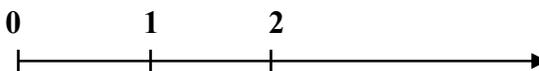


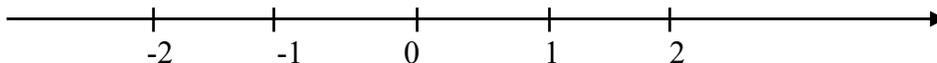
CHUYÊN ĐỀ I: SỐ HỮU TỈ

I. ÔN LẠI CÁC TẬP HỢP

- Số tự nhiên: **N**



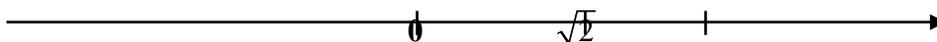
- Số nguyên: **Z**



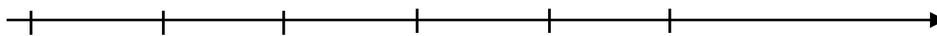
- Số hữu tỉ: **Q**



- Số vô tỉ: **I**



- Số thực: **I+Q=R**



II. Số hữu tỉ:

1. Kiến thức cần nhớ:

- Số hữu tỉ có dạng $\frac{a}{b}$ trong đó $b \neq 0$; $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a,b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a,b trái dấu. Số 0 không phải là số hữu tỉ dương, không phải là số hữu tỉ âm.

- Có thể chia số hữu tỉ theo hai cách:

Cách 1: Số thập phân vô hạn tuần hoàn (Ví dụ: $\frac{1}{3} = 0.3333$) và số thập phân hữu hạn (Ví dụ: $\frac{1}{2} = 0.5$)

Cách 2: Số hữu tỉ âm, số hữu tỉ dương và số 0

- Để cộng, trừ, nhân, chia số hữu tỉ, ta thực hiện như phân số:

Cộng trừ số hữu tỉ	Nhân, chia số hữu tỉ
1. Quy tắc	
- Đưa về cùng mẫu, rồi cộng trừ tử số giữ nguyên mẫu.	- Nhân tử với tử, mẫu với mẫu - Phép chia là phép nhân nghịch đảo. - Nghịch đảo của x là 1/x
Tính chất	
a) Tính chất giao hoán: $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$ b) Tính chất kết hợp: $(x+y) + z = x + (y + z)$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ c) Tính chất cộng với số 0: $x + 0 = x$;	$x \cdot y = y \cdot x$ (t/c giao hoán) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (t/c kết hợp) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $x \cdot 0 = 0$ $x(y+z) = xy + xz$ (t/c phân phối của phép nhân đối với phép cộng)
Bổ sung	
Ta cũng có tính chất phân phối của phép chia đối với phép cộng và phép trừ, nghĩa là: $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$; $\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$; $x \cdot y = 0$ suy ra $x=0$ hoặc $y=0$ $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$	

- Các kí hiệu: \in : thuộc , \notin : không thuộc , \subset : là tập con

2. Các dạng toán:**Dạng 1: Thực hiện phép tính**

- Viết hai số hữu tỉ dưới dạng phân số.
- áp dụng qui tắc cộng, trừ, nhân, chia phân số để tính.
- Rút gọn kết quả (nếu có thể).

Chỉ được áp dụng tính chất:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b+c)$$

$$a : c + b : c = (a+b) : c$$

Không được áp dụng:

$$a : b + a : c = a : (b+c)$$

Ví dụ: $\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \right) = \frac{1}{8}$

Bài 1:

a) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{26}$ b) $\frac{11}{30} - \frac{1}{5}$ c) $\frac{-9}{34} \cdot \frac{17}{4}$ d) $1 \frac{1}{17} \cdot 1 \frac{1}{24}$ e) $\frac{-5}{2} : \frac{3}{4}$; f) $4 \frac{1}{5} : \left(-2 \frac{4}{5} \right)$

Bài số 2: Thực hiện phép tính:

a) $\frac{2}{3} - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right)$ b) $\left(\frac{-1}{3} + \frac{5}{6} \right) \cdot 11 - 7$

c) $\frac{-1}{24} - \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{8} \right) \right]$ d) $\left(\frac{5}{7} - \frac{7}{5} \right) - \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{7} - \frac{1}{10} \right) \right]$

Bài số 3: Tính hợp lí:

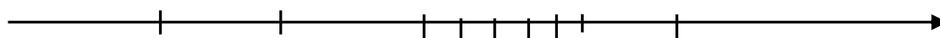
a) $\left(\frac{-2}{3} \right) \cdot \frac{3}{11} + \left(\frac{-16}{9} \right) \cdot \frac{3}{11}$ b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{13}{14} \right) : \frac{5}{7} - \left(-\frac{2}{21} + \frac{1}{7} \right) : \frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{9} : \left(-\frac{1}{7} \right) + 6 \frac{5}{9} : \left(-\frac{1}{7} \right)$

Dạng 2: Biểu diễn số hữu tỉ trên trục số:

-*Phương pháp:* Nếu $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương, ta chia khoảng có độ dài 1 đơn vị làm b phần bằng nhau, rồi lấy về phía chiều dương trục Ox a phần, ta được vị trí của số $\frac{a}{b}$

Ví dụ: biểu diễn số $\frac{5}{4}$: ta chia các khoảng có độ dài 1 đơn vị thành 4 phần bằng nhau, lấy 5 phần ta được phân số biểu diễn số $\frac{5}{4}$

Hình vẽ:



Nếu $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ âm, ta chia khoảng có độ dài 1 đơn vị làm b phần bằng nhau, rồi lấy về phía chiều âm trục Ox a phần, ta được vị trí của số $\frac{a}{b}$

BÀI TẬP

Biểu diễn các số hữu tỉ sau trên trục số: a. $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{-3}{8}, \frac{3}{-7}$

Dạng 3: So sánh số hữu tỉ.

Phương pháp:

* Đưa về các phân số có cùng mẫu số dương rồi so sánh tử số.

* So sánh với số 0, so sánh với số 1, với -1 ...

* Dựa vào phần bù của 1.

* So sánh với phân số trung gian (là phân số có tử số của phân số này mẫu số của phân số kia)

BÀI TẬP

Bài 1. So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $x = \frac{-25}{35}$ và $y = \frac{444}{-777}$; b) $x = -2\frac{1}{5}$ và $y = \frac{110}{-50}$ c) $x = \frac{17}{20}$ và $y = 0,75$

Bài 2. So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $\frac{1}{2010}$ và $\frac{-7}{19}$; b) $\frac{-3737}{4141}$ và $\frac{-37}{41}$; c) $\frac{497}{-499}$ và $\frac{-2345}{2341}$ d) $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$
 e) $\frac{2}{5}$ và $\frac{3}{4}$ f) $\frac{2000}{2001}$ và $\frac{2001}{2002}$; g) $\frac{2001}{2000}$ và $\frac{2002}{2001}$; h) $\frac{3}{5}$ và $\frac{4}{9}$; k) $\frac{19}{60}$ và $\frac{31}{90}$

Dạng 4: Tìm điều kiện để một số là số hữu tỉ dương, âm, là số 0 (không dương không âm).

Phương pháp:

Dựa vào $t/c \frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a, b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b trái dấu, bằng 0 nếu $a=0$.

Ví dụ: Cho số hữu tỉ $x = \frac{m-2011}{2013}$. Với giá trị nào của m thì :

a) x là số dương. b) x là số âm. c) x không là số dương cũng không là số âm

HD:

a. Để $x > 0$ thì $\frac{m-2011}{2013} > 0$, suy ra $m-2011 > 0$ (vì $2013 > 0$), suy ra $m > 2011$

b. Để $x < 0$ thì $\frac{m-2011}{2013} < 0$, suy ra $m-2011 < 0$ (vì $2013 > 0$), suy ra $m < 2011$

c. Để $x = 0$ thì $\frac{m-2011}{2013} = 0$, suy ra $m-2011 = 0$ suy ra $m = 2011$

BÀI TẬP:

Bài 1. Cho số hữu tỉ $x = \frac{20m+11}{-2010}$. Với giá trị nào của m thì:

a) x là số dương. b) x là số âm

Bài 2. Hãy viết số hữu tỉ $\frac{-7}{20}$ dưới dạng sau:

a) Tổng của hai số hữu tỉ âm.

b) Hiệu của hai số hữu tỉ dương.

Bài 3. Viết số hữu tỉ $\frac{-1}{5}$ dưới dạng tổng của hai số hữu tỉ âm.

Bài 4. Hãy viết số hữu tỉ $\frac{-11}{81}$ dưới các dạng sau:

a) Tích của hai số hữu tỉ. b) Thương của hai số hữu tỉ.

Bài 5. Hãy viết số hữu tỉ $\frac{1}{7}$ dưới các dạng sau:

- a) Tích của hai số hữu tỉ âm. b) Thương của hai số hữu tỉ âm.

Dạng 5: Tìm các số hữu tỉ nằm trong một khoảng:

Phương pháp:

- Đưa về các số hữu tỉ có cùng tử số hoặc mẫu số

Ví dụ: Tìm a sao cho $\frac{1}{9} < \frac{10}{a} < \frac{8}{9}$;

HD: Từ bài ra ta có: $\frac{10}{108} < \frac{10}{a} < \frac{10}{81}$; suy ra $8 < a < 108$, $a = \{9, 10, \dots, 107\}$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm năm phân số lớn hơn $\frac{1}{5}$ và nhỏ hơn $\frac{3}{8}$.

Bài 2: Tìm số nguyên a sao cho:

a) $\frac{-3}{8} > \frac{10}{a} > \frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{2} > \frac{10}{a} > \frac{1}{4}$

b) $\frac{-3}{12} > \frac{10}{a} > \frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2} > \frac{10}{a} > 4$

Dạng 6: Tìm x để biểu thức nguyên.

Phương pháp:

- Nếu tử số không chứa x, ta dùng dấu hiệu chia hết.
- Nếu tử số chứa x, ta dùng dấu hiệu chia hết hoặc dùng phương pháp tách tử số theo mẫu số.
- Với các bài toán tìm đồng thời x, y ta nhóm x hoặc y rồi rút x hoặc y đưa về dạng phân thức.

Ví dụ: Tìm x để $A = \frac{5}{x-1}$ là số nguyên

Giải: Điều kiện: $x-1 \neq 0$ hay $x \neq 1$

Để A nguyên thì 5 chia hết cho (x-1) hay $(x-1) \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

x-1	-5	-1	1	5
x	-4	0	2	6

Ví dụ: Tìm x để $B = \frac{2x+3}{x-1}$ là số nguyên

Cách 1: Dùng phương pháp tách tử số theo mẫu số (Khi hệ số của x trên tử số là bội hệ số của x dưới mẫu số):

- Tách tử số theo biểu thức dưới mẫu số, thêm bớt để được tử số ban đầu.

$$B = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}, \text{ (điều kiện: } x \neq 1\text{)}$$

Để B nguyên thì $\frac{5}{x-1}$ là số nguyên hay 5 chia hết cho (x-1) hay $(x-1) \in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

x-1	-5	-1	1	5
x	-4	0	2	6

Cách 2: Dùng dấu hiệu chia hết:

- Các bước làm:
- Tìm điều kiện.
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{từ mẫu} \\ \text{mẫu} \end{array} \right.$, nhân thêm hệ số rồi dùng tính chất chia hết một tổng, hiệu

Điều kiện: $x \neq 1$.

Ta có:

$$x-1 \vdots x-1 \text{ nên } 2(x-1) \vdots x-1 \text{ hay } 2x-2 \vdots x-1 \quad (1)$$

$$\text{Để B nguyên thì } 2x+3 \vdots x-1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2x+3-(2x-2) \vdots x-1$ hay $5 \vdots x-1$. Suy ra $(x-1) \in U(5)=\{-5;-1;1;5\}$

$x-1$	-5	-1	1	5
x	-4	0	2	6

Ví dụ: Tìm x nguyên để biểu thức nguyên $\frac{3x+2}{2x+1}$

Giải: Ta có $\left\{ \begin{array}{l} 3x+2 \vdots 2x+1 \\ 2x+1 \vdots 2x+1 \end{array} \right.$ suy ra $\left\{ \begin{array}{l} 2(3x+2) \vdots 2x+1 \\ 3(2x+1) \vdots 2x+1 \end{array} \right.$ suy ra $\left\{ \begin{array}{l} 6x+4 \vdots 2x+1 \\ 6x+3 \vdots 2x+1 \end{array} \right.$

$$\text{Hay } (6x+4)-(6x+3) \vdots 2x+1 \Rightarrow 1 \vdots 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \in U(1)=\{-1;1\}$$

suy ra $x=0, -1$

Ví dụ: Tìm x nguyên để biểu thức nguyên:

a. $A = \frac{x^2+4x+7}{x+4}$ b. $B = \frac{x^2+7}{x+4}$

HD:

a. Ta có : $x+4 \vdots x+4$, suy ra $x(x+4) \vdots x+4$, hay $x^2+4x \vdots x+4 \quad (1)$

Để A nguyên thì $x^2+4x+7 \vdots x+4 \quad (2)$. Từ (1) (2) suy ra $7 \vdots x+4$.

$x+4$	-1	1	-7	7
x	-5	-3	-11	3

b. $x+4 \vdots x+4$, suy ra $x(x+4) \vdots x+4$, hay $x^2+4x \vdots x+4 \quad (1)$

Để B nguyên thì $x^2+7 \vdots x+4 \quad (2)$

Từ (1) (2) suy ra $(x^2+4x)-(x^2+7) \vdots x+4$

$$4x-7 \vdots x+4 \Rightarrow 4(x+4)-23 \vdots x+4 \Rightarrow 23 \vdots x+4$$

$x+4$	-1	1	-23	23
x	-5	-3	-27	19

Với các biểu thức có dạng $ax+bxy+cy=d$ ta làm như sau:

- Nhóm các hạng tử chứa xy với x (hoặc y).
- Đặt nhân tử chung và phân tích hạng tử còn lại theo hạng tử trong ngoặc để đưa về dạng tích.

Ví dụ: Tìm x, y nguyên sao cho: $xy+3y-3x=-1$

Giải:

$$y(x+3)-3x+1=0 \text{ (Nhóm hạng tử chứa } xy \text{ với hạng tử chứa } y \text{ và đặt nhân tử chung là } y)$$

$$y(x+3)-3(x+3)+10=0 \text{ (phân tích } -3x+1=-3x-9+10=-3(x+3)+10)$$

$$(x+3)(y-3)=-10$$

Lập bảng:

$x+3$	1	10	-1	-10	5	2	-5	-2
$y+3$	10	1	-10	-1	2	5	-2	-5
X	-2	7	-4	-13	2	-1	-8	-5
Y	7	-2	-13	-4	-1	2	-5	-8

Với các biểu thức có dạng: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c$ ta nhân quy đồng đưa về dạng $Ax+By+Cxy+D=0$

Ví dụ: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ (nhân quy đồng với mẫu số chung là $3xy$)

$$\frac{3y}{3xy} + \frac{3x}{3xy} = \frac{xy}{3xy} \Leftrightarrow 3x+3y-xy=0 \text{ (bài toán quay về dạng } ax+by+cxy+d=0)$$

$$\Leftrightarrow x(3-y)-3(3-y)+9=0 \Leftrightarrow (x-3)(3-y)=-9$$

Lập bảng:

$x-3$	1	-9	-3	3
$3-y$	-9	1	3	-3
x	4	-6	0	6
y	12	2	0	6

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm số nguyên a để số hữu tỉ $x = \frac{-101}{a+7}$ là một số nguyên.

Bài 2: Tìm các số nguyên x để số hữu tỉ $t = \frac{3x-8}{x-5}$ là một số nguyên.

Bài 3: Chứng tỏ số hữu tỉ $x = \frac{2m+9}{14m+62}$ là phân số tối giản, với mọi $m \in \mathbb{N}$

Bài 4: Tìm x để các biểu thức sau nguyên

$$A = \frac{2x-1}{x-1}; \quad B = \frac{3x+4}{x+1}; \quad C = \frac{4-3x}{2x+8}; \quad D = \frac{x^2-3x+7}{x-8}; \quad E = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Bài 5: Tìm các số x, y nguyên thỏa mãn:

$$a, xy+2x+y=11 \quad b, 9xy-6x+3y=6 \quad c, 2xy+2x-y=8 \quad d, xy-2x+4y=9$$

Dạng 7: Các bài toán tìm x.**Phương pháp:**

- Quy đồng khử mẫu số

- Chuyển các số hạng chứa x về một vế, các số hạng tự do về một vế (**chuyển về đối dấu**) rồi tìm x

Chú ý: Một tích bằng 0 khi một trong các thừa số bằng không.

- Chú ý các bài toán nâng cao: dạng lũy thừa, dạng giá trị tuyệt đối, dạng tổng các bình phương bằng 0, các bài toán tìm x có quy luật.

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm x , biết:

$$\text{a) } x \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{5}{21}; \quad \text{b) } 1\frac{5}{9} \cdot x = \frac{28}{9}; \quad \text{c) } x : \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{15}{16}; \quad \text{d) } \frac{-4}{7} : x = -\frac{2}{5}$$

Bài 2. Tìm x , biết:

$$\text{a) } \frac{2}{3}x + \frac{5}{7} = \frac{3}{10}; \quad \text{b) } \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$$

Bài 3. Tìm x , biết:

$$\text{a) } \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = \frac{-33}{25}; \quad \text{b) } \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{-3}{7} : x\right) = 0; \quad \text{c) } \frac{x+5}{2005} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+7}{2003} = -3$$

$$\text{Bài 4: a) } \frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} = \frac{x+5}{61} + \frac{x+7}{59} \quad \text{b) } \frac{x+29}{31} - \frac{x+27}{33} = \frac{x+17}{43} - \frac{x+15}{45}$$

$$\text{c) } \frac{x+6}{1999} + \frac{x+8}{1997} = \frac{x+10}{1995} + \frac{x+12}{1993} \quad \text{d) } \frac{1909-x}{91} + \frac{1907-x}{93} + \frac{1905-x}{95} + \frac{1903-x}{91} + 4 = 0$$

$$\text{e) } \frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} + \frac{x-23}{1976} + \frac{x-21}{1978} + \frac{x-19}{1980} =$$

$$= \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25} + \frac{x-1976}{23} + \frac{x-1978}{21} + \frac{x-1980}{19}$$

HD:

$$\left(\frac{x+6}{2003} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{2004} + 1\right) + \left(\frac{x+7}{2003} + 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x+2010}{2003} + \frac{x+2010}{2004} + \frac{x+2010}{2003} = 0 \Rightarrow x = -2010$$

Bài 5: Giải các phương trình sau: (*Biến đổi đặc biệt*)

$$\text{a) } \frac{x+1}{35} + \frac{x+3}{33} = \frac{x+5}{31} + \frac{x+7}{29} \quad (\text{HD: Cộng thêm 1 vào các hạng tử})$$

$$\text{b) } \frac{x-10}{1994} + \frac{x-8}{1996} + \frac{x-6}{1998} + \frac{x-4}{2000} + \frac{x-2}{2002} =$$

$$= \frac{x-2002}{2} + \frac{x-2000}{4} + \frac{x-1998}{6} + \frac{x-1996}{8} + \frac{x-1994}{10}$$

$$\text{c) } \frac{x-1991}{9} + \frac{x-1993}{7} + \frac{x-1995}{5} + \frac{x-1997}{3} + \frac{x-1999}{1} =$$

$$= \frac{x-9}{1991} + \frac{x-7}{1993} + \frac{x-5}{1995} + \frac{x-3}{1997} + \frac{x-1}{1999} \quad (\text{HD: Trừ đi 1 vào các hạng tử})$$

d) $\frac{x-85}{15} + \frac{x-74}{13} + \frac{x-67}{11} + \frac{x-64}{9} = 10$ (Chú ý: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$)

e) $\frac{x-1}{13} - \frac{2x-13}{15} = \frac{3x-15}{27} - \frac{4x-27}{29}$ (HD: Thêm hoặc bớt 1 vào các hạng tử)

Dạng 8: Các bài toán tìm x trong bất phương trình:

Phương pháp:

- Nếu $a.b > 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$; - Nếu $a.b \geq 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$;

- Nếu $a.b < 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$; - Nếu $a.b \leq 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$;

- Nếu $\frac{a}{b} > 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$; - Nếu $\frac{a}{b} < 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$;

- Nếu $\frac{a}{b} < 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$; - Nếu $\frac{a}{b} > 0$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$;

Chú ý: Dạng toán $a.b < 0$ có cách giải nhanh bằng việc đánh giá. Hãy xem Ví dụ c.

Ví dụ:

a. $(2x+4)(x-3) > 0$ b. $\frac{x+8}{x-1} < 0$ c. $(x-2)(x+5) < 0$

HD:

a. $(2x+4)(x-3) > 0$ suy ra $\begin{cases} 2x+4 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2x > -4 \\ x > 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x < -4 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < -2 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$ hoặc $x < -2$

b. $\frac{x+8}{x-1} < 0$ suy ra $\begin{cases} x+5 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+5 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x < 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < -5 \\ x > 1 \end{cases}$ (không tồn tại x)
 $\Rightarrow -5 < x < 1$

c. $(x-2)(x+5) < 0$. Vì $x+5 > x-2$ nên $(x-2)(x+5) < 0$ khi $\begin{cases} x+5 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow -5 < x < 2$

BÀI TẬP:

Tìm x biết:

a. $(x-1)(x+4) > 0$ b. $(3x-1)(2x+4) \geq 0$ c. $(3-x)(x+1) < 0$
 d. $(x-7)(3x+4) \leq 0$ e. $\frac{x-1}{x+8} > 0$ f. $\frac{x-1}{x+4} \leq 0$

Dạng 9: các bài toán tính tổng theo quy luật:

Tính tổng dãy số có các số hạng cách nhau một số không đổi:

Phương pháp:

- Tính số các số hạng: $\frac{\text{số cuối} - \text{số đầu}}{\text{khoảng cách}} + 1$

- Tổng = $\frac{(\text{số cuối} + \text{số đầu}) \cdot \text{số số hạng}}{2}$

Ví dụ: $1+2+3+\dots+99$ (khoảng cách bằng 2)

số các số hạng: $\frac{99-1}{2} + 1 = 50$ số hạng

Tổng = $\frac{(99+1) \cdot 50}{2}$

Chú ý:

$$A = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + (n-1)(n+1) = n/6 [(n-1) \cdot (2n+1)]$$

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1)n = \frac{1}{3}n \cdot (n-1) \cdot (n+1)$$

$$A = 1+2+3+\dots+(n-1)+n = n(n+1):2$$

$$A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-2)(n-1)n = \frac{1}{4} \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)$$

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2 = n(n+1)(2n+1):6$$

Tính tổng dãy số A có các số hạng mà số đứng sau gấp số đứng trước một số không đổi n:

Phương pháp:

- Tính $A \cdot n$

- Tính $A \cdot n - A$ rồi suy ra tổng A

Ví dụ: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ (ở đây $n=2$: số đứng sau gấp số đứng trước 2 đơn vị)

Ta có : $2 \cdot A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{101}$ (nhân 2 vế với $n=2$)

$$2A - A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{101} - (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}) \quad (\text{chú ý: } 2A - A = A)$$

$$A = 2^{101} - 2$$

Tính tổng các phân số có tử số không đổi, mẫu số là tích của 2 số có hiệu không đổi.

Phương pháp:

Phân tích tử số thành hiệu 2 số dưới mẫu

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ: } A &= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{97.99} = \frac{3-1}{1.3} + \frac{5-3}{3.5} + \frac{7-5}{5.7} + \dots + \frac{99-97}{97.99} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99} \end{aligned}$$

BÀI TẬP:

$$A = \frac{1}{199} - \frac{1}{199.198} - \frac{1}{198.197} - \frac{1}{197.196} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

$$B = 1 - \frac{2}{3.5} - \frac{2}{5.7} - \frac{2}{7.9} - \dots - \frac{2}{61.63} - \frac{2}{63.65}$$

Tìm x, biết: $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2010}$

Tính tổng các phân số có tử số không đổi, mẫu số là tích của 3 số có hiệu số cuối trừ số đầu không đổi:

Phương pháp:

Phân tích tử số thành hiệu của hai số (số cuối – số đầu) ở dưới mẫu

$$S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100}$$

$$= \frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{100-98}{98.99.100} = \frac{3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{100}{98.99.100} - \frac{98}{98.99.100}$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \dots + \frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{99.100}$$

BÀI TẬP

Bài 1:

$A = 1.3+2.4+3.5+\dots+99.101$

$A = 1.4+2.5+3.6+\dots+99.102$ (Hướng dẫn: thay thừa số 4, 5, 6.....102 bằng (2+2), (3+2), (4+2)....(100 +2)

$A = 4+12+24+40+\dots+19404+19800$ (Hướng dẫn: Chia 2 về cho 2)

$A = 1+ 3 + 6 +10 +\dots+4851+4950$ (Nhân 2 về với 2)

$A = 6+16+30+48+\dots+19600+19998$ (Hướng dẫn: Chia 2 về cho 2)

Bài 2: Tìm giá trị của x trong dãy tính sau:

$(x+2)+(x+12)+(x+42)+(x+47) = 655$

Bài 3:

a) Tìm x biết : $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+2009) = 2009.2010$

b) Tính $M = 1.2+2.3+3.4+ \dots + 2009. 2010$

Bài 4: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$ Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$

Bài 5: Cho $M = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

a. M có chia hết cho 4, cho 12 không ? vì sao? b. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2M+3 = 3^n$

Bài 6: Cho biểu thức: $M = 1 + 3 + 3^2+ 3^3+\dots+ 3^{118}+ 3^{119}$

a) Thu gọn biểu thức M. b) Biểu thức M có chia hết cho 5, cho 13 không? Vì sao?

Bài 7:

$S = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100}$

$S = 1+2+2^2 + \dots + 2^{100}$

$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$

$S = \frac{4}{5.7} + \frac{4}{7.9} + \dots + \frac{4}{59.61}$

$A = \frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66}$

$M = \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2005}}$

$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100}$

$S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Bài 8:

a) $A = \frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \frac{3}{11.14} + \dots + \frac{3}{2006.2009}$

b) $B = \frac{1}{6.10} + \frac{1}{10.14} + \frac{1}{14.18} + \dots + \frac{1}{402.406}$

$$c) C = \frac{10}{7.12} + \frac{10}{12.17} + \frac{10}{17.22} + \dots + \frac{10}{502.507}$$

$$d) D = \frac{4}{8.13} + \frac{4}{13.18} + \frac{4}{18.23} + \dots + \frac{4}{253.258}$$

Bài 9:

$$a) A = \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.7} + \frac{1}{7.19} + \dots + \frac{1}{252.509}$$

$$b) B = \frac{1}{10.9} + \frac{1}{18.13} + \frac{1}{26.17} + \dots + \frac{1}{802.405}$$

$$c) C = \frac{2}{4.7} - \frac{3}{5.9} + \frac{2}{7.10} - \frac{3}{9.13} + \dots + \frac{2}{301.304} - \frac{3}{401.405}$$

$$d) \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \frac{1-3-5-7-\dots-49}{89}$$

Bài 10: Tìm x

$$a) \frac{x}{2008} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \dots - \frac{1}{120} = \frac{5}{8}$$

$$b) \frac{7}{x} + \frac{4}{5.9} + \frac{4}{9.13} + \frac{4}{13.17} + \dots + \frac{4}{41.45} = \frac{29}{45}$$

$$c) \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{15}{93}$$

Bài 11: Chứng minh

$$a) \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

$$b) \frac{5}{3.7} + \frac{5}{7.11} + \frac{5}{11.15} + \dots + \frac{5}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{5n}{4n+3}$$

$$c) \frac{3}{9.14} + \frac{3}{14.19} + \frac{3}{19.24} + \dots + \frac{3}{(5n-1)(5n+4)} < \frac{1}{15}$$

Bài 12: Cho $A = \frac{4}{15.19} + \frac{4}{19.23} + \dots + \frac{4}{399.403}$ Chứng minh: $\frac{16}{81} < A < \frac{16}{80}$

Bài 13: Cho $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{1992}}$ Chứng minh $S < 4$

HD: $2S = 2 + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^4} + \dots + \frac{2}{2^{1992}}$ Suy ra $2S - S = 2 - \frac{1}{2^{1992}} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{1992}} \right)$

Bài 14: Cần bao nhiêu số hạng của tổng $S = 1+2+3+\dots$ để được một số có ba chữ số giống nhau.

HD: $\frac{n(n+1)}{2} = 111a = 3.37.a$ (vì $\overline{aaa} = 111.a$) nên $n=37$ hoặc $n+1=37$ ta tìm được $n=36$.

CHUYÊN ĐỀ II: GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Kiến thức cần nhớ

$$\text{Nếu } a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$\text{Nếu } a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

$$\text{Nếu } x-a \geq 0 \Rightarrow |x-a| = x-a$$

$$\text{Nếu } x-a \leq 0 \Rightarrow |x-a| = a-x$$

Chú ý: Giá trị tuyệt đối của mọi số đều không âm $|a| \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

* Hai số bằng nhau hoặc đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau, và ngược lại hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì chúng là hai số bằng nhau hoặc đối nhau.

$$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

* Mọi số đều lớn hơn hoặc bằng đối của giá trị tuyệt đối của nó và đồng thời nhỏ hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của nó.

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ và } -|a| = a \Leftrightarrow a \leq 0; a = |a| \Leftrightarrow a \geq 0$$

* Trong hai số âm số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối lớn hơn. $a < b < 0 \Rightarrow |a| > |b|$

* Trong hai số dương số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn $0 < a < b \Rightarrow |a| < |b|$

* Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

* Giá trị tuyệt đối của một thương bằng thương hai giá trị tuyệt đối. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

* Bình phương của giá trị tuyệt đối của một số bằng bình phương số đó. $|a|^2 = a^2$

* Tổng hai giá trị tuyệt đối của hai số luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của hai số, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai số cùng dấu.

$$|a| + |b| \geq |a + b| \text{ và } |a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$$

CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức và rút gọn biểu thức

Bài 1: Tính $|x|$, biết:

a) $x = \frac{3}{17}$.

b) $x = \frac{-13}{161}$.

c) $x = -15,08$

Bài 2. Tính: a) $\frac{-6}{25} + \left| -\frac{4}{5} \right| - \left| \frac{2}{25} \right|$.

b) $\frac{5}{9} - \left| -\frac{3}{5} \right| + \left| \frac{4}{9} \right| + \left| \frac{8}{5} \right|$

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức:

a) $M = a + 2ab - b$ với $|a| = 1,5; b = -0,75$

b) $N = \frac{a}{2} - \frac{2}{b}$ với $|a| = 1,5; b = -0,75$

Bài 4: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = 2x + 2xy - y$ với $|x| = 2,5; y = \frac{-3}{4}$

b) $B = 3a - 3ab - b$ với $|a| = \frac{1}{3}; |b| = 0,25$

c) $C = \frac{5a}{3} - \frac{3}{b}$ với $|a| = \frac{1}{3}; |b| = 0,25$

d) $D = 3x^2 - 2x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$

Bài 5: Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = 6x^3 - 3x^2 + 2|x| + 4$ với $x = \frac{-2}{3}$

b) $B = 2|x| - 3|y|$ với $x = \frac{1}{2}; y = -3$

c) $C = 2|x-2| - 3|1-x|$ với $x = 4$ d) $D = \frac{5x^2 - 7x + 1}{3x - 1}$ với $|x| = \frac{1}{2}$

Bài 6: Rút gọn biểu thức sau với $3,5 \leq x \leq 4,1$

a) $A = |x - 3,5| + |4,1 - x|$ b) $B = |-x + 3,5| + |x - 4,1|$

Bài 7: Rút gọn biểu thức sau khi $x < -1,3$:

a) $A = |x + 1,3| - |x - 2,5|$ b) $B = |-x - 1,3| + |x - 2,5|$

Bài 8: Rút gọn biểu thức:

a) $A = |x - 2,5| + |x - 1,7|$ b) $B = \left| x + \frac{1}{5} \right| - \left| x - \frac{2}{5} \right|$ c) $C = |x + 1| + |x - 3|$

Bài 9: Rút gọn biểu thức khi $\frac{-3}{5} < x < \frac{1}{7}$

a) $A = \left| x - \frac{1}{7} \right| - \left| x + \frac{3}{5} \right| + \frac{4}{5}$ b) $B = \left| -x + \frac{1}{7} \right| + \left| -x - \frac{3}{5} \right| - \frac{2}{6}$

Bài 10: Rút gọn biểu thức:

a) $A = |x + 0,8| - |x - 2,5| + 1,9$ với $x < -0,8$ b) $B = |x - 4,1| + \left| x - \frac{2}{3} \right| - 9$ với $\frac{2}{3} \leq x \leq 4,1$

c) $C = \left| 2\frac{1}{5} - x \right| + \left| x - \frac{1}{5} \right| + 8\frac{1}{5}$ với $\frac{1}{5} \leq x \leq 2\frac{1}{5}$ d) $D = \left| x + 3\frac{1}{2} \right| + |x| - 3\frac{1}{2}$ với $x > 0$

Dạng 2: $|A(x)| = k$ (Trong đó $A(x)$ là biểu thức chứa x , k là một số cho trước)

Phương pháp:

- Nếu $k < 0$ thì không có giá trị nào của x thỏa mãn đẳng thức (Vì giá trị tuyệt đối của mọi số đều không âm)

- Nếu $k = 0$ thì ta có $|A(x)| = 0 \Rightarrow A(x) = 0$

- Nếu $k > 0$ thì ta có: $|A(x)| = k \Rightarrow \begin{cases} A(x) = k \\ A(x) = -k \end{cases}$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm x , biết:

a) $|2x - 5| = -4$ b) $\frac{1}{3} - \left| \frac{5}{4} - 2x \right| = \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{4} - |2x + 1| = \frac{7}{8}$

Bài 2: Tìm x , biết:

a) $2|2x - 3| = \frac{1}{2}$ b) $7,5 - 3|5 - 2x| = -4,5$ c) $\left| x + \frac{4}{15} \right| - |-3,75| = |-2,15|$

Bài 3: Tìm x , biết:

a) $2|3x - 1| + 1 = 5$ b) $\left| \frac{x}{2} - 1 \right| = 3$ c) $\left| -x + \frac{2}{5} \right| + \frac{1}{2} = 3,5$ d) $\left| x - \frac{1}{3} \right| = 2\frac{1}{5}$

Bài 4: Tìm x , biết:

$$a) \left| x + \frac{1}{4} \right| - \frac{3}{4} = 5\% \quad b) 2 - \left| \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{-5}{4} \right| \quad c) \frac{3}{2} + \frac{4}{5} \left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{7}{4} \quad d) 4,5 - \frac{3}{4} \left| \frac{1}{2}x + \frac{5}{3} \right| = \frac{5}{6}$$

Bài 5: Tìm x, biết:

$$a) 6,5 - \frac{9}{4} : \left| x + \frac{1}{3} \right| = 2 \quad b) \frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2} \quad c) \frac{15}{4} - 2,5 : \left| \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right| = 3 \quad d) \frac{21}{5} + 3 : \left| \frac{x}{4} - \frac{2}{3} \right| = 6$$

Dạng 3: $|A(x)| = |B(x)|$ (Trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai biểu thức chứa x)

Phương pháp:

$$\text{Vận dụng tính chất: } |a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \text{ ta có: } |A(x)| = |B(x)| \Rightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases}$$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm x, biết:

$$a) |5x - 4| = |x + 2| \quad b) |2x - 3| - |3x + 2| = 0 \quad c) |2 + 3x| = |4x - 3| \quad d) |7x + 1| - |5x + 6| = 0$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$a) \left| \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right| = |4x - 1| \quad b) \left| \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \right| - \left| \frac{5}{8}x + \frac{3}{5} \right| = 0 \quad c) \left| \frac{7}{5}x + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{4}{3}x - \frac{1}{4} \right| \quad d) \left| \frac{7}{8}x + \frac{5}{6} \right| - \left| \frac{1}{2}x + 5 \right| = 0$$

Dạng 4: $|A(x)| = B(x)$ (Trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là hai biểu thức chứa x)

Cách 1: Điều kiện: $B(x) \geq 0$ (*)

$$(1) \text{ Trở thành } |A(x)| = B(x) \Rightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases} \quad (\text{ tìm x rồi đối chiếu giá trị x tìm được với điều kiện (*) })$$

sau đó kết luận.

* **Cách 2:** Chia khoảng xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

$$|A(x)| = B(x) \quad (1)$$

- Nếu $A(x) \geq 0$ thì (1) trở thành: $A(x) = B(x)$ (Đối chiếu giá trị x tìm được với điều kiện)
- Nếu $A(x) < 0$ thì (1) trở thành: $-A(x) = B(x)$ (Đối chiếu giá trị x tìm được với điều kiện)

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm x, biết:

$$a) \left| \frac{1}{2}x \right| = 3 - 2x \quad b) |x - 1| = 3x + 2 \quad c) |5x| = x - 12 \quad d) |7 - x| = 5x + 1$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$a) |9 + x| = 2x \quad b) |5x| - 3x = 2 \quad c) |x + 6| - 9 = 2x \quad d) |2x - 3| + x = 21$$

Bài 3: Tìm x, biết:

$$a) |4 + 2x| = -4x \quad b) |3x - 1| + 2 = x \quad c) |x + 15| + 1 = 3x \quad d) |2x - 5| + x = 2$$

Bài 4: Tìm x, biết:

$$a) |2x - 5| = x + 1 \quad b) |3x - 2| - 1 = x \quad c) |3x - 7| = 2x + 1 \quad d) |2x - 1| + 1 = x$$

Bài 5: Tìm x, biết:

$$a) |x-5|+5=x \quad b) |x+7|-x=7 \quad c) |3x-4|+4=3x \quad d) |7-2x|+7=2x$$

Dạng 5: Đẳng thức chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối:

* **PP:** Lập bảng xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

$|A(x)|+|B(x)|+|C(x)|=m$ Căn cứ bảng trên xét từng khoảng giải bài toán (Đối chiếu điều kiện tương ứng)

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm x, biết:

$$a) 4|3x-1|+|x|-2|x-5|+7|x-3|=12 \quad b) 3|x+4|-|2x+1|-5|x+3|+|x-9|=5$$

$$c) \left|2\frac{1}{5}-x\right|+\left|x-\frac{1}{5}\right|+8\frac{1}{5}=1,2 \quad d) 2\left|x+3\frac{1}{2}\right|+|x|-3\frac{1}{2}=\left|2\frac{1}{5}-x\right|$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$a) |2x-6|+|x+3|=8$$

$$c) |x+5|+|x-3|=9$$

$$d) |x-2|+|x-3|+|x-4|=2$$

$$e) |x+1|+|x-2|+|x+3|=6$$

$$f) 2|x+2|+|4-x|=11$$

Bài 3: Tìm x, biết:

$$a) |x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$$

$$b) 3x|x+1|-2x|x+2|=12$$

$$c) |x-1|+3|x-3|-2|x-2|=4$$

$$d) |x+5|-|1-2x|=x$$

$$e) |x|-|2x+3|=x-1$$

$$f) |x|+|1-x|=x+|x-3|$$

Bài 4: Tìm x, biết:

$$a) |x-2|+|x-5|=3$$

$$b) |x-3|+|x+5|=8$$

$$c) |2x-1|+|2x-5|=4$$

$$d) |x-3|+|3x+4|=|2x+1|$$

Dạng 6:: Xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối hàng loạt:

$$|A(x)|+|B(x)|+|C(x)|=D(x) \quad (1)$$

Điều kiện: $D(x) \geq 0$ kéo theo $A(x) \geq 0; B(x) \geq 0; C(x) \geq 0$

Do vậy (1) trở thành: $A(x) + B(x) + C(x) = D(x)$

$$\text{Ví dụ: } |x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$$

Điều kiện: $4x \geq 0$, suy ra $x \geq 0$.

Với $x \geq 0$ thì $x+1 > 0; x+2 > 0; x+3 > 0$

Nên $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$ khi $(x+1)+(x+2)+(x+3)=4x$, suy ra $x=6$ (thỏa mãn đk) . Vậy $x=6$.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm x, biết:

$$a) |x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$$

$$b) |x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=5x-1$$

$$c) |x+2| + \left|x + \frac{3}{5}\right| + \left|x + \frac{1}{2}\right| = 4x \quad d) |x+1,1| + |x+1,2| + |x+1,3| + |x+1,4| = 5x$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$a) \left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| = 101x$$

$$b) \left|x + \frac{1}{1.2}\right| + \left|x + \frac{1}{2.3}\right| + \left|x + \frac{1}{3.4}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{99.100}\right| = 100x$$

$$c) \left|x + \frac{1}{1.3}\right| + \left|x + \frac{1}{3.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.7}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{97.99}\right| = 50x$$

$$d) \left|x + \frac{1}{1.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.9}\right| + \left|x + \frac{1}{9.13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397.401}\right| = 101x$$

Dạng 7: Dạng hỗn hợp:

Bài 1: Tìm x, biết:

$$a) \left|2x - 1\right| + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$$

$$b) \left|x^2 + 2\right| \left|x - \frac{1}{2}\right| = x^2 + 2$$

$$c) \left|x^2\right| \left|x + \frac{3}{4}\right| = x^2$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$a) \left|2x - 1\right| - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$b) \left|\frac{1}{2}x + 1\right| - \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

$$c) \left|x\right| \left|x^2 + \frac{3}{4}\right| = x$$

Bài 3: Tìm x, biết:

$$a) \left|x\right| \left|x^2 - \frac{3}{4}\right| = x$$

$$b) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left|2x - \frac{3}{4}\right| = 2x - \frac{3}{4}$$

$$c) \left|x - \frac{1}{2}\right| \left|2x - \frac{3}{4}\right| = 2x - \frac{3}{4}$$

Bài 4: Tìm x, biết:

$$a) |2x - 3| - x + 1 = 4x - 1$$

$$b) |x - 1| - 1 = 2$$

$$c) |3x + 1| - 5 = 2$$

Dạng 8: $|A| + |B| = 0$

Phương pháp:

Cách giải chung: $|A| + |B| = 0$

$$B1: \text{đánh giá: } \left. \begin{array}{l} |A| \geq 0 \\ |B| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |A| + |B| \geq 0$$

$$B2: \text{Khẳng định: } |A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm x, y thoả mãn:

$$a) |3x - 4| + |3y + 5| = 0$$

$$b) |x - y| + \left|y + \frac{9}{25}\right| = 0$$

$$c) |3 - 2x| + |4y + 5| = 0$$

Bài 2: Tìm x, y thoả mãn:

$$a) \left| 5 - \frac{3}{4}x \right| + \left| \frac{2}{7}y - 3 \right| = 0 \quad b) \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x \right| + \left| 1,5 - \frac{11}{17} + \frac{23}{13}y \right| = 0 \quad c) |x - 2007| + |y - 2008| = 0$$

* **Chú ý 1:** Bài toán có thể cho dưới dạng $|A| + |B| \leq 0$ nhưng kết quả không thay đổi

* Cách giải: $|A| + |B| \leq 0$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} |A| \geq 0 \\ |B| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |A| + |B| \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow |A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Bài 3: Tìm x, y thoả mãn:

$$a) |5x + 1| + |6y - 8| \leq 0 \quad b) |x + 2y| + |4y - 3| \leq 0 \quad c) |x - y + 2| + |2y + 1| \leq 0$$

Bài 4: Tìm x, y thoả mãn:

$$a) |12x + 8| + |11y - 5| \leq 0 \quad b) |3x + 2y| + |4y - 1| \leq 0 \quad c) |x + y - 7| + |xy - 10| \leq 0$$

* **Chú ý 2:** Do tính chất không âm của giá trị tuyệt đối tương tự như tính chất không âm của lũy thừa bậc chẵn nên có thể kết hợp hai kiến thức ta cũng có các bài tương tự.

Bài 5: Tìm x, y thoả mãn đẳng thức:

$$\begin{array}{ll} a) |x - y - 2| + |y + 3| = 0 & b) |x - 3y|^{2007} + |y + 4|^{2008} = 0 \\ c) (x + y)^{2006} + 2007|y - 1| = 0 & d) |x - y - 5| + 2007(y - 3)^{2008} = 0 \end{array}$$

Bài 6: Tìm x, y thoả mãn :

$$\begin{array}{ll} a) (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0 & b) 2(x - 5)^4 + 5|2y - 7|^5 = 0 \\ c) 3(x - 2y)^{2004} + 4\left|y + \frac{1}{2}\right| = 0 & d) |x + 3y - 1| + \left(2y - \frac{1}{2}\right)^{2000} = 0 \end{array}$$

Bài 7: Tìm x, y thoả mãn:

$$\begin{array}{ll} a) |x - 2007| + |y - 2008| \leq 0 & b) 3|x - y|^5 + 10\left|y + \frac{2}{3}\right|^7 \leq 0 \\ c) \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^{2006} + \frac{2007}{2008}\left|\frac{4}{5}y + \frac{6}{25}\right| \leq 0 & d) 2007|2x - y|^{2008} + 2008|y - 4|^{2007} \leq 0 \end{array}$$

Dạng 9: $|A| + |B| = |A + B|$

Phương pháp:

Sử dụng tính chất: $|a| + |b| \geq |a + b|$ **Từ đó ta có:** $|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

Bài 1: Tìm x, biết:

$$\begin{array}{lll} a) |x + 5| + |3 - x| = 8 & b) |x - 2| + |x - 5| = 3 & c) |3x - 5| + |3x + 1| = 6 \\ d) 2|x - 3| + |2x + 5| = 11 & e) |x + 1| + |2x - 3| = |3x - 2| & f) |x - 3| + |5 - x| + 2|x - 4| = 2 \end{array}$$

Bài 2: Tìm x, biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |x-4|+|x-6|=2 & \text{b) } |x+1|+|x+5|=4 & \text{c) } |3x+7|+3|2-x|=13 \\ \text{d) } |5x+1|+|3-2x|=|4+3x| & \text{e) } |x+2|+|3x-1|+|x-1|=3 & \text{f) } |x-2|+|x-7|=4 \end{array}$$

Bài 3: Tìm x, y thoả mãn :

$$\text{a) } (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

Bài 4: Tìm x, y thoả mãn:

$$\text{a) } |x-2007|+|y-2008|\leq 0$$

$$\text{b) } |x+5|+|3-x|=8$$

Dạng 10: $|f(x)|>a$ (1)

Phương pháp:

- Nếu $a < 0$: (1) luôn đúng với mọi x
- Nếu $a > 0$: (1) suy ra $f(x) > a$ hoặc $f(x) < -a$.
- Nếu $a = 0$ (1) suy ra $f(x) = 0$

Ví dụ:

BÀI TẬP:

Tìm x nguyên sao cho

$$|x-2| > 6 ; |3x+1| \geq 5 ; |x+1| \geq -6$$

Dạng 11: Tìm x sao cho $|f(x)| < a$

Phương pháp:

- Nếu $a < 0$: không tồn tại x
- Nếu $a > 0$ thì $|f(x)| < a$ khi $-a < f(x) < a$. Từ đó tìm được x.
- Nếu $a = 0$ suy ra $f(x) = 0$

BÀI TẬP:

Tìm x nguyên sao cho:

$$|x-2| < 6 ; |3x+1| \leq 5 ; |x+1| < -6 ; 3 < |x+2| < 5$$

Dạng 12: Tìm cặp giá trị (x; y) nguyên thoả mãn đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối:

$$\text{Nếu: } |A| + |B| = m \text{ với } m \geq 0$$

* Cách giải:

$$\text{* Nếu } m = 0 \text{ thì ta có } |A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

* Nếu $m > 0$ ta giải như sau:

$$|A| + |B| = m \quad (1)$$

Do $|A| \geq 0$ nên từ (1) ta có: $0 \leq |B| \leq m$ từ đó tìm giá trị của $|B|$ và $|A|$ tương ứng .

Bài 1: Tìm cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

$$\text{a) } |x-2007|+|x-2008|=0 \quad \text{b) } |x-y-2|+|y+3|=0 \quad \text{c) } (x+y)^2 + 2|y-1|=0$$

Bài 2: Tìm cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

$$\text{a) } |x-3y|^5 + |y+4|=0 \quad \text{b) } |x-y-5|+(y-3)^4=0 \quad \text{c) } |x+3y-1|+3|y+2|=0$$

Bài 3: Tìm cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

a) $|x+4|+|y-2|=3$ b) $|2x+1|+|y-1|=4$ c) $|3x|+|y+5|=5$ d) $|5x|+|2y+3|=7$

Bài 4: Tìm cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

a) $3|x-5|+|y+4|=5$ b) $|x+6|+4|2y-1|=12$ c) $2|3x|+|y+3|=10$ d) $3|4x|+|y+3|=21$

Bài 5: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

a) $y^2=3-|2x-3|$ b) $y^2=5-|x-1|$ c) $2y^2=3-|x+4|$ d) $3y^2=12-|x-2|$

Dạng 13: $|A|+|B|<m$ với $m>0$.

* **Cách giải:** Đánh giá

$$|A|+|B|<m \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} |A|\geq 0 \\ |B|\geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |A|+|B|\geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0\leq|A|+|B|<m$ từ đó giải bài toán $|A|+|B|=k$ như dạng 1 với $0\leq k<m$

Bài 1: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

a) $|x|+|y|\leq 3$ b) $|x+5|+|y-2|\leq 4$ c) $|2x+1|+|y-4|\leq 3$ d) $|3x|+|y+5|\leq 4$

Bài 2: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

a) $5|x+1|+|y-2|\leq 7$ b) $4|2x+5|+|y+3|\leq 5$ c) $3|x+5|+2|y-1|\leq 3$ d) $3|2x+1|+4|2y-1|\leq 7$

Dạng 14: Sử dụng bất đẳng thức: $|a|+|b|\geq|a+b|$ xét khoảng giá trị của ẩn số.

Bài 1: Tìm các số nguyên x thoả mãn:

a) $|x-1|+|4-x|=3$ b) $|x+2|+|x-3|=5$ c) $|x+1|+|x-6|=7$ d) $|2x+5|+|2x-3|=8$

Bài 2: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau.

a) $x+y=4$ và $|x+2|+|y|=3$ b) $x+y=4$ và $|2x+1|+|y-x|=5$

c) $x-y=3$ và $|x|+|y|=3$ d) $x-2y=5$ và $|x|+|2y-1|=6$

Bài 3: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn đồng thời:

a) $x+y=5$ và $|x+1|+|y-2|=4$ b) $x-y=3$ và $|x-6|+|y-1|=4$

c) $x-y=2$ và $|2x+1|+|2y+1|=4$ d) $2x+y=3$ và $|2x+3|+|y+2|=8$

Bài 4: Tìm các số nguyên x thoả mãn:

a) $(x+2)(x-3)<0$ b) $(2x-1)(2x-5)<0$ c) $(3-2x)(x+2)>0$ d) $(3x+1)(5-2x)>0$

Bài 5: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

a) $(2-x)(x+1)=|y+1|$ b) $(x+3)(1-x)=|y|$ c) $(x-2)(5-x)=|2y+1|+2$

Bài 6: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn:

a) $(x+1)(3-x)=2|y|+1$ b) $(x-2)(5-x)-|y+1|=1$ c) $(x-3)(x-5)+|y-2|=0$

Dạng 15: Sử dụng phương pháp đối lập hai vế của đẳng thức:

* **Cách giải:** Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức: $A = B$

Đánh giá: $A \geq m$ (1)

Đánh giá: $B \leq m$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = m \\ B = m \end{cases}$

Bài 1: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $|x+2| + |x-1| = 3 - (y+2)^2$

b) $|x-5| + |1-x| = \frac{12}{|y+1|+3}$

c) $|y+3| + 5 = \frac{10}{(2x-6)^2+2}$

d) $|x-1| + |3-x| = \frac{6}{|y+3|+3}$

Bài 2: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $|2x+3| + |2x-1| = \frac{8}{2(y-5)^2+2}$

b) $|x+3| + |x-1| = \frac{16}{|y-2|+|y+2|}$

c) $|3x+1| + |3x-5| = \frac{12}{(y+3)^2+2}$

d) $|x-2y-1| + 5 = \frac{10}{|y-4|+2}$

Bài 3: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $(x+y-2)^2 + 7 = \frac{14}{|y-1|+|y-3|}$

b) $(x+2)^2 + 4 = \frac{20}{3|y+2|+5}$

c) $2|x-2007| + 3 = \frac{6}{|y-2008|+2}$

d) $|x+y+2| + 5 = \frac{30}{3|y+5|+6}$

Dạng 16: Tìm GTLN-GTNN của biểu thức

Phương pháp:

- Tìm giá trị nhỏ nhất $a + b \cdot |f(x)| + c \cdot g^2(x)$ (Chỉ có GTNN)

Vì $|f(x)| \geq 0$; $g^2(x) \geq 0$ nên $a + b \cdot |f(x)| + c \cdot g^2(x) \geq a$. Vậy GTNN là a khi $f(x)=0$ và $g(x)=0$ suy ra x

- Tìm giá trị nhỏ nhất $\frac{d}{a-b \cdot |f(x)| - c \cdot g^2(x)}$ (Chỉ có GTNN)

Vì $|f(x)| \geq 0$; $g^2(x) \geq 0$ nên $a - b \cdot |f(x)| - c \cdot g^2(x) \leq a$, suy ra $\frac{d}{a-b \cdot |f(x)| - c \cdot g^2(x)} \geq \frac{d}{a}$. Vậy GTNN là $\frac{d}{a}$ khi $f(x)=0$ và $g(x)=0$ suy ra x.

