SA = SB = SD$ với D là trung điểm của BC . Cạnh bên SA hợp với đáy một góc 45° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{AC} \Rightarrow BC = 2a.$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Do $AB = BD = AD = a$ nên $\triangle ABD$ đều

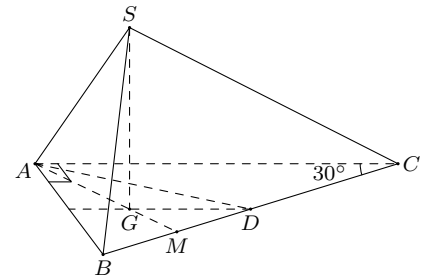
$\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ là trọng tâm G .

Ta có $SA = SB = SD \Rightarrow SG \perp (ABD)$ hay $SG \perp (ABC)$.

$$\text{Khi đó } (SA, (ABC)) = (SA, AG) = \widehat{SAG} = 45^\circ \Rightarrow SG = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{6}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 2. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 2a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$, góc giữa đường thẳng AB và (SBC) bằng 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Dựng $SD \perp (ABC) \Rightarrow SD \perp (ABCD)$ tại $D \Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Ta có $AB \parallel CD$

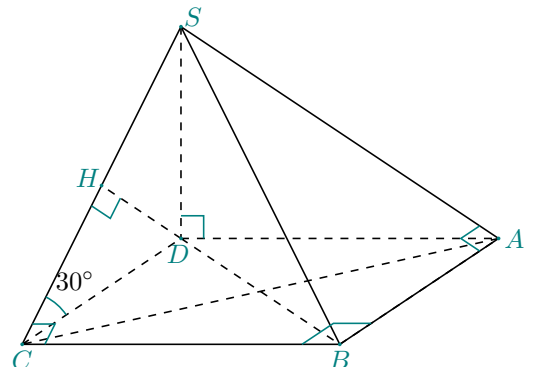
$$\Rightarrow (AB, (SBC)) = (CD, (SBC)) = (HC, CD)$$

$$= \widehat{SCD} = 30^\circ.$$

$$\text{Ta có } \tan 30^\circ = \frac{SD}{2a} \Rightarrow SD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SD = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Chọn đáp án **(A)**



- Câu 3.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Biết rằng khoảng cách từ I đến (SBC) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$, thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng
- A. 9. B. $\frac{9}{2}$. C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

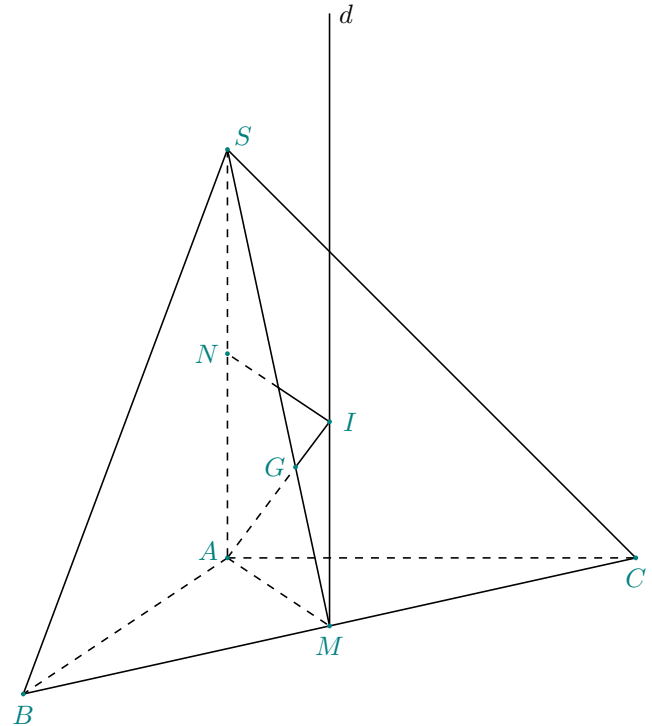
Dựng hình và xác định tâm I mặt cầu như hình vẽ.

$$\text{Ta có } d[A, (SBC)] = \frac{GA}{GI} \cdot d[I, (SBC)] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}.$$

Đặt $SA = x > 0$, $AB = y > 0$, $AC = z > 0$.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{d^2[A, (SBC)]} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{3}.$$



$$\text{Ta có } \frac{1}{3} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3 \sqrt{\frac{1}{x^2 y^2 z^2}} \Rightarrow \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \leq \frac{1}{9^3} \Rightarrow xyz \geq 27 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{xyz}{6} \geq \frac{9}{2}.$$

$$\text{Vậy min } V_{S.ABC} = \frac{9}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**



2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Cạnh bên SB tạo với đáy một góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

Câu 2. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , gọi M là trung điểm AC và $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$. Các đường thẳng SA , SB , SM cùng tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. a^3 . B. $\frac{a^3}{3}$. C. $3a^2$. D. $\frac{4a^3}{3}$.

