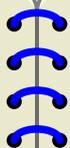


Chương
4



Bất phương trình

§1 Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Thứ tự trên tập hợp số

1. Trên tập số thực, khi so sánh hai số a và b , xảy ra một trong ba trường hợp sau:

| Trường hợp | Ký hiệu |
|-----------------|---------|
| a bằng b | $a = b$ |
| a lớn hơn b | $a > b$ |
| a nhỏ hơn b | $a < b$ |

2. Ngoài ra ta còn kết hợp các trường hợp trên với nhau:

- Nếu số a không nhỏ hơn số b thì phải có hoặc $a > b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là a lớn hơn hoặc bằng b , ký hiệu $a \geq b$.
Ví dụ: $x^2 \geq 0$ với mọi x . Nếu c là số không âm ta viết $c \geq 0$.
- Nếu số a không lớn hơn số b thì phải có hoặc $a < b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là a nhỏ hơn hoặc bằng b , ký hiệu $a \leq b$.
Ví dụ: $-x^2 \leq 0$ với mọi x . Nếu c là số không lớn hơn 3 ta viết $c \leq 3$.

1.2 Bất đẳng thức

Định nghĩa 3. Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b; a \geq b; a \leq b$) được gọi là *bất đẳng thức*; trong đó a và b lần lượt được gọi là vế trái và vế phải của bất đẳng thức.

Tính chất 1. Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho. Cụ thể, với ba số a, b và c ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.
- Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 92. Sắp xếp thứ tự các số trên trục số. Biểu diễn mối quan hệ giữa các tập số

Dựa vào các kiến thức cơ bản đã học ở các lớp dưới để làm

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Sắp xếp các số sau từ bé đến lớn và biểu diễn trên trục số:

a) $0; -2; -1; 5;$

b) $5; 2; 4; -3.$

 **Lời giải.**

a) $-2; -1; 0; 5.$



b) $-3; 2; 4; 5.$



□

 **Ví dụ 2.** Sắp xếp các số sau từ lớn đến bé và biểu diễn trên trục số:

a) $-1; 2; 0; -2.$

b) $0; 3; -2; 4.$

 **Lời giải.**

a) $2; 0; -1; -2.$



b) $4; 3; 0; -2.$



□

 **Dạng 93. Xét tính đúng sai của khẳng định cho trước.**

Dựa vào các kiến thức cơ bản, các tính chất để kiểm tra tính đúng sai.

   **BÀI TẬP MẪU**    **Ví dụ 1.** Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $2 + (-3) > 4;$

b) $3 \cdot (-3) \leq -6;$

c) $3 + (-2) < 8 - 10;$

d) $(-2) \cdot (-3) \geq -2 + 8.$

 **Lời giải.**

a) Sai. Vì $2 + (-3) = -1 < 4.$

b) Đúng. Vì $3 \cdot (-3) = -9 \leq -6.$

c) Sai. Vì $3 + (-2) = 1 > -2 = 8 - 10.$

d) Đúng. Vì $(-2) \cdot (-3) = 6 = -2 + 8.$

□

 **Ví dụ 2.** Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $3 + 2 > 8;$

b) $3 \cdot \frac{1}{3} < 0;$

c) $(-1) + 3 \leq 5 - (-1);$

d) $(-1) \cdot (-5) \geq 5 - 4.$

 **Lời giải.**

a) Sai. Vì $3 + 2 = 5 < 8.$

b) Sai. Vì $3 \cdot \frac{1}{3} = 1 > 0.$

c) Đúng. Vì $(-1) + 3 = 2 \leq 6 = 5 - (-1).$

d) Đúng. Vì $(-1) \cdot (-5) = 5 \geq 1 = 5 - 4.$

□

Ví dụ 3. Chuyển các khẳng định sau về dạng bất đẳng thức và cho biết khẳng định đó đúng hay sai?

- a) Tổng của -4 và 6 nhỏ hơn hoặc bằng 3 ; b) Hiệu của 2 và -7 nhỏ hơn 0 ;
 c) Tích của -2 và -1 lớn hơn hoặc bằng 2 ; d) Thương của -8 và 2 lớn hơn 5 .

Lời giải.

- a) $(-4) + 6 \leq 3$. Khẳng định này là đúng. b) $2 - (-7) < 0$. Khẳng định này là sai.
 c) $(-2) \cdot (-1) \geq 2$. Khẳng định này là đúng. d) $\frac{-8}{2} > 5$. Khẳng định này là sai.

□

Ví dụ 4. Chuyển các khẳng định sau về dạng bất đẳng thức và cho biết khẳng định đó đúng hay sai?

- a) Tổng của -1 và 5 nhỏ hơn hoặc bằng 2 ; b) Hiệu của 8 và 2 nhỏ hơn 12 ;
 c) Tích của 3 và -2 lớn hơn hoặc bằng 9 ; d) Thương của -6 và 4 lớn hơn 1 .

Lời giải.

- a) $-1 + 5 \leq 2$. Khẳng định này là sai. b) $8 - 2 < 12$. Khẳng định này là đúng.
 c) $3 \cdot (-2) \geq 9$. Khẳng định này là sai. d) $\frac{-6}{4} > 1$. Khẳng định này là sai.

□

Dạng 94. So sánh

Sử dụng quy tắc cộng cả hai vế của bất đẳng thức cho cùng một số.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho $a > b$, hãy so sánh:

- a) $a + 2$ và $b + 2$; b) $a - 5$ và $b - 5$.

Lời giải.

- Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với 2 , ta được $a + 2 > b + 2$.
- Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với -5 , ta được $a - 5 > b - 5$.

□

Ví dụ 2. Cho $a < b$, hãy so sánh:

- a) $10 + a$ và $10 + b$; b) $a - 1$ và $b - 1$.

Lời giải.

- a) Sai. Vì $-6 = -4 + (-2)$. b) Đúng. Vì $(-4) \cdot \frac{1}{4} = -1 < 0$.
- c) Đúng. Vì $(-5) + 1 = -4 \leq 6 = 4 - (-2)$. d) Đúng. Vì $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x
 $\Rightarrow 2 + x^2 \geq 2$.

□

Bài 3. Chuyển các khẳng định sau về dạng bất đẳng thức và cho biết khẳng định đó đúng hay sai?

- a) Tổng của -6 và -2 nhỏ hơn hoặc bằng -5 ; b) Hiệu của -4 và -4 nhỏ hơn -1 ;
 c) Tích của 5 và -2 lớn hơn hoặc bằng -20 ; d) Thương của -8 và 8 lớn hơn 0 .

Lời giải.

- a) $-6 + (-2) \leq -5$. Khẳng định này là đúng. b) $-4 - (-4) < -1$. Khẳng định này là đúng.
 c) $5 \cdot (-2) \geq -20$. Khẳng định này là đúng. d) $\frac{-8}{8} > 0$. Khẳng định này là sai.

□

Bài 4. Cho $a > b$, hãy so sánh:

- a) $a + 12$ và $b + 12$; b) $a - 8$ và $b - 8$.

Lời giải.

- Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với 12 , ta được $a + 12 > b + 12$.
- Ta có $a > b$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với -8 , ta được $a - 8 > b - 8$.

□

Bài 5. Cho số m tùy ý, chứng minh:

- a) $m + 121 > m + 100$; b) $m - 4 < m$.

Lời giải.

- Ta có $121 > 100$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với m , ta được $m + 121 > m + 100$.
- Ta có $-4 < 0$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức với m , ta được $m - 4 < m$.

□

§2 Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương

- Tính chất 2.** Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.
- Với ba số a, b, c trong đó $c > 0$, ta có: Nếu $a > b$ thì $ac > bc$.
Tương tự cho các bất đẳng thức với dấu $<$; \geq ; \leq .

1.2 Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm

- Tính chất 3.** Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.
- Với ba số a, b, c trong đó $c < 0$, ta có: Nếu $a > b$ thì $ac < bc$.
Tương tự cho các bất đẳng thức với dấu $<$; \geq ; \leq .

1.3 Tính chất bắc cầu

- Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$. Tương tự cho các bất đẳng thức với dấu $<$; \geq ; \leq .

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 95. Xét tính đúng sai của khẳng định cho trước.

Dựa vào các kiến thức cơ bản, các tính chất để kiểm tra tính đúng sai.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

- | | |
|--|--|
| a) $(-3) \cdot 5 < (-2) \cdot 5$; | b) $4 \cdot (-6) \leq 2 \cdot (-6)$; |
| c) $\frac{5}{2} \cdot (-5) > \frac{3}{2} \cdot (-5)$; | d) $2 \cdot (-1) + 1 \geq 3 \cdot 2$. |

Lời giải.

- a) Đúng. Vì $(-3) \cdot 5 = -15 < -10 = (-2) \cdot 5$. b) Đúng. Vì $4 \cdot (-6) = -24 \leq -12 = 2 \cdot (-6)$.

§3 Bất phương trình một ẩn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình một ẩn x là bất phương trình có dạng:

$$A(x) < B(x) \text{ hoặc } A(x) > B(x) \\ \text{hoặc } A(x) \leq B(x) \text{ hoặc } A(x) \geq B(x),$$

trong đó $A(x)$ và $B(x)$ lần lượt là vế trái và vế phải của bất phương trình.

Ví dụ: $x + 4 \geq 5x - 1$ là một bất phương trình bậc nhất ẩn x .

1.2 Nghiệm của bất phương trình một ẩn

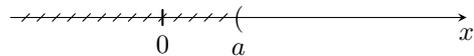
1. Giá trị $x = a$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình nếu ta thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình ta thu được một bất đẳng thức đúng.
2. *Tập nghiệm* của bất phương trình là tập tất cả các giá trị của biến thỏa mãn bất phương trình.
3. *Giải bất phương trình* là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

1.3 Biểu diễn tập nghiệm

Giả sử $a > 0$.