- Tìm giá trị lớn nhất $a - b \cdot |f(x)| - c \cdot g^2(x)$ (Chỉ có GTLN)

Vì $|f(x)| \geq 0$; $g^2(x) \geq 0$ nên $a - b \cdot |f(x)| - c \cdot g^2(x) \leq a$. Vậy GTLN là a khi $f(x)=0$ và $g(x)=0$ suy ra x.

- Tìm giá trị lớn nhất $\frac{d}{a+b \cdot |f(x)| + c \cdot g^2(x)}$ (Chỉ có GTLN)

Vì $|f(x)| \geq 0$; $g^2(x) \geq 0$ nên $a + b \cdot |f(x)| + c \cdot g^2(x) \geq a$, suy ra $\frac{d}{a+b \cdot |f(x)| + c \cdot g^2(x)} \leq \frac{d}{a}$. Vậy GTLN là $\frac{d}{a}$ khi $f(x)=0$ và $g(x)=0$ suy ra x.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

$$\text{a) } A = 0,5 - |x - 3,5| \quad \text{b) } B = -|1,4 - x| - 2 \quad \text{c) } C = \frac{3|x| + 2}{4|x| - 5} \quad \text{d) } D = \frac{2|x| + 3}{3|x| - 1}$$

$$\text{e) } E = 5,5 - |2x - 1,5| \quad \text{f) } F = -|10,2 - 3x| - 14 \quad \text{g) } G = 4 - |5x - 2| - |3y + 12|$$

$$\text{h) } H = \frac{5,8}{|2,5 - x| + 5,8} \quad \text{i) } I = -|2,5 - x| - 5,8 \quad \text{k) } K = 10 - 4|x - 2|$$

$$\text{l) } L = 5 - |2x - 1| \quad \text{m) } M = \frac{1}{|x - 2| + 3} \quad \text{n) } N = 2 + \frac{12}{3|x + 5| + 4}$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = 1,7 + |3,4 - x| \quad \text{b) } B = |x + 2,8| - 3,5 \quad \text{c) } C = 3,7 + |4,3 - x|$$

$$\text{d) } D = |3x + 8,4| - 14,2 \quad \text{e) } E = |4x - 3| + |5y + 7,5| + 17,5 \quad \text{f) } F = |2,5 - x| + 5,8$$

$$\text{g) } G = |4,9 + x| - 2,8 \quad \text{h) } H = \left| x - \frac{2}{5} \right| + \frac{3}{7} \quad \text{i) } I = 1,5 + |1,9 - x|$$

$$\text{k) } K = 2|3x - 1| - 4 \quad \text{l) } L = 2|3x - 2| + 1 \quad \text{m) } M = 5|1 - 4x| - 1$$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = 5 + \frac{15}{4|3x + 7| + 3} \quad \text{b) } B = \frac{-1}{3} + \frac{21}{8|15x - 21| + 7} \quad \text{c) } C = \frac{4}{5} + \frac{20}{|3x + 5| + |4y + 5| + 8}$$

$$\text{d) } D = -6 + \frac{24}{2|x - 2y| + 3|2x + 1| + 6} \quad \text{e) } E = \frac{2}{3} + \frac{21}{(x + 3y)^2 + 5|x + 5| + 14}$$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{2|7x + 5| + 11}{|7x + 5| + 4} \quad \text{b) } B = \frac{|2y + 7| + 13}{2|2y + 7| + 6} \quad \text{c) } C = \frac{15|x + 1| + 32}{6|x + 1| + 8}$$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = 5 + \frac{-8}{4|5x + 7| + 24} \quad \text{b) } B = \frac{6}{5} - \frac{14}{5|6y - 8| + 35} \quad \text{c) } C = \frac{15}{12} - \frac{28}{3|x - 3y| + |2x + 1| + 35}$$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{21|4x + 6| + 33}{3|4x + 6| + 5} \quad \text{b) } B = \frac{6|y + 5| + 14}{2|y + 5| + 14} \quad \text{c) } C = \frac{-15|x + 7| - 68}{3|x + 7| + 12}$$

Sử dụng bất đẳng thức $|a| + |b| \geq |a + b|$

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = |x + 2| + |x - 3| \quad \text{b) } B = |2x - 4| + |2x + 5| \quad \text{c) } C = 3|x - 2| + |3x + 1|$$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{a) } A = |x + 5| + |x + 1| + 4 \quad \text{b) } B = |3x - 7| + |3x + 2| + 8 \quad \text{c) } C = 4|x + 3| + |4x - 5| + 12$$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = |x+3| + |2x-5| + |x-7|$

b) $B = |x+1| + |3x-4| + |x-1| + 5$

c) $C = |x+2| + 4|2x-5| + |x-3|$

d) $D = |x+3| + 5|6x+1| + |x-1| + 3$

Bài 4: Cho $x + y = 5$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x+1| + |y-2|$$

Bài 5: Cho $x - y = 3$, tìm giá trị của biểu thức:

$$B = |x-6| + |y+1|$$

Bài 6: Cho $x - y = 2$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C = |2x+1| + |2y+1|$$

Bài 7: Cho $2x+y = 3$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = |2x+3| + |y+2| + 2$

CHUYÊN ĐỀ III: LŨY THỪA

Các công thức:

1. $a^n = \underbrace{a.a\dots a}_n$ n thừa số	7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
2. $a^0 = 1 \forall a \neq 0$	8. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	9. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$
4. $a^m . a^n = a^{m+n}$	10. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	11. $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
6. $(a.b)^n = a^n . b^n$	12. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{voi } n = 2k + 1 \\ a & \text{voi } n = 2k \end{cases}$

CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức

BÀI TẬP:

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau

a) $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 25 \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^3\right] \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$

b) $2^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2}\right] - 8$

Bài 2: Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa

a) $9 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{81} \cdot 27$

d) $4 \cdot 32 \cdot \left(2^3 \cdot \frac{1}{16}\right)$

c) $3^4 3^5 : \frac{1}{27}$

d) $\frac{2^2 \cdot 4 \cdot 32}{(-2)^2 \cdot 2^5}$

Bài 3: Tính hợp lý

a) $(0,25)^3 \cdot 32$

b) $(-0,125)^3 \cdot 80^4$

c) $\frac{8^2 \cdot 4^5}{2^{20}}$

d) $\frac{81^{11} \cdot 3^{17}}{27^{10} \cdot 9^{15}}$

e) $3^2 \cdot \frac{1}{243} \cdot 81^2 \cdot \frac{1}{3^2}$

f) $4^6 \cdot 256^2 \cdot 2^4$

g) $A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

h) $B = \frac{4^2 \cdot 25^2 + 32 \cdot 125}{2^3 \cdot 5^2}$

Dạng 2: Các bài toán tìm x

Phương pháp:

Cần đưa về cùng số mũ hoặc cùng cơ số. Chú ý lũy thừa mũ chẵn ta phải chia 2 trường hợp, mũ lẻ chỉ có một trường hợp.

Chú ý:

$$a^{2n} = b^{2n} \text{ thì } a = b \text{ hoặc } a = -b$$

$$a^{2m} = a^{2n} \text{ thì } a = 0, 1, -1$$

Ví dụ: a, $x^3 = -27 = (-3)^3$

b, $(2x - 1)^3 = 8 = 2^3$

c, $(2x - 3)^2 = 9 = 3^2$

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm x biết

a) $(x - 1)^3 = 27$; b) $x^2 + x = 0$;

c) $(2x + 1)^2 = 25$;

d) $(2x - 3)^2 = 36$; e) $5^{x+2} = 625$;

d) $(x - 1)^{x+2} = (x - 1)^{x+4}$;

e) $(2x - 1)^3 = -8$.

f) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$;

Bài 2: Tìm số nguyên dương n biết:

a) $32 < 2^n < 128$;

b) $2 \cdot 16 \geq 2^n > 4$;

c) $9 \cdot 27 \leq 3^n \leq 243$.

d) $\frac{1}{9} \cdot 3^4 \cdot 3^{n+1} = 9^4$

e) $\frac{1}{2} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5$

f) $5^{-3} \cdot 25^n = 5^{3n}$

Bài 3: Tìm x biết

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot x = \left(\frac{3}{7}\right)^7$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot x = \frac{1}{81}$

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{27}$

d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{16}{81}$

e) $x^3 = -27$

f) $(2x - 1)^3 = 8$

g) $(x - 2)^2 = 16$

h) $(2x - 3)^2 = 9$

Bài 4: Tìm số hữu tỉ biết : $(3y - 1)^{10} = (3y - 1)^{20}$

Bài 5 : Tìm x, y : $(3x - 5)^{100} + (2y + 1)^{200} \leq 0$

Bài 6 :

- a. $9 \cdot 27^n = 3^5$
- b. $(2^3 : 4) \cdot 2^n = 4$
- c. $3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7$
- d. $2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5$
- e. $125.5 \geq 5^n \geq 5.25$
- f. $(n^{54})^2 = n$
- g. $243 \geq 3^n \geq 9.27$
- h. $2^{n+3} \cdot 2^n = 32$

Bài 7: Tìm số tự nhiên n biết

- a) $2^x \cdot 4 = 128$
- b) $2^x - 15 = 17$
- c) $3^x + 25 = 26 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^0$
- d) $27 \cdot 3^x = 243$
- e) $49 \cdot 7^x = 2401$
- g) $3^4 \cdot 3^x = 3^7$

Bài 8. Tìm x, y a. $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$ b. $10^x : 5^y = 20^y$

Bài 9. Tìm n

- a. $4^{11} \cdot 25^{11} \leq 2^n \cdot 5^n \leq 20^{12} \cdot 5^{12}$
- b. $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^n$

Dạng 3: Các bài toán so sánh:

Phương pháp:

Ta đưa về cùng cơ số rồi so sánh số mũ, hoặc đưa về cùng số mũ rồi so sánh cơ số. Chú ý, với các số nằm từ 0 đến 1, lũy thừa càng lớn thì giá trị càng nhỏ. Ví dụ: $(\frac{1}{2})^5 < (\frac{1}{2})^3$

Cùng cơ số	Cùng số mũ
Với $m > n > 0$	Với $n \in \mathbb{N}^*$
Nếu $x > 1$ thì $x^m > x^n$	Nếu $x > y > 0$ thì $x^n > y^n$
$x = 1$ thì $x^m = x^n$	$x > y \Leftrightarrow x^{2n+1} > y^{2n+1}$
$0 < x < 1$ thì $x^m < x^n$	$ x > y \Leftrightarrow x^{2n} > y^{2n}$
	$(-x)^{2n} = x^{2n}$
	$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$

BÀI TẬP

Bài 1: So sánh các lũy thừa sau

- a) 3^{21} và 2^{31}
- b) 2^{300} và 3^{200}
- c) 32^9 và 18^{13}

$(\frac{1}{2})^3$ và $(\frac{1}{2})^7$; $(\frac{1}{2})^5$ và $(\frac{1}{2})^7$

Bài 2: So sánh

- a) 99^{20} và 9999^{10}
- b) 3^{21} và 2^{31} ;
- c) $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và $3 \cdot 24^{10}$

Bài 3: a, 333^{17} và 333^{23}

- b, 2007^{10} và 2008^{10}
- c, $(2008-2007)^{2009}$ và $(1998 - 1997)^{1999}$

Bài 4:

- a, 2^{300} và 3^{200}
- e, 99^{20} và 9999^{10}
- b, 3^{500} và 7^{300}
- f, 11^{1979} và 37^{1320}
- c, 8^5 và $3 \cdot 4^7$
- g, 10^{10} và $48 \cdot 5^5$

d, 202^{303} và 303^{202}

h, $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

Bài 5: a) Tính tổng $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$

b) Áp dụng tính các tổng sau:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2008}$$

$$B = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1982}$$

$$C = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{n-1} + 7^n$$

Bài 6: Chứng tỏ rằng các tổng sau được viết dưới dạng một số chính phương

$$M = 1^3 + 2^3$$

$$N = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

$$P = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

$$Q = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

Bài 7: Viết tổng sau dưới dạng một lũy thừa của 2

$$T = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008}$$

Bài 8: So sánh

a) $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2008}$ và $B = 2^{2009} - 1$

b) $P = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{200}$ và 3^{201}

c) $E = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2008}$ và $F = x^{2009}$ ($x \in N^*$)

Bài 9: Tìm số dư khi chia A cho 7 biết rằng

$$T = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008} + 2^{2002}$$

Bài 10: Tìm

a) Số tự nhiên n biết

$$2.P + 3 = 3^n$$

$$P = 3 + 3^2 + \dots + 3^{100}$$

b) Chữ số tận cùng của A biết $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{20}$ **Dạng 4: Các bài toán chứng minh chia hết:****Phương pháp:**

- Ta nhóm các hạng tử để xuất hiện thừa số chia hết hoặc dùng các phương pháp tính tổng và xét chữ số tận cùng rồi chỉ ra chia hết.

- Chú ý khi nhóm các số hạng, ta thường nhóm 2 hay 3 số hạng liền kề, hoặc nhóm cách quãng.

- Sử dụng tính chất $a^n - b^n \vdots (a-b)$; $a^n + b^n \vdots (a+b)$

BÀI TẬP:

Bài 1: : Chứng minh rằng

a) $2010^{100} + 2010^{99}$ chia hết cho 2011

b) $3^{1994} + 3^{1993} - 3^{1992}$ chia hết cho 11

c) $4^{13} + 32^5 - 8^8$ chia hết cho 5

Bài 2:

Cho $M = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

M có chia hết cho 4, cho 12 không? vì sao?

$N = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{118} + 3^{119}$

N có chia hết cho 5, cho 13 không? Vì sao?

Bài 3: Chứng minh

a, $A = 10^{2008} + 125 : 45$

b, $B = 5^{2008} + 5^{2007} + 5^{2006} : 31$

c, $M = 8^8 + 2^{20} : 17$

d, $H = 313^5 \cdot 299 - 313^6 \cdot 36 : 7$

Bài 4: Cho $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$

Chứng minh: $A : 3, A : 7, A : 5$

Bài 5:

a, $D = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2007} : 13$

b, $E = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{4n-1} + 7^{4n} : 400$

Bài 6: Chứng minh rằng các tổng (hiệu) sau chia hết cho 10

a) $481^n + 1999^{1999}$ b) $16^{2001} - 8^{2000}$ c) $19^{2005} + 11^{2004}$

d) $8^{102} - 2^{102}$ e) $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ f) $12^{2004} - 2^{1000}$

Bài 7: Chứng minh rằng số sau là một số tự nhiên:

$$A = \frac{1}{10} (7^{2004^{2004}} - 3^{2^{2^4}})$$

$$B = \frac{3}{10} (2003^{2013} - 1997^{1997})$$

$$C = \frac{1}{10} (1997^{2004^{2004}} - 1993^{1994^{1994}})$$

Bài 8: Các tổng sau có là số chính phương không?

a) $10^8 + 8$ b) $100! + 7$ c) $10^{100} + 10^{50} + 1$

Bài 9: chứng tỏ rằng

a) $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2007} : 13$

b) $B = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{4n} : 400$

Bài 10: Chứng tỏ rằng:

a) $8^7 - 2^{18} : 14$

b) $12^{2n+1} + 11^{n+2} : 133$

c) $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 405$

d) $10^6 - 57 : 59$

e) $10^{28} + 8 : 72$

Dạng 5: Tìm chữ số tận cùng của một giá trị lũy thừa

* **Phương pháp** : cần nắm được một số nhận xét sau :

+) Tất cả các số có chữ số tận cùng là : 0 ; 1 ; 5 ; 6 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng có chữ số tận cùng là chính những số đó .

+) Để tìm chữ số tận cùng của một số ta thường đưa về dạng các số có chữ số tận cùng là một trong các chữ số đó .

+) Lưu ý : những số có chữ số tận cùng là 4 nâng lên lũy thừa bậc chẵn sẽ có chữ số tận cùng là 6 và nâng lên lũy thừa bậc lẻ sẽ có chữ số tận cùng là 4 .

những số có chữ số tận cùng là 9 nâng lên lũy thừa bậc chẵn sẽ có chữ số tận cùng là 1 và nâng lên lũy thừa bậc lẻ sẽ có chữ số tận cùng là 9

+) Chú ý : $2^4 = 16$ $7^4 = 2401$ $3^4 = 81$ $8^4 = 4096$

Ví dụ : Tìm chữ số tận cùng của các số : 2000^{2008} , 1111^{2008} , 98765^{4321} , 2046^{81012} .

Dựa vào những nhận xét trên học sinh có thể dễ dàng tìm được đáp án :

2000^{2008} có chữ số tận cùng là chữ số 0

1111^{2008} có chữ số tận cùng là chữ số 1

98765^{4321} có chữ số tận cùng là chữ số 5

2046^{81012} có chữ số tận cùng là chữ số 6.

BÀI TẬP :

Bài 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số sau :

2007^{2008} , 1358^{2008} , 2^{3456} , 52^{35} , 204^{208} , 2003^{2005} , 9^{99} , 4^{567} , 9^{96} , 8^{1975} , 2007^{2007} , 1023^{1024} .

Hướng dẫn : Đưa các lũy thừa trên về dạng các lũy thừa của số có chữ số tận cùng là : 0 ; 1 ; 5 ; 6

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của tổng

$$a) A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96}$$

$$b) B = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{30}$$

$$c) C = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$$

CHUYÊN ĐỀ IV: TỈ LỆ THỨC

Kiến thức cần nhớ: Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số bằng nhau. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hoặc $a : b = c : d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$;

$b, d \neq 0$)

Các số a, d là ngoại tỉ .

b, c là nội tỉ .

Từ tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $a.d = b.c$

Từ đẳng thức $a.d = b.c$ với $a, b, c, d \neq 0$ cho ta các tỷ lệ thức:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Từ tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra các tỷ lệ thức: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Tính chất của dãy tỷ lệ thức bằng nhau:

Từ tỷ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra các tỷ lệ thức sau: $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$, ($b \neq \pm d$)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{i}{j}$ suy ra các tỷ lệ thức sau:

$\frac{a}{b} = \frac{c+c+i}{b+d+j} = \frac{a-c+i}{b-d+j}$, ($b, d, j \neq 0$)

CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Lập tỉ lệ thức từ các số đã cho:

Phương pháp:

Sử dụng tính chất: Từ đẳng thức $a.d = b.c$ cho ta các tỷ lệ thức:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

BÀI TẬP:

Bài 1:

a. Tìm các số bằng nhau trong các tỉ số sau rồi lập tỉ lệ thức

$$28:14; 2\frac{1}{2}:2; 8:4; \frac{1}{2}:\frac{2}{3}; 3:10; 2,1:7; 3:0,3.$$

b. Các số sau có lập được tỉ lệ thức hay không?

$$\text{a) } 3,5; 5,25 \text{ và } 14:21; \quad \text{b) } 39\frac{3}{10}; 52\frac{2}{5} \text{ và } 2,1:3,5;$$

$$\text{c) } 6,51:15,19 \text{ và } 3:7; \quad \text{d) } -7:4\frac{2}{3} \text{ và } 0,9:(-0,5).$$

Dạng 2: Tìm x từ tỉ lệ thức:

Phương pháp:

Dùng tính chất $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $a.d = b.c$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm x:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x:15 = 8:24 & \text{b) } 36:x = 54:3 & \text{e) } 1,56:2,88 = 2,6:x & \text{g) } 2,5:4x = 0,5:0,2 \\ \text{c) } 3\frac{1}{2}:0,4 = x:1\frac{1}{7} & \text{d) } \frac{1}{5}x:3 = \frac{2}{3}:0,25 & \text{f) } \frac{3x+2}{5x+7} = \frac{3x-1}{5x+1} & \text{h) } \frac{x+1}{2x+1} = \frac{0,5x+2}{x+3} \end{array}$$

Bài 2: Tìm x:

$$\text{a. } 2x:6 = 5:3;$$

$$\text{b. } \frac{1+2x}{10} = \frac{3+4x}{30} = \frac{3+8x}{20};$$

$$1\frac{1}{2} : (3x-2) = \frac{1}{12} : \frac{4}{21}$$

c.

$$d. \frac{(2x+1)}{5} = \frac{3}{(2x-1)}$$

$$e. \frac{x}{27} = \frac{-2}{3,6}$$

$$f. -0,52 : x = -9,36 : 16,38$$

$$f. \frac{x}{-15} = \frac{-60}{x}$$

$$h. \frac{-2}{x} = \frac{-x}{\frac{8}{25}}$$

$$i. 3,8 : 2x = \frac{1}{4} : 2\frac{2}{3}$$

$$k. 0,25x : 3 = \frac{5}{6} : 0,125$$

Dạng 3: Chứng minh tỉ lệ thức**Phương pháp:**

- Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, suy ra $a=b.k$; $c=d.k$ rồi thay vào từng vế của đẳng thức cần chứng minh ta được cùng một biểu thức. suy ra đpcm

- Có thể dùng tính chất nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ suy ra $a.d = b.c$ để chứng minh;

- Dùng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

- Có thể dùng cách đặt thừa số chung trên tử và mẫu để chứng minh:

$$\text{Ví dụ: } \frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{b(\frac{5a}{b}+3)}{b(\frac{5a}{b}-3)} = \frac{(\frac{5a}{d}+3)}{(\frac{5a}{d}-3)} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$$

BÀI TẬP:

Bài 1: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì:

$$a, \frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$$

$$b, \frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2} = \frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$$

Bài 2: CMR: Nếu $a^2 = bc$ thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$

Bài 3: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ CMR $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$

Bài 4: CMR: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

Bài 5: Cho a, b, c, d là 4 số khác nhau, khác không thỏa mãn điều kiện:

$$b^2 = ac; c^2 = bd \text{ và } b^3 + c^3 + d^3 \neq 0$$

$$\text{CM: } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$$

Dạng 4: Cho dãy tỉ số bằng nhau và một tổng, tìm x,y**Phương pháp:**

- Đầu tiên ta đưa về cùng một tỉ số: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$

(Ví dụ: bài cho $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ hay $4x=3y$ ta phải đưa về $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$; nếu bài cho $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $\frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ta phải đưa về cùng một tỉ số là $\frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12}$, nếu bài cho $2x = 4y = 7z$ ta đưa về $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\frac{2}{7}}$)

- Sau đó dùng: + tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tính

+Phương pháp thế(rút x hoặc y từ một biểu thức thế vào biểu thức còn lại

+Đặt : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$

BÀI TẬP:

Bài 1:

a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $2x + 3y - z = 186$. b) $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

c) $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x+y-2z=28$ d) $3x=2y; 7x=5z, x-y+z=32$

e) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$. g) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ và $x+y+z=49$.

h) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{4}$ và $2x+3y-z = 50$

Bài 2: Tìm x,y

a) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ và $2x+ 5y = 10$ b) $\frac{2x}{3y} = -\frac{1}{3}$ và $2x + 3y = 7$ c) $21x = 19y$ và $x- y = 4$

d) $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ và $x^2 - y^2 = 4$ ($x, y > 0$).

Bài 3: Tìm x, y, z

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \frac{y}{5} = \frac{z}{7}, x+y+z = 92$ b) $2x = 3y = 5z, x+y-z = 95$.

c) $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$

d) $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

Chú ý: đây chính là bài toán chia một số M thành 3 phần tỉ lệ với a, b, c: Ta có $\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ x + y + z = M \end{cases}$

Bài 1:

- a) Chia 3 góc của tam giác thành 3 phần tỉ lệ với 2, 3, 4
- b) Tam giác ABC có 3 cạnh tỉ lệ với 4, 5, 7 và chu vi bằng 32cm. Tìm 3 cạnh tam giác.

Bài 2: Số học sinh bốn khối 6, 7, 8, 9 tỉ lệ với các số 9; 8; 7; 6. Biết rằng số học sinh khối 9 ít hơn số học sinh khối 7 là 70 học sinh. Tính số học sinh của mỗi khối.

Bài 3: Theo hợp đồng, hai tổ sản xuất chia lãi với nhau theo tỷ lệ 3 : 5 .Hỏi mỗi tổ được chia bao nhiêu nếu tổng số lãi là 12 800 000 đồng.

Bài 4: Tính độ dài các cạnh của một tam giác biết chu vi là 22 cm và các cạnh tỉ lệ với các số 2; 4; 5.

Bài 5: Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Dạng 5: Cho dãy tỉ số, Tính giá trị một biểu thức

Phương pháp:

Cách 1: Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$; suy ra $x=a.k$; $y=b.k$; $z=c.k$ rồi thay vào biểu thức.

Cách 2: Dùng tính chất tỉ lệ thức:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{3x - y + 5z}{6 - 3 - 25} = \frac{x + y + 3z}{2 + 3 + 15} \text{ từ đó tính được } A = \frac{3x - y + 5z}{z + y + 3z}$$

BÀI TẬP:

Bài 1: Cho $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$; ; Tính $A = \frac{3x - 5y + 5z}{x + y + 3z}$

Bài 2: $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$ Tính $B = \frac{2x + y - z}{x + 6y - 5z}$

Bài 3: Cho a , b ,c đôi một khác nhau và thỏa mãn $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Bài 4: Cho dãy tỉ số bằng nhau

$\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{b+c+a}$ Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{a+d} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Bài 5: Cho các số a;b;c khác 0 thỏa mãn $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ Tính $P = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3}$

HD : $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow P = 1$

Bài 6: Cho $\frac{-a+b+c}{a} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{a+b-c}{c}$ Tính $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

Bài 7: Cho $\frac{a+3b-c}{c} = \frac{-a+b+3c}{a} = \frac{a-b+3c}{b}$ Tính $P = \left(3 + \frac{a}{b}\right).\left(3 + \frac{b}{c}\right).\left(3 + \frac{c}{a}\right)$

HD:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ b > 0; d > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ad < bc \text{ (1) thêm vào 2 vế của (1) với } ab \text{ ta có:}$$

$$\Rightarrow ad + ab < bc + ab$$

$$a(b+d) < b(c+a) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \text{ (2)}$$

+ Thêm vào hai vế của (1) dc ta có:

$$(1) \Rightarrow ad + dc < bc + dc$$

$$\Rightarrow d(a+c) < c(b+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \text{ (3)}$$

+ Từ (2) và (3) ta có:

$$\text{Từ } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \text{ (đpcm)}$$

Tính chất 3: a; b; c là các số dương nên

a. Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

b. Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

BÀI TẬP:

Bài 1. Cho a; b; c; d > 0.

$$\text{CMR: } 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Giải:

+ Từ $\frac{a}{a+b+c} < 1$ theo tính chất (3) ta có:

$$\frac{a+d}{a+b+c+d} > \frac{a}{a+b+c} \text{ (1) (do } d > 0)$$

Mặt khác: $\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d} \text{ (2)}$

+ Từ (1) và (2) ta có: $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \text{ (3)}$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d} \text{ (4)}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{c+d+a+b} \text{ (5)}$$

$$\frac{d}{d+a+b+c} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d} \text{ (6)}$$

Cộng bất đẳng thức kép (3); (4); (5); (6) theo từng vế thì được:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Bài 2. Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b, d > 0$ CMR: $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

Giải:

Ta có $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b, d > 0$ nên $\frac{a.b}{b.b} < \frac{c.d}{d.d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$

Theo tính chất (2) ta có: $\frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

CHUYÊN ĐỀ VI : CĂN BẬC 2

Kiến thức cần nhớ:

\sqrt{a} : (với $a \geq 0$) đọc là căn bậc hai của a

- Một số $a > 0$ luôn tồn tại hai căn bậc hai là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$. Với $a=0$ có một căn bậc 2 là $\sqrt{0} = 0$

- Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỉ

$$x = \sqrt{a} \Rightarrow x^2 = a \quad (\text{với } x \geq 0)$$

Điều kiện để căn thức bậc hai có nghĩa: \sqrt{a} có nghĩa là $a \geq 0$

Các công thức biến đổi.

$$\sqrt{a^2} = |a|; \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$$

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức và viết căn bậc hai của một số:

Bài 1: Tính

$$A = \sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{100}$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{0,04}$$

$$C = \sqrt{\frac{100}{16}} - 1 + \sqrt{25}$$

$$D = -\sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{64}$$

Bài 2: Viết căn bậc hai của các số sau: 3, 6, 9, 25, -16. 0

Dạng 2: So sánh hai căn bậc hai:

Phương pháp:

Dựa vào tính chất: nếu $a > b \geq 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

Bài 1: So sánh:

$$\sqrt{22} \text{ và } \sqrt{27}; \quad 11 \text{ và } \sqrt{121}; \quad 7 \text{ và } \sqrt{50};$$

$$6 \text{ và } \sqrt{33};$$

$$a) 2\sqrt{27} \text{ và } \sqrt{147} \quad b) -3\sqrt{5} \text{ và } -5\sqrt{3} \quad c) 21, 2\sqrt{7}, 15\sqrt{3}, -\sqrt{123}$$

- d) $2\sqrt{15}$ và $\sqrt{59}$ e) $2\sqrt{2} - 1$ và 2 f) 6 và $\sqrt{41}$
 g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và 1 h) $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ và $-2\sqrt{5}$ i) $\sqrt{6} - 1$ và 3
 j) $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$ và 1 k) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ và $\frac{3}{4}$ l) $6\sqrt{\frac{1}{4}}, 4\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{132}, 2\sqrt{3}, \sqrt{\frac{15}{5}}$
 m) $-2\sqrt{6}$ và $-\sqrt{23}$ n) $2\sqrt{6} - 2$ và 3 o) $28\sqrt{2}, \sqrt{14}, 2\sqrt{147}, 36\sqrt{4}$
 p) $\sqrt{9}$ và $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ r) $\sqrt{111} - 7$ và 4 p) $-27, 4\sqrt{3}, 16\sqrt{5}, 21\sqrt{2}$

Dạng 3: Tìm x biết $\sqrt{f(x)} = a$

Phương pháp:

Nếu $a < 0$: thì không tồn tại x

Nếu $a \geq 0$ thì $\sqrt{f(x)} = a$ suy ra $f(x) = a^2$. Từ đó tìm x

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm x

$\sqrt{x-1} = 2; \sqrt{3(2x+1)} = 3; \sqrt{1-x} = -1; x-2\sqrt{x}=0; x=-2\sqrt{x}; x=\sqrt{x}$

Bài 2:

- a) $\sqrt{3x-1} = 4$ g) $\sqrt{-3x+4} = 12$ l) $\sqrt{2x^2-9} = -x$ r) $\sqrt{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)} = 2$
 b) $\sqrt{x^2-8x+16} = 4$ h) $\sqrt{9(x-1)} = 21$ m) $\sqrt{\frac{12x+5}{3}} = 2$ s) $\sqrt{\frac{1}{4}-2a} = 3$
 c) $\sqrt{2-3x} = 10$ i) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$ o) $\sqrt{5x+3} = \sqrt{3-\sqrt{2}}$ t) $\sqrt{-4x^2+25} = x$
 d) $\sqrt{4-5x} = 12$ j) $\sqrt{4(1-x)^2} - \sqrt{3} = 0$ p) $\sqrt{16x} = 8$ u) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3x}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$
 e) $\sqrt{\frac{-3}{2+x}} = 2$ k) $\sqrt{3x^2-5} = 2$ q) $\sqrt{(x-3)^2} = 3$ v) $\sqrt{\frac{-6}{1+x}} = 5$
 w) $\sqrt{4x-20} - 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} = \sqrt{1-x}$ x) $\sqrt{4x+8} + 2\sqrt{x+2} - \sqrt{9x+18} = 1$
 a') $\sqrt{x^2-6x+9} + x = 11$ y) $\sqrt{3x^2-4x+3} = 1-2x$ z) $\sqrt{16(x+1)} - \sqrt{9(x+1)} = 4$
 b') $\sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} = \sqrt{x+1}$

Dạng 3: $f(x)^2 = a$

Phương pháp:

Nếu $a < 0$: không tồn tại x

Nếu $a \geq 0$ thì $f(x) = \sqrt{a}$ hoặc $f(x) = -\sqrt{a}$

BÀI TẬP: Tìm x

$x^2=9; 3.x^2-2=4; x^2=-18$

$\sqrt{3x^2-2} = 4; \sqrt{x^2+1} = 2$

Dạng 4: Tìm SỰ XÁC ĐỊNH của các biểu thức chứa căn .

Phương pháp tìm điều kiện: \sqrt{A} xác định khi $A \geq 0$

Cần lưu ý $\frac{A}{B}$ xác định khi $B \neq 0$

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm điều kiện xác định

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $\sqrt{6x+1}$ | g) $\sqrt{\frac{-3}{2+x}}$ | m) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}x}$ | s) $\sqrt{\frac{-2\sqrt{6}+\sqrt{23}}{-x+5}}$ |
| b) $\sqrt{-8x}$ | h) $\sqrt{(x+5)^2}$ | n) $\sqrt{\sqrt{6x}-4x}$ | t) $\sqrt{2011-m}$ |
| c) $\sqrt{4-5x}$ | i) $\sqrt{\frac{\sqrt{6}-4}{m+2}}$ | o) $\sqrt{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}$ | u) $\sqrt{\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{59}}{x-7}}$ |
| d) $\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2}$ | j) $\frac{16x-1}{\sqrt{x-7}}$ | p) $\sqrt{(x-6)^6}$ | v) $\sqrt{4z^2+4z+1}$ |
| e) $\sqrt{x^2+2x+1}$ | k) $\sqrt{2x+5}$ | q) $\sqrt{-12x+5}$ | w) $\sqrt{49x^2-24x+4}$ |
| f) $\sqrt{\frac{1}{4}-2a}$ | l) $\frac{3}{\sqrt{12x-1}}$ | r) $2-4\sqrt{5x+8}$ | y) $\sqrt{\frac{12x+5}{\sqrt{3}}}$ |

Dạng V: Chứng minh một số là số vô tỉ:

Phương pháp:

Dùng phương pháp phản chứng

Ví dụ 1: CM $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ

Giả sử rằng $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ. Điều đó có nghĩa là tồn tại hai số nguyên a và b sao cho $a/b = \sqrt{2}$.

Như vậy $\sqrt{2}$ có thể được viết dưới dạng một phân số tối giản (phân số không thể rút gọn được nữa): a/b với a, b là hai số nguyên tố cùng nhau và $(a/b)^2 = 2$.

Từ (2) suy ra $a^2/b^2 = 2$ và $a^2 = 2b^2$.

Khi đó a^2 là số chẵn vì nó bằng $2b^2$ (hiển nhiên là số chẵn)

Từ đó suy ra a phải là số chẵn vì a^2 là số chính phương chẵn (số chính phương lẻ có căn bậc hai là số lẻ, số chính phương chẵn có căn bậc hai là số chẵn).

Vì a là số chẵn, nên tồn tại một số k thỏa mãn: $a = 2k$.

Thay (6) vào (3) ta có: $(2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2k^2 = b^2$.

Vì $2k^2 = b^2$ mà $2k^2$ là số chẵn nên b^2 là số chẵn, điều này suy ra b cũng là số chẵn (lí luận tương tự như (5)).

Từ (5) và (8) ta có: a và b đều là các số chẵn, điều này mâu thuẫn với giả thiết a/b là phân số tối giản ở (2).

Ví dụ 2: Chứng minh $\sqrt{3}$ là số vô tỉ

Giả sử $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ \Rightarrow tồn tại m, n là hai số nguyên tố cùng nhau

sao cho $\sqrt{3} = m/n$

$\Rightarrow 3 = m^2/n^2 \Rightarrow n^2 = m^2/3$ (là số nguyên)

$\Rightarrow m^2$ chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố

$\Rightarrow m$ chia hết cho 3 (*)

đặt $m = 3p \Rightarrow m^2 = 9p^2$, thay vào trên ta có:

$$n^2 = m^2/3 = 9p^2/3 = 3p^2$$

$\Rightarrow p^2 = n^2/3$ là số nguyên $\Rightarrow n^2$ chia hết cho 3

và vì 3 nguyên tố $\Rightarrow n$ chia hết cho 3 (**)

từ (*) và (**) thấy m và n đều chia hết cho 3 \Rightarrow mâu thuẫn với gt m, n nguyên tố cùng nhau

Vậy $\sqrt[3]{3}$ là số vô tỉ

ĐỔI SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN RA PHÂN SỐ TỐI GIẢN

==*==

I. Lí thuyết:

$$\frac{1}{9} = 0,(1) \quad ; \quad \frac{1}{99} = 0,(01) \quad ; \quad \frac{1}{999} = 0,(001)$$

Như vậy ta thấy số chữ số 0 ở phần chu kỳ đúng bằng với số chữ số 9 của mẫu phân phân số trừ đi 1 nên tổng quát ta sẽ có:

$$\frac{1}{99\dots9} = 0,(00\dots01) \text{ với } n \text{ chữ số chữ số } 9 \text{ và } n-1 \text{ chữ số } 0$$

II. Áp dụng:

a) Viết số $0,(7);0,(3)$ dưới dạng một phân số tối giản?

$$\text{Ta có : } 0,(7) = 7 \cdot 0,(1) = 7 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

$$0,(3) = 3 \cdot 0,(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

b) Viết số $0,(31);0,(71)$ dưới dạng một phân số tối giản?

$$\text{Ta có : } 0,(31) = 0,(30) + 0,(01) = 3 \cdot 0,(1) \cdot \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{99} \right] = 3 \cdot \left[1 + 0,(01) \right] \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{99} = \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10} + 1 \right) \cdot \frac{1}{99} = \frac{310}{990} = \frac{31}{99}$$

$$\text{Tương tự } 0,(71) = \frac{71}{99}$$

c) Viết số $0,2(31)$ dưới dạng một phân số tối giản?

$$\text{Ta có : } 0,2(31) = 0,2 + 0,0(31) = 0,2 + 0,(31) \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{31}{990} = \frac{2 \cdot 99 + 31}{990} = \frac{229}{990}$$

d) Viết số $0,24(31)$ dưới dạng một phân số tối giản?

$$\text{Ta có : } 0,24(31) = 0,24 + 0,00(31) = 0,24 + 0,(31) \cdot \frac{1}{100} = \frac{24}{100} + \frac{31}{9900} = \frac{24 \cdot 99 + 31}{9900} = \frac{2407}{9900}$$

e) Viết số $1,23(507)$ dưới dạng một phân số tối giản?

$$\text{Ta có : } 1,23(507) = 1 + 0,23 + 0,(507) \cdot \frac{1}{100} = 1 + \frac{23}{100} + \frac{507}{999} \cdot \frac{1}{100} = \frac{123384}{99900} = \frac{10282}{8325}$$

*Nhận xét:

-Nếu trước chu kỳ không có chữ số thập phân nào thì lấy chu kỳ làm tử còn mẫu thay bằng các chữ số 9 bằng đúng số chữ số ở chu kỳ

-Nếu trước chu kì còn chữ số thập phân thì tách thành tổng của số thập phân hữu hạn và số thập phân vô hạn tuần hoàn rồi biến đổi như trường hợp trên.

-Nếu phần nguyên khác 0 thì tách thành tổng của phần nguyên và một số thập phân VHTH

III. Trình tự chuyển đổi:

Bước 1:

Viết số thập phân VHTH dưới dạng tổng của các phần nguyên, số thập phân hữu hạn và số thập phân VHTH mà trước chu kì không có chữ số thập phân nào

Bước 2:

Đổi các số thập phân hữu hạn và VHTH vừa tách được ra phân số rồi cộng các phân số vừa tìm được.

SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN – SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN.

I) Số thập phân hữu hạn – số thập phân vô hạn tuần hoàn

1) Ví dụ: Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân

a) $\frac{3}{20}$

b) $\frac{-37}{25}$

c) $\frac{17}{-11}$

d) $\frac{5}{12}$

2) Quy ước viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng thu gọn

- Ví dụ: $-1,5454\dots = -1, (54)$; $0,416666\dots = 0,41(6)$

II) Nhận xét:

* Nếu một phân số có **mẫu dương** và **không có các ước là số nguyên tố khác 2 và 5** đều được viết dưới dạng số thập phân hữu hạn.

* Nếu một phân số có **mẫu dương** và có **các ước nguyên tố khác 2 và 5** thì được viết dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Dạng I: Nhận biết một phân số là số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn

Bài 1: Trong hai phân số sau phân số nào là số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn?

$$\frac{55}{-300} \text{ và } \frac{63}{-360}$$

Bài 2: Trong các phân số sau phân số nào là số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn? Viết dạng thập phân các phân số đó (viết gọn chu kì trong dấu ngoặc)

$$\frac{5}{8}; \frac{-3}{20}; \frac{4}{11}; \frac{15}{22}; \frac{14}{-35}$$

Bài 3: Cho số $A = \frac{3}{2.\square}$. Hãy điền vào ô vuông một số nguyên tố có 1 chữ số sao cho A là số thập phân

hữu hạn? Có mấy cách?

Dạng 2: Viết một phân số hoặc một tỉ số dưới dạng số thập phân

Bài 1: Dùng dấu ngoặc để chỉ rõ chu kì trong các thương sau đây

a) $8,5 : 3$

b) $18,7 : 6$

c) $58 : 11$

d) $14,2 : 3,33$

Dạng 3: Viết số thập phân hữu hạn dưới dạng phân số tối giản

Bài 1: Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản

a) $0,32$

b) $-0,124$

c) $1,28$

d) $-3,12$

Dạng 4: Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản

1) Cần nhớ các số thập phân vô hạn tuần hoàn đặc biệt:

$$0,(1) = \frac{1}{9};$$

$$0,(01) = \frac{1}{99};$$

$$0,(001) = \frac{1}{999}$$

2) Đối với số thập phân vô hạn tuần hoàn đơn

+ Số thập phân vô hạn tuần hoàn gọi là đơn nếu chu kì bắt đầu ngay sau dấu phẩy. Ví dụ: $0,(32)$

$$+ \text{ Ví dụ: } 0,(32) = 0,(01) \cdot 32 = \frac{1}{99} \cdot 32 = \frac{32}{99};$$

$$1,(3) = 1 + 0,(3) = 1 + 0,(1) \cdot 3 = 1 + \frac{1}{9} \cdot 3 = 1 + \frac{1}{9} \cdot 3 = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$$

3) Đối với số thập phân vô hạn tuần hoàn tạp

+ Số thập phân vô hạn tuần hoàn được gọi là tạp nếu chu kì không bắt đầu ngay sau dấu phẩy. Ví dụ: $2,3(41)$.

$$+ \text{ Ví dụ: } 2,3(41) = 2,3 + 0,0(41) = 2,3 + \frac{1}{10} \cdot 0,(41) = 2,3 + \frac{1}{10} \cdot \frac{41}{99} = 2,3 + \frac{41}{990} = 2\frac{169}{495}$$

Bài 1: Các số sau có bằng nhau không? $0,(31)$ và $0,3(13)$

Bài 2: Thực hiện phép tính

a) $0,(3) + 3\frac{1}{3} - 0,4(2)$

b) $[12,(1) - 2,3(6)] : 4,(21)$

c) $\frac{4}{9} + 1,2(31) - 0,(13)$

d) $2\frac{1}{2} - 3,4(12) - \frac{4}{3}$

Bài 3: Chứng tỏ rằng

a) $0,(27) + 0,(72) = 1$

b) $0,(317) + 0,(682) = 1$

c) $0,(22) \cdot \frac{9}{2} = 1$

d) $[0,(11) \cdot 9]^{2011} = 1$

Bài 4: Tìm x biết

a) $x : 0,(7) = 0,(32) : 2,(4)$

b) $0,(17) : 2,(3) = x : 0,(3)$

c) $x : 0,(3) = 0,(12)$

d) $\frac{0,1(6) + 0,(3)}{0,(3) + 1,1(6)} \cdot x = 0,(2)$

Bài 5:

Nối hàng I với hàng II cho đúng

I	0,(12)	1,(17)	1,3(4)	0,(31)
II	$\frac{116}{99}$	$\frac{121}{90}$	$\frac{31}{99}$	$\frac{4}{33}$

Bài 6: Chứng tỏ rằng số $\frac{21n + 4}{7n}$ không thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

CHUYÊN ĐỀ V: TỈ LỆ THUẬN-TỈ LỆ NGHỊCH

Kiến thức cần nhớ:

	TỈ LỆ THUẬN	TỈ LỆ NGHỊCH
Định nghĩa	<p>y tỉ lệ thuận với x $\Leftrightarrow y = kx (k \neq 0)$ <i>chú ý:</i> Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k thì x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ là $\frac{1}{k}$.</p>	<p>y tỉ lệ nghịch với x $\Leftrightarrow y = \frac{a}{x} (yx = a)$ <i>a) Chú ý:</i> Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a thì x tỉ lệ nghịch với y theo hệ số tỉ lệ a.</p>
Tính chất	<p>* $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = k$; * $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} ; \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4}$; Nếu x, y, z tỉ lệ thuận với a, b, c thì ta có: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$</p>	<p>* $y_1x_1 = y_2x_2 = y_3x_3 = \dots = a$; * $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} ; \frac{x_3}{x_4} = \frac{y_4}{y_3} ; \dots$ Nếu x, y, z tỉ lệ nghịch với a, b, c thì ta có: $ax = by = cz = \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$</p>

Tỉ lệ thuận:

- Nếu x và y liên hệ theo công thức $y=k.x$ hoặc $x=k.y$ ta nói x và y là hai đại lượng TLT
- Nếu viết $y=k.x$ thì k là hệ số tỉ lệ thuận của y so với x
- Nếu viết $x=k.y$ thì k là hệ số tỉ lệ thuận của x so với y

Tỉ lệ nghịch:

Nếu x và y liên hệ theo công thức $y=\frac{k}{x}$ hoặc $x=\frac{k}{y}$ hoặc $x.y=k$ ta nói x và y là hai đại lượng TLN và k được gọi chung là hệ số tỉ lệ nghịch.

CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: Tính hệ số tỉ lệ, biểu diễn x theo y, tính x (hoặc y) khi biết y (hoặc x),

Phương pháp:

- Hệ số tỉ lệ thuận của y với x là: $k=\frac{y}{x}$; sau khi tính được k ta thay vào biểu thức $y=k.x$ để được mối quan hệ giữa y theo x.

- Hệ số tỉ lệ thuận của x với y là $k = \frac{x}{y}$; sau khi tính được k ta thay vào biểu thức $x = k.y$ để được mối quan hệ giữa x theo y .

- Hệ số tỉ lệ nghịch là $k = x.y$; sau khi tính được k ta thay vào biểu thức $y = \frac{k}{x}$ hoặc $x = \frac{k}{y}$ để được mối quan hệ giữa x và y .

- Sau khi biểu diễn mối quan hệ giữa y và x , ta dựa vào đó để tính y khi biết x và ngược lại. Việc làm này cũng giúp học sinh điền được các số liệu vào bảng chưa đầy đủ. (xem bài tập 3)

Ví dụ 1: Cho x, y TLT và $x=2, y=6$

- Tìm hệ số tỉ lệ thuận của y với x
- Biểu diễn y theo x
- Tính x khi $y = 18$, tính y khi $x=5$

Giải:

a) Hệ số tỉ lệ thuận của y với x là $k = \frac{y}{x} = \frac{6}{2} = 3$

b) Vì $k=3$ nên $y=3x$

c) Với $y=18$ suy ra $3.x=18, x=6$

Với $x=5$ suy ra $y=3.5=15$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho biết 2 đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau và khi $x = 5$ và $y = 20$

a, Tìm hệ số tỉ lệ k của y đối với x .

b, Hãy biểu diễn y theo x .

c, Tính giá trị của y khi $x = -5; x = 10$

Bài 2: Cho hai đại lượng x và y tỉ lệ nghịch với nhau và khi $x = 2$ thì $y = 4$.

a) Tìm hệ số tỉ lệ a ;

b) Hãy biểu diễn x theo y ;

c) Tính giá trị của x khi $y = -1 ; y = 2$.

Bài 3: Cho biết x và y là hai đại lượng tỷ lệ thuận và khi $x = 5, y = 20$.

a) Tìm hệ số tỷ lệ k của y đối với x và hãy biểu diễn y theo x

b) Tính giá trị của x khi $y = -1000$.

Dạng 2 : Cho x và y TLT hoặc TLN, hoàn thành bảng số liệu.

Phương pháp:

- Tính k và biểu diễn x theo y (hoặc y theo x)

- Thay các giá trị tương ứng để hoàn thành bảng

Bài 1:

a. Cho x, y tỉ lệ thuận. Em hãy hoàn thành bảng sau

X	2	-1	7			10
Y	6			4	8	

b. Cho x, y tỉ lệ nghịch. Em hãy hoàn thành bảng sau

X	2	-1	7			10
Y	6			4	8	

Bài 2:

a) Cho biết x và y là hai đại lượng tỷ lệ thuận. Hãy hoàn thành bảng sau:

x	2	5			-1,5
y	6		12	-8	

b) Cho biết x và y là hai đại lượng tỷ lệ nghịch. Hãy hoàn thành bảng sau:

X	3	9			-1,5
Y	6		1,8	-0,6	

Dạng 3 : Nhận biết hai đại lượng có TLT hay TLN.

Phương pháp:

- Dựa vào bảng giá trị để nhận biết 2 đại lượng có tỉ lệ thuận với nhau không ta tính các tỉ số $\frac{x}{y}$ nếu cho cùng một kết của thì x, y tỉ lệ thuận và ngược lại. (xem bài tập 4)

- Dựa vào bảng giá trị để nhận biết 2 đại lượng có tỉ lệ nghịch với nhau không ta tính các tỉ số $x.y$ nếu cho cùng một kết của thì x, y tỉ lệ nghịch và ngược lại

Bài 1: x và y có là hai đại lượng TLT không biết:

x	2	-1	5	3	11	7
y	4	-2	10	6	22	14

x	2	-1	5	3	11	7
y	4	2	10	6	22	14

Bài 2: x và y có là hai đại lượng TLN không biết:

X	2	-1	5	10	8	40
Y	20	-40	8	4	5	1

X	6	-1	5	3	12	1
Y	4	-24	10	8	2	24

Dạng 4: Cho x TLT(TLN) với y , y TLT(TLN) với z . Hỏi mối quan hệ của x và z và tính hệ số tỉ lệ

Phương pháp:

- Dựa vào đề bài biểu diễn x theo y , y theo z rồi thay y vào biểu thức trên để tìm mối quan hệ $x-z$, sau đó kết luận.

Bài 1: Cho x tỉ lệ thuận với y theo tỉ số $k=4$, y tỉ lệ thuận với z theo tỉ số $k=3$. Hỏi x tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch với z và tỉ số bằng bao nhiêu?

Bài 2: cho x TLN với y theo $k=2$, y TLN với z theo $k=6$. Hỏi x và z TLT hay TLN $k=?$

Bài 3. Cho x TLT với y theo $k=10$, y TLN với z theo $k=2$. Hỏi x và z TLT hay TLN $k=?$

Dạng 5: Các bài toán đố:

Phương pháp:

- Với những bài toán có hai đại lượng ta có thể lập tỉ số luôn. Nếu 2 đại lượng tỉ lệ thuận thì

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \text{ nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch thì } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}.$$

- Với các bài toán chia số phần, ta gọi các giá trị cần tìm là x, y, z rồi đưa về dãy tỉ số bằng nhau để giải, chú ý:

Nếu các ẩn số x, y, z tỉ lệ thuận với a, b, c thì $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Nếu các ẩn số x, y, z tỉ lệ nghịch với a, b, c thì $a.x = b.y = c.z$.

Ví dụ: Cứ 4kg dây điện dài 15m. Hỏi 3m dây điện nặng bao nhiêu kg.

Cách 1: Gọi khối lượng dây điện là x và chiều dài dây điện là y thì x và y là hai đại lượng TLT với HSTL của x với y là $\frac{x}{y} = \frac{4}{15}$. Suy ra $x = \frac{4}{15}y$. Với $y = 3m$ suy ra x .

