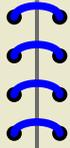


Chương 4



Hàm số $y = ax^2, a \neq 0$. Phương trình bậc hai một ẩn

§1 Hàm số và đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

1. Tập xác định: Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Tính đồng biến và nghịch biến:

Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến với mọi $x > 0$ và nghịch biến với mọi $x < 0$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$ và đồng biến với mọi $x < 0$.

3. Miền giá trị:

Nếu $a > 0$ thì $y \geq 0$ với mọi x . Khi đó $\min y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Nếu $a < 0$ thì $y \leq 0$ với mọi x . Khi đó $\max y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1.2 Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường parabol đi qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng. Gốc tọa độ O là đỉnh của parabol.

Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

2 Các dạng toán

Dạng 76. Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, ta thực hiện các bước sau

Bước 1: Lập bảng giá trị (nên lấy ít nhất 5 giá trị).

Bước 2: Đồ thị hàm bậc số có dạng parabol nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$, đồng thời đi qua các điểm thuộc bảng giá trị.

Bước 3: Vẽ đồ thị.

BÀI TẬP MẪU

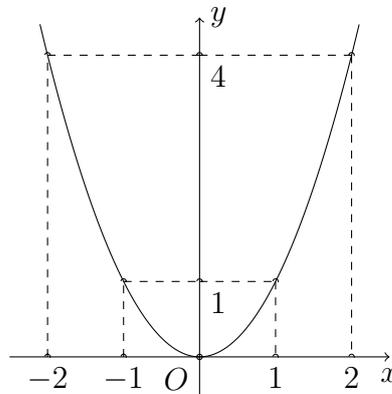
Ví dụ 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.

Lời giải.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vẽ đồ thị



□

Dạng 77. Tính giá trị của hàm số

Để tính $f(x_0)$, ta thay $x = x_0$ vào $f(x)$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2$. Hãy tính $f(1), f(-1), f(2), f(-2), f(0)$.

Lời giải.

Ta có

$$f(1) = 4 \cdot (1)^2 = 4.$$

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^2 = 4.$$

$$f(2) = 4 \cdot (2)^2 = 16.$$

$$f(-2) = 4 \cdot (-2)^2 = 16.$$

$$f(0) = 4 \cdot (0)^2 = 0.$$

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Trong các điểm $A(2; -2)$, $B(1; 0)$, $C(-1; -\frac{1}{2})$, điểm nào thuộc đồ thị (C) , điểm nào không thuộc? Vì sao?

Lời giải.

Điểm A thuộc đồ thị (C) vì $f(x_A) = -\frac{1}{2} \cdot (2)^2 = -2 = y_A$.

Điểm B không thuộc đồ thị (C) vì $f(x_B) = -\frac{1}{2} \cdot (1)^2 = -\frac{1}{2} \neq y_B$.

Điểm C thuộc đồ thị (C) vì $f(x_C) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = -\frac{1}{2} = y_C$. □

19. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ khi và chỉ khi tọa độ điểm M thỏa mãn $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 3. Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = 5x^2$ biết

- Điểm đó có hoành độ bằng -2 .
- Điểm đó có tung độ bằng 5 .

Lời giải.

1. $x = -2 \Rightarrow y = 5 \cdot (-2)^2 = 20$. Vậy tọa độ điểm là $(-2; 20)$.

2. $y = 5 \Rightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $(1; 5)$ và $(-1; 5)$. □

Ví dụ 4. Tìm m để điểm $M(m; 2m)$ sau thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^2$.

Lời giải.

Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^2$ khi và chỉ khi

$$-2m^2 = 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = 1$ thì điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^2$. □

Dạng 78. Xác định hàm số bậc hai thỏa mãn tính chất cho trước.

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (P) . Điểm $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Giáo viên:

Ví dụ 1. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2$. Biết đồ thị đi qua điểm $A(10; 30)$.

Lời giải.

Điểm $A(10; 30)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 \Leftrightarrow 30 = a \cdot 10^2 \Leftrightarrow a = \frac{3}{10}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{3}{10}x^2$. □

Dạng 79. Tính biến thiên của hàm số $y = ax^2$.

Dựa vào tính chất của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = (2m + 1)x^2 (m \neq -\frac{1}{2})$. Tìm m để

1. Hàm số đồng biến với mọi $x > 0$.
2. Hàm số đồng biến với mọi $x < 0$.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho đồng biến với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$.

2. Hàm số đã cho đồng biến với mọi $x < 0$ khi và chỉ khi $2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$. □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $0 \leq x \leq 3$.

Lời giải.

Ta có $a = -\frac{1}{4} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $0 \leq x \leq 3$. Do đó

$$f(0) \geq f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow 0 \geq y \geq -\frac{9}{4}$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $\min y = -\frac{9}{4}$ khi $x = 3$ và giá trị lớn nhất $\max y = 0$ khi $x = 0$. □

Dạng 80. Tương giao giữa parabol và đường thẳng.

Để tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) , ta tiến hành làm các bước như sau:

Bước 1: Tìm phương trình hoành độ giao điểm.

$$ax^2 = mx + n \quad (4.1)$$

Bước 2: Tìm số giao điểm

- ☑ Nếu (4.1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P) .
- ☑ Nếu (4.1) có 2 nghiệm thì phân biệt thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
- ☑ Nếu (4.1) có nghiệm kép nghiệm thì (d) tiếp xúc (P) tại 1 điểm.

Bước 3: Nếu phương trình (4.1) có nghiệm x_i thì suy ra tung độ giao điểm là $y_i = ax_i^2$ hoặc $y_i = mx_i + n$.

Bước 4: Kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

1. Tìm tọa độ giao điểm A, B ($x_A > x_B$) của (d) và (P) .
2. Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải.

1. Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P)

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Với $x = -2 \Rightarrow y = 4$.

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $A(1; 1)$ và $B(-2; 4)$.

2.

Gọi C, D là hình chiếu của B, A xuống Ox .

Ta có

$$S_{BCDA} = \frac{(BC + AD)CD}{2} = \frac{(4 + 1) \cdot 3}{2} = \frac{15}{2},$$

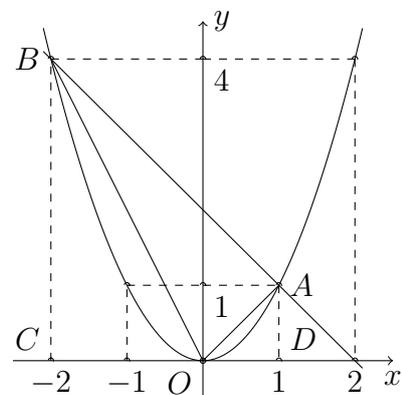
$$S_{BCO} = \frac{BC \cdot CO}{2} = 4,$$

$$S_{ADO} = \frac{AD \cdot DO}{2} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$S_{ABO} = S_{BCDA} - S_{BCO} - S_{ADO} = 3.$$

Vậy diện tích tam giác ABO bằng 3 (đvdt).



□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị hàm số (P) .

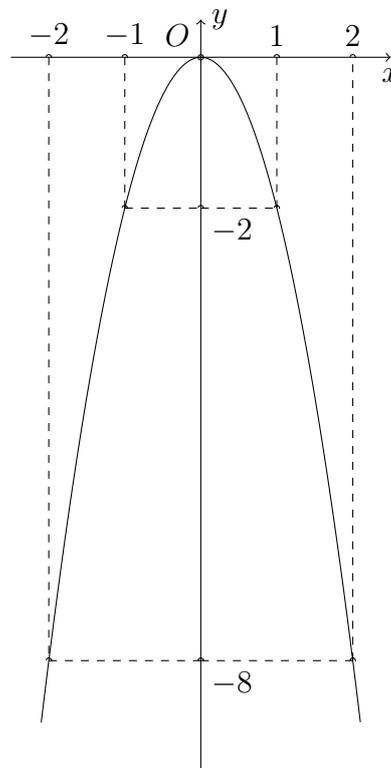
1. Xác định a biết (P) đi qua điểm $A(1; -2)$.
2. Vẽ đồ thị (P) .
3. Tìm điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2.
4. Tìm điểm thuộc (P) có tung độ bằng -4 .

Lời giải.

1. (P) đi qua điểm $A(1; -2)$ khi và chỉ khi $-2 = a \cdot 1^2 \Leftrightarrow a = -2$.
2. Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Vẽ đồ thị



□

Bài 2. Cho $y = (2m - 3)x^2$ với $2m - 3 \neq 0$.

1. Tìm m để hàm số đồng biến khi $x > 0$.
2. Tìm m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

 **Lời giải.**

- Hàm số đã cho đồng biến với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.
- Hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$.

□

 **Bài 3.** Cho hàm số $y = 2x^2$. Hãy tìm

- Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-4; -2]$.
- Giá trị lớn nhỏ của hàm số trên đoạn $[1; 3]$.

 **Lời giải.**

- Ta có $a = 2 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $-4 \leq x \leq -2$. Do đó

$$f(-4) \geq f(x) \geq f(-2) \Leftrightarrow 32 \geq y \geq 8$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $\min y = 8$ khi $x = -2$ và giá trị lớn nhất $\max y = 32$ khi $x = -4$.

- Ta có $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $1 \leq x \leq 3$. Do đó

$$f(1) \leq f(x) \leq f(3) \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 18$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $\min y = 2$ khi $x = 1$ và giá trị lớn nhất $\max y = 18$ khi $x = 3$.

□

 **Bài 4.** Cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$.

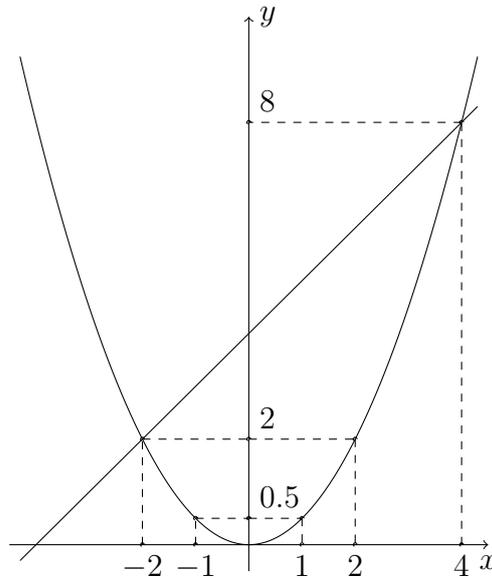
- Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

 **Lời giải.**

- Vẽ đường thẳng (d)
 Cho $x = -2 \Rightarrow y = 2$.
 Cho $x = 4 \Rightarrow y = 8$.
 Vẽ parabol (P) :
 Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị



2. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4. \end{cases}$$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$.

Với $x = 4 \Rightarrow y = 8$.

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung có tọa độ là $(-2; 2)$ và $(4; 8)$.

□



Các bài toán nâng cao

📖 **Bài 5.** Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 5]$.

📖 **Lời giải.**

Ta có $y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \Leftrightarrow y - 2 = (x - 1)^2$. Đặt $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Rightarrow Y = X^2$.

Lại có $\begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = 4 \end{cases}$.

Mà hàm số $Y = X^2$ đồng biến với mọi $X > 0$. Do đó

$$0 \leq Y \leq 16 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 14$$

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất $\max y = 14$ khi $x = 5$ và đạt giá trị lớn nhất $\min y = 2$ khi $x = 1$. □

📖 **Bài 6.** Cho hàm số $y = 2x^2 - 8x + 9$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$.

📖 **Lời giải.**

Ta có $y = 2x^2 - 8x + 9 = 2(x - 2)^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 2)^2$. Đặt $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 1 \end{cases} \Rightarrow Y = 2X^2$.

Lại có $\begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -2 \\ X = 3 \end{cases}$.

Mà hàm số $Y = 2X^2$ đồng biến với mọi $0 \leq X \leq 3$. Do đó

$$2 \cdot 0^2 \leq Y \leq 2 \cdot 3^2 \Leftrightarrow 0 \leq Y \leq 18 \tag{4.2}$$

Mặt khác hàm số $Y = 2X^2$ nghịch biến với mọi $-2 \leq X \leq 0$. Do đó

$$2 \cdot (-2)^2 \geq Y \geq 2 \cdot 0^2 \Leftrightarrow 8 \geq Y \geq 0 \tag{4.3}$$

Từ (4.2) và (4.3) suy ra

$$0 \leq Y \leq 18 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 19$$

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất $\max y = 19$ khi $x = 5$ và đạt giá trị lớn nhất $\min y = 0$ khi $x = 2$. □

Bài 7. Trên parabol $(P): y = x^2$, ta lấy hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$. Xác định điểm C trên cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc (P) với $-1 < c < 3$.

Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B và C xuống trục Ox . Ta có

$$S_{AA'C'C} = \frac{(AA' + CC')A'C'}{2} = \frac{(1 + c^2) \cdot (1 + c)}{2},$$

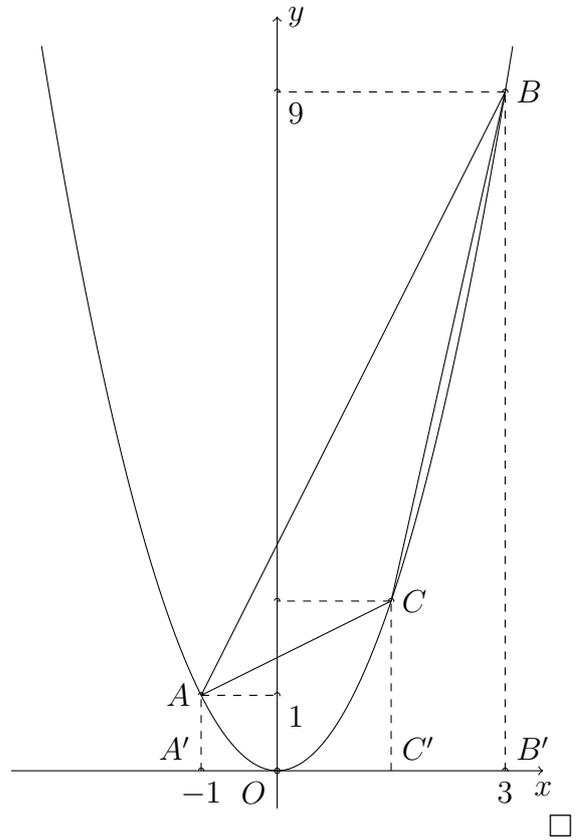
$$S_{AA'B'B} = \frac{(AA' + BB')A'B'}{2} = \frac{(1 + 9) \cdot 4}{2} = 20,$$

$$S_{CC'B'B} = \frac{(CC' + BB')C'B'}{2} = \frac{(9 + c^2) \cdot (3 - c)}{2}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AA'B'B} - S_{CC'B'B} - S_{AA'C'C} \\ &= 6 - 2c^2 + 4c \\ &= 8 - 2(c - 1)^2 \leq 8. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC lớn nhất bằng 8 khi và chỉ khi $C(1; 1)$.



§2 Phương trình bậc hai một ẩn và công thức nghiệm

1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

trong đó x là ẩn; a, b, c là các số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

Nhận xét. Phương trình (1) tương đương với phương trình

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0. \quad (2)$$

1.2 Giải phương trình bậc hai

Để tìm nghiệm của phương trình (1) ta dựa vào biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$.

- ☑ Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- ☑ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- ☑ Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Đặc biệt: Nếu $b = 2b'$ thì ta có $\Delta' = (b')^2 - ac$. Khi đó

- ☑ Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- ☑ Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- ☑ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Nhận xét. Nếu $ac < 0$ thì $\Delta > 0$, do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Hơn nữa, hai nghiệm đó trái dấu.

2 Các dạng toán

Dạng 81. Giải phương trình bậc hai

Biến đổi phương trình về dạng (1), xác định các hệ số a, b, c rồi lập biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = (b')^2 - ac$). Từ đó tìm được nghiệm (nếu có) của phương trình.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

Chú ý. Trong một vài trường hợp cụ thể (ví dụ như hệ số $b = 0$) thì ta thường sử dụng cách phân tích thành nhân tử hoặc sử dụng công thức (2) để giải. Mời các bạn theo dõi ví dụ 1 và ví dụ 2 dưới đây.

📖 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

a) $4x^2 - 9 = 0$.

b) $-2x^2 + 50 = 0$.

c) $3x^2 + 11 = 0$.

✍️ Lời giải.

1. $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$.

Phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

2. $-2x^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

Phương trình có tập nghiệm là $S = \{-5; 5\}$.

3. Vì $3x^2 + 11 > 0$ với mọi giá trị của x nên phương trình đã cho vô nghiệm. □

📖 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau

a) $x(x - 2) + 4x - 8 = 0$.

b) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

c) $2x^2 + 5x = 1$.

✍️ Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} x(x - 2) + 4x - 8 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \{-4; 2\}$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 2 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \sqrt{2} \\ x - 2 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}, \\ x = 2 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$.

3. Ta có

$$2x^2 + 5x = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \frac{25}{16} = \frac{1}{2} + \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{33}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \\ x + \frac{5}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}, \\ x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}. \end{cases}$$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ -\frac{5 - \sqrt{33}}{4}; -\frac{5 + \sqrt{33}}{4} \right\}$.

□

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $(2 - \sqrt{5})x^2 - x + (\sqrt{5} - 1) = 0$. b) $\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{2} = 0$.

Lời giải.

1. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = 2 - \sqrt{5}$; $b = -1$; $c = \sqrt{5} - 1$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1) = 29 - 12\sqrt{5} = (2\sqrt{5} - 3)^2 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 2\sqrt{5} - 3}{2(2 - \sqrt{5})} = -3 - \sqrt{5};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 3}{2(2 - \sqrt{5})} = 1.$$

2. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = \sqrt{2}$; $b = 4\sqrt{3}$ ($b' = 2\sqrt{3}$); $c = -2\sqrt{2}$.

Ta có $\Delta' = (b')^2 - ac = (2\sqrt{3})^2 - \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) = 16 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6} + 2\sqrt{2};$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2\sqrt{3} - 4}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6} - 2\sqrt{2}.$$

□

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{8x}{3} + 16 = 0$. b) $0,4x^2 - 7x + 30 = 0$.

Lời giải.

1. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = \frac{1}{9}$; $b = -\frac{8}{3}$ ($b' = -\frac{4}{3}$); $c = 16$.

Ta có $\Delta' = b'^2 - ac = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} \cdot 16 = 0$ nên phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = 12.$$

2. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = 0,4$; $b = -7$; $c = 30$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 30 = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 1}{2 \cdot 0,4} = 10;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 1}{2 \cdot 0,4} = \frac{15}{2}.$$

□

Dạng 82. Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

Khi gặp bài toán giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì ta thực hiện các bước giải như sau

- ☑ Xét trường hợp $a = 0$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành $bx + c = 0$. Đây là phương trình bậc nhất. Tiếp tục giải và biện luận phương trình bậc nhất này.
- ☑ Xét trường hợp $a \neq 0$. Lúc đó ta tính biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = (b')^2 - ac$). Dựa vào các trường hợp $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ ($\Delta' > 0$, $\Delta' = 0$, $\Delta' < 0$) ta sẽ kết luận được nghiệm của phương trình đã cho.
- ☑ Nêu kết luận về các trường hợp đã giải quyết ở trên. Kết luận sẽ giúp ta phát hiện sự thiếu sót trong việc giải và biện luận một phương trình.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$x^2 - 2(m + 3)x + (m^2 - 5) = 0. \quad (1)$$

1. Giải phương trình với $m = 2$.
2. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm, nghiệm kép, vô nghiệm?
3. Tính hiệu của nghiệm lớn và nghiệm nhỏ trong trường hợp phương trình có hai nghiệm.

Lời giải.

1. Với $m = 2$ ta có phương trình

$$x^2 - 10x - 1 = 0.$$

Ta có $\Delta' = 25 + 1 = 26 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 5 + \sqrt{26} \text{ và } x_2 = 5 - \sqrt{26}.$$

2. Phương trình (1) có

$$\Delta' = (m + 3)^2 - (m^2 - 5) = 6m + 14.$$

- ☑ Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow 6m + 14 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{3}$.
- ☑ Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow 6m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{3}$.
- ☑ Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow 6m + 14 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{7}{3}$.

3. Khi $m > -\frac{7}{3}$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = (m + 3) + \sqrt{6m + 14}; x_2 = (m + 3) - \sqrt{6m + 14}.$$

Rõ ràng $x_1 > x_2$. Khi ấy $x_1 - x_2 = 2\sqrt{6m + 14}$.

□

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$mx^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0 \quad (1)$$

Lời giải.

1. Với $m = 0$. Phương trình (1) trở thành: $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

2. Với $m \neq 0$. Ta có $\Delta' = (m - 1)^2 - m(m + 1) = -3m + 1$.

☑ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

☑ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{m - 1}{m} = -2$.

☑ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m - 1 + \sqrt{-3m + 1}}{m}; x_2 = \frac{m - 1 - \sqrt{-3m + 1}}{m}.$$

Kết luận:

☑ $m = 0$: phương trình (1) có một nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

☑ $m < \frac{1}{3}$ và $m \neq 0$: phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{m - 1 \pm \sqrt{-3m + 1}}{m}$.

☑ $m = \frac{1}{3}$: phương trình (1) có nghiệm kép $x = -2$.