Câu 3. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, cạnh a , điểm A' cách đều các điểm A , B , C và cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$.

Câu 4. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = a$, Cạnh bên SA hợp với mặt phẳng đáy. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Biết rằng khoảng cách từ I đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{24}a^3$. B. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^3$. C. $\frac{\sqrt{6}}{4}a^3$. D. $\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Biết rằng khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{18}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{20}$. B. $\frac{3\sqrt{5}a^3}{20}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{20}$. D. $\frac{\sqrt{5}a^3}{20}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $4a$. Biết SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và $SA = 6\sqrt{3}a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, SC . Gọi điểm K sao cho AK là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Thể tích khối tứ diện $KMNP$ bằng

- A. $\frac{13a^3}{2}$. B. $8a^3$. C. $7a^3$. D. $\frac{19a^3}{2}$.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB \perp BC, BC \perp SC, SC \perp SA, BC = a, SC = \sqrt{15}a$ và góc giữa AB, SC bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{5a^3}{2}$. B. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{2}$. C. $\frac{5a^3}{6}$. D. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại đỉnh C và $BD = 12$. Tam giác ABC vuông tại đỉnh B , tam giác ADC vuông tại đỉnh D . Biết góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng 45° . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $72\sqrt{2}$. B. $48\sqrt{2}$. C. $54\sqrt{2}$. D. $36\sqrt{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

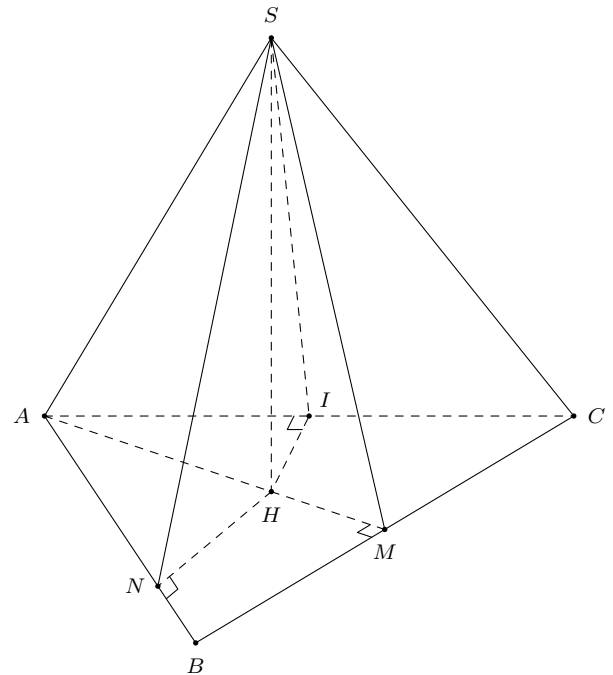
Câu 10. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $a, (a > 0)$. Biết hai mặt bên $(SAB), (SAC)$ cùng tạo với đáy một góc 60° , mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 30° và hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy là H thuộc miền trong tam giác ABC . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{56}$. C. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{32}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{40}$.

Câu 11.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác ABC là tam giác đều cạnh a . Các mặt $(SAB), (SAC), (SBC)$ lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$, biết rằng hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8(4+\sqrt{3})}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2(4+\sqrt{3})}$.
C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4(4+\sqrt{3})}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$.



Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD = BC = 3, AC = BD = 4, AB = CD = 2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

- A. $\frac{\sqrt{2740}}{12}$. B. $\frac{\sqrt{2474}}{12}$. C. $\frac{\sqrt{2047}}{12}$. D. $\frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Các góc $\widehat{SAB}, \widehat{SCB}$ vuông, M là trung điểm SA . Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\frac{6a}{\sqrt{21}}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{8a^3\sqrt{39}}{3}$. B. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{4a^3\sqrt{13}}{3}$. D. $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a , góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $3a^3\frac{\sqrt{2}}{8}$. B. $3a^3\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $a^3\frac{\sqrt{2}}{8}$. D. $3a^3\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 15. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là trung điểm cạnh $A'B'$, góc giữa mặt phẳng $(AC'D')$ và mặt đáy lăng trụ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $3\sqrt{3}a^3$. C. $\sqrt{3}a^3$. D. $6\sqrt{3}a^3$.

Câu 16. Khối tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{AOC} = 120^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Khi đó, tính thể tích tứ diện $OABC$.

- A. $\frac{a^3}{12}$. B. $\frac{a^3}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 17. Tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = 1$ và $OA \perp OB$. Tìm góc giữa OC và (OAB) để tứ diện có thể tích là $\frac{1}{12}$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 18. Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABD . Cạnh bên SD tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$. C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{9}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. A	5. D	6. B	7. D	8. A	9. B	10. D
11. A	12. D	13. B	14. B	15. D	16. D	17. A	18. A	19. C	

G BÀI TOÁN CỰC TRỊ (THỰC TẾ) TRONG NÓN TRỤ CẦU

1. VÍ DỤ

Câu 1. Một hình trụ có thể tích 16 cm^3 . Khi đó, bán kính R bằng bao nhiêu để diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất?

- A. $R = 1,6 \text{ cm}$. B. $R = \frac{16}{\pi} \text{ cm}$. C. $R = 2 \text{ cm}$. D. $R = \pi \text{ cm}$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \left(R^2 + \frac{16}{R} \right) = 2\pi \left(R^2 + \frac{8}{R} + \frac{8}{R} \right) \geq 2\pi \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{R^2 \cdot \frac{8}{R} \cdot \frac{8}{R}} = 24\pi.$$

Suy ra $S_{\text{tp max}} = 24\pi$ và dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $R^2 = \frac{8}{R} \Leftrightarrow R = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2 (Câu 30 - Đề thi THPT QG năm 2018 - Mã đề 103).

Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $1,01 \text{ m}^3$. B. $0,96 \text{ m}^3$. C. $1,33 \text{ m}^3$. D. $1,51 \text{ m}^3$.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá. Khi đó,

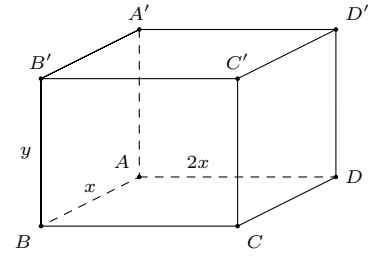
$$V = 2x^2y.$$

Theo đề, diện tích toàn phần không nắp bằng 5, tức có

$$5 = 2xy + 2 \cdot 2xy + 2x^2 = 3xy + 2x^2 \geq 3\sqrt{18(x^2y)^2}$$

$$\text{Suy ra } 125 \geq 27 \cdot 18(x^2y)^2 \Leftrightarrow 2x^2y = V \leq \frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,0143.$$

Chọn đáp án **A**



Câu 3. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng R (cho trước), tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất?

- A. $\frac{64R^3}{81}$. B. $\frac{64R^3}{27}$. C. $\frac{16R^3}{27}$. D. $\frac{16R^3}{81}$.

Lời giải.

Xét mặt cắt dọc đi qua đỉnh S và chứa đường chéo AC của hình chóp đều $S.ABCD$.

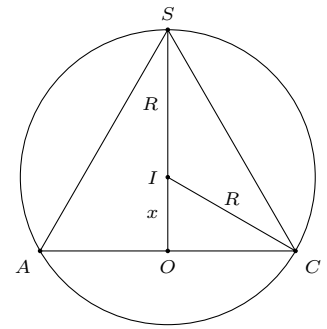
Đặt $IO = x \Rightarrow$ chiều cao chóp $SO = R + x \Rightarrow OC = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Do đó, $AC = 2\sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow AB = \sqrt{2}\sqrt{R^2 - x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Thể tích khối chóp } V &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (R^2 - x^2) (R + x) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (2R - 2x)(R + x)(R + x) \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{[(2R - 2x) + (R + x) + (R + x)]^3}{27} \\ &= \frac{64R^3}{81}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } V_{\max} = \frac{64R^3}{81} \text{ khi } 2R - 2x = R + x \Leftrightarrow x = \frac{R}{3} \text{ và } h = \frac{4R}{3}.$$