Cách 2: Gọi khối lượng tương ứng với 3m dây điện là x .

Ta có sơ đồ:

4kg dây----->15m

X=?<-----3m

Vì khối lượng và chiều dài là hai đại lượng TLT nên $\frac{x}{3} = \frac{4}{15}$, suy ra x

BÀI TẬP

Bài 1:

- Tìm hai số $x; y$ biết $x; y$ tỉ lệ thuận với 3; 4 và $x + y = 14$.
- Tìm hai số $a; b$ biết $a; b$ tỉ lệ thuận với 7; 9 và $3a - 2b = 30$.
- Tìm ba số $x; y; z$ biết $x; y; z$ tỉ lệ thuận với 3; 4; 5 và $x - y + z = 20$.
- Tìm ba số $a; b; c$ biết $a; b; c$ tỉ lệ thuận với 4; 7; 10 và $2a + 3b + 4c = 69$.

Bài 2:

- Chia số 99 thành ba phần tỉ lệ thuận với 2; 3; 4.
- Chia số 494 thành bốn phần tỉ lệ thuận với 7; 11; 13; 25.

Bài 3:

- Chia 180 thành ba phần tỉ lệ nghịch với 6; 10; 15.
- Cho tam giác có ba cạnh tỉ lệ thuận với 5; 13; 12 và chu vi là 156 mét. Tìm độ dài ba cạnh của tam giác đó.
- Tìm độ dài ba cạnh của một tam giác biết chu vi của nó bằng 52 cm và ba cạnh tỉ lệ nghịch với 8; 9; 12.

Bài 4:

- Cho tam giác ABC có số đo ba góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ tỉ lệ thuận với 3; 11; 16. Tìm số đo các góc của tam giác ABC.
- Cho tam giác ABC có số đo ba góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ tỉ lệ nghịch với 15; 16; 48. Tìm số đo các góc của tam giác ABC.

Bài 5:

- Ba đơn vị góp vốn kinh doanh theo tỉ lệ 3; 5; 7. Hỏi mỗi đơn vị góp bao nhiêu tiền, biết tổng số vốn góp được là 12 tỉ đồng?
- Ba nhà sản xuất góp vốn theo tỉ lệ 7; 8; 9. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu tiền lãi, biết rằng tổng số tiền lãi là 720 triệu đồng và chia theo tỉ lệ góp vốn?
- Tìm ba số a; b; c biết rằng $a + b + c = 100$; a và b tỉ lệ nghịch với 3 và 2; b và c tỉ lệ thuận với 4 và 3.
- Tìm ba số a; b; c biết rằng $2a + 3b - 4c = 100$; a và b tỉ lệ nghịch với 3 và 2; b và c tỉ lệ nghịch với 3 và 2.

Bài 6:

- Cho hình chữ nhật có diện tích là $33,75 \text{ cm}^2$. Biết chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó tỉ lệ với 5 và 3. Tính chu vi hình chữ nhật.
- Cho biết 12 công nhân xây một căn nhà trong 96 ngày thì xong. Hỏi nếu có 18 công nhân thì xây căn nhà đó hết bao nhiêu ngày? (Biết rằng năng suất làm việc của các công nhân là như nhau).
- Tính số học sinh lớp 7A và 7B biết lớp 7A nhiều hơn lớp 7B là 7 học sinh và tỉ số học sinh của lớp 7A và 7B là 7:6.
- Số học sinh khối 6; 7; 8; 9 tỉ lệ nghịch với 6; 8; 9; 12. Tính số học sinh mỗi khối biết tổng số học sinh bốn khối là 700.

Bài 7:

- Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 50 km/h thì mất 6 giờ. Hỏi nếu ô tô đó chạy từ A đến B với vận tốc 30 km/h thì mất bao nhiêu thời gian?
- Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 72 km/h thì mất 5 giờ. Hỏi nếu ô tô đó chạy từ A đến B với vận tốc 60 km/h thì mất bao nhiêu thời gian?
- Một đội công nhân làm đường lúc đầu dự định làm xong một con đường trong 30 ngày. Nhưng sau đó đội bị giảm đi 10 công nhân nên đã hoàn thành con đường trong 40 ngày. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu công nhân? (biết rằng năng suất mỗi công nhân là như nhau).
- Một đội công nhân xây dựng lúc đầu dự định xây xong một căn nhà trong 20 ngày. Nhưng sau đó đội bị giảm đi 20 người nên đã hoàn thành trễ hơn dự định 10 ngày. Hỏi lúc đầu đội có bao nhiêu công nhân? (biết rằng năng suất mỗi công nhân là như nhau).

Bài 8:

- Biết 5 lít nước biển chứa 160g muối, Hỏi muốn có 16 tấn muối cần bao nhiêu m^3 nước biển?
- Cho biết 5 lít nước biển chứa 175g muối, hỏi 3m^3 nước biển chứa bao nhiêu kg muối?
- Hai thanh đồng có thể tích 13 cm^3 và 17 cm^3 . Hỏi mỗi thanh đồng nặng bao nhiêu gam? Biết khối lượng cả hai thanh là 192g.

- d) Học sinh của ba lớp 7 cần trồng và chăm sóc 24 cây xanh. Lớp 7A có 32 học sinh, lớp 7B có 28 học sinh, lớp 7C có 36 học sinh. Hỏi mỗi lớp phải trồng và chăm sóc bao nhiêu cây xanh? Biết số cây xanh mỗi lớp trồng tỉ lệ với số học sinh lớp đó.

Bài 9:

Cuối học kó I, tổng số học sinh khối 7 đạt loại giỏi và khá nhiều hơn số học sinh đạt trung bình là 45 em. Biết rằng số học sinh đạt loại giỏi, khá, trung bình tỉ lệ với 2; 5; 6.

- Tính số học sinh giỏi, khá, trung bình của khối 7.
- Tính số học sinh toàn bộ khối 7, biết rằng trong khối 7 có 15 học sinh xếp loại yếu và không có học sinh kém.
- Tính xem tỉ lệ phần trăm từng loại học sinh giỏi, khá, trung bình, yếu so với toàn bộ học sinh khối 7.

Bài 10:

Cho tam giác có số đo ba góc tỉ lệ với 2; 3; 4. Một học sinh nhận xét: “Tam giác trên là tam giác nhọn”. Theo em nhận xét đó đúng hay sai? Vì sao?

CHUYÊN ĐỀ VII: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

+ Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số (gọi tắt là biến).

+ Nếu x thay đổi mà y không thay đổi thì y được gọi là hàm số hằng (hàm hằng).

+ Với mọi $x_1; x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm đồng biến.

+ Với mọi $x_1; x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm nghịch biến.

+ Hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) được gọi là đồng biến trên \mathbb{R} nếu $a > 0$ và nghịch biến trên \mathbb{R} nếu $a < 0$.

+ Tập hợp tất cả các điểm (x, y) thỏa mãn hệ thức $y = f(x)$ thì được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

+ Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $(1; a)$.

DẠNG 1: Xác định xem đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không:

Phương pháp:

Kiểm tra điều kiện: Mỗi giá trị của x được tương ứng với 1 và chỉ một giá trị của y

BÀI TẬP:

Kiểm tra y có phải là hàm số của đại lượng x trong các bảng sau không:

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	6	4	2	0	0	8

X	2	4	6	7	8	9
Y	1	4	5	7	9	8
X	-2	-1	0	1	2	3
Y	6	4	2	0	0	

X	-2	-1	0	1		
Y	6	4	2	0	0	8

Dạng 2: Tính giá trị của hàm số tại giá trị của một biến cho trước:

Phương pháp:

- Nếu hàm số cho bằng bảng thì cặp giá trị tương ứng của x và y nằm cùng một cột.
- Nếu hàm số cho bằng công thức ta thay giá trị của biến đã cho vào công thức để tính giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Ví dụ: Cho $y=f(x)=3x+2$ Tính $f(2)$; $f(-1)$

Giải: Ta có $f(2)=3.2+1=7$; $f(-1)=3.(-1)+1=-2$

Dạng 3: Tìm tọa độ một điểm và vẽ một điểm đã biết tọa độ, tìm các điểm trên một đồ thị hàm số, Biểu diễn các điểm lên hình và tính diện tích.

Phương pháp:

- Muốn tìm tọa độ một điểm ta vẽ 2 đường thẳng vuông góc với hai trục tọa độ.
- Để tìm một điểm trên một đồ thị hàm số ta cho bất kì 1 giá trị của x rồi tính giá trị y tương ứng.
- Có thể tính diện tích trực tiếp hoặc tính gián tiếp qua hình chữ nhật.
- Chú ý: Một điểm thuộc Ox thì tung độ bằng 0, thuộc trục Oy thì hoành độ bằng 0.

Ví dụ: Cho $A(4;0)$; $B(0;2)$; $C(2;4)$ Biểu diễn A,B,C trên Oxy và tính diện tích tam giác ABC.

Giải: Ta có $S_{ABC} =$

Dạng 4: Tìm hệ số a của đồ thị hàm số $y=a.x+b$ khi biết một điểm đi qua. Qua hai điểm, cắt hai trục....

Phương pháp:

Ta thay tọa độ điểm đi qua vào đồ thị để tìm a .

Ví dụ: cho $y=a.x$ Tìm a biết đồ thị hàm số đi qua $A(1;3)$

Giải: Thay $x=1$; $y=3$ vào đồ thị ta được $3=a.1 \Rightarrow a=3$. Vậy $y=3x$.

Ví dụ: Tìm a và b biết đồ thị $y=a.x+b$ đi qua $A(1,3)$ và $B(2;5)$

Giải: Vì $A(1;3)$ và $B(2;5)$ thuộc đồ thị nên thay tọa độ của A và B vào đồ thị ta được:

$$\begin{cases} 3 = a.1 + b \\ 5 = 2.a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2.a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} . \text{ Vậy } y=2x+1$$

Dạng 5: Kiểm tra một điểm có thuộc đồ thị hàm số hay không

Phương pháp:

Thay giá trị của x và y vào đồ thị hàm số, nếu được đẳng thức đúng thì điểm đó thuộc đồ thị hàm số và ngược lại.

Ví dụ: cho $y=2x+1$ các điểm sau có thuộc đồ thị hàm số không: $A(1;3)$; $B(3;2)$

Giải: Thay tọa độ điểm $A(1;3)$ vào đồ thị ta được: $3=2.1+1$ (luôn đúng). Vậy điểm $A(1;3)$ thuộc đồ thị.

Thay tọa độ điểm $B(3;2)$ vào đồ thị ta được: $2=2.3+1$ (vô lí). Vậy $B(3;2)$ không thuộc đồ thị.

Dạng 6: Cách lấy 1 điểm thuộc đồ thị và vẽ đồ thị hàm số $y=ax$, $y=ax+b$, đồ thị hàm trị tuyệt đối

Phương pháp:

- Để lấy 1 điểm thuộc đồ thị ta cho 1 giá trị bất kì của x rồi tính y hoặc ngược lại.

- Để vẽ đồ thị Ta lấy 2 điểm mà đồ thị hàm số đi qua(Bằng cách cho bất kì giá trị của x để tìm y) rồi nối 2 điểm đó sẽ là đồ thị hàm số.

- Với đồ thị hàm số $y=ax$, ta chỉ lấy 1 điểm rồi nối với gốc tọa độ.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y=a$ là đường thẳng song song Ox cắt Oy tại a . Đồ thị hàm số $x=b$ là đường thẳng song song Oy cắt Ox tại b .

Dạng 7: Tìm giao điểm của 2 đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$, Chứng minh và tìm điều kiện để 3 đường thẳng đồng quy

Phương pháp:

Cho $f(x)=g(x)$ để tìm x rồi suy ra y và giao điểm

Ví dụ: Tìm giao điểm của $y=2x$ với $y=3x+2$

Giải: Xét hoành độ giao điểm thỏa mãn: $2x=3x+2$ suy ra $x=-2 \Rightarrow y=-4$. Vậy 2 đồ thị giao nhau tại $A(-2;-4)$.

Dạng 8: chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

Phương pháp:

Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta lập tỉ số x/y và suy ra 3 điểm đó cùng thuộc một đồ thị hoặc viết đồ thị đi qua một điểm rồi thay tọa độ 2 điểm còn lại vào. Ngược lại một trong các tỉ số x/y không bằng nhau thì 3 điểm không thẳng hàng.

Ví dụ: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng: $A(1;2)$; $B(2;4)$; $C(3;6)$

Giải: Ta có: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ nên 3 điểm A,B,C thẳng hàng (cùng nằm trên đồ thị hàm số $y=2x$)

Ví dụ: Cho $A(1;2)$; $B(2;4)$; $C(2a; a+1)$. Tìm a để A,B,C thẳng hàng.

Giải:

Cách 1: A,B,C thẳng hàng khi: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2a}{a+1}$ suy ra $\frac{1}{2} = \frac{2a}{a+1} \Rightarrow a+1=2.2a$ hay $a = \frac{1}{3}$

Cách 2: Ta có: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ nên A và B nằm trên đường thẳng $y=2x$. Để A,B,C thẳng hàng thì $C(2a;a+1)$

$\in y = 2x$ suy ra $a+1=2.2a$ hay $a = \frac{1}{3}$

Dạng 9: cho bảng số liệu, hỏi hàm số xác định bởi công thức nào, hàm số là đồng biến hay nghịch biến.

Phương pháp:

Ta dùng bài toán TLT, TLN để tính k rồi biểu diễn y theo x . Để xem hàm số đồng biến hay nghịch biến ta dựa vào hệ số a hoặc chứng minh nếu $x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$

Ví dụ: Cho bảng số liệu sau, xác định hàm số y theo x và cho biết hàm số đồng biến hay nghịch biến:

x	1	2	4	6
y	3	6	12	18

Giải: Ta có: $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{6}{18}$ nên $y=3x$. Vì $a>0$ nên hàm số đồng biến

Dạng 10: Tìm điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau. Song song, trùng nhau, vuông góc.

Hai đường thẳng $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$

Cắt nhau: $a_1 \neq a_2$

Song song: $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

Trùng nhau: $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

Ví dụ: Cho $y=(a+1)x - 2$ và $y=2x$. Tìm a để hai đường thẳng cắt nhau, song song, trùng nhau.

Giải:

- Hai đường thẳng cắt nhau khi: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow a+1 \neq 2$, hay $a \neq 1$.
- Hai đường thẳng song song khi: $a_1 = a_2$ (vì $b_1 \neq b_2$) $\Rightarrow a+1 = 2$, hay $a=1$.
- Vì $b_1 \neq b_2$ nên hai đường thẳng không trùng nhau.

BÀI TẬP:

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 9$

a. Tính $f(-2)$; $f(-\frac{1}{2})$

b. Tìm x để $f(x) = -1$

c. Chứng tỏ rằng với $x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = f(-x)$

Bài 2: Viết công thức của hàm số $y = f(x)$ biết rằng y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỷ lệ $\frac{1}{4}$

a. Tìm x để $f(x) = -5$

b. Chứng tỏ rằng nếu $x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$

Bài 3: Viết công thức của hàm số $y = f(x)$ biết rằng y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số $a = 12$.

a. Tìm x để $f(x) = 4$; $f(x) = 0$

b. Chứng tỏ rằng $f(-x) = -f(x)$

Bài 4: Cho hàm số $y = f(x) = kx$ (k là hằng số, $k \neq 0$). Chứng minh rằng:

a/ $f(10x) = 10f(x)$

b/ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

c/ $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$

Bài 5 : Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A(4; 2)$

a. Xác định hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số đó.

b. Cho $B(-2, -1)$; $C(5; 3)$. Không cần biểu diễn B và C trên mặt phẳng tọa độ, hãy cho biết ba điểm A, B, C có thẳng hàng không?

Bài 6 : Cho các hàm số $y = f(x) = 2x$ và $y = g(x) = \frac{18}{x}$. Không vẽ đồ thị của chúng em hãy tính tọa độ giao điểm của hai đồ thị.

Bài 7. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{3}x$

a. Vẽ đồ thị của hàm số.

b. Trong các điểm $M(-3; 1)$; $N(6; 2)$; $P(9; -3)$ điểm nào thuộc đồ thị (không vẽ các điểm đó)

Bài 8 :: Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{3}(2x + |x|)$

Bài 9 : Hàm số $f(x)$ được cho bởi bảng sau:

x	-4	-3	-2
Y	8	6	4

a) Tính $f(-4)$ và $f(-2)$

b) Hàm số f được cho bởi công thức nào?

Bài 10 : Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 5x - 3$. Tính $f(1)$; $f(0)$; $f(1,5)$.

Bài 11: Cho đồ thị hàm số $y = 2x$ có đồ thị là (d).

- a) Hãy vẽ (d).
- b) Các điểm nào sau đây thuộc (d): $M(-2;1)$; $N(2;4)$; $P(-3,5; 7)$; $Q(1; 3)$?

Bài 12: Cho hàm số $y = x$.

- a) Vẽ đồ thị (d) của hàm số .
- b) Gọi M là điểm có tọa độ là (3;3). Điểm M có thuộc (d) không? Vì sao?
- c) Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với (d) cắt Ox tại A và Oy tại B. Tam giác OAB là tam giác gì? Vì sao?

Bài 13: Xét hàm số $y = ax$ được cho bởi bảng sau:

x	1	5	-2
Y	3	15	-6

- a) Viết rõ công thức của hàm số đã cho.
- b) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến? Vì sao?

CHUYÊN ĐỀ VIII: THỐNG KÊ

Dạng 1: Khai thác thông tin từ bảng thống kê: Ta cần xem xét

- Dấu hiệu của bảng thống kê: Là nội dung thống kê(được ghi bên trên bảng thống kê)
- Số các giá trị của dấu hiệu: Bằng số hàng x số cột.
- Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu: Là các giá trị khác nhau trong bảng thống kê.
- Tần số của các giá trị khác nhau

Dạng 2: Lập bảng tần số và rút ra nhận xét

- Vẽ khung HCN hai dòng hoặc hai cột (bảng dọc hoặc ngang)
- Dòng trên ghi các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo chiều tăng dần
- Dòng dưới ghi tần số tương ứng của chúng. Bên dưới ghi thêm giá trị N

Bảng ngang:

Giá trị x					
Tần số					N=

Bảng dọc:

Giá trị x	Tần số n
	N=

+ Nhận xét:

- Số các giá trị của dấu hiệu: (số hàng x số cột)
- Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu
- Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất.
- Các giá trị thuộc khoảng nào là chủ yếu

Ví dụ: Cho điểm kiểm tra lớp 7A:

5	8	5	9	10	6	10	7	5	8
5	7	6	7	10	6	9	5	6	9
6	5	5	6	7	5	8	7	8	5
8	6	8	9	10	6	9	10	10	6
5	7	5	8	8	9	5	6	7	8

- a. Nêu dấu hiệu thống kê?
- b. Lập bảng tần số và rút ra NX

Giải:

- a. Dấu hiệu thống kê: Là điểm kiểm tra lớp 7A
- b. Bảng tần số:

Giá trị x	Tần số n
5	12
6	10
7	7
8	9
9	6
10	6
	N=50

Nhận xét:

- Số các giá trị của dấu hiệu: 50 giá trị.
- Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu: 6 giá trị.
- Giá trị lớn nhất là 10, giá trị nhỏ nhất là 5, giá trị có tần số lớn nhất là 6.
- Các giá trị chủ yếu thuộc từ 5 đến 6.

Dạng 3: Dựng biểu đồ đoạn thẳng hoặc biểu đồ HCN

- Lập bảng tần số
- Dựng hệ trục Oxy, trục Ox là các giá trị x, Trục Oy là tần số .
- Vẽ các điểm ứng với giá trị và tần số trong bảng ta được biểu đồ đoạn thẳng.
- Nếu thay các đoạn thẳng bằng HCN ta được biểu đồ HCN. (Chú ý tỉ lệ)

Dạng 4: Vẽ biểu đồ hình quạt

- Lập bảng tần số và tần suất f (Với $f=n/N$) và tính góc ở tâm $\alpha=360^0.f$ rồi vẽ hình tròn chia thành các hình quạt với góc ở tâm tương ứng với tần suất

Giá trị x					
Tần số n					
Tần suất f f=n/N (%)					
Góc ở tâm $\alpha=360^0.f$					

Dạng 5: Tính Số trung bình cộng , Tìm Mốt của dấu hiệu.

- Số trung bình cộng

$$\bar{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + \dots + x_kn_k}{N}$$

- Tìm Mốt: M_0 là giá trị x có tần số lớn nhất, có thể có vài giá trị M_0 .

- Nên kẻ bảng tần số kết hợp với tính số trung bình cộng và Mốt:

Giá trị x	Tần số n	x.n	\bar{X}	M_0
x_1	n_1	$x_1.n_1$	$\bar{X} = \frac{\text{Tổng}}{N}$	$M_0 =$
.....	---			
x_n	n_n	$x_n.n_n$		
	N=	Tổng:		

Chú ý: với những bài toán cột giá trị của x thuộc một khoảng, ta kẻ thêm cột tính giá trị trung bình bằng=(số đầu + số cuối):2 (cột này đóng vai trò như cột giá trị x thông thường) rồi thực hiện phép tính như bình thường.

Ví dụ: cho bảng tần số sau:

Giá trị x	Tần số n
5	12
6	10
7	7
8	9
9	6
10	6
	N=50

Tính giá trị trung bình và Mốt?

Giải: Bảng tính giá trị trung bình và Mốt:

Giá trị x	Tần số n	x.n	\bar{X}	M_0
5	12	60	$\bar{X} = \frac{333}{50} = 7,1$	$M_0 = 5$
6	10	60		

7	7	49		
8	9	72		
9	6	54		
10	6	60		
	N=50	Tổng: 355		

Ví dụ: Khối lượng mỗi học sinh lớp 7C được ghi ở bảng sau (đơn vị là kg). Tính số trung bình cộng.

Khối lượng (x)	Tần số (n)
Trên 24 – 28	2
Trên 28 – 32	8
Trên 32 – 36	12
Trên 36 – 40	9
Trên 40 – 44	5
Trên 44 – 48	3
Trên 48 – 52	1

Giải:

Khối lượng (x)	Khối lượng TB	Tần số (n)	x.n	\bar{x}
Trên 24 – 28	26	2	52	$\frac{1440}{40} = 36$
Trên 28 – 32	30	8	240	
Trên 32 – 36	34	12	408	
Trên 36 – 40	38	9	342	
Trên 40 – 44	42	5	210	
Trên 44 – 48	46	3	138	
Trên 48 – 52	50	1	50	

BÀI TẬP:

Bài 1: Một bạn học sinh đã ghi lại một số việc tốt (đơn vị: lần) mà mình đạt được trong mỗi ngày học, sau đây là số liệu của 10 ngày.

Ngày thứ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số việc tốt	2	1	3	3	4	5	2	3	3	1

- a) Dấu hiệu mà bạn học sinh quan tâm là gì ?
- b) Hãy cho biết dấu hiệu đó có bao nhiêu giá trị ?
- c) Có bao nhiêu số các giá trị khác nhau ? Đó là những giá trị nào ?
- d) Hãy lập bảng “tần số”.

Bài 2: Năm học vừa qua, bạn Minh ghi lại số lần đạt điểm tốt (từ 8 trở lên) trong từng tháng của mình như sau:

Tháng	9	10	11	12	1	2	3	4	5
Số lần đạt điểm tốt	4	5	7	5	2	1	6	4	5

- a) Dấu hiệu mà bạn Minh quan tâm là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?
- b) Lập bảng “tần số” và rút ra một số nhận xét.
- c) Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

Bài 3: Một cửa hàng bán Vật liệu xây dựng thống kê số bao xi măng bán được hàng ngày (trong 30 ngày) được ghi lại ở bảng sau.

20	40	30	15	20	35
35	25	20	30	28	40
15	20	35	25	30	25
20	30	28	25	35	40
25	35	30	28	20	30

- a) Dấu hiệu mà cửa hàng quan tâm là gì ? Số các giá trị là bao nhiêu ?
- b) Lập bảng “tần số”.
- c) Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng, rồi từ đó rút ra một số nhận xét.
- d) Hỏi trung bình mỗi ngày cửa hàng bán được bao nhiêu bao xi măng ? Tìm một của dấu hiệu.

Bài 4: Điểm kiểm tra Toán (1 tiết) của học sinh lớp 7B được lớp trưởng ghi lại ở bảng sau:

Điểm số (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	2	6	13	8	10	2	3	N = 45

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Có bao nhiêu học sinh làm bài kiểm tra ?
- b) Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng và rút ra một số nhận xét.
- c) Tính điểm trung bình đạt được của học sinh lớp 7B. Tìm một của dấu hiệu.
- d) Nếu mỗi giá trị dấu hiệu tăng 10 lần thì trung bình cộng thay đổi thế nào?

Bài 5: Điểm trung bình môn Toán cả năm của các học sinh lớp 7A được cô giáo chủ nhiệm ghi lại như sau:

6,5	8,1	5,5	8,6	5,8	5,8	7,3	8,1	5,8	8,0
7,3	5,8	6,5	6,7	5,5	8,6	6,5	6,5	7,3	7,9
5,5	7,3	7,3	9,0	6,5	6,7	8,6	6,7	6,5	7,3
4,9	6,5	9,5	8,1	7,3	6,7	8,1	7,3	9,0	5,5

- a) Dấu hiệu mà cô giáo chủ nhiệm quan tâm là gì ? Có bao nhiêu bạn trong lớp 7A ?
- b) Lập bảng “tần số”. Có bao nhiêu bạn đạt loại khá và bao nhiêu bạn đạt loại giỏi ?
- c) Tính điểm trung bình môn Toán cả năm của học sinh lớp 7A . Tìm một của dấu hiệu.
- d) Nếu mỗi giá trị dấu hiệu giảm 20 lần thì trung bình cộng thay đổi như thế nào?

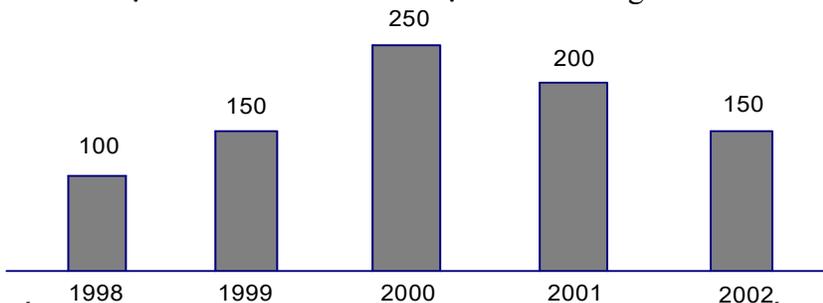
Bài 6: Một trại chăn nuôi đã thống kê số trứng gà thu được hàng ngày của 100 con gà trong 20 ngày được ghi lại ở bảng sau :

Số lượng (x)	70	75	80	86	88	90	95	
--------------	----	----	----	----	----	----	----	--

Tần số (n)	1	1	2	4	6	5	1	N = 20
------------	---	---	---	---	---	---	---	--------

- a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Có bao nhiêu giá trị khác nhau, đó là những giá trị nào ?
- b) Hãy vẽ biểu đồ hình quạt và rút ra một số nhận xét.
- c) Hỏi trung bình mỗi ngày trại thu được bao nhiêu trứng gà ? Tìm một của dấu hiệu.

Bài 7: Biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn số trẻ em được sinh ra trong các năm từ 1998 đến 2002 ở một huyện.



- a) Hãy cho biết năm 2002 có bao nhiêu trẻ em được sinh ra ? Năm nào số trẻ em sinh ra được nhiều nhất ? Ít nhất ?
- b) Sao bao nhiêu năm thì số trẻ em được tăng thêm 150 em ?
- c) Trong 5 năm đó, trung bình số trẻ em được sinh ra là bao nhiêu ?

Bài 8: Có 10 đội bóng tham gia một giải bóng đá. Mỗi đội phải đá lượt đi và lượt về với từng đội khác.

- a) Mỗi đội phải đá bao nhiêu trận trong suốt giải ?
- b) Số bàn thắng qua các trận đấu của một đội trong suốt mùa giải được ghi lại dưới đây :

Số bàn thắng (x)	1	2	3	4	5	
Tần số (n)	6	5	3	1	1	N = 16

Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng.

- c) Có bao nhiêu trận đội bóng đó không ghi được bàn thắng ? Có thể nói đội bóng này đã thắng 16 trận không ?

Bài 9: Có 10 đội bóng tham gia một giải bóng đá. Mỗi đội phải đá lượt đi và lượt về với từng đội khác.

- a) Có tất cả bao nhiêu trận trong toàn giải ?
- b) Số bàn thắng trong các trận đấu của toàn giải được ghi lại ở bảng sau :

Số bàn thắng (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	
Tần số (n)	12	16	20	12	8	6	4	2	N = 80

Hãy vẽ biểu đồ đoạn thẳng và nhận xét.

- c) Có bao nhiêu trận không có bàn thắng ?
- d) Tính số bàn thắng trung bình trong một trận của cả giải .
- e) Tìm một của dấu hiệu.

Bài 10: Khối lượng mỗi học sinh lớp 7C được ghi ở bảng sau (đơn vị là kg). Tính số trung bình cộng.

Khối lượng (x)	Tần số (n)
Trên 24 – 28	2
Trên 28 – 32	8
Trên 32 – 36	12
Trên 36 – 40	9
Trên 40 – 44	5
Trên 44 – 48	3
Trên 48 – 52	1

Bài 11: Diện tích nhà ở của các hộ gia đình trong một khu dân cư được thống kê trong bảng sau (đơn vị : m^2). Tính số trung bình cộng.

Diện tích (x)	Tần số (n)
Trên 25 – 30	6
Trên 30 – 35	8
Trên 35 – 40	11
Trên 40 – 45	20
Trên 45 – 50	15
Trên 50 – 55	12
Trên 55 – 60	12
Trên 60 – 65	10
Trên 65 – 70	6

Bài 12: Số học sinh nữa của 1 trường được ghi lại như sau:

20	20	21	20	19
20	20	23	21	20
23	22	19	22	22
21	A	b	c	23

- Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, tìm tần số của từng giá trị đó, cho biết a,b,c là ba số tự nhiên chẵn liên tiếp tăng dần và $a + b + c = 66$.
- Hãy nêu các giá trị khác nhau của dấu hiệu, lập bảng tần số ,tính trung bình cộng và vẽ biểu đồ đoạn thẳng, cho biết a,b,c là ba số tự nhiên lẻ liên tiếp tăng dần và $a + b + c = 63$.

Bài 13: Trong một kỳ thi học sinh giỏi lớp 7, điểm số được ghi như sau: (thang điểm 100)

17	40	33	97	73	89	45	44	43	73
58	60	10	99	56	96	45	56	10	60
39	89	56	68	55	88	75	59	37	10
43	96	25	56	31	49	88	23	39	34
38	66	96	10	37	49	56	56	56	55

a/ Hãy cho biết điểm cao nhất, điểm thấp nhất.

b/ Số học sinh đạt từ 80 trở lên.

c/ Số học sinh khoảng 65 đến 80 điểm

d/ Các học sinh đạt từ 88 điểm trở lên được chọn vào đội tuyển học sinh giỏi. Có bao nhiêu bạn được cấp học bổng trong đợt này.

e/ Lập bảng tần số.

f/ Tính điểm trung bình.

g/ Tìm Mốt.

Bài 14:

a. Hãy hoàn thành bảng số liệu sau.

Giá trị x	Tần số n	x.n
5	7	35
7	*	*
8	*	*
9	6	54
	N=22	Tổng: 157

b. Hoàn thành bảng số liệu:

Giá trị x	Tần số n	x.n
6	7	42
7	*	*
10	*	*
12	6	72
	N=22	Tổng: 195

Bài 15 :

a. Trung bình cộng của sáu số là 7. Nếu bỏ một số thì trung bình cộng của năm số còn lại là 3. Tìm số đã bỏ.

b. Cho bảng tần số sau:

Giá trị (x)	Tần số (n)	
5	2	$\bar{X} = 6,8$
6	5	
9	N	
10	1	

Tìm giá trị n.

c. Trung bình cộng của 4 số là 10. Nếu bỏ một số thì trung bình cộng của ba số còn lại là 12. Tìm số đã bỏ.

d. Tuổi trung bình 11 cầu thủ là 20 tuổi, nếu bỏ thủ môn thì tuổi trung bình là 19,7 tuổi. Tính tuổi thủ môn?

e. Cho bảng tần số sau:

f.

Giá trị (x)	Tần số (n)	$\bar{X} = 7,75$
4	4	
7	5	
10	4	
11	N	

Tìm giá trị n.

Bài 16: Cho bảng thống kê:

50	23	56	x	34	98
60	x	66	70	44	78
100	44	78	y	y	66
80	40	98	60	70	55

Hoàn thành bảng số liệu trên biết y lớn hơn x là 10 và tổng của x và y là 80.

Bài 17: Cho số lượng nữ học sinh từng lớp trong trường THCS như sau:

20	23	y	24	21
x	25	x	25	24
27	19	23	20	23

Tìm x và y biết giá trị 25 có tần số là 3 và $x+y=48$

Bài 18: Trong kì thi Toán của một lớp có 3 tổ A,B,C. Điểm trung bình các tổ thống kê như sau:

Tổ	A	B	C	A và B	B và C
Điểm TB	9	8,8	7,8	8,9	8,2

Biết tổ A có 10 học sinh. Tính số học sinh từng tổ và điểm trung bình cả lớp.

HD: Điểm trung bình của 2 tổ tính theo CT: $\frac{Ax+By}{x+y}$ với x, y là số học sinh, A và B là điểm TB

Bài 19: Cho bảng tần số:

Giá trị x	110	115	120	125	2012	
Tần số n	5	2	4	3	2	N=16

- Lập bảng thống kê ban đầu?
- Có thể dùng số trung bình cộng để đại diện cho dấu hiệu được không? Vì sao?

Bài 20: Một bảng thống kê cho biết tỉ lệ nữ và nam là 11:10. Tuổi trung bình của nữ là 34, của nam là 32. Tính tuổi trung bình của những người được thống kê?

CHUYÊN ĐỀ IX: BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Dạng 1: Đọc và viết biểu thức đại số theo yêu cầu bài toán:

Phương pháp: Ta đọc phép toán trước (nhân chia đọc trước, cộng trừ sau), đọc các thừa số sau.

Chú ý: x^2 : Đọc là bình phương của x, x^3 : Lập phương của x

Ví dụ: $x-4$: Hiệu của x và 4; $3.(x+5)$: Tích của 3 với tổng của x và 5.

BÀI TẬP:

Bài 1: Viết biểu thức đại số:

- Tổng các lập phương của a và b
- Bình phương của tổng 3 số a,b,c
- Tích của tổng hai số x và 4 với hiệu hai số x và 4
- Viết biểu thức tính diện tích hình thang có hai đáy a,b chiều cao h
- Viết biểu thức biểu diễn tổng các bình phương 2 số lẻ liên tiếp.
- Viết biểu thức biểu diễn tích 4 số nguyên liên tiếp.
- Tích hai số lẻ liên tiếp.
- Tổng hai số chẵn liên tiếp.
- Tích của tổng hai số x,y và hiệu các bình phương của hai số đó.
- Tổng của tích hai số x,y với 5 lần bình phương của tổng 2 số đó.

HD:

$$a, a^3+b^3 \quad b, (a+b+c)^2 \quad c, (x+4)(x-4) \quad d, (a+b).h:2 \quad e, (2n+1)^2+(2n+3)^2 \quad f, n(n+1)(n+2)(n+3).$$

$$g, (2n+1)(2n+3) \quad h, 2n+(2n+2) \quad i, xy(x^2-y^2) \quad xy+5(x+y)^2$$

Bài 2: Đọc các biểu thức sau:

$$a. 7x^2 \quad b. (x+5)^2 \quad c. (x-4)(x+4)$$

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức đại số :

Phương pháp :

Bước 1: Thu gọn các biểu thức đại số.

Bước 2: Thay giá trị cho trước của biến vào biểu thức đại số.

Bước 3: Tính giá trị biểu thức số.

Chú ý:

$$|a| = |b| \text{ thì } a=b \text{ hoặc } a=-b$$

$$|a| + |b| = 0 \text{ khi } a=b=0$$

$$|a| + |b| \leq 0 \text{ khi } a=b=0$$

$$|a| + b^{2n} \leq 0 \text{ khi } a=b=0$$

$$|a| = b \text{ (Đk: } b \geq 0) \text{ suy ra } a=b \text{ hoặc } a=-b$$

BÀI TẬP:

Bài 1 : Tính giá trị biểu thức

$$a) A = 3x^3 y + 6x^2 y^2 + 3xy^3 \text{ tại } x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3} \quad b) B = x^2 y^2 + xy + x^3 + y^3 \text{ tại } x = -1; y = 3$$

$$c) C = 0,25xy^2 - 3x^2y - 5xy - xy^2 + x^2y + 0,5xy \quad \text{tại } x = 0,5 \text{ và } y = -1.$$

$$d) D = xy - \frac{1}{2}x^2y^3 + 2xy - 2x + \frac{1}{2}x^2y^3 + y + 1 \quad \text{tại } x = 0,1 \text{ và } y = -2.$$

Bài 2 : Cho đa thức

$$P(x) = x^4 + 2x^2 + 1;$$

$$Q(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1;$$

$$\text{Tính : } P(-1); P\left(\frac{1}{2}\right); Q(-2); Q(1);$$

$$\text{HD: } P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^2 + 1 = 4; P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{28}{16}; Q(-2) = 1; Q(1) = 4$$

Bài 3: Tính giá trị biểu thức sau:

$A=x^3-4xy+y^2$ biết $|x-1|+2|2y+4|=0$

$B=4xy-y^4$ biết $3|x-1|+(y-2)^2 \leq 0$

$C=\frac{xy^2-yx^2}{2xy}$ biết $|x-y|=2016$

$D=x^4-3x+2$ với $|x-5|=7$

$E=6x^2+4x-7$ với $|x-5|=|3x+7|$

$F=3x^2+2x$ với $|7-2x|=x-3$

HD:

a, Vì $|x-1| \geq 0; |2y+4| \geq 0$ nên $|x-1|+2|2y+4|=0$ khi $x=1; y=-2$. Thay vào $A=13$.

b, Tương tự câu a,

c, $C = \frac{xy^2-yx^2}{2xy} = \frac{y-x}{2}$ Ta có: $|x-y|=2016$ suy ra $x-y = \pm 2016$. Thay vào $C = \frac{\pm 2016}{2} = \pm 1008$

d, $|x-5|=7$ suy ra $x-5=7$ hoặc $x-5=-7$ hay $x=12$ hoặc $x=-2$.

e, $|x-5|=|3x+7|$ suy ra $x-5=3x+7$ hoặc $x-5=-(3x+7)$, suy ra $x=-6$ hoặc $x = \frac{-1}{2}$

f, Điều kiện: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Ta có: $|7-2x|=x-3 \Rightarrow 7-2x=x-3$ hoặc $7-2x=3-x$, suy ra $x = \frac{10}{3}$ hoặc $x=4$

Bài 4: Cho đa thức: $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$

a) Xác định bậc của A.

b) Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$.

HD: $A = 2xyz(15x - 2y - 1004z)$

Bài 5: Cho: $A = \frac{x^3 - 3x^2 + 0,25xy^2 - 4}{x^2 + y}$. Tính giá trị của A biết $x = \frac{1}{2}$; y là số nguyên âm lớn nhất.

HD: $y = -1$

Bài 6: Tính giá trị biểu thức:

$A=x^5-2009x^4+2009x^3-2009x^2+2009x-2010$ với $x=2008$

$B=2x^5+3y^3$ với $(x-1)^{20}+(y-3)^{30}=0$

HD: $A=x^4(x-2008)-x^3(x-2008)+x^2(x-2008)-x(x-2008)+x-2010$

$B=2x^5+3y^3$ với $x=1; y=3$

Bài 7: Tính giá trị của đa thức:

a) $P(x) = x^7 - 80x^6 + 80x^5 - 80x^4 + \dots + 80x + 15$ với $x = 79$ ĐS: $P(79) = 94$

b) $Q(x) = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \dots + 10x^2 - 10x + 10$ với $x = 9$ ĐS: $Q(9) = 1$

c) $R(x) = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ với $x = 16$ ĐS: $R(16) = 4$

d) $S(x) = x^{10} - 13x^9 + 13x^8 - 13x^7 + \dots + 13x^2 - 13x + 10$ với $x = 12$ ĐS: $S(12) = -2$

HD: Với các bài toán có quy luật như trên, để tính $P(x_0)$ ta thường phân tích để xuất hiện $(x-x_0)$

$P(x)=x^7-80x^6+80x^5-80x^4+80x^3-80x^2+80x+15=x^7-79x^6-x^6+79x^5+x^5-\dots-x^2+79x+x+15$
 $=x^6(x-79)-x^5(x-79)\dots-x(x-79)+x+15$. Suy ra $P(79)=79+15=94$.

Bài 8. Cho x và y là hai số nguyên cùng dấu. Tính x + y biết $|x|+|y|=10$

HD: Xét $x, y \geq 0$ suy ra $|x|=x, |y|=y$ nên $|x|+|y|=10$ suy ra $x+y=10$. Tương tự với $x, y < 0$.

Bài 5: . Tính giá trị của biểu thức:

a/ $ax + ay + bx + by$ biết $a + b = -2, x + y = 17$

b/ $ax - ay + bx - by$ biết $a + b = -7, x - y = -1$

HD: a, $(x+y)(a+b)$ b, $(x-y)(a+b)$

Bài 9:

a. Cho $x-y=0$ Tính : $B=7x-7y+4ax-4ay+5$ và $C=x(x^2+y^2)-y(x^2+y^2)$

b. Cho $x^2+y^2=5$. Tính $A=4x^4+7x^2y^2+3y^4+5y^2$

c. Cho $x^2+y^2=2$. Tính $B=3x^4+5x^2y^2+2y^4+2y^2$.

d. Cho $x+y=2$. Tính $A=x^4+2x^3y-2x^3+x^2y^2-2x^2y-x(x+y)+2x+3$

HD: a, $B=7(x-y)+4a(x-y)+5$; $C=(x^2+y^2)(x-y)$

b, $A=4x^4+4x^2y^2+3x^2y^2+3y^4+5y^2=4x^2(x^2+y^2)+3y^2(x^2+y^2)+5y^2=20x^2+20y^2=100$.

$B=3x^4+3x^2y^2+2x^2y^2+2y^4+2y^2=12$.

Bài 10:

a. Tính giá trị biểu thức cho $x-y=3$ ($x \neq -1, y \neq 5$).

$$A = \frac{x-8}{y-5} - \frac{4x-y}{3x+8}$$

b. Tính giá trị biểu thức biết: $x-y=2015$

$$A = \frac{2x+2015}{3x-y} + \frac{2y-2015}{3y-x}$$

c. Cho $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ Tính $C = \frac{2a-3b}{a-3b}$.

d. Cho $a-b=7$. Tính $D = \frac{3a-b}{2a+7} + \frac{3b-a}{2b-7}$

$$HD: a. A = \frac{x-8}{(x-8)-5} - \frac{4x-(x-8)}{3x+8} = \frac{x-8}{x-13} - \frac{3x+8}{3x+8} = 1 - 1 = 0$$

b, $x=y+2015$ rồi thay vào A

c, $a=3k; b=4k$ rồi thay vào C

d, $a=b+7$ rồi thay vào D.

Bài 11: Hai đoàn tàu cùng lúc từ hai ga A và B, đi ngược chiều nhau, đoàn tàu đi từ A với vận tốc v (km/h), đoàn tàu đi từ B với vận tốc nhỏ hơn tàu A là 3 (km/h), hai tàu gặp nhau sau 2h.

a, Quãng đường $AB=?$

b, Tính quãng đường biết $v=60$ km/h.

HD:

Vận tốc tàu A là v (km/h) thì tàu B là $v-3$ (km/h). Quãng đường tàu A đi sau 2h là: $2v$, quãng đường tàu B đi là: $2(v-3)$. Vì hai tàu đi ngược chiều nên $AB=2v+2(v-3)$.

Bài 12: Cho $A(x)=1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2016}$. và $B=1-x+x^2-x^3+\dots+x^{2016}$

Tính $A(-1); A(1); B(1); B(-1)$

HD: $A(-1)=1; A(1)=2017; B(1)=1; B(-1)=2017$.

Bài 13: Cho $A = \frac{x^2+x+1}{x^2-2x+3}$. Tìm x để $A=1$.

$$HD: A=1 \text{ suy ra: } \frac{x^2+x+1}{x^2-2x+3} = 1 \Leftrightarrow x^2+x+1=x^2-2x+3 \Leftrightarrow x^2+x-x^2+2x=3-1 \text{ hay } x = \frac{2}{3}$$

Dạng 3: Tìm GTLN, GTNN

Phương pháp:

Đưa về dạng $f^2(x)+a$ hoặc $-f^2(x)+a$ rồi đánh giá.

Nếu biểu thức có dạng: $ax^2+bx+c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$

Ví dụ: Tìm GTLN,GTNN của $A=(x-1)^2-30$; $B=-|x-1|-(2y+1)^2+300$.

Giải: Vì $(x-1)^2 \geq 0$ nên $(x-1)^2-30 \geq -30$. Vậy GTNN $A=-30$ khi $(x-1)^2=0$ hay $x=1$.

Vì $-|x-1| \leq 0$; $-(2y+1)^2 \leq 0$ nên $-|x-1|-(2y+1)^2+300 \leq 300$. Vậy GTLN $B=300$ khi $x=1$; $y = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ: Tìm GTLN, GTNN nếu có của $A = \frac{30}{(x-1)^2+6}$.

Giải: Vì $(x-1)^2 \geq 0$ nên $(x-1)^2+6 \geq 6$. Suy ra $\frac{30}{(x-1)^2+6} \leq \frac{30}{6} = 5$. Vậy GTLN $A=5$ khi $x=1$.

Ví dụ: Tìm GTNN: $2x^2 + 4x+20$

Giải: Ta có: $2x^2 + 4x+20 = 2(x+1)^2 + 18$. Vì $2(x+1)^2 \geq 0$ nên $2(x+1)^2 + 18 \geq 18$. Vậy GTNN là 18 khi $(x+1)^2 = 0$, suy ra $x=-1$.

Ví dụ: Tìm GTLN : $-x^2 + 4x-20$.

Giải:

Ta có: $-x^2 + 4x - 20 = -(x-2)^2 - 16$. Vì $-(x-2)^2 \leq 0$ nên $-(x-2)^2 - 16 \leq -16$. Vậy GTLN là -16 khi $(x-2)^2 = 0$ suy ra $x=2$.

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm GTLN,GTNN

- $(x-2)^2 + 2016$
- $(x-4)^2 + (y+1)^{10} - 2018$
- $(x+2014)^{10} + (y-2015)^{12} + (z-2016)^{14} + 2017$
- $-(30-x)^{100} - 3(y+2)^{200} + 2020$
- $-(x-2)^2 - (y-3)^4 - (z-3)^4 + 1975$
- $(x^2+5)^2 + 100$.

g. $\frac{x^2+4}{x^2+3}$

h. $\frac{1}{(x-1)^2+3}$.

i. $\frac{(x+1)^2+|y-8|+7}{(x+1)^2+|y-8|+2}$.

ĐS:

a, Min=2016 khi $x=2$; b, Min=-2018 khi $x=4$ và $y=-1$; c, Min=2017 khi $x=-2014$, $y=2015$, $z=2016$

d, Max=2020 khi $x=30$, $y=-2$; e, Max=1975 khi $x=2$, $y=3$, $z=3$

f, Max=125 khi $x=0$; g, $\frac{x^2+4}{x^2+3} = \frac{x^2+3+1}{x^2+3} = 1 + \frac{1}{x^2+3}$ nên Max(g) = $\frac{4}{3}$ khi $x=0$.

h, Max = $\frac{1}{3}$ khi $x=1$; i, $\frac{(x+1)^2+|y-8|+7}{(x+1)^2+|y-8|+2} = 1 + \frac{5}{(x+1)^2+|y-8|+2}$ nên Max = $\frac{7}{2}$ khi $x=-1$, $y=3$

Bài 2: Tìm các số nguyên sao cho:

a) $xy+3x-7y=21$

b) $xy+3x-2y=11$

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên a biết:

a) $(6a+1) \vdots (3a-1)$, b) $3a+5 \vdots 2a-1$ c) $a^2-5a \vdots a-2$ d) $6a-4 \vdots 1-2a$ e) $3-2a \vdots 3a+1$

Dạng 4: Bài tập đơn thức*Nhận biết đơn thức, thu gọn đơn thức, tìm bậc, hệ số.*

Phương pháp:

Nhận biết đơn thức: trong biểu thức không có **phép toán** tổng hoặc hiệu.

Thu gọn đơn thức:

Bước 1: dùng qui tắc nhân đơn thức để thu gọn: Nhân hệ số với nhau, biến với nhau

Bước 2: xác định hệ số, bậc của đơn thức đã thu gọn: Bậc là tổng số mũ của phần biến.

*Đơn thức đồng dạng: Là các đơn thức có cùng phần biến nhưng khác nhau hệ số.**Chú ý: Để chứng minh các đơn thức cùng dương hoặc cùng âm hoặc không thể cùng dương, cùng âm ta lấy tích của chúng rồi đánh giá kết quả.***Ví dụ:** Hãy sắp xếp các đơn thức theo nhóm đơn thức đồng dạng: $3xy$; $3xy^3$; $-12xy$; $\frac{1}{2}xy^3$; $2016xy$ Giải: Các nhóm đơn thức đồng dạng là: $3xy$; $-12xy$; $2016xy$ và $3xy^3$; $\frac{1}{2}xy^3$ **Ví dụ:** Trong các biểu thức sau, đâu là đơn thức, đâu là đa thức: 3 ; $3x-2$; $x^2(x-1)$; $3x^2yz$; $3x$; $-6xyz$ Giải: Đơn thức: 3 ; $3x$; $3x^2yz$; $-6xyz$ Đa thức: $3x-2$; $x^2(x-1)$ **Chú ý: Để kiểm tra các đơn thức có cùng âm, cùng dương, hay những bài toán chứng minh đơn thức không cùng âm, không cùng dương, chứng minh ít nhất một đơn thức âm.....Ta nhân các đơn thức với nhau rồi đánh giá kết quả thu được:****Ví dụ:** Cho các đơn thức: $A=-5xy$; $B=11xy^2$; $C=x^2y^3$.a. Tìm hệ số và bậc của $D=A.B.C$.

b. Các đơn thức trên có thể cùng dương hay không?

Giải:

a. $D=-55.x^4y^6$ Hệ số: -55 , Bậc: 10

b. $D=-55.x^4y^6 \leq 0$ nên A,B,C không thể cùng dương.

Ví dụ: Cho $A=3a^2b^3c$ và $B=-5a^3bc^3$. Tìm dấu của a biết A và B trái dấu.Giải: Vì A và B trái dấu nên $A.B < 0$ suy ra : $3a^2b^3c.(-5a^3bc^3) < 0$ hay $-15a^5b^4c^4 < 0$.Vì $b^4c^4 \geq 0$ nên $a^5 < 0$. Vậy $a < 0$.**Ví dụ:** Nhận biết đâu là đơn thức, đâu là đa thức:

$3xy$; $x+2y$; $x^2(x-3)$; $\frac{1}{2}xyz$; $5x^2y^3$

Giải: Đơn thức là: $3xy$; $\frac{1}{2}xyz$; $5x^2y^3$. Đa thức là: $x+2y$; $x^2(x-3)$;**Ví dụ:** Trong các biểu thức sau, đâu là đa thức, đâu không phải là đa thức.

$2xy+3x^2-4x^2yz^2$; $\frac{xy^2-3xy}{2}$; $\frac{3x-4xyz}{xy}$;

Giải: Đa thức là: $2xy+3x^2-4x^2yz^2; \frac{5y^2-8xy}{2}$; biểu thức còn lại không phải đa thức.