☑ $m > \frac{1}{3}$: phương trình (1) vô nghiệm.

□

Chú ý. Đôi khi ta gặp một bài toán giải và biện luận phương trình có mẫu số mà phương trình này đưa về được dạng phương trình bậc hai. Đây là bài toán khó hơn ví dụ 2. Lúc ấy, nghiệm của phương trình bậc hai thu được không hẳn là nghiệm của phương trình đã cho mà ta phải so sánh chúng với điều kiện tồn tại của phương trình ban đầu. Ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình (m là tham số) sau

$$\frac{m}{x - 1} + \frac{1}{x - m} = 2. \quad (1)$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$ và $x \neq m$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} n(x - m) + x - 1 = 2(x - 1)(x - m) &\Leftrightarrow (mx - m^2) + x - 1 = 2(x^2 - x - mx + m) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3(m + 1)x + (m + 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Phương trình (2) có biệt số $\Delta = 9(m + 1)^2 - 8(m + 1)^2 = (m + 1)^2 \geq 0, \forall m$. Khi đó

☑ Nếu $m = -1$ thì phương trình (2) có nghiệm kép $x_0 = \frac{3(m + 1)}{4} = 0$. Ta thấy nghiệm này thỏa mãn nên cũng là nghiệm của phương trình (1).

☑ Nếu $m \neq -1$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3(m + 1) + (m + 1)}{4} = m + 1; \\ x_2 &= \frac{3(m + 1) - (m + 1)}{4} = \frac{m + 1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + x_1 \text{ là nghiệm của (1) khi } &\begin{cases} m + 1 \neq 1 \\ m + 1 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0. \\ + x_2 \text{ là nghiệm của (1) khi } &\begin{cases} \frac{m + 1}{2} \neq 1 \\ \frac{m + 1}{2} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1. \end{aligned}$$

Kết luận:

- ☑ $m = -1$: (1) có một nghiệm $x_0 = 0$.
- ☑ $m = 0$: (1) có một nghiệm $x_2 = \frac{m + 1}{2} = \frac{1}{2}$ (loại nghiệm x_1).
- ☑ $m = 1$: (1) có một nghiệm $x_1 = m + 1 = 2$ (loại nghiệm x_2).
- ☑ $m \neq 0$ và $m \neq \pm 1$: (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m + 1$ và $x_2 = \frac{m + 1}{2}$.

□

3 Luyện tập

📁 **Bài 1.** Giải các phương trình

- a) $5x^2 - 7x - 6 = 0$.
- b) $x^2 + 2x - 1 = 0$.
- c) $2x^2 + 5x + 1 = 0$.
- d) $2x^2 - (2\sqrt{6} + 3)x + 3\sqrt{6} = 0$.

📝 **Lời giải.**

1. Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 169 = 13^2 > 0$.
Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{7 + 13}{2 \cdot 5} = 2, x_2 = \frac{7 - 13}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$.
Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{2; -\frac{3}{5}\right\}$.

2. Ta có $\Delta' = 1 + 1 = 2$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 + \sqrt{2}; x_2 = -1 - \sqrt{2}$.
 Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$.

3. Ta có $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 17$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.

4. Ta có $\Delta = \left[- (2\sqrt{6} + 3) \right]^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{6} = 33 - 12\sqrt{6} = (2\sqrt{6} - 3)^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{(2\sqrt{6} + 3) + (2\sqrt{6} - 3)}{2 \cdot 2} = \sqrt{6};$$

$$x_2 = \frac{(2\sqrt{6} + 3) - (2\sqrt{6} - 3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \sqrt{6}; \frac{3}{2} \right\}$.

□

Bài 2. Cho phương trình (m là tham số)

$$mx^2 - (2m + 1)x + (m + 1) = 0. \tag{1}$$

- Giải phương trình (1) với $m = -\frac{3}{5}$.
- Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .
- Tìm giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

Lời giải.

1. Với $m = -\frac{3}{5}$ thì phương trình (1) trở thành

$$-\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0.$$

Ta có $\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 > 0$. Phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{1 - 5}{6} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{1 + 5}{6} = 1.$$

2. Ta có

- ☑ Nếu $m = 0$ thì phương trình (1) trở thành $-x + 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- ☑ Nếu $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai có

$$\Delta = [-(2m + 1)]^2 - 4m(m + 1) = 1 > 0.$$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Tóm lại, với mọi giá trị của m thì phương trình (1) luôn có nghiệm.

3. Nếu $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{(2m+1) - 1}{2m} = 1;$$

$$x_2 = \frac{(2m+1) + 1}{2m} = \frac{m+1}{m}.$$

Vì nghiệm $x_1 = 1 < 2$ nên ta phải xét nghiệm $x_2 > 2$.

$$\frac{m+1}{m} > 2 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy khi $0 < m < 1$ thì phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

□

Bài 3. Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0. \quad (1)$$

Lời giải.

1. Với $m = 3$. Phương trình (1) trở thành: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

2. Với $m \neq 3$. Ta có $\Delta' = m^2 - (m-3)(m-6) = 9m - 18$.

☑ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 9m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

☑ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$.

☑ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m + 3\sqrt{m-2}}{m-3}; \quad x_2 = \frac{m - 2\sqrt{m-2}}{m-3}.$$

Kết luận:

☑ $m = 3$: phương trình (1) có một nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

☑ $m > 2$ và $m \neq 3$: phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{m \pm 3\sqrt{m-2}}{m-3}$.

☑ $m = 2$: phương trình (1) có nghiệm kép $x = 2$.

☑ $m < 2$: phương trình (1) vô nghiệm.

□

Bài 4. Cho phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$(m^2 - 4)x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0 \quad (1)$$

1. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

2. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

 **Lời giải.**

1. Ta có

☑ Khi $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$, thử trực tiếp ta thấy phương trình chỉ có nghiệm khi $m = 2$.

☑ Khi $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.
Ta có $\Delta' = 4m + 8$. (*)

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $m > -2$ và $m \neq 2$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m > -2$.

2. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong hai trường hợp sau

☑ Trường hợp 1: $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2(m + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

☑ Trường hợp 2: $\begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ 4m + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Vậy với $m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

□

 **Bài 5.** Cho $a^2 + b^2 > 0$. Chứng minh rằng phương trình sau đây luôn có nghiệm

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1. \quad (1)$$

 **Lời giải.**

Điều kiện: $x \neq 0$ và $x \neq 1$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$a^2(x-1) + b^2x = x(x-1) \Leftrightarrow x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2 = 0. \quad (2)$$

Phương trình (2) có $\Delta = (a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2 = [(a-1)^2 + b^2][(a+1)^2 + b^2] \geq 0, \forall a, b$.

☑ $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = 0 \\ (a+1)^2 + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = 0; \\ a = -1, b = 0. \end{cases}$

+ Với $a = 1$ và $b = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ nên (1) có nghiệm.

+ Với $a = -1$ và $b = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ nên (1) có nghiệm.

☑ $\Delta > 0$ khi $a \neq \pm 1$ hoặc $b \neq 0$, lúc đó phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Ta đi chứng minh x_1 hoặc x_2 thỏa mãn $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

Đặt $f(x) = x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2$. Khi đó ta có $f(0) = a^2; f(1) = b^2$.

Do $a^2 + b^2 > 0$ nên $f(0)$ và $f(1)$ không đồng thời bằng 0, nên suy ra tồn tại x_1 hay x_2 khác 0 và khác -1.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 6. Giải và biện luận theo tham số m phương trình sau

$$\frac{m-1}{mx-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{m+5}{(1-mx)(x^2-1)}. \quad (1)$$

Lời giải.

1. Nếu $m = 0$ thì phương trình (1) có dạng

$$1 + \frac{2}{x^2-1} = \frac{5}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{3}{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x^2-1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

2. Nếu $m \neq 0$. Điều kiện $x \neq \pm 1$ và $x \neq \frac{1}{m}$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (m-1)(x^2-1) + 2(mx-1) = -m-5 \\ &\Leftrightarrow (m-1)x^2 - m + 1 + 2mx - 2 + m + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m-1)x^2 + 2mx + 4 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

☑ Nếu $m = 1$, phương trình (2) có dạng $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (thỏa mãn điều kiện).

☑ Nếu $m \neq 1$, phương trình (2) có

$$\Delta' = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0, \forall m.$$

Phương trình (2) có hai nghiệm

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-m + (m-2)}{m-1} = \frac{2}{1-m}; \\ x_2 &= \frac{-m - (m-2)}{m-1} = \frac{-2(m-1)}{m-1} = -2. \end{aligned}$$

Nghiệm x_2 là nghiệm của (1) nếu $\frac{1}{m} \neq -2 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$.

Nghiệm x_1 là nghiệm của (1) nếu $\begin{cases} \frac{2}{1-m} \neq 1 \\ \frac{2}{1-m} \neq -1 \\ \frac{2}{1-m} \neq \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1, \\ m \neq 3, \\ m \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$

Kết luận:

☑ Nếu $m = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \pm 2$.

☑ Nếu $m = 1$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = 3$ hoặc $m = \frac{1}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = -2$.

☑ Nếu $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{4}{3}$.

☑ Nếu $m \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; 1; 3\right\}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x_1 = -2$ và $x_2 = \frac{2}{1-m}$.

□

Bài 7. Giải và biện luận phương trình (m là tham số)

$$(2m^2 - 3m - 2)x^2 + (m^2 + 7m + 2)x - m^2 - 2m = 0. \quad (1)$$

Lời giải.

1. Nếu $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow (2m + 1)(m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2}, \\ m = 2. \end{cases}$

✓ Với $m = 2$, phương trình (1) $\Leftrightarrow 20x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$.

✓ Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình (1) $\Leftrightarrow -5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

2. Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -\frac{1}{2}$, phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$$\begin{aligned} \Delta &= (m^2 + 7m + 2)^2 + 4(2m^2 - 3m - 2)(m^2 + 2m) \\ &= 9m^4 + 18m^3 + 21m^2 + 12m + 4 \\ &= 9(m^4 + 2m^3 + m^2) + 12(m^2 + m) + 4 \\ &9(m^2 + m)^2 + 12(m^2 + m) + 4 = (3m^2 + 3m + 2)^2 \geq 0, \forall m. \end{aligned}$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(m^2 + 7m + 2) + (3m^2 + 3m + 2)}{2(2m^2 - 3m - 2)} = \frac{2m(m - 2)}{2(2m + 1)(m - 2)} = \frac{m}{2m + 1}; \\ x_2 &= \frac{-(m^2 + 7m + 2) - (3m^2 + 3m + 2)}{2(2m^2 - 3m - 2)} = \frac{-2(2m^2 + 5m + 2)}{2(2m + 1)(m - 2)} = \frac{m + 2}{2 - m}. \end{aligned}$$

Kết luận:

✓ Nếu $m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{2}{5}$.

✓ Nếu $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{3}{5}$.

✓ Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -\frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x_1 = \frac{m}{2m + 1}$ và $x_2 = \frac{m + 2}{2 - m}$.

□

Bài 8. Cho hai phương trình

$$2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0, \quad (1)$$

$$6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0. \quad (2)$$

Với giá trị nào của tham số m thì hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung? Tìm các nghiệm chung đó.

Lời giải.

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2). Khi đó ta có

$$\begin{cases} 2x_0^2 + (3m + 1)x_0 - 9 = 0 \\ 6x_0^2 + (7m - 1)x_0 - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_0^2 - 3(3m + 1)x_0 + 27 = 0 \\ 6x_0^2 + (7m - 1)x_0 - 19 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow -2(m + 2)x_0 + 8 = 0 \Rightarrow (m + 2)x_0 = 4. \quad (3)$$

Do x_0 là nghiệm nên $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$. Khi đó từ (3) suy ra $x_0 = \frac{4}{m + 2}$.

Thay $x_0 = \frac{4}{m + 2}$ vào (1) ta được

$$2\left(\frac{4}{m + 2}\right)^2 + (3m + 1) \cdot \frac{4}{m + 2} - 9 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2, \\ m = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ngược lại:

☑ Với $m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x = 1$ và $x = -\frac{9}{2}$; phương trình (2) có nghiệm là $x = 1$ và $x = -\frac{19}{6}$. Do đó, hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là $x = 1$.

☑ Với $m = \frac{2}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x = \frac{3}{2}$ và $x = -3$; phương trình (2) có nghiệm là $x = \frac{3}{2}$ và $x = -\frac{19}{9}$. Do đó, hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là $x = \frac{3}{2}$.

Vậy $m = 2$ hoặc $m = \frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 5x^2 - 4x + 1$.

Lời giải.

Gọi a là một giá trị của P . Biểu thức P nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình $5x^2 - 4x + 1 = a$ có nghiệm $\Leftrightarrow 5x^2 - 4x + 1 - a = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 5a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{5}.$$

Vậy $P_{\min} = \frac{1}{5}$ khi và chỉ khi $x = \frac{2}{5}$. □

Chú ý. Phương pháp giải ở bài tập 9 gọi là *phương pháp miền giá trị của hàm số*. Để tìm được miền giá trị này, ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$. Sau đây là một vài bài tập khác có thể sử dụng phương pháp miền giá trị của hàm số để giải.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

Gọi a là một giá trị của Q . Biểu thức Q nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình $\frac{4x - 3}{x^2 + 1} = a$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow ax^2 - 4x + (a + 3) = 0 \quad (1)$$

có nghiệm.

☑ Nếu $a = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

☑ Nếu $a \neq 0$ thì (1) (là phương trình bậc hai) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 2^2 - a(a + 3) \geq 0 \Leftrightarrow -a^2 - 3a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 1.$$

Do đó ta có

☑ $Q_{\min} = -4$ khi và chỉ khi $x = -\frac{1}{2}$.

☑ $Q_{\max} = 1$ khi và chỉ khi $x = 2$.

□

📖 **Bài 11.** Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3}$.

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$. Gọi m là một giá trị của M .

Biểu thức M nhận giá trị m khi và chỉ khi phương trình $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3} = m$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + (3a + 1) = 0 \tag{1}$$

có nghiệm.

☑ Nếu $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1$.

☑ Nếu $m \neq 1$ thì (1) (là phương trình bậc hai) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m + 1)^2 - (m - 1)(3m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Do đó ta có

☑ $M_{\min} = 1 - \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x = 1 - \sqrt{2}$.

☑ $M_{\max} = 1 + \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x = 1 + \sqrt{2}$.

□

§3 Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Hệ thức Vi-ét

Phương trình bậc hai tổng quát $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). (1)

Nếu phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thì
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Đảo lại nếu hai số x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 x_2. \end{cases}$ thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$).

Các hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm thường được vận dụng để giải toán.

$$1. x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

$$2. x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2).$$

$$3. x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2.$$

$$4. |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}.$$

$$5. \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} \text{ với } x_1, x_2 \neq 0.$$

$$6. \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} \text{ với } x_1, x_2 \neq 0$$

$$7. (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2.$$

2 Các dạng toán

Dạng 83. Tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2 .

Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P , ví dụ như

☑ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P.$

☑ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$ với $x_1, x_2 \neq 0$

☑ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$ với $x_1, x_2 \neq 0$

☑ $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{S^2 - P}{P^2}.$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

- a) $-x_1$ và $-x_2$.
- b) $2x_1$ và $2x_2$.
- c) x_1^2 và x_2^2 .
- d) $x_1 + x_2$ và x_1x_2 .
- e) $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Lời giải.

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ta có

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

1. Ta có $\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) = -S \\ (-x_1)(-x_2) = P. \end{cases}$

Do đó $-x_1$ và $-x_2$ là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ta có $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2S \\ 2x_1 \cdot 2x_2 = 4P. \end{cases}$

Do đó $2x_1$ và $2x_2$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 2SX + 4P = 0$.

3. Ta có $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^2 \cdot x_2^2 = P^2. \end{cases}$

Do đó x_1^2 và x_2^2 là nghiệm của phương trình $X^2 - (S^2 - 2P)X + P^2 = 0$.

4. Ta có
$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + x_1x_2 = S + P \\ (x_1 + x_2) \cdot x_1x_2 = S \cdot P. \end{cases}$$

Do đó $x_1 + x_2$ và x_1x_2 là nghiệm của phương trình $X^2 - (S + P)X + S \cdot P = 0$.

5. Ta có
$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} \\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{P}. \end{cases}$$

Do đó $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình $X^2 - \frac{S}{P}X + \frac{1}{P} = 0$.

□

Dạng 84. Tìm giá trị của tham số khi biết hệ đối xứng giữa các nghiệm

- ☑ Ta tìm điều kiện cho tham số để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 (thường là $a \neq 0$ và $\Delta \geq 0$).
- ☑ Từ biểu thức nghiệm đã cho, áp dụng hệ thức Vi-ét để giải phương trình (có ẩn là tham số).
- ☑ Đối chiếu với điều kiện xác định của tham số rồi sau đó xác định giá trị cần tìm.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

 **Ví dụ 1.** Cho phương trình $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

1. Giải phương trình trên khi $m = 6$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 3$.

Lời giải.

1. Với $m = 6$, ta có phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.
 $\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3; x_2 = 2$.

2. Ta có $\Delta = 25 - 4 \cdot m$.

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5$ (1)

$$x_1x_2 = m \quad (2)$$

Mặt khác theo đề bài ta có $|x_1 - x_2| = 3$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $|x_1 - 5 + x_1| = 3 \Leftrightarrow |2x_1 - 5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 5 = 3 \\ 2x_1 - 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 = 1. \end{cases}$

Suy ra $x_1 = 4; x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1; x_2 = 4$. (4)

Từ (2) và (4) suy ra $m = 4$. Thử lại thì thỏa mãn.

Vậy với $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

 **Ví dụ 2.** Giải phương trình $x^2 - 2(m - 1)x - m - 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

1. Giải phương trình với $m = -3$.

2. Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

 **Lời giải.**

1. Với $m = -3$ ta có phương trình $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8. \end{cases}$

2. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi
 $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + (m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$
 $\Leftrightarrow m^2 - m + 4 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ đúng với mọi m

Vậy chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) & (1) \\ x_1 x_2 = -m - 3 & (2). \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 10 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10 \\ &\Leftrightarrow 4(m - 1)^2 + 2(m + 3) = 10 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 10 \\ &\Leftrightarrow 2m(2m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = \frac{3}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

 **Dạng 85. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng**

Cho hai số x, y biết $x + y = S; x \cdot y = P$ thì x, y là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - S \cdot X + P = 0$ (điều kiện của hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$).

  **BÀI TẬP MẪU**  

 **Ví dụ 1.** Tìm hai số a, b biết tổng $S = a + b = -3$ và tích $P = ab = -4$.

 **Lời giải.**

Vì $a + b = -3$ và $ab = -4$ nên a, b là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Giải phương trình trên ta được $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$.

Vậy nếu $a = 1$ thì $b = -4$, nếu $a = -4$ thì $b = 1$.

□

Dạng 86. Tìm hệ thức độc lập giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số

☑ Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0. \end{cases}$$

☑ Bước 2: Áp dụng định lí Vi-et, ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 x_2 = g(m). \end{cases}$$

(I)

☑ Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

✦✦✦ BÀI TẬP MẪU ✦✦✦

📖 **Ví dụ 1.** Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m-5 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m .

✍ **Lời giải.**

Điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ 2m-11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq m \leq \frac{11}{2}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-5}{m-1}. \end{cases}$$

(I)

Khử m từ hệ (I) ta được $2(x_1 + x_2) - 3x_1 x_2 = 1$. Vậy đây là hệ thức cần tìm. □

📖 **Ví dụ 2.** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

- Giải phương trình với $m = -3$.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào giá trị của m .

✍ **Lời giải.**

- Với $m = -3$ ta có phương trình $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8. \end{cases}$

2. Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0 \text{ đúng với mọi } m.$$

Chúng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo hệ thức Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) & (1) \\ x_1 x_2 = -m - 3. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có $m = -x_1 x_2 - 3$ thế vào (1) ta có

$$x_1 + x_2 = 2(-x_1 x_2 - 3 - 1) = -2x_1 x_2 - 8 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 + 8 = 0.$$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m .

□

Dạng 87. Xét dấu hai nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \ (\Delta' \geq 0). \end{cases}$$

2. Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi
$$\begin{cases} \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ P > 0. \end{cases}$$

3. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $P < 0$.

(Khi phương trình có hai nghiệm trái dấu không cần điều kiện $\Delta > 0 \ (\Delta' > 0)$ do khi $P < 0$ thì hiển nhiên $\Delta > 0 \ (\Delta' > 0)$)

4. Phương trình có hai nghiệm dương khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

5. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ S = x_1 + x_2 < 0 \\ P = x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ (với m là tham số).

1. Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.
2. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.
3. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm khác dấu.
4. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương.
5. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm âm.

Lời giải.

1. Để phương trình có nghiệm phân biệt thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - (m^2 - 4m + 3) \geq 0$
 $\Leftrightarrow 6m - 2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$.

Vậy khi $m \geq \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

2. Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0 \\ m^2 - 4m + 3 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < 1 \\ m > 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ \frac{1}{3} < m < 1. \end{cases}$$

Vậy khi $m > 3$ hoặc $\frac{1}{3} < m < 1$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

3. Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi và chỉ khi

$$P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

4. Phương trình đã cho có hai nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1x_2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 - 4m + 3 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m > -1 \\ m < 1 \\ m > 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ \frac{1}{3} < m < 1. \end{cases}$$

Vậy khi $m > 3$ hoặc $\frac{1}{3} < m < 1$ phương trình có hai nghiệm dương.