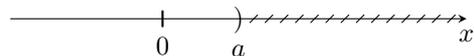
1.

$$\{x|x > a\}$$



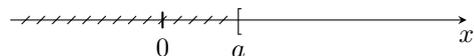
2.

$$\{x|x < a\}$$



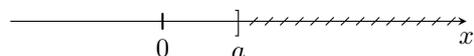
3.

$$\{x|x \geq a\}$$



4.

$$\{x|x \leq a\}$$



Trường hợp $a < 0$ tương tự.

1.4 Hai bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập nghiệm và dùng " \Leftrightarrow " để chỉ sự tương đương đó.

Ví dụ: $2 > x \Leftrightarrow x < 2$.

 **15.** Chú ý

Hai bất phương trình cùng vô nghiệm tương đương nhau.

2

Bài tập và các dạng toán

Dạng 97. Kiểm tra $x = a$ có là nghiệm của bất phương trình hay không?

Bằng cách thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình, xảy ra hai trường hợp:

- Nếu được một bất đẳng thức đúng thì $x = a$ là nghiệm của bất phương trình.
- Nếu được một bất đẳng thức sai thì $x = a$ không là nghiệm của bất phương trình.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Kiểm tra xem giá trị $x = 2$ có là nghiệm của mỗi bất phương trình sau hay không?

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a) $x + 3 < x - 4$; | b) $2x - 1 > 3 - x$; |
| c) $4 - x \leq 12x + 20$; | d) $2x + 1 - x \geq 3x - 7$. |

Lời giải.

- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $2 + 3 < 2 - 4$, hay $5 < -2$. Điều này sai. Vậy $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình $x + 3 < x - 4$.
- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $2 \cdot 2 - 1 > 3 - 2$, hay $3 > 1$. Điều này đúng. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $2x - 1 > 3 - x$.
- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $4 - 2 \leq 12 \cdot 2 + 20$, hay $2 \leq 44$. Điều này đúng. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $4 - x \leq 12x + 20$.
- Thay $x = 2$ vào bất phương trình, ta được $2 \cdot 2 + 1 - 2 \geq 3 \cdot 2 - 7$, hay $3 \geq -1$. Điều này đúng. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $2x + 1 - x \geq 3x - 7$.

□

 **Ví dụ 2.** Kiểm tra xem trong các giá trị sau, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.

- | | |
|---------------|---------------|
| a) $x = 0$; | b) $x = 1$; |
| c) $x = -3$; | d) $x = -1$. |

Lời giải.

- Thay $x = 0$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot 0 + 2 \geq 3 \cdot 0 + 1$, hay $2 \geq 1$. Điều này đúng. Vậy $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot 1 + 2 \geq 3 \cdot 1 + 1$, hay $7 \geq 4$. Điều này đúng. Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.
- Thay $x = -3$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot (-3) + 2 \geq 3 \cdot (-3) + 1$, hay $-13 \geq -8$. Điều này sai. Vậy $x = -3$ không là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.
- Thay $x = -1$ vào bất phương trình, ta được $5 \cdot (-1) + 2 \geq 3 \cdot (-1) + 1$, hay $-3 \geq -2$. Điều này sai. Vậy $x = -1$ không là nghiệm của bất phương trình $5x + 2 \geq 3x + 1$.

□

Dạng 98. Viết bằng kí hiệu tập hợp và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số.

Để biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số, ta thực hiện các bước sau:

- ☑ Vẽ trục số và điền các giá trị 0, giá trị nghiệm của bất phương trình trên trục số;
- ☑ Gạch bỏ phần không thuộc tập nghiệm, lưu ý cách dùng dấu (;); [;];]).

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Viết kí hiệu và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình sau trên trục số:

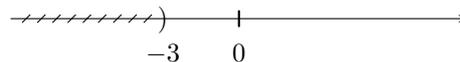
- a) $x < 4$; b) $x > -3$; c) $x \leq 0$; d) $x \geq 2$.

Lời giải.

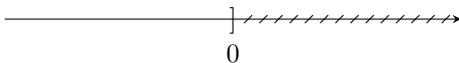
a) $\{x|x < 4\}$.



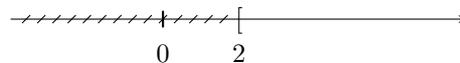
b) $\{x|x > -3\}$.



c) $\{x|x \leq 0\}$.



d) $\{x|x \geq 2\}$.



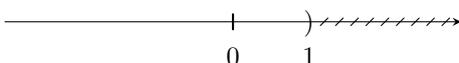
□

Ví dụ 2. Viết kí hiệu và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình sau trên trục số:

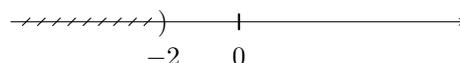
- a) $x < 1$; b) $x > -2$; c) $x \leq 3$; d) $x \geq 0$.

Lời giải.

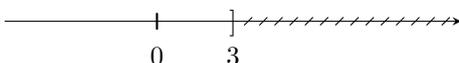
a) $\{x|x < 1\}$.



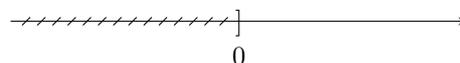
b) $\{x|x > -2\}$.



c) $\{x|x \leq 3\}$.

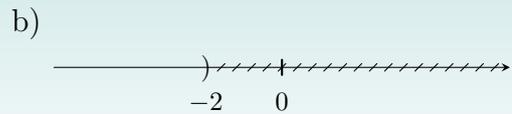
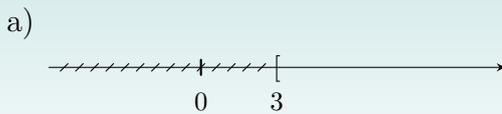


d) $\{x|x \geq 0\}$.



□

Ví dụ 3. Hình vẽ dưới đây là biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?



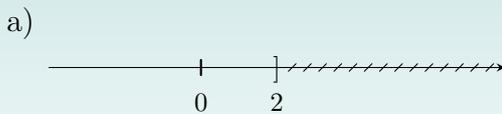
Lời giải.

a) $\{x|x \geq 3\}$.

b) $\{x|x < -2\}$.

□

Ví dụ 4. Hình vẽ dưới đây là biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?



Lời giải.

a) $\{x|x \leq 2\}$.

b) $\{x|x > 0\}$.

□

3

Bài tập về nhà

Bài 1. Kiểm tra xem giá trị $x = 1$ có là nghiệm của mỗi bất phương trình sau hay không?

a) $x - 6 \leq x + 1$;

b) $2x < 4 + x$;

c) $9 + x > 24 - x$;

d) $3x + 8 - 2x \geq 4x - 14$.

Lời giải.

- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $1 - 6 \leq 1 + 1$, hay $-5 \leq 2$. Điều này đúng. Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $2 \cdot 1 < 4 + 1$, hay $2 < 5$. Điều này đúng. Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $9 + 1 > 24 - 1$, hay $10 > 23$. Điều này sai. Vậy $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình.
- Thay $x = 1$ vào bất phương trình, ta được $3 \cdot 1 + 8 - 2 \cdot 1 \geq 4 \cdot 1 - 14$, hay $9 \geq -10$. Điều này sai. Vậy $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình.

□

Bài 2. Viết kí hiệu và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình sau trên trục số:

a) $x < -1,5$;

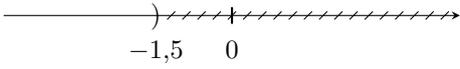
b) $x > 8$;

c) $x \leq 0,5$;

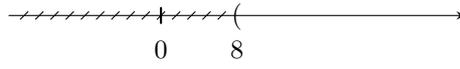
d) $x \geq -4$.

 **Lời giải.**

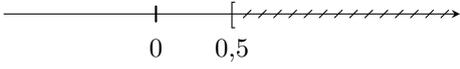
a) $\{x|x < -1,5\}$.



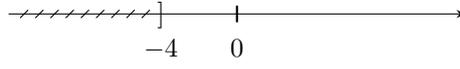
b) $\{x|x > 8\}$.



c) $\{x|x \leq 0,5\}$.



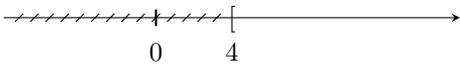
d) $\{x|x \geq -4\}$.



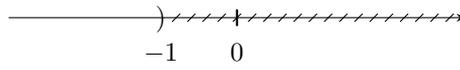
□

 **Bài 3.** Hình vẽ dưới đây là biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?

a)



b)



 **Lời giải.**

a) $\{x|x \geq 4\}$.

b) $\{x|x < -1\}$.

□

§4 Bất phương trình bậc nhất một ẩn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Định nghĩa 4. Bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

1.2 Hai quy tắc biến đổi phương trình

- ☑ *Quy tắc chuyển vế* : Khi chuyển một hạng tử từ một vế của bất phương trình sang vế còn lại, ta phải đổi dấu hạng tử đó.
Ví dụ: $2x + 3 < 0 \Leftrightarrow 2x < -3$.
- ☑ *Quy tắc nhân (hoặc chia) với một số khác 0*: Khi nhân (hoặc chia) hai vế của bất phương trình với một số khác 0 ta phải giữ nguyên chiều của bất phương trình (nếu số đó dương) hoặc đổi chiều bất phương trình (nếu số đó âm), ta được bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho.

2 Các dạng toán

▮ Dạng 99. Nhận dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn

Dựa vào định nghĩa bất phương trình bậc nhất một ẩn.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 **Ví dụ 1.** Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không? Vì sao?

