Chương 2 Đa giác. Diện tích đa giác

§1 Đa giác. Đa giác đều

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Khái niệm về đa giác

Định nghĩa 16. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Định nghĩa 17. Đa giác có n đỉnh $(n \geq 3)$ được gọi là *hình n-giác* hay *hình n cạnh.*

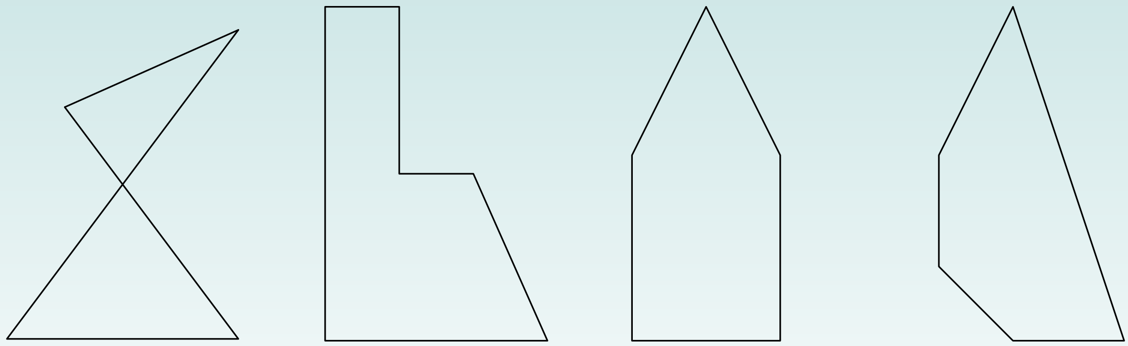
- Với $n = 3, 4, 5, 6, 8$ ta quen gọi là tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác.
- Với $n = 7, 8, 10, \ldots$ ta gọi là hình 7 cạnh, hình 9 cạnh, hình 10 cạnh, ...
- Tổng độ lớn của các góc trong đa giác là $\boxed{(p-2)\cdot 180^\circ}$ (với p số đỉnh của đa giác).

1.2 Đa giác đều

Định nghĩa 18. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Trong các hình dưới đây, hình nào là đa giác lồi? Vì sao?



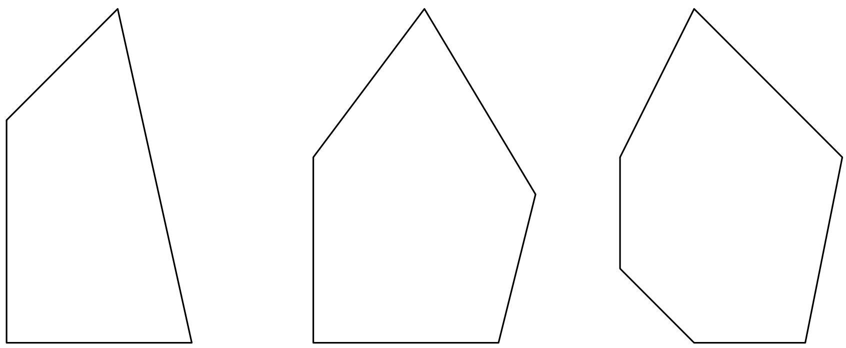
Hình a) Hình b) Hình c) Hình d)

Lời giải.

Theo định nghĩa thì hình c) và hình d) là các đa giác lồi. □

Ví dụ 2. Vẽ các hình tứ giác lồi, ngũ giác lồi, lục giác lồi.

Lời giải.

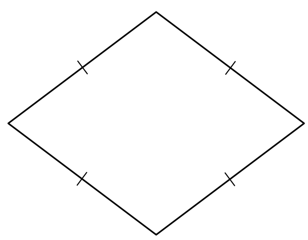


Tứ giác lồi Ngũ giác lồi Lục giác lồi

□

Ví dụ 3. Tìm một đa giác không đều có tất cả các cạnh bằng nhau.

Lời giải.

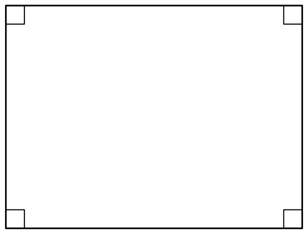


Hình thoi

□

Ví dụ 4. Tìm một đa giác không đều có tất cả các góc bằng nhau.

Lời giải.



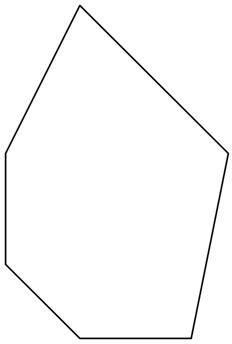
Hình chữ nhật

□

Ví dụ 5. Vẽ hình và tính tổng số đo các góc của hình lục giác. **ĐS:** 720°

Lời giải.

Tổng độ lớn của các góc trong lục giác là $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$.



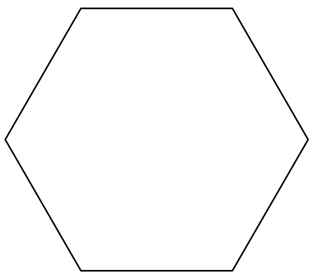
Lục giác lồi

□

Ví dụ 6. Tính số đo mỗi góc của hình lục giác đều. **ĐS:** 120°

Lời giải.

Đa giác đều có tất cả các góc bằng nhau, dùng kết quả bài trên ta tính được số đo mỗi góc của hình lục giác đều là $\dfrac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.

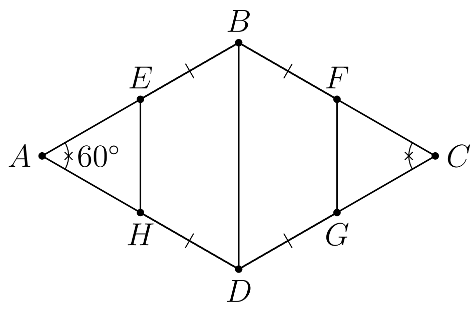


Lục giác đều

□

Ví dụ 7. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh đa giác $EBFGDH$ là lục giác đều.

Lời giải.



Dùng tính chất đường trung bình ta có

$$EH = FG = \frac{BD}{2}.$$

Ta có $\triangle ABD$, $\triangle CBD$ là các tam giác cân có một góc bằng 60° nên $\triangle ABD$, $\triangle CBD$ là hai tam giác đều, từ đó

$$EB = BF = FG = GD = DH = HE.$$

Lại có, $EH \parallel BD \parallel FG$ theo tính chất trung bình,ta có: $\widehat{HBE} = \widehat{EHD} = \widehat{BFG} = \widehat{DGF} = 120^\circ$ (góc ngoài tam giác) và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$, từ đó tính được

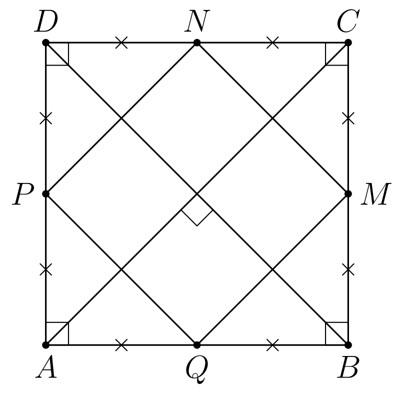
$$\widehat{BEH} = \widehat{EHD} = \widehat{HDG} = \widehat{DGF} = \widehat{GFB} = \widehat{FBE} = 120^\circ.$$

Vậy $EBFGDH$ là lục giác đều.

□

Ví dụ 8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, DA, AB. Chứng minh $MNPQ$ là hình vuông (tứ giác đều).

Lời giải.

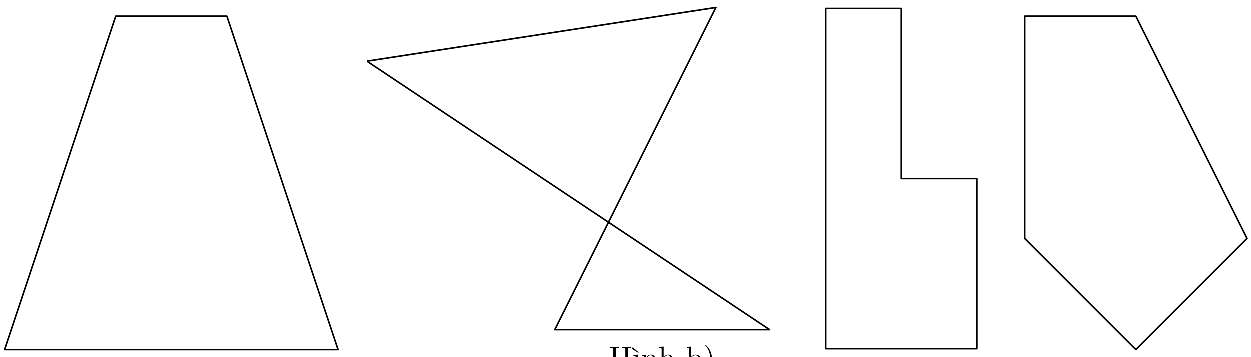


Do $AC = BD$ nên dùng tính chất đường trung bình của tam giác suy ra $MN = NP = PQ = QM$.
Lại có, $AC \perp BD$, $MQ \parallel AC$, $MN \parallel BD$ nên $\widehat{QMN} = 90^\circ$. Vậy $MNPQ$ là hình vuông.

□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Tìm hình là đa giác lồi trong các hình dưới đây?



Hình a) Hình b) Hình c) Hình d)

Lời giải.