5. Phương trình đã cho có hai nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S = x_1 + x_2 < 0 \\ P = x_1x_2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0 \\ 2(m+1) < 0 \\ m^2 - 4m + 3 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m < -1 \\ m < 1 \\ m > 3. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy không tìm được m để phương trình có hai nghiệm âm.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

a) $A = x_1^2 + x_2^2.$

b) $B = |x_1 - x_2|.$

c) $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}.$

d) $D = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_1}}.$

Lời giải.

Vì $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có

$$x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = 2.$$

1. Ta có

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21.$$

2. Ta có

$$B = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2} = \sqrt{17}.$$

3. Vì $x_1 + x_2 > 0$ và $x_1x_2 > 0$ nên $x_1 > 0, x_2 > 0$. Ta có

$$C = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^3} = \frac{5^3 - 3 \cdot 2 \cdot 5}{2^3} = \frac{95}{8}.$$

4. Ta có

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

Suy ra,

$$D = \frac{x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}} = \frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1x_2})}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{(5 - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

□

Bài 2. Tìm hai số x và y biết

a) $x + y = 18$ và $xy = 77$.

b) $x + y = -3$ và $xy = 5$.

c) $x - y = 2\sqrt{3}$ và $xy = 1$.

d) $x^2 + y^2 = 34$ và $xy = -15$.

Lời giải.

1. Vì $x + y = 18$ và $xy = 77$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - 18t + 77 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $t = 7, t = 11$.

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = (7; 11), (x; y) = (11; 7)$.

2. Vì $x + y = -3$ và $xy = 5$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 + 3t + 5 = 0.$$

Phương trình trên có $\Delta = -11 < 0$ nên vô nghiệm.

Vậy không tồn tại hai số x, y thỏa đề bài.

3. Vì $x + (-y) = 2\sqrt{3}$ và $x \cdot (-y) = -1$ nên $x, -y$ là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được các nghiệm $t = 2 - \sqrt{3}, t = 2 + \sqrt{3}$.

Do đó,

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ -y = -2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 + \sqrt{3} \\ -y = 2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = (2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}), (x; y) = (-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3})$.

4. Ta có

$$x^2 + y^2 = 34 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 34 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2. \end{cases}$$

- Với $x + y = 2$, ta được hệ $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -15. \end{cases}$

Suy ra, x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 5. \end{cases}$

Do đó,

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 5 \\ y = -3. \end{cases}$$

- Với $x + y = -2$, ta được hệ $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15 \end{cases}$.

Suy ra, x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5. \end{cases}$

Do đó,

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -5 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = \{(-3; 5), (5; -3), (3; -5); (-5; 3)\}$.

□

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m .

Lời giải.

1. Vì

$$\Delta' = (m + 1)^2 - (4m - 1) = m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 \geq 1, \forall m \in \mathbb{R}.$$

nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = 4m - 1. \end{cases}$$

Theo đề

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 10 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \\ &\Leftrightarrow 4(m + 1)^2 - 2(4m - 1) = 10 \\ &\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1. \end{aligned}$$

Vậy $m = -1, m = 1$ là giá trị cần tìm.

2. Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 & (1) \\ x_1x_2 = 4m - 1. & (2) \end{cases}$

Từ (1), ta được $2m = x_1 + x_2 - 2$. Thay vào (2) ta được

$$x_1x_2 = 2(x_1 + x_2 - 2) - 1 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5.$$

Biểu thức $2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5$ luôn đúng với mọi m . Vậy đây là biểu thức cần tìm. □

Bài 4. Cho phương trình $x^2 + x \sin \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$ (1), với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào α .

Lời giải.

1. Ta có $\Delta = \sin^2 \alpha + 4(1 - \cos \alpha)$.

Vì $\sin^2 \alpha > 0$ và $1 - \cos \alpha > 0$ với mọi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

2. Hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\sin \alpha \\ x_1x_2 = \cos \alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = \sin \alpha \\ x_1x_2 + 1 = \cos \alpha. \end{cases}$$

mà

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

nên suy ra

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1.$$

là biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào α . □

Bài 5. Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2mx + 1 = 0$ (1), với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

2. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 > 0 \\ \frac{2m}{m-1} > 0 \\ \frac{1}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \\ m > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

➤ **Bài 6.** Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - m^2 - 1 = 0$, với m là tham số.

1. Chứng minh rằng với mọi m , phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.

✍ **Lời giải.**

1. Vì $ac = -m^2 - 1 < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.
2. Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = -m^2 - 1 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = (2m + 2)^2 + m^2 + 1 = 5m^2 + 8m + 5 \\ &= 5\left(m^2 + \frac{8}{5}m + \frac{16}{25}\right) + 5 - \frac{16}{5} \\ &= 5\left(m + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{9}{5}$ khi $m = -\frac{4}{5}$.

□

4 Các bài toán nâng cao

➤ **Bài 7.** Cho phương trình

$$x^2 + 7x - 2 = 0. \quad (1)$$

Hãy lập một phương trình bậc hai có các nghiệm là lũy thừa bậc 6 của các nghiệm của phương trình (1).

✍ **Lời giải.**

Vì phương trình (1) có $ac = -1 < 0$ nên (1) luôn có hai nghiệm trái dấu.

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho, theo Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -7, \quad x_1x_2 = -2.$$

Gọi y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập, khi đó giả sử

$$y_1 = x_1^6, \quad y_2 = x_2^6.$$

Ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7^2 - 2 \cdot (-2) = 53.$$

Do đó,

$$y_1 + y_2 = x_1^6 + x_2^6 = (x_1^2 + x_2^2)^3 - 3x_1^2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = 53^3 - 3 \cdot (-2)^2 \cdot 53 = 2173.$$

và

$$y_1y_2 = x_1^6x_2^6 = (x_1x_2)^6 = (-2)^6 = 64.$$

Phương trình phải lập có tổng hai nghiệm bằng 2173 và tích hai nghiệm bằng 64 nên có dạng là

$$y^2 - 2173y + 64 = 0.$$

□

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị m .

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$.

Lời giải.

1. Vì

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 .

2. Hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Do đó,

$$P = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$$

Ta có

$$1 - P = \frac{(m - 1)^2}{m^2 + 2} \geq 0 \Rightarrow P \leq 1$$

và

$$P + \frac{1}{2} = \frac{(m + 2)^2}{2(m^2 + 2)} \geq 0 \Rightarrow P \geq -\frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{2}$ khi $m = -2$; giá trị lớn nhất của P bằng 1 khi $m = 1$. □

Bài 9. Tìm tham số m để phương trình $(m - 16)x^2 + 2(m - 19)x + m - 14 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $6(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2 \cdot x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 = 14$.

Lời giải.

Điều kiện 1. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m - 16 \neq 0 \\ (m - 19)^2 - (m - 16)(m - 14) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 16 \\ -8m + 137 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 16 \\ m \leq \frac{137}{8}. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Điều kiện 2. Với điều kiện (1), theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2m + 38}{m - 16} \\ x_1x_2 = \frac{m - 14}{m - 16}. \end{cases}$

Yêu cầu

$$\begin{aligned} &6(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2 \cdot x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 = 14 \\ \Leftrightarrow &3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - 8(x_1 + x_2) = 7 \\ \Leftrightarrow &3\left(\frac{-2m + 38}{m - 16}\right)^2 - 6\left(\frac{m - 14}{m - 16}\right) + \left(\frac{m - 14}{m - 16}\right)^2 - 8\left(\frac{-2m + 38}{m - 16}\right) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 12(m-19)^2 - 6(m-14)(m-16) + (m-14)^2 + 16(m-19)(m-16) &= 7(m-16)^2 \\ \Leftrightarrow 16m^2 - 640m + 6256 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 40m + 391 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 23 \\ m = 17. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta được $m = 17$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 10. Cho phương trình $x^2 - 2x + 2 - m = 0$, m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $2x_1^3 + (m+2)x_2^2 = 5$.

 **Lời giải.**

Điều kiện 1. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1. \quad (1)$$

Điều kiện 2. Với điều kiện (1), theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 2 - m. \end{cases}$

Ta có $x_1^2 - 2x_1 + 2 - m = 0$ và $x_2^2 - 2x_2 + 2 - m = 0$.

Khi đó, yêu cầu đề bài

$$\begin{aligned} 2x_1^3 + (m+2)x_2^2 = 5 &\Leftrightarrow 2x_1(2x_1 - 2 + m) + (m+2)x_2^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow 4x_1^2 - 4x_1 + 2mx_1 + (m+2)x_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(2x_1 - 2 + m) - 4x_1 + 2mx_1 + (m+2)(2x_2 - 2 + m) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2m+4)(x_1 + x_2) + m^2 + 4m - 12 = 5 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta được $m = 1$ là giá trị cần tìm.

□

§4 Phương trình quy về phương trình bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương trình trùng phương.

1. Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0). \quad (1)$$

2. **Phương pháp giải** Để giải phương trình trùng phương, ta thực hiện theo ba bước

- ✓ **Bước 1:** Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $at^2 + bt + c = 0$.
- ✓ **Bước 2:** Giải phương trình bậc hai theo ẩn t (chú ý điều kiện của t).
- ✓ **Bước 3:** Với giá trị t vừa tìm được, ta trả về biến x và kết luận nghiệm của phương trình (1).

1.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Phương pháp giải Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta thực hiện theo bốn bước

- ✓ **Bước 1:** Tìm điều kiện xác định của phương trình.
- ✓ **Bước 2:** Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.
- ✓ **Bước 3:** Giải phương trình vừa nhận được.
- ✓ **Bước 4:** Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện xác định, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

1.3 Phương trình bậc cao có thể đưa về phương trình tích.

1. **Lược đồ Hooc-ne**

- ✓ Lược đồ Hooc-ne dùng để tìm đa thức thương và dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - \alpha$. Cách làm như sau:

Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Khi đó, đa thức thương

$$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

được xác định theo lược đồ sau

	a_0	a_1	$\dots\dots\dots$	a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = b_0 \cdot \alpha + a_1$		$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot \alpha + a_{n-1}$	$r = b_{n-1} \cdot \alpha + a_n$

- ✓ Quy tắc nhớ: “**Nhân ngang cộng chéo**”.

⚠ **20.** Trong lược đồ trên, dòng đầu phải viết tất cả các hệ số của $f(x)$, kể cả các hệ số bằng 0. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì $r = 0$.

2. Phương pháp giải

- ☑ Phân tích về trái thành nhân tử, về phải bằng 0.
- ☑ Giải phương trình tích

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0. \end{cases}$$

1.4 Phương trình vô tỉ.

Phương trình vô tỉ là phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn thức. Trong nội dung bài học này ta chỉ xét các phương trình vô tỉ là các phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai.

1.5 Một số phương trình có dạng đặc biệt.

2 Các dạng toán

Dạng 88. Giải và biện luận phương trình trùng phương

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $3x^4 - 5x^2 - 28 = 0;$

b) $x^4 + x^2 - 2 = 0.$

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2$, ($t \geq 0$).

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } 3t^2 - 5t - 28 = 0 \tag{1}$$

$$\text{Ta có } \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-28) = 361.$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{5 - 19}{6} = \frac{-7}{3} \quad (\text{loại});$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{5 + 19}{6} = 4 \quad (\text{thỏa}).$$

Với $t = 4$, ta có $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 2\}$.

2. Đặt $t = x^2$, ($t \geq 0$).

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } t^2 + t - 2 = 0.$$

Ta có $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = 1$ (nhận), $t_2 = -2$ (loại).

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 1$ hoặc $x = -1$.

□

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ (m là tham số, x là ẩn số) có bốn nghiệm.

Lời giải.

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 6t + m - 1 = 0$. (2)

Để phương trình đã cho có bốn nghiệm thì phương trình (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (m - 1) > 0 \\ 6 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 10.$$

Vậy với $1 < m < 10$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm. □

Dạng 89. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1}{x - 3};$

b) $\frac{x - 1}{x + 2} + \frac{2}{x - 2} = \frac{12}{x^2 - 4}.$

Lời giải.

1. Mẫu thức chung $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

Điều kiện xác định $x \neq 3; x \neq -3$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1}{x - 3} &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \frac{x + 3}{x^2 - 9} \\ &\Rightarrow x^2 - 3x + 6 = x + 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{nhận}) \\ x = 3 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

2. Mẫu thức chung $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Điều kiện xác định $x \neq 2; x \neq -2$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{x + 2} + \frac{2}{x - 2} = \frac{12}{x^2 - 4} &\Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} + \frac{2(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{12}{(x - 2)(x + 2)} \\ &\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + 2x + 4 = 12 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{nhận}) \\ x = -2 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

**Dạng 90. Phương trình đưa về phương trình tích**

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0. \end{cases}$$

BÀI TẬP MẪU**Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

a) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0;$

b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0;$

c) $(2x^2 + x)^2 = (5 - 2x)^2.$

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 2x = 0 &\Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -1; -2\}$.

2.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 &\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2) - (x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x + 3) - (x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -1; -3\}$.

3.

$$\begin{aligned} (2x^2 + x)^2 = (5 - 2x)^2 &\Leftrightarrow (2x^2 + x)^2 - (5 - 2x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 + x - 5 + 2x)(2x^2 + x + 5 - 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 + 3x - 5)(2x^2 - x + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 = 0 & (1) \\ 2x^2 - x + 5 = 0. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- ☑ Giải (1) Phương trình $2x^2 + 3x - 5 = 0$ có $a + b + c = 2 + 3 + (-5) = 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{-5}{2}$.
- ☑ Giải (2) Phương trình $2x^2 - x + 5 = 0$ có $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 < 0$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \frac{-5}{2}\right\}$.

□

Dạng 91. Phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải

- ☑ Đặt điều kiện để phương trình xác định.
- ☑ Đặt ẩn phụ thích hợp và giải phương trình theo ẩn mới.
- ☑ Trở về ẩn ban đầu và so sánh với điều kiện.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

- a) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0;$ b) $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0;$
 c) $\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 - 4\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 3 = 0;$ d) $3x^2 - 14|x| - 5 = 0.$

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2 - 2x$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3. \end{cases}$
- ☑ Với $t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
 - ☑ Với $t = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -1; 3\}$.

2. Ta có $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 - 4(x^2 + 2) - 77 = 0.$
 Đặt $t = x^2 + 2; t \geq 2$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4t - 77 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 11 & (\text{nhận}) \\ t = -7 & (\text{loại}). \end{cases}$$

Với $t = 11 \Rightarrow x^2 + 2 = 11 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; -3\}$.

3. Điều kiện xác định $x \neq -2$.
 Đặt $t = \frac{2x-1}{x+2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ Với } t = 1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} = 1 \Rightarrow 2x-1 = x+2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (nhận).}$$

$$\checkmark \text{ Với } t = 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} = 3 \Rightarrow 2x-1 = 3(x+2) \Leftrightarrow x = -7 \text{ (nhận).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; -7\}$.

4. Ta có $3x^2 - 14|x| - 5 = 0 \Leftrightarrow 3|x|^2 - 14|x| - 5 = 0$.

Đặt $t = |x|$; $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$3t^2 - 14t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 & \text{(nhận)} \\ t = -\frac{1}{3} & \text{(loại)}. \end{cases}$$

Với $t = 5 \Rightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = -5$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{5; -5\}$. □

Dạng 92. Phương trình bậc bốn $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ với $a+b = c+d$

Phương pháp giải

$$\checkmark \text{ Phương trình được viết lại thành } [x^2 + (a+b)x + ad] \cdot [x^2 + (c+d)x + cd] = m.$$

$$\checkmark \text{ Đặt } t = x^2 + (a+b)x, \text{ ta được phương trình bậc hai } (t+ab)(t+cd) = m.$$

$$\checkmark \text{ Giải phương trình tìm } t, \text{ từ đó tìm } x.$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24 &\Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = 24 \\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 24 \\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1) = 24 \\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+5)^2 - 1 = 24 \\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+5)^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2+5x)(x^2+5x+10) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x = 0 \\ x^2+5x+10 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-5; 0\}$.

Cách 2: Ta có $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24 \Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 24$.

Đặt $t = x^2 + 5x$. Phương trình trở thành

$$(t+4)(t+6) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -10. \end{cases}$$

☑ Với $t = 0 \Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5. \end{cases}$

☑ Với $t = -10 \Rightarrow x^2 + 5x = -10 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-5; 0\}$. □

Dạng 93. Phương trình đối xứng bậc bốn, phương trình hồi quy

Phương pháp giải

1. Phương trình đối xứng bậc bốn có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$).

☑ Kiểm tra $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

☑ Chia hai vế của phương trình cho x^2 , rồi đặt ẩn phụ $x + \frac{1}{x} = t$.

☑ Giải phương trình ẩn t rồi trả về biến x và tìm nghiệm.

2. Phương trình hồi quy có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($ae \neq 0$); trong đó $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

☑ Kiểm tra $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

☑ Chia hai vế của phương trình cho x^2 , rồi đặt ẩn phụ $x + \frac{d}{bx} = t$.

☑ Giải phương trình ẩn t rồi trả về biến x và tìm nghiệm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Lời giải.

☑ Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

☑ Với $x \neq 0$, Chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} + 3x + \frac{3}{x} - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Khi đó phương trình trở thành

$$2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

• Với $t = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 + \sqrt{3}. \end{cases}$

$$\bullet \text{ Với } t = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}; 2; \frac{1}{2}\right\}$. \square

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$.

Lời giải.

✓ Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

✓ Với $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{4}{x^2} - 2x - \frac{4}{x} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Đặt $x + \frac{2}{x} = t \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t^2 - 4) - 2t - 4 &= 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

• Với $t = -2 \Rightarrow x + \frac{2}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm).

• Với $t = 4 \Rightarrow x + \frac{2}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$. \square

Dạng 94. Phương trình dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

✓ Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$. Phương trình trở thành

$$\left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^4 = c.$$

✓ Khai triển và rút gọn, giải phương trình ẩn t .

✓ Cách giải trên còn áp dụng cho phương trình bậc 6.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x + 4)^4 + (x + 6)^4 = 82$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = x + \frac{4+6}{2} = x + 5 \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = t - 1 \\ x + 6 = t + 1 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t-1)^4 + (t+1)^4 = 82 &\Leftrightarrow [(t-1)^2 + (t+1)^2]^2 - 2(t-1)^2(t+1)^2 = 82 \\ &\Leftrightarrow [t^2 - 2t + 1 + t^2 + 2t + 1]^2 - 2(t^2 - 1)^2 = 82 \\ &\Leftrightarrow [2t^2 + 2]^2 - 2(t^4 - 2t^2 + 1) - 82 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4t^4 + 8t^2 + 4 - 2t^4 + 4t^2 - 2 - 82 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 80 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 40 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } u = t^2, u \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } u^2 + 6u - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 & (\text{nhận}) \\ u = -10 & (\text{loại}). \end{cases}$$

$$\text{Với } u = 4 \Rightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2. \end{cases}$$

Với $t = 2 \Leftrightarrow x + 5 = 2 \Leftrightarrow x = -3$.

Với $t = -2 \Leftrightarrow x + 5 = -2 \Leftrightarrow x = -7$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; -7\}$. □

Dạng 95. Phương trình dạng phân thức hữu tỉ

Phương pháp giải

Trong nội dung này, chúng ta xét một số nội dung sau

1. $\frac{mx}{ax^2 + bx + c} + \frac{nx}{ax^2 + cx + d} = p;$
2. $\frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = d;$
3. $\frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{px}{ax^2 + qx + c} = d.$

Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt ẩn phụ thích hợp.

Giải phương trình vừa tìm được.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2};$ b) $\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15};$

c) $\frac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \frac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\frac{1}{12}.$

Lời giải.

1. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia tử và mẫu của phương trình cho x , ta được

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2} &\Rightarrow \frac{4}{x + 1 + \frac{3}{x}} + \frac{5}{x - 5 + \frac{3}{x}} = -\frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{x + \frac{3}{x} + 1} + \frac{5}{x + \frac{3}{x} - 5} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{3}{x} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{x} + 1 = t + 1 \\ x + \frac{3}{x} - 5 = t - 5. \end{cases}$$

Khi đó, với $t \neq -1$, $t \neq 5$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{4}{t+1} + \frac{5}{t-5} = -\frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{8(t-5) + 10(t+1)}{2(t+1)(t-5)} + \frac{3(t+1)(t-5)}{2(t+1)(t-5)} = 0 \\ &\Rightarrow 8t - 40 + 10t + 10 + 3t^2 - 12t - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3t^2 + 6t - 45 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 & (\text{nhận}) \\ t = -5 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

☑ Với $t = 3 \Rightarrow x + \frac{3}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$ (vô nghiệm).

☑ Với $t = -5 \Rightarrow x + \frac{3}{x} = -5 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \right\}$.

2. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia tử và mẫu của phương trình cho x , ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15} &\Rightarrow \frac{x - 10 + \frac{15}{x}}{x - 6 + \frac{15}{x}} = \frac{4}{x - 12 + \frac{15}{x}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x + \frac{15}{x} - 10}{x + \frac{15}{x} - 6} = \frac{4}{x + \frac{15}{x} - 12}. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{15}{x} - 9 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{15}{x} - 10 = t - 1 \\ x + \frac{15}{x} - 6 = t + 3 \\ x + \frac{15}{x} - 12 = t - 3. \end{cases}$$

Khi đó, với $t \neq -3$, $t \neq 3$ phương trình trở thành

$$\frac{t-1}{t+3} = \frac{4}{t-3} \Rightarrow (t-1)(t-3) = 4(t+3)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 - 4t - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 8t - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{nhận}) \\ t = 9 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

☑ Với $t = -1 \Rightarrow x + \frac{15}{x} - 9 = -1 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$

☑ Với $t = 9 \Rightarrow x + \frac{15}{x} - 9 = 9 \Rightarrow x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + \sqrt{66} \\ x = 9 - \sqrt{66}. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; 5; 9 \pm \sqrt{66}\}$.

3. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia tử và mẫu của phương trình cho x , ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \frac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\frac{1}{12} &\Rightarrow \frac{x - 13 + \frac{15}{x}}{x - 14 + \frac{15}{x}} - \frac{x - 15 + \frac{15}{x}}{x - 16 + \frac{15}{x}} = -\frac{1}{12} \\ &\Leftrightarrow \frac{x + \frac{15}{x} - 13}{x + \frac{15}{x} - 14} - \frac{x + \frac{15}{x} - 15}{x + \frac{15}{x} - 16} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Đặt $t = x + \frac{15}{x} - 15 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{15}{x} - 13 = t + 2 \\ x + \frac{15}{x} - 14 = t + 1 \\ x + \frac{15}{x} - 16 = t - 1. \end{cases}$

Khi đó, với $t \neq -1, t \neq 1$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{t+2}{t+1} - \frac{t}{t-1} = -\frac{1}{12} &\Rightarrow 12(t+2)(t-1) - 12t(t+1) + (t+1)(t-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 12t^2 + 12t - 24 - 12t^2 - 12t + t^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 & (\text{nhận}) \\ t = 5 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

☑ Với $t = -5 \Rightarrow x + \frac{15}{x} - 15 = -5 \Rightarrow x^2 - 10x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \sqrt{10} \\ x = 5 + \sqrt{10}. \end{cases}$

☑ Với $t = 5 \Rightarrow x + \frac{15}{x} - 15 = 5 \Rightarrow x^2 - 20x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + \sqrt{85} \\ x = 10 - \sqrt{85}. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{5 \pm \sqrt{10}; 10 \pm \sqrt{85}\}$.

□

Dạng 96. Nâng lũy thừa hai vế của phương trình

Nâng lũy thừa hai vế của phương trình để làm mất căn thức, đưa về phương trình đơn giản. Ta xét hai dạng phương trình sau

$$\checkmark \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2. \end{cases}$$

$$\checkmark \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ (hoặc } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

⚠ **21.** Chú ý các hằng đẳng thức khi giải phương trình này.

$$\checkmark (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\checkmark (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\checkmark (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau

$$1. \sqrt{x+1} = x-1.$$

$$3. \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}.$$

$$2. \sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0.$$

$$4. \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}.$$

📝 Lời giải.

1. Ta có

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

2. Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0 &\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 9(x^2-4) = x-2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 9x^2 - x - 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{17}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

$$3. \text{Điều kiện xác định của phương trình là } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \text{ hay } -4 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Ta có

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} \\ &\Leftrightarrow x+4 = 1-x + 2\sqrt{(1-x)(1-2x)} + 1-2x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1} = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2-3x+1 = 4x^2+4x+1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2+7x=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{7}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta nhận $x = 0, x = -\frac{7}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$ hay $x \geq 0$.

Ta có

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{4x} - \sqrt{x+3}.$$

Bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình

$$\begin{aligned} &3x+1 - 2\sqrt{(3x+1)(2x+2)} + 2x+2 = 4x - 2\sqrt{4x(x+3)} + x+3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{6x^2+8x+2} = \sqrt{4x^2+12x} \\ &\Leftrightarrow 6x^2+8x+2 = 4x^2+12x \\ &\Leftrightarrow 2x^2-4x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta nhận $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho. □

Dạng 97. Biến đổi đẳng thức, dùng hằng đẳng thức

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8.$
2. $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4.$
3. $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1.$
4. $2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2}.$

Lời giải.

1. Ta có $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$ nên phương trình đã cho luôn xác định với mọi x . Khi đó

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2} = 8 - x \Leftrightarrow |x - 2| = 8 - x.$$

☑ Nếu $x - 2 \geq 0$ hay $x \geq 2$ thì ta được

$$x - 2 = 8 - x \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn } x \geq 2\text{)}.$$

☑ Nếu $x - 2 < 0$ hay $x < 2$ thì ta được

$$2 - x = 8 - x \Leftrightarrow 0x = 6 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 5$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x + 3 \geq 0$ hay $x \geq -3$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4 &\Leftrightarrow x + 4 + 2\sqrt{x+3} = 9x^2 \Leftrightarrow x + 3 + 2\sqrt{x+3} + 1 = 9x^2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} + 1)^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 3x - 1 \\ \sqrt{x+3} = -3x - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta giải từng phương trình trên.

$$\text{☑ } \sqrt{x+3} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ 9x^2 - 7x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 1 & \Leftrightarrow x = 1. \\ x = -\frac{2}{7} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{☑ } \sqrt{x+3} = -3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 1 \geq 0 \\ 9x^2 + 5x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18} & \Leftrightarrow x = -\frac{5 + \sqrt{97}}{18}. \\ x = \frac{-5 + \sqrt{97}}{18} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1, x = -\frac{5 + \sqrt{97}}{18}$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| &= 1. \end{aligned}$$

☑ Nếu $0 \leq \sqrt{x-1} < 2$ hay $1 \leq x < 5$ thì ta được

$$2 - \sqrt{x-1} + 3 - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (loại)}.$$

☑ Nếu $2 \leq \sqrt{x-1} < 3$ hay $5 \leq x < 10$ thì ta được

$$\sqrt{x-1} - 2 + 3 - \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (luôn đúng với mọi } 5 \leq x < 10\text{)}.$$

☑ Nếu $\sqrt{x-1} \geq 3$ thì ta được

$$\sqrt{x-1} - 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (nhận)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $5 \leq x \leq 10$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq \frac{2}{3}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 2 &= x\sqrt{3x-2} \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 12x + 8 &= 4x\sqrt{3x-2} \\ \Leftrightarrow 9x^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{3x-2} + 4(3x-2) \\ \Leftrightarrow (3x)^2 &= (x + 2\sqrt{3x-2})^2 \\ \Leftrightarrow 3x &= x + 2\sqrt{3x-2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} &= x \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $x = 1, x = 2$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

□

Dạng 98. Biến đổi thành tổng các số hạng không âm

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4}$.

2. $x^4 - 2x^2 + 2x + 21 = 6\sqrt{2x+11}$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\frac{4}{3}$.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= 2\sqrt{3x+4} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (1 - \sqrt{3x+4})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ 1 - \sqrt{3x+4} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{3x+4} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\frac{11}{2}$.

Ta có

$$x^4 - 2x^2 + 2x + 21 = 6\sqrt{2x+11}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + 2x + 11 - 6\sqrt{2x + 11} + 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (\sqrt{2x + 11} - 3)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \sqrt{2x + 11} - 3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ \sqrt{2x + 11} = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = -1.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

□

Dạng 99. Đặt ẩn phụ hoàn toàn

Chúng ta có một số cách đặt ẩn phụ thường gặp sau:

1. Phương trình có dạng $a \cdot f(x) + b \cdot \sqrt{f(x)} + c = 0$, trong đó a, b, c là các hằng số.
Đặt $t = \sqrt{f(x)} \geq 0$ và chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t .
2. Phương trình có dạng $a \cdot f(x) + b \cdot \frac{1}{f(x)} + c = 0$, trong đó a, b, c là các hằng số.
Đặt $t = f(x) \neq 0$ và chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t .
3. Phương trình có dạng $a(\sqrt{u(x) \pm v(x)}) + b\sqrt{u(x) \cdot v(x)} + c = 0$ với a, b, c là các hằng số và $u(x) + v(x)$ là một hằng số dương.
Đặt $t = (\sqrt{u(x) \pm v(x)})$ rồi bình phương hai vế để rút ra $\sqrt{u(x) \cdot v(x)}$ theo t ; từ đó chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t .
4. Phương trình có dạng $a \cdot u^2 + b \cdot u \cdot v + c \cdot v^2 = 0$ với a, b, c là các hằng số và $u = u(x)$, $v = v(x)$.
Để giải phương trình này, trước hết ta xét xem khi $v(x) = 0$, phương trình có nghiệm hay không.
Trong trường hợp $v(x) \neq 0$, ta chia hai vế phương trình cho $v(x)$, phương trình trên được viết lại $a \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^2 + b \cdot \frac{u}{v} + c = 0$.
Đặt $t = \frac{u}{v}$ và đưa phương trình trên thành phương trình bậc hai theo t . Giải phương trình ẩn t này để tìm mối liên hệ giữa u, v và giải ra x .

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Giải phương trình sau

1. $2x^2 - x + \sqrt{2x^2 - x + 4} = 2$.
2. $\sqrt{x+7} - \sqrt{2-x} + 4\sqrt{14-5x-x^2} = 3$.
3. $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} - 3\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 4$.
4. $2x^2 = 5\sqrt{x^3 + 1} - 4$.

 **Lời giải.**

1. Điều kiện xác định của phương trình là $2x^2 - x + 4 \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - x + 4}$ với $t \geq 0$. Ta có $2x^2 - x = t^2 - 4$ và phương trình trở thành

$$t^2 - 4 + t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3. \end{cases}$$

Ta chỉ nhận $t = 2$, ta có phương trình

$$\sqrt{2x^2 - x + 4} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $-7 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{2-x}$. Ta có $t^2 = 9 - 2\sqrt{-x^2 - 5x + 14}$ nên phương trình đã cho trở thành

$$t + 2(9 - t^2) = 3 \Leftrightarrow -2t^2 + t + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Với $t = 3$, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+7} - \sqrt{2-x} = 3 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x+7} = 3 + \sqrt{2-x} \\ \Leftrightarrow & x+7 = 11 - x + 6\sqrt{2-x} \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt{2-x} = x-2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 2 \\ 9(2-x) = (x-2)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 5x - 14 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 2. \end{aligned}$$

Với $t = -\frac{5}{2}$, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+7} - \sqrt{2-x} = -\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x+7} + 5 = 2\sqrt{2-x} \\ \Leftrightarrow & 4x + 28 + 20\sqrt{x+7} + 25 = 8 - 4x \\ \Leftrightarrow & 20\sqrt{x+7} = -45 - 8x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 64x^2 + 320x - 775 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -7 \\ \begin{cases} x = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{47}}{8} \\ x = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{47}}{8} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{47}}{8} \\ x = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{47}}{8} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $x = 2$, $x = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{47}}{8}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$.

Nhận thấy rằng $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 1$ nên ta đặt $t = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \geq 0$. Lúc đó $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{t}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t - \frac{3}{t} = -2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (\text{nhận}) \\ t = -3 & (\text{loại}). \end{cases}$$

Với $t = 1$, ta có

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện, suy ra phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -1$.

Phương trình viết lại thành

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow 2((x + 1) + x^2 - x + 1) = 5\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Đặt $u = \sqrt{x + 1} \geq 0$ và $v = \sqrt{x^2 - x + 1} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình trở thành

$$2u^2 - 5uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\frac{u}{v} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ v = 2u. \end{cases}$$

Với $u = 2v$, ta có $x + 1 = 4(x^2 - x + 1)$, phương trình này vô nghiệm.

Với $v = 2u$, ta có $x^2 - x + 1 = 4(x + 1) \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

□

Dạng 100. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Phương pháp này có thể sử dụng để giải nhiều dạng phương trình khác nhau nhưng phổ biến nhất là dạng $(ax + b)\sqrt{cx^2 + dx + e} = px^2 + qx + r$, trong đó a, b, c, d, e, p, q, r là các hằng số.

Đặt $t = \sqrt{cx^2 + dx + e}$, chuyển phương trình đã cho thành phương trình bậc hai ẩn t , tham số x và có biệt thức Δ là một biểu thức chính phương (thông thường $\Delta = (mx + n)^2$).

Giải phương trình ẩn t này để tìm mối liên hệ giữa t và x ; cùng với $t = \sqrt{cx^2 + dx + e}$, chúng ta giải ra được x .

BÀI TẬP MẪU

Giáo viên:

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2 + (3 - \sqrt{x^2 + 5})x = 2\sqrt{x^2 + 5} - 2$.

Lời giải.

Phương trình được viết lại thành $x^2 + 5 + (3 - \sqrt{x^2 + 5})x = 2\sqrt{x^2 + 5} + 3$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5}$, phương trình trở thành

$$t^2 + (3 - t)x = 2t + 3 \Leftrightarrow t^2 - (x + 2)t - 3 + 3x = 0.$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn t , tham số x .

Ta có $\Delta = (x + 2)^2 - 4 \cdot (3x - 3) = (x - 4)^2 \geq 0$ nên phương trình trên có hai nghiệm

$$t = \frac{x + 2 + x - 4}{2} = x - 1 \text{ và } t = 3.$$

Với $t = 3$, ta có $\sqrt{x^2 + 5} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với $t = x - 1$, ta có $\sqrt{x^2 + 5} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 5 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -2 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm 2$. □

Dạng 101. Dùng lượng liên hợp

Phương pháp dùng biểu thức liên hợp còn được gọi là phương pháp khử căn thức ở tử, thường dùng hơn cả là

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}; \tag{1}$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} - \sqrt{B}}. \tag{2}$$

Trong các công thức (1) và (2), khi nhân và chia vế trái với biểu thức liên hợp của nó, ta được vế phải. Mục đích của việc khử căn thức ở tử nhằm làm xuất hiện nhân tử chung.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x + 4}$.

2. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 1} = 2x - 4$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\frac{4}{3}$.

Với nhận xét -1 là một nghiệm, ta biến đổi.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= 2\sqrt{3x + 4} \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) + 2 &= 2\sqrt{3x + 4} \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) &= 2(\sqrt{3x + 4} - 1) \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) &= \frac{2(3x + 4 - 1)}{\sqrt{3x + 4} + 1} \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4) &= \frac{6(x + 1)}{\sqrt{3x + 4} + 1}. \end{aligned}$$

Rõ ràng $x = -1$ thỏa mãn phương trình.

$$\text{Với } x \neq -1 \text{ ta có } x + 4 = \frac{6}{1 + \sqrt{3x + 4}}. \quad (*)$$

Với $x > -1$ thì (*) có vế trái lớn hơn 3, vế phải nhỏ hơn 3, nên phương trình vô nghiệm.

Với $-\frac{4}{3} \leq x < -1$ thì (*) có vế trái nhỏ hơn 3, vế phải lớn hơn 3, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq \frac{1}{2}$.

Với nhận xét 2 là một nghiệm của phương trình đã cho, ta nhân và chia vế trái của phương trình với biểu thức liên hợp ta được

$$\frac{(2x - 1) - (x + 1)}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x + 1}} = 2(x - 2) \Leftrightarrow \frac{x - 2}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x + 1}} = 2(x - 2).$$

Rõ ràng $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{Với } x \neq 2 \text{ ta có } \frac{1}{\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x + 1}} = 2. \quad (*)$$

Do $x \geq \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{x + 1} > 1$. Phương trình (*) có vế trái nhỏ hơn 1, vế phải bằng 2 nên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

□

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0;$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0;$

c) $\frac{7}{x + 1} + \frac{x - 4}{2x - 2} = \frac{x^2 + 15x}{x^2 - 1};$

d) $\frac{1}{4 - x} = \frac{1}{3x^2 + 1}.$

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2$, ($t \geq 0$).

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t - 9 = 0$.

Ta có $a - b + c = 1 - (-8) + (-9) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = -1$ (loại), $t_2 = 9$ (nhận).

Với $t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm 3\}$.

2. Đặt $t = x^2$, ($t \geq 0$).

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 3t - 4 = 0$.

Ta có $a + b + c = 1 + 3 + (-4) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = -4$ (loại), $t_2 = 1$ (nhận).

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm 1\}$.

3. Điều kiện xác định $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} \frac{7}{x + 1} + \frac{x - 4}{2x - 2} = \frac{x^2 + 15x}{x^2 - 1} &\Leftrightarrow \frac{7}{x + 1} + \frac{x - 4}{2(x - 1)} = \frac{x^2 + 15x}{(x - 1)(x + 1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{14(x - 1) + (x - 4)(x + 1)}{2(x - 1)(x + 1)} = \frac{2(x^2 + 15x)}{2(x - 1)(x + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 14x - 14 + x^2 - 3x - 4 = 2x^2 + 30x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 19x + 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{loại}) \\ x = -18 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-18\}$.

4. Điều kiện xác định $x \neq 4$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-x} = \frac{1}{3x^2+1} &\Rightarrow 3x^2 + 1 = 4 - x \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6} & (\text{nhận}) \\ x = \frac{-1 - \sqrt{37}}{6} & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6} \right\}$.

□

📖 **Bài 2.** Giải các phương trình sau

a) $(3x^2 - 2)^2 - (x - 1)^2 = 0;$

b) $3x(2x - 1)^2 - 4x^2 + 1 = 0;$

c) $x^4 = 8x + 7.$

✍ **Lời giải.**

1.

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2)^2 - (x - 1)^2 = 0 &\Leftrightarrow (3x^2 - 2 - x + 1)(3x^2 - 2 + x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x^2 - x - 1)(3x^2 + x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 1 = 0 \\ 3x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}; \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6} \right\}$.

2.

$$\begin{aligned} 3x(2x - 1)^2 - 4x^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow 3x(2x - 1)^2 - (4x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(2x - 1)^2 - (2x - 1)(2x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)[3x(2x - 1) - (2x + 1)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)(6x^2 - 5x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 6x^2 - 5x - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{6} \right\}$.

3.

$$\begin{aligned} x^4 = 8x - 7 &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 8 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 2(x + 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2})(x^2 + 1 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1)(x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,23 \\ x = -0,88. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2,23; -0,88\}$.

□

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12;$

b) $x^2 + \frac{1}{x^2} + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0;$

c) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24;$

d) $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4;$

e) $2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0;$

f) $(x + 2)(x + 3)(x - 7)(x - 8) = 144;$

g) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0;$

h) $x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 20x + 16 = 0.$

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2 + x + 1, t \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$t(t + 1) = 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 & \text{(loại)} \\ t = 3 & \text{(nhận)}. \end{cases}$$

Với $t = 3 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -2\}$.

2. Đặt $t = x + \frac{1}{x}, \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Phương trình đã cho trở thành

$$(t^2 - 2) + 5t - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = 2. \end{cases}$$

☑ Với $t = -7 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -7 \Rightarrow x^2 + 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$.

☑ Với $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2} \right\}$.

3. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$.
(xem ví dụ 1.6 Dạng 5, nội dung này.)

4. Ta có

$$\begin{aligned} (x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4 &\Leftrightarrow (x + 4)(x + 8)(x + 5)(x + 7) = 4 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4. \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 12x + 32, t \geq -4$. Phương trình đã cho trở thành

$$t(t + 3) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \begin{cases} t = -4 & \text{(nhận)} \\ t = 1 & \text{(nhận)}. \end{cases}$$

☑ Với $t = -4 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

☑ Với $t = 1 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \pm \sqrt{5}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{6; -6 \pm \sqrt{5}\}$.

5. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2(t^2 - 2) - t - 2 = 0 &\Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

☑ Với $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

☑ Với $t = -\frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1\}$.

6. Ta có

$$\begin{aligned} (x + 2)(x + 3)(x - 7)(x - 8) = 144 &\Leftrightarrow (x + 2)(x - 7)(x + 3)(x - 8) = 144 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x - 24) = 144. \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 - 5x - 19, t \geq \frac{-87}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$(t + 5)(t - 5) = 144 \Leftrightarrow t^2 - 25 = 144 \Leftrightarrow t^2 = 169 \begin{cases} t = -13 & (\text{nhận}) \\ t = 13 & (\text{nhận}). \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ Với } t = -13 \Rightarrow x^2 - 5x - 19 = -13 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6. \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ Với } t = 13 \Rightarrow x^2 - 5x - 19 = 13 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ 6; -1; \frac{5 \pm 3\sqrt{17}}{2} \right\}.$$

7. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được

$$\begin{aligned} 6x^2 + 25x + 12 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 25 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 12 &= 0. \end{aligned}$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6(t^2 + 2) + 25t + 12 &= 0 \Leftrightarrow 6t^2 + 25t + 24 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-8}{3} \\ t = \frac{-3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\checkmark \text{ Với } t = \frac{-8}{3} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{-8}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ Với } t = \frac{-3}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình } S = \left\{ -2; -3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}.$$

8. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 14 - \frac{20}{x} + \frac{16}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 6 \left(x^2 + \frac{16}{x^2} \right) + 5 \left(x - \frac{4}{x} \right) - 14 &= 0. \end{aligned}$$

Đặt $x - \frac{4}{x} = t \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{x^2} = t^2 + 8$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t^2 + 8) + 5t - 14 &= 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -6. \end{cases} \end{aligned}$$

☑ Với $t = 1 \Rightarrow x - \frac{4}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

☑ Với $t = -6 \Rightarrow x - \frac{4}{x} = -6 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{13}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{-2; -3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.