- a) $5x + 3 \geq 0$; b) $0x - 1 < 0$; c) $\frac{-2x + 4}{3} \leq 0$; d) $x^2 + 1 > 0$.

✍ **Lời giải.**

- a) Có với $a = 5, b = 3$. b) Không vì $a = 0$.
c) Có với $a = \frac{-2}{3}, b = \frac{4}{3}$. d) Không phải vì x^2 có bậc là 2.

□

Ví dụ 2. Trong các bất phương trình sau đâu là bất phương trình bậc nhất một ẩn? Chỉ rõ a, b .

a) $2x - 4 > 0$; b) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{4} \leq 0$; c) $9 - 0x \leq 0$; d) $x^3 - 12 \geq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là a, b.

a) Với $a = 2, b = -4$. b) Với $a = \frac{2}{3}, b = \frac{5}{4}$.
 c) Không vì $a = 0$; d) Không vì x^3 có bậc là 3.

□

Dạng 100. Giải bất phương trình

Sử dụng các quy tắc chuyển vế hoặc nhân (chia) với một số khác 0 để giải các bất phương trình đã cho.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình theo quy tắc chuyển vế:

a) $x - 9 \leq 0$; **ĐS:** $x \leq 9$ b) $x + 9 < 2$; **ĐS:** $x < -7$
 c) $4 - x > -2x + 5$; **ĐS:** $x > 1$ d) $x - 3x \geq 4 - 3x$. **ĐS:** $x \geq 4$

Lời giải.

a) Ta có b) Ta có

$$x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 9. \quad \quad \quad x + 9 < 2 \Leftrightarrow x < -7.$$
 Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 9$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -7$.
 c) Ta có d) Ta có

$$\begin{aligned} 4 - x &> -2x + 5 & \quad \quad \quad x - 3x &\geq 4 - 3x \\ \Leftrightarrow -x + 2x &> 5 - 4 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow x - 3x + 3x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &> 1. & \quad \quad \quad \Leftrightarrow x &\geq 4. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 1$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 4$.

□

Ví dụ 2. Giải các phương trình theo quy tắc chuyển vế:

a) $x - 5 \geq 0$; **ĐS:** $x \geq 5$ b) $x + 4 > 11$; **ĐS:** $x > 7$
 c) $1 + 2x \leq 3 + x$; **ĐS:** $x \leq 2$ d) $x + 1 - 2x < -2x - 8$. **ĐS:** $x < -9$

Lời giải.

a) Ta có

$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 5$.

b) Ta có

$$x + 4 > 11 \Leftrightarrow x > 7.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 7$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} 1 + 2x &\leq 3 + x \\ \Leftrightarrow 2x - x &\leq 3 - 1 \\ \Leftrightarrow x &\leq 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 2$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} x + 1 - 2x &< -2x - 8 \\ \Leftrightarrow x - 2x + 2x &< -8 - 1 \\ \Leftrightarrow x &< -9. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -9$.

□

Ví dụ 3. Giải các phương trình theo quy tắc nhân:

| | | | |
|-------------------------|-----------------------|------------------------|----------------------------------|
| a) $4x \leq 16;$ | ĐS: $x \leq 4$ | b) $\frac{5}{2}x > 2;$ | ĐS: $x > \frac{4}{5}$ |
| c) $\frac{-1}{2}x < 7;$ | ĐS: $x > -14$ | d) $-0,4x \geq -5.$ | ĐS: $x \leq \frac{25}{2}$ |

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} 4x &\leq 16 \\ \Leftrightarrow x &\leq 16 \cdot \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &\leq 4. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x &> 2 \\ \Leftrightarrow x &> 2 \cdot \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow x &> \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{4}{5}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2}x &< 7 \\ \Leftrightarrow x &> 7 \cdot (-2) \\ \Leftrightarrow x &> -14. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -14$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} -0,4x &\geq -5 \\ \Leftrightarrow x &\leq -5 : (-0,4) \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{25}{2}$.

□

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình theo quy tắc nhân:

| | | | |
|-------------------|------------------------|------------------------|---------------------|
| a) $2x \geq 4;$ | ĐS: $x \geq 2$ | b) $\frac{3}{2}x > 6;$ | ĐS: $x > 4$ |
| c) $-3x \leq 12;$ | ĐS: $x \geq -4$ | d) $-0,5x < -8.$ | ĐS: $x > 16$ |

 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} 2x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 4 : 2 \\ \Leftrightarrow x &\geq 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &> 6 \\ \Leftrightarrow x &> 6 : \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow x &> 4. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 4$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} -3x &\leq 12 \\ \Leftrightarrow x &\geq 12 : (-3) \\ \Leftrightarrow x &\geq -4. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -4$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} -0,5x &< -8 \\ \Leftrightarrow x &> -8 : (-0,5) \\ \Leftrightarrow x &> 16. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 16$.

□

 **Ví dụ 5.** Giải các bất phương trình sau:

- a) $3x + 1 \leq 16$; **ĐS:** $x \leq 5$ b) $-2x - 2 > 8$; **ĐS:** $x < -5$
 c) $5x + 6(x + 1) > x - (x + 5)$; **ĐS:** $x > -1$ d) $5x(x + 1) \geq x(5x - 1)$. **ĐS:** $x \geq 0$

 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} 3x + 1 &\leq 16 \\ \Leftrightarrow 3x &\leq 16 - 1 \\ \Leftrightarrow 3x &\leq 15 \\ \Leftrightarrow x &\leq 5. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 5$

b) Ta có

$$\begin{aligned} -2x - 2 &> 8 \\ \Leftrightarrow -2x &> 8 + 2 \\ \Leftrightarrow -2x &> 10 \\ \Leftrightarrow x &< -5. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -5$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} 5x + 6(x + 1) &> x - (x + 5) \\ \Leftrightarrow 5x + 6x + 6 &> x - x - 5 \\ \Leftrightarrow 5x + 6x - x + x &> -5 - 6 \\ \Leftrightarrow 11x &> -11 \\ \Leftrightarrow x &> -1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -1$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} 5x(x + 1) &\geq x(5x - 1) \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 5x &\geq 5x^2 - x \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 5x^2 + x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 6x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\geq 0. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 0$.

□

Ví dụ 6. Giải các bất phương trình sau:

- a) $2x + 1 \geq 5$; **ĐS:** $x \geq 2$ b) $-2x - 8 > 8$; **ĐS:** $x < -8$
 c) $3x - (x - 4) \leq x - 8$; **ĐS:** $x \leq -12$ d) $x(x + 8) < x(x + 3) + 5$. **ĐS:** $x < 1$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} 2x + 1 &\geq 5 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 5 - 1 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} -2x - 8 &> -8 \\ \Leftrightarrow -2x &> -8 + 8 \\ \Leftrightarrow -2x &> 16 \\ \Leftrightarrow x &< -8. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 0$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} 3x - (x - 4) &\leq x - 8 \\ \Leftrightarrow 3x - x + 4 &\leq x - 8 \\ \Leftrightarrow 3x - x - x &\leq -8 - 4 \\ \Leftrightarrow x &\leq -12. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -12$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} x(x + 8) &< x(x + 3) + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x &< x^2 + 3x + 5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 8x - x^2 - 3x &< 5 \\ \Leftrightarrow 5x &< 5 \\ \Leftrightarrow x &< 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

Dạng 101. Biểu diễn tập nghiệm trên trục số

- Bước 1.* Giải bất phương trình bằng quy tắc chuyển vế hoặc quy tắc nhân.
- Bước 2.* Biểu diễn nghiệm của bất phương trình trên trục số.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

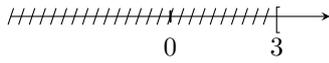
- a) $3x - 8 \geq 1$; **ĐS:** ≥ 3 b) $2x - 8 > x - 1$; **ĐS:** $x > 7$
 c) $4x + 2 - 5x \leq 0$; **ĐS:** $x \geq 2$ d) $-x + 3 > 9 + 2x$. **ĐS:** $x < -2$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} 3x - 8 &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 3x &\geq 1 + 8 \\ \Leftrightarrow 3x &\geq 9 \\ \Leftrightarrow x &\geq 3. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 3$.



b) Ta có

$$\begin{aligned} 2x - 8 &> x - 1 \\ \Leftrightarrow 2x - x &> -1 + 8 \\ \Leftrightarrow x &> 7. \end{aligned}$$

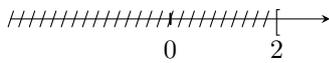
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 7$.



c) Ta có

$$\begin{aligned} 4x + 2 - 5x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 4x - 5x &\leq 0 - 2 \\ \Leftrightarrow -x &\leq -2 \\ \Leftrightarrow x &\geq 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 2$.



d) Ta có

$$\begin{aligned} -x + 3 &> 9 + 2x \\ \Leftrightarrow -x - 2x &> 9 - 3 \\ \Leftrightarrow -3x &> 6 \\ \Leftrightarrow x &< -2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -2$.