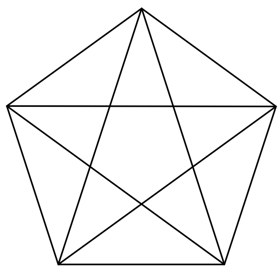
Các hình là đa giác lồi là hình a) và hình d). □

Bài 2. Vẽ hình và tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác. **ĐS:** 5; 9

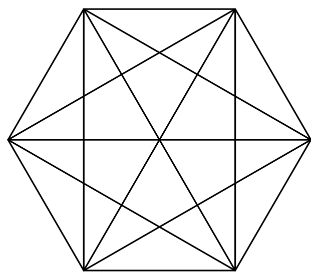
Lời giải.

Ngũ giác có $\dfrac{2\cdot 5}{2}=5$ đường chéo.

Lục giác có $\dfrac{3\cdot 6}{2}=9$ đường chéo.



Ngũ giác đều



Lục giác đều

□

Bài 3. Chứng minh hình n-giác có tất cả $\dfrac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

(*)

Lời giải.

Từ mỗi đỉnh của hình n-giác vẽ được $n-1$ đoạn thẳng nối đỉnh đó với $n-1$ đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng trùng với hai cạnh của đa giác. Do đó qua mỗi đỉnh của hình n-giác vẽ được $n-3$ đường chéo. Hình n-giác có n đỉnh nên vẽ được $n(n-3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo được tính hai lần. Vậy, hình n-giác có tất cả $\dfrac{n(n-3)}{2}$ đường chéo. □

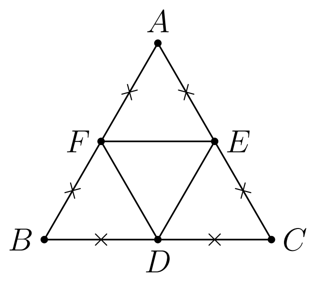
Bài 4. Cho tam giác đều ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh DEF là tam giác đều.

Lời giải.

Trong tam giác ABC có EF là đường trung bình nên $EF = \dfrac{1}{2}BC$.
Dùng tính chất đường trung bình chứng minh tương tự, ta được

$$DE = EF = FD.$$

nên $\triangle DEF$ đều.



□

§2 Diện tích hình chữ nhật

1 Tóm tắt lí thuyết

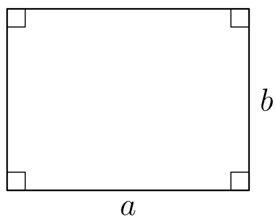
1.1 Khái niệm diện tích tam đa giác

- Số đo của phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là *diện tích đa giác* đó.
- Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một *số dương*.
- Diện tích đa giác có các tính chất sau:
  - Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.
  - Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
  - Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1 cm, 1 dm, 1 m, … làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m^2, …
- Diện tích đa giác $ABCDE$ thường được kí hiệu là S_{ABCDE}.

1.2 Công thức tính diện tích hình chữ nhật

- Diện tích hình chữ nhật bằng *"tích hai kích thước của nó"*.

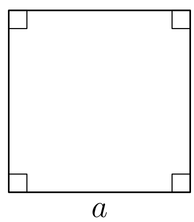
$$\boxed{S = ab}$$



1.3 Công thức tính diện tích hình vuông, tam giác vuông

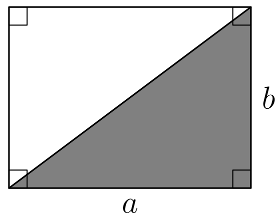
- Diện tích hình vuông bằng *"bình phương cạnh của nó"*.

$$\boxed{S = a^2}$$



☑ Diện tích tam giác vuông bằng *"nửa tích hai cạnh góc vuông"*.

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab}$$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 30. Tính diện tích hình chữ nhật

Sử dụng công thức tính diện tích hình chữ nhật.

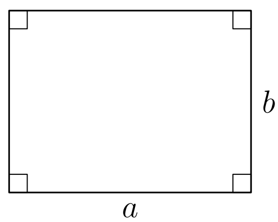
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

1. Chiều dài tăng ba lần, chiều rộng không đổi? **ĐS:** tăng 3 lần
2. Chiều dài và chiều rộng tăng hai lần? **ĐS:** tăng 4 lần
3. Chiều dài tăng ba lần, chiều rộng giảm ba lần? **ĐS:** không đổi

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là a, b thì diện tích của nó là $S = ab$.



1. Nếu tăng chiều dài ba lần, chiều rộng không đổi thì chiều dài, chiều rộng mới là $3a$ và b nên diện tích hình chữ nhật mới là $S_m = 3ab = 3S$. Vậy diện tích hình chữ nhật tăng 3 lần.
2. Diện tích tăng 4 lần.
3. Diện tích không đổi.

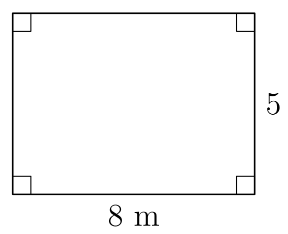
□

Ví dụ 2. Một hình chữ nhật có chiều dài là 8 m và chiều rộng là 5 m.

1. Tính diện tích hình chữ nhật đã cho. **ĐS:** 40 m^2
2. Nếu chiều dài tăng 2 m, chiều rộng không đổi thì diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào? **ĐS:** tăng 10 m^2
3. Nếu chiều dài tăng 2 m, chiều rộng giảm 2 m thì diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào? **ĐS:** Giảm 10 m^2

Lời giải.

1. $S = 8 \cdot 5 = 40$ m^2.
2. Tăng $(8+2) \cdot 5 - 8 \cdot 5 = 10$ m^2.
3. Giảm $8 \cdot 5 - (8+2) \cdot (5-2) = 10$ m^2.

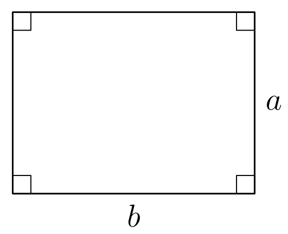


□

Ví dụ 3. Tính độ dài các cạnh của một hình chữ nhật biết tỉ số các cạnh là $4 : 9$ và diện tích của nó là 144 cm^2. **ĐS:** 8 và 18

Lời giải.

Gọi độ dài các cạnh của hình chữ nhật là a, b khi đó $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{9}$ và $ab = 144$, ta có:
$a = \dfrac{4}{9}b \Rightarrow \dfrac{4}{9}b^2 = 144 \Leftrightarrow b^2 = 324 \Leftrightarrow b = 18 \Rightarrow a = 8$.
Vậy $a = 8$ cm, $b = 18$ cm.

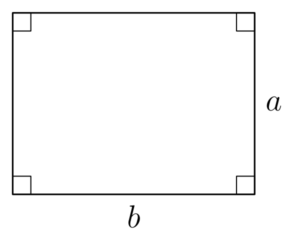


□

Ví dụ 4. Bình phương độ dài một cạnh và diện tích của một hình chữ nhật lần lượt là 9 cm và 12 cm^2. Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật đó. **ĐS:** 3 và 4

Lời giải.

Gọi độ dài các cạnh của hình chữ nhật là a, b khi đó $a^2 = 9$ và $ab = 12$, ta có:
$a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = \dfrac{12}{3} = 4$.
Từ đó tìm được $a = 3$ cm và $b = 4$ cm.



□

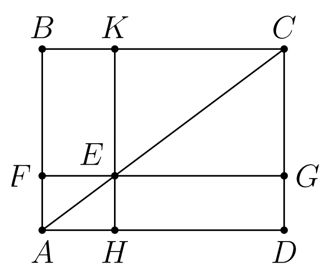
Ví dụ 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua E là một điểm bất kì thuộc đường chéo AC, kẻ hai đường thẳng $FG \parallel AD$ và $HK \parallel AB$ ($F \in AB$, $G \in DC$, $H \in AD$, $K \in BC$). Chứng minh hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.

Lời giải.

Ta có $AHEF$ và $CGEK$ là các hình chữ nhật nên

$$S_{AFE} = S_{AHE},\ S_{CKE} = S_{CGE}.$$

Lại có $S_{ABC} = S_{ADC}$ nên suy ra hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.



□

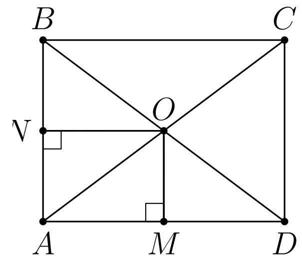
Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 100 cm^2. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên AD, AB. Tính diện tích hình chữ nhật $AMON$. **ĐS:** 25 cm^2

Lời giải.

Ta có $OM = \dfrac{AB}{2}$, $ON = \dfrac{AD}{2}$ nên

$$S_{AMON} = OM \cdot ON = \frac{AB \cdot AD}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4} = 25.$$

Vậy $S_{AMON} = 25$ cm^2.



□

Dạng 31. Diện tích hình vuông, diện tích tam giác vuông

Sử dụng công thức diện tính tích hình vuông, diện tích tam giác vuông.