□

📖 **Bài 4.** Giải phương trình sau $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x + \frac{3+5}{2} = x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = t - 1 \\ x + 5 = t + 1. \end{cases}$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 2 &\Leftrightarrow [(t - 1)^2 + (t + 1)^2]^2 - 2(t - 1)^2(t + 1)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow [t^2 - 2t + 1 + t^2 + 2t + 1]^2 - 2(t^2 - 1)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow [2t^2 + 2]^2 - 2(t^4 - 2t^2 + 1) - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4t^4 + 8t^2 + 4 - 2t^4 + 4t^2 - 2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2t^2(t^2 + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 0 \\ t^2 = -6 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Với $t = 0 \Rightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4\}$.

□

📖 **Bài 5.** Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{x^2 + x - 12} = 8 - x$.

2. $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$.

3. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 3}$.

4. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{6x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

✍ **Lời giải.**

1. Ta có

$$\sqrt{x^2 + x - 12} = 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ 17x = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x = \frac{76}{17} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{76}{17}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{76}{17}$.

2. Ta có

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1, x = -2$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là
$$\begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \text{ hay } x \geq -\frac{1}{2} \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x+4} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow & 3x+4 = 2x+1 + 2\sqrt{(2x+1)(x+3)} + x+3 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(2x+1)(3x+4)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta nhận $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4. Điều kiện xác định của phương trình là
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ 6x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{6x-2} = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x+3}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế của phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x - 2\sqrt{(6x-2)(x^2-3x+2)} = x^2 + 3x - 2\sqrt{(x+3)(x^2+2x-3)} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(6x-2)(x^2-3x+2)} = \sqrt{(x+3)(x^2+2x-3)} \\ \Leftrightarrow & (x-1)(x-2)(6x-2) = (x-1)(x+3)^2 \\ \Leftrightarrow & (x-1)(5x^2-20x-5) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-1=0 \\ 5x^2-20x-5=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=1 \\ x=2 \pm \sqrt{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định và thử lại ta nhận $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho. □

Bài 6. Giải các phương trình sau

1. $x^2 - 10x - 12 = 4\sqrt{2x+3}$.
2. $2x^2 + x - 3 = 2\sqrt{2x+3}$.
3. $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} = 7\sqrt{2}$.
4. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

 Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\frac{3}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 10x - 12 &= 4\sqrt{2x+3} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &= 4(2x+3) + 4\sqrt{2x+3} + 1 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= (2\sqrt{2x+3} + 1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2\sqrt{2x+3} + 1 \\ 1-x = 2\sqrt{2x+3} + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2 - 12x - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 8x - 12 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 2\sqrt{11} \\ x = 4 - 2\sqrt{7}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định và thử lại ta được $x = 4 - 2\sqrt{7}$ và $x = 6 + 2\sqrt{11}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\frac{3}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 3 &= 2\sqrt{2x+3} \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 6 &= 4\sqrt{2x+3} \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 &= 2x + 3 + 4\sqrt{2x+3} + 4 \\ \Leftrightarrow (2x+1)^2 &= (\sqrt{2x+3} + 2)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3} + 2 = 2x+1 \\ \sqrt{2x+3} + 2 = -2x-1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 6x - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + 10x + 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \\ x = -\frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định và thử lại ta được $x = -\frac{3}{2}$ và $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq \frac{5}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-2+2\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-5+2\sqrt{2x-5}+1} + \sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9} = 14 \\ \Leftrightarrow & \left| \sqrt{2x-5}+1 \right| + \left| \sqrt{2x-5}+3 \right| = 14 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-5} = 5 \\ \Leftrightarrow & x = 15. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta nhận $x = 15$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = 2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-1}+1 + \left| \sqrt{x-1}-1 \right| = 2. \end{aligned}$$

☑ Nếu $x > 2$ thì ta được phương trình

$$\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại).}$$

☑ Nếu $x \leq 2$ thì ta được phương trình

$$\sqrt{x-1}+1 + 1 - \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow 0x = 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x \leq 2\text{).}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $1 \leq x \leq 2$ là các nghiệm của phương trình đã cho. □

Bài 7. Giải các phương trình sau

1. $2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{4x+1}$.

2. $x^2 - 6x + 26 = 6\sqrt{2x+1}$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\frac{1}{4}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{4x+1} \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 4x + 2 - 2\sqrt{4x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x)^2 + (\sqrt{4x+1}-1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x = 0 \\ \sqrt{4x+1}-1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 0. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\frac{1}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 26 &= 6\sqrt{2x+1} \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 2x + 1 - 6\sqrt{2x+1} + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{2x+1} - 3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{2x+1}-3=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= 4. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.

□

Bài 8. Giải phương trình các phương trình sau

- $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = 2 - x^2$.
- $\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x$.
- $\frac{x^2 - 2x + 13}{\sqrt{4-x}} = 4\sqrt{x+2}$.
- $2(5x^2 + 2) + 3(x^2 - 2x)\sqrt{3x-1} = 2(x^3 + 7x)$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}$, $t \geq 0$. Ta có $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-4x^2}$ hay $x^2 = \frac{4t^2 - t^4}{16}$ với $t^2 - 2 \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t = 2 - \frac{4t^2 - t^4}{16} \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 - 16t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2(t^2 + 4t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Với $t = 2$ suy ra $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

2. Từ phương trình suy ra phương trình có nghiệm với $x > 0$.

Với $x > 0$ chia cả hai vế của phương trình cho x ta được

$$\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} - 1} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} + 20} = 7.$$

Đặt $t = x^2 + \frac{4}{x^2} - 1 \geq 3$, ta được phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{t} + \sqrt{t+21} = 7 &\Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 + \sqrt{t+21} - 5 = 0 \Leftrightarrow (t-4) \left(\frac{1}{\sqrt{t+2}} + \frac{1}{\sqrt{t+21}+5} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 4. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t+2}} + \frac{1}{\sqrt{t+21}+5} > 0, \forall t > 3 \right).$$

Ta được $x^2 + \frac{4}{x^2} - 1 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ (do $x > 0$).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1, x = 2$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 4-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 4.$

Phương trình đã cho tương đương

$$x^2 - 2x + 13 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 13 = 4\sqrt{-x^2 + 2x + 8}$$

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$ (Điều kiện $t \geq 0$). Ta có phương trình

$$8 - t^2 + 13 = 4t \Leftrightarrow t^2 + 4t - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = 3. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $t = 3$.

Với $t = 3 \Rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 8} = 3 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq \frac{1}{3}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & 2(5x^2 + 2) + 3(x^2 - 2x)\sqrt{3x-1} = 2(x^3 + 7x) \\ \Leftrightarrow & 3x(x-2)\sqrt{3x-1} = 2(x^3 - 5x^2 + 7x - 2) \\ \Leftrightarrow & 3x(x-2)\sqrt{3x-1} = 2(x-2)(x^2 - 3x + 1) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ 3x\sqrt{3x-1} = 2(x^2 - 3x + 1). \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow 2(3x-1) + 3x\sqrt{3x-1} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3x-1}{x^2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3x-1}}{x} - 2 = 0.$

Đặt $t = \frac{\sqrt{3x-1}}{x}$, ($t \geq 0$), phương trình trên trở thành $2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -2. \end{cases}$

Do $t \geq 0$ nên $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3x-1}}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 \pm 4\sqrt{2}.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x = 6 \pm 4\sqrt{2}; x = 2.$

□

📖 **Bài 9.** Giải các phương trình sau

- $\sqrt{2x^2 - 3x + 10} + \sqrt{2x^2 - 5x + 4} = x + 3.$
- $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = x^2 - 6x + 9.$
- $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3}.$
- $(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = 2x.$

📝 **Lời giải.**

1. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 10 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 4 \geq 0. \end{cases}$

Ta thấy $x = -3$ không là nghiệm của phương trình. Nhân và chia vế trái của phương trình với biểu thức liên hợp được

$$\frac{(2x^2 - 3x + 10) - (2x^2 - 5x + 4)}{\sqrt{2x^2 - 3x + 10} - \sqrt{2x^2 - 5x + 4}} = x + 3$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{2(x+3)}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}} = x+3 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+10} = 2 + \sqrt{2x^2-5x+4}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được

$$2\sqrt{2x^2-5x+4} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 7x^2-22x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{15}{7}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$ và $x=\frac{15}{7}$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $-2 \leq x \leq 3$.

Với nhận xét 2 là một nghiệm của phương trình đã cho, ta biến đổi

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x} = x^2-6x+9 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-2) + (1-\sqrt{3-x}) = x^2-6x+8.$$

Nhân và chia biểu thức trong dấu ngoặc với biểu thức liên hợp ta được

$$\begin{aligned} &\frac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1-(3-x)}{1+\sqrt{3-x}} = (x-2)(x-4) \\ &\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{2+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{1+\sqrt{3-x}} + 4-x \right) = 0. \end{aligned}$$

Do $-2 \leq x \leq 3$ nên $4-x > 0$, do đó biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai dương.

Vậy $x-2=0$ hay $x=2$, thỏa điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$.

Nhân và chia mỗi vế với biểu thức liên hợp được

$$\begin{aligned} &\frac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{(x+8)-(x+3)}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{5}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}} \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{x}+5\sqrt{x-1} = \sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}. \end{aligned} \quad (*)$$

Kết hợp phương trình đã cho với phương trình (*) ta được

$$\begin{aligned} &6\sqrt{x}+4\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+8} \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{x}+2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+8}. \end{aligned} \quad (**)$$

Do $x \geq 1$ nên $\sqrt{x+8} \leq \sqrt{x+8x} = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$.

Để xảy ra (**) thì $\begin{cases} 8=8x \\ \sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$, thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $-1 \leq x \leq 1$.

Nhân và chia $\sqrt{1+x} - 1$ với biểu thức liên hợp được

$$\frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1}(\sqrt{1-x}+1) = 2x \Leftrightarrow \frac{x(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1+x}+1} = 2x.$$

Hiển nhiên $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x \neq 0$ ta có $\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = 2$.

Đặt $\sqrt{1+x} = a \geq 0$, $\sqrt{1-x} = b \geq 0$, ta có

$$\begin{cases} \frac{b+1}{a+1} = 2 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 5a^2 + 4a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ (loại)} \\ a = \frac{1}{5} \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Với $a = \frac{1}{5}$ thì $1+x = \frac{1}{25} \Rightarrow x = -\frac{24}{25}$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -\frac{24}{25}$.

□

3 Các bài tập nâng cao

📁 **Bài 10.** Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 9x + 9} = 2x$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x^2 - 9x + 9 \geq 0$ và $x^2 - x + 1 \leq 0$.

Nhận thấy $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ và $x^2 - 9x + 9 \geq 0$ nên vế trái dương.

Do đó để phương trình có nghiệm thì vế phải dương, suy ra $x > 0$.

Chia hai vế phương trình có $x > 0$, ta được

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{9}{x} + \frac{9}{x^2}} = 2.$$

Đặt $t = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, ta có phương trình $\sqrt{t+1} + \sqrt{9t+1} = 2$.

Giải phương trình này ta được nghiệm $t = 0$. Lúc đó giải được $x = 1$, thỏa mãn điều kiện ban đầu nên đây là nghiệm của phương trình đã cho.

□

📁 **Bài 11.** Giải phương trình $x^2 + 2x\sqrt{x + \frac{1}{x}} = 8x - 1$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x > 0$.

Chia hai vế phương trình cho $x > 0$, ta được phương trình

$$x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x + \frac{1}{x}} - 8 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x + \frac{1}{x}} \geq \sqrt{2}$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -4$ (loại).

Với $t = 2$, ta có $x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2 \pm \sqrt{3}$. □

➤ **Bài 12.** Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$.

Phương trình được viết lại $(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x} \geq 0$, phương trình trở thành

$$t^4 - t^2 - \sqrt{2}t \Leftrightarrow t(t^3 - t - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow t(t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}t + 1 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Với $t = 0$, giải được $x = 0$ và $x = 1$.

Với $t = \sqrt{2}$, giải được $x = 2$ và $x = -1$. □

➤ **Bài 13.** Giải phương trình $\sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$.

✍ **Lời giải.**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5x^2 - 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(5x - 9) \geq 0 \\ (x + 4)(x - 5) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{5x^2 - 14x + 9} &= \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x + 1} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 &= 5\sqrt{(x^2 - x - 20) \cdot (x + 1)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 &= 5\sqrt{(x + 4)(x - 5)(x + 1)} \\ \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x + 4) &= 5\sqrt{(x + 4)(x^2 - 4x - 5)}. \end{aligned}$$

Với điều kiện $x \geq 5$, ta có thể đặt $u = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \geq 0$, $v = \sqrt{x + 4} > 0$ và phương trình trở thành

$$2u^2 + 3v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\frac{u}{v} + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = 1 \\ \frac{u}{v} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ 2u = 3v. \end{cases}$$

Với $u = v$, ta có $\sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{x + 4} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$.

Với $2u = 3v$, ta có $2\sqrt{x^2 - 4x - 5} = 3\sqrt{x + 4} \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$ và $x = 8$. □

➤ **Bài 14.** Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x \geq 6$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{5x^2 + 4x} - 5\sqrt{x} &= \sqrt{x^2 - 3x - 18} \\ \Rightarrow 5x^2 + 4x + 25x - 10x\sqrt{5x + 4} &= x^2 - 3x - 18 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6(5x + 4) - 10x\sqrt{5x + 4} + 4x^2 + 2x - 6 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{5x + 4} \geq 0$, ta có phương trình $6t^2 - 10xt + 4x^2 + 2x - 6 = 0$.

Phương trình này có $\Delta' = (x - 6)^2 \geq 0$ nên nó có hai nghiệm $t = x - 1$ và $t = \frac{2x + 3}{3}$.

Với $t = x - 1$, ta có $\sqrt{5x + 4} = x - 1$; giải phương trình này ta được nghiệm $x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$.

Với $t = \frac{2x + 3}{3}$, ta có $3\sqrt{5x + 4} = 2x + 3$; giải phương trình này ta được nghiệm $x = 9$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 9$ và $x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$. □

Bài 15. Giải phương trình $4x^2 + 14x + 11 = 4\sqrt{6x + 10}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{5}{3}$.

Ta có phương trình tương đương

$$(2x + 5)^2 - (2 + \sqrt{6x + 10})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 - 2 - \sqrt{6x + 10} = 0 \\ 2x + 5 + 2 + \sqrt{6x + 10} = 0. \end{cases}$$

Vì $x \geq -\frac{5}{3}$ nên $2x + 5 + 2 + \sqrt{6x + 10} > 0$ do đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{6x + 10} = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{13} - 3}{4}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt{13} - 3}{4}$. □

Bài 16. Giải phương trình

$$(\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3.$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$.

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\sqrt{x + 5} + \sqrt{x + 2}} \left[1 + \sqrt{(x + 5)(x + 2)} \right] = 3 \\ \Leftrightarrow & 1 + \sqrt{(x + 5)(x + 2)} = \sqrt{x + 5} + \sqrt{x + 2} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x + 5} - 1) \cdot (\sqrt{x + 2} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -4 & (\text{loại}) \\ x = -1 & (\text{thỏa mãn}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$. □

Bài 17. Giải phương trình sau $(x - 1)^6 + (x - 2)^6 = 1$.

Lời giải.

Ta có $(x - 1)^6 + (x - 2)^6 = 1 \Leftrightarrow (2x - 2)^6 + (2x - 4)^6 = 64$ (*).

Đặt $t = 2x - 3$. Khi đó phương trình (*) trở thành

$$\begin{aligned} (t + 1)^6 + (t - 1)^6 &\Leftrightarrow [(t + 1)^3 + (t - 1)^3]^2 - 2(t + 1)^3(t - 1)^3 = 64 \\ &\Leftrightarrow [t^3 + 3t^2 + 3t + 1 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1]^2 - 2(t^2 - 1)^3 = 64 \\ &\Leftrightarrow [2t^3 + 6t]^2 - 2(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1) = 64 \\ &\Leftrightarrow 4t^6 + 24t^4 + 36t^2 - 2t^6 + 6t^4 - 6t^2 + 2 = 64 \\ &\Leftrightarrow 2t^6 + 30t^4 + 30t^2 - 62 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^6 + 15t^4 + 15t^2 - 31 = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Đặt $u = t^2, u \geq 0$. Do đó, (**) $\Rightarrow u^3 + 15u^2 + 15u - 31 = 0$ (***)).

Nhằm thấy phương trình có nghiệm $u = 1$ nên theo lược đồ Hooc-ne, ta có

	1	15	15	-31
1	1	16	31	0

Từ đó (***) $\Rightarrow (u - 1)(u^2 + 16u + 31) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u - 1 = 0 \\ u^2 + 16u + 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 & \text{(nhận)} \\ u = -8 \pm \sqrt{33} & \text{(loại)}. \end{cases}$

Với $u = 1 \Rightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$. □

§5

Giải toán bằng cách lập phương trình

1

Tóm tắt lý thuyết

Bước 1. Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp của ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình vừa lập.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và trả lời.

2

Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 102. Toán số học, phần trăm

☑ Biểu diễn:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b \quad (a, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9).$$

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c \quad (a, b, c \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9).$$

- ☑ Tỷ số của hai số a và b ($b \neq 0$) là $\frac{a}{b}$.
- ☑ Tổng của hai số x, y là $x + y$.
- ☑ Tổng bình phương hai số $x; y$ là $x^2 + y^2$.
- ☑ Tổng nghịch đảo của hai số $x; y$ là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 **Ví dụ 1.** Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

✍ **Lời giải.**

Gọi số mà một bạn đã chọn là x và số bạn kia là $x + 5$.

Tích của hai số là $x(x + 5)$.

Theo đầu bài, ta có phương trình

$$x(x + 5) = 150 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0.$$

Giải phương trình $\Delta = 25 - 4 \cdot (-150) = 625 = 25^2$ nên $x_1 = 10, x_2 = -15$.

Trả lời:

- Nếu bạn Minh chọn số 10 thì bạn Lan chọn số 15 hoặc ngược lại.
- Nếu bạn Minh chọn số -15 thì bạn Lan chọn số -10 hoặc ngược lại.

□

Ví dụ 2. Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ 2 tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Lời giải.

Gọi số thứ nhất là x , số thứ hai là y .

Theo đề bài tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị nên ta có phương trình $x + y = 17$. (1)

Số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị nên ta có phương trình $(x + 3)(y + 2) = 105$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x + 3)(y + 2) = 105. \end{cases}$$

Rút y từ (1) thế vào (2) và thu gọn, ta được

$$x^2 - 16x + 48 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 12$ (thỏa mãn) và $x_2 = 4$ (thỏa mãn).

Vậy nếu số thứ nhất là 12 thì số thứ hai là 5; nếu số thứ nhất là 4 thì số thứ hai là 13.

□

Dạng 103. Năng suất công việc

- ☑ Khối lượng công việc = Năng suất \times Thời gian.
- ☑ Năng suất = Khối lượng công việc \div Thời gian.
- ☑ Thời gian = Khối lượng công việc \div Năng suất.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kĩ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn vượt mức 10% sản phẩm. Tính năng suất dự định.

Lời giải.

Gọi năng suất dự định là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}^*$);

Thời gian dự định làm 70 sản phẩm là $\frac{70}{x}$ giờ;

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất $x + 5$ (sản phẩm/giờ) là $\frac{80}{x+5}$ giờ.

Theo đề bài, công nhân hoàn thành trước kế hoạch 40 phút ($= \frac{2}{3}$ giờ).

Ta có phương trình

$$\frac{70}{x} - \frac{80}{x+5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 + 20x - 525 = 0.$$

$\Delta = 20^2 - 4 \cdot (-525) = 2500 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 15$ (nhận); $x_2 = -35$ (loại).
Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ. □

📖 Ví dụ 2. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

✍️ Lời giải.

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}$, $0 < x < 20$);

Vậy năng suất thực tế là $x + 1$ (sản phẩm/giờ).

Thời gian dự định làm 72 sản phẩm là $\frac{72}{x}$ (giờ).

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm là $\frac{80}{x+1}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn so với dự định là 12 phút ($= \frac{1}{5}$ giờ) ta có phương trình

$$\frac{80}{x+1} - \frac{72}{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 80 \cdot 5 \cdot x - 72 \cdot 5(x+1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 39x + 360 = 0.$$

Ta có $\Delta = 39^2 - 4 \cdot 360 = 81 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = 24$ (loại); $x_2 = 15$ (nhận).
Vậy năng suất dự kiến là 15 (sản phẩm/giờ). □

📁 Dạng 104. Toán chuyển động

☑️ Sử dụng công thức $S = V \cdot t$; trong đó, S là quãng đường, V là vận tốc, t là thời gian.

$$\text{Suy ra } V = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{V}.$$

☑️ Nếu chuyển động trong dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{riêng}} + V_{\text{dòng nước}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{riêng}} - V_{\text{dòng nước}}.$$

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 Ví dụ 1. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại một giờ ở thị trấn Nam Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường đi 5 km và với vận tốc lúc về nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

✍️ Lời giải.