BÀI TẬP:

Bài 3: Thu gọn đơn thức, tìm bậc, hệ số.

$$A = -\frac{1}{3}x^2y \cdot 2xy^3 \qquad B = -2xy^2z \cdot \frac{3}{4}x^2yz^3 \qquad C = \frac{1}{3}xy^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}yz\right)$$

$$D = \left(-\frac{3}{5}x^3y^2z\right)^3 \qquad E = \left(-\frac{1}{4}x^5y\right) \cdot (-2xy^2) \qquad F = \frac{1}{5}(xy)^3 \cdot \frac{2}{3}x^2$$

$$K = x^3 \cdot \left(-\frac{5}{4}x^2y\right) \cdot \left(\frac{2}{5}x^3y^4\right) \qquad L = \left(-\frac{3}{4}x^5y^4\right) \cdot (xy^2) \cdot \left(-\frac{8}{9}x^2y^5\right)$$

ĐS:

a, $-2/3 \cdot x^3y^4$ b, $-3/2 \cdot x^3y^3z^4$ c, $-1/4 \cdot xy^3z$ d, $-27/125 \cdot x^9y^6z^3$ e, $1/2 \cdot x^6y^3$ f, $2/15 \cdot x^5y^3$
 k, $-1/2 \cdot x^8y^5$ l, $2/3 \cdot x^8y^{11}$

Bài 4 : Thu gọn các đơn thức sau, rồi tìm hệ số, phần biến, bậc của chúng:

- a) $2x^2yz \cdot (-3xy^3z)$; b) $(-12xyz) \cdot (-4/3x^2yz^3)y$;
 c) $5ax^2yz(-8xy^3bz)^2$ (a, b là hằng số cho trước); d) $15xy^2z(-4/3x^2yz^3)^3 \cdot 2xy$

ĐS:

a, $-6x^3y^4z^2$ b, $16 \cdot x^3y^3z^4$ c, $320ab^2 \cdot x^4y^7z^3$ (hệ số: $320ab^2$, bậc 14) d, $-320/9 \cdot x^8y^6z^{10}$

Bài 5:

Cho các đơn thức : $2x^2y^3$; $5y^2x^3$; $-\frac{1}{2}x^3y^2$; $-\frac{1}{2}x^2y^3$

- a) Hãy xác định các đơn thức đồng dạng . b) Tính đa thức F là tổng các đơn thức trên
 c) Tìm giá trị của đa thức F tại $x = -3$; $y = 2$.
 d) Nhân các đơn thức đã cho rồi tìm bậc, phần biến, hệ số của đơn thức tích.

Bài 6: Tìm n sao cho bậc của đơn thức sau bằng 13 : $A(x)= 2x^{n+2}yz^3 \cdot 3x^2y^{n-1}z^4$

HD: $n+2+1+3+2+n-1+4=13 \Leftrightarrow n=1$

Bài 7: Tìm m,n sao cho bậc đơn thức A(x) là 9 , bậc đơn thức B(x) là 10.

$A(x)= 3x^{2n+1}y^{m+3}$ và $B(x)=5z^{n+2}t^{3m+3}$

HD: $\begin{cases} \text{Bậc } A(x) = 9 \\ \text{Bậc } B(x) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+1+m+3=9 \\ n+2+3m+3=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$

Bài 8: Tìm đơn thức M và N biết

- a. $M \cdot (-x^5y^6) = 5x^{10}y^{11}$ b. $N \cdot (xy^2) = 3x^4y^5$

Bài 9:

- a. Trong 3 đơn thức : $-2x^2y^{10}$; $11x^3y^5$; $-4x^7y^{11}$ Có thể cùng âm được không?
 b. Chứng tỏ: $3x^4yz^2$; $-xy^3z^2t$; $6x^5y^4t^3$ có ít nhất một đơn thức âm.

HD: Tính tích 3 đơn thức rồi kiểm tra xem kết quả âm hay dương.

Bài 10: Cho $M = -5x^2y$. Tìm các cặp số nguyên x, y để $M = -160$

Bài 11: Cho $a+b+c=0$. CMR: $ab+2bc+3ca \leq 0$

HD: $ab+2bc+3ac = a(b+c) + 2c(b+a) = -a^2 - 2c^2$

Bài 12: Cho $A=3m^2x^2y^3z$ và $B=12x^2y^3z$.

- a. Hai đơn thức trên có đồng dạng không nếu m là biến? Nếu m là hằng số?
- b. Tìm đơn thức $C=A-B$ với m là hằng số.
- c. Xác định m để $C=0$ với mọi giá trị x,y,z.

HD: a, đồng dạng: m là hằng số và ngược lại c, $C=3(m^2-4)x^2y^3z$, để $C=0$ với mọi x,y,z thì $m=2;-2$.

Bài 13: Viết mỗi đơn thức sau dưới dạng tích của hai đơn thức, trong đó có một đơn thức là : $-\frac{2}{3}.x^2y^2z$

a, $21x^3y^2z^5$ b, $(-4x^5yz)^3$ c, $2(x^2yz)^2$ d, $15x^{k+3}y^{k+2}z^3$

HD: a, $-14xz^4$ b, $\frac{128}{3}.x^{15}yz^3$ c, $-\frac{4}{3}.x^2z$ d, $-10x^{k+1}y^kz^2$

Bài 14: Cho $A=-2a^5b^2$ và $B=3a^2b^6$. Tìm dấu của a biết hai đơn thức trên cùng dấu? (a,b ≠ 0)

HD: Tính $A.B=-6.a^7b^8 > 0$ (vì hai đơn thức cùng dấu có tích dương). Suy ra $a < 0$.

Bài 15: Tìm x,y,z biết a, $\begin{cases} xy - 2 \\ yz = 6 \\ xz = 3 \end{cases}$ b, $\begin{cases} x^2yz = -2 \\ xy^2z = 2 \\ xyz^2 = -4 \end{cases}$

HD: a, nhân theo về ta được: $xy.yz.xz=2.6.3=36$ hay $x^2y^2z^2=36$, suy ra $xyz=6$ hoặc $xyz=-6$.

Với $xyz=6$ mà $\begin{cases} xy - 2 \\ yz = 6 \\ xz = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Với $xyz=-6$ mà $\begin{cases} xy = 2 \\ yz = 6 \\ xz = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -3 \\ x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Bài 16:

a. Cho $A=2x^2yz$ và $B=xy^2z$. CMR nếu $2x+y \vdots m$ thì $A+B \vdots m$ (với x,y nguyên).

b. Cho các đơn thức $A = x^2y$ và $B = xy^2$. Chứng tỏ rằng nếu x,y nguyên và $x + y$ chia hết cho 13 thì $A + B$ chia hết cho 13.

HD:a, $A+B=xyz(2x+y)$. b, $A+B=xy(x+y)$

Bài 17: Tính:

- a. $A= x^3y^2+2x^3y^2+3x^3y^2+\dots+100x^3y^2$
- b. $B= x^3y^{24}-2x^3y^{24}+3x^3y^{24}+\dots+2009x^3y^{24}-2010x^3y^{24}$
- c. $C=3xyz^2+ 3^2xyz^2+3^3 xyz^2+\dots+3^{2016} xyz^2$
- d. $D=\frac{2}{2.8}xyz^8 + \frac{2}{8.8}xyz^8 \dots \dots \dots + \frac{2}{92.98}xyz^8$

HD:

a. $A=(1+2+3+\dots+100) x^3y^2 = \frac{(1+100).100}{2}.x^3y^2 = 5050 .x^3y^2$

b. $B=(1-2+3-4+\dots-2010) x^3y^{24} = -1005. x^3y^{24}$

Bài 18: Cho biểu thức :

$P = 2a^{2n+1} - 3a^{2n} + 5a^{2n+1} - 7a^{2n} + 3a^{2n+1}$ (n nguyên)

Với giá trị nào của a thì $P > 0$

HD: $P=10a^{2n}(a-1) > 0 \Rightarrow a > 1$.

Bài 19: Cho biểu thức: $Q = 5x^{k+2} + 3x^k + 2x^{k+2} + 4x^k + x^{k+2} + x^k$ (k nguyên)

Với giá trị nào của x và k thì $Q < 0$

Bài 20: Biết $A = x^2yz$, $B = xy^2z$; $C = xyz^2$ và $x + x + z = 1$

Chứng tỏ rằng $A + B + C = xyz$.

Bài 21: Cho $A = 8x^5y^3$; $B = -2x^6y^3$; $C = -6x^7y^3$. Chứng tỏ rằng : $Ax^2 + Bx + C = 0$

Bài 22: Rút gọn:

a, $10^{n+1} - 66 \cdot 10^n$ b, $2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n$ c, $90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}$

Dạng 5: Bài tập Đa thức: Nhận biết đa thức, thu gọn đa thức, tìm bậc, hệ số cao nhất, nhân chia đa thức

Phương pháp:

Nhận biết đa thức: trong biểu thức chứa phép toán tổng hoặc hiệu.

Để nhân đa thức ta nhân từng hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia. Để chia đa thức ta vẽ cột chia đa thức.

Thu gọn đa thức:

Bước 1: nhóm các hạng tử đồng dạng, tính cộng, trừ các hạng tử đồng dạng.

Bước 2: Bậc của đa thức là bậc cao nhất của đơn thức

BÀI TẬP:

Bài 6: Thu gọn đa thức, tìm bậc.

$$A = 15x^2y^3 + 7x^2 - 8x^3y^2 - 12x^2 + 11x^3y^2 - 12x^2y^3 \quad B = 3x^5y + \frac{1}{3}xy^4 + \frac{3}{4}x^2y^3 - \frac{1}{2}x^5y + 2xy^4 - x^2y^3$$

$$C = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 + 1 \quad D = xy^2z + 3xyz^2 - \frac{1}{5}xy^2z - \frac{1}{3}xyz^2 - 2$$

$$E = 3xy^5 - x^2y + 7xy - 3xy^5 + 3x^2y - \frac{1}{2}xy + 1 \quad K = 5x^3 - 4x + 7x^2 - 6x^3 + 4x + 1$$

$$F = 12x^3y^2 - \frac{3}{7}x^4y^2 + 2xy^3 - x^3y^2 + x^4y^2 - xy^3 - 5$$

Bài 7 : Tính tổng và hiệu của hai đa thức và tìm bậc của đa thức thu được .

a) $A = 4x^2 - 5xy + 3y^2$; $B = 3x^2 + 2xy - y^2$

b) $C = x^3 - 2x^2y + \frac{1}{3}xy^2 - y^4 + 1$; $D = -x^3 - \frac{1}{2}x^2y + xy^2 - y^4 - 2$

c) $E = 5xy - \frac{2}{3}x^2y + xyz^2 - 1$; $F = 2x^2y - xyz^2 - \frac{2}{5}xy + x + \frac{1}{2}$

d) $M = 2,5x^3 - 0,1x^2y + y^3$; $N = 4x^2y - 3,5x^3 + 7xy^2 - y^3$.

Bài 8: Tìm đa thức M , biết :

a) $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

b) $M + (3x^2y - 2xy^3) = 2x^2y - 4xy^3$

c) $(\frac{1}{2}xy^2 + x^2 - x^2y) - M = -xy^2 + x^2y + 1$

d) $M - (x^3y^2 - x^2y + xy) = 2x^3y^2 - \frac{3}{2}xy$

Bài 9: Cho đa thức $A = -2xy^2 + 3xy + 5xy^2 + 5xy + 1 - 7x^2 - 3y^2 - 2x^2 + y^2$

$$B = 5x^2 + xy - x^2 - 2y^2$$

a) Thu gọn đa thức A, B . Tìm bậc của A, B .

b) Tính giá trị của A tại $x = \frac{-1}{2}$; $y = -1$

c) Tính $C = A + B$. Tính giá trị của đa thức C tại $x = -1$; $y = \frac{-1}{2}$.

d) Tìm $D = A - B$.

Bài 10: Đa thức sau có bậc bao nhiêu?

$$A = (x^4 - 2x + 1)^{12} \cdot (x - 3 + x^5)^3$$

$$B = (2 + 3x)^{10} \cdot 3x^4$$

HD: $(x^4 - 2x + 1)^{12}$ có lũy thừa lớn nhất là $4 \cdot 12 = 48$ còn $(x - 3 + x^5)^3$ có lũy thừa lớn nhất là $3 \cdot 5 = 15$ nên lũy thừa lớn nhất của A là $48 + 15 = 63$. Vậy A bậc là 63.

Dạng 6: Đa thức một biến:

Phương pháp:

Bước 1: thu gọn các đơn thức và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.

Bước 2: viết các đa thức sao cho các hạng tử đồng dạng thẳng cột với nhau.

Bước 3: thực hiện phép tính cộng hoặc trừ các hạng tử đồng dạng cùng cột.

BÀI TẬP:

Bài 10: tính tổng và hiệu của hai đa thức sau:

$$a) A(x) = 3x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - 3 \quad ; \quad B(x) = 8x^4 + \frac{1}{5}x^3 - 9x + \frac{2}{5}$$

Tính : $A(x) + B(x)$; $A(x) - B(x)$; $B(x) - A(x)$;

$$b) C(x) = -2x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x - 9 \quad ; \quad D(x) = 2x^3 - 3x^2 - \frac{2}{3}x + 5$$

Tính $C(x) + D(x)$; $C(x) - D(x)$; $D(x) - C(x)$

$$c) P(x) = 15x^6 - 0,75x^5 + 2x^3 - x + 8 \quad ; \quad Q(x) = x^5 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 5$$

Tính $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$; $Q(x) - P(x)$

$$d) M(x) = -0,25x^5 + 3x^4 - x + 2x^3 - 8x^2 - x^3 + 3 \quad ; \quad N(x) = 0,75x^5 - 2x^4 - 2x^3 + x^4 + 2$$

Tính $M(x) + N(x)$; $M(x) - N(x)$; $N(x) - M(x)$

Bài 11: Cho 2 đa thức : $P(x) = -2x^2 + 3x^4 + x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x$

$$Q(x) = 3x^4 + 3x^2 - \frac{1}{4} - 4x^3 - 2x^2$$

a) Sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến. Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của mỗi đa thức.

b) Tính $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$; $Q(x) - P(x)$.

c) Đặt $M(x) = P(x) - Q(x)$. Tính $M(-2)$.

d) Chứng tỏ $x = 0$ là nghiệm của đa thức $P(x)$, nhưng không phải là nghiệm của đa thức $Q(x)$.

HD: d, $P(0) = 0$ và $Q(0) = \frac{-1}{4}$ nên $x = 0$ là nghiệm $P(x)$

Bài 12: Cho 3 đa thức :

$$M(x) = 3x^3 + x^2 + 4x^4 - x - 3x^3 + 5x^4 + x^2 - 6$$

$$N(x) = -x^2 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x^3 + 3x + 1 + x$$

$$P(x) = 1 + 2x^5 - 3x^2 + x^5 + 3x^3 - x^4 - 2x$$

a) Tính : $M(x) + N(x) + P(x)$;

b) Tính $M(x) - N(x) - P(x)$

HD: Rút gọn, sắp xếp lại theo lũy thừa giảm dần rồi tính

Bài 13: Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - x^4$ và $Q(x) = x^4 - x^3$.

Tìm đa thức $R(x)$ sao cho $P(x) + Q(x) + R(x)$ là đa thức không.

HD: $R(x) = -[P(x) + Q(x)]$

Bài 14: Cho đa thức $P(x) = ax^3 - 2x^2 + x - 2$ (a là hằng số cho trước)

a) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của $P(x)$.

b) Tính giá trị của $P(x)$ tại $x = 0$.

c) Tìm hằng số a thích hợp để $P(x)$ có giá trị là 5 tại $x = 1$.

HD: a, bậc: 3 hệ số cao nhất: a hệ số tự do: -2

C, $P(1) = 5$ nên $a = 8$

Bài 15: Cho $f(x)$ là đa thức có bậc 4. Chứng minh rằng nếu $f(x) = f(-x)$ thì các hệ số mũ lẻ đều bằng 0.

HD: $f(x) = a.x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, vì $f(x) = f(-x)$ nên $b = d = 0$

Bài 16: Cho $f(x)$ là đa thức có bậc 2, chứng minh rằng nếu $f(5) = f(-5)$ thì $f(x) = f(-x)$.

HD: $f(x) = a.x^2 + bx + c$, vì $f(5) = f(-5)$ nên $b = 0 \Rightarrow f(x) = a.x^2 + c \Rightarrow f(-x) = f(x)$

Bài 17: Cho 2 đa thức $P(x) = x^2 + 2mx + m^2$ và $Q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$

Tìm m biết $P(1) = Q(-1)$.

HD: $m = \frac{-1}{4}$

Bài 18: Cho các đa thức:

$$A(x) = 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2$$

$$B(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 3$$

$$C(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 4\frac{3}{16}$$

a. Tính $M(x) = A(x) - 2B(x) + C(x)$.

b. Tính giá trị của $M(x)$ khi $x = -\sqrt{0,25}$.

c. Có giá trị nào của x để $M(x) = 0$ không?

HD: $M(x) = 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{16}$

Bài 19: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ với mọi giá trị x. CMR: $a = b = c = 0$

HD: vì $f(x)=0$ với mọi $x \Rightarrow f(0)=0$ suy ra $c=0$; $f(1)=0$ suy ra $a+b=0$ (1); $f(-1)=0$ suy ra $a-b=0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $a=b=c=0$.

Bài 20: $f(x)=ax^2+bx+c$ với a,b,c là số nguyên. Biết giá trị của biểu thức chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên của x .
CMR: $a.b.c$ đều chia hết cho 3.

HD: vì $f(x)$ chia hết cho 3 với mọi x nên $f(0) \vdots 3$ hay $c \vdots 3$, $f(1) \vdots 3$ và $f(-1) \vdots 3$ nên $a+b \vdots 3$ và $a-b \vdots 3$, suy ra $a \vdots 3$ và $b \vdots 3$.

Bài 21: Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ có $f(1)=f(-1)$. CMR: $f(x)=f(-x)$.

HD: làm như bài 16.

Bài 22: Cho $f(x)=ax+b$. Tìm a,b biết $f(1)=1$; $f(2)=4$.

$$\text{HD: } \begin{cases} f(1) = 11 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 18 \end{cases}$$

Bài 23: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + 2f(2-x) = 3x$ (1) với mọi số thực x . Tính $f(2)=?$

HD: Ta có: với $x=2$ thay vào (1) ta được: $f(2) + 2f(0) = 6$ (3). Thay $x=0$ vào (1) ta được: $f(0) + 2f(2) = 0$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow f(2) = -2$

Bài 24: Viết dưới dạng đa thức các biểu thức sau:

a. $\overline{mn} + 2m - 3n$

b. $\overline{(ab)^2} - \overline{ab}$

c. $\overline{abc} - \overline{bc} + a$

HD:

a, $\overline{mn} + 2m - 3n = 10m + n + 2m - 3n = 12m - 2n$ (dùng cấu tạo số)

b, $(10a+b)^2 - (10a+b)$

c, $100a + 10b + c - (10b + c) + a = 101a$.

Bài 24: Chứng minh rằng: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có giá trị nguyên với mọi x nguyên khi và chỉ khi $6a, 2b, a + b + c$ và d là số nguyên..

HD :

$$f(0) = d \text{ (1)} ; f(1) = a + b + c + d \text{ (2)} ; f(-1) = -a + b - c + d \text{ (3)} ; f(2) = 8a + 4b + 2c + d \text{ (4)}$$

-Nếu $f(x)$ có giá trị nguyên với mọi x thì từ (1) $\Rightarrow d$ nguyên.

Vì $a+b+c+d$ nguyên và $-a+b-c+d$ nguyên nên $(a+b+c+d) + (-a+b-c+d)$ nguyên hay $2b+2d$ nguyên mà d nguyên suy ra $2b$ nguyên.

Vì $f(2) = 8a+4b+2c+d = (a+b+c+d) + (a+b+c) + 2b+6a$ nguyên mà $a + b + c$; $a + b + c + d$; $2b$ nguyên nên $6a$

-Chiều ngược lại chứng minh tương tự

Bài 25: Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a,b,c,d là các số nguyên. Biết rằng với mọi giá trị nguyên của x thì giá trị của đa thức đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng a,b,c,d đều chia hết cho 5

HD: Tính $f(0) \vdots 5 \Rightarrow d \vdots 5$, $f(1) \vdots 5$ nên $a+b+c \vdots 5$; $f(-1) \vdots 5$ nên $-a+b-c \vdots 5 \Rightarrow b \vdots 5$ và $a+c \vdots 5$ (1)

$f(2) \vdots 5 \Rightarrow 4(2a+b) \vdots 5$ nên $2a+b \vdots 5$ (2). Từ (1) (2) suy ra $a \vdots 5$, $c \vdots 5$.

Bài 26: Đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ có a,b,c là các số nguyên và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên thì $f(x)$ chia hết cho 7. chứng minh a,b,c , cũng chia hết cho 7

HD: Tính $f(0); f(1); f(-1)$

Bài 27: Cho $A(x)=ax^2+bx+c$. Tìm a,b,c biết : $3a+2b+c=7; a+b=4; A(2)=10$.

HD: $A(2)=4a+2b+c=10(1); 3a+2b+c=7(2); a+b=4(3)$. Lấy (1)-(2) theo vế ta được: $a=3$ thay vào (3) được $b=1$, thay $a=3, b=1$ vào (1) được $c=-4$.

Bài 28: Cho $N(x)=ax^2+bx+c$. Tìm a,b,c biết $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ và $N(-2)=18$.

HD: Vì $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k$ nên $a=3k; b=5k; c=7k$.

$N(-2)=18$ nên $3k(-2)^2+5k(-2)+7k=18 \Leftrightarrow 9k=18$ hay $k=2$. Suy ra $a=6; b=10; c=14$.

Bài 29:

a. Tìm tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức:

$$A(x) = (3 - 4x + x^2)^{2004} \cdot (3 + 4x + x^2)^{2005}.$$

b. Tìm tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức:

$$(x^2-2x+2)^{100} \cdot (x^2-3x+3)^{1000}.$$

HD: a, Tổng hệ số của một đa thức chính là giá trị của đa thức đó tại $x=1$: Thay $x=1$ vào $A(x)$ ta được tổng các hệ số là $(3-4.1+1)^{2004} (3+4.1+1)^{2005}=0$.

b, Tương tự

Bài 30: Cho $A(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm a,b,c,d biết $A(0)=1; A(1)=0; A(2)=5; A(3)=32$

HD:

$A(0)=1$ nên $d=1; A(1)=0$ nên $a+b+c=-1; A(2)=5$ nên $8a+4b+2c=4; A(3)=32$ nên $27a+9b+3c=31$

Bài 31: Cho $A(x)=ax^2+2bx+c-1-7x; B(x)=8x^2-5x+4+2x^2-6$. Tìm a,b,c để $A(x)=B(x)$.

HD: $A(x)=ax^2+(2b-7)x+c-1; B(x)=10x^2-5x-2$. Để $A(x)=B(x)$ thì $a=10; 2b-7=-5; c-1=-2$. Từ đó tìm a,b,c .

Bài 32: Tìm đa thức có bậc nhỏ hơn 4 thỏa mãn hệ thức: a) $3.f(x)-f(1-x)=x^2-1$ b) $x.P(x-2)=(x-1).P(x)$

HD: a, Vì đa thức có bậc nhỏ hơn 4 nên $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Kết hợp với $3.f(x)-f(1-x)=x^2-1$ rồi đồng nhất thức hai vế

suy ra: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}$

Bài 33: cho $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a,b,c,d nguyên. CMR không cùng tồn tại $f(7)=53$ và $f(3)=39$

Dạng 7 : Tìm nghiệm của đa thức 1 biến

1. Kiểm tra 1 số cho trước có là nghiệm của đa thức một biến không

Phương pháp :

Bước 1: Tính giá trị của đa thức tại giá trị của biến cho trước đó.

Bước 2: Nếu giá trị của đa thức bằng 0 thì giá trị của biến đó là nghiệm của đa thức và ngược lại.

Ví dụ: Kiểm tra $x=2$ có phải là nghiệm của đa thức sau hay không: $P(x)=3x-6; Q(x) = x+2$.

Giải:

Ta có $P(2)=3.2-6=0$ nên $x=2$ là nghiệm của $P(x)$.

$Q(2)=2+2=4 \neq 0$ nên $x=2$ không phải là nghiệm của $Q(x)$.

2. Tìm nghiệm của đa thức một biến

Phương pháp :

Bước 1: Cho đa thức bằng 0.

Bước 2: Giải bài toán tìm x.

Bước 3: Giá trị x vừa tìm được là nghiệm của đa thức.

Chú ý :

– Nếu $A(x).B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

– Nếu đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ có $a + b + c = 0$ thì ta tách $bx = ax + cx$ rồi nhóm hạng tử chung đưa về dạng tích. kết quả đa thức có 2 nghiệm là $x = 1$, nghiệm còn lại $x_2 = c/a$.

– Nếu đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ có $a - b + c = 0$ thì ta tách $bx = cx - ax$ rồi nhóm hạng tử chung đưa về dạng tích. kết quả đa thức có 2 nghiệm là $x = -1$, nghiệm còn lại $x_2 = -c/a$.

– Nếu đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ không có hai tính chất trên, ta tính tích $a.c$ rồi phân tích về hai số có tổng là b .

Ví dụ: Tìm nghiệm của các đa thức sau:

$$3x-12; x^2 - 7x+6; -3x^2 + 2x+5; x^2 - 7x+12$$

Giải:

$$3x-12=0 \text{ suy ra } x=4.$$

$$x^2 - 7x+6=0. \text{ Vì } a+b+c=0 \text{ nên } x=1; x=6.$$

$$-3x^2 + 2x+5=0. \text{ Vì } a-b+c=-3-2+5=0 \text{ tách } 2x=-3x+5x \text{ ta được: } -3x^2 - 3x+5x+5=0 \Leftrightarrow -3x(x+1) + 5(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(-3x+5)=0 \text{ nên } x=-1; x = \frac{5}{3}.$$

$$x^2 - 7x+12=0. \text{ Ta có : } a.c=1.12=12=(-3).(-4) \text{ (hai số có tổng bằng -7)}$$

$$x^2 - 7x+12=0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4x+12=0 \Rightarrow x(x-3) - 4(x-3)=0 \Rightarrow (x-3)(x-4)=0. \text{ Suy ra } x=3;4$$

3. Tìm a để đa thức P(x) có nghiệm là x₀:

Phương pháp: Tính $P(x_0) = 0$ để tìm a.

Ví dụ: Tìm a để $x=1$ là nghiệm của đa thức $Q(x)=x^2 - 3x.a+a+2$.

Giải: Để $x=1$ là nghiệm của $Q(x)$ thì $Q(1)=0$ suy ra $1^2 - 3.1.a+a+2=0 \Rightarrow -3a+a+3=0$ hay $a = \frac{3}{2}$

4. Chứng minh đa thức vô nghiệm.

Phương pháp: Ta biến đổi đa thức đó về một biểu thức luôn dương, luôn âm hoặc vô lí.

Cần chú ý: $|f(x)| \geq 0$ với mọi x; $ax^2+bx+c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

Ví dụ: Chứng minh các đa sau vô nghiệm:

$$A(x) = |x-1| + 2; B(x) = (x-2)^2 + 1026; C(x) = x^2 - 4x+40.$$

Giải:

Vì $|x-1| \geq 0$ với $\forall x$ nên $|x-1| + 2 > 0$ với $\forall x$. Suy ra $A(x)$ vô nghiệm.

Vì $(x-2)^2 \geq 0$ với $\forall x$ nên $(x-2)^2 + 1026 > 0$ với $\forall x$. Suy ra $B(x)$ vô nghiệm.

Ta có: $x^2 - 4x+40 = (x-2)^2 + 36 > 0$ với $\forall x$ nên $C(x)$ vô nghiệm.

BÀI TẬP:

Bài 15 : Cho đa thức $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$

Trong các số sau : 1; -1; 2; -2 số nào là nghiệm của đa thức $f(x)$.

HD: $f(1)=0 \Rightarrow x=1$ là nghiệm,

$f(-1)=8; f(2)=17; f(-2)=9$ nên $x=-1, x=2, x=-2$ không phải nghiệm đa thức.

Bài 16 : Tìm nghiệm của các đa thức sau.

a. $A(x)=x^2-5x+6$; $B(x)=x^3+x^2+x+1$; $C(x)=6x^2-11x+3$; $D(x)=4x^2-4x-3$; $E(x)=2x^2-3x-27$

b. $F(x)=3x-6$; $H(x)=-5x+30$ $G(x)=(x-3)(16-4x)$ $K(x)=x^2-81$

c. $P(x)=x^3+4x^2-29x+24$; $Q(x)=3x^2-8x+4$; $R(x)=x^2-2x+x-2$; $L(x)=(x+3)^2+(x^2-9)^2$

d. $A(x)=|x-1|-3$; $B(x)=|2x+1|-|x+5|$; $C(x)=|x-2|+2x-3$; $D(x)=|x-1|+(x^2-1)^2$

Chú ý :

- Nếu $A(x).B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

Bài 17: Tìm nghiệm của đa thức

a) $4x + 9$ b) $-5x+6$ c) $x^2 - 1$. d) $x^2 - 9$. e) $x^2 - x$.

f) $x^2 - 2x$. g) $(x - 4)(x^2 + 1)$ h) $3x^2 - 4x$ i) $x^2 + 9$ k) $x^3 - 3x$

l) $x^2 - 4x + 3$ m) $x^4 - 8x^2 + 7$

HD: a, $\frac{-9}{4}$ b, $\frac{6}{5}$ c, 1; -1 d, 3; -3 e, 0; 1 f, 0; 2 g, 4 h, 0; $\frac{4}{3}$ i, Vô nghiệm

Bài 18: Tìm x biết: $2x(3x + 1) + 3x(4 - 2x) = 7$ HD: $x=1/2$

Bài 19: Cho đa thức : $P(x) = x^4 + 3x^2 + 3$

a. Tính $P(1), P(-1)$.

b. Chứng tỏ rằng đa thức trên không có nghiệm.

HD: b, $P(x) = (x^2 + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$

Bài 20: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

a. Chứng tỏ rằng: $f(-2).f(3) \leq 0$. Biết rằng $13a + b + 2c = 0$.

b. $f(2).f(-1) \leq 0$. Biết $5a+b+2c=0$.

HD: b. $f(2)=-f(-1)$ nên $-f^2(-1) \leq 0$

Bài 21: chứng tỏ các đa thức sau vô nghiệm

$A(x)=x^2-2x+5$; $B(x)=-x^2+4x-20$; $C(x)=x^4+x^2+2016$; $D(x)=3x^2-12x+2017$.

HD: $A(x)=(x-1)^2+4$ $B(x)=-(x-2)^2-16$ $D(x)=3(x-2)^2+2005$.

Bài 22: Chứng minh đa thức có ít nhất 2 nghiệm biết:

a. $(x-6).P(x)=(x+1).P(x-4)$

b. $(x-5).P(x+4)=(x+3).P(x)$

c. $x.f(x+1)=(x^2-4).f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm.

HD: a, Thay $x=6$ suy ra $(6-6).P(6)=7.P(2)$ hay $P(2)=0$ nên $x=2$ là nghiệm.

Tương tự: $x=-1$ suy ra $-7.P(-1)=0.P(-5)$ hay $P(-1)=0$ nên $x=-1$ là nghiệm.

b, $x=5; x=1$

$c, x=0; x=3; x=-1.$

Bài 23: Tìm a và b để nghiệm của đa thức $f(x)=(x-3)(x-4)$ cũng là nghiệm đa thức $g(x)=x^2-ax+b$.

HD: Thay $x=3; x=4$ vào $g(x)$ suy ra: $\begin{cases} 9-3a+b=0 \\ 16-4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=12 \end{cases}$

Bài 24: Tìm a, b, c biết $f(x)=ax^2+bx+c$ có nghiệm là 2; -2 và $a-c=3$.

HD: $\begin{cases} f(2)=0 \\ f(-2)=0 \\ a-c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=0(1) \\ 4a-2b+c=0(2) \\ a-c=3(3) \end{cases}$

Lấy (1)-(2) theo vế ta được $4b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow 4a+c=0$ kết hợp với $a-c=3$ ta được $a=3/5; c=-12/5$.

Bài 25: Chứng tỏ các đa thức sau có một nghiệm chung.

$f(x)=2x+1$ và $g(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}$.

HD: Xét $2x-1=0 \Rightarrow x=-1/2$, thay $x=-1/2$ vào $g(x)$ ta được: $g(-1/2)=0$ suy ra $f(x)$ và $g(x)$ có nghiệm chung là $x=-1/2$.

Bài 26: Cho $P(x)=(a+1)x^3+(2a-3)x^2-5$. Tìm a biết $P(x)$ có nghiệm $x=2$.

HD: Vì $P(x)$ có nghiệm $x=-2$ nên $P(-2)=0$ hay: $(a+1)(-2)^3+(2a-3)2^2-5=0 \Rightarrow -25=0 \Rightarrow$ không có giá trị nào của a để $P(x)$ có nghiệm $x=-2$.

Bài 27: Chứng minh $P(x)$ có nghiệm là a thì $P(x)=(x-a).Q(x)$ (1)

HD: Vì $P(x)$ có nghiệm là a nên $P(a)=0$; Mặt khác, thay $x=a$ vào (1) : $P(a)=(a-a).Q(a)$ hay $0=0$. luôn đúng, vậy $P(x)=(x-a).Q(x)$.

Dạng 8 : Tìm hệ số chưa biết trong đa thức P(x) biết $P(x_0) = a$

Phương pháp :

Bước 1: Thay giá trị $x = x_0$ vào đa thức.

Bước 2: Cho biểu thức số đó bằng a.

Bước 3: Tính được hệ số chưa biết.

Bài 1 : Cho đa thức $P(x) = mx - 3$. Xác định m biết rằng $P(-1) = 2$

HD: $P(-1)=2 \Rightarrow m=-5$

Bài 2 : Cho đa thức $Q(x) = -2x^2 + mx - 7m + 3$. Xác định m biết rằng $Q(x)$ có nghiệm là -1.

HD: $Q(-1)=0 \Rightarrow m=1/8$

Bài 3: Tìm hệ số a của đa thức $A(x) = ax^2 + 5x - 3$, biết rằng đa thức có một nghiệm bằng 1/2 ?

HD: $A(1/2)=0 \Rightarrow a=2$

Bài 4: Tìm m, biết rằng đa thức $Q(x) = mx^2 + 2mx - 3$ có một nghiệm $x = -1$.

HD: $Q(-1)=0 \Rightarrow m.(-1)^2+2.m.(-1)-3=0$ nên $m=-3$.

Bài 5: Cho hai đa thức $f(x) = 5x - 7$; $g(x) = 3x + 1$

a. Tìm nghiệm của $f(x); g(x)$

b. Tìm nghiệm của đa thức $h(x) = f(x) - g(x)$.

c. Từ kết quả câu b suy ra với giá trị nào của x thì $f(x) = g(x)$?

Bài 6: Cho đa thức $f(x) = x^2 + 4x - 5$

a. Số -5 có phải là nghiệm của $f(x)$ không.

b. Viết tập hợp S tất cả các nghiệm của f(x).

HD: a, Có b, $x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$ nên $S=\{1;-5\}$

Bài 7: Thu gọn rồi tìm nghiệm của các đa thức sau:

- a. $f(x) = x(1-2x) + (2x^2 - x + 4)$.
- b. $g(x) = x(x - 5) - x(x + 2) + 7x$.
- c. $h(x) = x(x - 1) + 1$.

HD: a, vô nghiệm b, vô số nghiệm c, $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ vô nghiệm

Bài 8: Cho $f(x) = x^8 - 101x^7 + 101x^6 - 101x^5 + \dots + 101x^2 - 101x + 25$. Tính f(100)

HD: $f(x)=x^7(x-100)-x^6(x-100)\dots-x+25$ nên $f(100)=-75$

Bài 9: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $7a + b = 0$, hỏi f(10). f(-3) có thể là số âm không?

HD: $f(10).f(-3)=(100a+10b+c).(9a-3b+c)=(100a-10.7a+c)(9a+21a+c)=(30a+c)^2$

Bài 10: Tam thức bậc hai là đa thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là hằng, $a \neq 0$. Hãy xác định các hệ số a, b biết $f(1) = 2; f(2) = 2; f(0)=1$.

HD: $f(0)=1 \Rightarrow a.0^2+b.0+c=1$ hay $c=1$,

$f(1)=2 \Rightarrow a+b+c=2$ hay $a+b=1$ (vì $c=1$).

$f(2)=2 \Rightarrow 4a+2b+c=2$ hay $4a+2b=1 \Rightarrow 2a+2(a+b)=1 \Leftrightarrow 2a+2=1$ (vì $a+b=1$) suy ra $a=-1/2; b=3/2$.

Bài 11. Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$. Trong đó a, b, c là hằng. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

HD: Để $f(x)=g(x)$ thì $(a+4).x^3 - 4x+8=x^3 - 4bx^2- 4x +c-3$. Đồng nhất hệ số ta được:
$$\begin{cases} a+4=1 \\ -4b=0 \\ c-3=8 \end{cases}$$
 Từ đó tìm

a,b,c.

Bài 12: Cho $Q(x)=x^2+mx-12$. Biết $Q(-3)=0$. Tìm nghiệm còn lại.

HD: $Q(-3)=0$ nên $(-3)^2 + m(-3)-12=0$ suy ra $m=-1$. Thay vào $Q(x)=x^2-x-12=0 \Rightarrow x^2-4x +3x-12=0 \Rightarrow x(x-4) + 3(x-4)=0 \Rightarrow (x-4)(x+3)=0$. Suy ra $x=-3; x=4$

Bài 13: Cho $f(x)=a.x^2+bx+c$. Biết $f(1)=4, f(-1)=8$, và $a-c=-4$. Tìm a,b,c.

HD:
$$\begin{cases} f(1) = 4 \\ f(-1) = 8 \\ a - c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \text{ (1)} \\ a - b + c = 8 \text{ (2)} \\ a - c = -4 \text{ (3)} \end{cases}$$
 Cộng theo vế (1) và (2) suy ra $a+c=6$, kết hợp $a-c=-4$ để tìm

a,b,c.

Bài 14: Cho $f(x)=2x^2+ax+4$ và $g(x)=x^2-5x-b$. Tìm a,b biết $f(1)=g(2), f(-1)=g(5)$.

HD:
$$\begin{cases} f(1) = g(2) \\ f(-1) = g(5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 6 = -6 - b \\ a - 6 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 9 \end{cases}$$

Bài 15: Cho $A(x) = a.x^2 + bx + 6$. Tìm a,b biết A(x) có hai nghiệm là 1 và 2.

HD: Thay $x=1; x=2$ vào A(x) ta được:
$$\begin{cases} a + b = -6 \\ 4a + 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \end{cases}$$

Bài 16: Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó a, b, c, d ∈ R và thỏa mãn $b = 3a + c$ Chứng minh rằng $f(1), f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Bài 37: Chứng minh các đa thức sau không âm với mọi x,y:

- a. $3x^2+2y^2+5$.
 b. $x^2-2x+2y^2+8y+9$.
 c. $x^2-6x+2016$.
 d. $x^2+8x+20+|y-1|$

HD:

a, Vì $3x^2 \geq 0$ với mọi x; $2y^2 \geq 0$ với mọi y nên $3x^2+2y^2+5 \geq 5 \Rightarrow$ đa thức không âm với mọi x,y

b, $x^2-2x+2y^2+8y+9=(x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4)=(x-1)^2+2(y+2)^2$

c, $x^2-6x+2016=(x^2-6x+9)+2007=(x-3)^2+2007$

d, $x^2+8x+20+|y-1|=(x^2+8x+16)+4+|y-1|=(x+4)^2+|y-1|+4$

Bài 17:

- a. Cho $f(x)=3x-5$, biết $x_1+x_2=10$. Tính $f(x_1)+f(x_2)$.
 b. Cho $f(x)=2x+10$, biết $x_1-x_2=4$. Tính $f(x_1)-f(x_2)$.

HD: a, $f(x_1)+f(x_2)=(3x_1-5)+(3x_2-5)=3(x_1+x_2)-10=3.10-10=20$.

Bài 18: Cho $A(x)=(x-4)^2+2016$ và $B(x)=4|x-4|-4$

- a. Tính $A(4)$; $A(-4)$; $B(4)$; $B(-4)$.
 b. Tìm GTNN của: $N(x)=A(x)+B(x)-10$ và $M(x)=A(x)-B(x)-14$.

HD:

a, $A(4)=2016$; $A(-4)=2080$; $B(4)=-4$; $B(-4)=28$.

b, $N(x)=(x-4)^2+4|x-4|+2012$. Vì $(x-4)^2 \geq 0$; $|x-4| \geq 0$ nên $(x-4)^2+4|x-4|+2012 \geq 2012$.

Vậy GTNN: $N(x)=2012$ khi $x=4$.

$M(x)=(x-4)^2-4|x-4|+2006=[|x-4|-2]^2+2002 \geq 2002$.

Vậy GTNN $M(x)=2002$ khi $|x-4|=2$ suy ra $x=6$ hoặc $x=2$.

Bài 19:

- a. Cho $f(x)+3.f(\frac{1}{2})=x^2$. Tính $f(2)$?
 b. Cho $f(x)+3.f(\frac{1}{x})=x^2$. Tính $f(2)$?

HD:

a, Thay $x=2$ ta được: $f(2)+3.f(\frac{1}{2})=4$ (1). Thay $x=1/2$ ta được: $f(\frac{1}{2})+3.f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ (2).

Từ (2) $\Rightarrow 4.f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ hay $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{16}$, thay vào (1): $f(2)=4-3.\frac{1}{16}=\frac{61}{16}$

b, Thay $x=2$ ta được: $f(2)+3.f(\frac{1}{2})=4$ (1). Thay $x=\frac{1}{2}$ ta được $f(\frac{1}{2})+3.f(2)=\frac{1}{4}$ suy ra $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-3.f(2)$ thay vào

(1) ta được: $f(2)+3[\frac{1}{4}-f(2)]=4$ hay $-2.f(2)=\frac{13}{4}$ nên $f(2)=\frac{-13}{8}$.

Bài 20: Cho $A(x)=ax^2+bx+c+3$ biết $A(1)=2013$ và a,b,c tỉ lệ với 3; 2; 1. Tìm a, b, c?

HD:

$a=3k$; $b=2k$; $c=k$ mà $A(1)=a+b+c+3=2013$ nên $3k+2k+k+3=2013$ hay $6k=2010$ nên $k=335$. Vậy

$a=3.335=1005$; $b=2.335=670$; $c=335$.

Bài 21: Cho $f(x)$ thỏa mãn $f(a+b)=f(a.b)$ và $f(-1)=1$. Tính $f(2016)$?

HD:

Ta có: $f(-1)=f(-1+0)=f(-1.0)=f(0)$ mà $f(-1)=1$ nên $f(0)=1$.

$f(2016)=f(0+2016)=f(0.2016)=f(0)=1$.

Bài 22: Cho $f(x)$ xác định: $f(1+\frac{1}{x})=2x+\frac{1}{x^2}$. Tìm $f(x)$?

HD:

Đặt $1+\frac{1}{x}=X$ suy ra $x=\frac{1}{X-1}$. Thay vào $f(1+\frac{1}{x})=2x+\frac{1}{x^2}$ ta được:

$f(X)=\frac{2}{X-1}+(X-1)^2$. Vậy $f(x)=\frac{2}{x-1}+(x-1)^2$.

Bài 23: Cho $f(x)$ thỏa mãn: $f(x_1.x_2)=f(x_1).f(x_2)$. Biết $f(2)=10$. Tính $f(8)$?

HD:

$f(4)=f(2.2)=f(2).f(2)=100$, $f(8)=f(4).f(2)=1000$.

Bài 24: Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực và $P(x)$ có bậc 6 thỏa mãn: $P(1)=P(-1), P(2)=P(-2), P(3)=P(-3)$.

Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $P(x)=P(-x)$.

HD:

Giả sử: $P(x)=ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$.

Thay $P(1)=P(-1)$ ta được: $b+d+f=0$ (1).

Thay $P(2)=P(-2)$ ta được: $16b+4d+f=0$ (2).

Thay $P(3)=P(-3)$ ta được: $81b+9d+f=0$ (3). Từ (1)(2)(3) suy ra $b=d=f=0$ nên $P(x)=ax^6+cx^4+ex^2+g$.

$P(-x)=a(-x)^6+c(-x)^4+e(-x)^2+g=ax^6+cx^4+ex^2+g=P(x)$ đpcm

Bài 25: Tìm x, y, z biết: $(-2x^3y^5)^{10} + (3y^2z^6)^{11} = 0$.

HD:

Vì $(-2x^3y^5)^{10} \geq 0$; $(3y^2z^6)^{11} \geq 0$ nên $(-2x^3y^5)^{10} + (3y^2z^6)^{11} = 0$ khi $\begin{cases} xy = 0 \\ yz = 0 \end{cases}$.

TH1: nếu $y=0$ thì mọi x và z đều là nghiệm.

TH2: nếu $y \neq 0$ thì $x=z=0$.

ĐỀ THAM KHẢO

ĐỀ 01

I- Phần trắc nghiệm (3,0 điểm):

Câu 1: Đơn thức đồng dạng với đơn thức $-2x^2y$ là

A. $-2xy^2$ B. x^2y C. $-2x^2y^2$ D. $0x^2y$

Câu 2: Cho hai đa thức $A(x) = -2x^2 + 5x$ và $B(x) = 5x^2 - 7$ thì $A(x) + B(x) =$

A. $3x^2 + 5x - 7$ B. $3x^2 - 5x - 7$ C.

$-3x^2 + 5x - 7$ D. $3x^2 + 5x + 7$

Câu 3: Đơn thức $\frac{1}{3}x^3y^4z^5$ có bậc là

A. 3 B. 4 C. 5 D. 12

Câu 4: Cho tam giác ABC có CN, BM là các đường trung tuyến, góc ANC và góc CMB là góc tự. Ta có:

A. / $AB < AC < CB$ B. / $AC < AB < BC$ C. / $AC < BC < AB$ D. / $AB < BC < AC$

C. góc S < góc R < góc Q

D. góc R > góc Q > góc S

Câu 5: Cho tam giác DEF có góc D = 80° các đường phân giác EM và FN cắt nhau tại S ta có :

A. Góc EDS = 40°

B. Góc EDS = 160°

C. SD = SE = SF

D. $SE = \frac{2}{3} EM$

Câu 6: Tam giác ABC cân AC= 4 cm BC= 9 cm Chu vi tam giác ABC là :

A. Không xác định được

B. 22 cm

C. 17 cm

D. 20 cm

II. Phần tự luận (7,0 điểm)

Câu 1 (1,5 điểm):

Điểm bài thi môn Toán của lớp 7 được cho bởi bảng sau:

10	9	8	4	6	7	6	5	8	4
3	7	7	8	7	8	10	7	5	7
5	7	8	7	5	9	6	10	4	3
6	8	5	9	3	7	7	5	8	10

a, Dấu hiệu ở đây là gì ?

b, Lập bảng tần số.

c, Tính số trung bình cộng. Tìm mốt

Câu 2 (1,5 điểm): Cho các đa thức

$$M(x) = 3x^3 - 3x + x^2 + 5$$

$$N(x) = 2x^2 - x + 3x^3 + 9$$

a, Tính M(x) + N(x)

b, Biết M(x) + N(x) - P(x) = 6x^3 + 3x^2 + 2x. Hãy Tính P(x)

c, Tìm nghiệm của đa thức P(x)

Câu 3 (3,0 điểm) :

Cho tam giác ABC với độ dài 3 cạnh AB = 3cm, BC = 5cm, AC = 4cm

a) Tam giác ABC là tam giác gì? Vì sao?

b) Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BA = BD. Từ D vẽ Dx vuông góc với BC (Dx cắt AC tại H).

Chứng minh: BH là tia phân giác của góc ABC.

c) Vẽ trung tuyến AM. Chứng minh Δ ABC cân

Câu 4 (1,0 điểm) : Chứng tỏ rằng đa thức $x^2 + 6x + 10$ không có nghiệm

ĐỀ 03

I- Phần trắc nghiệm (3,0 điểm) :

Câu 1: Bậc của đơn thức $2^3 x^3 yz^2$ là:

A. 6

B. 8

C. 5

D. 10

Câu 2: Hai đơn thức nào đồng dạng với nhau?

A. $5x^3$ và $5x^4$

B. $(xy)^2$ và xy^2

C. $(xy)^2$ và x^2y^2

D. x^2y và $(xy)^2$

Câu 3:

Đa thức $P(x) = 3x^4 - 2x^2 - 4x^3 + 5x + 1$ có bậc là :

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 4: Cho tam giác ABC có AB = 5 cm, BC = 8 cm, AC = 10 cm. So sánh nào sau đây là đúng :

- A. $B < C < A$ B. $C < A < B$ C. $A < B < C$ D. $C < B < A$

Câu 5: Bộ ba số nào sau đây **không thể** là độ dài của ba cạnh một tam giác ?

- A. 5cm, 5cm, 6cm B. 7cm, 7cm, 7cm C. 4cm, 5cm, 7cm D. 1cm, 2cm, 3cm

Câu 6: Cho ΔABC có AM là trung tuyến . Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $GM = \frac{2}{3} AM$ B. $AG = \frac{1}{3} GM$ C. $AG = \frac{2}{3} AM$ D. $GM = 2AG$

II. Phần tự luận (7,0 điểm)

Câu 1(1,5 điểm):

Thời gian làm một bài tập toán (tính bằng phút) của 30 học sinh được ghi lại như sau:

10	5	8	8	9	7	8	9	14	8
5	7	8	10	9	8	10	7	14	8
9	8	9	9	9	9	10	5	5	14

- a, Dấu hiệu ở đây là gì ?
 b, Lập bảng tần số.
 c, Tính số trung bình cộng .

Câu 2(1,5 điểm):

Cho hai đa thức : $P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 + 1$ & $Q(x) = -x^2 + 3x^3 - x - 5$

- a, Sắp xếp các đa thức trên theo thứ tự giảm dần theo lũy thừa của biến?
 b, Tính : $P(x) + Q(x)$
 c, Tính : $P(x) - Q(x)$

Câu 3(3,0 điểm) :

Cho tam giác ABC vuông tại A ,phân giác BD.Kẻ DE vuông góc với BC ($E \in BC$). Gọi F là giao điểm của BA và ED. Chứng minh rằng :

- a, $AB = BE$ b, ΔCDF là tam giác cân. c, $AE // CF$

Câu 4(1,0 điểm):

Cho m và n là hai số tự nhiên và p là một số nguyên tố thoả mãn $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$.

Chứng minh rằng $p^2 = n + 2$.

ĐỀ 04

Bài 1(2 điểm):

Điểm kiểm tra một tiết môn toán của một lớp 7 được thông kê lại ở bảng dưới đây:

Điểm	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	3	5	6	6	9	6	3	1

- a, Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?
 b, Tìm số các giá trị và một của dấu hiệu?
 c. Tính số trung bình cộng của dấu hiệu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Bài 2 (1 điểm): Cho biểu thức: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

- Tính giá trị của biểu thức $f(x)$ tại $x = 0$; $x = 1$; $x = 3$
- Giá trị x nào là nghiệm của đa thức $f(x)$? Vì sao?

Bài 3(1,5 điểm):

Cho biểu thức: $M = \left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot \left(\frac{3}{4}xy^3\right)$

- Thu gọn biểu thức M .
- Chỉ rõ phân hệ số, phần biến và bậc của đơn thức sau khi đã thu gọn.

Bài 4 (1,5 điểm):

Cho hai đa thức:

$$P(x) = 3x^3 - 2x + 2 + x^2 - 3x^3 + 2x^2 + 3 + x$$

$$Q(x) = 5x^3 - x^2 + 3x - 5x^3 + 4 - x^2 + 2x - 2$$

- Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần bậc của biến.
- Tính tổng $P(x) + Q(x)$ rồi tìm nghiệm của đa thức tổng.

Bài 5(3 điểm):

Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), kẻ đường cao AH ($H \in BC$)

- Chứng minh rằng: $HB = HC$ và $\angle BAH = \angle CAH$.
- Từ H kẻ $HD \perp AB$ ($D \in AB$), kẻ $HE \perp AC$ ($E \in AC$).

Chứng minh rằng $AD = AE$ và tam giác HDE là tam giác cân.

- Giả sử $AB = 10$ cm, $BC = 16$ cm. Hãy tính độ dài AH .

Bài 6 (1,0 điểm): Chứng tỏ rằng đa thức $x^2 + 4x + 7$ không có nghiệm

ĐỀ 05

A. TRẮC NGHIỆM: (2.5 đ) Khoanh tròn chữ cái đúng trước đáp án đúng

1/ Đơn thức đồng dạng với đơn thức $-5x^2y$ là:

- x^2y^2
- $7x^2y$
- $-5xy^3$
- Một kết quả khác

2/ Giá trị của đa thức $P = x^3 + x^2 + 2x - 1$ tại $x = -2$ là

- 9
- 7
- 17
- 1

3/ Kết quả của phép tính $-2xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 - \frac{3}{2}xy^2$ là

- $6xy^2$
- $5,25xy^2$
- $-5xy^2$
- Kết quả khác

4/ Kết quả của phép nhân các đơn thức $(-2x^2y) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x \cdot (y^2z)^3$ là :

- $\frac{1}{2}x^3yz^2$
- $\frac{1}{2}x^3y^6z^3$
- $-\frac{1}{2}x^3y^7z^3$
- $-\frac{1}{2}x^3y^3z^3$.