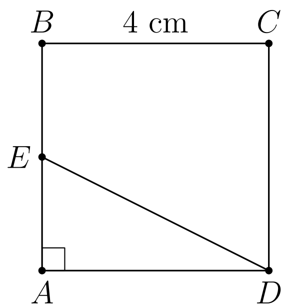
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4 cm, lấy điểm E thuộc cạnh AB. Biết diện tích $\triangle ADE$ bằng $\dfrac{1}{4}$ diện tích hình vuông $ABCD$. Tính độ dài AE. **ĐS:** 2

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 16$ cm^2 suy ra $S_{ADE} = 4$ cm^2.
Mặt khác $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}AD \cdot AE$, từ đó tính được

$$AE = \frac{2 \cdot S_{ADE}}{AD} = 2\,\text{cm}.$$

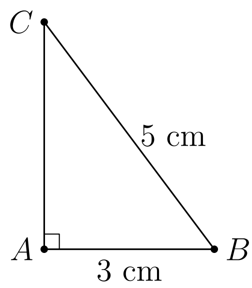


□

Ví dụ 2. Tính diện tích $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. **ĐS:** 6 cm^2

Lời giải.

Tính được $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4$ cm, nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = 6$ cm^2.



□

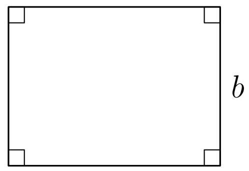
3 Bài tập về nhà

Bài 1. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

1. Chiều dài tăng 6 lần, chiều rộng giảm 3 lần? **ĐS:** tăng 2 lần
2. Chiều dài giảm 25%, chiều rộng tăng 15%? **ĐS:** Giảm 13,75%

Lời giải.

Gọi a, b lần lượt là hai kích thước của hình chữ nhật, ta có:



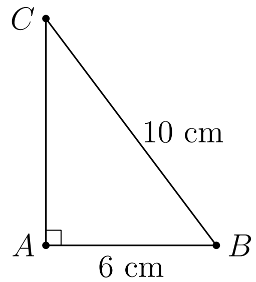
1. $S_m = 6a \cdot \dfrac{b}{3} = 2ab = 2S$. Diện tích tăng 2 lần.
2. Diện tích mới giảm $1 - 0{,}75 \cdot 1{,}15 = 0{,}1375 = 13{,}75\%$.

□

Bài 2. Tính diện tích của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10 cm, một cạnh góc vuông bằng 6 cm. **ĐS:** 24 cm^2

Lời giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm và $BC = 10$ cm, ta có:
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 8$ cm.
Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ \text{cm}^2$.



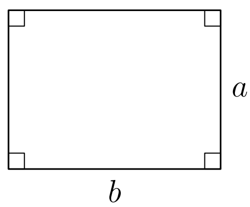
□

Bài 3. Tính các cạnh của hình chữ nhật biết:

1. Tỉ số các cạnh là $3 : 4$ và diện tích của nó là $1\,200\ \text{cm}^2$. **ĐS:** 30; 40
2. Bình phương độ dài một cạnh là $9\ \text{cm}^2$ và diện tích của nó là $18\ \text{cm}^2$. **ĐS:** 3; 6

Lời giải.

Gọi độ dài các cạnh của hình chữ nhật là a, b khi đó:



1. $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4}$ và $ab = 1\,200$, ta có:
   $a = \dfrac{3}{4}b \Rightarrow \dfrac{3}{4}b^2 = 1\,200 \Leftrightarrow b = 1\,600 \Leftrightarrow b = 40$.
   Từ đó tìm được $a = 30$ cm và $b = 40$ cm.
2. $a^2 = 9$ và $ab = 18$, từ đó tìm được $a = 3$ cm và $b = 6$ cm.

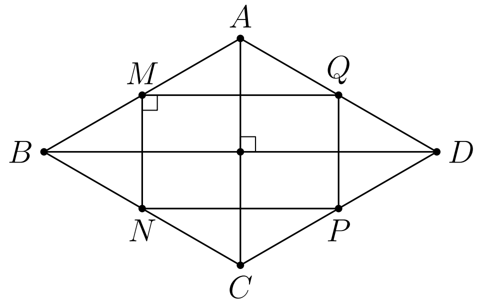
□

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 4$ cm, $BD = 6$ cm. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Tại sao?

2. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$. **ĐS:** 6 cm^2

Lời giải.



1. Ta có $MN \parallel AC \parallel PQ$ và $MN = PQ = \dfrac{AC}{2}$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
   Lại có $MQ \parallel BD$, $MN \parallel AC$, $AC \perp BD$ nên $MQ \perp MN$, từ đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.
2. Tính được $MN = \dfrac{AC}{2} = 2$ cm, $MQ = \dfrac{BD}{2} = 3$ cm.
   Bởi vậy $S_{MNPQ} = 2 \cdot 3 = 6$ cm^2.

□

§3 Diện tích tam giác

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Công thức tính diện tích tam giác

Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó

$$S = \frac{1}{2}ah$$

1.2 Hệ quả

- Hai tam giác có cạnh đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- Hai tam giác có một cạnh bằng nhau thì tỉ số diện tích của hai tam giác đó bằng tỉ số của hai chiều cao tương ứng.
- Hai tam giác có một đường cao bằng nhau thì tỉ số diện tích của hai tam giác đó bằng tỉ số của hai cạnh tương ứng.

2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 32. Tính toán, chứng minh hệ thức về diện tích tam giác

- Áp dụng công thức và các hệ quả thu được từ công thức tính diện tích.
- Sử dụng định nghĩa khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Áp dụng tính chất cộng diện tích.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tam giác DEF có đáy $EF = 12$ cm, đường cao tương ứng 4 cm. Tính diện tích tam giác DEF. **ĐS:** 24 cm^2

Lời giải.

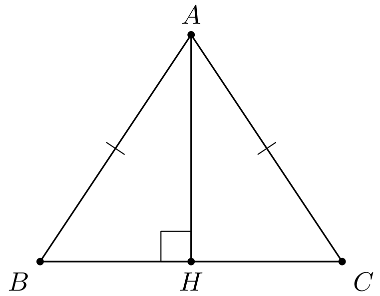
$S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24\text{ cm}^2$. □

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao AH. Tính diện tích tam giác ABC nếu biết $AH = 8$ cm, $AB = 10$ cm. **ĐS:** 48 cm^2

Lời giải.

Trong tam giác ABH vuông tại H ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2$ (Định lý Py-ta-go) $\Leftrightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2 \Leftrightarrow BH = 6$ cm. Suy ra $BC = 2BH = 12$ cm.

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$ cm^2.



□

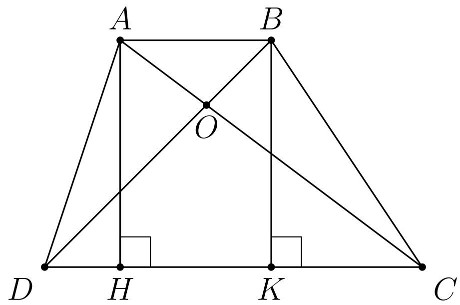
Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), AC cắt BD tại O. Chứng minh

a) $S_{DAC} = S_{DBC}$.

b) $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Lời giải.

1. Kẻ $AH \perp CD$, $BK \perp DC$, $H, K \in CD$. Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AH = BK$ (1).
   Mặt khác $\triangle DAC$ và $\triangle DBC$ có chung đáy DC (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $S_{DAC} = S_{DBC}$.
2. $S_{DAC} = S_{AOD} + S_{DOC}$ và $S_{DBC} = S_{BOC} + S_{DOC}$, Do đó, $S_{AOD} = S_{BOC}$.



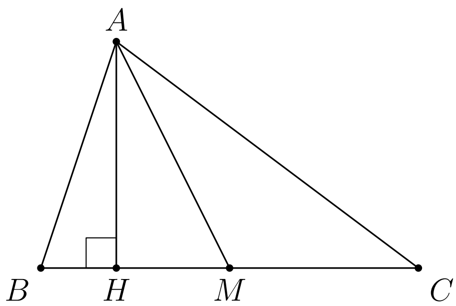
□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, kẻ đường trung tuyến AM.

1. Chứng minh $S_{ABM} = S_{ACM}$.
2. Tính diện tích tam giác ABC biết $S_{ABM} = 15$ cm^2. **ĐS:** 30 cm^2

Lời giải.

1. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).
   $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có chung đường cao AH, mà $MB = MC$ nên $S_{ABM} = S_{ACM}$.
2. $S_{ABC} = 2 \cdot S_{ABM} = 30$ cm^2.



□

Dạng 33. Sử dụng công thức tính diện tích để tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh hệ thức hình học

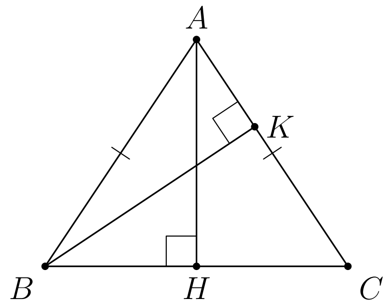
- Tính diện tích tam giác bằng hai cách.
- So sánh hai kết quả, từ đó thu được một hệ thức liên hệ giữa các yếu tố trong tam giác.
- Áp dụng các tính chất về diện tích, các hệ quả thu được từ công thức tính diện tích tam giác.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh $BC = 6$ cm, đường cao $AH = 4$ cm.

1. Tính diện tích tam giác ABC. **ĐS:** 12 cm^2
2. Tính độ dài đường cao tương ứng với cạnh AC. **ĐS:** $\dfrac{24}{5}$ cm

Lời giải.