Gọi vận tốc của xuồng lúc đi là x (km/h), $x > 0$, thì vận tốc lúc về là $x - 5$ (km/h).

Thời gian đi 120 km là $\frac{120}{x}$ (giờ).

Vì khi đi có nghỉ một giờ nên thời gian đi hết tất cả là $\frac{120}{x} + 1$ (giờ). Độ dài quãng đường về $120 + 5 = 125$ (km).

Thời gian về là $\frac{125}{x - 5}$ (giờ).

Theo đầu bài, ta có phương trình

$$\frac{120}{x} + 1 = \frac{125}{x - 5} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 600 = 0.$$

Ta có $\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-600) = 2500 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = 30$ (nhận); $x_2 = -20$ (loại).

Vậy vận tốc của xuồng đi là 30 km/h. □

📖 Ví dụ 2. Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30 km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

✍️ Lời giải.

Gọi vận tốc xe của bác Hiệp là x (km/h, $x > 0$); khi đó vận tốc xe của cô Liên là $x - 3$ (km/h).

Thời gian bác Hiệp đi từ làng lên tỉnh là $\frac{30}{x}$ (giờ).

Thời gian cô Liên đi từ làng lên tỉnh là $\frac{30}{x - 3}$ (giờ).

Vì bác Hiệp đến trước cô Liên nửa giờ, tức là thời gian đi của bác Hiệp ít hơn thời gian đi của cô Liên nửa giờ nên ta có phương trình

$$\frac{30}{x - 3} - \frac{30}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0.$$

Ta có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-180) = 729 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 15$ (nhận).

Vậy vận tốc xe của bác Hiệp là 15 km/h. Vận tốc xe của cô Liên là 12 km/h. □

📁 Dạng 105. Dạng toán có nội dung hình học

Áp dụng các công thức sau:

- ☑ Định lý Pi-ta-go: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- ☑ Diện tích hình chữ nhật: $S = a \cdot b$; với a là chiều dài, b là chiều rộng.
- ☑ Diện tích hình thang: $S = \frac{a + b}{2}$ hoặc $S = m \cdot h$. Trong đó, a, b là độ dài hai đáy; h là đường cao; m là độ dài đường trung bình.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

📖 Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2 . Tính chu vi hình chữ nhật.

✍ Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm, $x > 0$).

Chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3}x$ (cm).

Theo đầu bài, ta có phương trình

$$x \cdot \frac{2}{3}x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 \\ x = -90 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 cm, chiều rộng hình chữ nhật là 60 cm. Do đó, chu vi hình chữ nhật là $(90 + 60) \cdot 2 = 300$ cm. \square

📖 Ví dụ 2. Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5 m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 .

✍ Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 0$), thì chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{100}{x}$ (m).

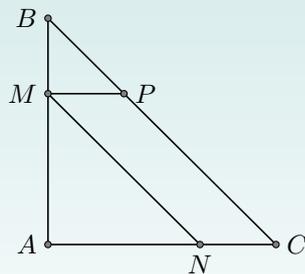
Theo đầu bài, nếu tăng chiều rộng thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5 m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 , ta có phương trình

$$(x - 5) \cdot \left(\frac{100}{x} + 2 \right) = 100 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 500 = 0$$

Ta có $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-500) = 4225 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = -\frac{25}{2}$ (loại); $x_2 = 20$ (nhận).

Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 20 m, chiều rộng là 5 m. \square

📖 Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 12$ cm. Điểm M chạy trên AB . Tứ giác $MNPC$ là hình bình hành có đỉnh N thuộc cạnh AC (như hình bên dưới). Hỏi khi M cách A bao nhiêu thì diện tích của hình bình hành bằng 32 cm^2 .



✍ Lời giải.

Đặt $MA = x$, ta có $MB = NC = 12 - x$ (cm).

$$S_{MPCN} = S_{ABC} - S_{BMP} - S_{AMN} = 72 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(12 - x)^2 = -x^2 + 12x.$$

Ta có phương trình $-x^2 + 12x = 32 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 4 \end{cases}$.

Ta có $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-32) = 16 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = 8$ (nhận); $x_2 = 4$ (nhận). Kết luận khi M cách A 8 cm hoặc 4 cm thì diện tích hình bình hành bằng 32 cm^2 . \square

Dạng 106. Toán làm chung làm riêng

Coi toàn bộ công việc là 1.
 Năng suất = 1 : Thời gian.
 Tổng các năng suất riêng = Năng suất chung.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

Lời giải.

Ta có 6 giờ 40 phút = $6\frac{2}{3}$ giờ.

Gọi thời gian công nhân thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ, $x > 6\frac{2}{3}$).

Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong việc là $x + 3$ (giờ).

Mỗi giờ công nhân thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Mỗi giờ công nhân thứ hai làm được $\frac{1}{x + 3}$ (công việc).

Theo đầu bài, hai công nhân cùng làm thì hoàn thành công việc trong $6\frac{2}{3}$ giờ. Nên mỗi giờ họ cùng làm được $1 : 6\frac{2}{3} = \frac{3}{20}$ (công việc).

Ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow 3x^2 - 31x - 60 = 0.$$

Ta có $\Delta = 31^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-60) = 1681 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -\frac{5}{3}$ (loại); $x_2 = 12$ (nhận).

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 12 giờ.

Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ. □

Ví dụ 2. Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

Lời giải.

7 giờ 12 phút = $7\frac{1}{5}$ giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x giờ ($0 < x < 30$).

Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $30 - x$ (giờ).

Theo đề, hai vòi cùng chảy mà đầy bể sau = $7\frac{1}{5}$ (giờ) nên ta có phương trình

$$7\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{30 - x} \right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 216 = 0.$$

Ta có $\Delta = 30^2 - 4 \cdot (216) = 36 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = 18$ (loại); $x_2 = 12$ (nhận). Vậy vòi thứ nhất chảy riêng sẽ đầy bể sau 12 giờ, vòi thứ hai chảy riêng sẽ đầy bể sau 18 giờ và ngược lại. \square

Dạng 107. Các dạng khác

Bao gồm các bài toán thực tế, các bài toán liên quan đến lý, hóa.

BÀI TẬP MẪU

 **Ví dụ 1.** Chu vi bánh sau của một máy cày lớn hơn chu vi bánh trước là 1,5 m. Khi đi trên đoạn đường dài 100 m thì bánh trước quay nhiều hơn bánh sau 15 vòng. Tính chu vi của mỗi bánh xe.

Lời giải.

Gọi x (m) là chu vi bánh trước ($x > 0$).

Chu vi của bánh sau $x + 1,5$ (m).

Vì hai bánh này cùng lăn trên quãng đường 100 (m).

Số vòng quay được của bánh trước $\frac{100}{x}$.

Số vòng quay được của bánh sau $\frac{100}{x + 1,5}$.

Ta có phương trình

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x + 1,5} = 15 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 100 = 0.$$

Ta có $\Delta = 15^2 - 4 \cdot (-100) = 625 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -20$ (loại); $x_2 = 5$ (nhận).

Kết luận: Chu vi bánh trước là 5 m, chu vi bánh sau là 6,5 (m). \square

 **Ví dụ 2.** Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn $0,2 \text{ g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng là $0,7 \text{ g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của chất lỏng.

Lời giải.

Gọi x (g/cm^3) là khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất ($x > 0,2$).

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0,2$ (g/cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x}$ (cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x - 0,2}$ (cm^3).

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{14}{0,7}$ (cm^3).

Ta có phương trình

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x - 0,2} = \frac{14}{0,7} \Leftrightarrow 20x^2 - 18x + 1,6 = 0$$

Ta có $\Delta = 18^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1,6 = 196 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = 0,1$ (loại); $x_2 = 0,8$ (nhận).

Kết luận : khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $0,8 \text{ (g/cm}^3\text{)}$, khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $0,6 \text{ (g/cm}^3\text{)}$. □

📖 Ví dụ 3. Miếng kim loại thứ nhất nặng 880 g , miếng kim loại thứ hai nặng 858 g . Thể tích của miếng kim loại thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng kim loại thứ hai là 10 cm^3 , nhưng khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất lớn hơn miếng kim loại thứ hai là 1 g/cm^3 . Tính khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại. (Biết rằng khối lượng riêng của một vật được xác định bởi công thức $D = \frac{M}{V}$ trong đó D là khối lượng riêng tính bằng đơn vị g/cm^3 , m là khối lượng tính bằng đơn vị g , V là thể tích tính bằng đơn vị cm^3 .)

✍️ Lời giải.

Gọi $x \text{ (g/cm}^3\text{)}$ là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất ($x > 1$).

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x - 1 \text{ (g/cm}^3\text{)}$.

Thể tích của miếng kim loại thứ nhất $\frac{880}{x} \text{ (g/cm}^3\text{)}$.

Thể tích của miếng kim loại thứ hai $\frac{858}{x - 1} \text{ (g/cm}^3\text{)}$.

Ta có phương trình

$$\frac{858}{x - 1} - \frac{880}{x} = 10 \Leftrightarrow 5x^2 + 6x - 440 = 0.$$

$\Delta = 6^2 + 4 \cdot 5 \cdot 440 = 8836 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -10$ (loại); $x_2 = 8,8$ (nhận).

Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là $8,8 \text{ (g/cm}^3\text{)}$.

Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $7,8 \text{ (g/cm}^3\text{)}$. □

3 Luyện tập

📁 Bài 1. Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng là 119 .

✍️ Lời giải.

Gọi x và y là hai số cần tìm. Theo đề bài, ta có hệ

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x^2 - y^2 = 119. \end{cases}$$

Giải ra hai số cần tìm là $(12; 5)$ hoặc $(-19; 2; -15, 8)$. □

📁 Bài 2. Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu năng suất tăng lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.

✍️ Lời giải.

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/ngày; $x \in \mathbb{N}$).

Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\frac{350}{x + 10}$ (ngày).

Nếu giảm năng suất 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\frac{350}{x - 10}$ (ngày).

Theo đề bài, ta có phương trình

$$\frac{350}{x-10} - \frac{350}{x+10} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3600 \Leftrightarrow x = \pm 60.$$

So với điều kiện, vậy năng suất dự kiến là 60 (sản phẩm/ngày). □

Bài 3. Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản xuất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu, họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

Gọi số sản phẩm theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất là x (sản phẩm/ngày, $x \in \mathbb{Z}^*$).

Suy ra số sản phẩm làm trong 8 ngày đầu là $8x$ (sản phẩm);

Thời gian làm số sản phẩm còn lại là $\frac{3000 - 8x}{x + 10}$ (ngày).

Thời gian làm theo kế hoạch là $\frac{3000}{x}$ (ngày).

Theo đề bài, nhóm thợ đã hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự định, ta có phương trình

$$8 + \frac{3000 - 8x}{x + 10} + 2 = \frac{3000}{x} \Leftrightarrow x^2 + 50x - 15000 = 0.$$

$\Delta = 50^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1500 = 6000 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -150$ (loại); $x_2 = 100$ (nhận).
 Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày cần sản xuất 100 sản phẩm. □

Bài 4. Một người đi xe đạp quãng đường từ A đến B dài 30 km. Khi từ B về A, người đó chọn con đường khác dài hơn 6 km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Lời giải.

Ta có 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ.

Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h, $x > 0$).

Suy ra thời gian đi quãng đường từ A đến B dài 30 km hết $\frac{30}{x}$ (h).

Khi về, người đó đi quãng đường dài hơn quãng đường lúc đi 6 km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/h nên thời gian hết là $\frac{36}{x + 3}$ (h).

Theo đầu bài, vì thời gian về ít hơn thời gian đi là $\frac{1}{3}$ giờ nên có phương trình

$$\frac{30}{x} - \frac{36}{x + 3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 21x - 270 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -30 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$\Delta = 21^2 - 4 \cdot (-270) = 1521 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -30$ (loại); $x_2 = 9$ (nhận).
 Vậy vận tốc lúc đi là 9 km/h. □

Bài 5. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km. Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Lời giải.

Ta có 6 giờ 45 phút = $\frac{27}{4}$ giờ.

Gọi vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là x (km/h, $x > 4$).

Suy ra vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).

Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h).

Thời gian tàu thủy đi xuôi dòng 120 km là $\frac{120}{x+4}$ (giờ).

Thời gian tàu thủy đi ngược dòng 120 km là $\frac{120}{x-4}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian cả đi lẫn về mất $\frac{27}{4}$ giờ. Ta có phương trình

$$\frac{120}{x+4} + \frac{120}{x-4} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 320x - 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ x = -\frac{4}{9} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$\Delta = 320^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-144) = 107584 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -\frac{4}{9}$ (loại); $x_2 = 36$ (nhận).

Vậy vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng là 36 km/h. □

📖 Bài 6. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2 m, diện tích đất còn lại để trồng trọt là 4256 m². Tính các kích thước của vườn.

📝 Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 70$), khi đó, chiều rộng của khi vườn hình chữ nhật $280 \div 2 - x = 140 - x$ (m).

Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2 m, thì chiều dài phần đất còn lại để trồng trọt là $x - 4$ (m), chiều rộng phần đất còn lại để trồng trọt là $140 - x - 4 = 136 - x$ (m).

Theo đầu bài, diện tích đất trồng còn lại là 4256 m², ta có phương trình

$$(x - 4) \cdot (136 - x) = 4256 \Leftrightarrow x^2 - 140x + 4800 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80 \\ x = 60 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 80 m, chiều rộng là 60 m. □

📖 Bài 7. Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

📝 Lời giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y ($x, y \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$).

Theo đề bài, tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần, ta có phương trình

$$6(x + y) = 10x + y. \tag{1}$$

Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho, ta có phương trình

$$xy + 25 = 10y + x. \tag{2}$$

Từ (1) suy ra $x = \frac{5y}{4}$, thay vào (2) ta có $y^2 - 9y + 20 = 0$.

Giải phương trình này, ta được $y_1 = 5, y_2 = 4$.

Với $y_1 = 5$ thì $x_1 = 6,25$ (không thỏa mãn).

Với $y_2 = 4$ thì $x_2 = 5$ (thỏa mãn).

Vậy số phải tìm là 54. □

Bài 8. Một lâm trường dự định làm 75 ha rừng trong một tuần lễ. Do trồng mỗi tuần vượt mức 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm 1 tuần. Hỏi mỗi tuần dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

Lời giải.

Gọi số ha dự định trồng mỗi tuần là x (ha, $x > 0$).

Suy ra thực tế mỗi tuần trồng được $x + 5$ (ha).

Thời gian dự định trồng 75 ha rừng là $\frac{75}{x}$ (tuần).

Thời gian thực tế trồng 80 ha rừng là $\frac{80}{x+5}$ (tuần).

Theo đề bài, thực tế hoàn thành sớm 1 tuần ta có phương trình

$$\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 375 = 0.$$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-375) = 1600 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -25$ (loại); $x_2 = 15$ (nhận).

Vậy mỗi tuần dự định trồng 15 ha. □

Bài 9. Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Lời giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h, $x > 4$).

Suy ra vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h).

Thời gian ca nô đi xuôi dòng 24 km là $\frac{24}{x+4}$ (giờ).

Thời gian ca nô đi ngược dòng 16 km là $\frac{16}{x-4}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian ca nô đi bằng thời gian bè trôi đến chỗ gặp nhau, nên ta có phương trình

$$\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x^2 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc thực của ca nô là 20 km/h. □

Bài 10. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Lời giải.

Gọi chiều rộng mảnh đất là x (m, $0 < x < 13$), thì chiều dài mảnh đất là $x + 7$ (m). Theo đầu bài, hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, áp dụng định lí Pi-ta-go ta có phương trình

$$x^2 + (x + 7)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0.$$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-60) = 289 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 5$ (nhận).

Vậy chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là 5 m và chiều dài của mảnh đất là 12 m. □

Bài 11. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai bán kính OA, OB . Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N). Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$, hãy tính OM, ON theo R sao cho $CM = MN = ND$.

Lời giải.

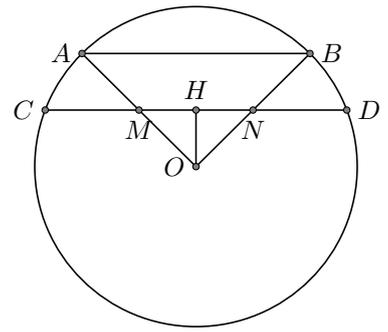
Đặt $OM = ON = x$ ($0 < x < R$).

Gọi H là hình chiếu của O lên CD . Tam giác OHM vuông

cân nên $MH = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Ta có $CM = DN, HC = HD$ nên ta có $HM = HN$ và vì $CM = MN = ND$. Ta có

$$\begin{aligned} CH = 3MH &\Leftrightarrow CH^2 = 9MH^2 \Leftrightarrow OC^2 - OH^2 = 9OM^2 \\ &\Leftrightarrow OC^2 = 10OM^2 \Leftrightarrow R^2 = 10x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$

Kết luận: $OM = ON = \frac{R\sqrt{10}}{10}$ thì $CM = MN = ND$.



Bài 12. Cho đường tròn (O, R) và dây $AB = 2a$ ($a < R$). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn D . Tính AD theo R và a .

Lời giải.

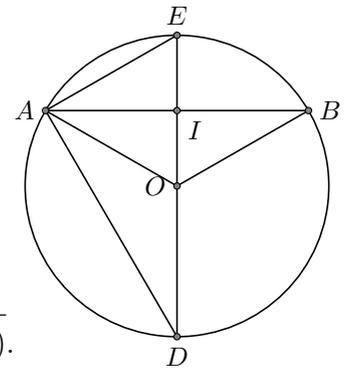
Hạ $OI \perp AB$ thì $IA = IB = a$. Kéo dài DO cắt đường tròn tại E thì tam giác ADE vuông, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AI^2 = ID \cdot IE$.

Đặt $ID = x$ ta có

$$a^2 = x(2R - x) \Leftrightarrow x^2 - 2Rx + a^2 = 0 \Leftrightarrow x = R \pm \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Mặt khác, trong tam giác vuông ADE ta có

$$AD^2 = DE \cdot DI = 2R(R \pm \sqrt{R^2 - a^2}) \Rightarrow AD = \sqrt{2R(R \pm \sqrt{R^2 - a^2})}.$$



Bài 13. Hưởng ứng chiến dịch mùa hè xanh tình nguyện năm 2013, lớp 9A của trường THCS Nguyễn Văn Trỗi được giao trồng 480 cây xanh, lớp dự định chia đều số cây phải trồng cho mỗi bạn trong lớp. Đến buổi lao động có 8 bạn phải đi làm việc khác nên mỗi bạn có mặt phải trồng thêm 3 cây nữa mới xong. Tính số học sinh của lớp 9A.

Lời giải.

Gọi x (học sinh) là số học sinh của lớp 9A ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số cây xanh mỗi học sinh cần phải trồng lúc đầu là $\frac{480}{x}$ (cây).

Số cây xanh mỗi học sinh phải trồng trong buổi lao động $\frac{480}{x} + 3 = \frac{480 + 3x}{x}$ (cây).

Số học sinh đi trồng cây $x - 8$ (học sinh).

Theo đề bài, ta có phương trình

$$(x - 8) \left(\frac{480 + 3x}{x} \right) = 480 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0.$$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1280) = 5184 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -32$ (loại); $x_2 = 40$ (nhận).

Vậy số học sinh của lớp 9A là 40 học sinh.

Bài 14. Hai đội xây dựng cùng làm chung một việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội 1 được điều đi làm việc khác, đội 2 tiếp tục làm. Do

cải tiến kỹ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội 2 đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên (với năng suất bình thường)?

Lời giải.

Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày, $x > 0$).

Mỗi ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), cả hai người làm được $\frac{1}{12}$ (công việc), người thứ hai làm được $\frac{1}{12} - \frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 8 ngày cả hai đội làm được $\frac{2}{3}$ (công việc).

Số phần việc còn lại mà đội hai phải làm là $\frac{1}{3}$ (công việc).

Năng suất của đội hai sau khi cải tiến kỹ thuật $\frac{1}{6} - \frac{2}{x}$ (công việc).

Theo đầu bài, đội 2 đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày nên ta có phương trình

$$3,5 \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{14} \Leftrightarrow x = 28.$$

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 28 ngày.

Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 21 ngày.

□



4 Các bài toán nâng cao

Bài 1. Có hai loại muối I và II. Người ta hòa 200 gam dung dịch muối I với 300 gam dung dịch muối II thì được một dung dịch muối có nồng độ muối là 33%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch I và II, biết rằng nồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 20%.

Lời giải.

Gọi nồng độ muối trong dung dịch I là $x\%$ ($0 < x < 100$), nồng độ muối trong dung dịch II là $y\%$ ($0 < y < 100$).

Khi đó lượng muối có trong 200 gam dung dịch muối I là $\frac{200x}{100} = 2x$ (gam);

Khối lượng muối có trong 300 gam dung dịch muối II là $\frac{300y}{100} = 3y$ (gam).