□

Ví dụ 2. Giải bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $x + 5 \geq 4$; **ĐS:** $x \geq -1$ b) $3x - 8 > 2x$; **ĐS:** $x > 8$

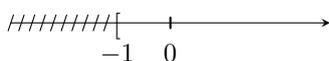
c) $2x + 5 \leq 3x + 4$; **ĐS:** $x \geq 1$ d) $-x + 5 < 3x + 13$. **ĐS:** $x \geq -2$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} x + 5 &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 4 - 5 \\ \Leftrightarrow x &\geq -1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -1$.



b)

$$\begin{aligned} 3x - 8 &> 2x \\ \Leftrightarrow 3x - 2x &> 8 \\ \Leftrightarrow x &> 8. \end{aligned}$$

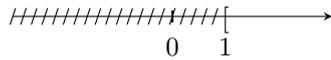
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 8$.



c)

$$\begin{aligned} 2x + 5 &\leq 3x + 4 \\ \Leftrightarrow 2x - 3x &\leq 4 - 5 \\ \Leftrightarrow -x &\leq -1 \\ \Leftrightarrow x &\geq 1. \end{aligned}$$

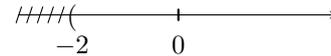
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 1$.



d)

$$\begin{aligned} -x + 5 &< 3x + 13 \\ \Leftrightarrow -x - 3x &< 13 - 5 \\ \Leftrightarrow -4x &< 8 \\ \Leftrightarrow x &> -2. \end{aligned}$$

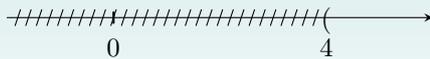
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -2$.



□

Ví dụ 3. Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của phương trình nào? Hãy kể tên ít nhất một bất phương trình có cùng tập nghiệm.

a)



b)



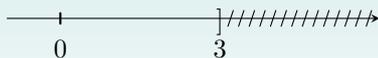
Lời giải.

- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x > 4$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $2x > 8$.
- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x < -1$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $-8x > 8$.

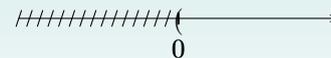
□

Ví dụ 4. Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của phương trình nào? Hãy kể tên ít nhất một bất phương trình có cùng tập nghiệm.

a)



b)



Lời giải.

- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x \leq 3$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $x - 1 \leq 2$.
- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình: $x > 0$. Bất phương trình có cùng tập nghiệm: $x + 9 > 9$.

□

Dạng 102. Bất phương trình tương đương

Để giải thích sự tương đương giữa hai bất phương trình, ta thường dùng hai cách sau.

- ☑ *Cách 1:* Giải cả hai bất phương trình rồi kiểm tra hai tập nghiệm có giống nhau hay không.
- ☑ *Cách 2:* Bằng hai quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân, ta biến đổi từ bất phương trình này tương đương với bất phương trình kia.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải thích sự tương đương:

a) $x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x - 2 \leq -7$; b) $-2x > 6 \Leftrightarrow 3x < -9$;

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} x + 8 &\leq 3 \text{ (cộng } -10 \text{ cho hai vế)} \\ \Leftrightarrow x + 8 - 10 &\leq 3 - 10 \\ \Leftrightarrow x - 2 &\leq -7 \end{aligned}$$

Vậy $x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x - 2 \leq -7$;

2.

$$\begin{aligned} -2x &> 6 \\ \Leftrightarrow x &< 6 : (-2) \\ \Leftrightarrow x &< -3 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -3$ (1)

$$\begin{aligned} 3x &< -9 \\ \Leftrightarrow x &< -9 : 3 \\ \Leftrightarrow x &< -3 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $-2x > 6 \Leftrightarrow 3x < -9$. □

Ví dụ 2. Giải thích sự tương đương:

a) $x + 4 > 10 \Leftrightarrow x - 2 > 4$; b) $-2x \leq 8 \Leftrightarrow 3x \geq -12$;

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} x + 4 &> 10 \\ \Leftrightarrow x + 4 - 6 &> 10 - 6 \\ \Leftrightarrow x - 2 &> 4 \end{aligned}$$

Vậy $x + 4 > 10 \Leftrightarrow x - 2 > 4$.

b)

$$\begin{aligned} -2x &\leq 8 \\ \Leftrightarrow -2x \cdot \frac{-3}{2} &\geq 8 \cdot \frac{-3}{2} \\ \Leftrightarrow 3x &\geq -12 \end{aligned}$$

Vậy $-2x \leq 8 \Leftrightarrow 3x \geq -12$.

Dạng 103. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Để giải bài toán cách lập phương trình ta cần thực hiện các bước sau:

- ☑ *Bước 1:* Đặt ẩn và tìm điều kiện cho ẩn;
- ☑ *Bước 2:* Biểu diễn những đại lượng chưa biết theo ẩn;
- ☑ *Bước 3:* Lập phương trình theo yêu cầu của đề bài;
- ☑ *Bước 4:* Giải bất phương trình và kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Quãng đường A đến B dài không quá 120 km. Một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h. Đi được nửa giờ thì gặp đường xấu nên xe máy chỉ đi với vận tốc 40 km/h. Hỏi thời gian xe máy đi trên đoạn đường xấu là bao nhiêu? **ĐS:** không quá 2,25 (h)

Lời giải.

Gọi x (h) là thời gian xe máy đi trên đoạn đường xấu. Điều kiện: $x > 0$.
 Quãng đường xe máy đi được ở đoạn đường xấu là $40x$ (km).
 Theo đề quãng đường A đến B dài 120 km nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 60 \cdot 0,5 + 40x &\leq 120 \\ \Leftrightarrow 40x &\leq 120 - 30 \\ \Leftrightarrow x &\leq 90 : 40 \\ \Leftrightarrow x &\leq 2,25(\text{TMDK}) \end{aligned}$$

Vậy thời gian xe máy đi trên đoạn đường xấu không quá 2,25 (h).

Ví dụ 2. Bạn Mai có không quá 80000 đồng gồm 30 tờ tiền với mệnh giá lần lượt là: 2000 đồng và 5000 đồng. Hỏi bạn Mai có bao nhiêu tờ loại 5000 đồng? **ĐS:** Không quá 6 tờ

Lời giải.

Gọi x (tờ) là số tờ tiền loại 5000 đồng. Điều kiện: $0 < x < 30, x \in \mathbb{Z}$.
 Số tờ tiền loại 2000 đồng là $30 - x$ (tờ).
 Tổng giá trị của tờ 5000 là $5000x$ (đồng).
 Tổng giá trị của tờ 2000 là $(30 - x)2000$ (đồng).
 Theo đề bạn Mai có 80000 đồng nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 5000x + (30 - x)2000 &\leq 80000 \\ \Leftrightarrow 5000x + 60000 - 2000x &\leq 80000 \\ \Leftrightarrow 3000x &\leq 20000 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{20}{3} \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

Vậy bạn Mai có không quá 6 tờ tiền loại 5000 đồng.

Bài 3. Giải các bất phương trình sau theo quy tắc nhân:

- a) $\frac{2}{3}x \leq 5$; **ĐS:** $x \leq \frac{15}{2}$ b) $2x > -4$; **ĐS:** $x > -2$
 c) $-3x > 6$; **ĐS:** $x < -2$ d) $-\frac{3}{8}x \geq -1$. **ĐS:** $x \leq \frac{8}{3}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x &\leq 5 \\ \Leftrightarrow x &\leq 5 : \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{15}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} 2x &> -4 \\ \Leftrightarrow x &> -4 : 2 \\ \Leftrightarrow x &> -2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -2$.

c)

$$\begin{aligned} -3x &> 6 \\ \Leftrightarrow x &< 6 : (-3) \\ \Leftrightarrow x &< -2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -2$.

d)

$$\begin{aligned} -\frac{3}{8}x &\geq -1 \\ \Leftrightarrow x &\leq -1 : \frac{-3}{8} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{8}{3}$.

□

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

- a) $4x - 6 \leq 12$; **ĐS:** $x \leq \frac{9}{2}$ b) $3x - 2 > x - 5$; **ĐS:** $x > \frac{-3}{2}$
 c) $\frac{x - 5}{2} > x + 3$; **ĐS:** $x < -11$ d) $2x(x + 1) \geq x(2x - 6) + 1$. **ĐS:** $x \geq \frac{1}{8}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} 4x - 6 &\leq 12 \\ \Leftrightarrow 4x &\leq 12 + 6 \\ \Leftrightarrow 4x &\leq 18 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq \frac{9}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} 3x - 2 &> x - 5 \\ \Leftrightarrow 3x - x &> -5 + 2 \\ \Leftrightarrow 2x &> -3 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{-3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-3}{2}$.

c)

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{2} &> x+3 \\ \Leftrightarrow x-5 &> 2x+6 \\ \Leftrightarrow x-2x &> 6+5 \\ \Leftrightarrow x &< -11. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -11$.

d)

$$\begin{aligned} 2x(x+1) &\geq x(2x-6)+1 \\ \Leftrightarrow 2x^2+2x &\geq 2x^2-6x+1 \\ \Leftrightarrow 8x &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{1}{8}$.

□

Bài 5. Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $4x + 1 \geq 5$; **ĐS:** $x \geq 1$ b) $3 + 2x > x - 10$; **ĐS:** $x > -13$

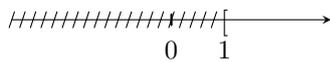
c) $3 - 2x \geq x + 12$; **ĐS:** $x \leq -3$ d) $-x + 8 < 9 + 2x$. **ĐS:** $x > \frac{-1}{3}$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} 4x + 1 &\geq 5 \\ \Leftrightarrow 4x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 1. \end{aligned}$$

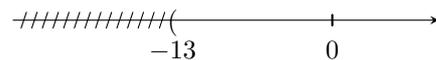
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 1$.



b)

$$\begin{aligned} 3 + 2x &> x - 10 \\ \Leftrightarrow 2x - x &> -10 - 3 \\ \Leftrightarrow x &> -13. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -13$.



c)

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\geq x + 12 \\ \Leftrightarrow -2x - x &\geq 12 - 3 \\ \Leftrightarrow -3x &\geq 9 \\ \Leftrightarrow x &\leq -3. \end{aligned}$$

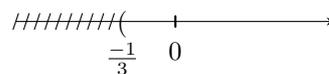
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq -3$.



d)

$$\begin{aligned} -x + 8 &< 9 + 2x \\ \Leftrightarrow -x - 2x &< 9 - 8 \\ \Leftrightarrow -3x &< 1 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-1}{3}$.