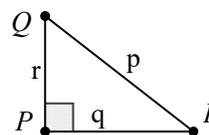
5/ Bậc của đa thức $-15x^3 + 5x^4 - 4x^2 + 8x^2 - 9x^3 - x^4 + 15 - 7x^3$ là

- 3
- 4
- 5
- 6

6/ Nghiệm của đa thức $x^2 - x$ là: a/ 0 và -1 b/ 1 và -1 c/ 0 và 1 d/ Kết quả khác

7/ Cho tam giác PQR vuông (theo hình vẽ). Mệnh đề nào đúng ?

- a/ $r^2 = q^2 - p^2$
- b/ $p^2 + q^2 = r^2$
- c/ $q^2 = p^2 - r^2$
- d/ $q^2 - r^2 = p^2$



8/ Cho ΔABC có $B = 60^\circ$, $C = 50^\circ$. Câu nào sau đây đúng :

- a/ $AB > AC$
- b/ $AC < BC$
- c/ $AB > BC$
- d/ một đáp số khác

9/ Với bộ ba đoạn thẳng có số đo sau đây, bộ ba nào không thể là ba cạnh của một tam giác ?

- a/ 3cm, 4cm, 5cm
- b/ 6cm, 9cm, 12cm
- c/ 2cm, 4cm, 6cm
- d/ 5cm, 8cm, 10cm

10/ Cho ΔABC có $B < C < 90^\circ$. Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

Câu nào sau đây sai :

- a/ $AC > AB$
- b/ $DB > DC$
- c/ $DC > AB$
- d/ $AC > BD$

B. TỰ LUẬN: (7.5Đ)

Bài 1(3đ): Cho đa thức: $P(x) = 1 + 3x^5 - 4x^2 + x^5 + x^3 - x^2 + 3x^3$ Và $Q(x) = 2x^5 - x^2 + 4x^5 - x^4 + 4x^2 - 5x$

- a/ Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa tăng của biến
- b/ Tính $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$
- c/ Tính giá trị của $P(x) + Q(x)$ tại $x = -1$
- d/ Chứng tỏ rằng $x = 0$ là nghiệm của đa thức $Q(x)$ nhưng không là nghiệm của đa thức $P(x)$

Bài 2(3.5 Đ) : Cho ΔABC có $AB < AC$. Phân giác AD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$

- a/ Chứng minh : $BD = DE$
- b/ Gọi K là giao điểm của các đường thẳng AB và ED. Chứng minh $\Delta DBK = \Delta DEC$
- c/ ΔAKC là tam giác gì ?
- d/ Chứng minh $DE \perp KC$.

Bài 3(1đ) : Chứng tỏ rằng đa thức $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ không có nghiệm.

ĐỀ 06

I. TRẮC NGHIỆM (2đ) : Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng nhất

Câu 1: Biểu thức nào sau đây là đơn thức?

- a. $\frac{-5}{7}x$
- b. $x^2 + 1$
- c. $2x - y$
- d. $\frac{x}{y}$

Câu 2: Bậc của đơn thức $4^2x^3y^2$ là:

- a. 7
- b. 3
- c. 6
- d. 5

Câu 3: Đa thức $P(x) = 4.x + 8$ có nghiệm là:

- a. $x = 2$
- b. $x = -2$
- c. $x = \frac{1}{2}$
- d. $x = \frac{-1}{2}$

Câu 4: Bậc của đa thức $7^3x^6 - \frac{1}{3}x^3y^4 + y^5 - x^4y^4 + 1$ là:

- a. 9
- b. 8
- c. 7
- d. 6

Câu 5: Tính $(2x - 3y) + (2x + 3y)$?

- a. $4x$
- b. $6y$
- c. $-4x$
- d. $-6y$

Câu 6: Bộ ba độ dài nào sau đây có thể là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông?

a. 5cm, 12cm, 13cm

b. 4cm, 5cm, 9cm

c. 5cm, 7cm, 13cm

c. 5cm, 7cm, 11cm

Câu 7: Cho ΔMNP có $M = 110^\circ$; $N = 40^\circ$. **Cạnh nhỏ nhất của ΔMNP là:**

a. MN b. MP c. NP

d. Không có cạnh nhỏ nhất.

Câu 8: Cho tam giác cân, biết hai trong ba cạnh có độ dài là 3cm và 8cm. **Chu vi của tam giác đó là:**

a. 11cm,

b. 14cm,

c. 16cm,

d. 19cm

II. TỰ LUẬN:

Bài 1: (1,5 đ) Thời gian hoàn thành cùng một loại sản phẩm của 60 công nhân được cho trong bảng dưới đây (tính bằng phút)

Thời gian (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	2	2	3	5	6	19	9	14	N = 60

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì ? Có tất cả bao nhiêu giá trị ?

b) Tính số trung bình cộng ? Tìm mốt ?

Bài 2 : (1,5 đ) Cho 2 đa thức : $f(x) = x^3 + 3x - 1$ và $g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

a) Tính $f(x) + g(x)$

b) Tính $f(x) - g(x)$

Bài 3: (1,5 đ) Tìm nghiệm của đa thức $h(x) = 3x^3 - 4x + 5x^2 - 2x^3 + 8 - 5x^2 - x^3$

Bài 4: (3,5 đ) Cho ΔABC vuông tại A, phân giác BD. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại E.

a) Chứng minh $\Delta BAD = \Delta BED$

b) Chứng minh BD là trung trực của AE.

c) Chứng minh $AD < DC$.

d) Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF = CE$. Chứng minh ba điểm E, D, F thẳng hàng.

ĐỀ 07

Câu 1: (2 điểm). Một giáo viên theo dõi thời gian làm một bài tập (thời gian tính theo phút) của 30 học sinh (ai cũng làm được) và ghi lại như sau:

9	5	8	8	9	7	8	9	14	8
6	7	8	10	9	8	10	7	14	8
8	8	9	9	9	9	10	5	5	14

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Tính số trung bình cộng của dấu hiệu?

c) Tìm mốt của dấu hiệu?

Câu 2: (2 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức sau: $P(x) = 2x^2 + x - 1$ lần lượt tại $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$

b) Trong các số -1, 1, 2 số nào là nghiệm của đa thức $P(x) = x^2 - 3x + 2$ hãy giải thích.

Câu 3: (2 điểm). Cho $P(x) = x^3 - 2x + 1$ và $Q(x) = 2x^2 - 2x^3 + x - 5$

a) Tính $P(x) + Q(x)$

b) Tính $P(x) - Q(x)$

Câu 4: (3 điểm). Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy hai điểm A và B, trên tia Oy lấy hai điểm C và D sao cho OA = OC; OB = OD. Gọi I là giao điểm của hai đoạn thẳng AD và BC. Chứng minh rằng:

- BC = AD.
- IA = IC.
- Tia OI là tia phân giác của góc xOy.

Câu 5: (1 điểm). Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - x) - 4x + 8$, $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$

Trong đó a, b, c là hằng. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

ĐỀ 08

Phần 1: Trắc nghiệm khách quan (2đ)

Chọn đáp án đúng nhất

Câu 1: Cho tam giác ABC có CN, BM là các đường trung tuyến, góc ANC và góc CMB là góc tù. Ta có

- A. / $AB < AC < CB$ B. / $AC < AB < BC$ C. / $AC < BC < AB$ D. / $AB < BC < AC$

Câu 2: Đơn thức $\frac{1}{3}x^3y^4z^5$ có bậc là

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 12

Câu 3: Cho hai đa thức $A = x^2 - 2y + xy + 3$ và $B = x^2 + y - xy - 3$. Khi đó $A + B$ bằng:

- A. $2x^2 - 3y$ B. $2x^2 - y$ C. $2x^2 + y$ D. $2x^2 + y - 6$

Câu 4: Cho tam giác ABC với AD là trung tuyến, G là trọng tâm, $AD = 12\text{cm}$. Khi đó độ dài đoạn GD bằng:

- A. 8cm B. 9 cm C. 6 cm D. 4 cm

Phần 2: Tự luận (8đ)

Câu 1: (1.5đ) Theo dõi điểm kiểm tra học kó 1 môn Toán của học sinh lớp 7A tại một trường THCS, người ta lập được bảng sau:

Điểm số	0	2	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	5	5	8	8	11	4	3	N=45

- Dấu hiệu điều tra là gì? Tìm một của dấu hiệu?
- Tính điểm trung bình kiểm tra học kó 1 của học sinh lớp 7A.
- Nhận xét về kết quả kiểm tra học kó 1 môn Toán của Các bạn lớp 7A.

Câu 2: (1đ) Tính tích của hai đơn thức: $-2x^2yz$ và $-3xy^3z$. Tìm hệ số và bậc của tích tìm được.

Câu 3: (2,5đ) Cho đa thức: $f(x) = 3x^6 + 3x^2 + 5x^3 - 2x^2 + 4x^4 - x^3 + 1 - 4x^3 - 2x^4$

- Thu gọn $f(x)$
- Tính $f(1)$; $f(-1)$.
- Chứng tỏ rằng $f(x)$ không có nghiệm.

Câu 4: (3đ) Cho tam giác ABC có góc $A = 90^\circ$. Tia phân giác của \hat{B} cắt AC tại E. Kẻ $EH \perp BC$ (H thuộc BC) Chứng tỏ rằng:

- $\triangle ABE = \triangle HBE$
- BE là trung trực của AH
- $EC > AE$

ĐỀ 09

I- Phần Trắc nghiệm: (2 điểm) Khoanh tròn chữ cái đứng đầu câu trả lời đúng:

1. Giá trị nào là nghiệm của đa thức $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$

- A. 1 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. Giá trị của biểu thức $M = -2x^2 - 5x + 1$ tại $x = 2$ là:
 A. -17 B. -18 C. 19 D. Một kết quả khác
3. Bậc của đa thức : $5x^3 - 2x^2 + 3x^2 + 5x - 2x^2 - 3x^3$ là:
 A. 2 B. 3 C. 6 D. 1
6. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ; \hat{B} = 40^\circ;$ so sánh nào sau đây là đúng:
 A. $AC > BC$ B. $AB > AC$ C. $AB < BC$ D. $AB < AC$

II- Phần Tự luận : (8 điểm)

Câu 1: (1,5đ) điểm kiểm tra học kó 1 mụn Toỏn của tổ 1 học sinh lớp 7A đượ ghi ở bảng sau:

5	4	9	6	8	9	10
9	6	6	9	8	4	5

- a) Dấu hiệu điều tra là gì ? từ đó lập bảng “tần số”
 b) Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.
 c) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng và nhận xét.

Câu 2: (2đ) Tam giác nào là tam giác vuông trong các tam giác có độ dài ba cạnh như sau:

- a. 3cm, 4cm, 5cm c. 6dm, 7dm, 14dm
 b. 2,1cm, 3cm, 5,1cm d. 3dm, 4dm, 6dm

Câu 3: (2,5đ) Cho hai đa thức : $P(x) = 3x^5 - 7x - 6x^3 + x^4 + 1; Q(x) = 9x^2 - 1 + 7x - 3x^5$

- a. Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.
 b. Tính $P(x) + Q(x); P(x) - Q(x)$
 c. Tìm nghiệm của $P(x) + Q(x)$

Câu 4: (3đ) Cho tam giác ABC đều, đường cao AH. Trên tia đối của tia CB lấy D sao cho $CD = CB$. Dựng đường cao CE của tam giác ACD. Tia đối của tia HA và tia đối của tia CE cắt nhau tại F

- a. Chứng minh: $AE = DE$ và tam giác ABD vuông tại A.
 b. Chứng minh : C là trọng tâm của tam giác AFD.

ĐỀ 10

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (3đ)

Bài 1 : Chọn câu trả lời đúng ghi vào giấy bài làm

Câu 1 : Các nghiệm của đa thức $x^2 - 2x$ là :

- A. 0 B. 2 C. 0 và 2 D. 1

Câu 2 : Giá trị của biểu thức $2x^2 - x$ khi $x = -2$ là :

- A. -6 B. 6 C. -10 D. 10

Câu 3 : Cho bảng “Tần số “ của dấu hiệu là :

Giá trị (x)	36	37	38	39	40	41	42
tần số (n)	13	45	110	184	126	40	5

Câu 4 : Bậc của đa thức $x^6 - 2.x^4y + 8xy^4 + 9$ là

A. 6 B. 9 C. 7 D. 17

Câu 5: Hai cạnh góc vuông của tam giác vuông là 6cm và 8cm thì cạnh huyền bằng :

A. 4cm B. 10cm C. 12cm D. 14cm

Câu 6 : Tam giác PQR là tam giác vuông cân tại Q nếu:

A. Góc Q = 90° và $QP = QR$; B. Góc P = góc R và góc P + góc R = 90°
 C. $QP = QR$ và góc P + góc R = 90° D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 7 : Cho tam giác RQS , biết rằng $RQ = 6\text{cm}$; $QS = 7\text{cm}$; $RS = 5\text{cm}$

Ta có : A. góc R < góc S < góc Q B. góc R > góc S > góc Q
 C. góc S < góc R < góc Q D. góc R > góc Q > góc S

Câu 8 : Cho tam giác MNP cân tại M, G là trọng tâm tam giác MNP

Ta có : A. $GN = GM$ B. $GN = GP$ C. $GM = GP$ D. $GN = GM = GP$

Câu 9 : Cho tam giác DEF có góc D = 80° các đường phân giác EM và FN cắt nhau tại S ta có :

A. Góc EDS = 40° B. Góc EDS = 160° C. $SD = SE = SF$ D. $SE = \frac{2}{3} EM$

Câu 10: Cho SM và PN là hai đường cao của tam giác SPQ , SM cắt PN tại I

Ta có : A. $IS = IP = IQ$ B. I cách đều 3 cạnh của tam giác
 C. $SI = \frac{2}{3} SM$ D. Cả A, B , C đều sai

Câu 11: Cho tam giác SPQ biết góc S = 70° góc P = 30°

Ta có : A. $SQ < PQ < SP$ B. $SQ < SP < PQ$
 C. $SQ > PQ > SP$ D. $PQ < SP < SQ$

Câu 12 : Tam giác cân có độ dài hai cạnh là 7cm và 3 cm thì chu vi của tam giác đó là :

A. 17 cm B. 13 cm C. Cả A, B đều đúng D. Cả A, B đều sai

II/ PHẦN TỰ LUẬN (7 ĐIỂM)

Bài 2: (2đ) Cho các đa thức

$$M(x) = 3x^3 + x^2 - 3x + 5$$

$$N(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 9$$

a, Tính $M(x) + N(x)$

b, Biết $M(x) + N(x) - P(x) = 6x^3 + 3x^2 + 2x$. Hãy tính $P(x)$

c, Tìm nghiệm của đa thức $P(x)$

Bài 3 : (4đ) : Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC có chứa điểm B, kẻ tia $Cx \parallel AB$. Trên tia Cx lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Kẻ DK vuông góc BC (K thuộc BC)

Gọi O là trung điểm của BC . Chứng minh

a, $AH = DK$

b. Ba điểm A, O , D thẳng hàng

c. $AC \parallel BD$

Bài 4 : (1đ) : Chứng tỏ rằng đa thức $x^2 + 4x + 5$ không có nghiệm

CHƯƠNG I: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

GÓC ĐỐI ĐỈNH

❖ Kiến thức cơ bản:

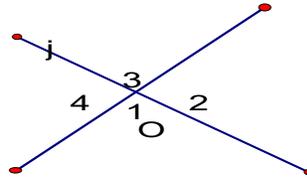
1. Hai góc đối đỉnh:

* Định nghĩa:

Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của mỗi cạnh góc kia.

* Tính chất:

$$\angle O_1 \text{ đối đỉnh } \angle O_2 \Rightarrow \angle O_1 = \angle O_2$$



2. Kiến thức bổ sung (dành cho học sinh khá giỏi)

- Hai tia chung gốc cho ta một góc.

- Với n đường thẳng phân biệt giao nhau tại một điểm có $2n$ tia chung gốc. Số góc tạo bởi hai tia chung gốc là: $2n(2n-1) : 2 = n(2n-1)$

Trong đó có n góc bẹt. Số góc còn lại là $2n(n-1)$. Số cặp góc đối đỉnh là: $n(n-1)$

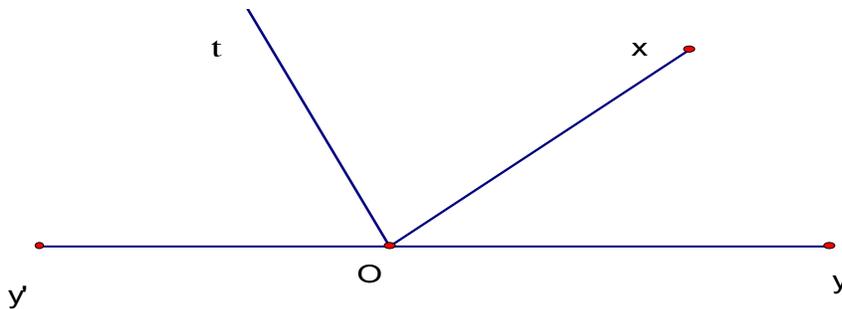
❖ Bài tập:

Bài tập 1: Cho góc nhọn xOy ; vẽ tia Oy' là tia đối của tia Oy

a) Chứng tỏ góc xOy' là góc tù.

b) Vẽ tia phân giác Ot của góc xOy' ; góc xOt là góc nhọn, vuông hay góc tù.

Bài giải



a) Oy' là tia đối của tia Oy , nên: $\angle xOy$ và $\angle xOy'$ là hai góc kề bù

$$\Rightarrow \angle xOy + \angle xOy' = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle xOy' = 180^\circ - \angle xOy$$

Vì $\angle xOy < 90^\circ$ nên $\angle xOy' > 90^\circ$. Hay $\angle xOy'$ là góc tù

b) Vì Ot là tia phân giác của $\angle xOy'$ nên: $\angle xOt = \frac{1}{2} \angle xOy'$

$$\text{mà } \angle xOy' < 180^\circ$$

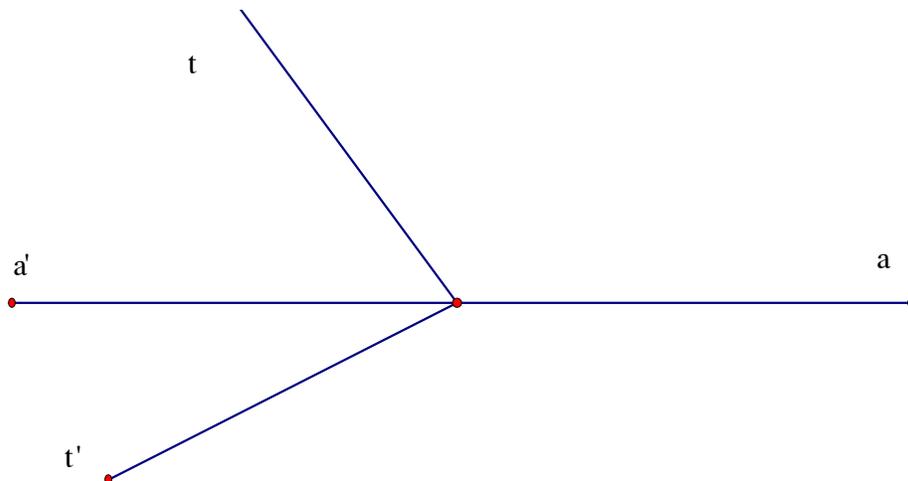
$$\Rightarrow \angle xOt < 90^\circ$$

Hay $\angle xOt$ là góc nhọn

Bài tập 2:

- a) Vẽ hình theo cách diễn đạt sau: Trên đường thẳng aa' lấy điểm O . Vẽ tia Ot sao cho góc aOt tù. Trên nửa mặt phẳng bờ aa' không chứa tia Ot vẽ tia Ot' sao cho góc $a'Ot'$ nhọn.
- b) Dựa vào hình vẽ cho biết góc aOt và $a'Ot'$ có phải là cặp góc đối đỉnh không? Vì sao?

Bài giải:

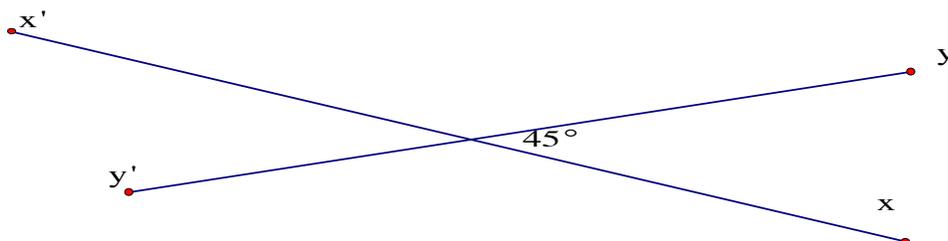


Vì tia Ot' không là tia đối của tia Ot nên hai góc $\angle aOt$ và $\angle a'Ot'$ không phải là cặp góc đối đỉnh

Bài tập 3:

Cho hai đường thẳng xx' và yy' giao nhau tại O sao cho góc $xOy = 45^\circ$. Tính số đo các góc còn lại trong hình vẽ.

Bài giải

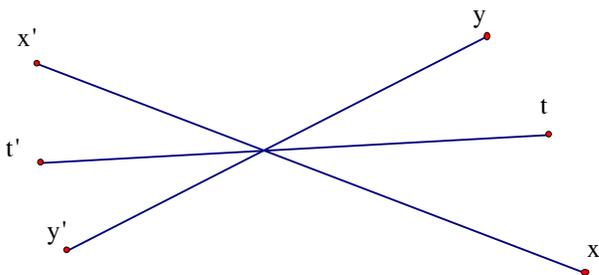


- * Ta có: $\angle xOy + \angle yOx' = 180^\circ$ (t/c hai góc kề bù)
 $\Rightarrow \angle yOx' = 180^\circ - \angle xOy$
 $= 180^\circ - 45^\circ$
 $= 135^\circ$
- * $\angle xOx' = \angle yOy' = 180^\circ$ (góc bẹt)
- * $\angle x'Oy' = \angle xOy = 45^\circ$ (cặp góc đối đỉnh)
- * $\angle x'Oy = \angle x'Oy' = 135^\circ$ (cặp góc đối đỉnh)

Bài tập 4:

Cho hai đường thẳng xx' và yy' giao nhau tại O . Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy ; vẽ tia Ot' là tia phân giác của góc $x'Oy'$. Hãy chứng tỏ Ot' là tia đối của tia Ot .

Bài giải



Ta có: $\angle xOt = \frac{1}{2} \angle xOy$ (tính chất tia phân giác của một góc)

$\angle xOy = \angle x'Oy'$ (t/c hai góc đối đỉnh)

$\angle x'Ot' = \angle xOt$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \angle x'Ot' = \frac{1}{2} \angle x'Oy'$$

Tương tự, ta có $\angle y'Ot' = \frac{1}{2} \angle x'Oy'$

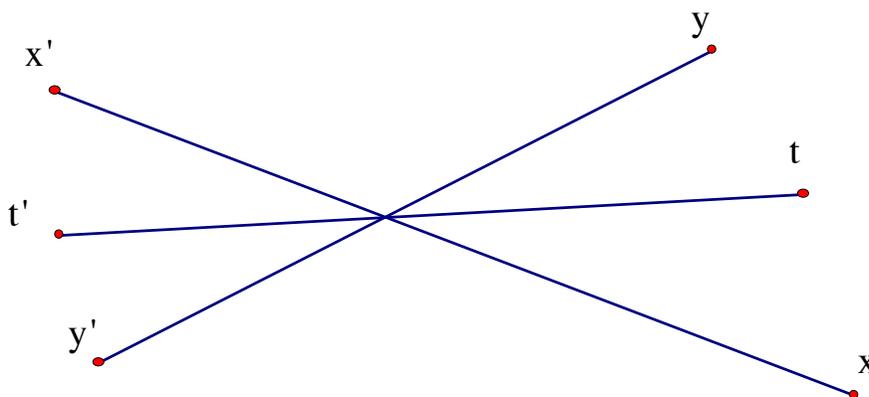
$\Rightarrow Ot'$ là tia phân giác của góc $x'Ot'$

Bài tập 5:

Cho 3 đường thẳng phân biệt xx' ; yy' ; zz' cắt nhau tại O ; Hình tạo thành có:

- a) bao nhiêu tia chung gốc?
- b) Bao nhiêu góc tạo bởi hai tia chung gốc?
- c) Bao nhiêu góc bẹt?
- d) Bao nhiêu cặp góc đối đỉnh?

Bài giải



- a) Có 6 tia chung gốc
- b) Có 15 góc tạo bởi hai tia chung gốc.
- c) Có 3 góc bẹt
- d) Có 6 cặp góc đối đỉnh

Bài tập 6:

Từ kết quả của bài tập số 5, hãy cho biết: Nếu n đường thẳng phân biệt cắt nhau tại một điểm có bao nhiêu góc bẹt? Bao nhiêu cặp góc đối đỉnh?

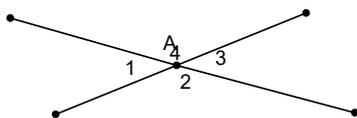
Bài giải:

Có n góc bẹt; $n(n - 1)$ cặp góc đối đỉnh.

Bài 7 : Khoanh tròn vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng nhất :

1. Hai đường thẳng xy và $x'y'$ cắt nhau tại A , ta có:

- a) \hat{A}_1 đối đỉnh với \hat{A}_2 , \hat{A}_2 đối đỉnh với \hat{A}_3
- b) \hat{A}_1 đối đỉnh với \hat{A}_3 , \hat{A}_2 đối đỉnh với \hat{A}_4
- c) \hat{A}_2 đối đỉnh với \hat{A}_3 , \hat{A}_3 đối đỉnh với \hat{A}_4
- d) \hat{A}_4 đối đỉnh với \hat{A}_1 , \hat{A}_1 đối đỉnh với \hat{A}_2



2. Câu nào sau đây đúng ?

- A. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau
- B. Hai góc không đối đỉnh thì không bằng nhau
- C. Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh
- D. Hai góc không bằng nhau thì không đối đỉnh

3. Nếu có hai đường thẳng:

- A. Vuông góc với nhau thì cắt nhau
- B. Cắt nhau thì vuông góc với nhau
- C. Cắt nhau thì tạo thành 4 cặp góc bằng nhau
- D. Cắt nhau thì tạo thành 2 cặp góc đối đỉnh

4. Đường thẳng xy là trung trực của AB nếu:

- A. $xy \perp AB$
- B. $xy \perp AB$ tại A hoặc tại B
- C. xy đi qua trung điểm của AB
- D. $xy \perp AB$ tại trung điểm của AB

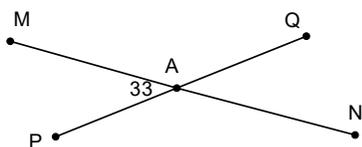
5. Nếu có 2 đường thẳng:

- a. Vuông góc với nhau thì cắt nhau
- b. Cắt nhau thì vuông góc với nhau
- c. Cắt nhau thì tạo thành 4 cặp góc bằng nhau
- d. Cắt nhau thì tạo thành 4 cặp góc đối đỉnh

Bài 8:

Hai đường thẳng MN và PQ cắt nhau tại A tạo thành góc MAP có số đo bằng 33°

- a) Tính số đo \widehat{NAQ}
- b) Tính số đo \widehat{MAQ}
- c) Viết tên các cặp góc đối đỉnh
- d) Viết tên các cặp góc bù nhau

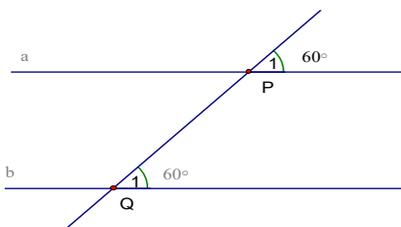


Bài 9:

Cho đoạn thẳng AB dài 24 mm. Hãy vẽ đường trung trực của đoạn thẳng ấy? Nêu cách vẽ?

Bài 10:

Cho biết $a // b$ và $\hat{P}_1 = \hat{Q}_1 = 30^\circ$



a) Viết tên một cặp góc đồng vị khác và nói rõ số đo các góc

- b) Viết tên một cặp góc so le trong và nói rõ số đo mỗi góc
 c) Viết tên một cặp góc trong cùng phía và nói rõ số đo mỗi góc
 d) Viết tên một cặp góc ngoài cùng phía và nói rõ số đo mỗi góc

Bài 11: Các khẳng định sau đúng hay sai:

Đường thẳng $a//b$ nếu:

- a) a, b cắt đường thẳng d mà trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau
 b) a, b cắt đường thẳng d mà trong các góc tạo thành có một cặp góc ngoài cùng phía bù nhau
 c) a, b cắt đường thẳng d mà trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau
 d) Nếu $a \perp b, b \perp c$ thì $a \perp c$
 e) Nếu a cắt b, b lại cắt c thì a cắt c
 f) Nếu $a//b, b//c$ thì $a//c$

III. BT về nhà:

1) Cho hình chữ nhật ABCD, hai đường chéo AC và BD giao nhau tại O. Gọi tên các cặp góc đối đỉnh có trên hình vẽ.

Hướng dẫn: Sử dụng định nghĩa hai góc đối đỉnh

2) trên đường thẳng xy lấy điểm O. Vẽ tia Ot sao cho góc xOt bằng 30° . Trên nửa mặt bờ xy không chứa Ot vẽ tia Oz sao cho góc xOz = 120° . Vẽ tia Ot' là tia phân giác của góc yOz. Chứng tỏ rằng góc xOt và góc yOt' là hai góc đối đỉnh.

Hướng dẫn:

- tính góc t'Oz
- Tính góc tOt'

DẠNG TOÁN VỀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC, CẮT NHAU

I. Kiến thức cần nhớ

1. **Phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc :**

- Chứng minh một trong bốn góc tạo thành có một góc vuông.
- Chứng minh hai góc kề bù bằng nhau.
- Chứng minh hai tia là hai tia phân giác của hai góc kề bù.
- Chứng minh hai đường thẳng đó là hai đường phân giác của 2 cặp góc đối đỉnh.

2. **Phương pháp chứng minh một đường thẳng là trung trực của đoạn thẳng:**

- Chứng minh a vuông góc với AB tại trung điểm của AB.
- Lấy một điểm M tùy ý trên a rồi chứng minh MA = MB

3. **Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song**

Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b tại A và B

để chứng minh đường thẳng $a//b$ ta làm theo các phương pháp sau:

1. Chứng minh hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau
2. Chứng minh hai góc ở vị trí đồng vị bằng nhau
3. Chứng minh hai góc ở vị trí so le ngoài bằng nhau
4. Hai góc ở vị trí trong cùng phía bù nhau
5. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba.
6. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba

II. Bài tập

Bài 1: Chứng minh rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau?

Giải: Vẽ Ot là tia phân giác của góc xOy

Ta có: Oz và Ot là hai tia phân giác của hai góc kề bù xOy và yOx'

do đó góc $\angle zOt = \angle 90^0 = 1v$ (1)

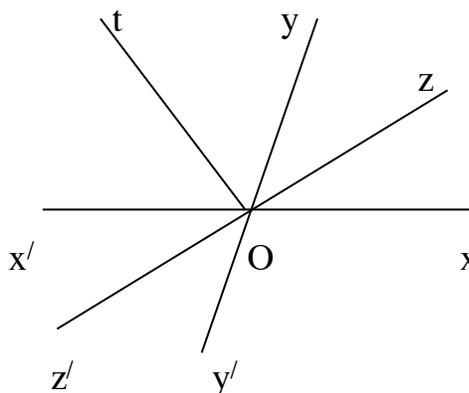
Mặt khác Oz' và Ot là hai tia phân giác của hai góc kề bù y'Ox' và x'Oy

do đó $\angle z'Ot = 90^0 = 1v$ (2)

Lấy (1) + (2) = $\angle zOt + \angle z'Ot = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà hai tia Oz và Oz' là không trùng nhau

Do đó Oz và Oz' là hai tia phân giác đối nhau.



Bài 2: Cho hai góc kề bù xOy và yOx'. Vẽ tia phân giác Oz của xOy trên nửa mặt phẳng bờ xx' có chứa Oy, vẽ tia Oz' vuông với Oz. Chứng minh rằng tia Oz' là tia phân giác của yOx'.

t

Giải: Vẽ tia Ot là tia phân giác của yOx'

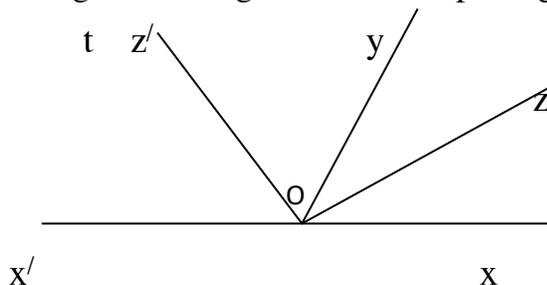
hai tia Oz và Ot lần lượt là hai tia phân giác của hai góc kề bù xOy và yOx'

do đó: $Oz \perp Ot$

có: $Oz \perp Oz'$ (gt)

Nên hai tia Ot và Oz trùng nhau

Vậy Oz' là tia phân giác của góc yOz'



Bài 3: Cho hình vẽ

a. góc O_1 và O_2 có phải là hai góc đối đỉnh không?

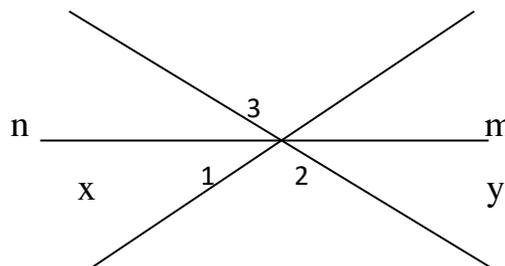
b. Tính $\angle O_1 + \angle O_2 + \angle O_4$

Giải:

a. Ta có $\angle O_1$ và $\angle O_2$ không đối đỉnh

b. Có $\angle O_4 = \angle O_3$ (vì đối đỉnh)

$$\begin{aligned} \angle O_1 + \angle O_4 + \angle O_2 &= \angle O_1 + \angle O_3 + \angle O_2 \\ &= 180^0 \end{aligned}$$



Bài 4: Trên hình bên có $O_5 = 90^0$

Tia Oc là tia phân giác của aOb

Tính các góc: $\angle O_1$; $\angle O_2$; $\angle O_3$; $\angle O_4$

Giải:

$$\angle O_5 = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\text{Mà } \angle O_5 + \angle aOb = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\text{Do đó: } \angle aOb = 90^\circ$$

Có Oc là tia phân giác của aOb (gt)

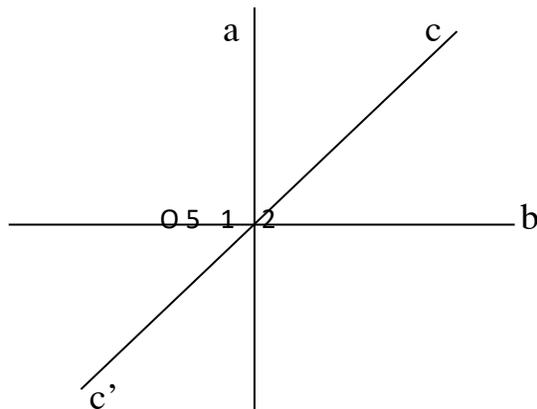
$$\text{Nên } \angle cOa = \angle cOb = 45^\circ$$

$$\angle O_2 = \angle O_3 = 45^\circ \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\begin{aligned} \angle bOc' + \angle O_3 &= 180^\circ \Rightarrow \angle bOc' = \angle O_4 = 180^\circ - \angle O_3 \\ &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Vậy số đo của các góc là: } \angle O_1 = \angle O_2 = \angle O_3 = 45^\circ$$

$$\angle O_4 = 135^\circ$$



Bài 5: Cho hai đường thẳng xx' và $y'y'$ cắt nhau tại O sao cho $\angle xOy = 40^\circ$. Các tia Om và On là các tia phân giác của góc xOy và $x'Oy'$.

a. Các tia Om và On có phải là hai tia đối nhau không?

b. Tính số đo của tất cả các góc có đỉnh là O.

$$\text{Biết: } x'x \cap y'y' = \{O\}$$

$$\angle xOy = 40^\circ$$

$$n \in \angle x'Oy'$$

$$m \in \angle xOy$$

a. Om và On đối nhau

Tìm b. $\angle mOx$; $\angle mOy$; $\angle nOx'$; $\angle x'Oy'$

Giải:

a. Ta có: Vì các góc xOy và $x'Oy'$ là đối đỉnh nên $\angle xOy = \angle x'Oy'$

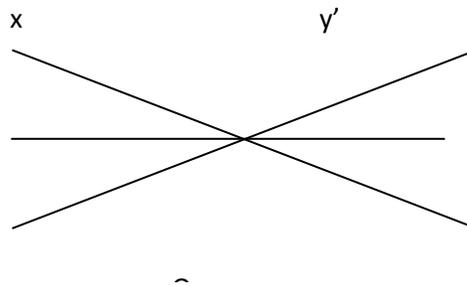
Vì Om và On là các tia phân giác của hai góc đối đỉnh ấy

Nên 4 nửa góc đó đôi một bằng nhau và

Ta có: $\angle mOx = \angle nOx'$ vì hai góc xOy và $x'Oy'$ là kề bù

$$\text{nên } \angle yOx' + \angle xOy = 180^\circ$$

$$\text{hay } \angle yOx' + (\angle nOx' + \angle mOy) = 180^\circ$$



$$\angle yOx' + (\angle nOx' + \angle mOy) = 180^\circ \text{ (vì } \angle mOx = \angle nOx')$$

tức là $\angle mOn = 180^\circ$ vậy hai tia Om và On đối nhau

b. Biết: $\angle xOy = 40^\circ$ nên ta có

$$\angle mOn = \angle mOy = 20^\circ; \angle x'Oy' = 40^\circ; \angle nOx' = \angle nOy' = 20^\circ$$

$$\angle xOy' = \angle yOx' = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\angle mOx' = \angle mOy' = \angle nOy = \angle nOx = 160^\circ$$

Bài 6: Cho hai góc AOB và COD cùng đỉnh O, các cạnh của góc này vuông góc với các cạnh của góc kia. Tính các góc AOB và COD nếu hiệu giữa chúng bằng 90° .

Giải: Ở hình bên có góc COD nằm trong

góc AOB và giả thiết có:

$$\angle AOB - \angle COD = \angle AOC + \angle BOD =$$

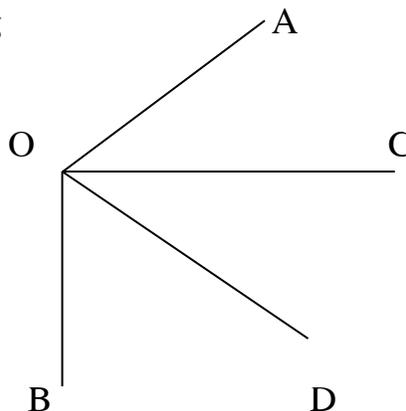
$$\text{ta lại có: } \angle AOC + \angle COD = 90^\circ$$

$$\text{và } \angle BOD + \angle COD = 90^\circ$$

$$\text{suy ra } \angle AOC = \angle BOD$$

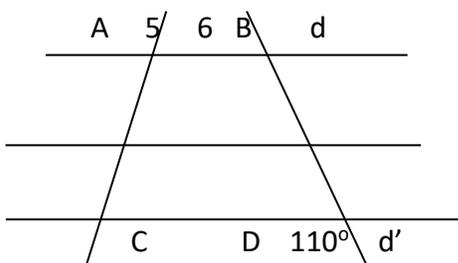
$$\text{Vậy } \angle AOC = \angle BOD = 45^\circ$$

$$\text{suy ra } \angle COD = 45^\circ; \angle AOB = 135^\circ$$



LUYỆN TẬP: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC, SONG SONG, CẮT NHAU.

Bài 1: Cho hình vẽ biết $d \parallel d' \parallel d''$ và hai góc 60° và 110° Tính các góc E_1, G_2, D_4, A_5, B_6 .



Bài làm

a/ Số đo của $\angle E_1$?

Ta có: $d' \parallel d''$ (gt) $\Rightarrow \angle C = \angle E_1$ (so le trong)

$$\text{mà } \angle C = 60^\circ \Rightarrow \angle E_1 = 60^\circ$$

b/ Số đo của $\angle G_2$?

Ta có: $d \parallel d''$ (gt) $\Rightarrow \angle D = \angle G_2$ (đồng vị)

$$\text{mà } \angle D = 110^\circ \Rightarrow \angle G_2 = 110^\circ$$

c/ Số đo của $\angle G_3$?

$$\text{Ta có: } \angle G_2 + \angle G_3 = 180^\circ \text{ (kề bù)} \Rightarrow 110^\circ + \angle G_3 = 180^\circ$$

$\Rightarrow \angle G_3 = 180^\circ - 110^\circ$

$\angle G_3 = 70^\circ$

d/ Số đo của $\angle D_4$?

Ta có : $\angle BDd' = \angle D_4$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle BDd' = \angle D_4 = 110^\circ$

e/ Số đo của $\angle A_5$?

Ta có: $\angle ACD = \angle C$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle ACD = \angle C = 60^\circ$.

Vì $d \parallel d'$ nên: $\angle ACD = \angle A_5$ (đồng vị)

$\Rightarrow \angle ACD = \angle A_5 = 60^\circ$

f/ Số đo của $\angle B_6$?

Vì $d'' \parallel d'$ nên: $\angle G_3 = \angle BDC$ (đồng vị)

Vì $d \parallel d'$ nên: $\angle B_6 = \angle BDC$ (đồng vị)

$\Rightarrow \angle B_6 = \angle G_3 = 70^\circ$

Bài 2: Cho góc xOy và tia Oz nằm trong góc đó sao cho $\angle xOz = 4\angle yOz$. Tia phân giác Ot của góc xOz thoả mãn $Ot \perp Oy$. Tính số đo của góc xOy .

Giải:

Vì $\angle xOy = \angle xOz + \angle yOz$
 $= 4\angle yOz + \angle yOz = 5\angle yOz$ (1)

Mặt khác ta lại có:

$\angle yOt = 90^\circ \Leftrightarrow 90^\circ = \angle yOz + \angle yOt$
 $= \angle yOz + \frac{1}{2} \angle xOz = \angle yOz + \frac{1}{2} \cdot 4\angle yOz$

$= 3\angle yOz \Leftrightarrow \angle yOz = 30^\circ$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $\angle xOy = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$

Vậy ta tìm được $\angle xOy = 150^\circ$

Bài 3: Cho hai góc xOy và $x'O'y'$, biết $Ox \parallel O'x'$ (cùng chiều) và $Oy \parallel O'y'$ (ngược chiều). Chứng minh rằng $\angle xOy + \angle x'O'y' = 180^\circ$

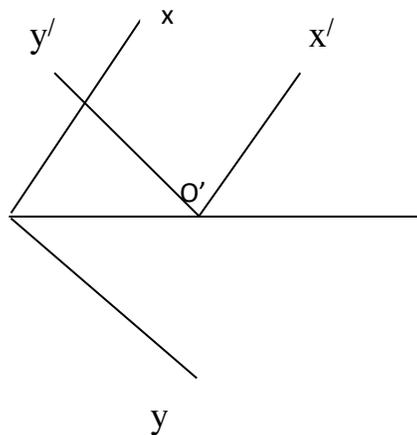
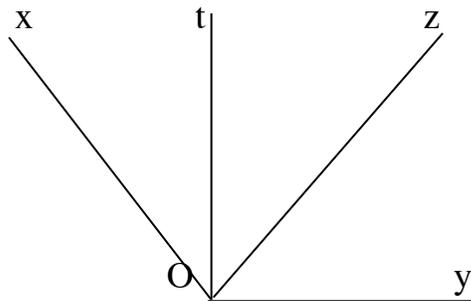
Giải:

Nối OO' thì ta có nhận xét

Vì $Ox \parallel O'x'$ nên $\angle O_1 = \angle O'_1$ (đồng vị)

Vì $Oy \parallel O'y'$ nên $\angle O_2 = \angle O'_2$ (so le)

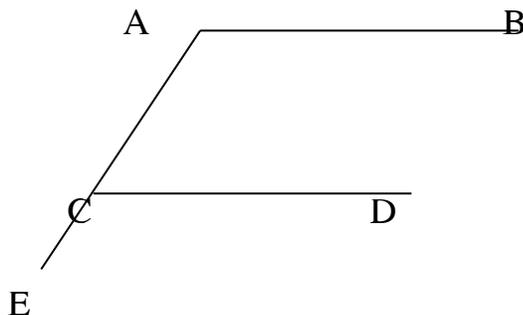
khi đó: $\angle xOy = \angle O_1 + \angle O_2 = \angle O'_1 + \angle O'_2$
 $= 180^\circ - \angle x'O'y' \Leftrightarrow \angle xOy + \angle x'O'y' = 180^\circ$



Bài 4: Trên hình bên cho biết

$$\angle BAC = 130^\circ; \angle ADC = 50^\circ$$

Chứng tỏ rằng: $AB \parallel CD$



Giải:

Vẽ tia CE là tia đối của tia CA

$$\text{Ta có: } \angle ACD + \angle DCE = 180^\circ$$

(hai góc ACD và DCE kề bù)

$$\Rightarrow \angle DCE = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

Ta có: $\angle DCE = \angle BAC (= 130^\circ)$ mà DCE và BAC là hai góc đồng vị

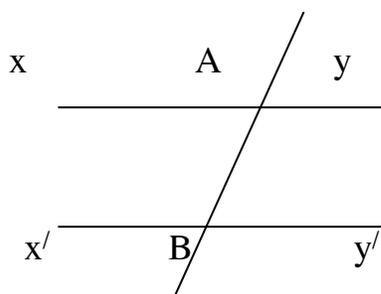
Do đó: $AB \parallel CD$

Bài 5: Trên hình bên cho hai đường thẳng

xy và $x'y'$ phân biệt. Hãy nêu cách nhận biết

xem hai đường thẳng xy và $x'y'$ song song

hay cắt nhau bằng dụng cụ thước đo góc



Giải:

Lấy $A \in xy$; $B \in x'y'$ vẽ đường thẳng AB.

Dùng thước đo góc để đo các góc xAB và ABx' . Có hai trường hợp xảy ra

* Góc $\angle xAB = \angle ABx'$

Vì $\angle xAB$ và $\angle ABx'$ so le trong nên $xy \parallel x'y'$

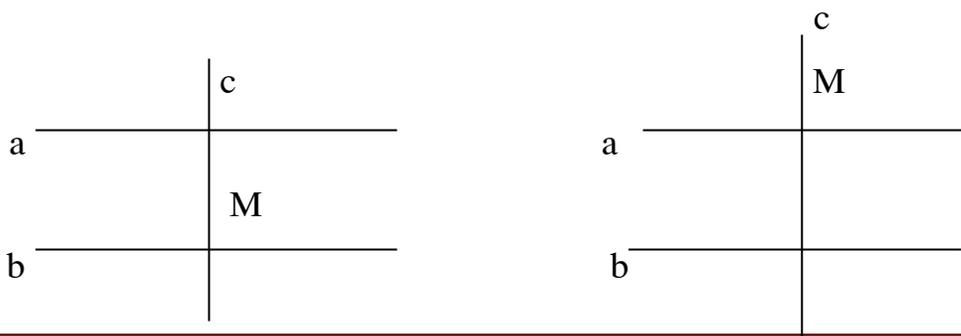
* $\angle xAB \neq \angle ABx'$

Vì $\angle xAB$ và $\angle ABx'$ so le trong nên xy và $x'y'$ không song song với nhau.

Vậy hai đường thẳng xy và $x'y'$ cắt nhau

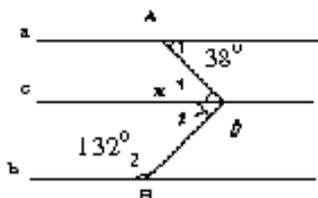
Bài 6: Vẽ hai đường thẳng sao cho $a \parallel b$. Lấy điểm M nằm ngoài hai đường thẳng a, b . Vẽ đường thẳng c đi qua M và vuông góc với a và b .

Giải:



**LUYỆN TẬP: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC,
SONG SONG, CẮT NHAU.**

Bài 1: Cho hình vẽ sau



GT	$a // b$ $\widehat{A}_1 = 38^\circ; \widehat{B}_1 = 132^\circ$
KL	$\widehat{AOB} = ? (x = ?)$

HD: Qua O vẽ $c // a$

Ta có : $c // a$ (cách dựng)

Và $a // b$ (GT)

$\Rightarrow c // b$

Mà $\widehat{O}_1 = \widehat{A}_1 = 38^\circ$ (1) (Hai góc sole trong tạo bởi $c // a$)

Và $\widehat{O}_2 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (Hai góc trong cùng phía tạo bởi $c // b$)

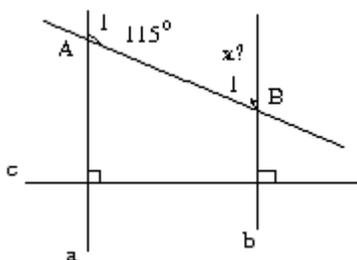
$\Rightarrow \widehat{O}_2 = 180^\circ - \widehat{B}_1 = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{AOB} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = 38^\circ + 48^\circ = 86^\circ$$

Hay $x = 86^\circ$

Bài 2: Cho hình vẽ sau, biết $a \perp c$; $b \perp c$; $\widehat{A}_1 = 115^\circ$. Tính góc B_1 ?



HD: Vì $a \perp c$ và $b \perp c$ nên $a // b$

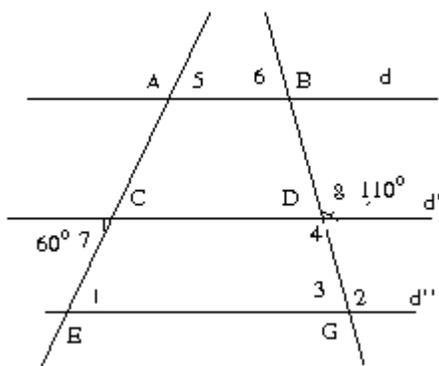
Ta có : $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (góc trong cùng phía tạo bởi $a // b$)

Nên $\widehat{B}_1 = 180^\circ - \widehat{A}_1$

$$\widehat{B}_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

Vậy $x = 65^\circ$

Bài 3: Cho hình vẽ $d // d' // d''$; $\widehat{C}_7 = 60^\circ$; $\widehat{D}_8 = 110^\circ$. Tính $\widehat{E}_1; \widehat{G}_2; \widehat{G}_3; \widehat{D}_4; \widehat{A}_5; \widehat{B}_6$

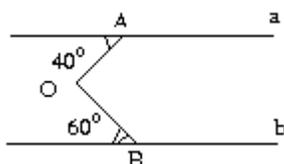


HD:

$$\widehat{G_2} = \widehat{D_8} = 110^\circ \text{ (đồng vị tạo bởi } d' // d'')$$

$$\widehat{G_3} = 180^\circ - \widehat{G_2} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \text{ (kề bù)}$$

Bài 4: : Cho hình vẽ sau :



Trên hình trên cho biết $a // b$ $\widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$. Tính \widehat{AOB}

BÀI TẬP TỔNG HỢP

1. Dạng 1: Bài tập về hai đường thẳng vuông góc.

Bài 1.

Vẽ góc xOy có số đo bằng 45° . Lấy điểm A bất kì trên Ox, vẽ qua A đường thẳng d_1 vuông góc với đường tia Ox và đường thẳng d_2 vuông góc với tia Oy.

Bài 2.

Vẽ góc xOy có số đo bằng 60° . Vẽ đường thẳng d_1 vuông góc với đường tia Ox tại A. Trên d_1 lấy B sao cho B nằm ngoài góc xOy. Qua B vẽ đường thẳng d_2 vuông góc với tia Oy tại C. Hãy đo góc ABC bằng bao nhiêu độ.

Bài 3.

Vẽ góc ABC có số đo bằng 120° , $AB = 2\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Vẽ đường trung trực d_1 của đoạn AB. Vẽ đường trung trực d_2 của đoạn thẳng AC. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O.

Bài 4

Cho góc xOy= 120° , ở phía ngoài của góc vẽ hai tia Oc và Od sao cho Od vuông góc với Ox, Oc vuông góc với Oy. Gọi Om là tia phân giác của góc xOy, On là tia phân giác của góc dOc. Gọi Oy' là tia đối của tia Oy.