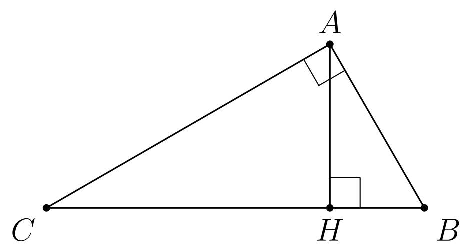
1. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC = 12\text{ cm}^2$.
2. Kẻ $BK \perp AC$, ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BK \cdot AC$.
   Trong tam giác ACH ta có
   $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow AC = 5$ cm.
   Suy ra $BK = \dfrac{2S_{ABC}}{AC} = \dfrac{2 \cdot 12}{5} = \dfrac{24}{5}$ cm.

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm.

1. Tính diện tích tam giác ABC. **ĐS:** 24 cm^2
2. Kẻ đường cao AH. Tính độ dài AH. **ĐS:** $\dfrac{24}{5}$ cm

Lời giải.



1. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\text{ cm}^2$.
2. $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm.
   $AH = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = \dfrac{2 \cdot 24}{10} = \dfrac{24}{5}$ cm.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác MNP vuông tại M, kẻ đường cao MQ. Chứng minh

$$MQ \cdot NP = MN \cdot MP$$

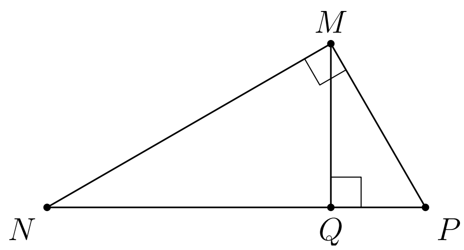
.

Lời giải.

Ta có $S_{MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot MP \quad (1)$.

Mặt khác, $S_{MNP} = \frac{1}{2} MQ \cdot NP \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $MQ \cdot NP = MN \cdot MP$.



□

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC, kẻ các đường cao BD và CE. Chứng minh

$$BD \cdot AC = CE \cdot AB$$

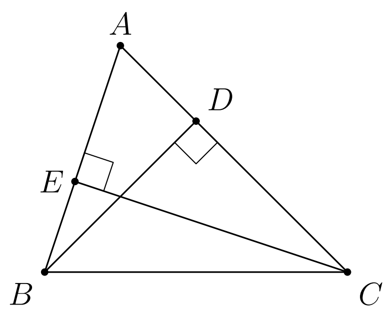
.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \quad (1)$.

Mặt khác, $S_{ABC} = \frac{1}{2} CE \cdot AB \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $BD \cdot AC = CE \cdot AB$.



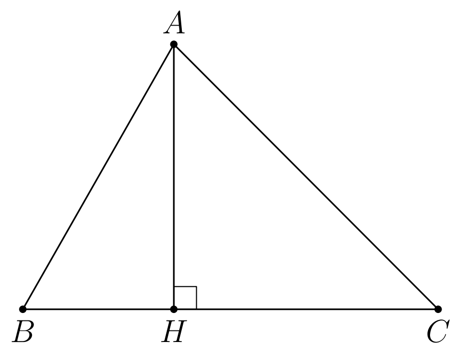
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH. Biết $AB = 15$ cm, $AC = 41$ cm và $HB = 12$ cm. Tính diện tích tam giác ABC. **ĐS:** 234 cm^2

Lời giải.

Trong $\triangle ABH$ vuông tại $\widehat{AHB}$, ta có
$AB^2 = AH^2 + HB^2$
$\Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow AH = 9$ cm.
Trong $\triangle AHC$ vuông tại $\widehat{AHC}$, ta có
$AC^2 = AH^2 + HC^2$
$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 41^2 - 9^2 = 1600 \Rightarrow HC = 40$ cm.
Suy ra $BC = HB + HC = 40 + 12 = 52$ cm.
Vậy $S = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 234$ cm^2.



□

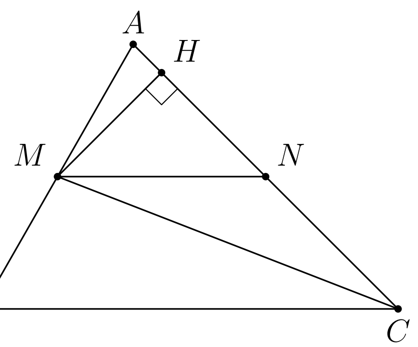
Bài 2. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} S_{AMC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

Lời giải.

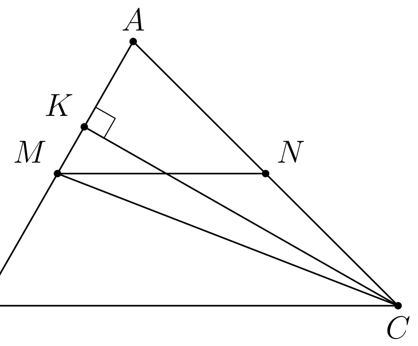
Gọi H là hình chiếu của M lên AC, ta có

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2} \cdot MH \cdot AN \\ &= \frac{1}{2} \cdot MH \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot MH \cdot AC = \frac{1}{2} S_{AMC}. \end{aligned}$$



Gọi K là hình chiếu của C lên AB, ta có

$$\begin{aligned} S_{AMC} &= \frac{1}{2} \cdot CK \cdot AM \\ &= \frac{1}{2} \cdot CK \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot AB = \frac{1}{2} S_{ABC}. \end{aligned}$$



Do đó $S_{AMN} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$.

□

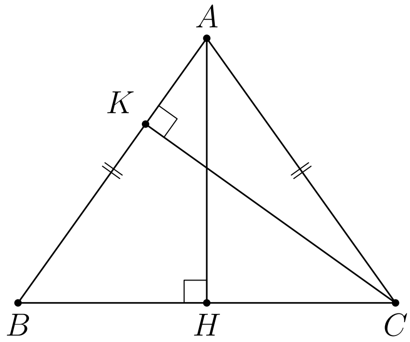
Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $BC = 6$ cm và $AB = 5$ cm.

1. Tính diện tích tam giác ABC. **ĐS:** 12 cm^2
2. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh AB. **ĐS:** $\dfrac{24}{5}$ cm

Lời giải.

1. Do tam giác ABC cân tại A nên
   $AB = AC = 5$ cm, $BH = HC = \dfrac{1}{2}BC = 3$ cm.
   Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có
   $AH^2 = AB^2 - HB^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$ cm.
   Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 12$ cm^2.

2. Gọi K là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ C.
   Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot CK \cdot AB \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot CK \cdot 5 = 12$
   $\Rightarrow CK = \dfrac{24}{5}$ cm.



□

Bài 4. Cho tam giác ABC đều, đường cao AH. Gọi O là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CA, AB. Chứng minh

a) $2S_{ABC} = OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB$. b) $AH = OD + OE + OF$.

Lời giải.

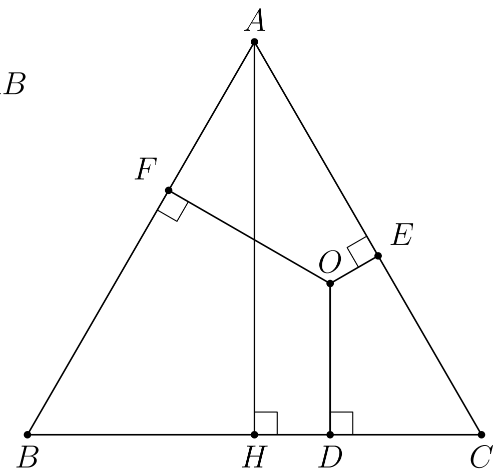
1. Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot OD \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot OE \cdot CA + \frac{1}{2} \cdot OF \cdot AB \\ &= \frac{1}{2}(OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow 2S_{ABC} = OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB$

2. Từ câu trên, ta có

$$\begin{aligned} & 2S_{ABC} = OD \cdot BC + OE \cdot CA + OF \cdot AB \\ \Leftrightarrow\ & 2S_{ABC} = BC \cdot (OD + OE + OF) \\ \Leftrightarrow\ & AH \cdot BC = BC \cdot (OD + OE + OF) \\ \Leftrightarrow\ & AH = OD + OE + OF \end{aligned}$$



□

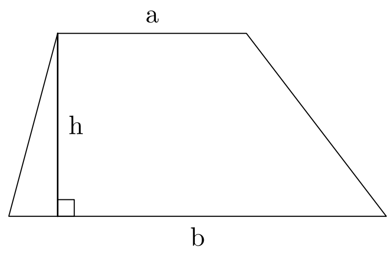
§4 Diện tích hình thang

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Công thức tính diện tích hình thang

Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao

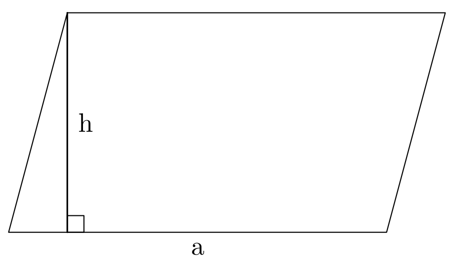
$$\boxed{S = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h}$$



1.2 Công thức tính diện tích hình bình hành

Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:

$$\boxed{S = a\cdot h}$$



2 Bài tập và các dạng toán

Dạng 34. Tính diện tích hình thang

Áp dụng công thức tính diện tích hình thang, định lý Py-ta-go.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đáy lớn $AB = 10$ cm, đáy nhỏ $CD = 6$ cm và đường cao $DE = 5$ cm.

Lời giải.