□

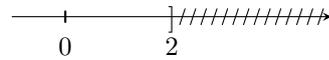
Bài 6. Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của phương trình nào? Hãy kể tên ba bất phương trình có cùng tập nghiệm.

a)



ĐS: $x > 3$

b)



ĐS: $x \leq 2$

Lời giải.

- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x > 3$. Ba bất phương trình có cùng tập nghiệm là $2x > 6$, $x + 7 > 10$, $2(x + 1) > 8$.
- Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x \leq 2$. Ba bất phương trình có cùng tập nghiệm là $2x \leq 4$, $x + 7 \leq 9$, $-21x \geq -42$.

□

Bài 7. Giải thích sự tương đương:

a) $x - 6 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 8$;

b) $3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -3$;

Lời giải.

- Ta có: $x - 6 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 + 6 \Leftrightarrow x \leq 8$.
Vậy $x - 6 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 8$.
- Ta có: $3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -9 : 3 \Leftrightarrow x \leq -3$.
Vậy $3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -3$.

□

Bài 8. Bạn Mai có không quá 100000 đồng gồm 15 tờ tiền với mệnh giá lần lượt là: 10000 đồng và 5000 đồng. Hỏi bạn Mai có bao nhiêu tờ 10000 đồng.

Lời giải.

Gọi x (tờ) là số tờ tiền loại 10000 đồng. Điều kiện: $0 < x < 15$, $x \in \mathbb{Z}$.

Số tờ tiền loại 5000 đồng là $15 - x$ (tờ).

Tổng giá trị của tờ 10000 là $10000x$ (đồng).

Tổng giá trị của tờ 5000 là $(15 - x)5000$ (đồng).

Theo đề bạn Mai có 100000 đồng nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 10000x + (15 - x)5000 &\leq 100000 \\ \Leftrightarrow 10000x + 75000 - 5000x &\leq 100000 \\ \Leftrightarrow 5000x &\leq 25000 \\ \Leftrightarrow x &\leq 5 \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

Vậy bạn Mai có không quá 5 tờ tiền loại 10000 đồng.

□

§5 Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số

Định nghĩa 5. Giá trị tuyệt đối của số a , ký hiệu là $|a|$, được định nghĩa khoảng cách từ số a đến số 0 trên trục số.

$$\text{Như vậy: } |a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

1.2 Tính chất

Ta luôn có:

$$|a| \geq 0; \quad |-a| = |a|; \quad |a|^2 = a^2.$$

1.3 Cách giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối cơ bản

Giải phương trình dạng $|a| = b$.

Cách giải: Ta có thể làm theo hai cách sau:

Cách 1. Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Với $a \geq 0$, phương trình có dạng $a = b$;

Trường hợp 2. Với $a < 0$, phương trình có dạng $-a = b$.

Cách 2. Ta có: $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \end{cases}$

2 Các dạng toán

Dạng 104. Rút gọn biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1.* Dựa vào định nghĩa và tính chất để bỏ dấu giá trị tuyệt đối;
- Bước 2.* Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn biểu thức.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 **Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = |x - 3| + 2x - 5$ khi $x \geq 3$; **ĐS:** $3x - 8$ b) $B = |-3x| + 8x - 4$ khi $x \leq 0$; **ĐS:** $5x - 4$
 c) $C = |x - 4| + 8x$ khi $x \geq 2$; **ĐS:** $x^2, x^2 + 2x - 8$ d) $D = |2x - 4| + 3x + 2$. **ĐS:** $5x - 2, x + 6$

📝 **Lời giải.**

- a) Khi $x \geq 3 \Rightarrow x - 3 \geq 0$.
 Do đó: $A = x - 3 + 2x - 5 = 3x - 8$.
 b) Khi $x \leq 0 \Rightarrow -3x \geq 0$.
 Do đó: $B = -3x + 8x - 4 = 5x - 4$.
 c) Khi $x \geq 2 \Rightarrow x - 4 \geq -2$.
 TH 1. Nếu $2 \leq x < 4$ thì $x - 4 < 0$.
 Do đó: $C = -(x - 4) + x^2 + x - 4 = x^2 + 2x - 2$.
 TH 2. $x \geq 4 \Rightarrow x - 4 \geq 0$.
 Do đó: $C = x - 4 + x^2 + x - 4 = x^2$.
 d) TH 1. Khi $2x - 4 \geq 0$.
 Suy ra: $D = 2x - 4 + 3x + 2 = 5x - 2$.
 TH 2. Khi $2x - 4 < 0$.
 Suy ra: $D = -(2x - 4) + 3x + 2 = -2x + 4 + 3x + 2 = x + 6$.

□

📖 **Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = 6 - 4x + |x - 5|$ khi $x < 5$; **ĐS:** $-5x + 11$ b) $B = 3x - 4 + |-2x|$ khi $x > 0$; **ĐS:** $5x - 4$
 c) $C = |x - 2| + 2x^2 - x - 2$ khi $x \leq 1$; **ĐS:** $2x^2 - 2x$ d) $D = |2x - 6| + 4x - 3$. **ĐS:** $6x - 9, 2x + 3$

📝 **Lời giải.**

- a) Khi $x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0$.
 Do đó: $A = 6 - 4x - x + 5 = -5x + 11$.
 b) Khi $x > 0 \Rightarrow -2x < 0$.
 Do đó: $B = 3x - 4 + 2x = 5x - 4$.
 c) Khi $x \leq 1 \Rightarrow x - 2 \leq -1$.
 Do đó: $C = -x + 2 + 2x^2 - x - 2 = 2x^2 - 2x$.
 d) TH 1. Khi $2x - 6 \geq 0$.
 Suy ra: $D = 2x - 6 + 4x - 3 = 6x - 9$.
 TH 2. Khi $2x - 6 < 0$.
 Suy ra: $D = -2x + 6 + 4x - 3 = 2x + 3$.

□

👉 **Dạng 105. Giải các phương trình chứa giá trị tuyệt đối**

Thực hiện theo các bước sau:

- ☑ **Bước 1.** Sử dụng các công thức linh hoạt theo từng cách viết để chuyển về phương trình bậc nhất;
- ☑ **Bước 2.** Đối chiếu điều kiện để đưa ra kết luận tập nghiệm.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

- a) $|2x| = x + 3$; **ĐS:** $S = \{3; -1\}$ b) $|-3x| = 4x - 5$; **ĐS:** $S = \{5\}$
 c) $|0,5x| = 3x - 10$; **ĐS:** $S = \{4\}$ d) $|-2,5x| + 8 = 1,5x$. **ĐS:** $S = \emptyset$

Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|2x| = 2x$ khi đó phương trình trở thành b) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x &= x + 3 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x &= 4x - 5 \\ \Leftrightarrow -7x &= -5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|2x| = -2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -2x &= x + 3 \\ \Leftrightarrow -3x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x &= 4x - 5 \\ \Leftrightarrow -x &= -5 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{3; -1\}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{5\}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|0,5x| = 0,5x$ khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-2,5x| = -2,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 0,5x &= 3x - 10 \\ \Leftrightarrow -2,5x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2,5x + 8 &= 1,5x \\ \Leftrightarrow -2,5x - 1,5x &= -8 \\ \Leftrightarrow -4x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|0,5x| = -0,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -0,5x &= 3x - 10 \\ \Leftrightarrow -3,5x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{20}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-2,5x| = 2,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2,5x + 8 &= 1,5x \\ \Leftrightarrow 2,5x - 1,5x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= -8 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$. □

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

- a) $|3x| = x + 6$; **ĐS:** $S = \left\{3; \frac{-3}{2}\right\}$ b) $|-3x| = 3x + 6$; **ĐS:** $S = \{-1\}$
 c) $|0,5x| = 2x - 4$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$ d) $|-3x| + 5 = 2x$. **ĐS:** \emptyset

Lời giải.

a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x &= x + 6 \\ \Leftrightarrow 2x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x &= x + 6 \\ \Leftrightarrow -4x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3}{2} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{3; \frac{-3}{2}\right\}$.

b) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x &= 3x + 6 \\ \Leftrightarrow -6x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x &= 3x + 6 \\ \Leftrightarrow 0x &= 6 \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|0,5x| = 0,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 0,5x &= 2x - 4 \\ \Leftrightarrow -1,5x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|0,5x| = -0,5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -0,5x &= 2x - 4 \\ \Leftrightarrow -3,5x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

d) TH 1. Nếu $x \leq 0$ thì $|-3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x + 8 &= 2x \\ \Leftrightarrow -5x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 0$ thì $|-3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 2x \\ \Leftrightarrow x &= -5 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

□

 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

a) $|8 + x| = 2x$; **ĐS:** $S = \{8\}$ b) $|x - 2| - 3x - 2 = 0$; **ĐS:** $S = \{0\}$

c) $|x + 4| = 2x + 2$; **ĐS:** $S = \{2\}$ d) $|7 - x| = 5x + 3$. **ĐS:** $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

 **Lời giải.**

- a) TH 1. Nếu $x \geq -8$ thì $|8 + x| = 8 + x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 8 + x &= 2x \\ \Leftrightarrow x - 2x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= 8 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -8$ thì $|8 + x| = -8 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -8 - x &= 2x \\ \Leftrightarrow 3x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{8\}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq 2$ thì $|x - 2| = x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 2 - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 2$ thì $|x - 2| = 2 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - x - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq -4$ thì $|x + 4| = x + 4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 4 &= 2x + 2 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= 4 - 2 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -4$ thì $|x + 4| = -x - 4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 4 &= 2x + 2 \\ \Leftrightarrow 3x &= -6 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