Chọn đáp án **A**

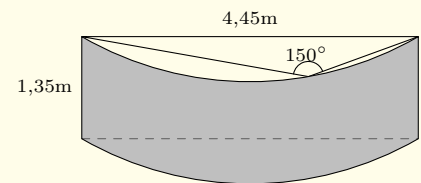


Nhận xét. Các khối nón, khối chóp tứ giác đều, khối chóp tam giác đều nội tiếp mặt cầu có điểm chung là thể tích của chúng lớn nhất khi mặt đáy cách tâm I của mặt cầu một khoảng $x = \frac{R}{3}$. Khi đó, chiều cao của khối nón, khối chóp tứ giác đều, khối chóp tam giác đều là $h = \frac{4R}{3}$.

Câu 4.

Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng một tấm kính cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của hình trụ như hình bên. Biết giá tiền của 1 m^2 kính như trên là 1 500 000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?

- A. 23 591 000 đồng. B. 36 173 000 đồng. C. 9 437 000 đồng. D. 4 718 000 đồng.



Lời giải.

Gọi r là bán kính đáy của hình trụ. Ta có $4,45 = 2r \sin 150^\circ \Rightarrow r = 4,45 \text{ m}$. Như vậy, góc ở tâm của cung bằng 60° nên độ dài cung bằng $\frac{1}{6}$ chu vi đường tròn hay $\ell = \frac{\pi r}{3}$.

Tấm kính cần mua có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật có một cạnh là $1,35 \text{ m}$ và cạnh còn lại là ℓ nên số tiền để

mua tấm kính là

$$1\,500\,000 \times \frac{1,35 \times \pi \times 4,45}{3} \approx 9\,437\,000 \text{ đồng.}$$

Chọn đáp án **C**



2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$, thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất khi cạnh đáy bằng

- A.** 4. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 2. Trong tất cả hình chóp tam giác đều nội tiếp mặt cầu bán kính bằng 6, thể tích lớn nhất của khối chóp bằng

- A.** $32\sqrt{3}$. **B.** $64\sqrt{3}$. **C.** $72\sqrt{3}$. **D.** $81\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho khối cầu tâm O bán kính bằng 6. Mặt phẳng (P) cách điểm O một khoảng x cắt khối cầu theo một hình tròn (C) . Một khối nón có đỉnh thuộc mặt cầu, đáy là hình tròn (C) . Biết khối nón có thể tích lớn nhất, khi đó giá trị của x bằng

- A.** $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 3\sqrt{2}$. **D.** $x = 6\sqrt{2}$.

Câu 4. Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi \text{ m}^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất?

- A.** $R = 2 \text{ m}$ và $h = \frac{1}{2} \text{ m}$. **B.** $R = 4 \text{ m}$ và $h = \frac{1}{5} \text{ m}$. **C.** $R = \frac{1}{2} \text{ m}$ và $h = 8 \text{ m}$. **D.** $R = 1 \text{ m}$ và $h = 2 \text{ m}$.

Câu 5. Cho hình trụ có tính chất: thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12 cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng

- A.** $8\pi \text{ cm}^3$. **B.** $16\pi \text{ cm}^3$. **C.** $32\pi \text{ cm}^3$. **D.** $64\pi \text{ cm}^3$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. D	5. A
------	------	------	------	------

CHUYÊN ĐỀ 6

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

БННДИС БНУБ ЛОН ДОУ ЛВОИС КНОИС СИВИ

A PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG

1. VÍ DỤ

Câu 1 (Câu 45 - Đề tham khảo - Bộ GD & ĐT năm học 2020 - 2021).

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$,

$d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

Gọi $M = d \cap d_1$, $N = d \cap d_2$.

Khi đó $M(1+2t; t; -1-2t) \in d_1$, $N(2+s; 2s; -1-s) \in d_2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (s-2t+1; 2s-t; -s+2t)$ và $\vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$.

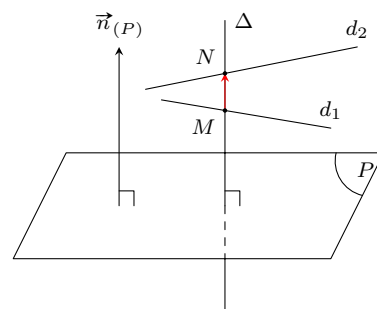
Vì MN vuông góc với (P) nên ta có $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{n}_{(P)}$.