Khối lượng muối có trong 200 + 300 gam dung dịch hỗn hợp là $500 \cdot \frac{33}{100} = 165$ (gam).

Vì lượng muối của dung dịch hỗn hợp bằng tổng lượng muối của muối I và muối II nên ta có phương trình

$$2x + 3y = 165.$$

Nồng độ dung dịch muối I lớn hơn muối II là 20% nên ta có $x - y = 20$.

Do đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ 2x + 3y = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 20 \\ 2(y + 20) + 3y = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 25 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn).}$$

Vậy nồng độ muối trong dung dịch I là 45% và trong dung dịch II là 25%.

□

Bài 2. Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác, ca nô đó cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.

Lời giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước chảy lần lượt là x km/h và y km/h (với $x > y > 0$) thì vận tốc xuôi dòng của ca nô là $(x + y)$ km/h và khi ngược dòng là $(x - y)$ km/h.

Khi xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km, ca nô lần lượt phải đi trong $\frac{108}{x + y}$ giờ và $\frac{63}{x - y}$ giờ.

Ta có phương trình $\frac{108}{x + y} + \frac{63}{x - y} = 7$.

Khi xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km, ca nô lần lượt phải đi trong $\frac{81}{x + y}$ giờ và $\frac{84}{x - y}$ giờ.

Ta có phương trình $\frac{81}{x + y} + \frac{84}{x - y} = 7$.

Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{108}{x + y} + \frac{63}{x - y} = 7 \\ \frac{81}{x + y} + \frac{84}{x - y} = 7. \end{cases}$$

Đặt $\frac{1}{x + y} = u; \frac{1}{x - y} = v$ đưa về hệ

$$\begin{cases} 108u + 63v = 7 \\ 81u + 84v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{27} \\ v = \frac{1}{21}. \end{cases}$$

Do đó,

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h; vận tốc riêng của dòng nước chảy là 3 km/h. \square

Bài 3. Người ta hòa 8 gam một chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn 200 kg/m^3 để được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3 . Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng (giả sử hai chất lỏng không có xảy ra phản ứng hóa học).

Lời giải.

Gọi khối lượng riêng của chất thứ nhất là $x \text{ kg/m}^3, (x > 200)$; khi đó, khối lượng riêng của chất thứ hai là $x - 200 \text{ kg/m}^3$.

Thể tích của chất thứ nhất là $\frac{0,008}{x} \text{ m}^3$.

Thể tích của chất thứ hai là $\frac{0,006}{x - 200} \text{ m}^3$.

Thể tích của hỗn hợp chất lỏng là $\frac{0,008 + 0,006}{700} \text{ m}^3$.

Vì trước và sau khi trộn, tổng thể tích của hai chất lỏng đều không đổi nên ta có phương trình

$$\frac{0,008}{x} + \frac{0,006}{x - 200} = \frac{0,008 + 0,006}{700} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 800 \\ x_2 = 100 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy khối lượng riêng của chất thứ nhất là 800 kg/m^3 ; khối lượng riêng chất thứ hai là 600 kg/m^3 .

\square

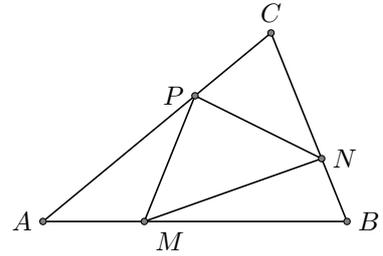
Bài 4. Trên 3 cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt lấy điểm M, N và P sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k$. Tìm k để $S_{MNP} = \frac{5}{8}S_{ABC}$.

Lời giải.

Ta có $S_{AMP} = S_{BMN} = S_{CPN} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k+1}$

Do $S_{MNP} = \frac{5}{8}S_{ABC}$ suy ra $S_{AMP} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Do đó, ta có phương trình:

$$\frac{k}{(k+1)^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = 8k \Leftrightarrow k^2 - 6k + 1 = 0$$



Giải phương trình ta được $k = 3 + 2\sqrt{2}, k = 3 - 2\sqrt{2}$.

□

Bài 5. Hai đội công nhân A và B dự định cùng làm một công việc trong 4 giờ 48 phút thì hoàn thành. Sau khi hai đội làm chung với nhau trong 2 giờ, thì số lượng công nhân ở đội A và đội B bị thay đổi nên năng suất làm việc của đội A bằng $\frac{1}{2}$ năng suất làm việc ban đầu của đội A và năng suất làm việc của đội B bằng $\frac{11}{4}$ năng suất làm việc ban đầu của đội B ; vì vậy hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định. Hỏi nếu số lượng công nhân ở đội A không bị thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trên trong mấy giờ?

Lời giải.

4 giờ 48 phút = $\frac{24}{5}$ giờ; 48 phút = $\frac{4}{5}$ giờ.

Gọi x (giờ) là thời gian một mình đội A hoàn thành công việc ($x > \frac{24}{5}$).

Gọi y (giờ) là thời gian một mình đội B hoàn thành công việc ($y > \frac{24}{5}$).

Trong $\frac{24}{5}$ giờ, đội A làm được $\frac{24}{5x}$ (công việc), đội B làm được $\frac{24}{5y}$ (công việc).

Theo đề ta có phương trình $\frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1$ (1)

Vì hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định nên thực tế hai đội làm trong 4 giờ.

Trong 2 giờ đầu, đội A làm được $\frac{2}{x}$ (công việc), đội B làm được $\frac{2}{y}$ (công việc).

Trong 2 giờ sau, đội A làm được $\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$ (công việc), đội B làm được $\frac{2}{x} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{2y}$ (công việc).

Theo đề ta có phương trình $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{x} + \frac{11}{2y} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{15}{2y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{24}{5x} + \frac{24}{5y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{15}{2y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12. \end{cases}$$

Vậy nếu số lượng công nhân ở đội A không bị thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trong 8 giờ. \square

§6 Ôn tập chương 4

1 Toán trắc nghiệm

1.1 Hàm số và đồ thị của hàm số $y = ax^2$

Bài 1. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m - 7)x - m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số của m để (P) và (d) có hai điểm chung phân biệt.

A 3.

B 4.

C 2.

D 1.

 **Lời giải.**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m - 7)x + m = 0$.

Ta có $\Delta' = -14m + 49 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{2}$. Vậy có 3 số nguyên dương thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Bài 2. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m - 6)x + m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số của m nhỏ hơn 10 để (P) và (d) không có điểm chung phân biệt.

A 6.

B 7.

C 5.

D 4.

 **Lời giải.**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m - 6)x + m = 0$.

Ta có $\Delta' = -12m + 36 < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Mà $m < 10$. Vậy có 6 số nguyên dương thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Bài 3. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m - 9)x + m$ với m là tham số. Biết rằng (P) và (d) có đúng một điểm chung. Hỏi m có tính chất nào sau đây?

A $4 < m < 5$.

B $m > 5$.

C $3 < m < 4$.

D $m < 3$.

 **Lời giải.**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m - 9)x + m = 0$.

Ta có $\Delta' = -18m + 81 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$.

Vậy $4 < m < 5$.

Chọn đáp án A □

Bài 4. Cho parabol $(P) : y = (m^2 + 1)x^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để (P) đi qua điểm $A(2; 8)$?

A 0.

B 1.

C 2.

D 3.

 **Lời giải.**

Vì (P) đi qua A nên $8 = 4(m^2 + 1) \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Chọn đáp án C □

📌 **Bài 5.** Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m^2 - 4)x - m^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của tham số của m để (P) và (d) có một điểm chung.

- (A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

📌 **Lời giải.**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m^2 - 4)x + m^2 = 0$.

Ta có $\Delta' = -8m^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$. Vậy có 2 số nguyên dương thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

📌 **Bài 6.** Cho parabol $(P) : y = x^2$ và một số dương a cố định, có bao nhiêu điểm trên (P) có tung độ bằng a ?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

📌 **Lời giải.**

Xét phương trình $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Chọn đáp án (B) □

📌 **Bài 7.** Cho parabol $(P) : y = x^2$, biết rằng không có điểm trên (P) có tung độ bằng a . Hỏi a có tính chất nào sau đây

- (A) $\sqrt{a^2} = a$. (B) $\sqrt{a^2} = -a$. (C) $|a| = a$. (D) $a = 0$.

📌 **Lời giải.**

Phương trình $x^2 = a$ vô nghiệm nên $a < 0$.

Chọn đáp án (B) □

📌 **Bài 8.** Cho parabol $(P) : y = x^2$ và số a có tính chất trên (P) đúng 1 điểm có tung độ bằng a . Có bao nhiêu số a như vậy?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

📌 **Lời giải.**

Phương trình $x^2 = a$ có nghiệm duy nhất nên $a = 0$.

Chọn đáp án (B) □

1.2 Phương trình bậc hai một ẩn và công thức nghiệm

📌 **Bài 9.** Tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$ là

- (A) $S = \{1; 2\}$. (B) $S = \{-2; 1\}$. (C) $S = \{-2; -1\}$. (D) $S = \{-1; 2\}$.

📌 **Lời giải.**

Ta có $\Delta = 9 > 0$.

Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1, x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 1\}$.

Chọn đáp án (B) □

📌 **Bài 10.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm.

- (A) $m < -2$. (B) $m \geq -2$. (C) $m > -2$. (D) $m \leq -2$.

📌 **Lời giải.**

Phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - (m^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow 2m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -2.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 11. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $(m - 1)x^2 + 6x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất?

- (A)** 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** Vô số.

Lời giải.

Với $m = 1$ phương trình trở thành $6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$, thoả mãn.

Với $m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9 + (m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $m \in \{1; -8\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 12. Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có một nghiệm $x = 2$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)** $a + b + c = 0$. **(B)** $a + b + c = 2$. **(C)** $4a + 2b + c = 0$. **(D)** $c = 2$.

Lời giải.

Phương trình có một nghiệm $x = 2$ nên $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0$ hay $4a + 2b + c = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 13. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = -bx + c$ có đồ thị là đường thẳng d , với a, b là các số thực khác 0. Giả sử đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Chọn khẳng định đúng.

- (A)** $b^2 - 4ac < 0$. **(B)** $b^2 - 4ac > 0$. **(C)** $b^2 + 4ac < 0$. **(D)** $b^2 + 4ac > 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $ax^2 + bx - c = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hay $\Delta = b^2 + 4ac > 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Bài 14. Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt. Kết luận nào sau đây là **đúng**?

- (A)** Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
(B) Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nghiệm kép.
(C) Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ vô nghiệm.
(D) Phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Lời giải.

Vì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta_1 = b^2 - 4ac > 0$.

Khi đó $\Delta_2 = 4b^2 - 4ac = 3b^2 + \Delta_1 > 0$ nên phương trình $ax^2 - 2bx + c = 0$ cũng có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(A)** □

➤ **Bài 15.** Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- (A) Vô số. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

✍ **Lời giải.**

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 3 - (m - 4) > 0 \Leftrightarrow m < 7.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 16.** Biết phương trình $3x^2 - 4x - 15 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Giả sử $x_1 > x_2$ khi đó biểu thức $\frac{x_2}{x_1}$ có giá trị

- (A) $\frac{5}{9}$. (B) $-\frac{5}{9}$. (C) -5 . (D) 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 3 \cdot (-15) = 49 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 7$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \frac{2+7}{3} = 3 \\ x_2 = \frac{2-7}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$. Khi đó $\frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

1.3 Hệ thức Viet và áp dụng

➤ **Bài 17.** Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 10 = 0$. Khi đó tích x_1x_2 bằng

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) -5 . (D) 5.

✍ **Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{10}{2} = -5. \end{cases}$

Vậy $x_1x_2 = -5$.

Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 18.** Phương trình nào sau đây có nghiệm là $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ và $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

- (A) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. (B) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.
(C) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. (D) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

✍ **Lời giải.**

Tổng hai số $S = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ và tích hai số $P = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$. Theo định lý đảo của định lý Vi-ét, hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

➤ **Bài 19.** Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị là

(A) $\frac{29}{2}$.

(B) 29.

(C) $\frac{29}{4}$.

(D) $\frac{25}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2} \end{cases}$. Suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{29}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 20.** Cho phương trình $x^2 - 4x + 1 - m = 0$, với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn $5(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 0$.

(A) $m = 4$.

(B) $m = -5$.

(C) $m = -4$.

(D) Không có giá trị nào.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$.

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = 1 - m \end{cases}$. Từ đó ta có

$$5(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 4 - 4(1 - m) = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 21.** Giả sử phương trình $mx^2 - (2m + 1)x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Biểu thức nào sau đây không phụ thuộc vào m ?

(A) $x_1 + x_2 - 2x_1x_2$.

(B) $2(x_1 + x_2) - x_1x_2$.

(C) $2(x_1 + x_2) + x_1x_2$.

(D) $x_1 + x_2 - 2x_2x_2$.

✍ **Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{m} = 1 - \frac{2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = \frac{1}{m} \\ x_1x_2 - 1 = -\frac{2}{m} \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$x_1x_2 - 1 = -2(x_1 + x_2 - 2) \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 5.$$

Vậy biểu thức $2(x_1 + x_2) + x_1x_2$ không phụ thuộc m .

Chọn đáp án (C) □

➤ **Bài 22.** Với giá trị nào của m thì phương trình $(m - 1)x^2 + 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm trái dấu

(A) Với mọi m .

(B) Không có giá trị nào.

(C) $m < 1$.

(D) $m \neq 1$.

 **Lời giải.**

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -(m - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

 **Bài 23.** Giả sử phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Phương trình nào sau đây nhận $x_1 + 1$ và $x_2 + 1$ làm nghiệm?

(A) $x^2 + (m + 2)x - 2m = 0$.

(B) $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$.

(C) $x^2 - (m - 2)x - 2m = 0$.

(D) $x^2 + (m - 2)x + 2m = 0$.

 **Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = m - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = x_1 + x_2 + 2 = m + 2 \\ (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = m - 1 + m + 1 = 2m. \end{cases}$

Vậy phương trình cần tìm là $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

 **Bài 24.** Định m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + m - 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) $m > 0$.

(B) $m > 3$.

(C) $0 < m < 3$.

(D) $m < 3$.

 **Lời giải.**

Đặt $t = x^2$. Điều kiện $t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m - 3 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ m^2 - m + 3 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ m > 0 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$

Chọn đáp án **(B)** □

1.4 Phương trình quy về phương trình bậc hai

 **Bài 25.** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ là

(A) 0.

(B) $\frac{5}{2}$.

(C) 5.

(D) 1.

 **Lời giải.**

Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$).

Phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases}$

TH1. Với $t = \frac{1}{2}$, ta có $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

TH2. Với $t = 2$, ta có $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng 0.

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 26. Biết rằng phương trình $x^3 - 2x^2 - 8x + 9 = 0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có đúng một nghiệm âm có dạng $\frac{a - \sqrt{b}}{c}$ (với a, b, c là các số tự nhiên và phân số $\frac{a}{c}$ tối giản). Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = 40$.

(B) $S = 38$.

(C) $S = 42$.

(D) $S = 44$.

Lời giải.

Ta có $x^3 - 2x^2 - 8x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 - x - 9 = 0. \end{cases}$

Xét $x^2 - x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2} \Rightarrow a = 1, b = 37, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 40$.

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 27. Phương trình $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = 9$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = 9 \Leftrightarrow (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = 9$.

Đặt $t = x^2 + 8x + 7$.

Ta được phương trình $t^2 + 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -9. \end{cases}$

TH1. Với $t = 1$ suy ra $x = -4 \pm \sqrt{10}$.

TH2. Với $t = -9$ suy ra $x = -4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 28. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $(3x^2 - x - 5)^2 - (4x - 1)^2 = 0$ là

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) $\frac{8}{3}$.

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) -1 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (3x^2 - x - 5)^2 - (4x - 1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (3x^2 - x - 5 - 4x + 1)(3x^2 - x - 5 + 4x - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (3x^2 - 5x - 4)(x^2 + x - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 4 = 0 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6} \\ x = 1 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $S = \frac{5 - \sqrt{73}}{6} + \frac{5 + \sqrt{73}}{6} + 1 + (-2) = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

(A) $m > -\frac{1}{3}$ và $m \neq 0$.

(B) $-\frac{1}{3} < m < 1$.

C $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$.

D $m < 1$.

Lời giải.

Ta có $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ hoặc $x^2 = 3m + 1$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi: $\begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases}$.

Do đó $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$.

Chọn đáp án **C** □

Bài 30. Để giải phương trình $|x + 1| = x - 3$, bạn Huy đã làm theo các bước như sau:

Bước 1. Điều kiện xác định của phương trình $x \in \mathbb{R}$.

Bước 2. $|x + 1| = x - 3 \Leftrightarrow |x + 1|^2 = (x - 3)^2$.

Bước 3. $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x - 8 = 0$.

Bước 4. $\Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Trong các bước giải ở trên bạn Huy đã làm sai từ bước nào?

A Bước 1.

B Bước 2.

C Bước 3.

D Bước 4.

Lời giải.

Ở bước 2 sau khi bình phương hai vế thì phương trình nhận được chỉ là phương trình hệ quả của phương trình đầu nên không được dùng dấu tương đương.

Chọn đáp án **B** □

Bài 31. Biết rằng phương trình $\sqrt{2x - 9} = x - 5$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của $S = a + b + c$.

A $S = 9$.

B $S = 7$.

C $S = 5$.

D $S = 3$.

Lời giải.

ĐKXD: $2x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}$.

Với điều kiện trên, ta có

$$\sqrt{2x - 9} = x - 5 \Rightarrow 2x - 9 = (x - 5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 34 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - \sqrt{2} \\ x = 6 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Do chỉ có $x = 6 + \sqrt{2}$ thỏa mãn phương trình nên phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 6 + \sqrt{2}$. Suy ra $a = 6; b = 1; c = 2$ nên $S = 9$.

Chọn đáp án **A** □

Bài 32. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + m} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm.

A $1 \leq m < 4$.

B $m < 7$.

C $m > 9$.

D $6 \leq m < 10$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 8x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{m - 1}{6} \end{cases}$.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $\frac{m - 1}{6} < 1 \Leftrightarrow m < 7$.

Chọn đáp án **B** □

1.5 Giải toán bằng cách lập phương trình

📦 **Bài 33.** Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

- (A) 13 tuổi. (B) 14 tuổi. (C) 15 tuổi. (D) 16 tuổi.

✍ **Lời giải.**

Giả sử năm nay Phương x tuổi ($x > 0$), mẹ Phương $3x$ tuổi.

Theo bài 13 năm nữa tuổi mẹ Phương gấp 2 lần tuổi Phương nên ta có phương trình

$$3x + 13 = (x + 13) \cdot 2 \Leftrightarrow x = 13.$$

Vậy năm nay Phương 13 tuổi.

Chọn đáp án (A) □

📦 **Bài 34.** Chu vi một mảnh vườn hình chữ nhật là 30 m. Biết chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính diện tích hình chữ nhật.

- (A) 100 m². (B) 70 m². (C) 50 m². (D) 55 m².

✍ **Lời giải.**

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m, $x > 0$), chiều dài của mảnh vườn là $x + 5$ (m).

Theo bài chu vi mảnh vườn là 30 m nên

$$[x + (x + 5)] \cdot 2 = 30 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 5 m, chiều dài mảnh vườn là 10 m. Do đó diện tích mảnh vườn là 50 m².

Chọn đáp án (C) □

📦 **Bài 35.** Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25 km/h. Lúc về, người đó đi với vận tốc 30 km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

- (A) 40 km. (B) 70 km. (C) 50 km. (D) 60 km.

✍ **Lời giải.**

Gọi thời gian đi từ A đến B là x (giờ, $x > 0$), thời gian về là $x - \frac{1}{3}$.

Theo bài ta có phương trình

$$25x = 30 \left(x - \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy thời gian đi từ A đến B là 2 giờ. Khi đó quãng đường AB dài $25 \cdot 2 = 50$ km.

Chọn đáp án (C) □

📦 **Bài 36.** Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 80 phút và ngược dòng hết 2 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

- (A) 16 km/h. (B) 18 km/h. (C) 20 km/h. (D) 15 km/h.

✍ **Lời giải.**

Đổi 80 phút = $\frac{4}{3}$ giờ.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$).

Vận tốc ca nô xuôi dòng là $x + 3$ (km/h).

Vận tốc ca nô ngược dòng là $x - 3$ (km/h).
Theo bài ta có phương trình

$$\frac{4}{3}(x + 3) = 2(x - 3) \Leftrightarrow x = 15.$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 15 km/h.

Chọn đáp án **(D)** □

Bài 37. Một hình chữ nhật có chu vi 278 m, nếu giảm chiều dài 21 m và tăng chiều rộng 10 m thì diện tích tăng 715 m². Chiều dài hình chữ nhật là

- (A)** 132 m. **(B)** 124 m. **(C)** 228 m. **(D)** 114 m.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 0$), chiều rộng hình chữ nhật là $139 - x$ (m).
Theo bài ta có phương trình

$$(x - 21)(139 - x + 10) = x(139 - x) + 715$$

$$\Leftrightarrow x = 124.$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 124 m. □

Bài 38. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật đó là 5400 cm², diện tích hình chữ nhật là 5400 cm². Chu vi hình chữ nhật là

- (A)** 300 cm. **(B)** 250 cm. **(C)** 350 cm. **(D)** 400 cm.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm, $x > 0$). Khi đó, chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3}x$ (cm).
Theo đầu bài ta có phương trình

$$x \cdot \frac{2}{3}x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100.$$

Giải ra ta được $x = 90$ (vì $x > 0$).