Chứng minh:

a/ Ox là tia phân giác của góc y'Om.

b/ Tia Oy' nằm giữa 2 tia Ox và Od.

c/ Tính góc mOc.

d/ Góc mOn = 180° .

Bài 5.

Cho góc nhọn xOy , trên tia Ox lấy điểm A . Kẻ đường thẳng đi qua A vuông góc với Ox , đường thẳng này cắt Oy tại B . Kẻ đường vuông góc AH với cạnh OB .

a/ Nêu tên các góc vuông.

b/ Nêu tên các cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc.

*** Bài tập tự luyện.**

Cho góc bẹt AOB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB ta vẽ hai tia OC và OD sao cho $\angle AOC = \angle BOD = 160^\circ$. Gọi tia OE là tia đối của tia OD . Chứng minh rằng:

a/ $\angle BOC = \angle BOE$.

b/ Tia OB là tia phân giác của góc COE .

2. Dạng 2: Bài tập về hai đường thẳng song song

Bài 1. Cho hai điểm phân biệt A và B . Hãy vẽ một đường thẳng a đi qua A và một đường thẳng b đi qua B sao cho $b \parallel a$.

Bài 2. Cho hai đường thẳng a và b . Đường thẳng AB cắt hai đường thẳng trên tại hai điểm A và B .

a/ Hãy nêu tên những cặp góc so le trong, những cặp góc đối đỉnh, những cặp góc kề bù.

b/ Biết $\angle A_1 = 100^\circ, \angle B_1 = 115^\circ$. Tính những góc còn lại.

Bài 3. Cho tam giác ABC , $\angle A = 80^\circ, \angle B = 50^\circ$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm O . Trên nửa mặt phẳng không chứa điểm C bờ là đường thẳng AB ta vẽ tia Ox sao cho $\angle BOx = 50^\circ$. Gọi Ay là tia phân giác của góc CAO .

Chứng minh: $Ox \parallel BC; Ay \parallel BC$.

Bài 4. Cho hai đường thẳng a và b . Đường thẳng AB cắt hai đường thẳng trên tại hai điểm A và B .

a/ Nếu biết $\angle A_1 = 120^\circ; \angle B_3 = 130^\circ$ thì hai đường thẳng a và b có song song với nhau hay không? Muốn $a \parallel b$ thì phải thay đổi như thế nào?

b/ Biết $\angle A_2 = 65^\circ; \angle B_2 = 64^\circ$ thì a và b có song song không? Muốn $a \parallel b$

thì phải thay đổi như thế nào?

Bài 5. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng xx', yy' tại hai điểm A, B sao cho hai góc so le trong $\angle xAB = \angle ABy$. Gọi At là tia phân giác của góc xAB , Bt' là tia phân giác của góc ABy .

Chứng minh rằng:

a/ $xx' \parallel yy'$

b/ $At \parallel Bt'$.

TIÊN ĐỀ ƠCLÍT-TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

1. Kiến thức cơ bản:

☞ **Tiên đề:** Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

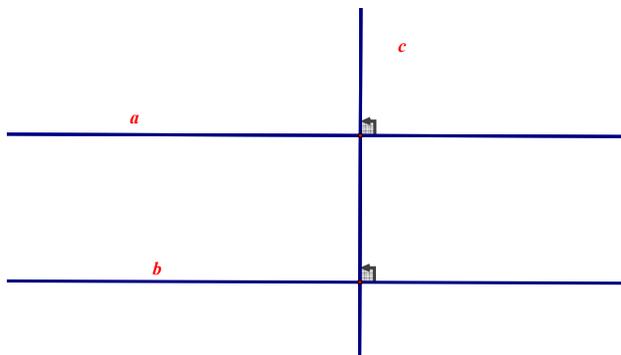
☞ **Tính chất:** Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

- ✓ Hai góc so le trong bằng nhau
- ✓ Hai góc đồng vị bằng nhau
- ✓ Hai góc trong cùng phía bù nhau

1. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

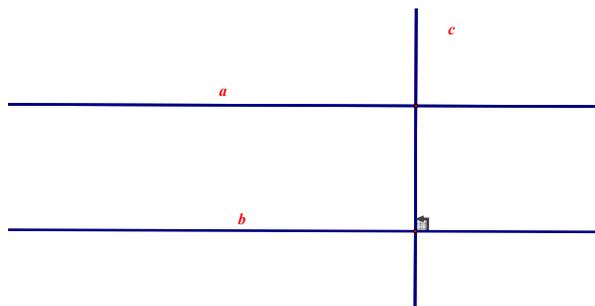
☞ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

$$\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a // b$$



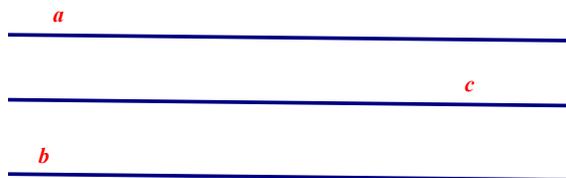
☞ Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

$$\begin{cases} c \perp b \\ a // b \end{cases} \Rightarrow c \perp a$$



☞ Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

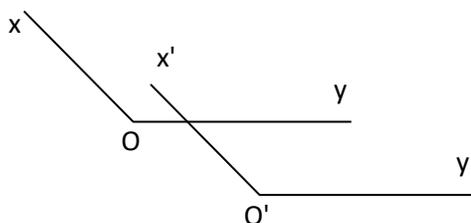
$$\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$$



2. Bài tập:

Bài tập 1: Cho \widehat{xOy} và $\widehat{x'O'y'}$ là hai góc tù: $Ox // O'x'$; $Oy // O'y'$.

CMR $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

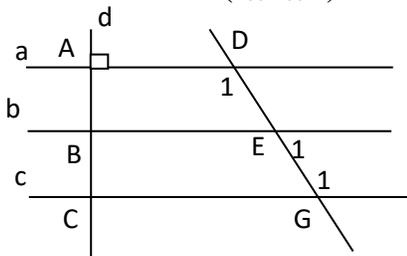


* Nhận xét:

Hai góc có cạnh tương ứng song song thì:

- Chúng bằng nhau nếu cả hai góc đều nhọn hoặc đều tù.
- Chúng bù nhau nếu 1 góc nhọn 1 góc tù.

Bài tập 2: Xem hình vẽ bên ($a//b//c$). Tính $\widehat{B}; \widehat{C}; \widehat{D}_1; \widehat{E}_1$



Giải

Ta có $\left. \begin{matrix} a // b \\ d \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow d \perp b \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$

Lại có $\left. \begin{matrix} a // c \\ d \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow d \perp c \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{D}_1 = \widehat{G}_1 = 110^\circ$ (So le trong)

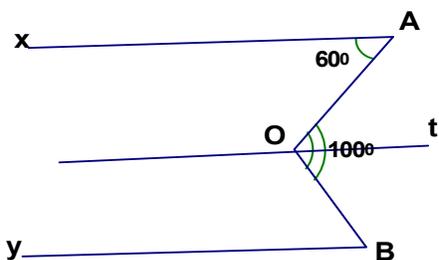
Ta có: $\widehat{E}_1 + \widehat{G}_1 = 180^\circ$ (Trong cùng phía)

$\widehat{E}_1 + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{E}_1 = 70^\circ$

Bài 3: Cho $Ax // By$; $\widehat{xAO} = 60^\circ$; $\widehat{AOB} = 100^\circ$ (hình vẽ bên). Tính góc \widehat{OBy} ?

Hướng dẫn: Vẽ đường thẳng đi qua O và song song với Ax

Hướng dẫn



Qua O vẽ đường thẳng song với Ax.

$\widehat{AOt} = \widehat{OAx} = 60^\circ$ (góc so le trong do $Ot // Ax$)

Khi đó: $\widehat{BOt} = \widehat{AOB} - \widehat{AOt} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ (1,5đ)

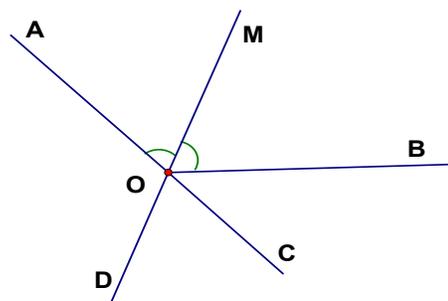
Ta lại có: $\widehat{BOt} = \widehat{OBy}$ (góc so le trong do $By // Ot$)

Vậy $\widehat{OBy} = 40^\circ$ (1,5đ)

Bài 4: Cho góc \widehat{AOB} khác góc bẹt. Gọi OM là tia phân giác góc \widehat{AOB} Vẽ các tia OC, OD lần lượt là tia đối của tia OA và OM

1/ Chứng minh: $\widehat{COD} = \widehat{MOB}$

2/ Biết $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Tính góc \widehat{COD} ?



1/ Chứng minh: $\widehat{COD} = \widehat{MOB}$

Ta có: $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$ (do OM là phân giác \widehat{AOB})

Mà: $\widehat{MOA} = \widehat{COD}$ (góc đối đỉnh)

Suy ra: $\widehat{COD} = \widehat{MOB}$

2/ Biết $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Tính góc \widehat{COD} ?

Vì OM là tia phân giác góc \widehat{AOB}

Suy ra: $\widehat{MOA} = \widehat{MOB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

Vậy: $\widehat{COD} = \widehat{MOB} = 55^\circ$

Bài tập về nhà

Bài 1 Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại A tạo thành góc $xAy = 40^\circ$.

a/ Viết tên các cặp góc đối đỉnh.

b/ Viết tên các cặp góc kề bù.

c/ Tính số đo góc yAx' .

d/ Tính số đo góc $x'Ay'$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1: Đánh dấu “x” vào ô đúng hoặc sai cho thích hợp

CÂU	ĐÚNG	SAI
a) Đường thẳng xy là đường trung trực của đoạn thẳng AB nếu xy vuông góc với AB và đi qua trung điểm của AB		
b) Hai góc chung đỉnh và bằng nhau thì đối đỉnh		
c) Qua điểm M nằm ngoài đường thẳng d có vô số đường thẳng song song với d		
d) Hai đường thẳng cắt nhau thì vuông góc		
e) Nếu hai đường thẳng a, b cắt đường thẳng c mà trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì a song song với b		

Bài 2: Điền vào chỗ trống

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì :

a)

b)

c)

Bài 3 : Cho $AB = 4(\text{cm})$. Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB . Nêu cách vẽ

Bài 4: Chọn một câu trả lời đúng nhất trong các câu a, b, c, d

1/ Nếu \widehat{O}_1 đối đỉnh với \widehat{O}_3 và $\widehat{O}_1 = 40^\circ$ thì:

a) $\widehat{O}_3 = 30^\circ$

b) $\widehat{O}_3 = 35^\circ$

c) $\widehat{O}_3 = 40^\circ$

d) $\widehat{O}_3 = 45^\circ$

2/ Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và $a // b$ thì:

- a) Hai góc so le trong bằng nhau.
- b) Hai góc đồng vị bằng nhau.
- c) Hai góc trong cùng phía bù nhau
- d) Cả a, b, c đều đúng.

3/ Đường trung trực của đoạn thẳng AB là:

- a) Đường đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB.
- b) Đường vuông góc với đoạn thẳng AB.
- c) Đường vuông góc với đoạn thẳng AB tại trung điểm của đoạn thẳng AB.
- d) Cả a, b, c đều sai.

4/ Số đường thẳng phân biệt đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước là:

- a) 3
- b) 2
- c) 1
- d) 0

5/ Nếu $a \perp c$ và $a // b$ thì:

- a) $b // c$
- b) $b \perp c$
- c) Cả a và b đều đúng.
- d) Cả a và b đều sai.

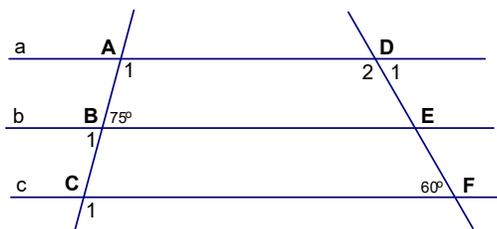
6/ Theo tiên đề O-clit thì: Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

- a) có nhiều đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng đó.
- b) có ba đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng đó.
- c) có hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng đó.
- d) có hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng đó.

7/ Nếu $a // c$ và $b // c$ thì:

- a) $a \perp b$
- b) $a // b$
- c) Cả a và b đều đúng.
- d) Cả a và b đều sai.

Bài 5: cho hình vẽ sau . Biết $a // b // c$.



1/ Số đo của \widehat{B}_1 là:

- a) 105^0
- b) 60^0
- c) 115^0
- d) 75^0

2/ Số đo của \widehat{D}_2 là:

- a) 60^0
- b) 75^0
- c) 105^0
- d) 120^0

3/ Số đo của \widehat{C}_1 là:

- a) 60^0
- b) 115^0
- c) 75^0
- d) 105^0

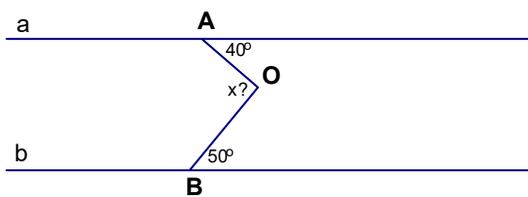
4/ Số đo của \widehat{A}_1 là:

- a) 75^0
- b) 105^0
- c) 115^0
- d) 60^0

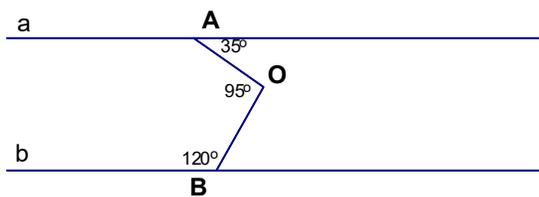
5/ Số đo của \widehat{D}_1 là:

- a) 105^0
- b) 75^0
- c) 120^0
- d) 60^0

Bài 7: Cho hình vẽ: Tìm x biết $a // b$, $\widehat{A} = 40^0$, $\widehat{B} = 50^0$ (nói rõ cách tính)



Bài 8: Cho hình vẽ: Chứng minh $a // b$. Biết $\hat{A} = 35^\circ$, $\hat{O} = 95^\circ$, $\hat{B} = 120^\circ$.



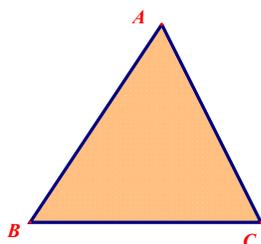
CHƯƠNG II: TAM GIÁC

TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

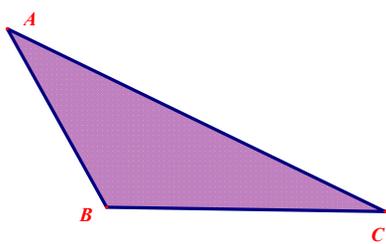
A. Kiến thức cơ bản:

☞ Tổng ba góc của một tam giác bằng 180° :

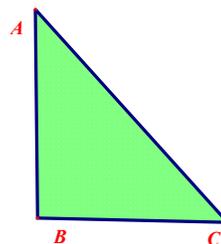
$$\boxed{A + B + C = 180^\circ}$$



HÌNH 1



HÌNH 2



HÌNH 3

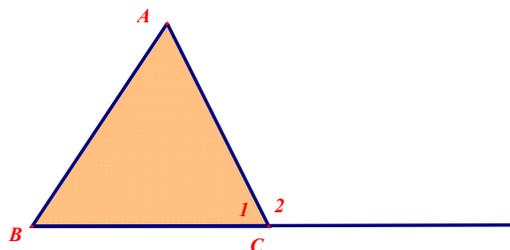
☞ Trong một tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau. Ở HÌNH 3, $A + C = 90^\circ$

☞ Góc ngoài của một tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.

☞ Định lí: Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

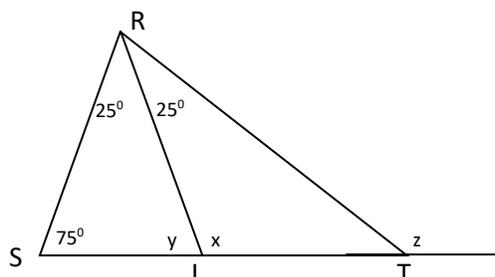
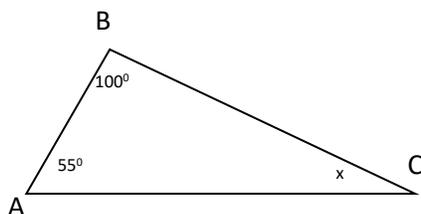
$$\boxed{A + B = C_1}$$

✓ Nhận xét: Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.



B. Bài tập:

Bài tập 1: Tính x, y, z trong các hình sau:



Bài tập 2:

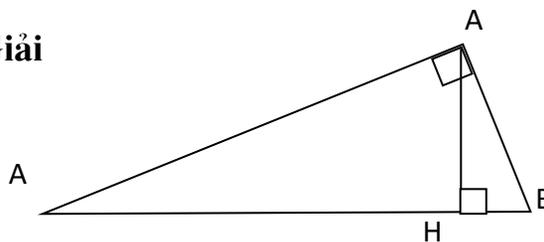
Hình 1: $x = 180^\circ - (100^\circ + 55^\circ) = 25^\circ$

Hình 2: $y = 80^\circ$; $x = 100^\circ$; $z = 125^\circ$.

Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$).

- a, Tìm các cặp góc phụ nhau.
- b, Tìm các cặp góc nhọn bằng nhau.

Giải



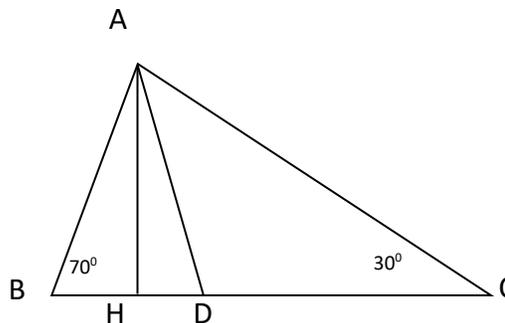
a, Các góc phụ nhau là: $\angle A$ và $\angle B$
 $\angle B$ và $\angle HAB$;

b, Các góc nhọn bằng nhau là: $\angle A$ và $\angle HAB$

Bài tập 3: Cho ΔABC có $\angle B = 70^\circ$; $\angle C = 30^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC.

- a, Tính $\angle HAB$; $\angle HAC$
- b, Kẻ tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính $\angle ADC$; $\angle ADB$.

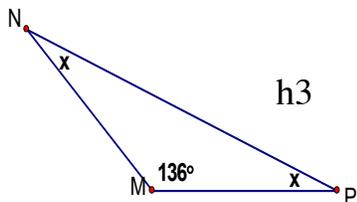
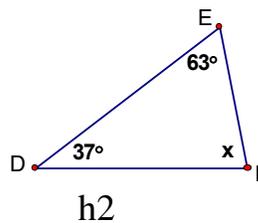
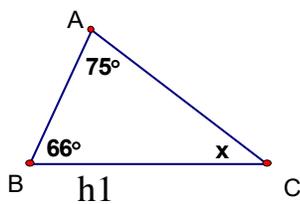
Giải



- a, $\angle HAB = 20^\circ$; $\angle HAC = 60^\circ$
- b, $\angle ADC = 110^\circ$; $\angle ADB = 70^\circ$

LUYỆN TẬP: TAM GIÁC

Bài 1. Tính các số đo x trong các hình sau:



Giải.

$$\begin{aligned} \text{Hình 1: } \widehat{C} &= 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \\ &\Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (75^\circ + 66^\circ) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = 39^\circ \text{ hay } x = 39^\circ$$

$$\text{Hình 2: } \widehat{F} = 180^\circ - (\widehat{D} + \widehat{E})$$

$$\Rightarrow \widehat{F} = 180^\circ - (37^\circ + 63^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{F} = 80^\circ \text{ hay } x = 80^\circ$$

$$\text{Hình 3: } 2x = 180^\circ - 136^\circ$$

$$2x = 44^\circ$$

$$x = 22^\circ$$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{C} = 60^\circ$.

Tia phân giác của góc B cắt AC ở D

a) Tính \widehat{ABC}

b) Tính \widehat{BDA} , \widehat{BDC}

Giải.

a) Ta có:

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C})$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$$

b) Vì BD là tia phân giác của \widehat{ABC}

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 30^\circ$$

\widehat{ADB} là góc ngoài của $\triangle BCD$

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{C} = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CDB} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Bài 3. Cho hình vẽ sau, biết $AB \parallel DE$

Tính \widehat{DEC}

Giải

Ta có: $AB \parallel DE$

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{A}$$

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = 47^\circ$$

Xét $\triangle DEC$ ta có:

$$\widehat{DEC} = 180^\circ - (\widehat{EDC} + \widehat{C})$$

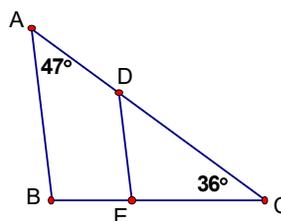
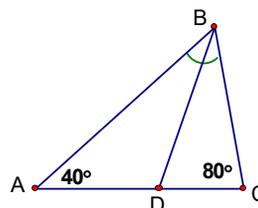
$$\Rightarrow \widehat{DEC} = 180^\circ - (47^\circ + 36^\circ)$$

$$\Rightarrow \widehat{DEC} = 97^\circ$$

Bài 4.

Cho hình vẽ bên

CMR: a//b



Giải.

Xét $\triangle CED$ ta có:

$$\widehat{E} = 180^\circ - (\widehat{C} + \widehat{D})$$

$$\Rightarrow \widehat{E} = 180^\circ - (92^\circ + 34^\circ) \Rightarrow \widehat{E} = 54^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CED}$$

Mà 2 góc này so le trong $\Rightarrow a // b$

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 70^\circ$ và $\widehat{A} - \widehat{C} = 20^\circ$

Tính \widehat{A} và \widehat{C}

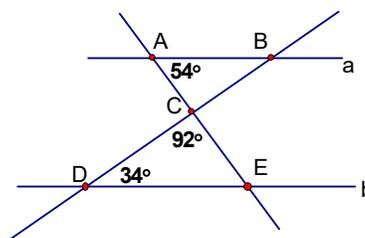
Giải.

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B}$

Thay $\widehat{B} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 110^\circ$

Mà $\widehat{A} - \widehat{C} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{A} = (110^\circ + 20^\circ) : 2 = 65^\circ$

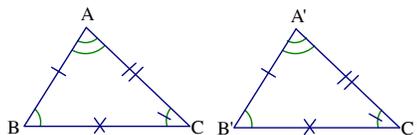
$$\widehat{C} = 110^\circ - 65^\circ = 45^\circ$$



HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

☞ Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.



$$\triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ có: } \begin{cases} AB = A'B'; AC = A'C'; BC = B'C' \\ \widehat{A} = \widehat{A}'; \widehat{B} = \widehat{B}'; \widehat{C} = \widehat{C}' \end{cases}$$

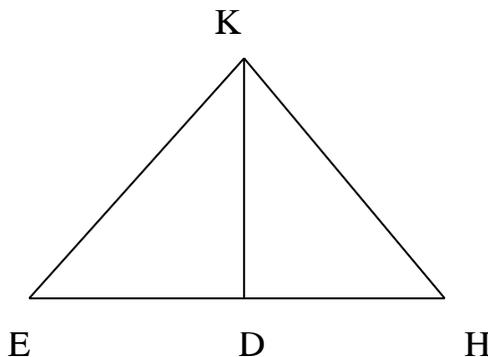
Bài tập

Bài 1: Cho tam giác EKH có $\angle E = 60^\circ$, $\angle H = 50^\circ$. Tia phân giác của góc K cắt EH tại D.

Tính $\angle EDK$; $\angle HDK$.

Giải:

GT	$\triangle EKH$; $\angle E = 60^\circ$; $\angle H = 50^\circ$ Tia phân giác của góc K Cắt EH tại D
KL	$\angle EDK$; $\angle HDK$



Chứng minh:

Xét tam giác EKH

$$\angle K = 180^\circ - (\angle E + \angle H) = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ$$

Do KD là tia phân giác của góc $\angle K$ nên $\angle K_1 = \frac{1}{2} \angle K = \frac{70}{2} = 35^\circ$

Góc KDE là góc ngoài ở đỉnh D của tam giác KDH

$$\text{Nên } \angle KDE = \angle K_2 + \angle H = 35^\circ + 50^\circ = 85^\circ$$

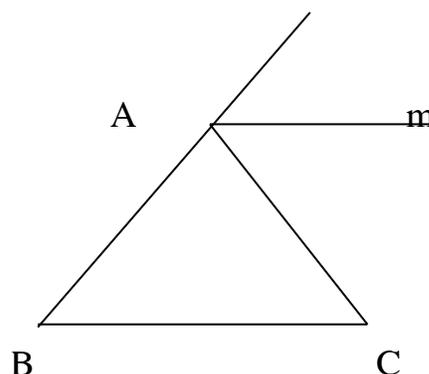
$$\text{Suy ra: } \angle KDH = 180^\circ - \angle KED = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

$$\text{Hay } \angle EDK = 85^\circ; \angle HDK = 95^\circ$$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $\angle B = \angle C = 50^\circ$, gọi Am là tia phân giác của góc ngoài ở đỉnh A.

A. Chứng minh Am // BC.

	$\Delta ABC;$
	$\angle B = \angle C = 50^\circ$
GT	Am là tia phân giác của góc ngoài đỉnh A
KL	Am // BC



Chứng minh:

$\angle CAD$ là góc ngoài của tam giác ABC

$$\text{Nên } \angle CAD = \angle B + \angle C = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$$

Am là tia phân giác của góc CAD nên $\angle A_1 = \angle A_2 = \frac{1}{2} \angle CAD = 100 : 2 = 50^\circ$

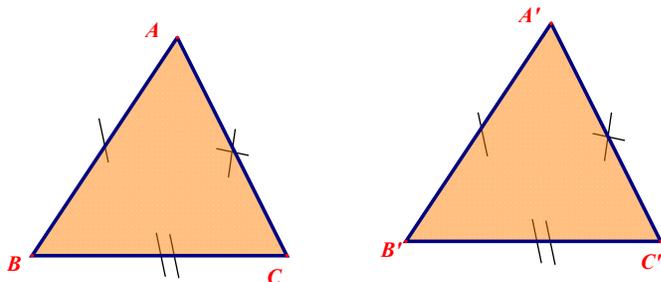
hai đường thẳng Am và BC tạo với AC hai góc so le trong bằng nhau $\angle A_1 = \angle C = 50^\circ$

nên Am // BC

TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - CẠNH - CẠNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

☞ **Trường hợp 1: Cạnh – cạnh – cạnh.** Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.



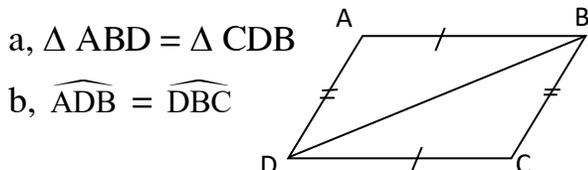
Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.c.c)

B. Bài tập:

Bài tập 1: Cho hình vẽ sau. Chứng minh:



Giải

a, Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có:

$AB = CD$ (gt)

$AD = BC$ (gt)

DB chung

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$ (c.c.c)

b, Ta có: $\triangle ABD = \triangle CDB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ (hai góc tương ứng)

Bài tập 2

GT: $\triangle ABC$ $AB = AC$ $MB = MC$

KL: $AM \perp BC$

Chứng minh

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AMC$ có :

$AB = AC$ (gt)

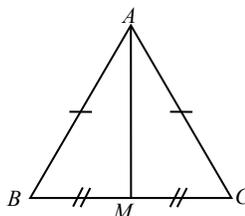
$MB = MC$ (gt)

AM chung

$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle AMC$ (c. c. c)

Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC.$



Bài 3: Cho tam giác ABC trung điểm của BC là M, kẻ $AD \parallel BM$ và $AD = BM$

(M và D khác phía đối với AB) Trung điểm của AB là I.

- Chứng minh ba điểm M, I, D thẳng hàng
- Chứng minh: $AM \parallel DB$
- Trên tia đối của tia AD lấy điểm $AE = AD$
Chứng minh $EC \parallel DB$

Giải:

- $AD \parallel BM$ (gt) $\Rightarrow \angle DAB = \angle ABM$
 $\triangle IAD = \triangle IBM$ có ($AD = BM$; $\angle IAD = \angle IBM$)
($IA = IB$)

Suy ra $\angle DIA = \angle BIM$ mà
 $\angle DIA + \angle DIB = 180^\circ$ nên $\angle BIM + \angle DIB = 180^\circ$
Suy ra $\angle DIM = 180^\circ$

Vậy ba điểm D, I, M thẳng hàng

- $\triangle AIM = \triangle BID$ ($IA = IB$, $\angle AIB = \angle BIA$)

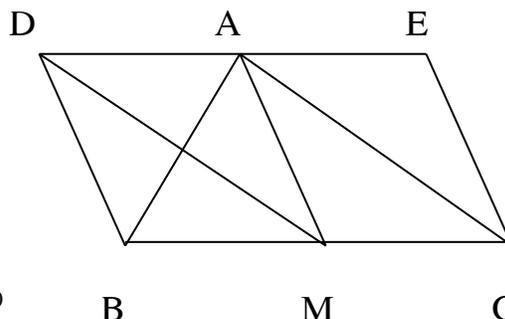
$ID = IM \Rightarrow \angle BDM = \angle DMA \Rightarrow AM \parallel BD$.

- $AE \parallel MC \Rightarrow \angle EAC = \angle ACM$; $AE = MC$ (AC chung)

Vậy $\triangle AEC = \triangle CMA$ (c.g.c)

Suy ra $\angle MAC = \angle ACE \Rightarrow AM \parallel CE$ mà $AM \parallel BD$

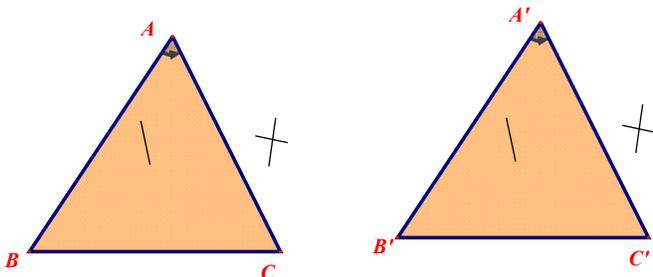
Vậy $CE \parallel BD$



TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CẠNH - GÓC - CẠNH

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

☞ **Trường hợp 2: Cạnh – góc – cạnh.** Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.



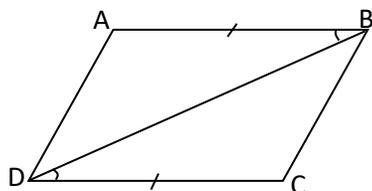
Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \angle A = \angle A' \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.g.c)

B. Bài tập:

Bài tập 1:



Giải

a, Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có:

$AB = CD$ (gt); $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ (gt); BD chung.

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CDB$ (c.g.c)

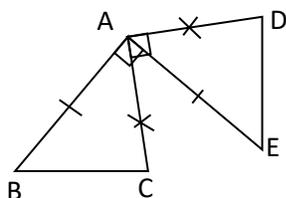
b, Ta có: $\triangle ABD = \triangle CDB$ (cm trên)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ (Hai góc tương ứng)

c, Ta có: $\triangle ABD = \triangle CDB$ (cm trên)

$\Rightarrow AD = BC$ (Hai cạnh tương ứng)

Bài tập 2:



Giải

Ta có: hai tia AE và AC cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB và $\widehat{BAC} < \widehat{BAE}$ nên tia AC nằm giữa AB và AE. Do đó: $\widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAE}$

$\Rightarrow \widehat{BAE} = 90^\circ - \widehat{CAE}$ (1)

Tương tự ta có: $\widehat{EAD} = 90^\circ - \widehat{CAE}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AED$ có:

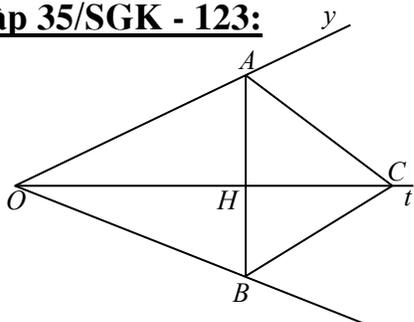
$AB = AE$ (gt)

$\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ (chứng minh trên)

$AC = AD$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle AED$ (c.g.c)

Bài tập 35/SGK - 123:



Chứng minh:

Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OBH$ là hai tam giác vuông có:

OH là cạnh chung.

$$\widehat{AOH} = \widehat{BOH} \text{ (Ot là tia p/g của xOy)}$$

$$\Rightarrow \triangle OAH = \triangle OBH \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow OA = OB.$$

b, Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBC$ có

$$OA = OB \text{ (c/m trên)}$$

OC chung;

$$\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \text{ (gt).}$$

$$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBC \text{ (c.g.c)}$$

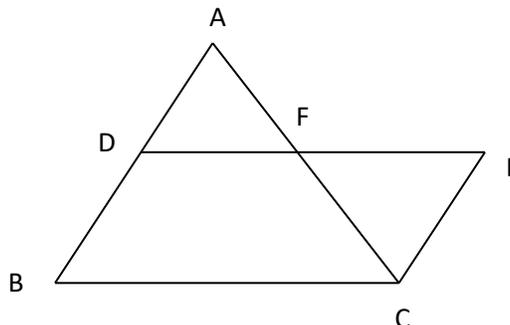
$$\Rightarrow AC = BC \text{ và } \widehat{OAC} = \widehat{OBC}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC D là trung điểm của AB , E là trung điểm của AC vẽ F sao cho E là trung điểm của DF . Chứng minh:

a. $DB = CF$

b. $\triangle BDC = \triangle FCD$

c. $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2} BC$

Giải:

a. $\triangle AED = \triangle CEF$

$$\Rightarrow AD = CF$$

Do đó: $DB = CF (= AD)$

b. $\triangle AED = \triangle CEF$ (câu a)

suy ra $\angle ADE = \angle F \Rightarrow AD \parallel CF$ (hai góc bằng nhau ở vị trí so le)

$$AB \parallel CF \Rightarrow \angle BDC = \angle FCD \text{ (so le trong)}$$

Do đó: $\triangle BDC = \triangle ECD$ (c.g.c)

c. $\triangle BDC = \triangle ECD$ (câu b)

Suy ra $\angle C_1 = \angle D_1 \Rightarrow DE \parallel BC$ (so le trong)

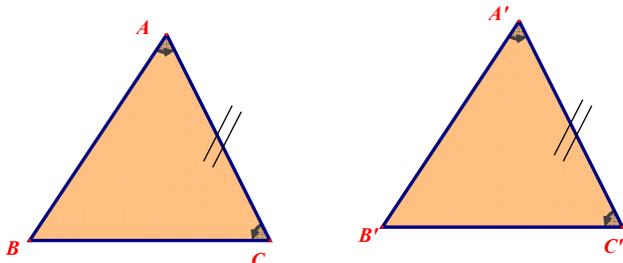
$$\triangle BDC = \triangle FCD \Rightarrow BC = DF$$

Do đó: $DE = \frac{1}{2} DF$ nên $DE = \frac{1}{2} BC$

TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU GÓC - CẠNH - GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

☞ **Trường hợp 3: Góc – cạnh – góc.** Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.



Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ AC = A'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (g.c.g)

B. Bài tập:

Bài tập 1:

Cho $\triangle ABC$ có: $AB = AC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $AM = MD$.

Chứng minh:

a/ $\triangle ABM = \triangle DCM$.

b/ $AB \parallel DC$

c/ $AM \perp BC$

d/ Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để $\angle ADC = 30^\circ$?

Chứng minh:

a/ $\triangle ABM = \triangle DCM$.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DCM$ có:

+ $AM = MD$ (gt)

+ $\angle AMB = \angle CMD$ (đối đỉnh)

+ $MB = MC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DCM$ (c-g-c)

b/ $AB \parallel DC$

Vì $\triangle ABM = \triangle DCM$ nên ta có:

$\angle ABM = \angle DCM$ ở vị trí so le trong do đó $AB \parallel DC$.

c/ $AM \perp BC$

Xét $\triangle ABM = \triangle ACM$ có:

+ $MB = MC$ (gt)

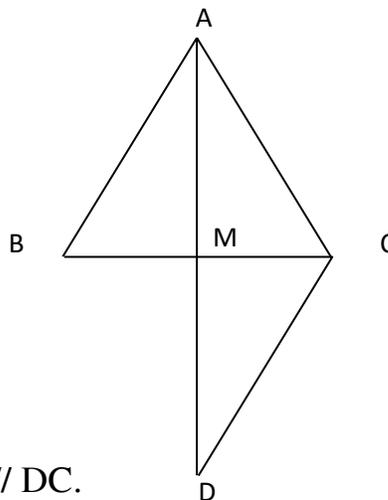
+ MA (cạnh chung)

+ $AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

nên: $\angle AMB = \angle AMC$

mà : $\angle AMB + \angle AMC = 2v$.



$$\Rightarrow \angle AMB = \angle AMC = 1v$$

hay : $AM \perp BC$.

d/ Tìm điều kiện :

$$\angle ADC = 30^\circ \text{ khi } \angle DAB = 30^\circ$$

vì $\angle ADC = \angle DAB$ theo chứng minh trên.

$$\text{Mà } \angle DAB = 30^\circ \text{ khi } \angle BAC = 60^\circ \text{ vì } \angle BAC = 2 \cdot \angle DAB$$

Vậy $\angle ADC = 30^\circ$ khi ΔABC có $AB = AC$ và $\angle BAC = 60^\circ$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Lấy điểm D trên cạnh AB , lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = AE$.

a) Chứng minh rằng $BE = CD$.

b) Gọi O là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng $\Delta BOD = \Delta COE$

Giải

a) Xét ΔABE và ΔACD có:

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

\hat{A} chung

$$AE = AD \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) $\Delta ABE = \Delta ACD$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1; \hat{E}_1 = \hat{D}_1$$

$$\text{Lại có: } \hat{E}_2 + \hat{E}_1 = 180^\circ$$

$$\hat{D}_2 + \hat{D}_1 = 180^\circ$$

$$\text{nên } \hat{E}_2 = \hat{D}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mặt khác: } AB = AC \\ AD = AE \\ AD + BD = AB \\ AE + EC = AC \end{array} \right\} \Rightarrow BD = CE$$

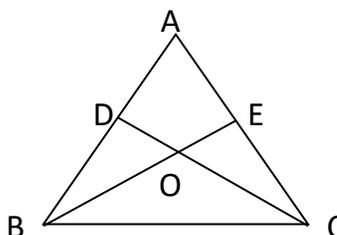
Trong ΔBOD và ΔCOE có

$$\hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

$$BD = CE,$$

$$\hat{D}_2 = \hat{E}_2$$

$$\Rightarrow \Delta BOD = \Delta COE \text{ (g.c.g)}$$



LUYỆN TẬP VỀ CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC

Bài 1: Cho đường thẳng CD cắt đường thẳng AB và $CA = CB$, $DA = DB$. Chứng minh rằng CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Giải:

Xét hai tam giác ACD và BCD chúng có: $CA = CB$; $DA = DB$ (gt)

cạnh DC chung nên $\triangle ACD = \triangle BCD$ (c.c.c)

từ đó suy ra: $\angle ACD = \angle BCD$

Gọi O là giao điểm của AB và CD.

Xét tam giác OAC và OBD chúng có: $\angle ACD = \angle BCD$ (c/m trên); CA = CB (gt)

cạnh OC chung nên $\triangle OAC = \triangle OBC \Rightarrow OA = OB$ và $\angle AOC = \angle BOC$

Mà $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (c.g.c)

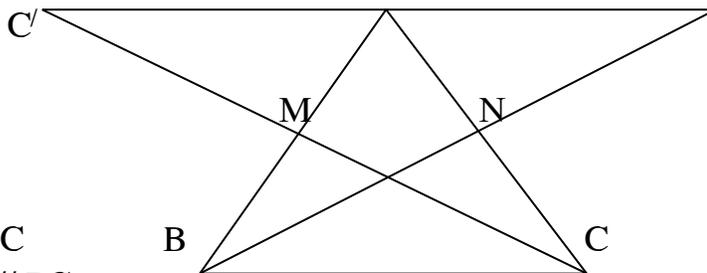
$\Rightarrow \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ \Rightarrow DC \perp AB$

Do đó: CD là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 2: Cho tam giác ABC và hai điểm N, M lần lượt là trung điểm của cạnh AC, AB. Trên tia BN lấy điểm B' sao cho N là trung điểm của BB'. Trên tia CM lấy điểm C' sao cho M là trung điểm của CC'. Chứng minh:

a. $B'C' \parallel BC$

b. A là trung điểm của B'C'



Giải:

a. Xét hai tam giác AB'N và CBN

ta có: AN = NC; NB = NB' (gt);

$\angle ANB' = \angle BNC$ (đối đỉnh)

Vậy $\triangle AB'N = \triangle CBN$ suy ra $AB' = BC$

và $\angle B = \angle B'$ (so le trong) nên $AB' \parallel BC$

Chứng minh tương tự ta có: $AC' = BC$ và $AC' \parallel BC$

Từ một điểm A chỉ kẻ được một đường thẳng duy nhất song song với BC. Vậy AB' và AC' trùng nhau nên $B'C' \parallel BC$.

b. Theo chứng minh trên $AB' = BC$, $AC' = BC$

Suy ra $AB' = AC'$

Hai điểm C' và B' nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng AC

Vậy A nằm giữa B' và C' nên A là trung điểm của B'C'

Bài 3: Cho tam giác ADE có $\angle D = \angle E$. Tia phân giác của góc D cắt AE ở điểm M, tia phân giác của góc E cắt AD ở điểm N. So sánh các độ dài DN và EM

Hướng dẫn:

Chứng minh: $\triangle DEN = \triangle EDM$ (g.c.g)

Suy ra: DN = EM (cặp cạnh tương ứng)

Bài 4: Cho hình vẽ bên

trong đó $AB \parallel HK$; $AH \parallel BK$

Chứng minh: $AB = HK$; $AH = BK$.

Giải:

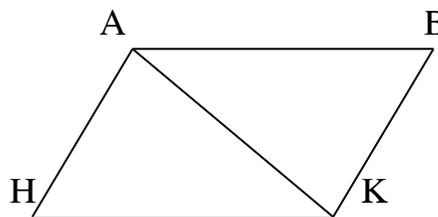
Kẻ đoạn thẳng AK, $AB \parallel HK$

$\Rightarrow \angle A_1 = \angle K_1$ (so le trong)

$AH \parallel BK \Rightarrow \angle A_2 = \angle K_2$ (so le trong)

Do đó: $\triangle ABK = \triangle KHA$ (g.c.g)

Suy ra: $AB = HK$; $BK = HK$



Bài 5: Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AB, đường thẳng qua D và song song với BC cắt AC tại E, đường thẳng qua E song song với BC cắt BC ở F, Chứng minh rằng

a. $AD = EF$

b. $\triangle ADE = \triangle EFC$

c. $AE = EC$

Giải:

a. Nối D với F do $DE \parallel BF$

$EF \parallel BD$ nên $\triangle DEF = \triangle FBD$ (g.c.g)

Suy ra $EF = DB$

Ta lại có: $AD = DB$ suy ra $AD = EF$

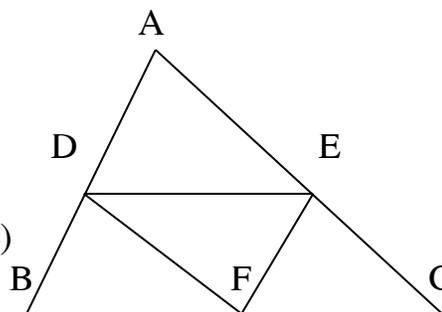
b. Ta có: $AB \parallel EF \Rightarrow \angle A = \angle E$ (đồng vị)

$AD \parallel EF$; $DE = FC$ nên $\angle D_1 = \angle F_1$ (cùng bằng $\angle B$)

Suy ra $\triangle ADE = \triangle EFC$ (g.c.g)

c. $\triangle ADE = \triangle EFC$ (theo câu b)

suy ra $AE = EC$ (cặp cạnh tương ứng)



Bài 6: Cho tam giác ABC trung điểm của BC là M, kẻ $AD \parallel BM$ và $AD = BM$

(M và D khác phía đối với AB) Trung điểm của AB là I.

a. Chứng minh ba điểm M, I, D thẳng hàng

b. Chứng minh: $AM \parallel DB$

c. Trên tia đối của tia AD lấy điểm AE = AD

Chứng minh $EC \parallel DB$

Giải:

a. $AD \parallel BM$ (gt) $\Rightarrow \angle DAB = \angle ABM$

$\triangle IAD = \triangle IBM$ có ($AD = BM$; $\angle IAD = \angle IBM$)
($IA = IB$)

Suy ra $\angle DIA = \angle BIM$ mà

$\angle DIA + \angle DIB = 180^\circ$ nên $\angle BIM + \angle DIB = 180^\circ$

Suy ra $\angle DIM = 180^\circ$

Vậy ba điểm D, I, M thẳng hàng

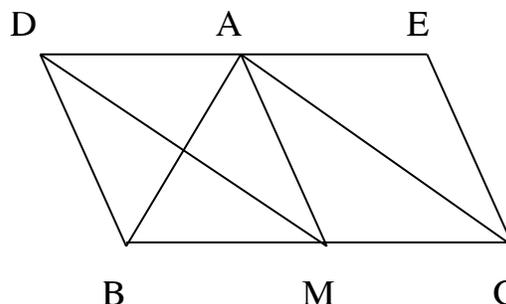
b. $\triangle AIM = \triangle BID$ ($IA = IB$, $\angle AIB = \angle BIA$)

$\angle AIM = \angle BID \Rightarrow \angle BDM = \angle DMA \Rightarrow AM \parallel BD$.

c. $AE \parallel MC \Rightarrow \angle EAC = \angle ACM$; $AE = MC$ (AC chung)

Vậy $\triangle AEC = \triangle CMA$ (c.g.c)

Suy ra $\angle MAC = \angle ACE \Rightarrow AM \parallel CE$ mà $AM \parallel BD$ Vậy $CE \parallel BD$



Bài 7: Ở hình bên có $A_1 = C_1$; $A_2 = C_2$. So sánh B và D chỉ ra những cặp đoạn thẳng bằng nhau.

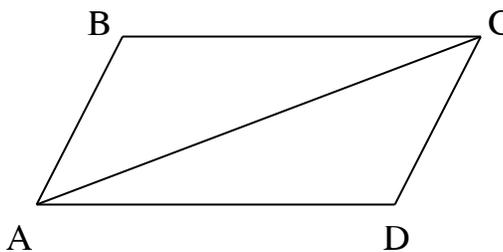
Giải:

Xét tam giác ABC và tam giác CDA

chúng có:

$A_2 = C_2$; $C_1 = A_1$ cạnh AC chung

Vậy $\triangle ABC = \triangle CDA$ (g.c.g)



Suy ra $B = D$; $AB = CD$ và $BC = DA$

Bài 8: Cho tam giác ABC các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I . Qua I kẻ đường thẳng song song với BC . Gọi giao điểm của đường thẳng này với AB, AC theo thứ tự là D và E . Chứng minh rằng $DE = BD$.

Giải:

$DI \parallel DC \Rightarrow I_1 = B_1$ (so le)

BI là đường phân giác của góc $B \Rightarrow B_1 = B_2$

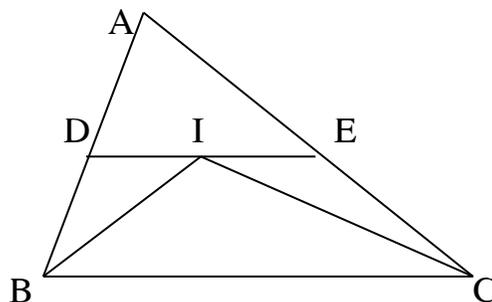
Suy ra $I_1 = B_2$

Tam giác DBI có:

$I_1 = B_2 \Rightarrow$ Tam giác DBI cân $BD = BI$ (1)

Chứng minh tương tự $CE = EI$ (2)

Từ (1) và (2): $BD + CE = DI + EI = DE$



Bài 9: Cho tam giác đều ABC lấy điểm D, E, F theo thứ tự thuộc cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = BE = CF$. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

Giải:

Ta có $AB = BC = CA, AD = BE = CF$

Nên $AB - AD = BC - BE = CA - CF$

Hay $BD = CE = AF$

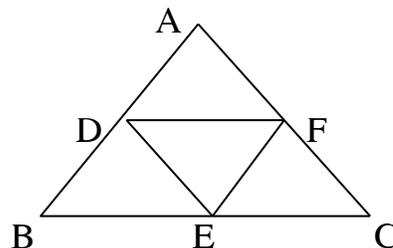
Tam giác ABC đều $A = B = C = 60^\circ$

$\triangle ADF = \triangle BED$ (c.g.c) thì $DF = DE$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle EBD = \triangle FCE$ (c.g.c) thì $DE = EF$ (cặp cạnh tương ứng)

Do đó: $DF = DE = EF$

Vậy tam giác DEF là tam giác đều.



CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP CHƯƠNG II

Bài 1

Bài 1 : Điền đúng, sai

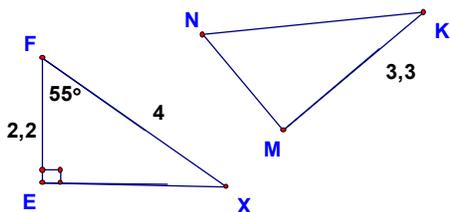
1. Có thể vẽ được một tam giác với 3 góc nhọn
2. Có thể vẽ được một tam giác có 2 cạnh bằng nhau
3. Có thể vẽ được một tam giác với 2 góc vuông
4. Tất cả các góc trong của một tam giác bằng nhau

Bài 2 : Cho $\triangle ABC, A = 50^\circ, B = 70^\circ$, tia phân giác góc C cắt AB tại M .

Tính: $\widehat{AMC}; \widehat{BMC}$

Bài 3 : cho $\triangle EFX = \triangle MNK$ như hình vẽ.

Hãy tìm số đo các yếu tố còn lại của hai tam giác



Bài 4: Cho $\triangle DKE$ Có $DK=KE=DE=5\text{cm}$ và $\triangle DKE = \triangle BCO$. Tính tổng chu vi hai tam giác đó?

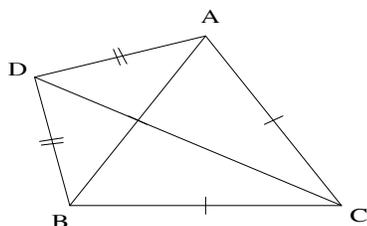
Bài 5: Có $\triangle ABC$ mà $\hat{A} = 2\hat{B}$; $\hat{B} = 2\hat{C}$. $\hat{C} = 14^\circ$ không? Vì sao?

Bài 6 : Cho $\triangle ABC$ và $\triangle ABC$ biết : $AB = BC = AC = 3 \text{ cm}$; $AD = BD = 2\text{cm}$ (C và D nằm khác phía đối với AB)

a) Vẽ $\triangle ABC$; $\triangle ABD$

b) Chứng minh : $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$

HD:



GT	$\triangle ABC ; \triangle ABD$ $AB = AC = BC = 3$ cm $AD = BD = 2 \text{ cm}$
----	---

KL	a) Vẽ hình b) $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$
----	--

b) Nối DC ta được $\triangle ADC$ và $\triangle BDC$ có :

$AD = BD$ (gt) ; $CA = CB$ (gt) ; DC cạnh chung

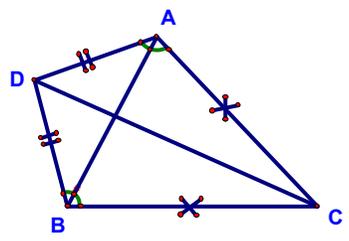
$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle BDC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (hai góc tương ứng)

Bài 2

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ biết: $AB=BC=CA=3\text{cm}$; $AD=BD=2\text{cm}$ (C và D nằm khác phía đối với AB).

a/ Vẽ $\triangle ABC$; $\triangle ABD$

b/ chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$



a/ GT	$\triangle ABC , \triangle ABD$
-------	---------------------------------

$$AB=BC=CA=3\text{cm}$$

$$AD=BD=2\text{cm}$$

KL a/ Vẽ Hình

$$b/ \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$$

b/ Nối DC . Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BDC$ có :

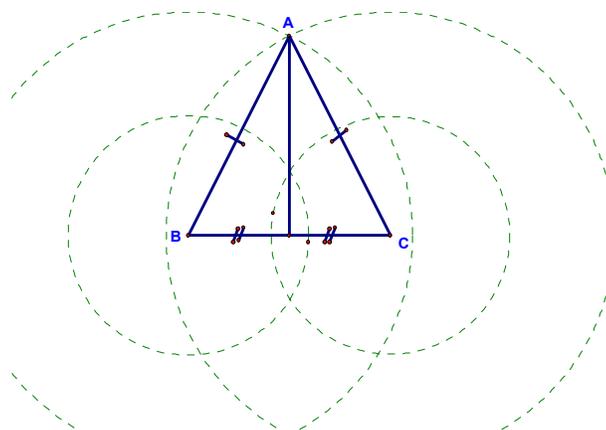
$$AD = BD(\text{gt}) ; CA = CB(\text{gt}) ; DC \text{ cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle BDC(\text{c.c.c})$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC .

HD:



GT : $\triangle ABC$

$$AB=AC$$

M là trung điểm BC

KL: $AM \perp BC$

Chứng minh :

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có

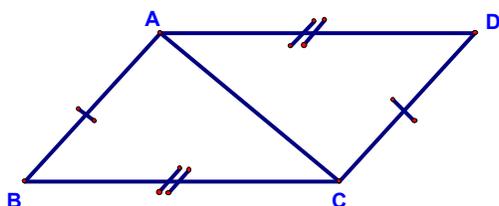
$$AB = AC (\text{gt}) ; BM = MC(\text{gt}) ; \text{Cạnh AM chung}$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \text{ và } \triangle ACM (\text{c.c.c}).$$

Suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng) mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \text{ hay } AM \perp BC.$$

Bài 3 : Cho tam giác ABC. Vẽ cung tròn tâm A bán kính BC, vẽ cung tròn tâm B bán kính BA, chúng cắt nhau ở D (D và B nằm khác phía đối với AC). Chứng minh rằng $AD \parallel BC$



GT: $\triangle ABC$

Cung tròn (A;BC) cắt cung tròn(C;AB)
tại D (D và B khác phía với AC).

KL: AD//BC

CM:

Xét ΔADC và ΔCBA có

$AD = CB(gt)$; $DC = AB(gt)$; AC cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ADC$ và $\Delta CBA(c.c.c)$

$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AD//BC$ vì có hai góc so le trong bằng nhau .

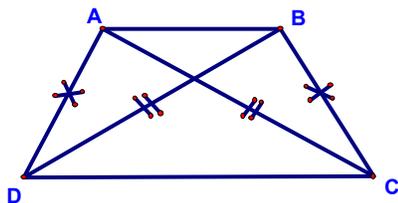
Bài 4: :Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$. Biết $\widehat{A} = 50^0$; $\widehat{E} = 75^0$. Tính các góc còn lại của tam giác .

Bài 5: - Vẽ tam giác ABC biết $AB = 4cm$; $BC = 3cm$; $AC = 5cm$.

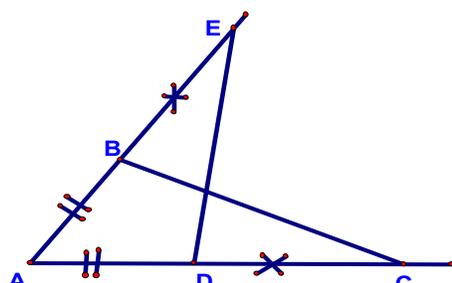
-Vẽ tia phân giác góc A bằng thước và compa.

Bài 3

Bài 1: Cho hình vẽ, chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$



Bài 2: Cho hình vẽ



GT: \widehat{xAy}

$B \in Ax; D \in Ay$

$AB = AD$

$E \in Bx; C \in Dy$

$BE = DC$

KL: $\Delta ABC = \Delta ADE$;

Giải :

$AD = AB(gt)$

$AD = AB(gt)$ } $\Rightarrow AC = AE$

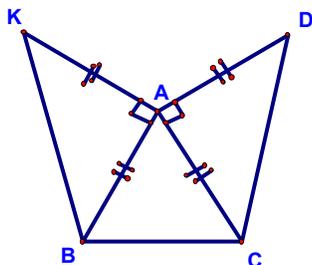
$DC = BE(gt)$ }

Xét ΔABC và ΔADE có:

$AB = AD(gt)$; \widehat{A} chung ; $AC = AE$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ADE$ (c.g.c)

Bài 3: Cho $\Delta ABC: AB=AC$, vẽ về phía ngoài của ΔABC các tam giác vuông ABK và tam giác vuông ACD có $AB=AK, AC=AD$. Chứng minh: $\Delta ABK = \Delta ACD$.



GT : $\Delta ABC: AB= AC$

ΔABK ($\widehat{KBA} = 1V$) ; $AB = AK$

ΔADC ($\widehat{DAC} = 1V$) ; $AD = AC$

KL: $\Delta AKB = \Delta ADC$.

CM:

Ta có : $AK = AB(gt)$ và $AD = AC(gt)$ mà $AB= AC(gt)$ suy ra : $AK = AD$ (t/c bắc cầu)

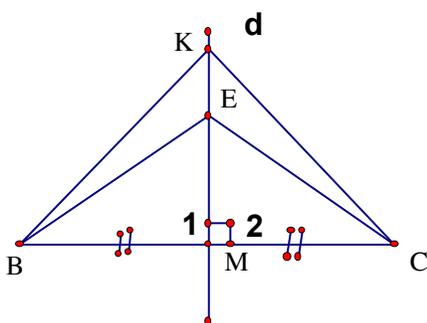
ΔAKB và ΔADC có: $AB = AC(gt)$; $\widehat{KAB} = \widehat{DAC} = 90^0(gt)$; $AK = AD$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AKB = \Delta ADC$ (c-g-c)

Bài 4: Cho đoạn thẳng BC và đường trung trực d của nó, d giao với BC tại M . Trên d lấy hai điểm K và E khác M . Nối EB, EC , KB, KC .

Chỉ ra các tam giác bằng nhau trên hình ?

a) Trường hợp E nằm giữa K và M

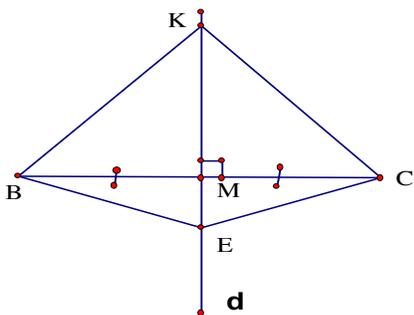


$\Delta BEM = \Delta CEM$ (vì $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 1V$) cạnh EM chung ; $BM=CM(gt)$

$\Delta BKM = \Delta CKM$ chứng minh tương tự (cgc)

$\Delta BKE = \Delta CKE$ (vì $BE = EC; BK = CK$, cạnh KE chung) (trường hợp c.c.c)

b/ Trường hợp M nằm giữa K và E



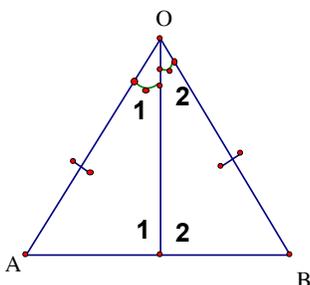
$$\Delta BKM = \Delta CKM(c.g.c) \Rightarrow KB = KC$$

$$\Delta BEM = \Delta CEM(c.g.c) \Rightarrow EB = EC$$

$$\Delta BKE = \Delta CKE(c.c.c)$$

Bài 4: Cho tam giác AOB có $OA = OB$. Tia phân giác của \widehat{O} cắt AB ở D.

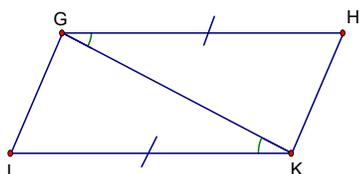
Chứng minh :a/ $DA = DB$ b/ $OD \perp AB$



Bài 4

Bài 1: (Bài 25. SGK/118)

GT	ΔGHK và ΔKIG
	$GH = KI; HGK = IKG$
	$HK = IG$
KL	$HK // IG$



*Xét ΔGHK và ΔKIG có :

$$GH = KI \text{ (GT)}$$

$$HGK = IKG \text{ (GT)}$$

GK cạnh chung

$$\Delta GHK = \Delta KIG \text{ (c.g.c) (1)}$$

$$\Rightarrow HK = IG \text{ (cặp cạnh tương ứng)}$$

*Từ (1) suy ra $\widehat{GHK} = \widehat{KIG}$ (cặp góc tương ứng)

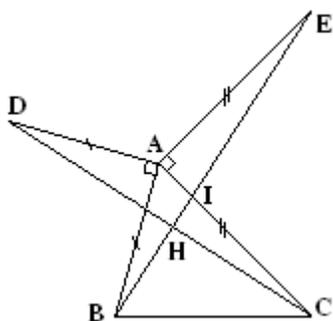
Mà hai góc này ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow HK // IG \text{ (dấu hiệu nhận biết) (đpcm)}$$

Bài 2: Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Vẽ $AD \perp$ vuông góc. $AC = AB$ và D khác phía C đối với AB, vẽ $AE \perp AC$: $AD = AC$ và E khác phía đối với AC. CMR:

- a) $DC = BE$
- b) $DC \perp BE$

HD:



a) CM: $DC=BE$

ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 90^0 + \widehat{BAC}$

$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có:

$AD = BA$ (gt) (c) ; $AC = AE$ (gt) (c) ; $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (cm trên) (g)

$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ (c-g-c)

$\Rightarrow DC = BE$ (2 cạnh tương ứng)

b) CM: $DC \perp BE$

Gọi $H = DC \cap BE$; $I = BE \cap AC$

Ta có: $\triangle ADC = \triangle ABC$ (cm trên)

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{AEB}$ (2 góc tương ứng)

mà: $\widehat{DHI} = \widehat{HIC} + \widehat{ICH}$ (2 góc bằng tổng 2 góc bên trong không kề)

$\Rightarrow \widehat{DHI} = \widehat{AIE} + \widehat{AEI}$ (\widehat{HIC} và \widehat{AIE} đđ)

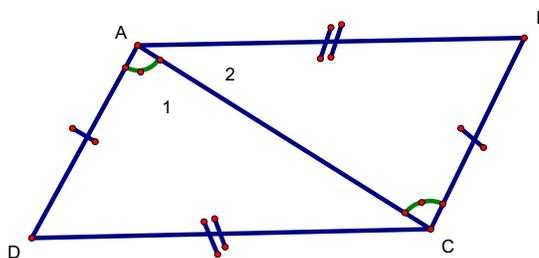
Bài 3: Cho tam giác ABC có $B = C$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D, tia phân giác góc C cắt AB ở E. So sánh độ dài BD và CE.

Bài 4 : Cho hình vẽ bên có : $AB=CD$; $AD = BC$; $\hat{A}_1 = 85^0$

a/ Chứng minh $\triangle ABC = \triangle CDA$

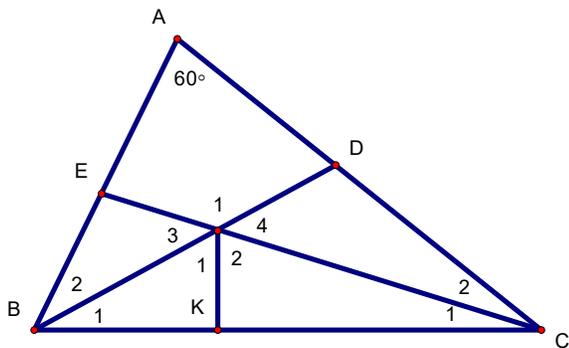
b/ Tính số đo góc \hat{C}_1

c/ Chứng minh $AB \parallel CD$



Bài 5

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ có góc $A = 60^\circ$. Các tia phân giác các góc B; C cắt nhau ở I và AC; AB theo thứ tự ở D; E. chứng minh rằng $ID=IE$



Kẻ phân giác IK của góc BIC ta được $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$, theo đầu bài $\triangle ABC$:

$$\widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$$

$$\text{Có } \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \text{ (gt)}, \widehat{C_1} = \widehat{C_2} \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 120^\circ$$

$$\widehat{I_1} = \widehat{I_2} = 60^\circ \text{ và } \widehat{I_3} = 60^\circ, \widehat{I_4} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{I_3} = \widehat{I_1} = \widehat{I_2} = \widehat{I_4}$$

khi đó ta có $\triangle BEI = \triangle BKI$ (g-c-g) $\Rightarrow IE = IK$ (cạnh tương ứng)

Chứng minh tương tự $\triangle IDC = \triangle IKC \Rightarrow IK = ID \Rightarrow IE = ID = IK$

Bài 2: Cho $\triangle ABC = \triangle EFG$. Viết các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau. Hãy viết đẳng thức dưới một vài dạng khác.

Giả sử $\widehat{A} = 55^\circ; \widehat{F} = 75^\circ; AB = 4\text{cm}; BC = 5\text{cm}; EG = 7\text{cm}$. Tính các góc còn lại và chu vi của hai tam giác.

Bài 3: Cho biết $\triangle ABC = \triangle MNP = \triangle RST$.

a) Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì các tam giác còn lại có vuông không? Vì sao?

b) Cho biết thêm $\widehat{A} = 90^\circ; \widehat{S} = 60^\circ$. Tính các góc còn lại của ba tam giác.

c) Biết $AB = 7\text{cm}; NP = 5\text{cm}; RT = 6\text{cm}$. Tính các cạnh còn lại của ba tam giác và tính tổng chu vi của ba tam giác.

Bài 4: Cho biết AM là đường trung trực của BC ($M \in BC; A \notin BC$). Chứng tỏ rằng $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}; \widehat{MAB} = \widehat{MAC}; AB = AC$.

Bài 6

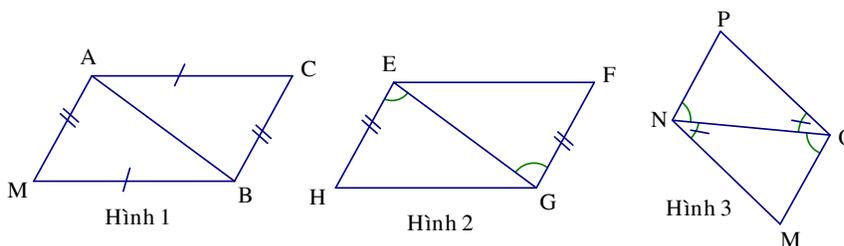
Bài 1: Cho ΔABC có $AC = BC$. Gọi I là trung điểm của AB . Trên tia CI lấy điểm D sao cho D nằm khác phía với C so bờ là đường thẳng AB .

- a) Chứng minh rằng $\Delta ADC = \Delta BDC$.
- b) Suy ra CD là đường trung trực của AB .

Bài 2: Cho đoạn thẳng AB . Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB và đường tròn tâm B bán kính BA . Hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm M và N .

- a) Chứng minh rằng $\Delta AMB = \Delta ANB$.
- b) Chứng minh rằng MN là trung trực của AB và từ đó suy ra cách vẽ đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước.

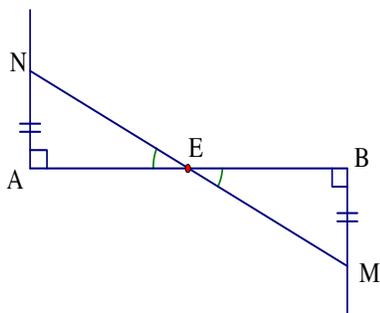
Bài 3: Cho hình vẽ. Hãy chỉ ra các tam giác bằng nhau ở mỗi hình.



Bài 4: Cho góc xOy . Trên tia phân giác Ot của góc xOy lấy điểm I ($I \neq O$). Gọi A, B lần lượt là các điểm trên tia Ox và Oy sao cho $OA = OB$ ($O \neq A; O \neq B$).

- a) Chứng minh rằng $\Delta OIA = \Delta OIB$.
- b) Chứng minh rằng tia Ot là đường trung trực của AB .

Bài 5: Cho hình vẽ (hình 4). Chứng minh rằng E là trung điểm của MN .

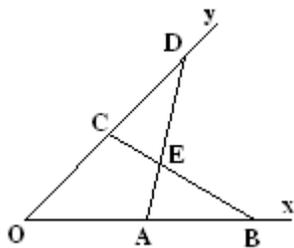


Bài 7

Bài 1: Cho \widehat{xOy} khác góc bẹt. Lấy $A, B \in Ox$ sao cho $OA < OB$. Lấy $C, D \in Oy$ sao cho $OC = OA, OD = OB$. Gọi E là giao điểm của AD và BC . Cmr:

- a) $AD = BC$
- b) $\Delta EAB = \Delta ECD$
- c) OE là tia phân giác của \widehat{xOy} .

HD:



GT $\widehat{xOy} < 180^0$
 $AB \in Ox, CD \in Oy$
 $OA < OB; OC = OA, OD = OB$
 $E = AD \cap BC$

KL a) $AD = BC$
 b) $\triangle EAB = \triangle ECD$
 c) OE là tia phân giác \widehat{xOy}

a) CM: $AD = BC$

Xét $\triangle AOD$ và $\triangle COB$ có:

\hat{O} : góc chung (gt); $OA = OC$ (gt) ; $OD = OB$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AOD = \triangle COB$ (c-g-c)

$\Rightarrow AD = CB$ (2 cạnh tương ứng)

b) CM: $\triangle EAB = \triangle ECD$

Ta có: $\widehat{OAD} + \widehat{DAB} = 180^0$ (2 góc kề bù)

$\widehat{OCB} + \widehat{BCD} = 180^0$ (2 góc kề bù)

Mà: $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ ($\triangle AOD = \triangle COB$) $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{BCD}$

*Xét $\triangle EAB$ và $\triangle ECD$ có:

$AB = CD$ ($AB = OB - OA; CD = OD - OC$ mà $OA = OC; OB = OD$)

$\widehat{ADB} = \widehat{DCB}$ (cmt)

$\widehat{OBC} = \widehat{ODA}$ ($\triangle AOD = \triangle COB$)

$\Rightarrow \triangle CED = \triangle AEB$ (g-c-g)

c) CM: DE là tia phân giác của \widehat{xOy}

Xét $\triangle OCE$ và $\triangle OAE$ có:

OE: cạnh chung ; $OC = OA$ (gt) ; $EC = EA$ (Do $\triangle CED = \triangle AEB$)

$\Rightarrow \triangle CED = \triangle AEB$ (c-c-c)

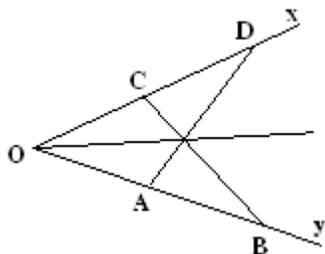
$\Rightarrow \widehat{COE} = \widehat{AOE}$ (2 góc tương ứng)

Mà tia OE nằm giữa 2 tia Ox, Oy \Rightarrow Tia OE là tia phân giác của \widehat{xOy}

Bài 2: Bạn Mai vẽ tia phân giác của góc xOy như sau: Đánh dấu trên hai cạnh của góc bốn đoạn thẳng bằng nhau: $OA = AB = OC = CD$ ($A, B \in Ox, C, D \in Oy$). $AD \cap BC = K$.

CM: OK là tia phân giác của \widehat{xOy} .

Bài 3:



GT | OA = AB = OC = CD
 | CB ∩ OD = K

KL | OK: phân giác \widehat{xOy}

Xét $\triangle OAD$ và $\triangle OCB$:

OA = OC ; OD = OB ; \hat{O} góc chung

$\Rightarrow \triangle OAD = \triangle OCB$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{ODK} = \widehat{ABK}$

mà $\widehat{CKD} =$ góc AKB (đđ) $\Rightarrow \widehat{DCK} = \widehat{BAK}$

$\Rightarrow \triangle CDK = \triangle ABK$ (g-c-g) $\Rightarrow CK = AK$

$\Rightarrow \triangle OCK = \triangle OAK$ (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{COK} = \widehat{AOK}$

$\Rightarrow OK$: tia phân giác của \widehat{xOy}

Bài 8

Bài 1 : Cho tam giác ABC biết $AB < BC$. Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BC = BD$. Nối C với D. Phân giác của góc B cắt cạnh AC, DC lần lượt ở E và I.

a/ Chứng minh $\triangle BED = \triangle BEC$ và $IC = ID$.

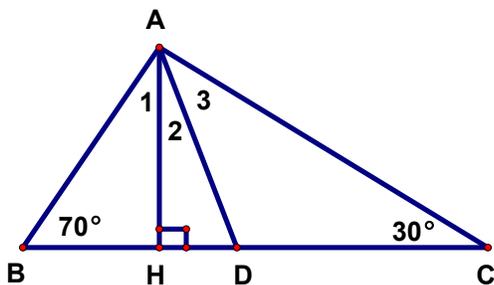
b/ Từ A vẽ đường vuông góc AH với DC (H thuộc DC). Chứng minh $AH // BI$.

Bài 2: Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 70^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$, Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Kẻ AH vuông góc với BC (H \in BC).

a/ Tính \widehat{BAC}

b/ Tính \widehat{HDA}

c/ Tính \widehat{ADH}



GT: $\triangle ABC$: $\hat{B} = 70^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$
 Phân giác AD (D \in BC)
 AH \perp BC (H \in BC)

KL: a/ $\widehat{BAC} = ?$

b/ $\widehat{HDA} = ?$

c/ $\widehat{ADH} = ?$

Cm:

$$a/ \triangle ABC: \widehat{B} = 70^0, \widehat{C} = 30^0 \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180^0 - (70^0 + 30^0)$$

$$\widehat{BAC} = 180^0 - 100^0 = 80^0$$

b/ Xét $\triangle ABH$ có

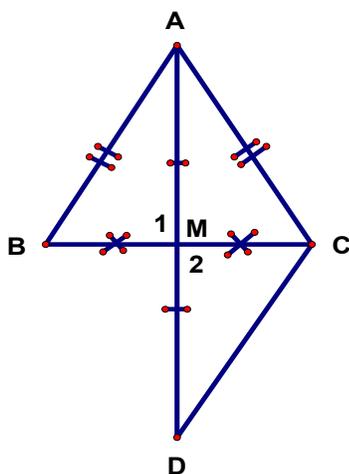
$$\widehat{H} = 1v \text{ hay } \widehat{H} = 90^0 \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = 90^0 - 70^0 = 20^0 \text{ (trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau)}$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} - \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{A_2} = \frac{80^0}{2} - 20^0 = 20^0 \text{ hay } \widehat{HDA} = 20^0$$

$$c/ \triangle ADH \text{ có } \widehat{H} = 90^0; \widehat{A_2} = 20^0$$

$$\Rightarrow \widehat{ADH} = 90^0 - 20^0 = 70^0$$

hoặc $\widehat{HDA} = \widehat{A_3} + \widehat{C}$ (t/c góc ngoài của tam**Bài 3:** Cho $\triangle ABC$ có : $AB=AC$, M là trung điểm của BC , trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $AM=MD$ a/ Chứng minh $\triangle ABM = \triangle DCM$ b/ chứng minh $AC \parallel DC$ c/ Chứng minh $AC \perp BC$ d/ Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để $\widehat{ADC} = 30^0$ GT: $\triangle ABC : AB=AC$ $M \in BC : BM=CM$ $D \in$ tia đối của tia MA $AM = MD$ KL: a/ $\triangle ABM = \triangle DCM$ b $AC \parallel DC$ c/ $AC \perp BC$ d/ Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để $\widehat{ADC} = 30^0$ **CM:**a/Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DCM$ có:

$AM = DM$ (gt) ; $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (hai góc đối đỉnh) ; $BM = CM$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DCM$ (c-g-c)

b/ Ta có: $\triangle BAM = \triangle DCM$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MDC}$ (hai góc tương ứng)

mà \widehat{BAM} và \widehat{MDC} là hai góc so le trong $\Rightarrow AB // DC$ (theo dấu hiệu nhận biết).

c/ Ta có: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

Vì $AB = AC$ (gt) ; Cạnh AM chung; $BM = MC$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACM}$ (hai góc tương ứng) mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (do hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$

d/ $\widehat{ADC} = 30^\circ$ khi $\widehat{DAB} = 30^\circ$ (Vì $\widehat{ADC} = \widehat{DAB}$ theo kết quả trên)

mà $\widehat{DAB} = 30^\circ$ khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (vì $\widehat{BAC} = 2 \cdot \widehat{DAB}$ do $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$)

Vậy $\widehat{ADC} = 30^\circ$ khi $\triangle ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$

TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC ĐỀU, TAM GIÁC VUÔNG CÂN

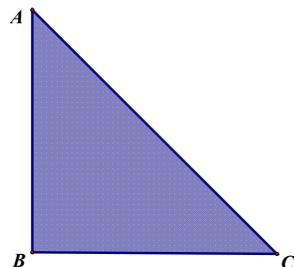
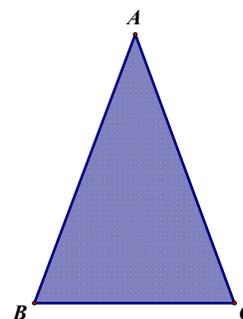
1. **Tam giác cân**: là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

☞ **Định lí 1**: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

$$\triangle ABC \text{ cân } \begin{cases} AB = AC \\ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \end{cases}$$

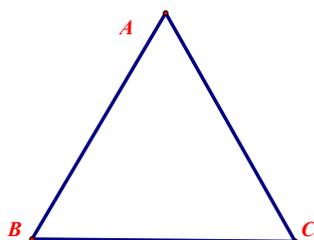
☞ **Định lí 2**: Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân. $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân}$

☞ **Tam giác vuông cân** là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.



$$\triangle ABC: \begin{cases} \widehat{B} = 90^\circ \\ BA = BC \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông cân}$$

2. **Tam giác đều**: là tam giác có ba cạnh bằng nhau



$$\triangle ABC: AB = AC = BC \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều}$$

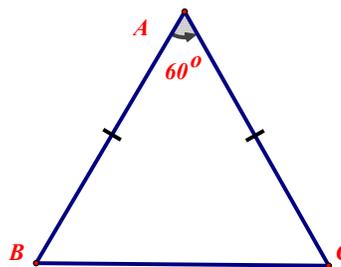
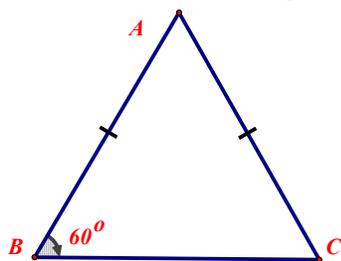
☞ Hệ quả:

✓ Trong một tam giác đều, mỗi góc bằng 60° . $\triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$

✓ Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

$\Delta ABC: A = B = C \Rightarrow \Delta ABC$ đều

✓ Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

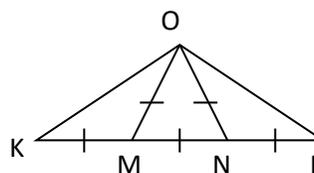
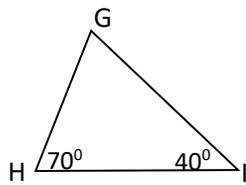
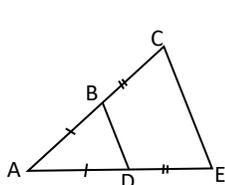


$\Delta ABC: \begin{cases} B = 60^\circ \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ đều

$\Delta ABC: \begin{cases} A = 60^\circ \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ đều

Bài tập 1:

Trong các tam giác trong hình sau, tam giác nào là tam giác cân? Vì sao?



Giải

Các tam giác cân có trong hình:

ΔABD cân tại A; ΔACE cân tại E.

ΔKOM cân tại M; ΔPON cân tại N.

ΔMNO cân tại O; ΔKOP cân tại O.

Bài tập 2:

Cho tam giác ABC cân A. Lấy điểm D thuộc cạnh AC, lấy điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AD = AE$.

a. So sánh $\angle ABD$ và $\angle ACE$

b. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Tam giác IBC là tam giác gì? Vì sao?

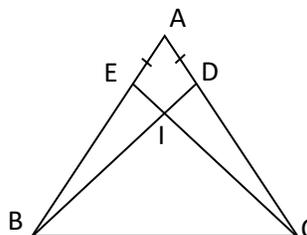
Chứng minh

a. Xét ΔABD và ΔACE có:

$AB = AC$ (gt)

$AD = AE$ (gt)

$\angle A$ chung.



Vậy $\triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c).

$\Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$ (hai góc tương ứng)

b. Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên: $\angle ABC = \angle ACB$

Lại có: $\widehat{\angle ABD} = \widehat{\angle ACE}$ (theo a)

$\Rightarrow \widehat{\angle ABC} - \widehat{\angle ABD} = \widehat{\angle ACB} - \widehat{\angle ACE}$

Hay $\widehat{\angle IBC} = \widehat{\angle ICB}$.

$\Rightarrow \triangle IBC$ cân tại I.

Bài tập 3:

Cho tam giác đều ABC. Gọi E, F, D là ba điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, AC sao cho: $AD = CF = BE$. Tam giác DEF là tam giác gì?

Giải

$\triangle ABC$ đều nên: $AB = AC = BC$

$BE = AD = CF$ (gt)

$\Rightarrow AB - BE = AC - AD = BC - CF$

Hay $AE = CD = BF$ (1)

$\triangle ABC$ đều nên: $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ (2)

Xét $\triangle AED$ và $\triangle BEF$ có:

$AE = BF$ (theo (1))

$AD = BE$ (gt)

$\angle A = \angle B$

$\Rightarrow \triangle AED = \triangle BEF$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = EF$ (3)

Xét $\triangle AED$ và $\triangle CDF$ có:

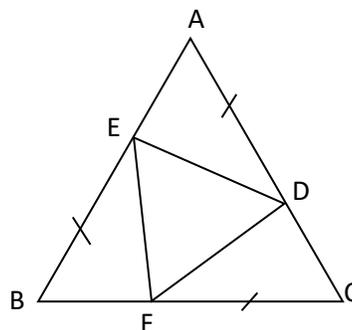
$AE = CD$ (theo (1)); $AD = CF$ (gt)

$\angle A = \angle C$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AED = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = FD$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $ED = EF = FD$

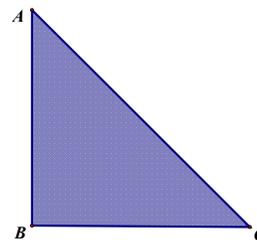
Vậy $\triangle DEF$ là tam giác đều.



ĐỊNH LÝ PY-TA-GO

Định lý Py- ta- go: Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

$$\Delta ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ (Định lý Pytago)}$$



***Định lý đảo:** Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$\Delta ABC:$

$$AC^2 = a$$

$$AB^2 + BC^2 = a$$

$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B (Định lý Pytago đảo)

Bài tập

Bài tập 1 : Trên hình vẽ bên cho biết

$AD \perp DC$; $AH \perp BC$; $DC \perp BC$; $AB = 13\text{cm}$

$AC = 15\text{cm}$; $DC = 12\text{cm}$

Tính độ dài đoạn thẳng BC.

Giải:

Vì $AH \perp BC$ ($H \in BC$)

$AH \perp BC$; $DC \perp BC$ (gt) $\Rightarrow AH \parallel DC$

mà HAC và DCA so le trong. Do đó: $HAC = DCA$

Chứng minh tương tự cũng có: $ACH = DAC$

Xét tam giác AHC và tam giác CDA có

$HAC = DCA$; AC cạnh chung; $ACH = DAC$

Do đó: $\Delta AHC = \Delta CDA$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = DC$

Mà $DC = 12\text{cm}$ (gt)

Do đó: $AH = 12\text{cm}$ (1)

Tam giác vuông HAB vuông ở H theo định lý Pitago ta có:

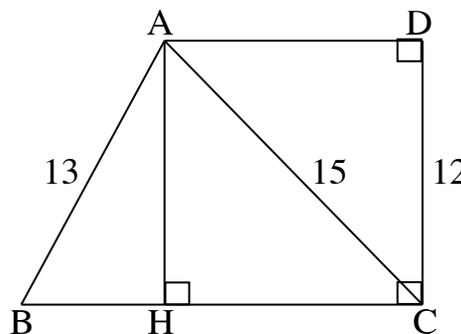
$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = 13^2 - 12^2 = 5^2 = 25$$

$$\Rightarrow BH = 5 \text{ (cm)} \text{ (2)}$$

Tam giác vuông HAC vuông ở H theo định lý Pitago ta có:

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 15^2 - 12^2 = 9^2 = 81$$

$$\Rightarrow HC = 9 \text{ (cm)}$$



Do đó: $BC = BH + HC = 5 + 9 = 14$ (cm)

Bài 2: Cho tam giác vuông ABC ($A = 90^\circ$), kẻ $AH \perp BC$

Chứng minh: $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$

Giải:

Áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông

Tam giác ABH có $H = 90^\circ$

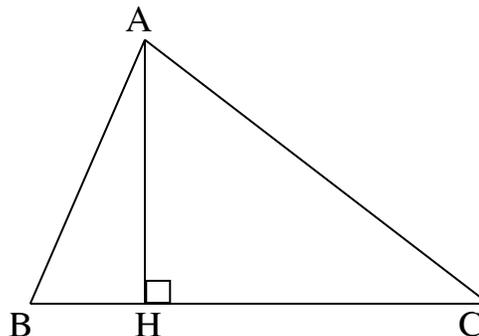
$$\Rightarrow AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AB^2 - HB^2 = AH^2$$

$$\Delta AHC \text{ có } H = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 - HC^2 = AH^2$$

$$\Rightarrow AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$$



Bài 3: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15$ cm. Tìm các độ dài AB;

AC

B

Giải:

Theo đề ra ta có:

$$\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau

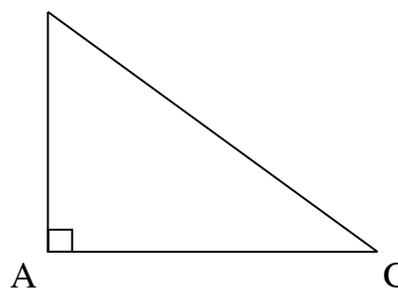
và định lý Pitago ta có:

$$\frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9 + 16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{15^2}{25} = 9$$

Suy ra: $AB^2 = 9 \cdot 9 = 9^2 \Rightarrow AB = 9$ cm

$$AC^2 = 16 \cdot 9 = (4 \cdot 3)^2 = 12^2 \Rightarrow AC = 12$$
 cm

Vậy hai cạnh cần tìm $AB = 9$ cm; $AC = 12$ cm



Bài 4:

Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Cho biết $AB = 13$ cm, $AH = 12$ cm, $HC = 16$ cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC

Giải:

Vì ΔAHB vuông tại H nên:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

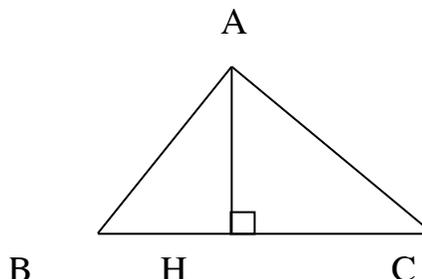
$$AC^2 = AH^2 + DC^2$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2$$

$$BH^2 = 13^2 - 12^2$$

$$BH^2 = 169 - 144 = 25$$

$$\Rightarrow BH = 5 \text{ (cm)}$$



Ta có : $BC = BH + HC$

$$BC = 5 + 16 \Rightarrow BC = 21 \text{ (cm)}$$

Vì ΔAHC vuông tại H nên:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$AC^2 = 12^2 + 16^2$$

$$AC^2 = 144 + 256 = 400$$

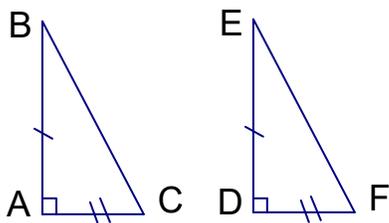
$$\Rightarrow AC = 20 \text{ (cm)}$$

ĐỊNH LÝ PITAGO - TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG.

Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

+ Trường hợp 1: Hai cạnh góc vuông.

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Xét $\Delta_v ABC$ và $\Delta_v DEF$

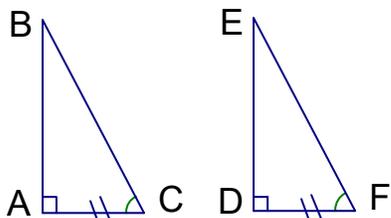
$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_v ABC = \Delta_v DEF$$

(Hai cạnh góc vuông)

+ Trường hợp 2: Cạnh góc vuông – góc nhọn.

Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Xét $\Delta_v ABC$ và $\Delta_v DEF$

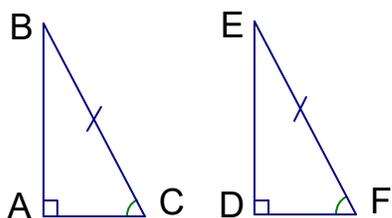
$$\text{có: } \begin{cases} AC = DF \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_v ABC = \Delta_v DEF$$

(Cạnh góc vuông - góc nhọn)

+ Trường hợp 3: Cạnh huyền – góc nhọn

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Xét $\Delta_v ABC$ và $\Delta_v DEF$

$$\text{có: } \begin{cases} BC = EF \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases}$$

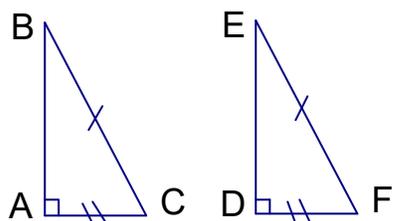
$$\Rightarrow \Delta_v ABC = \Delta_v DEF$$

(Cạnh huyền - góc nhọn)

+ Trường hợp 4: Cạnh huyền - cạnh góc vuông.

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam

giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.



Xét $\Delta_{\text{v}}ABC$ và $\Delta_{\text{v}}DEF$

có: $\begin{cases} BC = EF \\ AC = DF \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta_{\text{v}}ABC = \Delta_{\text{v}}DEF$

BÀI TẬP

Bài 2: Cho tam giác vuông cân tại đỉnh A. $MA = 2$ cm; $MB = 3$ cm; góc $AMC = 135^\circ$. Tính độ dài đoạn thẳng MC.

A

Giải:

Trên nửa mặt phẳng bờ Am không chứa điểm D.

Dựng tam giác ADM vuông cân tại đỉnh A.

Ta có: $AD = MA = 2$ cm

$\angle AMD = 45^\circ$; $\angle DMC = \angle AMC - \angle AMD = 90^\circ$

Xét tam giác ADC và AMB có: $AD = AM$

$\angle DAC = \angle MAB$ (hai góc cùng phụ nhau với góc CAM); $AC = AB$ (gt)

Do đó: $\Delta ADC = \Delta AMB$ (c.g.c) $\Rightarrow DC = MB$

Tam giác vuông AMD vuông ở A

nên $MD^2 = MA^2 + AD^2$ (pitago)

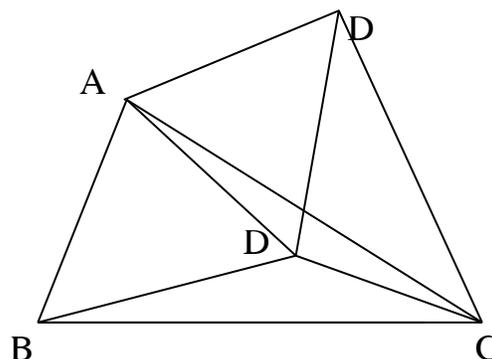
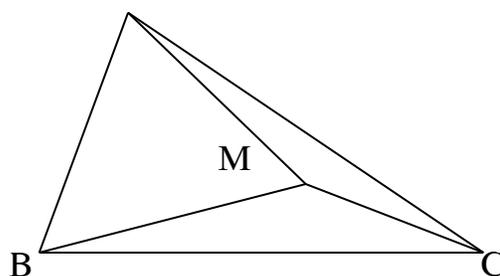
Do đó: $MD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

Tam giác MDC vuông ở M nên

$DC^2 = MD^2 + MC^2$ (Pitago)

Do đó: $3^2 = 8 + MC^2 \Rightarrow MC^2 = 9 - 8 = 1$

$\Rightarrow MC = 1$



Bài 3: Tam giác ABC có phải là tam giác vuông hay không nếu các cạnh AB; AC; BC tỉ lệ với

a. 9; 12 và 15

b. 3; 2,4 và 1,8

c. 4; 6 và 7

d. 4 ; $4\sqrt{2}$ và 4

Giải:

$$a. \quad \frac{AB}{9} = \frac{AC}{12} = \frac{BC}{15} = k \Rightarrow \begin{cases} AB = 9k \Rightarrow AB^2 = 81k^2 \\ AC = 12k \Rightarrow AC^2 = 144k^2 \\ BC = 15k \Rightarrow BC^2 = 225k^2 \end{cases}$$

$$AB^2 + AC^2 = 81k^2 + 144k^2 = 225k^2 = BC^2$$

Vậy tam giác ABC vuông ở A.

$$b. \quad \frac{AB}{4} = \frac{AC}{6} = \frac{BC}{7} = k \Rightarrow \begin{cases} AB = 4k \Rightarrow AB^2 = 16k^2 \\ AC = 6k \Rightarrow AC^2 = 36k^2 \\ BC = 7k \Rightarrow BC^2 = 49k^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 16k^2 + 36k^2 = 52k^2 \neq 49k^2 = BC^2$$

Vậy tam giác ABC không là tam giác vuông.

c. Tương tự tam giác ABC vuông ở C ($C = 90^0$)

d. Làm tương tự tam giác ABC vuông cân ($B = 90^0$)

Bài 4: Cho tam giác vuông ABC ($A = 90^0$), kẻ $AH \perp BC$

Chứng minh: $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$

Giải:

Áp dụng định lý Pitago vào các tam giác vuông

Tam giác ABH có $H = 90^0$

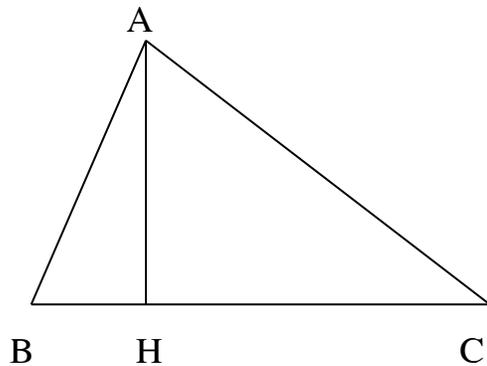
$$\Rightarrow AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AB^2 - HB^2 = AH^2$$

$$\Delta AHC \text{ có } H = 90^0 \Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 - HC^2 = AH^2$$

$$\Rightarrow AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$$



Bài 5: Cho tam giác ABC có A là góc tù. Trong các cạnh của tam giác ABC thì cạnh nào là cạnh lớn nhất?

Giải:

* Kẻ $AD \perp AB$ tia AD nằm giữa 2 tia AB và AC

$$\Rightarrow BD < BC \quad (1)$$

Xét tam giác ABD vuông ở A

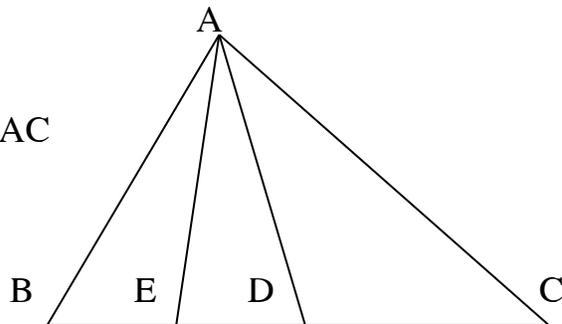
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow AB^2 < BD^2$$

$$\Rightarrow AB < BD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AB < BC$

* Kẻ $AE \perp AC$ tia AE nằm giữa hai tia AB và AC

$$\Rightarrow EC < BC \quad (3)$$



Xét tam giác AEC vuông ở A

$$EC^2 = AE^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 < EC^2 \text{ hay } AC < EC \text{ (4)}$$

Từ (3) và (4) suy ra: $AC < BC$

Vậy cạnh lớn nhất là BC.

Bài 8: Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt đường trung trực của BC tại I. Kẻ IH vuông góc với đường thẳng AB, kẻ IK vuông góc với đường thẳng AC. Chứng minh rằng $BH = CK$ A

Giải:

Gọi M là trung điểm của BC ta có:

$$\triangle AMI = \triangle CMI \text{ (c.g.c)}$$

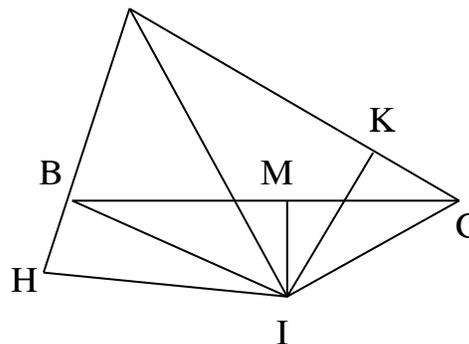
Vì $BM = CM$; IM chung; $M_1 = M_2$

$$\Rightarrow IB = IC \text{ (cặp góc tương ứng)}$$

$$\triangle AHI = \triangle AKI \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow IH = IK$$

$$\triangle IHB = \triangle IKC \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)} \Rightarrow BH = CK.$$



Bài 9: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15\text{cm}$. Tìm các độ dài AB; AC

Giải:

Theo đề ra ta có:

$$\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau

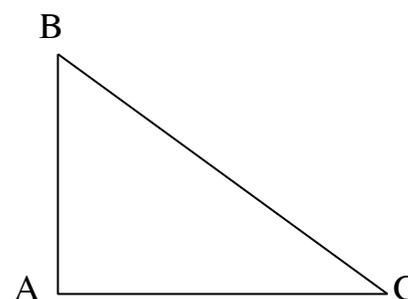
và định lý Pitago ta có:

$$\frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9 + 16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{15^2}{25} = 9$$

$$\text{Suy ra: } AB^2 = 9 \cdot 9 = 9^2 \Rightarrow AB = 9 \text{ cm}$$

$$AC^2 = 16 \cdot 9 = (4 \cdot 3)^2 = 12^2 \Rightarrow AC = 12 \text{ cm}$$

Vậy hai cạnh cần tìm $AB = 9\text{cm}$; $AC = 12\text{cm}$



Bài 10: Chứng minh rằng tam giác ABC vẽ trên giấy ô vuông ở hình bên là tam giác vuông cân.

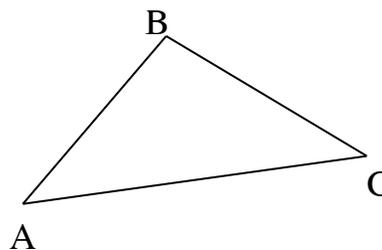
Giải:

Gọi độ dài cạnh của mỗi ô vuông là 1

Theo định lý Pitago ta có:

$$AB^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$BC^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$



$$AC^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

Do $AB^2 = BC^2$ nên $AC = AB$

Do $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên $\angle ABC = 90^\circ$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B.

Bài 11: Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 90^\circ$). Chứng minh rằng

a. Nếu $AB = \frac{1}{2}BC$ thì $\angle C = 30^\circ$

b. Nếu $\angle C = 30^\circ$ thì $AB = \frac{1}{2}BC$

Giải:

Trên tia đối của tia AB đặt $AD = AB$

Nối CD thì ta có:

$$\triangle BAC = \triangle DAC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CB = CD \text{ (1)}$$

a. Nếu $AB = \frac{1}{2}BC$ và $AB = AD = \frac{1}{2}BD$

Thì $BC = BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CB = BD$

$$\text{Vậy tam giác BCD đều} \Rightarrow \angle BCA = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

b. $CB = CD \Rightarrow$ Tam giác CBD cân

Nếu $\angle BCA = 30^\circ$; $\angle BCD = 60^\circ$

suy ra tam giác BCD đều $\Rightarrow BD = BC$

$$\Rightarrow 2AB = BC \Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC$$

Bài 12: Cho tam giác ABC, kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$. Biết $BE = CF = 8\text{cm}$. độ dài các đoạn thẳng BF và BC tỉ lệ với 3 và 5.

a. Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân

b. Tính độ dài cạnh đáy BC

c. BE và CF cắt nhau tại O. Nối OA và EF. Chứng minh đường thẳng AO là trung trực của đoạn thẳng EF.

Giải:

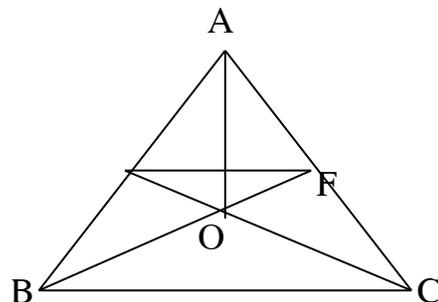
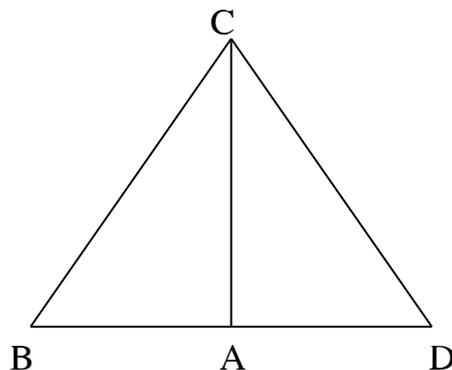
a. $\triangle BFC = \triangle CEB$ vì $\angle E = \angle F = 90^\circ$

$BE = CF$, BC cạnh chung

$\Rightarrow \angle FBC = \angle ECB \Rightarrow$ tam giác ABC cân

b. Theo đề bài các đoạn thẳng BF và BC

tỉ lệ với 3 và 5



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{BF}{3} = \frac{BC}{5} &\Rightarrow \frac{BF^2}{9} = \frac{BC^2}{25} = \frac{BC^2 - BF^2}{25 - 9} = \frac{FC^2}{16} = \frac{8^2}{16} = 4 \\ &\Rightarrow \frac{BC^2}{25} = 4 \Leftrightarrow BC^2 = 25 \cdot 4 = 100 \Rightarrow BC = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

c. Tam giác ABC cân $\Rightarrow AB = AC$ mà $BF = EC$ ($\triangle BFC = \triangle CEB$)

$$\Rightarrow AF = AE$$

$\triangle AFO = \triangle AEO$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \angle FAO = \angle EAO \Rightarrow \triangle FAI = \triangle EAI \text{ (Vì } AF = AE ; \angle FAI = \angle EAI)$$

$$\Rightarrow IF = IE \text{ (1)}$$

$$\text{và } \angle FIA = \angle EIA \text{ mà } \angle FIA + \angle EIA = 180^\circ$$

$$\text{nên } \angle FIA = \angle EIA = 90^\circ \Rightarrow AI \perp EF \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra AO là trung trực của đoạn thẳng EF.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1:

a/ Vẽ hình theo trình tự sau:

-Vẽ $\triangle ABC$

-Qua A vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$)

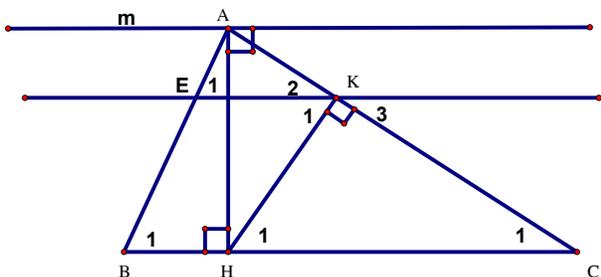
-Từ H vẽ $HK \perp AC$ ($K \in AC$)

-Qua K vẽ đường thẳng // với BC cắt AB tại E.

b/ Chỉ ra các cặp góc bằng nhau trên hình, giải thích.

c/ Chứng minh $AH \perp EK$.

d/ Qua A vẽ đường thẳng m vuông góc với AH .Chứng minh $m \parallel EK$



GT: $\triangle ABC$

$AH \perp BC$ ($H \in BC$)

$HK \perp AC$ ($K \in AC$)

$KE \parallel BC$ ($E \in AB$)

$Am \perp AH$

KL: a/ vẽ hình

b/ Chỉ ra các cặp góc bằng nhau

c/ $AH \perp KE$

d/ $Am \parallel EK$

CM:

b/ $\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$ (hai góc đồng vị của $EK // BC$)

$\widehat{K}_2 = \widehat{C}_1$ (như trên)

$\widehat{K}_1 = \widehat{H}_1$ (Hai góc so le trong của $EK // BC$)

$\widehat{K}_2 = \widehat{K}_3$ (đối đỉnh)

$\widehat{AHC} = \widehat{HKC} = 90^\circ$

c)

$\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \text{ (gt)} \\ EK // BC \text{ (gt)} \end{array} \right\} AH \perp EK \text{ (Quan hệ giữa tính vuông góc và song song)}$

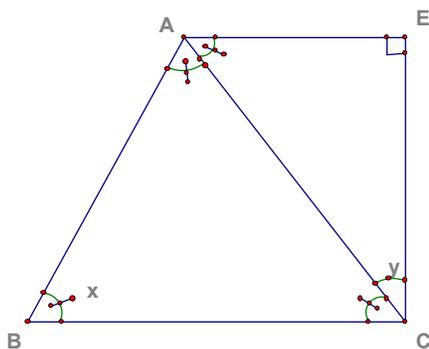
d)

$\left. \begin{array}{l} m \perp AH \text{ (gt)} \\ EK \perp AH \text{ (c/m trên)} \end{array} \right\} m // EK \text{ (Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ 3)}$

Bài 2:

a/ Tìm giá trị x; y, trong hình vẽ bên:

b/ AE có song song với BC không? Tại sao?