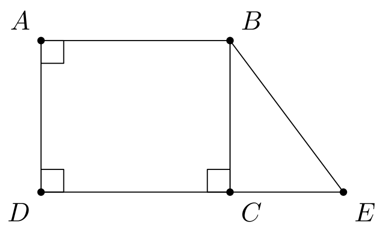
$S_{ABCD} = \dfrac{(10+6)\cdot 5}{2} = 40\ \text{cm}^2.$ □

Ví dụ 2. Cho hình thang vuông $ABED$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$). Kẻ $BC \perp DE$ ($C \in DE$). Biết $AB = 23$ cm, $DE = 31$ cm và diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 828 cm^2. Tính diện tích hình thang $ABED$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = AD \cdot AB \Rightarrow AD = \dfrac{S_{ABCD}}{AB} = \dfrac{828}{23} = 36$ cm.

$\Rightarrow S_{ABED} = \dfrac{(AB+DE)\cdot AD}{2} = \dfrac{(23+31)\cdot 36}{2} = 972$ cm^2.



□

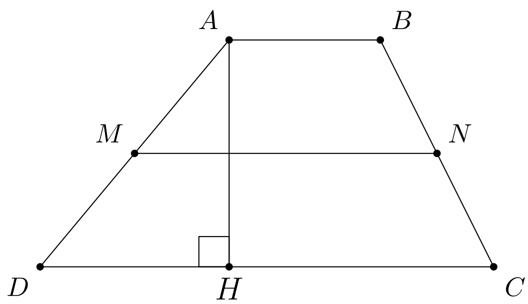
Ví dụ 3. Chứng minh diện tích hình thang bằng tích độ dài đường trung bình với chiều cao của nó.

Lời giải.

Ta có $MN = \dfrac{AB+CD}{2}$.

Mặt khác, $S_{ABCD} = \dfrac{(AB+CD)\cdot AH}{2} = MN \cdot AH$.

Vậy diện tích hình thang bằng tích độ dài đường trung bình với chiều cao của nó.



□

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có diện tích bằng 30 cm^2 và đường cao $AH = 3$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Tính độ dài MN. **ĐS:** 10 cm

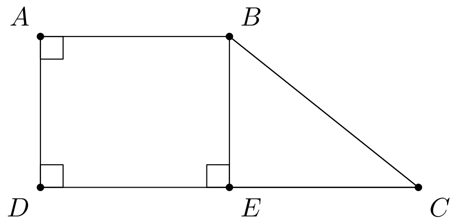
Lời giải.

Áp dụng kết quả bài trên, ta có $S_{ABCD} = MN \cdot AH \Rightarrow MN = \dfrac{S_{ABCD}}{AH} = \dfrac{30}{3} = 10$ cm. □

Ví dụ 5. Tính diện tích hình thang $ABCD$ biết $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm và $CD = 6$ cm. **ĐS:** 18 cm^2

Lời giải.

Kẻ $BE \perp DC \Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = AB = 3$ cm $\Rightarrow EC = 3$ cm.
Dùng định lý Py-ta-go tính được $AD = BE = 4$ cm, từ đó $S_{ABCD} = \dfrac{(3+6)\cdot 4}{2} = 18$ cm^2.



□

Ví dụ 6. Tính diện tích hình thang vuông $ABCD$ biết $\widehat{C} = 45^\circ$, $AB = 2$ cm và $CD = 4$ cm.

Lời giải.

Tương tự bài trên, kẻ $BE \perp DC \Rightarrow DE = AB = 3$ cm $\Rightarrow EC = 2$ cm.
Mặt khác, $\triangle BEC$ vuông cân nên $AD = BE = EC = 2$ cm $\Rightarrow S_{ABCD} = 6$ cm^2. □

Dạng 35. Tính diện tích hình bình hành

Sử dụng công thức tính diện tích hình bình hành, các tính chất về diện tích.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$ biết $CD = 8$ cm, đường cao tương ứng là $AE = 4$ cm. **ĐS:** 32 cm^2

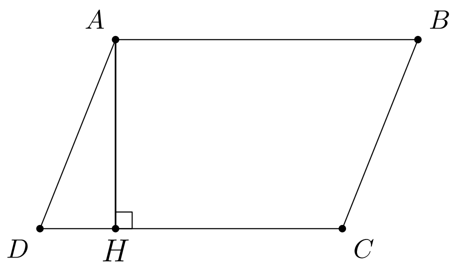
Lời giải.

$S_{ABCD} = 8 \cdot 4 = 32$ cm^2. □

Ví dụ 2. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$ biết $AD = 6$ cm, $AB = 10$ cm và $\widehat{D} = 30^\circ$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp DC$. Vì $\widehat{D} = 30^\circ$ nên $\triangle ADH$ nửa đều.
Do đó, $AH = \dfrac{AD}{2} = 3$ cm. Suy ra $S_{ABCD} = 3 \cdot 10 = 30$ cm^2.

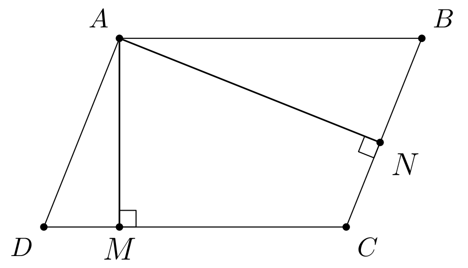


□

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$, kẻ $AM \perp DC$ và $AN \perp BC$ với $M \in DC, N \in BC$. Chứng minh $AM \cdot DC = AN \cdot BC$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = AN \cdot BC \quad (1)$.
Mặt khác, $S_{ABCD} = AM \cdot DC \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $AM \cdot DC = AN \cdot BC$.

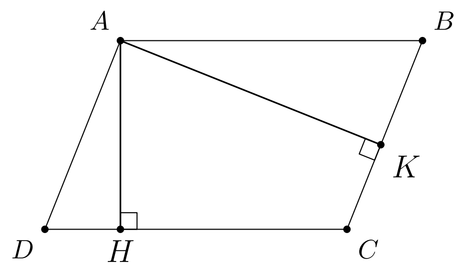


□

Ví dụ 4. Hình bình hành $ABCD$ có $AB = 16$ cm, $AD = 8$ cm. Gọi H, K là hình chiếu của A trên CD và CB, biết $AH = 3$ cm. Tính AK. **ĐS:** 6 cm

Lời giải.

Dùng kết quả bài trên, ta có $AK = \dfrac{AH \cdot DC}{BC} = \dfrac{16 \cdot 3}{8} = 6$ cm.



□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ có đáy nhỏ $MN = 3$ cm, đáy lớn $PQ = 7$ cm và đường cao $MS = 4$ cm. **ĐS:** 20 cm^2

Lời giải.

$S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2} \cdot MS \cdot (MN + PQ) = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot (3 + 7) = 20$ cm^2. □

Bài 2. Tính diện tích hình bình hành $EFGH$ biết $EF = 12$ cm, đường cao tương ứng $GK = 3$ cm. **ĐS:** 36 cm^2

Lời giải.

$S_{EFGH} = GK \cdot EF = 12 \cdot 3 = 36$ cm^2. □

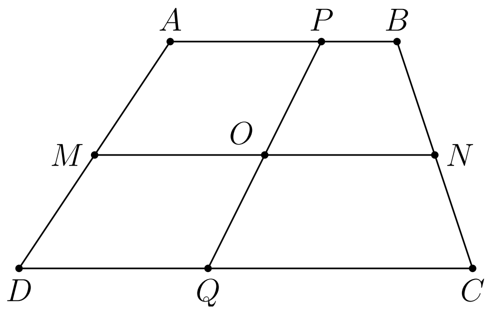
Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. O là trung điểm MN. Một đường thẳng qua O cắt hai đáy AB, CD lần lượt tại P, Q. Chứng minh

1. O là trung điểm của PQ.

2. Hai hình thang $APDQ$ và $BPQC$ có diện tích bằng nhau.

Lời giải.

a) Ta có MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $MN \parallel CD$.
Vậy ta xét hình thagn $APQD$, ta có M là trung điểm AD, $MO \parallel DQ$.
Do đó MO là đường trung bình của hình thang $APQD$ nên O là trung điểm PQ.



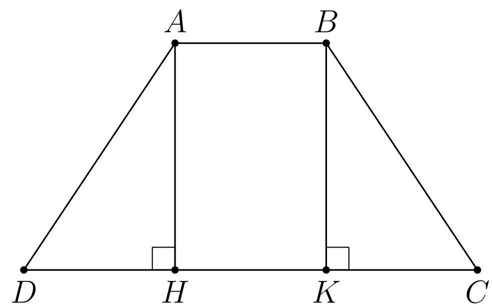
b) Ở câu trên ta đã có MO là đường trung bình của hình thang $APQD$ nên $MO = \frac{1}{2}(AP+QD)$.
Tương tự thì NO là đường trung bình của hình thang $PBCQ$ nên $NO = \frac{1}{2}(PB+CQ)$.
Gọi h là độ dài đường cao của hình thang $ABCD$, ta có $S_{APQD} = h \cdot OM = h \cdot ON = S_{PBCQ}$.

□

Bài 4. Tính diện tích hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có các đáy $AB = 10$ cm, $CD = 20$ cm và cạnh bên $AD = 13$ cm. **ĐS:** 180 cm^2

Lời giải.

Kẻ AH, BK là các đường cao của hình thang cân $ABCD$. Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle AHD = \triangle BKC$ nên ta có $HD = KC$.
Ta có $ABHK$ là hình chữ nhật nên $AB = HK = 10$ cm.
Do đó $CD = 2DH + HK \Rightarrow DH = 5$ cm.
Xét $\triangle ADH$ vuông tại H, ta có
$AH^2 = AD^2 - DH^2 = 144 \Rightarrow AH = 12$cm.
Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB+CD) = 180$ cm^2.