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 cm, chiều rộng hình chữ nhật là 60 cm. Do đó chu vi hình chữ nhật là 300 cm.

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 39. Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m². Tính độ dài chiều dài của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m².

- (A)** 25 m. **(B)** 15 m. **(C)** 5 m. **(D)** 20 m.

Lời giải.

Gọi chiều dài là x (m, $x > 0$), chiều rộng là $\frac{100}{x}$ (m).

Theo bài ta có phương trình

$$(x - 5) \left(\frac{100}{x} + 2 \right) = 100 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 500 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x = 20$ (thỏa mãn) hoặc $x = -12,5$ (loại).

Vậy chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là 20 m.

Chọn đáp án **(D)** □

Bài 40. Một công nhân dự định làm 36 sản phẩm trong thời gian đã định. Sau khi làm được nửa số lượng được giao, người đó dừng lại nghỉ 30 phút. Vì vậy, mặc dù làm thêm 2 sản phẩm mỗi giờ với nửa số sản phẩm còn lại nhưng vẫn hoàn thành công việc chậm hơn dự kiến 12 phút. Tính năng suất dự kiến.

- (A) 13 sản phẩm/giờ. (B) 12 sản phẩm/giờ. (C) 10 sản phẩm/giờ. (D) 11 sản phẩm/giờ.

 **Lời giải.**

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}$).

Theo bài ta có phương trình

$$\frac{18}{x} + \frac{1}{2} + \frac{18}{x+2} = \frac{36}{x} + \frac{1}{5}.$$

Giải phương trình ta được $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 10$ (thỏa mãn).

Vậy năng suất dự kiến là 10 sản phẩm/giờ.

Chọn đáp án (C) □

2 Toán tự luận

2.1 Giải phương trình bậc hai hoặc phương trình đưa được về bậc hai

Bài 41. Giải phương trình $4x^2 + \frac{1}{x^2} - \left|2x + \frac{1}{x}\right| = 2$.

 **Lời giải.**

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = \left|2x + \frac{1}{x}\right|$, với $t \geq 0$, suy ra $t^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} + 4$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 & \text{(nhận)} \\ t = -2 & \text{(loại)}. \end{cases}$$

Với $t = 3$, suy ra

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 = 9 \Leftrightarrow 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}$. □

Bài 42. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = 7 - x^2 - 2x$.

 **Lời giải.**

Điều kiện: $5x^2 + 10x + 1 \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1}$ ($t \geq 0$).

Khi đó ta có $t^2 = 5x^2 + 10x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = \frac{t^2 - 1}{5}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t = 7 - \frac{t^2 - 1}{5} \Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 & \text{(nhận)} \\ t = -9 & \text{(loại)}. \end{cases}$$

Với $t = 4$, ta có

$$5x^2 + 10x + 1 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{1; 3\}$. □

👉 **Bài 43.** Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2+5x} + 2x = 25$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+5} (t \geq 0)$.

Khi đó ta có $t^2 = 2x + 5 + 2\sqrt{x^2+5x} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2+5x} = t^2 - 5$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t - 30 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(t + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 & (\text{nhận}) \\ t = -6 & (\text{loại}). \end{cases}$$

Với $t = 5$, ta có

$$\begin{aligned} 2x + 5 + 2\sqrt{x^2+5x} = 25 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x} = 10 - x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - x \geq 0 \\ (x^2 + 5x) = (10 - x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x^2 + 5x = 100 - 20x + x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$. □

2.2 Phương trình bậc hai có chứa tham số. Định lí Vi-et

👉 **Bài 44.** Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ (1), với x là ẩn số.

- Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0.$$

✍ **Lời giải.**

- Với $m = 2$, phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2+5) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 2.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m+2 \\ P = x_1x_2 = m^2+5. \end{cases}$$

Ta có

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(m^2+5) - 5(2m+2) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = 4 \text{ (thỏa)}. \end{cases}$$

Vậy $m = 4$.

□

Bài 45. Cho phương trình bậc hai ẩn $x: x^2 + (4m + 1)x + 2m - 8 = 0$ (m là tham số).

- a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi tham số m .
- b. Tìm m để hai nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| = 17$.

Lời giải.

- a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi tham số m .
Ta có: $\Delta = (4m + 1)^2 - 4(2m - 8) = 16m^2 + 33 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.
Do đó, phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

- b. Tìm m để hai nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| = 17$.
Do phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , nên theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -4m - 1$ và $x_1 x_2 = 2m - 8$.
Từ giả thiết $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 17^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 17^2$.
Thay (1) vào ta được: $(-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 17^2 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \end{cases}$.
Vậy $m = \pm 4$.

□

Bài 46. Cho phương trình

$$x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0.$$

Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2 \leq x_1 < x_2 \leq 5$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 < x_2$ là:

$$x_1 = \frac{2m + 1 - 1}{2} = m, \quad x_2 = \frac{2m + 1 + 1}{2} = m + 1.$$

Từ giả thiết bài toán suy ra $2 \leq m < m + 1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$.

Vậy $2 \leq m \leq 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 47. Cho phương trình

$$x^2 + (1 - 4m)x + 4m^2 - 2m = 0,$$

với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| - 3|x_2| = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\Delta = (1 - 4m)^2 - 4(4m^2 - 2m) = 1 - 8m + 16m^2 - 16m^2 + 8m = 1 > 0.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 2m - 1; \quad x_2 = 2m \quad (x_1 < x_2).$$

Theo giả thiết $|x_1| - 3|x_2| = 0 \Leftrightarrow |x_1| = 3|x_2|$ hay:

$$|2m - 1| = 3|2m| \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 6m \\ 2m - 1 = -6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = -1 \\ 8m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ m = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy $m \in \left\{ \frac{-1}{4}, \frac{1}{8} \right\}$ là giá trị cần tìm. □

📖 Bài 48. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m + 4)x + 3(m + 1) = 0$ có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, biết độ dài cạnh còn lại là 5.

📝 Lời giải.

Ta có $\Delta = (m - 2)^2 \geq 0, \forall m$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 3, x = m + 1$. Ta xét hai trường hợp sau.

TH1. $m + 1$ và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m + 1)^2 + 9 = 25 \\ 0 < m + 1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

TH2. 5 và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m + 1)^2 = 25 + 9 \\ m + 1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{34} - 1.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 3, m = \sqrt{34} - 1$. □

2.3 Tương giao giữa Parabol và đường thẳng

📖 Bài 49. Tìm m để Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2(m + 1)x - m^2 - 9$. Tìm m để

1. d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
2. d tiếp xúc với (P) .
3. d và (P) không có điểm chung.

📝 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\begin{aligned} x^2 &= 2(m + 1)x - m^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 9 = 0. \quad (1) \\ \Delta' &= (m + 1)^2 - (m^2 + 9) = 2m - 8. \end{aligned}$$

1. d cắt (P) tại hai điểm phân biệt \Leftrightarrow phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow m > 4.$$

2. d tiếp xúc với (P) \Leftrightarrow phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

3. d và (P) không có điểm chung \Leftrightarrow phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

□

Bài 50. Cho Parabol $(P) : y = -\frac{1}{2}x^2$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với (P) tại điểm có hoành độ bằng -2 .

Lời giải.

Giả sử đường thẳng cần lập là $d : y = ax + b$.

Thay $x = -2$ vào (P) ta được $y = -\frac{1}{2}(-2)^2 = -2$, suy ra tiếp điểm $M(-2; -2)$.

Vì $M \in d$ nên $-2 = a \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = 2a - 2$ (1)

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-\frac{1}{2}x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 + 2ax + 2b = 0. \tag{2}$$

$$\Delta' = a^2 - 2b.$$

Vì d tiếp xúc với (P) nên phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2b = 0$. (3)

Thay (1) vào (3) ta được

$$a^2 - 2(2a - 2) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Thay $a = 2$ vào (1) được $b = 2$. Vậy $d : y = 2x + 2$. □

Bài 51. Cho Parabol $(P) : y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $d : y = mx - m + 2$.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
2. Giả sử $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của d và (P) . Chứng minh rằng

$$y_1 + y_2 \geq (2\sqrt{2} - 1)(x_1 + x_2).$$

Lời giải.

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{x^2}{2} = mx - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 4 = 0. \tag{1}$$

Ta có

$$\Delta' = m^2 - (2m - 4) = m^2 - 2m + 4 = (m - 1)^2 + 3 > 0 \forall m.$$

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$. Vậy d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .

2. Theo định lý Vi-ét $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m$.

Ta có $y_1 = mx_1 - m + 2, y_2 = mx_2 - m + 2$. Suy ra

$$\begin{aligned}
 y_1 + y_2 &= (mx_1 - m + 2) + (mx_2 - m + 2) \\
 &= m(x_1 + x_2) - 2m + 4 \\
 &= 2m^2 - 2m + 4 \\
 &= [(\sqrt{2}m)^2 - 4\sqrt{2}m + 4] + (2\sqrt{2} - 1) \cdot 2m \\
 &= (\sqrt{2}m - 2)^2 + (2\sqrt{2} - 1) \cdot 2m \\
 &= (\sqrt{2}m - 2)^2 + (2\sqrt{2} - 1) \cdot (x_1 + x_2).
 \end{aligned}$$

Vậy $y_1 + y_2 \geq (2\sqrt{2} - 1)(x_1 + x_2)$.

□

2.4 Giải bài toán bằng cách lập phương trình

⇒ Bài 52. Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, một chiếc bè trôi từ A đến B với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

✍ Lời giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h, $x > 4$).

Vận tốc ca nô lúc xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).

Vận tốc ca nô lúc ngược dòng là $x - 4$ (km/h).

Theo đề bài, thời gian ca nô đi bằng thời gian bè trôi đến chỗ gặp nhau nên ta có phương trình

$$\frac{24}{x + 4} + \frac{16}{x - 4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x^2 - 20x = 0.$$

Giải ra ta có $x_1 = 20$ (thỏa mãn), $x_2 = 0$ (không thỏa mãn).

Vậy vận tốc thực của ca nô là 20 km/h.

□

⇒ Bài 53. Một đội xe cần phải chuyên chở 150 tấn hàng. Hôm làm việc có 5 xe được đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 5 tấn. Hỏi đội xe ban đầu có bao nhiêu chiếc? (Biết rằng, mỗi xe chở số hàng như nhau).

✍ Lời giải.

Gọi số xe ban đầu là x (chiếc; $x \in \mathbb{N}, x > 5$).

Lúc đầu, mỗi xe dự định chở $\frac{150}{x}$ (tấn hàng).

Theo đề bài, mỗi xe phải chở thêm 5 tấn hàng, ta có phương trình

$$\frac{150}{x - 5} - \frac{150}{x} = 5 \Leftrightarrow 5x^2 - 25x - 750 = 0.$$

Giải ra ta có $x_1 = -10$ (loại), $x_2 = 15$ (thỏa mãn).

Vậy lúc đầu có 15 chiếc xe.

□

⇒ Bài 54. Số học sinh của một trường sau 2 năm tăng từ 500 lên 720 học sinh. Vậy trung bình hàng năm, số học sinh trường đó tăng lên bao nhiêu phần trăm?

✍ Lời giải.

Gọi x là số phần trăm chỉ số học sinh tăng trung bình hàng năm ($x > 0$).

Số học sinh tăng năm đầu là $500 \cdot \frac{x}{100}$ (học sinh).

Số học sinh tăng trong năm thứ hai là $(500 + 5x) \cdot \frac{x}{100} = 5x + \frac{x^2}{20}$ (học sinh).

Theo bài, sau hai năm số học sinh tăng là $720 - 500 = 220$ (học sinh), khi đó ta có phương trình

$$5x + 5x + \frac{x^2}{20} = 220 \Leftrightarrow x^2 + 200x - 4400 = 0.$$

Giải ra ta có $x_1 = -220$ (loại), $x_2 = 20$ (thỏa mãn).

Vậy hàng năm, trung bình số học sinh tăng lên 20%. □

2.5 Toán nâng cao

Bài 55. Cho $a > 4$ và phương trình $x^2 - \sqrt{a}x + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 ; phương trình $x^2 - \sqrt{a+1}x + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_3, x_4 . Tính giá trị biểu thức $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{a} \\ x_1 x_2 = 1 \\ x_3 x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 1 + x_3^2 = \sqrt{a+1}x_3 \\ 1 + x_4^2 = \sqrt{a+1}x_4. \end{cases}$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) &= [x_1 x_2 - x_3(x_1 + x_2) + x_3^2][x_1 x_2 + x_4(x_1 + x_2) + x_4^2] \\ &= (1 - \sqrt{a}x_3 + x_3^2)(1 + \sqrt{a}x_4 + x_4^2) \\ &= (\sqrt{a+1}x_3 - \sqrt{a}x_3)(\sqrt{a+1}x_4 + \sqrt{a}x_4) \\ &= (\sqrt{a+1} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})x_3 x_4 = a + 1 - a = 1. \end{aligned}$$

□

Bài 56. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn $ax_1 + bx_2 + c = 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^2c + ac^2 + b^3 - 3abc$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -\frac{c}{a}. \end{cases}$$

Nên $ax_1 + bx_2 + c = 0 \Rightarrow x_1 + \frac{b}{a}x_2 + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x_1 - x_2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2^2$.

$$\begin{aligned} M &= a^2c + ac^2 + b^3 - 3abc = a^3 \left[\frac{c}{a} + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{bc}{a} \right] \\ &= a \left(x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 - (x_1 + x_2)^3 + 3(x_1 + x_2)x_1 x_2 \right) = a(x_1 x_2 + x_1^3 - x_1^3 - x_2^3) = a \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Bài 57.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P) : y = mx^2$ ($m > 0$) và đường thẳng $(d) : y = 2x - m^2$.

1. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B . Khi đó chứng minh A và B cùng nằm về một phía với trục tung.

2. Với m tìm được ở câu a). Gọi x_A, x_B theo thứ tự là hoành độ các điểm A và B . Tìm m để biểu thức $K = \frac{2}{x_A + x_B} + \frac{1}{4x_Ax_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

 Lời giải.

1. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) , ta được $mx^2 - 2x + m^2 = 0$.

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta = 1 - m^3 > 0 \Rightarrow m < 1$.

Kết hợp điều kiện $m > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$ thì d cắt P tại hai điểm phân biệt

Áp dụng hệ thức vi-ét $x_1 \cdot x_2 = m > 0$.

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm cùng 1 phía với trục tung.

2. Ta có $K = m + \frac{1}{4m + 1} = \frac{1}{4}(4m + 1) + \frac{1}{4m + 1} - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Dấu = xảy ra khi $m = \frac{1}{4}$

□

§7 Đề kiểm tra 45 phút

1 Đề kiểm tra - cơ bản

📁 **Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0.$

b) $2x^2 - 3x - 2 = 0.$

(3 điểm)

✍ **Lời giải.**

1. $a = 1, b = -3, c = 2$ nên $a + b + c = 0.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{1, 2\}.$

2. $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = 2$ hoặc $x = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$

□

📁 **Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0.$

b) $x + \sqrt{x} - 6 = 0.$

(2 điểm)

✍ **Lời giải.**

1. Đặt $t = x^2, t \geq 0.$ Phương trình trở thành $t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2(\text{loại}). \end{cases}$

Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{-2, 2\}.$

2. Đặt $t = \sqrt{x}, t \geq 0.$ Phương trình trở thành $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3(\text{loại}). \end{cases}$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{4\}.$

□

📁 **Bài 3.** Cho phương trình $7x^2 + 2(m - 1)x - m^2 = 0.$

(1)

1. Tìm m để phương trình (1) luôn có nghiệm.

2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm m thỏa mãn hệ thức $x_1x_2 = -7.$

(2 điểm)

✍ **Lời giải.**

1. Ta có $\Delta' = (1 - m)^2 + 7m^2$. Ta có $(1 - m)^2 \geq 0$ và $7m^2 \geq 0$ nên $\Delta' \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$.
 Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

2. Theo hệ thức Vi-et, ta có $x_1x_2 = -\frac{m^2}{7}$.

$$\text{Khi đó, } x_1x_2 = -7 \Leftrightarrow -\frac{m^2}{7} = -7 \Leftrightarrow m^2 = 49 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = -7 \end{cases}$$

Vậy $m = -7$ hoặc $m = 7$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 4. Tính chiều dài và chiều rộng của một thửa ruộng hình chữ nhật. Biết chiều dài hơn chiều rộng 10 m và diện tích bằng 1200 m².

(2 điểm)

Lời giải.

Gọi chiều rộng của thửa ruộng hình chữ nhật là x ($x > 0$, m).

Chiều dài hơn chiều rộng 10m nên chiều dài là $x + 10$ (m).

Diện tích thửa ruộng hình chữ nhật là 1200m² nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} x(x + 10) &= 1200 \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x - 1200 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -40(\text{loại}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy chiều dài thửa ruộng hình chữ nhật là 40 m và chiều rộng thửa ruộng hình chữ nhật là 30 m.

□

Bài 5. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai nhận $3x_1$ và $3x_2$ làm nghiệm.

(1 điểm)

Lời giải.

Đặt $S = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2)$, $P = 3x_13x_2 = 9x_1x_2$.

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ nên ta có hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -1. \end{cases}$

Như vậy, $\begin{cases} S = 3(x_1 + x_2) = -3 \\ P = 9x_1x_2 = -9. \end{cases}$

Do đó: $3x_1, 3x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 9 = 0$.

□

2

Đề kiểm tra - nâng cao

Bài 1. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ tương đương với phương trình $2x^2 + mx + 4 = 0$.

(2 điểm)

Lời giải.

Ta có $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ tương đương phương trình $2x^2 + mx + 4 = 0$ khi và chỉ khi phương trình $2x^2 + mx + 4 = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1; 2\}$.

Với $x = 1$ hoặc $x = 2$ là nghiệm thì $\begin{cases} 2 + m + 4 = 0 \\ 8 + 2m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -6$.

Thử lại, với $m = -6$ thỏa mãn.

Vậy $m = -6$ là giá trị cần tìm. □

Bài 2. Cho phương trình $2x^2 + 2(m - 1)x - 3m^2 = 0$. (1)

1. Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

(2 điểm)

Lời giải.

1. Xét $\Delta' = (m - 1)^2 + 6m^2 = 7m^2 - 2m + 1 = 7\left(m - \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{6}{7}$. Vậy $\Delta' > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

2. Theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{3m^2}{2}. \end{cases}$

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1 - m)^2 + 3m^2 = 4m^2 - 2m + 1 = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Do đó: $A \geq \frac{3}{4}$. $A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{3}{4}$ tại $m = \frac{1}{2}$. □

Bài 3. Một chiếc ca nô theo dòng sông từ A đến B, rồi ngược dòng từ B về A hết 5 giờ. Tìm vận tốc riêng của ca nô (vận tốc của ca nô khi dòng nước đứng yên), biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h và khoảng cách từ A đến B là 48 km.

(2 điểm)

Lời giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h), ($x > 4$).

Vận tốc ca nô đi từ A đến B là $x + 4$ (km/h).

Vận tốc ca nô đi từ B về A là $x - 4$ (km/h).

Thời gian ca nô đi từ A đến B là $\frac{48}{x + 4}$ (h).

Thời gian ca nô đi từ B đến A là $\frac{48}{x - 4}$ (h).

Tổng thời gian cả đi và về hết 5h nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{48}{x + 4} + \frac{48}{x - 4} &= 5 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - 96x - 80 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -\frac{4}{5} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 20 km/h. □

👉 **Bài 4.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$.

(2 điểm)

📝 **Lời giải.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x) + (y^2 + y) = 8 \\ (x^2 + x)(y^2 + y) = 12. \end{cases}$$

Đặt $a = x^2 + x, b = y^2 + y$, hệ trở thành $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 12. \end{cases}$

Khi đó, a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 12 = 0$. Giải phương trình ta được hai nghiệm là 6 và 2. Do vai trò a, b là đối xứng nên ta xét hai trường hợp:

$$\text{TH1: } \begin{cases} a = x^2 + x = 6 \\ b = y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \\ y = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} a = x^2 + x = 2 \\ b = y^2 + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ y = 2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có cặp nghiệm $(x; y)$ là $S = \{(2, 1); (-3, 1); (2, -2); (-3, -2), (1, 2); (1, -3); (-2, 2); (-2, -3)\}$. □

👉 **Bài 5.** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (2) sao cho $b > a > 0$. Chứng minh rằng: Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì $\frac{2b+c}{a-b} < 2$.

(2 điểm)

📝 **Lời giải.**

Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow 4ac > b^2$.

Do đó: $4a + c \geq 2\sqrt{4ac} > 2\sqrt{b^2} = 2|b| \geq 2b$.

Vậy $4a + c > 2b \Leftrightarrow a + b + c > 3(b - a) \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a-b} < 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{2b+c}{a-b} < 3 \Leftrightarrow \frac{2b+c}{a-b} < 2$. □