- d) TH 1. Nếu $x \leq 7$ thì $|7 - x|7 - x =$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 7 - x &= 5x + 3 \\ \Leftrightarrow 6x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 7$ thì $|7 - x| = x - 7$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 7 &= 5x + 3 \\ \Leftrightarrow 4x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-5}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

□

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $|x - 6| = 2x + 1;$ **ĐS:** $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ b) $|x + 3| = 2x - 3;$ **ĐS:** $S = \{6\}$

c) $|x + 3| = 2x - 1;$ **ĐS:** $S = \{4\}$ d) $|x - 4| - 3x = 6.$ **ĐS:** $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq 6$ thì $|x - 6| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 6 &= 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= -6 - 1 \\ \Leftrightarrow x &= -7 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 6$ thì $|x - 6| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x &= 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 3x &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$.

b) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= 3 + 3 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 3 &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{6\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2x - 1 \\ \Leftrightarrow 2x - x &= 3 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 3 &= 2x - 1 \\ \Leftrightarrow 3x &= -2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

d) TH 1. Nếu $x \geq 4$ thì $|x - 4| = x - 4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 4 - 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow -2x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= -5 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 4$ thì $|x - 4| = 4 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4 - x - 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow -4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{2} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$.

□

 **Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau:

a) $|5x| - x - 2 = 0$; **ĐS:** $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-1}{3} \right\}$ b) $|7x - 3| - x + 6 = x$; **ĐS:** $S = \emptyset$

c) $|3 - x| + x^2 - x(x + 4) = 0$; **ĐS:** $S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ d) $(x - 1)^2 + |x + 2| - x^2 - 13 = 0$. **ĐS:** $S = \left\{ \frac{-14}{3} \right\}$

 **Lời giải.**

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|5x| = 5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|5x| = -5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -5x - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -6x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-1}{3} \right\}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{7}$ thì $|7x - 3| = 7x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 7x - 3 - x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{7}$ thì $|7x - 3| = 3 - 7x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - 7x - x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow -8x &= -9 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{8} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

- c) TH 1. Nếu $x \leq 3$ thì $|3 - x| = 3 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - x + x^2 - x(x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 - x + x^2 - x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{5} \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 3$ thì $|3 - x| = x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 3 + x^2 - x(x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 3 + x^2 - x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$.

- d) TH 1. Nếu $x \geq -2$ thì $|x + 2| = x + 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + x + 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x + 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= -10 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -2$ thì $|x + 2| = -x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - x - 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x - 2 - x^2 - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= 14 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-14}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-14}{3} \right\}$.

□

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

a) $|3x| - x - 4 = 0$; **ĐS:** $S = \{2; -1\}$ b) $|4x - 7| - 2x + 9 = x$; **ĐS:** \emptyset

c) $|2 - x| + 2x^2 - 2x(x + 1) = 0$; **ĐS:** d) $(x - 2)^2 + |x + 3| - x^2 - 10 = 0$. **ĐS:**

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

$$S = \{-1\}$$

 **Lời giải.**

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|3x| = 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|3x| = -3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x - x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{2; -1\}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{7}{4}$ thì $|4x - 7| = 4x - 7$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4x - 7 - 2x + 9 &= x \\ \Leftrightarrow x &= -9 + 7 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{7}{4}$ thì $|4x - 7| = 7 - 4x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 7 - 4x - 2x + 9 &= x \\ \Leftrightarrow -7x &= -9 - 7 \\ \Leftrightarrow -7x &= -16 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{16}{7} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

- c) TH 1. Nếu $x \leq 2$ thì $|2 - x| = 2 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - x + 2x^2 - 2x(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 - x + 2x^2 - 2x^2 - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= -2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 2$ thì $|2 - x| = x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 2 + 2x^2 - 2x(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2 + 2x^2 - 2x^2 - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow -x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

- d) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + x + 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x + 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 - x - 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x - 3 - x^2 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow -5x &= 9 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-9}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$.

 **Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau:

- a) $|2x - 3| = 2x - 3$; **ĐS:** $x \geq \frac{3}{2}$ b) $|3x - 1| = 1 - 3x$; **ĐS:** $x \leq \frac{1}{3}$
 c) $|2x - 5| + (x - 1)^2 = x^2 - 4$; **ĐS:** $x \geq \frac{5}{2}$ d) $|2 - x| + x^2 = (x - 1)(x + 2)$. **ĐS:** $x \geq 2$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{2}$ thì $|2x - 3| = 2x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 2x - 2x &= 3 - 3 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $|2x - 3| = 3 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - 2x &= 2x - 3 \\ \Leftrightarrow -4x &= -6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq \frac{3}{2}$

b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{3}$ thì $|3x - 1| = 3x - 1$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 1 - 3x \\ \Leftrightarrow 3x + 3x &= 1 + 1 \\ \Leftrightarrow 6x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{3}$ thì $|3x - 1| = 1 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 3x &= 1 - 3x \\ \Leftrightarrow -3x + 3x &= 1 - 1 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \leq \frac{1}{3}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq \frac{5}{2}$ thì $|2x - 5| = 2x - 5$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 5 + (x - 1)^2 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 2x - 5 + x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{5}{2}$ thì $|2x - 5| = 5 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5 - 2x + (x - 1)^2 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 5 - 2x + x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow -4x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq \frac{5}{2}$

d) TH 1. Nếu $x \leq 2$ thì $|2 - x| = 2 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - x + x^2 &= (x - 1)(x + 2) \\ \Leftrightarrow 2 - x + x^2 &= x^2 + 2x - x - 2 \\ \Leftrightarrow -2x &= -4 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 2$ thì $|2 - x| = x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 2 + x^2 &= (x - 1)(x + 2) \\ \Leftrightarrow x - 2 + x^2 &= x^2 + 2x - x - 2 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq 2$.

□

 **Ví dụ 8.** Giải phương trình sau:

- a) $|3x - 5| = 3x - 5$; **ĐS:** $x \geq \frac{5}{3}$ b) $|5x - 2| = 2 - 5x$; **ĐS:** $x \leq \frac{2}{5}$
- c) $|4x - 3| + (x - 2)^2 = x^2 - 7$; **ĐS:** $x < \frac{3}{4}$ d) $|6 - x| + x^2 = (x - 2)(x + 3)$. **ĐS:** $x \geq 6$

 Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = 3x - 5$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 3x - 5 \\ \Leftrightarrow 3x - 3x &= 5 - 5 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{5}{3}$ thì $|3x - 5| = 5 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 3x - 5 \\ \Leftrightarrow -6x &= -10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq \frac{5}{3}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{2}{5}$ thì $|5x - 2| = 5x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 2 - 5x \\ \Leftrightarrow 5x + 5x &= 2 + 2 \\ \Leftrightarrow 10x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{5} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{2}{5}$ thì $|5x - 2| = 2 - 5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - 5x &= 2 - 5x \\ \Leftrightarrow -5x + 5x &= 2 - 2 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \leq \frac{2}{5}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{4}$ thì $|4x - 3| = 4x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4x - 3 + (x - 2)^2 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow 4x - 3 + x^2 - 4x + 4 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow 0x &= -6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3}{4} \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{4}$ thì $|4x - 3| = 3 - 4x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - 4x + (x - 2)^2 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow 3 - 4x + x^2 - 4x + 4 &= x^2 - 7 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x < \frac{3}{4}$.

- d) TH 1. Nếu $x \leq 6$ thì $|6 - x| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x + x^2 &= (x - 2)(x + 3) \\ \Leftrightarrow 6 - x + x^2 &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ \Leftrightarrow -2x &= -12 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > 6$ thì $|6 - x| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 6 + x^2 &= (x - 2)(x + 3) \\ \Leftrightarrow x - 6 + x^2 &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \geq 6$.

 Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

- a) $|2x - 1| = x^2 - 3x - 1$; **ĐS:** $S = \{5; -1\}$ b) $|2x - 1| = 4x^2 - 4x - 1$; **ĐS:**
 $S = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$

✍️ Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 2x - 1$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x^2 - 3x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(KTMĐK)} \\ x = 5 & \text{(TMDK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= x^2 - 3x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{(TMDK)} \\ x = 2 & \text{(KTMĐK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \{5; -1\}$

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 2x - 1$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 4x^2 - 4x - 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x(2x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(KTMĐK)} \\ x = \frac{3}{2} & \text{(TMDK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 4x^2 - 4x - 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{(KTMĐK)} \\ x = -\frac{1}{2} & \text{(TMDK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \left\{ \frac{-3}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$

□

📖 Ví dụ 10. Giải các phương trình sau:

- a) $|x - 2| = x^2 - 4x - 2$; **ĐS:** $S = \{5; -1\}$ b) $|x - 3| = x^2 - 6x + 7$; **ĐS:** $S = \{5; 1\}$

✍️ Lời giải.

a) TH 1. Nếu $x \geq 2$ thì $|x - 2| = x - 2$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 2 &= x^2 - 4x - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(KTMDK)} \\ x = 5 & \text{(TMĐK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 2$ thì $|x - 2| = 2 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 - x &= x^2 - 4x - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{(TMĐK)} \\ x = 4 & \text{(KTMDK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \{5; -1\}$

b) TH 1. Nếu $x \geq 3$ thì $|x - 3| = x - 3$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 3 &= x^2 - 6x + 7 \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{(KTMDK)} \\ x = 5 & \text{(TMĐK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 3$ thì $|x - 3| = 3 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3 - x &= x^2 - 6x + 7 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{(TMĐK)} \\ x = 4 & \text{(KTMDK)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $S = \{5; 1\}$

□



Bài tập về nhà

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = |x - 9| + x + 7$ khi $x \geq 9$; **ĐS:** $2x - 2$
2. $B = |-3x| - 8x^2 + 8x(x - 1) - 2$ khi $x \geq 0$; **ĐS:** $-5x - 2$
3. $C = |-3x + 5| - x^2 + 5 - 3x$ khi $x > 1$. **ĐS:** $-x^2, -x^2 - 6x + 10$

Lời giải.