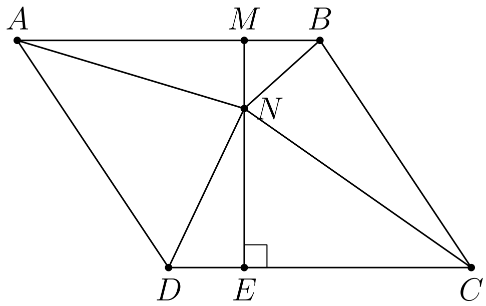
□

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M, kẻ ME vuông góc với CD tại E.

1. Chứng minh $S_{MCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

2. N thuộc đoạn ME. Chứng minh $S_{NAD} + S_{NBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Lời giải.



a) Ta có $S_{MCD} = \dfrac{1}{2} \cdot ME \cdot DC = \dfrac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$
(Vì ME chính là đường cao của hình bình hành $ABCD$).

b) Ta có

$$\begin{aligned} S_{NAB} + S_{NDC} &= \frac{1}{2} \cdot MN \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot NE \cdot CD \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (MN + NE) \\ &= \frac{1}{2} \cdot ME \cdot DC = \frac{1}{2} S_{ABCD} \end{aligned}$$

Do đó $S_{NAD} + S_{NBC} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$.

□

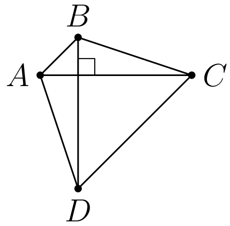
§5 Diện tích hình thoi

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Công thức tính diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc

Diện tích của tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo

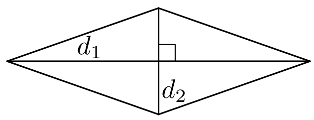
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$



1.2 Công thức tính diện tích hình thoi

Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2.$$



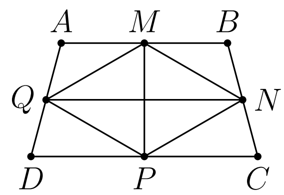
2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh

1. Tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.
2. $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Lời giải.

1.



$\triangle ABC$ có M, N là trung điểm của AB, BC.
Suy ra MN là đường trung bình.
Suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \dfrac{1}{2}AC$.
Chứng minh tương tự và do $ABCD$ là hình thang cân nên ta có $MN = NP = PQ = QM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}BD$.
Vậy $MNPQ$ là hình thoi (tứ giác có 4 cạnh bằng nhau).

2. Hình thang cân $ABCD$ có Q, N là trung điểm AD, BC.
   Suy ra QN là đường trung bình.
   Suy ra $NQ \parallel AB \parallel CD$ và $NQ = \dfrac{AB+CD}{2}$.
   Mà $MP \perp NQ$ nên MP là đường cao của hình thang cân $ABCD$.
   Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}MP \cdot NQ = \dfrac{1}{2}MP \cdot \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

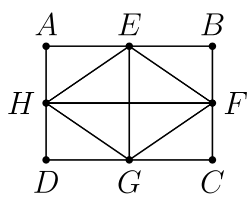
□

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh

1. Tứ giác $EFGH$ là hình thoi.
2. $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

Lời giải.

1.



$\triangle ABC$ có E, F là trung điểm của AB, BC.
Suy ra EF là đường trung bình của $\triangle ABC$.
Suy ra $EF \parallel AC$ và $EF = \dfrac{1}{2}AC$.
Chứng minh tương tự và do $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $EF = FG = GH = HE = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}BD$.
Vậy $EFGH$ là hình thoi (tứ giác có 4 cạnh bằng nhau).

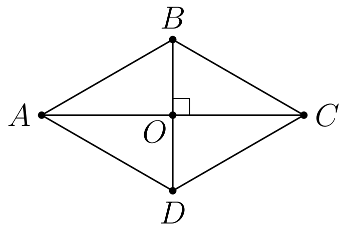
2. Hình chữ nhật $ABCD$ có H, F là trung điểm AD, BC.
   Suy ra HF là đường trung bình.
   Suy ra $HF \parallel AB \parallel CD$ và $HF = \dfrac{AB+CD}{2}$.
   Mà $EG \perp HF$ nên EG là đường cao của hình chữ nhật $ABCD$.
   Vậy $S_{EFGH} = \dfrac{1}{2}EG \cdot HF = \dfrac{1}{2}EG \cdot \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

□

Ví dụ 3. Tính diện tích hình thoi $ABCD$ biết $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 6$ cm. **ĐS:** $18\sqrt{3}$ cm^2

Lời giải.

Ta có $AB = AD$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều. Suy ra $BD = 6$ cm.
Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$, suy ra $OB = \dfrac{BD}{2} = 3$ cm.
$\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go).
Suy ra $OA = 3\sqrt{3}$ cm và $AC = 6\sqrt{3}$ cm.
Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = 18\sqrt{3}$ cm^2.

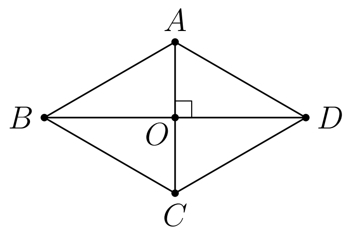


□

Ví dụ 4. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết $AB = 5$ cm, $AO = 3$ cm. Tính diện tích hình thoi đã cho. **ĐS:** 24 cm^2

Lời giải.

$\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go). Suy ra $OB = 4$ cm.
Vì O là tâm hình thoi $ABCD$, suy ra $AC = 2OA = 6$ cm và $BD = 2OB = 8$ cm.
Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = 24$ cm^2.

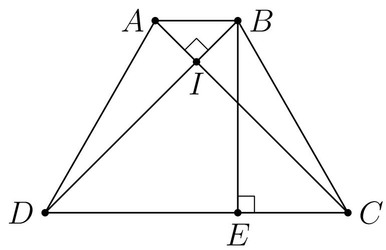


□

Ví dụ 5. Tính diện tích hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo AC, BD vuông góc và chiều cao bằng 6 cm. **ĐS:** 36 cm^2

Lời giải.

Hình thang cân $ABCD$ có $AD = BC$, $AC = BD$.
Suy ra $\triangle ACD = \triangle BDC$ (c-c-c) suy ra $\widehat{IDC} = \widehat{ICD}$.
Suy ra $\triangle IDC$ vuông cân tại I.
Suy ra $\widehat{IDC} = \widehat{ICD} = 45^\circ$.
$\triangle BED$ vuông cân tại E nên $BD^2 = 2BE^2 = 72$.
Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = \dfrac{BD^2}{2} = 36$ cm^2.



□

Ví dụ 6. Tính diện tích của hình vuông có độ dài đường chéo bằng 2 cm. **ĐS:** 2 cm^2

Lời giải.

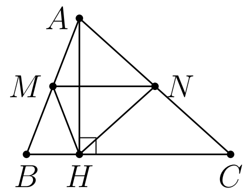
Vì hai đường chéo vuông góc nên diện tích hình vuông là $S = \dfrac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$ cm^2. □

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, biết $BC = 4$ cm, $AH = 3$ cm. Tính diện tích tứ giác $AMHN$. **ĐS:** 3 cm^2

Lời giải.

$\triangle ABC$ có M, N là trung điểm của AB, AC.
Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.
Suy ra $MN \parallel BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC = 2$ cm.
Suy ra $MN \perp AH$.
$S_{AMHN} = \dfrac{1}{2}AH \cdot MN = 3$ cm^2.

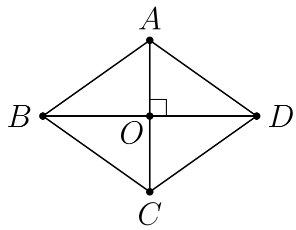


□

Bài 2. Tính diện tích hình thoi $ABCD$ biết $AB = 13$ cm, $AC = 10$ cm. **ĐS:** 120 cm^2

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, suy ra $OA = \dfrac{1}{2}AC = 5$ cm^2.
$\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go).
Suy ra $OB = 12$ cm.
Vì O là tâm hình thoi $ABCD$, suy ra $BD = 2OB = 24$ cm.
Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = 120$ cm^2.

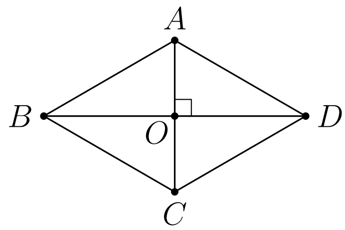


□

Bài 3. Tính diện tích hình thoi $ABCD$ có $AB = 4$ cm và $\widehat{A} = 120^\circ$. **ĐS:** $8\sqrt{3}$ cm^2

Lời giải.

Ta có AC là phân giác $\widehat{BAD}$, suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
Suy ra $\triangle ABC$ đều.
Suy ra $AC = 4$ cm và $OA = 2$ cm.
$\triangle AOB$ vuông tại O có $AB^2 = OA^2 + OB^2$ (định lý Py-ta-go).
Suy ra $OB = 2\sqrt{3}$ cm và $BD = 4\sqrt{3}$ cm.
Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD = 8\sqrt{3}$ cm^2.