Suy ra $\frac{s-2t+1}{2} = \frac{2s-t}{2} = \frac{-s+2t}{-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} s-2t+1=2s-t \\ -2s+t=-2s+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1; 0; -1) \\ N(3; 2; -2) \end{cases}$

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua điểm $N(3; 2; -2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (2; 2; -1)$ là $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

Chọn đáp án **A**



2. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$, $d_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-11}{4} = \frac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi

qua $A(5; -3; 5)$ cắt d_1 , d_2 lần lượt ở B , C . Tỷ số $\frac{AB}{AC}$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 3y + 5z + 1 = 0$ và phương trình hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{3}$. Đường thẳng vuông góc với (P) đồng thời cắt d_1 và d_2 tại A và B . Độ dài AB bằng

A. $2\sqrt{43}$.

B. $\sqrt{43}$.

C. $2\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{13}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; 2; 0)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$. Đường thẳng đi qua M , cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ D. $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua A , song song với mặt phẳng (P) và cắt d có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$; $d_2: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_3: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng d song song với d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$ C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$ D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+3}{4}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 .

A. $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+9}{-1}$ B. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ D. $\frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-9}{-1}$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$; $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x - y - 2z + 3 = 0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 . Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$ B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ C. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$ D. $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$, vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{-1}$ và cắt đường thẳng $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-2}$ là

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-2}$ C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}$ D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2)$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN có dạng

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$ B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 4 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$. Mặt phẳng (α) song song với (P) và cắt d_1, d_2 theo thứ tự tại M, N sao cho $MN = \sqrt{3}$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (α) ?

A. $A(1; 2; 3)$.

B. $B(0; 1; -3)$.

C. $C(0; -1; 3)$.

D. $D(0; 1; 3)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -4 \\ z = 4 + t \end{cases}$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; -1)$ và cắt d_1 tại M , cắt d_2 tại N . Khi đó $AM^2 + AN^2$ bằng

A. 81.

B. 100.

C. 90.

D. 85.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d nằm trong $(P): x + y + z - 3 = 0$, đồng thời d cắt $d_1: \frac{x-6}{2} = \frac{y+10}{-7} = \frac{z-5}{3}$ và vuông góc với $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{9}$ là

A. $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 4 + 62t \\ y = -3 - 22t \\ z = 2 - 25t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -3 - 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 3z = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2 - u \\ y = 4 + 2u \\ z = 4 \end{cases}$.

Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+8}{3}$.

B. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+8}{3}$.

C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+8}{3}$.

D. $\frac{x-7}{-1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-4}{3}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -1; 4)$, đồng thời d song song với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 15 = 0$ và d cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{-7}$.

B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-4}{-3}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-7}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-6}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-4}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

A. $\frac{x-4}{8} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

B. $\frac{x-4}{9} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1; 3; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của đoạn MN .

A. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

B. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$.

D. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. A	4. A	5. C	6. A	7. C	8. A	9. B	10. A
11. B	12. B	13. C	14. D	15. B	16. A	17. C	18. C	19. A	

B CỰC TRỊ HÌNH HỌC OXYZ

TÂM TỈ CỰ - TÂM TỈ CỰ DI ĐỘNG

Cho trước ba điểm A, B, C .

$$1. \text{ Tìm tọa độ điểm } I \text{ thỏa } \alpha \cdot \vec{IA} + \beta \cdot \vec{IB} + \gamma \cdot \vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{\alpha \cdot x_A + \beta \cdot x_B + \gamma \cdot x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_I = \frac{\alpha \cdot y_A + \beta \cdot y_B + \gamma \cdot y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ z_I = \frac{\alpha \cdot z_A + \beta \cdot z_B + \gamma \cdot z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases} \quad (1)$$

$$2. \text{ Luôn có } \begin{cases} \left| \alpha \cdot \vec{MA} + \beta \cdot \vec{MB} + \gamma \cdot \vec{MC} \right| = \left| (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \vec{MI} \right| = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot MI \quad (2) \\ \alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 + \gamma \cdot MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot MI^2 + \underbrace{\alpha \cdot IA^2 + \beta \cdot IB^2 + \gamma \cdot IC^2}_{\text{const}} \quad (3) \end{cases}$$

1. VÍ DỤ

Câu 1. (Đề tham khảo - Bộ GD-ĐT năm 2019 - câu 41)

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét điểm M là điểm thay đổi thuộc (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 135.