1. Khi $x \geq 9 \Rightarrow x - 9 \geq 0$
Do đó: $A = x - 9 + x + 7 = 2x - 2$.
2. Khi $x \geq 0 \Rightarrow -3x \leq 0$.
TH 1. Khi $x > 0$ thì $B = 3x - 8x^2 + 8x(x - 1) - 2 = -5x - 2$.
TH 2. Khi $x = 0$ thì $B = -2$.
3. Khi $x > 1 \Rightarrow -3x + 5 < 2$.
TH 1. Khi $-3x + 5 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$ thì $C = 3x - 5 - x^2 + 5 - 3x = -x^2$.
TH 2. Khi $0 \leq -3x + 5 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \geq x \geq 1$ thì $C = -3x + 5 - x^2 + 5 - 3x = -x^2 - 6x + 10$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $|3x + 2| = 8$; **ĐS:** $S = \left\{2; \frac{-10}{3}\right\}$ b) $3x + 2 - |x - 1| = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{-1}{4}\right\}$

c) $|x + 3| - 2x = 5 - |x + 3|$; **ĐS:** d) $\frac{|4 - 5x| + 4x}{5} = 2$. **ĐS:** $S = \left\{-6; \frac{14}{9}\right\}$
 $S = \left\{\frac{-11}{4}\right\}$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{-2}{3}$ thì $|3x + 2| = 3x + 2$, khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 8 \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{-2}{3}$ thì $|3x + 2| = -3x - 2$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -3x - 2 &= 8 \\ \Leftrightarrow -3x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-10}{3} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{2; \frac{-10}{3}\right\}$.

b) TH 1. Nếu $x \geq 1$ thì $|x - 1| = x - 1$, khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 3x + 2 - (x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-3}{2} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 1$ thì $|x - 1| = 1 - x$, khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 3x + 2 + x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{4} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{-1}{4}\right\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq -3$ thì $|x + 3| = x + 3$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 3 - 2x &= 5 - (x + 3) \\ \Leftrightarrow 0x &= -1 \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -3$ thì $|x + 3| = -x - 3$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 3 - 2x &= 5 + x + 3 \\ \Leftrightarrow -4x &= 11 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-11}{4} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{-11}{4}\right\}$.

d) TH 1. Nếu $x \leq \frac{4}{5}$ thì $|4 - 5x| = 4 - 5x$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4 - 5x + 4x &= 10 \\ \Leftrightarrow -x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -6 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > \frac{4}{5}$ thì $|4 - 5x| = 5x - 4$, khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - 4 + 4x &= 10 \\ \Leftrightarrow 9x &= 14 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{14}{9} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-6; \frac{14}{9}\right\}$.

□

 **Bài 3.** Giải các phương trình sau:

Giáo viên:

- a) $|2x - 1| - 3x = 1 - 5x$; **ĐS:** $x \leq \frac{1}{2}$ b) $|x - 6| = -5x + 9$; **ĐS:** $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$
 c) $|5x - 4| - 10x - 2 = -6 - 5x$; **ĐS:** $x \geq \frac{4}{5}$ d) $|x - 6| - x(x + 1) = x - 6$. **ĐS:**
 $S = \{-4; 3\}$

 **Lời giải.**

- a) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 2x - 1$, khi đó phương trình trở thành b) TH 1. Nếu $x \geq 6$ thì $|x - 6| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x - 1 - 3x &= 1 - 5x \\ \Leftrightarrow 4x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 6 &= -5x + 9 \\ \Leftrightarrow 6x &= 15 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{2} \quad (\text{KTMDK}) \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = 1 - 2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x - 3x &= 1 - 5x \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VNS}) \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 6$ thì $|x - 6| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x &= -5x + 9 \\ \Leftrightarrow 4x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{4} \quad (\text{KTMDK}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $x \leq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq \frac{4}{5}$ thì $|5x - 4| = 5x - 4$ khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \geq 6$ thì $|x - 6| = x - 6$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 5x - 4 - 10x - 2 &= -6 - 5x \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 6 - x(x + 1) &= x - 6 \\ \Leftrightarrow x(x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{KTMDK}) \\ x = -1 & (\text{KTMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{4}{5}$ thì $|5x - 4| = 4 - 5x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4 - 5x - 10x - 2 &= -6 - 5x \\ \Leftrightarrow -10x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 6$ thì $|x - 6| = 6 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6 - x - x(x + 1) &= x - 6 \\ \Leftrightarrow -x^2 - x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 & (\text{TMDK}) \\ x = 3 & (\text{TMDK}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $x \geq \frac{4}{5}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; 3\}$. □

 **Bài 4.** Giải hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

$$4|x - 2| = x^2 - 4x + 8$$

ĐS: $S = \{0; 4\}$. Lời giải.

Ta có: $4|x - 2| = x^2 - 4x + 8 \Leftrightarrow 4|x - 2| = (x - 2)^2 + 4$.

Đặt $t = |x + 2| > 0$ phương trình trở thành : $t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. (nhận)

Với $t = 2 \Rightarrow |x + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4; 0\}$. □

§6 Ôn tập chương IV

1 Tóm tắt lý thuyết

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ **Bài 1** đến **Bài 5**.

2 Bài tập

👉 **Bài 1.** Cho $a \leq b$. Chứng minh:

a) $-2a - 5 \geq -2b - 5$;

b) $3(-a - 2) \geq 3(-b - 2)$.

📝 **Lời giải.**

1. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -2a \geq -2b \Rightarrow -2a - 5 \geq -2b - 5$.

2. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b \Rightarrow -a - 2 \geq -b - 2 \Rightarrow 3(-a - 2) \geq 3(-b - 2)$.

□

👉 **Bài 2.** Cho $a \leq b$. Chứng minh:

a) $-3a - 2 \geq -3b - 2$;

b) $7(2 - a) \geq 7(2 - b)$.

📝 **Lời giải.**

1. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -3a \geq -3b \Rightarrow -3a - 2 \geq -3b - 2$.

2. Ta có: $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b \Rightarrow 2 - a \geq 2 - b \Rightarrow 7(2 - a) \geq 7(2 - b)$.

□

👉 **Bài 3.** Tìm m để $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình:

$$2x + x^2 + 3 + 2m \geq \frac{3}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

ĐS: $m \geq -4$

📝 **Lời giải.**

Thay $x = 2$ vào bất phương trình ta được:

$$4 + 2^2 + 3 + 2m \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 2m \geq -8$$

$$\Leftrightarrow m \geq -4.$$

Vậy $m \geq -4$ thì $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình trên.

□

Bài 4. Tìm m để $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình:

$$2\sqrt{2x + 10} - mx \leq 4(x - 2).$$

ĐS: $m \geq \frac{4}{3}$

Lời giải.

Thay $x = 3$ vào bất phương trình ta được:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{6 + 10} - 3m &\leq 4(3 - 2) \\ \Leftrightarrow -3m &\leq -4 \\ \Leftrightarrow m &\geq \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $m \geq \frac{4}{3}$ thì $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình trên. □

Bài 5. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

a) $\frac{1}{2}x - 5 > x + \frac{1}{2};$ **ĐS:** $x < -11$ b) $x(4x + 2) - 5 \leq (2x - 1)^2.$ **ĐS:** $x \leq 1$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - 5 &> x + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x - 10 &> 2x + 1 \\ \Leftrightarrow x - 2x &> 1 + 10 \\ \Leftrightarrow x &< -11. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -11$.



b)

$$\begin{aligned} x(4x + 2) - 5 &\leq (2x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 5 &\leq 4x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow 6x &\leq 6 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 1$.



□

Bài 6. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

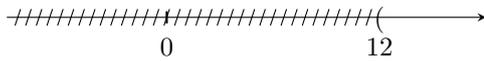
a) $\frac{3}{2}x - 3 > x + 3;$ **ĐS:** $x > 12$ b) $(x - 2)(x - 3) \geq 3 - x(2 - x).$ **ĐS:** $x \leq 1$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 3 &> x + 3 \\ \Leftrightarrow 3x - 6 &> 2x + 6 \\ \Leftrightarrow x &> 12. \end{aligned}$$

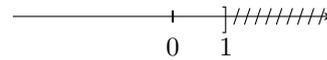
Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 12$.



b)

$$\begin{aligned} (x - 2)(x - 3) &\geq 3 - x(2 - x) \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &\geq 3 - 2x + x^2 \\ \Leftrightarrow -3x &\geq -3 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 1$.



□

📖 **Bài 7.** Giải các bất phương trình sau:

a) $2x + 2 \leq \frac{3x - 4}{5}$; **ĐS:** $x \leq -2$ b) $2 + \frac{1 + 2x}{3} > \frac{2x - 1}{6} - 3$. **ĐS:** $x > \frac{-33}{2}$

📝 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} 2x + 2 &\leq \frac{3x - 4}{5} \\ \Leftrightarrow 10x + 10 &\leq 3x - 4 \\ \Leftrightarrow 7x &\leq -14 \\ \Leftrightarrow x &\leq -2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 2$.

b)

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1 + 2x}{3} &> \frac{2x - 1}{6} - 3 \\ \Leftrightarrow 12 + 2 + 4x &> 2x - 1 - 18 \\ \Leftrightarrow 2x &> -33 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{-33}{2}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-33}{2}$.