□

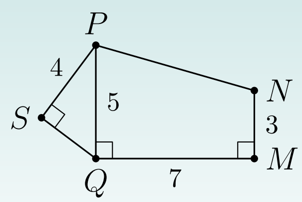
§6 Diện tích đa giác

1 Tóm tắt lý thuyết

- Có thể chia đa giác thành các tam giác hoặc tạo ra một tam giác nào đó có chứa đa giác, do đó việc tính diện tích của một đa giác bất kì được quy về việc tính diện tích tam giác.
- Trong một số trường hợp, để việc tính toán thuận lợi ta có thể chia đa giác thành nhiều tam giác vuông và hình thang vuông.

2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1.
Theo kích thước đã cho trên hình, tính diện tích đa giác $MNPSQ$ (đơn vị cm^2). **ĐS:** $34\ \text{cm}^2$

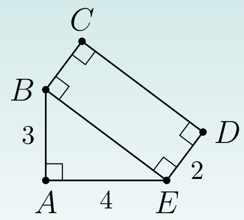


Lời giải.

$\triangle PSQ$ vuông tại S có $PQ^2 = PS^2 + SQ^2$ (định lý Py-ta-go). Suy ra $SQ = 3$ cm.

$S_{MNPSQ} = S_{MNPQ} + S_{SPQ} = \dfrac{(3+5)\cdot 7}{2} + \dfrac{3\cdot 4}{2} = 34\ \text{cm}^2$. □

Ví dụ 2.
Theo kích thước đã cho trên hình, tính diện tích đa giác $ABCDE$ (đơn vị cm^2). **ĐS:** $16\ \text{cm}^2$

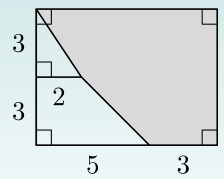


Lời giải.

$\triangle ABE$ vuông tại A có $BE^2 = AB^2 + AE^2$ (định lý Py-ta-go). Suy ra $BE = 5$ cm.

$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{BCDE} = \dfrac{4\cdot 3}{2} + 5\cdot 2 = 16\ \text{cm}^2$. □

Ví dụ 3. Theo kích thước đã cho như hình (đơn vị m). Tính diện tích phần tô đậm. **ĐS:** 34,5 cm^2

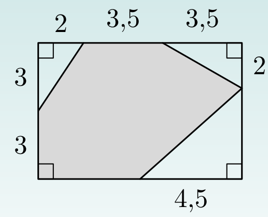


Lời giải.

$$S_d = 8 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{(2+5) \cdot 3}{2} = 34{,}5 \text{ cm}^2.$$

□

Ví dụ 4. Theo kích thước đã cho như hình (đơn vị m). Tính diện tích phần tô đậm. **ĐS:** 38,5 cm^2



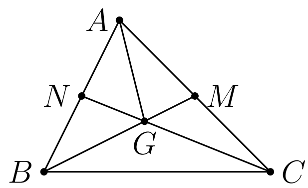
Lời giải.

$$S_d = 9 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3{,}5}{2} - \frac{4{,}5 \cdot 4}{2} = 38{,}5.\text{ cm}^2.$$

□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có diện tích 30 cm^2, các đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Tính diện tích tứ giác $AMGN$. **ĐS:** 10 cm^2

Lời giải.



Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $NG = \dfrac{1}{3}NC$.

Vì N là trung điểm của AB nên $NA = \dfrac{1}{2}AB$.

Ta có $S_{GNA} = \dfrac{1}{3}S_{CNA} = \dfrac{1}{6}S_{ABC} = 5 \text{ cm}^2$.

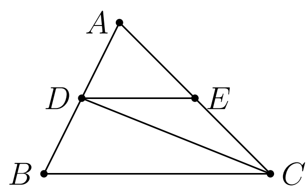
Tương tự ta có $S_{GMA} = 5 \text{ cm}^2$.

Vậy $S_{AMGN} = S_{GNA} + S_{GMA} = 10 \text{ cm}^2$.

□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có diện tích 40 cm^2. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính diện tích tứ giác $BDEC$. **ĐS:** 30 cm^2

Lời giải.



Vì D là trung điểm của AB nên $DA = \dfrac{1}{2}AB$.

Vì E là trung điểm của AC nên $EA = \dfrac{1}{2}AC$.

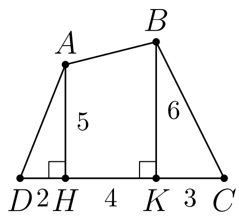
Ta có $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}S_{ADC} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = 10 \text{ cm}^2$.

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = 30 \text{ cm}^2$.

□

3 Bài tập về nhà

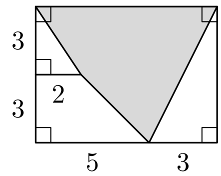
Bài 1.
Tính diện tích tứ giác $ABCD$ có các kích thước bằng cm như hình.**ĐS:** 36 cm^2



Lời giải.

$$S_{ABCD} = S_{AHD} + S_{AHKB} + S_{BKC} = \frac{5 \cdot 2}{2} + \frac{(5+6) \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 3}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$ □

Bài 2.
Tính diện tích phần tô đậm theo các kích thước bằng cm trên hình.**ĐS:** 25,5 cm^2



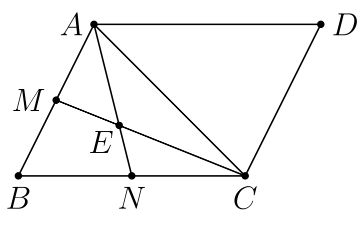
Lời giải.

$$S_d = 8 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{(2+5) \cdot 3}{2} - \frac{3 \cdot 6}{2} = 25{,}5 \text{ cm}^2.$$ □

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích 60 cm^2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BA, BC. CM cắt AN tại E.

1. Tính diện tích $\triangle AEC$. **ĐS:** 10 cm^2
2. Tính diện tích tứ giác $AECD$. **ĐS:** 40 cm^2

Lời giải.



1. Ta có E là trọng tâm $\triangle ABC$. Suy ra $AE = \frac{2}{3}AN$ và $NC = \frac{1}{2}BC$.
   $S_{AEC} = \frac{2}{3}S_{ANC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABCD} = 10$ cm^2.
2. $S_{AECD} = S_{ADC} + S_{AEC} = 40$ cm^2.

□

§7 Ôn tập chương II

1 Tóm tắt lý thuyết

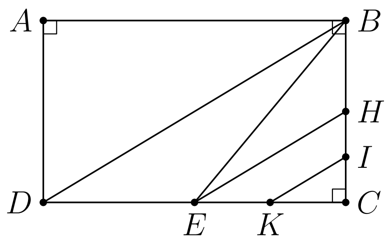
Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 6.

2 Bài tập và các dạng toán

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $AD = 6{,}8$ cm. Gọi H, I, E, K lần lượt là các trung điểm của BC, HC, DC, EC.

1. Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$. **ĐS:** $81{,}6$ cm^2
2. Tính diện tích tam giác DBE. **ĐS:** $20{,}4$ cm^2
3. Tính diện tích tứ giác $EHIK$. **ĐS:** $7{,}65$ cm^2

Lời giải.



1. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là
$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 12 \cdot 6{,}8 = 81{,}6$ cm^2.

2. Do E là trung điểm của DC nên $DE = EC = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ cm.
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC \perp DC$
hay $BC \perp DE$, do đó BC là đường cao của $\triangle BDE$.
Vậy diện tích tam giác DBE là $S_{\triangle DBE} = \dfrac{1}{2}DE \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 6{,}8 \cdot 6 = 20{,}4$ cm^2.

c) Do H là trung điểm của BC nên $HC = HB = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \cdot 6{,}8 = 3{,}4$ cm.

I là trung điểm của HC nên $IC = \dfrac{1}{2}HC = \dfrac{1}{2} \cdot 3{,}4 = 1{,}7$ cm.

K là trung điểm của EC nên $KC = \dfrac{1}{2}EC = \dfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$ cm.

Diện tích tam giác HEC vuông tại C là $S_{\triangle HEC} = \dfrac{1}{2} \cdot HC \cdot EC = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3{,}4 = 10{,}2$ cm^2.

Diện tích tam giác ICK vuông tại C là $S_{\triangle ICK} = \dfrac{1}{2} \cdot IC \cdot KC = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}7 = 2{,}55$ cm^2.

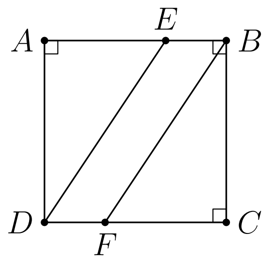
Vậy diện tích tứ giác $EHIK$ là $S_{EHIK} = S_{\triangle HCE} - S_{\triangle ICK} = 10{,}2 - 2{,}55 = 7{,}65$ cm^2.

□

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = 6$ cm. Trên cạnh AB lấy E, trên cạnh DC lấy F sao cho $BE = DF = 2$ cm.

1. Tính diện tích hình vuông $ABCD$. **ĐS:** 36 cm^2
2. Tính diện tích tứ giác $ABFD$. **ĐS:** 24 cm^2
3. Tính diện tích hình bình hành $BEDF$. **ĐS:** 12 cm^2

Lời giải.



1. Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36$ cm^2.
2. Do $ABFD$ là hình thang vuông tại A, D.
   Do đó diện tích của tứ giác $ABFD$ là
   $S_{ABFD} = \frac{1}{2}(AB + DF) \cdot AD = \frac{1}{2}(2 + 6) \cdot 6 = 24$ cm^2.