B. 105.

C. 108.

D. 145.

Lời giải.

Tìm điểm I thỏa $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-1; 1; 1)$.

Ta có $T = 2MA^2 + 3MB^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 5MI^2 + 90$.

Khi đó $T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P) .

$$\text{Ta có } M = MI \cap (P) \text{ thỏa } \begin{cases} 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow t = 1.$$

Suy ra $M(1; 0; 3) \Rightarrow MI^2 = 9 \Rightarrow T_{\min} = 135$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 10)^2 = 10$, điểm M bất kì nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 26 = 0$. Gọi A, B là hai điểm nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB = 6$. Giá trị nhỏ nhất của $\left| 5\vec{MA} + 13\vec{MB} \right|$ bằng

A. 108.

B. 145.

C. 150.

D. 210.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 10)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Gọi K là điểm thỏa mãn $5\vec{KA} + 13\vec{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{KA} = -13\vec{KB}$.

$$\Rightarrow K \text{ thuộc đoạn } AB \text{ và } \begin{cases} 5KA = 13KB \\ KA + KB = 6 \end{cases} \Rightarrow KB = \frac{5}{3}, KA = \frac{13}{3}.$$

Gọi H là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow IH \perp AB \Rightarrow HK = \frac{4}{3} \Rightarrow IK = \frac{5}{3}$.

Suy ra $\left| 5\vec{MA} + 13\vec{MB} \right|_{\min} = 18 \cdot MK_{\min} = 18 \cdot (d(I, (P)) - IK) = 150$.



A. $\frac{12 + 9\sqrt{3}}{5}$.

B. $\frac{16 + 60\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{24 + 18\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{8 + 30\sqrt{3}}{9}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + 5c$.

A. 11.

B. 9.

C. 15.

D. 14.

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(0; 3; 0)$ và mặt cầu (S) tâm $I(1; -2; 1)$ bán kính $R = 3$, biết $M(x_0; y_0; z_0) \in (S)$ sao cho $A = 2x_0 - y_0 + 2z_0$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó độ dài MN là

A. 3.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$ cắt mặt phẳng (P) tại B . Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Tính độ dài MB .

A. $MB = \sqrt{5}$.

B. $MB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $MB = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

D. $MB = \sqrt{41}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1 - 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; -1; -2)$. Giả sử $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 861$ sao cho $P = 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $|a| + |b| + |c|$ bằng

A. 49.

B. 51.

C. 55.

D. 47.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -3; 0)$, $B(5; -1; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên (P) và $|MA - MB|$ lớn nhất. Giá trị tích $a \cdot b \cdot c$ bằng

A. 1.

B. 12.

C. 24.

D. -24.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(15; -1; 4)$, $B(7; 6; 3)$, $C(6; -3; 6)$, $D(8; 14; -1)$ và $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ khi $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 9.

B. -5.

C. 16.

D. 2.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(0; 21; -19)$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 0$.

B. $S = \frac{14}{5}$.

C. $S = 12$.

D. $S = \frac{12}{5}$.

Câu 17. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn hệ thức $|z - 3 - 4i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1|^2 - |z_2|^2$.

A. -10.

B. -5.

C. $-6 - 2\sqrt{5}$.

D. $-4 - 3\sqrt{5}$.

Câu 18. Kí hiệu A là tập hợp các số phức z đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $|z - 1| = \sqrt{34}$ và $|z + 1 + mi| = |z + m + 2i|$ (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp A sao cho $|z_1 - z_2|$ là lớn nhất. Khi đó hãy tính giá trị của $|z_1 + z_2|$.

A. $|z_1 + z_2| = 10$.

B. $|z_1 + z_2| = 2$.

C. $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

D. $|z_1 + z_2| = \sqrt{130}$.

Câu 19. Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 4.

B. $3\sqrt{2}$.

C. 3.

D. $2\sqrt{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. C	5. A	6. B	7. B	8. C	9. C	10. B
11. C	12. A	13. B	14. C	15. A	16. B	17. A	18. B	19. A	