□

📖 **Bài 8.** Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{3} + \frac{5x - 10}{7} \leq x$; **ĐS:** $x \geq \frac{-23}{6}$ b) $1 + \frac{1 + x}{2} > \frac{2x - 4}{8} - 2$. **ĐS:** $x > -16$

📝 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{5x - 10}{7} &\leq x \\ \Leftrightarrow 7 + 3(5x - 10) &\leq 21x \\ \Leftrightarrow -6x &\leq 23 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{-23}{6}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq \frac{-23}{6}$.

b)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1 + x}{2} &> \frac{2x - 4}{8} - 2 \\ \Leftrightarrow 8 + 4(1 + x) &> 2x - 4 - 16 \\ \Leftrightarrow 2x &> -32 \\ \Leftrightarrow x &> -16. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -16$.

□

Bài 9. Giải các phương trình sau:

- a) $|4x| = 5x - 3$; **ĐS:** $S = \{3\}$ b) $\frac{3}{2}x + 4 - \left|x - \frac{3}{2}\right| = 0$; **ĐS:** $S = \{-1\}$
 c) $|x + 18| + 2x - 20 = 3x - 2$; **ĐS:** $x \geq -18$ d) $2x^2 + 4 - |4 - 3x| = 2x(x - 3)$. **ĐS:** $S = \{0\}$

Lời giải.

- a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|4x| = 4x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4x &= 5x - 3 \\ \Leftrightarrow -x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|4x| = -4x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -4x &= 5x - 3 \\ \Leftrightarrow -9x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \quad (\text{TMDK}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \{3\}$.

- b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{3}{2}$ thì $\left|x - \frac{3}{2}\right| = x - \frac{3}{2}$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4 - x + \frac{3}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0,5x &= -5,5 \\ \Leftrightarrow x &= -11 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{3}{2}$ thì $\left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4 + x - \frac{3}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2,5x &= -2,5 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \{-1\}$.

- c) TH 1. Nếu $x \geq -18$ thì $|x + 18| = x + 18$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x + 18 + 2x - 20 &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < -18$ thì $|x + 18| = -x - 18$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -x - 18 + 2x - 20 &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow -2x &= 36 \\ \Leftrightarrow x &= -18 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \geq -18$.

- d) TH 1. Nếu $x \leq \frac{4}{3}$ thì $|4 - 3x| = 4 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 4 - 3x &= 6x + 4 \\ \Leftrightarrow 9x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > \frac{4}{3}$ thì $|4 - 3x| = 3x - 4$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 6x + 4 \\ \Leftrightarrow 3x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-8}{3} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0\}$.

□

Bài 10. Giải các phương trình sau:

- a) $|2x| = 3x - 7$; **ĐS:** $S = \{7\}$ b) $x + 4 - \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0$; **ĐS:** $S = \left\{\frac{-7}{4}\right\}$

c) $|x - 9| + 9x - 6 = 8x + 3$; **ĐS:** $x \leq -9$ d) $x^2 + 4 - |5 - 3x| = x(x - 4)$. **ĐS:**
 $S = \left\{ \frac{1}{7} \right\}$

 **Lời giải.**

a) TH 1. Nếu $x \geq 0$ thì $|2x| = 2x$ khi đó phương trình trở thành b) TH 1. Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $\left| x - \frac{1}{2} \right| = x - \frac{1}{2}$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2x &= 3x - 7 \\ \Leftrightarrow x &= 7 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 2x + 8 \\ \Leftrightarrow 0x &= 7 \quad (\text{VN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 0$ thì $|2x| = -2x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} -2x &= 3x - 7 \\ \Leftrightarrow -5x &= -7 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{5} \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $\left| x - \frac{1}{2} \right| = -x + \frac{1}{2}$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 2x + 8 \\ \Leftrightarrow -4x &= 7 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-7}{4} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{7\}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-7}{4} \right\}$.

c) TH 1. Nếu $x \geq 9$ thì $|x - 9| = x - 9$ khi đó phương trình trở thành d) TH 1. Nếu $x \leq \frac{5}{3}$ thì $|5 - 3x| = 5 - 3x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x - 9 + 9x - 6 &= 8x + 3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 18 \\ \Leftrightarrow x &= 9 \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 4x + 4 \\ \Leftrightarrow 7x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{7} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x < 9$ thì $|x - 9| = 9 - x$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 9 - x + 9x - 6 &= 8x + 3 \\ \Leftrightarrow 0x &= 0 \quad (\text{VSN}). \end{aligned}$$

TH 2. Nếu $x > \frac{5}{3}$ thì $|5 - 3x| = 3x - 5$ khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 4x + 4 \\ \Leftrightarrow x &= -9 \quad (\text{KTMDK}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $x \leq -9$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{7} \right\}$.

□

 **Bài 11.** Một người đi bộ một quãng đường dài 18 km trong khoảng thời gian không nhiều hơn là 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5 km/h, về sau đi với vận tốc 4 km/h. Xác định độ dài đoạn đường tối thiểu mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h? **ĐS:** 10 km

 **Lời giải.**

Gọi độ dài đoạn đường tối thiểu mà người đó đi được với vận tốc 5 km/h là x (km). Điều kiện: $0 < x < 18$.

Bài 15. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

a) $3x - 3 < -8 + 4x$; **ĐS:** $x > 5$ b) $3(x + 2)(x - 2) \leq 3x^2 + x$. **ĐS:** $x \geq -12$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} 3x - 3 &< -8 + 4x \\ \Leftrightarrow -x &< -5 \\ \Leftrightarrow x &> 5. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 5$.



b)

$$\begin{aligned} 3(x + 2)(x - 2) &\leq 3x^2 + x \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 12 &\leq 3x^2 + x \\ \Leftrightarrow x &\geq -12. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -12$.



□

Bài 16. Giải các bất phương trình sau:

1. $\frac{6x + 8}{4} + \frac{7 - 4x}{3} \geq 2$; **ĐS:** $x \geq -14$

2. $\frac{5x^2 - 3x}{5} + \frac{3x + 1}{4} < \frac{x(2x + 1)}{2} - \frac{3}{2}$. **ĐS:** $x > 5$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{6x + 8}{4} + \frac{7 - 4x}{3} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow 3(6x + 8) + 4(7 - 4x) &\geq 24 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq -28 \\ \Leftrightarrow x &\geq -14. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq -14$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 3x}{5} + \frac{3x + 1}{4} &< \frac{x(2x + 1)}{2} - \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 4(5x^2 - 3x) + 5(3x + 1) &< 10x(2x + 1) - 3 \\ \Leftrightarrow -7x &< -35 \\ \Leftrightarrow x &> 5. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 5$.

□

Bài 17. Giải bất phương trình sau:

$$\frac{x - 15}{2002} + \frac{x - 13}{2004} + \frac{x - 11}{2006} \leq 3.$$

ĐS: $x \leq 2017$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{x - 15}{2002} + \frac{x - 13}{2004} + \frac{x - 11}{2006} &\leq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{x - 15}{2002} - 1 + \frac{x - 13}{2004} - 1 + \frac{x - 11}{2006} - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{x-2017}{2002} + \frac{x-2017}{2004} + \frac{x-2017}{2006} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2017) \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 2017. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 2017$. □

Bài 18. Gia đình bạn Phương hưởng ứng phong trào toàn dân tiết kiệm điện nên đã đặt ra mục tiêu hàng tháng tiền điện nộp không quá 300000 ngàn đồng. Biết rằng 50 kWh đầu tiên giá tiền thanh toán mỗi kWh là 1484 đồng, từ 50 kWh tiếp theo thì cứ mỗi kWh giá tiền 1533 đồng. Từ 100 kWh tiếp theo giá mỗi kWh là 1786 đồng, và tiền thuế GTGT (giá trị gia tăng) là 10%. Hỏi nhà bạn Phương hàng tháng nên tiêu thụ nhiều nhất là bao nhiêu điện năng biết rằng số kWh điện năng tiêu thụ được làm tròn tới hàng đơn vị? **ĐS:** 168 kWh

 **Lời giải.**

Gọi x (kWh) là số điện năng tiêu thụ tối đa của nhà bạn Phương sử dụng hàng tháng.

Trường hợp 1: Mức tiêu thụ điện ở giá tiền thứ nhất. Điều kiện $0 < x \leq 50$.

Theo đề mục tiêu đặt ra hàng tháng tiền điện là 300000 ngàn đồng nên ta có phương trình

$$1484x \cdot 110\% \leq 300000 \Leftrightarrow x \leq 183 \text{ (KTMDK)}.$$

Trường hợp 2: Mức tiêu thụ điện ở giá tiền thứ hai. Điều kiện: $50 < x \leq 100$

Tương tự ta có phương trình

$$[1484 \cdot 50 + (x - 50)1533] \leq 300000 \Leftrightarrow x \leq 130 \text{ (KTĐK)}.$$

Trường hợp 3: Mức tiêu thụ điện ở giá tiền thứ ba. Điều kiện: $x > 100$

Tương tự ta có phương trình

$$[50 \cdot 1484 + 50 \cdot 1533 + (x - 100)1786] \cdot 1.1 \leq 300000 \Leftrightarrow x \leq 168 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy nhà bạn Phương hàng tháng nên tiêu thụ nhiều nhất là 168 kWh. □