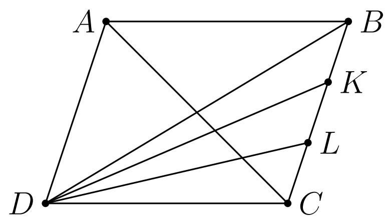
c) Ta có $BE = 2$ cm nên $AE = 4$ cm.
Diện tích tam giác ADE vuông tại A là $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ cm^2.
Vậy diện tích tứ giác $BEDF$ là $S_{BEDF} = S_{ABFD} - S_{\triangle AED} = 24 - 12 = 12$ cm^2.

□

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho $BK = KL = LC$. Tính tỉ số diện tích của

1. Các tam giác DAC và DCK. **ĐS:** $\dfrac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle DCK}} = \dfrac{3}{2}$
2. Tam giác DAC và tứ giác $ADLB$. **ĐS:** $\dfrac{S_{\triangle DAC}}{S_{ADLB}} = \dfrac{3}{5}$
3. Các tứ giác $ABKD$ và $ABLD$. **ĐS:** $\dfrac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \dfrac{4}{5}$

Lời giải.



1. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$
   nên $S_{\triangle DAC} = S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.
   Do $\triangle DCK$ và $\triangle DCB$ có chung đường cao kẻ từ D, $CK = \frac{2}{3}CB$
   nên $S_{\triangle DCK} = \frac{2}{3}S_{\triangle DCB} = \frac{2}{3}S_{\triangle DAC} \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle DAC}}{S_{\triangle DCK}} = \dfrac{3}{2}$.

b) $S_{\triangle DCL} = \frac{1}{3}S_{\triangle DCB} = \frac{1}{6}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ADLB} = S_{ABCD} - S_{\triangle DCL} = \frac{5}{6}S_{ABCD}$. Do đó $\dfrac{S_{\triangle DAC}}{S_{ADLB}} = \dfrac{3}{5}$.

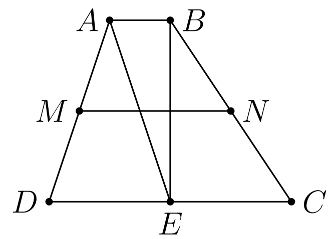
c) $S_{ABKD} = S_{ABCD} - S_{\triangle DCK} = \frac{2}{3}S_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \dfrac{4}{5}$.

□

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = a$, $CD = 3a$. Gọi E, M, N lần lượt là trung điểm của CD, AD, BC. Tính tỉ số diện tích của

1. Các tam giác DAE và CBE. **ĐS:** $\dfrac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle CBE}} = 1$
2. Tam giác EAB và hình thang $ABCD$. **ĐS:** $\dfrac{S_{\triangle EAB}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{4}$
3. Các tứ giác $AMNB$ và $DMNC$. **ĐS:** $\dfrac{S_{AMNB}}{S_{DMNC}} = \dfrac{3}{5}$

Lời giải.



1. $\triangle DAE$ và $\triangle CBE$ có hai đáy $ED = EC$, hai đường cao kẻ từ A và B bằng nhau.
   Do đó $S_{\triangle DAE} = S_{\triangle CBE} \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle CBE}} = 1$.

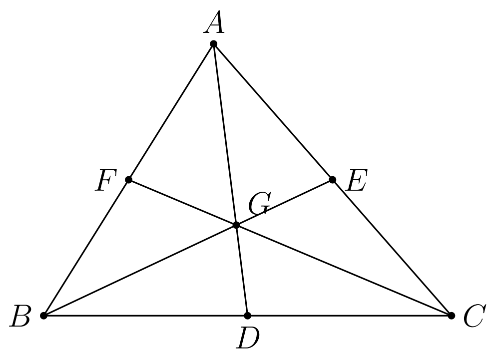
b) Ta có $\dfrac{S_{\triangle EAB}}{S_{ABCD}} = \dfrac{AB}{AB + CD} = \dfrac{a}{a + 3a} = \dfrac{1}{4}$.

c) Do M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC nên MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Nên ta có $MN = \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{a + 3a}{2} = 2a$.
Ta có $AMNB$ và $DMNC$ là hai hình thang có chiều cao bằng nhau
nên $\dfrac{S_{AMNB}}{S_{DMNC}} = \dfrac{AB + MN}{DC + MN} = \dfrac{a + 2a}{2a + 3a} = \dfrac{3}{5}$.

□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G. Chứng minh rằng $S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GBC} = S_{\triangle GAC}$.

Lời giải.



Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $GA = \dfrac{2}{3}DA$.

Nên ta có $S_{\triangle GBA} = \dfrac{2}{3}S_{\triangle DAB} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. (1)

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $GB = \dfrac{2}{3}EB$.

Nên ta có $S_{\triangle GBC} = \dfrac{2}{3}S_{\triangle BEC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. (2)

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $GC = \dfrac{2}{3}CF$.

Nên ta có $S_{\triangle GCA} = \dfrac{2}{3}S_{\triangle AFC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GBC}$.

□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng $S_{BMNC} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.

Lời giải.

Ta có N là trung điểm của AC nên $AN = \frac{1}{2}AC$,

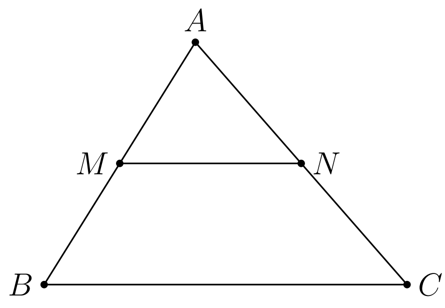
do đó $S_{\triangle MAN} = \frac{1}{2}S_{\triangle MAC}$.

Mặt khác M là trung điểm AB nên $AM = \frac{1}{2}AB$,

do đó $S_{\triangle CAM} = \frac{1}{2}S_{\triangle CAB}$.

Khi đó $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

Vậy $S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.



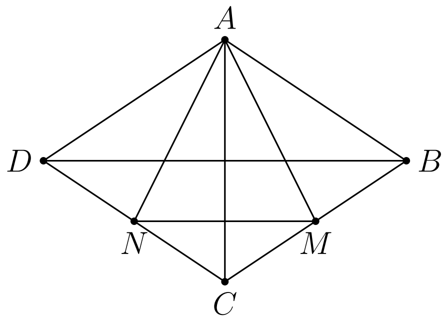
□

3 Bài tập về nhà

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 12$ cm, $BD = 16$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CB, CD. Tính

1. Diện tích hình thoi $ABCD$. **ĐS:** 96 cm^2
2. Diện tích tứ giác $AMCN$. **ĐS:** 48 cm^2
3. Diện tích tam giác AMN. **ĐS:** 36 cm^2

Lời giải.



1. Diện tích hình thoi $ABCD$ là
   $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ cm^2.
2. Do M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD nên $MN \parallel BD \Rightarrow MN \parallel AC$.
   Ta lại có $MN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ cm.
   Do đó $S_{AMCN} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ cm^2.

c) Ta có N là trung điểm của DC nên $CN = \frac{1}{2}DC$, do đó $S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2}S_{\triangle MDC}$.

Mặt khác M là trung điểm CB nên $CM = \frac{1}{2}CB$, do đó $S_{\triangle DCM} = \frac{1}{2}S_{\triangle DCB}$.

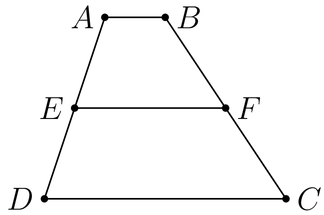
Khi đó $S_{\triangle CMN} = \frac{1}{4}S_{\triangle CBD} = \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{1}{8} \cdot 96 = 12$ cm^2.

Vậy diện tích tam giác AMN là $S_{\triangle AMN} = S_{AMCN} - S_{\triangle CMN} = 48 - 12 = 36$ cm^2.

□

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $3CD = 7AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính tỉ số diện tích của hai tứ giác $ABFE$ và $DCFE$. **ĐS:** $\dfrac{S_{ABFE}}{S_{DCFE}} = \dfrac{2}{3}$

Lời giải.

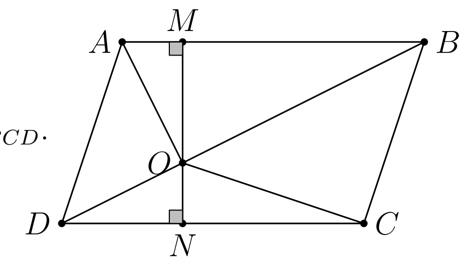


Ta có $3CD = 7AB \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3}{7} = a \Rightarrow AB = 3a$, $CD = 7a$.
Do E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC nên EF là đường trung bình của hình thang $ABCD$.
Khi đó ta có $EF = \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{3a + 7a}{2} = 5a$.
Vì $ABFE$ và $DCFE$ là hai hình thang có chiều cao bằng nhau nên $\dfrac{S_{ABFE}}{S_{DCFE}} = \dfrac{AB + EF}{CD + EF} = \dfrac{3a + 5a}{7a + 5a} = \dfrac{2}{3}$.

□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm O bất kỳ nằm trong hình bình hành. Chứng minh rằng $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$.

Lời giải.



Kẻ $OM \perp AB$, $ON \perp DC$. Do $AB \parallel CD$ nên O, M, N thẳng hàng, ta có

$$S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot CD = \frac{1}{2}AB \cdot MN = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Mặt khác $S_{\triangle OAD} + S_{\triangle CBO} = S_{ABCD} - (S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD}) = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.
Do đó $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle COD} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$.

□