Bài 3: Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D, Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Biết $IB = IC$. Chứng minh rằng :

a/ $BD = CE$

b/ $\triangle BIE = \triangle CID$

c/ AI là tia phân giác của góc A

Bài 4: Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC.

1/ Chứng minh rằng $\triangle AMB = \triangle AMC$

2/ Chứng minh rằng AM là tia phân giác của góc BAC?

3/ Đường thẳng đi qua B vuông góc với BA cắt đường thẳng AM tại I. Chứng minh rằng

$CI \perp CA$

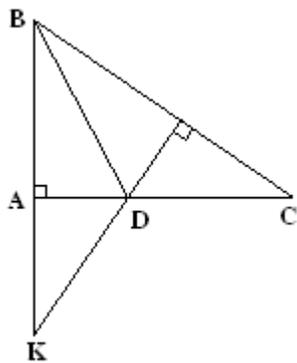
HƯỚNG DẪN

Bài 2: cho $\triangle ABC$ vuông tại A, phân giác \widehat{B} cắt AC tại D. Kẻ $DE \perp BD$ ($E \in BC$).

a) Cm: $BA = BE$

b) $K = BA \cap DE$. Cm: $DC = DK$.

HD:



GT	ΔABC vuông tại A BD: phân giác \widehat{ABC} $DE \perp BC$ $DE \cap BA = K$
----	--

KL	a) $BA = BE$ b) $DC = DK$
----	------------------------------

a) CM: $BA = BE$

Xét ΔABD vuông tại A và ΔBED vuông tại E:

BD: cạnh chung

$\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (BD: phân giác \widehat{B}) $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD$ (ch-gn)

$\Rightarrow BA = BE$ (2 cạnh tương ứng)

b) CM: $DK = DC$

Xét ΔEDC và ΔADK :

$DE = DA$ ($\Delta ABD = \Delta EBD$)

$\widehat{EDC} = \widehat{ADK}$ (đđ)

$\Rightarrow \Delta EDC = \Delta ADK$ (cgv-gn)

$\Rightarrow DC = DK$ (2 cạnh tương ứng)

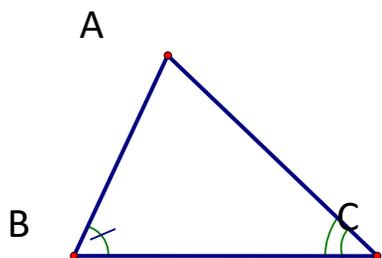
CHƯƠNG III: QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ CỦA TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

QUAN HỆ GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC.

Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác:

Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.



$$\Delta ABC: AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

Bài tập

Bài 1:

a. So sánh các góc của tam giác PQR biết rằng $PQ = 7\text{cm}$; $QR = 7\text{cm}$; $PR = 5\text{cm}$

b. So sánh các cạnh của tam giác HIK biết rằng $H = 75^\circ$; $K = 35^\circ$

Giải:

a. Từ hình vẽ bên ta có: $PQ = RP$

$$\Rightarrow \Delta PQR \text{ cân tại } Q \Rightarrow R = P$$

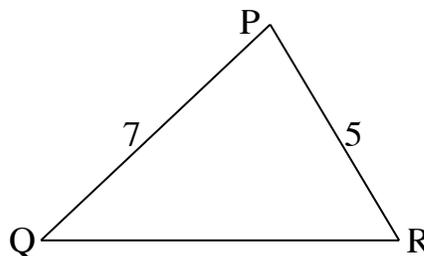
$$QR > PR \Rightarrow P > Q$$

(quan hệ giữa cạnh và góc đối diện)

$$\text{vậy } R = P > Q$$

$$\text{b. } I = 180^\circ - (75^\circ + 35^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$H > I > K \Rightarrow IK > HK > HI \text{ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện)}$$



Bài 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $AB + AC > BC$

Giải:

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D

$$\text{sao cho } AD = AC$$

Ta có: $AD = AC \Rightarrow \Delta ADC$ cân đỉnh D

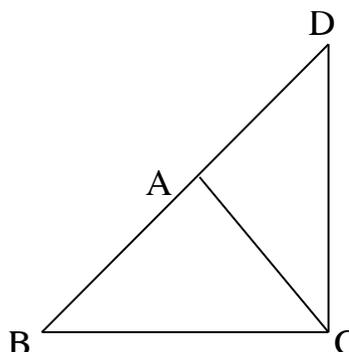
$$\Rightarrow \hat{ADC} = \hat{ACD} \quad (1)$$

Tia CA nằm giữa hai tia CB và CD

$$\text{Do đó: } \hat{BCD} > \hat{ACD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\hat{BCD} > \hat{ADC}$

Xét tam giác DBC có $\hat{BCD} > \hat{BDC}$



suy ra $DB > BC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác) (3)

mà $DB = AB + AD = AB + AC$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $AB + AC > BC$

Bài 3: Cho tam giác ABC , $A = 90^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy D sao cho $AD < AC$. Nối B với D . Chứng minh rằng: $BC > BD$

Giải:

Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AD$

Ta có: $AE < AC$ (Vì $AD < AC$)

Nên E nằm giữa A và C

Mà $BA \perp DE$ và $DA = AE$

$\Rightarrow \triangle BDE$ cân đỉnh B

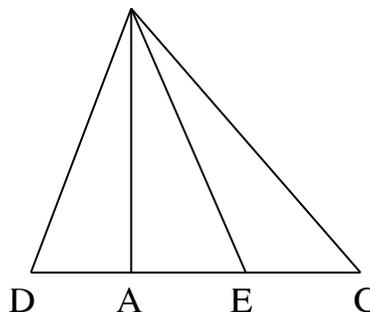
$\Rightarrow \angle BDE = \angle BEA$

Ta có: $\angle BEA > \angle BCE$ ($\angle BEA$ là góc ngoài của tam giác BEC)

Do đó: $\angle BDC > \angle BCD$

Xét tam giác BDC có: $\angle BDC > \angle BCD$

Suy ra: $BC > BD$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác)



Bài 4: Cho tam giác ABC có $AB < AC$, M là trung điểm của cạnh BC . So sánh $\angle BAM$ và $\angle MAC$

Giải:

Vẽ tia đối của tia MA và trên đó

lấy điểm D sao cho $MD = MA$

Xét tam giác MAB và tam giác MDC có:

$MA = MD$; $\angle AMB = \angle DMC$ (đối đỉnh)

$MB = MC$ (M là TĐ của cạnh BC)

Do đó: $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c)

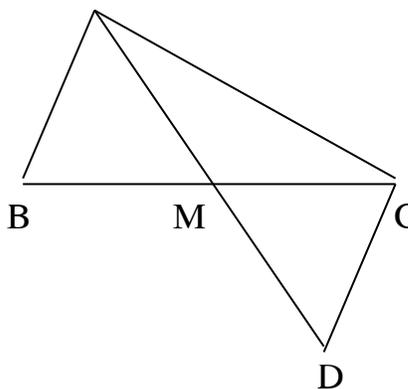
Suy ra: $AB = CD$; $\angle BAM = \angle MDC$

Ta có: $AB = CD$; $AB < AC \Rightarrow CD < CA$

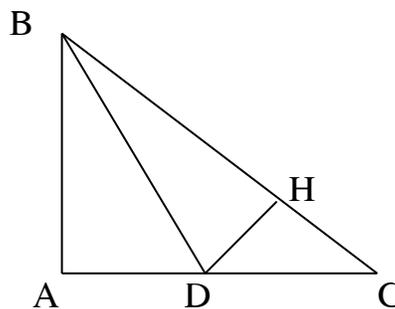
Xét tam giác ADC có: $CD < AC \Rightarrow \angle MAC < \angle MDC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Mà $\angle MAC < \angle MDC$ và $\angle BAM = \angle MDC$

Suy ra: $\angle MAC < \angle BAM$



Bài 5: Cho tam giác ABC vuông ở A, tia phân giác của góc B cắt AC ở D. So sánh các độ dài AD, DC.



Giải:

Kẻ $DH \perp BC$

$\triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow AD = DH$

$\triangle DHC$ vuông tại H $\Rightarrow DH < DC$

$\triangle DHC$ (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền)

suy ra: $AD < DC$

Bài 6: Chứng minh rằng nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với nó bằng nửa cạnh huyền.

Giải:

Xét tam giác ABC có $A = 90^\circ$; $B = 30^\circ$

Cần chứng minh: $AC = \frac{1}{2} BC$

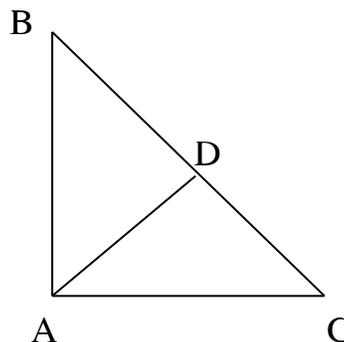
Trên BC lấy điểm D sao cho $CD = CA$

Tam giác ACD còn có: $C = 60^\circ$, $AD = AC = CD$

Tam giác ABD có $B = 30^\circ$; $A_2 = 30^\circ$

nên là tam giác đều

suy ra $AD = BE$. Do đó: $AC = \frac{1}{2} BC$



Bài 7: Cho tam giác ABC có $A = 85^\circ$, $B = 40^\circ$

a. So sánh các cạnh của tam giác ABC

A. $AB < BC < AC$

C. $AB < AC < BC$

B. $BC < AC < AB$

D. $AC < AB < BC$

b. Trên tia đối của yia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$. So sánh độ dài các đoạn CD; CB; CE

A. $CE < CB < CD$

C. $CD < CE < CB$

B. $CB < CE < CD$

D. $CD < CB < CE$

Giải: a. Chọn D

Vì $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (85 + 40) = 55$

Khi đó nhận thấy rằng $B < C < A \Leftrightarrow AC < AB < BC$

b. Chọn D

Bài 8: Cho tam giác ABC tia phân giác của góc D cắt AC tại D. So sánh độ dài của AB và BC, biết $\angle BDC$ tù.

Giải:

Để so sánh độ dài của AB và BC ta cần đi so sánh hai góc C và A.

Theo giả thiết ta có: $\angle BDC$ tù

$$\angle D_1 > 90^\circ \Leftrightarrow 2\angle D_1 > 180^\circ$$

Trong tam giác ABD ta có: $\angle D_1 = \angle A + \angle B_2$ (1)

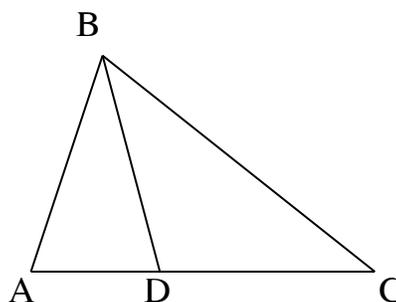
Trong tam giác BCD ta có: $\angle D_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180^\circ$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được:

$$2\angle D_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = \angle A + \angle B_2 + 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A - \angle C = 2\angle D_1 - 180^\circ > 0$$

$$\Rightarrow \angle A > \angle C \Leftrightarrow BC > AB$$



Bài 9: Cho góc $\angle xOy = 60^\circ$, điểm A nằm trong góc $\angle xOy$. Vẽ điểm D sao cho Ox là đường trung trực của AB. Vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AC.

a. Khẳng định $OB = OC$ là đúng hay sai?

A. Đúng

B. Sai

b. Tính số đo góc BOC

A. 60° ;

B. 90° ;

C. 120° ;

D. 150°

Giải: a. Chọn A

Vì $OA = OB$ (vì Ox là đường trung trực của AB)

$OA = OC$ (vì Oy là đường trung trực của AC)

Do đó: $OB = OC$

b. Chọn C vì tam giác OAB cân ở O nên $\angle O_1 = \angle O_2$

Tam giác OAC cân ở O nên $\angle O_3 = \angle O_4$

$$\text{Khi đó: } \angle BOC = \angle O_1 + \angle O_2 + \angle O_3 + \angle O_4 = 2\angle O_2 + 2\angle O_3 = 2(\angle O_2 + \angle O_3)$$

$$= 2(\angle xOy) = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Vậy ta có: $\angle BOC = 120^\circ$

Bài 10:

a. Cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và

$BC > B_1C_1$. So sánh số đo của hai góc A và A_1

Giải: Theo giả thiết ta có: $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ và $BC > B_1C_1$

Thì $\angle A > \angle A_1$ (quan hệ giữa các cạnh đối diện trong tam giác)

b. Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ và $A > A_1$. Chứng minh rằng $BC > B_1C_1$

Giải: Xét tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$

Có $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ và $A > A_1$ (gt)

Suy ra: $BC > B_1C_1$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong 1 tam giác)

Bài 11: Cho tam giác ABC trung tuyến AM . Lấy điểm M bất kì trên tia đối của tia MA . So sánh độ dài CD và BD .

Giải:

Ta lần lượt nhận thấy

Với hai tam giác ABM và ACM có:

$MB = MC$ (vì M là trung điểm BC)

AM chung; $AB < AC$

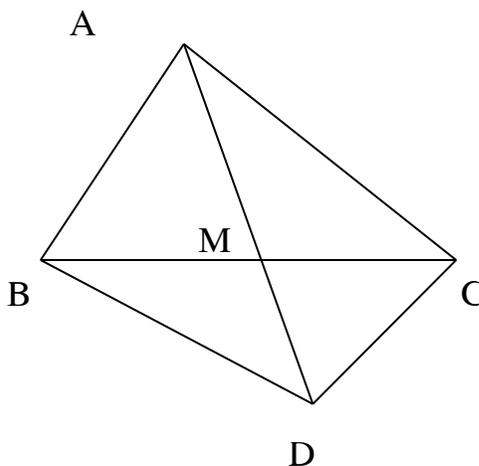
Do đó: $M_1 < M_2 \Leftrightarrow M_3 < M_4$

Với hai tam giác BDM và CDM có

$MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

DM chung; $M_3 < M_4$

Do đó: $CD < BD$



Bài 12: Cho tam giác ABC với $BC > AB$. Tia phân giác của góc ABC cắt cạnh AC tại D . Chứng minh $CD > DA$

Giải:

Lấy K trên cạnh BC sao cho $BK = BA$.

Có $\triangle DKB$ và $\triangle DAB$

Cạnh DB chung; $B_1 = B_2$ (vì BD là tia phân giác ABC)

$BK = BA$ (theo cách lấy điểm K)

Vậy $\triangle DKB = \triangle DAB$ (c.g.c)

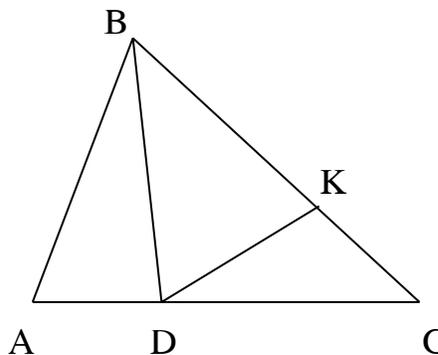
Suy ra: $D_1 = D_2$; $DK = DA$

Mặt khác: $\angle CKD$ là góc ngoài tam giác KDB nên $\angle CKD > D_1$ (1)

D_2 là góc ngoài tam giác DBC nên $D_2 > \angle BCD$ (2)

Vì $D_1 = D_2$; từ (1) và (2) suy ra $\angle CKD > \angle BCD$

Trong tam giác KCD vì $\angle K > \angle C$ nên $CD > DK$ hay $CD > DA$



Bài 13: Cho tam giác ABC ($AC > AB$) A tù, đường cao AH (đường $AH \perp BC$) và trung tuyến AM (đường AM đi qua trung điểm M của cạnh BC). Chứng minh:

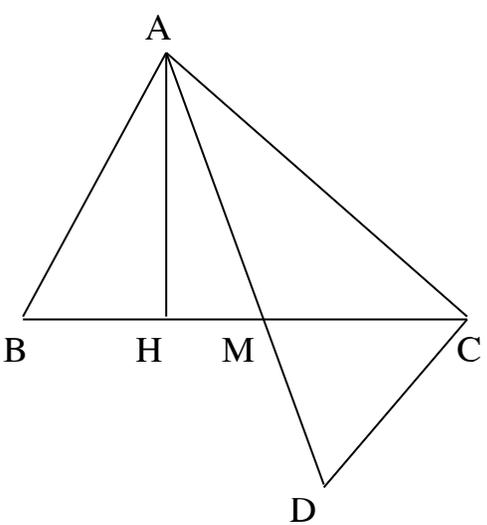
- a. $BAM > MAC$
 b. H nằm giữa B và M

Giải:

- a. Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của AD, dễ dàng chứng minh được $\triangle AMB = \triangle DMC$ (c.g.c)

$$\text{Suy ra } \angle BAM = \angle D \quad (1)$$

$$AB = DC$$

Trong $\triangle ACD$ có : $AC > DC$ do $AC > AB$ (gt) 

Và $AB = DC$ (c/m trên)

Nên $\angle D > \angle MAC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BAM > \angle MAC$

- b. $AC > AB \Rightarrow HC > HB$ (H thuộc đoạn thẳng BC do A là góc tù và $MB = MC$)

suy ra: $BM > BH$. Vậy H nằm giữa hai điểm B và M.

Bài 14: Cho tam giác MNP biết $MP > MN$, MD là đường trung tuyến thuộc cạnh NP. Trên tia MD lấy điểm E sao cho D là trung điểm của ME.

Chứng minh $\angle MEP > \angle EMP$

Giải:

$$\triangle MDN = \triangle EDP \quad (\text{c.g.c})$$

$$DN = DP$$

$$DM = DE$$

$$\angle MDN = \angle EDP \quad (\text{đối đỉnh})$$

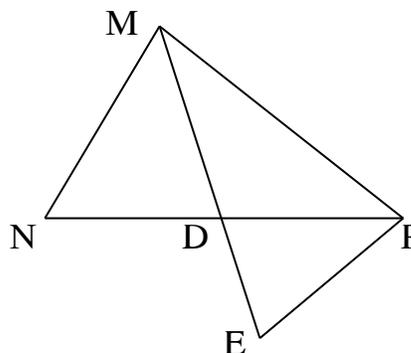
$$\text{Suy ra: } MN = EP$$

$$\text{Mà } MP > MN \Rightarrow MP > EP$$

Trong tam giác MEP, MP đối diện với $\angle MEP$

EP đối diện với $\angle EMP$

Do đó: $\angle MEP > \angle EMP$



Bài 15: Tính chu vi của tam giác cân ABC biết

a. $AB = 5\text{cm}; AC = 12\text{cm}$

b. $AB = 7\text{cm}; AC = 13\text{cm}$

Giải:

Tam giác ABC cân có $AB = 5\text{cm}; AC = 12\text{cm}$ thì cạnh đáy là Ab.

Thật vậy nếu cạnh bên $AB = 5\text{cm}$ thì cạnh bên $BC = 5\text{cm}$

Như vậy ta có: $AB + BC = 10\text{cm} < CA = 12\text{cm}$

đó là điều vô lí (trong một tam giác tổng độ dài hai cạnh bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh thứ ba)

Vậy chu vi tam giác ABC là: $AB + AC + BC = 5 + 2.12 = 29\text{ cm}$

b. Có thể xảy ra hai trường hợp

- Nếu $AB = 7\text{cm}$ là cạnh đáy thì $AB = BC = 13\text{cm}$ là cạnh bên

- Nếu chu vi tam giác ABC bằng: $7 + 2.13 = 33\text{ cm}$

- Nếu $AB = BC = 7\text{cm}$ là các cạnh bên thì $AC = 13\text{cm}$ là cạnh đáy. Chu vi của tam giác ABC là: $13 + 2.7 = 27\text{ cm}$.

Bài 16: Cho tam giác ABC biết $C = \frac{B}{2} = \frac{A}{3}$

a. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông tại A và tính số đo góc B, góc C.

b. Kẻ đường cao AH. Chứng minh $B = HAC$; $C = BAH$

Giải:

a. $\frac{C}{1} = \frac{B}{2} = \frac{A}{3} = \frac{A+B+C}{1+2+3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ (áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau)

Vậy $\frac{A}{3} = 30^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác vuông tại A.

b. Vì $AH \perp BC$ nên $H = 1v$ suy ra $B + BAH = 1v$

Vì $BAH + HAC = 1v$ suy ra $B = HAC$ (2 góc phụ nhau)

Tương tự ta cũng chứng minh được $C = BAH$.

QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU QUAN HỆ 3 CẠNH CỦA TAM GIÁC- BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

☞ **Khái niệm đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên**

- Lấy $A \notin d$, kẻ $AH \perp d$, lấy $B \in d$. Khi đó:

☞

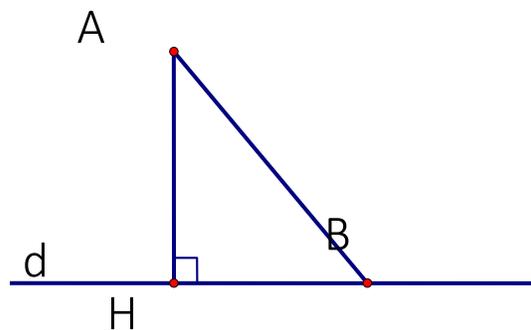
oạn thẳng AH gọi là **đường vuông góc** kẻ từ A đến đường thẳng d

☞

iểm H gọi là **hình chiếu** của A trên đường thẳng d

☞

Đoạn thẳng AB gọi là một **đường xiên** kẻ từ A đến đường thẳng d

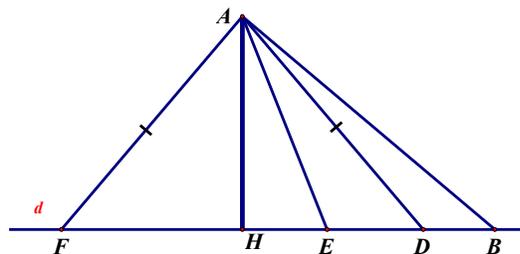




Đoạn thẳng HB gọi là **hình chiếu** của đường xiên AB trên đ. thẳng d

✓ **Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc:**

Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.



✎ **Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu:** Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, thì:

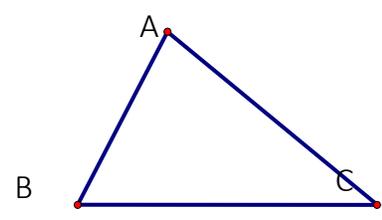
- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

<p>- $HB > HD > HE \Leftrightarrow AB > AD > AE$</p> <p>- $AD = AF \Leftrightarrow HD = HF$</p>

Quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tam giác

✎ Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

<p>$AB + AC > BC$</p> <p>$AB + BC > AC$</p> <p>$AC + BC > AB$</p>



✎ Hệ quả: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

<p>$AC - BC < AB$</p> <p>$AB - BC < AC$</p> <p>$AC - AB < BC$</p>

✎ Nhận xét: Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

<p>$AB - AC < BC < AB + AC$</p>
--

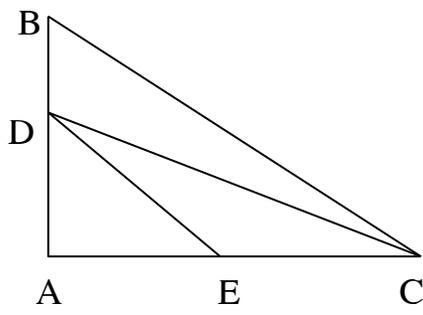
Lưu ý: chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại, hoặc so sánh độ dài nhỏ nhất với hiệu hai độ dài còn lại.

Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm D và E . Chứng minh rằng $DE < BC$.

Giải:

Nối D và C ta có: AE, AC lần lượt là hình chiếu của các hình xiên DE, DC trên đường thẳng AC
 mà $AE < AC$ (Vì E thuộc cạnh AC)



Suy ra: $DE < DC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu của nó)

Mặt khác: AD; AB lần lượt là hình chiếu của các đường xiên DC, BC trên đường thẳng AB mà $AD < AB$ (D thuộc cạnh AB)
Suy ra: $DC < BC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu của nó)
Ta có: $DE < DC$; $DC < BC \Rightarrow DE < BC$

Bài 2: Cho tam giác ABC ($A = 90^\circ$) vẽ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Chứng minh rằng $AH + BC > AB + AC$

B

Giải:

Trên tia BC lấy điểm D sao cho $BD = AB$

Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AH$

(Vì $AB < BC$ nên D nằm giữa B và C,

$AH < AC$ nên E nằm giữa A và C)

Tam giác ABD cân đỉnh B (Vì $BD = AB$)

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle BDA$$

$$\Rightarrow \text{Ta có: } \angle BAD + \angle DAE = \angle BAD + \angle HAD = 90^\circ$$

Do đó: $\angle DAE = \angle HAD$

Xét tam giác HAD và tam giác EAD có:

$AH = AE$; $\angle HAD = \angle DAE$; Ad cạnh chung

Do đó: $\triangle HAD = \triangle EAD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle AHD = \angle AED$$

mà $\angle AHD = 90^\circ$ nên $\angle AED = 90^\circ$

Ta có: $DE \perp AC \Rightarrow DC > EC$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Do đó: $AH + BD + DC > AE + AB + EC = AB + AC$

Vậy $AH + BC > AB + AC$.

Bài 3: Cho tam giác ABC, $AB > AC$ vẽ $BD \perp AC$; $CE \perp AB$ ($D \in AC$; $E \in AB$). Chứng minh rằng $AB - AC > BD - CE$

Giải:

Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $AF = AC$,

Vì $AB > AC$ nên E nằm giữa A và B.

Vẽ $FG \perp AC$, $FH \perp BD$ ($G \in AC$; $H \in BD$)

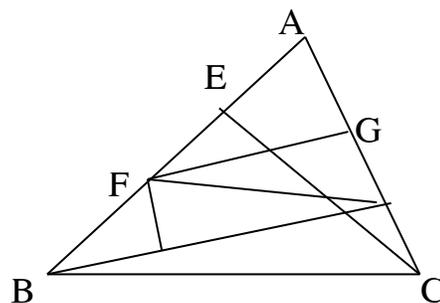
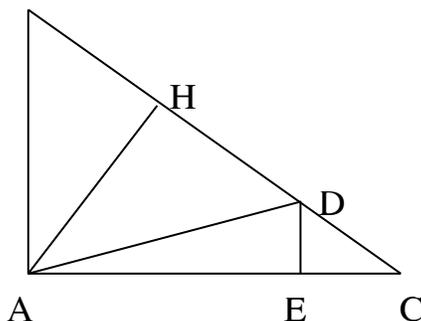
Ta có: $FG \perp AC$; $BD \perp AC$ (gt)

$$\Rightarrow FG \parallel BD$$

Xét $\triangle GFD$ ($\angle GFD = 90^\circ$); $\triangle HDF$ ($\angle HDF = 90^\circ$)

Có DF chung

$$\angle GFD = \angle HDF \text{ (vì } FG \parallel BD)$$



Do đó: $\triangle GFD = \triangle HDF$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra: $FG = HD$; $GD = FH$

Xét $\triangle GAF$ ($\angle GF = 90^\circ$); $\triangle EAC$ ($\angle AEC = 90^\circ$)

Có: $AF = AC$; $\angle GAF$ (cóc chung)

Do đó: $\triangle GAF = \triangle EAC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra: $FG = CE$

Do vậy: $FG = CE = HD$

Ta có: $FH \perp BD$ nên $FB > BH$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Suy ra: $AB - AC > BD - HD$

Hay $AB - AC > BD - CE$

Bài 4: Cho tam giác cân ABC tại đỉnh A . Từ điểm D trên cạnh AB vẽ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại E . Chứng minh rằng $BE > \frac{1}{2}(DE + BC)$

Giải:

Vẽ $BH \perp DE$ ($H \in DE$), $EN \perp BC$ ($N \in BC$)

Xét $\triangle HBE$ ($\angle HBE = 90^\circ$) và $\triangle NEB$ ($\angle ENB = 90^\circ$)

BE cạnh chung, $\angle HBE = \angle NEB$ (vì $DE \parallel BC$)

Do đó: $\triangle HBE = \triangle NEB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra: $BH = EN$

Mặt khác $\angle HBD + \angle DBC = \angle HBC = 90^\circ$

$\angle NEC + \angle ECN = 90^\circ$ ($\triangle NEC$ có $\angle N = 90^\circ$)

mà $\angle DBC = \angle ECN$ ($\triangle ABC$ cân đỉnh A)

suy ra: $\angle HBD = \angle NEC$

Xét $\triangle HBD$ và $\triangle NEC$ có:

$\angle HDB = \angle CNE$ ($= 90^\circ$); $BH = EN$ (theo c/m trên)

$\angle HBD = \angle NEC$ (c/m trên)

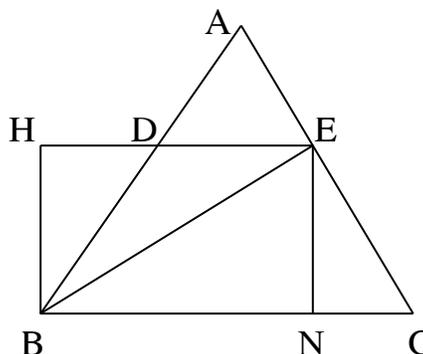
Do đó: $\triangle HBD = \triangle NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow HD = NC$

Mà $BH \perp DE$ suy ra $BE > HE$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

Do đó: $BE + BE > HE + MB$

Mà $HE + BN = DE + HD + BN = DE + NC + BN = DE + BC$

Nên $BE + BE > DE + BC \Rightarrow 2BE > BC + DE \Rightarrow BE > \frac{1}{2}(DE + BC)$



Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, điểm D nằm giữa B và C. Chứng minh rằng độ dài AD nhỏ hơn cạnh bên của tam giác ABC.

Giải:

Kẻ $AH \perp BC$

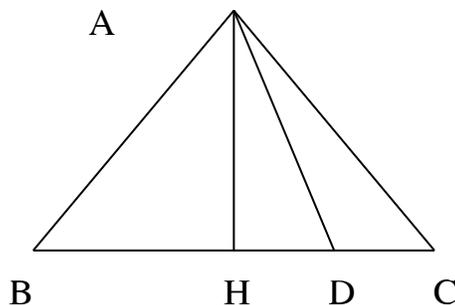
- Nếu D trùng H thì $AD < AC$ vì $AH < AC$
(đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên)

- Nếu D không trùng H

Giả sử D nằm giữa H và C, ta có $HD < HC$

Suy ra: $AD < AC$ (hình chiếu nhỏ hơn thì đường xiên nhỏ hơn)

Vậy AD nhỏ hơn cạnh bên của tam giác ABC



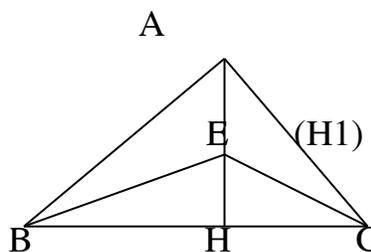
Bài 6:

a. Cho hình vẽ bên trong đó $AB > AC$.

Chứng minh rằng $EB > EC$

b. Cho hình vẽ bên.

Chứng minh rằng: $BD + CE < AB + AC$



Giải:

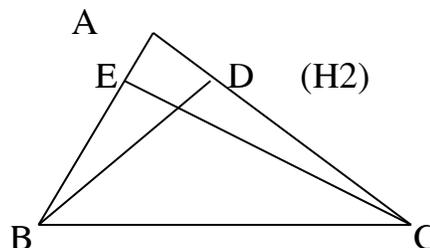
a. $AB > AC \Rightarrow HB > HC$ (đường xiên lớn hơn thì đường chểu lớn hơn)

$HB > HC \Rightarrow EB > EC$

b. (H2) Tam giác ABD vuông tại D $\Rightarrow BD < AB$

Tam giác ADE vuông tại E suy ra: $CE < AC$

Suy ra: $BD + CE < AB + AC$



Bài 7: Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C (BD không vuông góc với AC), gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BD. So sánh AC với $AE + CF$

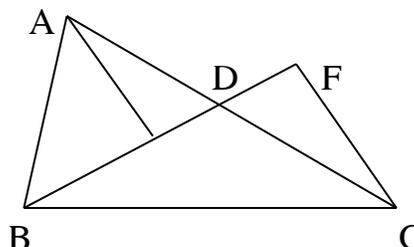
Giải:

Hướng dẫn:

Xét tam giác ADE vuông tại E

$AE < AD$ (1)

Xét tam giác CDF vuông tại F



$$CF < CD \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } AE + CF < AD + CD = AC$$

Bài 8: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng: $AB + AC > 2AM$

Giải:

Trên tia đối của MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có:

$$MA = MD; \angle AMB = \angle DMC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$MB = MC \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó: } \triangle MAB = \triangle MDC \text{ (c.g.c)}$$

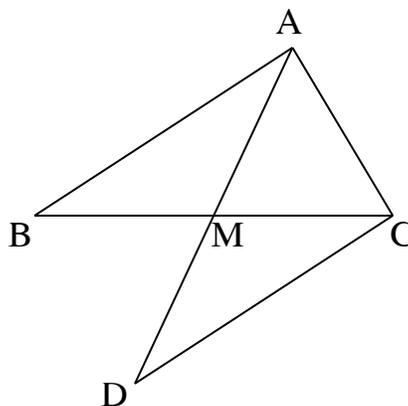
$$\Rightarrow AB = DC$$

Xét tam giác ADC có:

$$CD + AC > AD \text{ (bất đẳng thức tam giác)}$$

$$\text{Do đó: } AB + AC > AD \text{ mà } AD = 2AM$$

$$\text{Suy ra: } AB + AC > 2AM$$



Bài 9: Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng: $MB + MC < AB + AC$

Giải:

Vẽ đường thẳng BM cắt AC tại D

Vì M ở trong tam giác ABC nên D nằm giữa A và C

$$\text{Suy ra: } AC = AD + DC$$

$$\text{Xét tam giác ABD có: } DB < AB + AD$$

(bất đẳng thức tam giác)

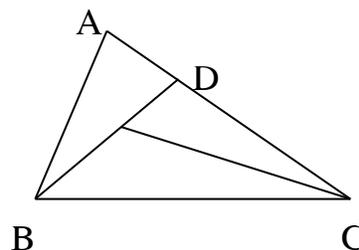
$$\Rightarrow MB + MD < AB + AD \quad (1)$$

$$\text{Xét tam giác MDC có: } MC < DC + MD \quad (2) \text{ (bất đẳng thức tam giác)}$$

Cộng (1) với (2) vế với vế ta có:

$$MB + MC + MD < AB + AD + DC + MD$$

$$\Rightarrow MB + MC < AB + (AD + DC) \Rightarrow MB + MC < AB + AC$$



Bài 10: Cho tam giác ABC có $AB > AC$; AD là tia phân giác của góc BAC

($D \in BC$). M là điểm nằm trên đoạn thẳng AD.

Chứng minh rằng $MB - MC < AB - AC$.

Giải: Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$

vì $AB > AC$, nên E nằm giữa A và B

Suy ra: $AE + EB = AB$

$$\Rightarrow EB = AB - AE = AB - AC$$

Xét $\triangle AEM$ và $\triangle ACM$ có: $AE = AC$

$\angle EAM = \angle CAM$ (AD là tia phân giác $\angle BAC$)

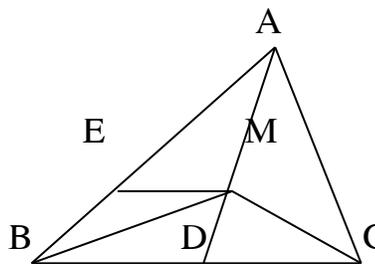
AM cạnh chung

Do đó: $\triangle AEM = \triangle ACM$ (c.g.c)

Suy ra: $ME = MC$

Xét tam giác MEB có $MB - ME < EB$ (bất đẳng thức tam giác)

Do đó: $MB - MC < AB - AC$



Bài 11: Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng:

a. Nếu $A = 90^\circ$ thì $AM = \frac{1}{2} BC$

b. Nếu $A > 90^\circ$ thì $AM < \frac{1}{2} BC$

c. Nếu $A < 90^\circ$ thì $AM > \frac{1}{2} BC$

Tính chất: thừa nhận

Nếu hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các góc xen giữa chúng không bằng nhau và cạnh nào đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn, góc nào đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Giải:

Vẽ tia đối của tia MA trên tia đó lấy điểm D sao cho $MD = MA$

Suy ra $AD = 2AM$

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có:

$MA = MD$; $\angle AMB = \angle DMC$ (đối đỉnh)

$MB = MC$ (gt)

Do đó: $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c)

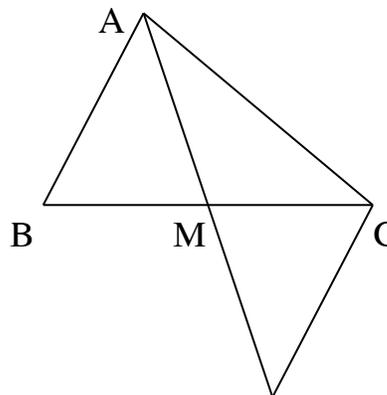
Suy ra: $AB = DC$; $\angle BAM = \angle CDM$

Ta có: $\angle BAM = \angle CDM$

mà $\angle BAM$ và $\angle CDM$ (so le trong)

nên $AB \parallel CD \Rightarrow \angle BAC + \angle ACD = 180^\circ$

Vận dụng vào tính chất trên xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có:



$AB = CD$; AC cạnh chung

Do đó:

a. $BAC = ACD$ ($BAC = 90^0$; $BAC + ACD = 180^0$) nên

$$ACD = 90^0 \Rightarrow BAC = ACD \Rightarrow BC = AD \Rightarrow AM = \frac{1}{2} BC$$

b. $BAC > ACD$ ($BAC > 90^0$; $BAC + ACD = 180^0$) nên

$$ACD < 90^0 \Rightarrow BAC > ACD \Rightarrow BC > AD \Rightarrow AM < \frac{1}{2} BC$$

c. $BAC < ACD$ ($BAC < 90^0$; $BAC + ACD = 180^0$) nên

$$ACD > 90^0 \Rightarrow BAC < ACD \Rightarrow BC < AD \Rightarrow AM > \frac{1}{2} BC$$

Tom lại: Nếu $A = 90^0$ thì $AM = \frac{1}{2} BC$

Nếu $A > 90^0$ thì $AM < \frac{1}{2} BC$

Nếu $A < 90^0$ thì $AM > \frac{1}{2} BC$

Bài 12: Trong các trường hợp sau trường hợp nào là ba cạnh của một tam giác.

a. 5cm; 10cm; 12cm.

b. 1m; 2m; 3,3m

c. 1,2m; 1m; 2,2m.

Giải:

a. Đúng vì: $5 + 10 > 12$

b. Sai vì: $1 + 2 < 3,3$

c. Sai vì: $2,2 = 1,2 + 1$

Bài 13: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$; $AC = 1\text{cm}$. Hãy tìm độ dài cạnh BC biết rằng độ dài này là một số nguyên (cm)

Giải:

Theo bất đẳng thức tam giác

$$AB - AC < BC < AB + AC$$

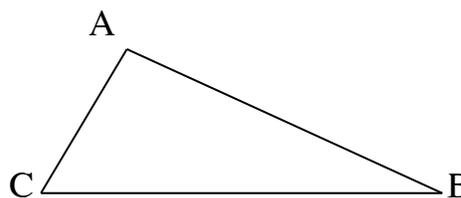
$$\Rightarrow 4 - 1 < BC < 4 + 1$$

$$\Rightarrow 3 < BC < 5$$

Do đó độ dài cạnh BC bằng 1 số nguyên (cm) nên $BC = 4\text{cm}$

Bài 14:

a. Tính chu vi của một tam giác cân có hai cạnh bằng 4m và 9m.



b. Cho tam giác ABC điểm D nằm giữa B và C. Chứng minh rằng AD nhỏ hơn nửa chu vi tam giác ABC.

Giải:

a. Cạnh 4m không thể là cạnh bên vì nếu cạnh 4m là cạnh bên thì cạnh đáy lớn hơn tổng hai cạnh kia.

($9 > 4 + 4$) trái với bất đẳng thức tam giác.

Vậy cạnh 4m là cạnh đáy thoả mãn $9 < 9 + 4$

Chu vi của tam giác là: $4 + 9 + 9 = 22\text{m}$

b. Xét tam giác ABD có:

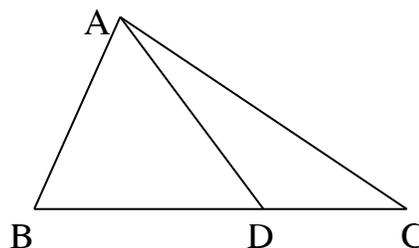
$$AD < AB + BD \quad (1)$$

Xét tam giác ACD có $AD < AC + DC \quad (2)$

Cộng từng vế của (1) và (2)

$$2AD < AB + AC + (BD + DC)$$

$$\text{Suy ra } AD < \frac{AB + AC + BC}{2}$$



Bài 15: Độ dài hai cạnh của một tam giác là 7cm, 2cm. Tính độ dài cạnh còn lại biết rằng số đo của nó theo xentimét là một số tự nhiên lẻ.

Giải: Gọi độ dài cạnh còn lại là x (cm)

Theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$7 - 2 < x < 7 + 2 \text{ tức là } 5 < x < 9$$

Do đó x là một số tự nhiên lẻ nên $x = 7$

Cạnh còn lại bằng 7cm

Bài 16: Cho tam giác ABC trung tuyến Am và góc $B > C$. Hãy so sánh hai góc AMB và AMC

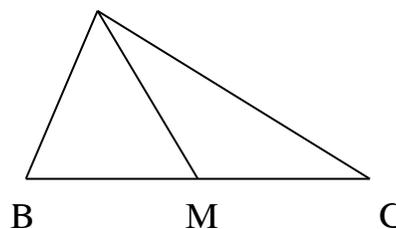
Giải:

Trong tam giác ABC vì $B > C$ nên $AC > AB$

Hai tam giác AMB và AMC có AM cạnh chung

$MB = MC$ nhưng $AC > AB$

Nên $AMC > AMB$.



CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

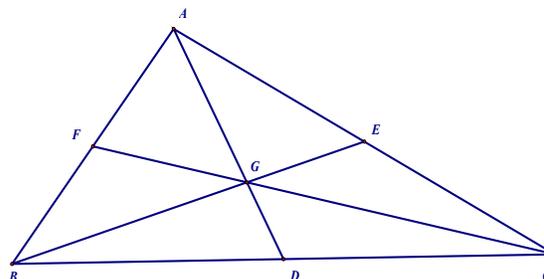
Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

- Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của tam giác ABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC. Đôi khi đường thẳng AM cũng được gọi là đường trung tuyến của tam giác ABC. Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.
- Tính chất: Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (điểm đó gọi là trọng tâm). Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.
- Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.
- Nếu tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó cân.

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy:

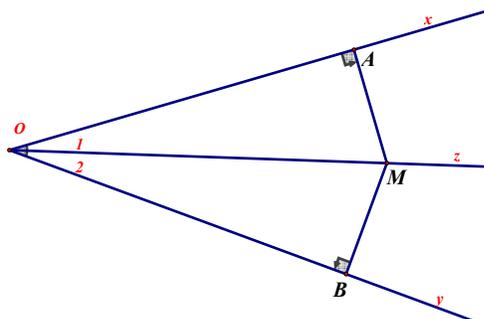
$$\frac{GA}{DA} = \frac{GB}{EB} = \frac{GC}{EC} = \frac{2}{3}$$

G là trọng tâm của tam giác ABC



Tính chất tia phân giác của một góc

- Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó. Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.
- Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.



Oz là phân giác $\angle xOy \Leftrightarrow xOz = zOy = \frac{\angle xOy}{2}$

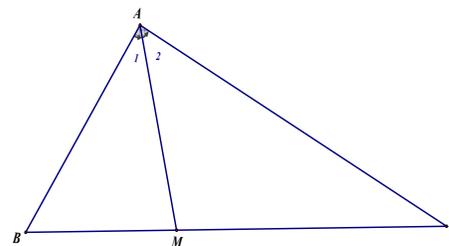
$$\begin{cases} xOz = zOy \\ ME \perp Oz \\ MA \perp Ox \\ MB \perp Oy \end{cases} \Rightarrow MA = MB$$

$$\begin{cases} MA = MB \\ ME \perp Oz \\ MA \perp Ox \end{cases} \Rightarrow M \in Oz$$

Tính chất ba đường phân giác của tam giác

- Trong tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm M, khi đó đoạn thẳng AM là đường phân giác của tam giác ABC (đôi khi ta cũng gọi đường thẳng AM là đường phân giác của tam giác)

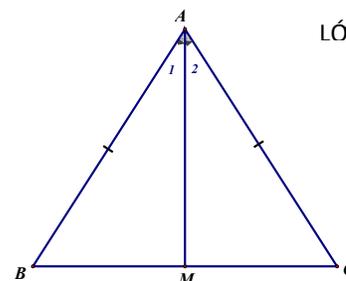
$$\Delta ABC: \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \Rightarrow AM \text{ là đường phân giác } \widehat{BAC}$$



- Tính chất:** Trong một tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.

$$\Delta ABC: \begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \Rightarrow HB = HC$$

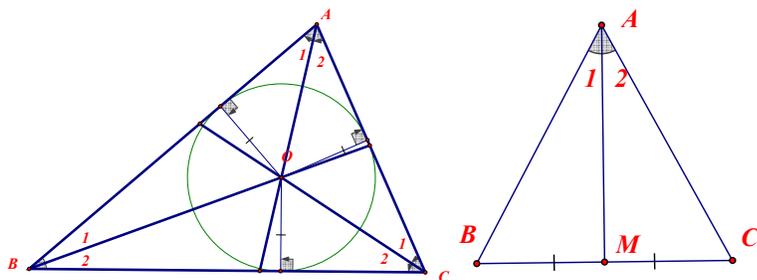
- Tính chất ba



LỚP 7

đường phân giác của tam giác: Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

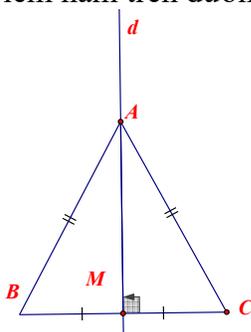
✓ Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường phân giác thì tam giác đó là một tam giác cân.



$$\Delta ABC \begin{cases} BM = MC \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân}$$

Tính chất đường trung trực của một đoạn thẳng

Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

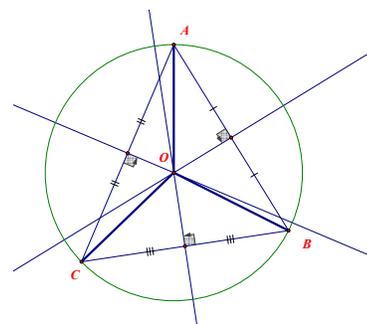


$$\begin{cases} d \perp BC \text{ tại } M \\ MB = MC \end{cases} \Rightarrow d \text{ là đường trung trực của } BC \quad A \in d \Rightarrow AB = AC$$

Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó. Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

Tính chất ba đường trung trực của tam giác

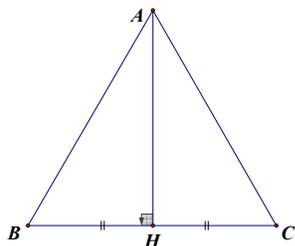
- Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.
- Trong một tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh này.
- Tính chất ba đường trung trực của tam giác: Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.



$$O \text{ là giao điểm của các đường trung trực của } \Delta ABC \Leftrightarrow OA = OB = OC$$

LỚP 7

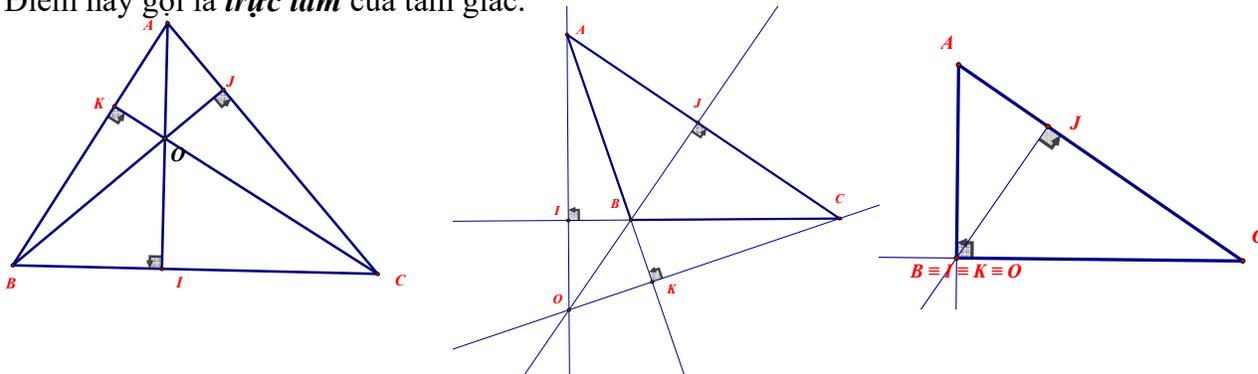
Nếu tam giác có một đường trung tuyến đồng thời là đường trung trực ứng với cùng một cạnh thì tam giác đó là một tam giác cân.



$$\begin{cases} HB = HC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } A$$

Tính chất ba đường cao của tam giác

- Đường cao của tam giác: Trong một tam giác, đoạn vuông góc kẻ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó. Đôi khi ta cũng gọi đường thẳng AI là một đường cao của tam giác.
- Tính chất ba đường cao của tam giác: Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này gọi là **trục tâm** của tam giác.



Lưu ý: **Trục tâm** của tam giác nhọn nằm trong tam giác. Trục tâm của tam giác vuông trùng với đỉnh góc vuông và trục tâm của tam giác tù nằm ở bên ngoài tam giác.

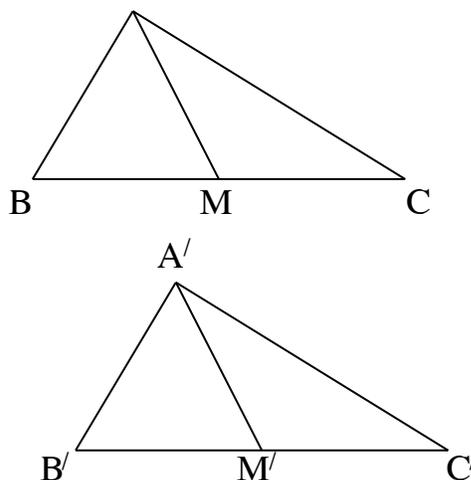
Tính chất của tam giác cân: Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.

- Nhận xét:
 - Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.
 - Trong một tam giác đều, trọng tâm, trục tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh là bốn điểm trùng nhau.

Bài tập:

Bài 1: Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC, A'M' là đường trung tuyến của tam giác A'B'C'. biết AM = A'M'; AB = A'B'; BC = B'C'. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

A



Giải:

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có:

$AB = A'B'$ (gt); $BM = B'M'$

(Có AM là trung tuyến của BC và A'M' là trung tuyến của B'C')

$AM = A'M'$ (gt)

$\triangle ABM = \triangle A'B'M'$ (c.c.c)

Suy ra $B = B'$

Vì có $AB = A'B'$; $BC = B'C'$ (gt)

$B = B'$ (c/m trên)

Suy ra: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Bài 2: Cho tam giác ABC ($A = 90^\circ$) trung tuyến AM, tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

- Tính số đo $\angle ABM$
- Chứng minh $\triangle ABC = \triangle BAD$
- So sánh: AM và BC

Giải:

a. Xét hai tam giác AMC và DMB có:

$MA = MD$; $MC = MB$ (gt)

$\angle M_1 = \angle M_2$ (đối đỉnh)

Suy ra $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle MCA = \angle MBD$ (so le trong)

Suy ra: $BD \parallel AC$ mà $BA \perp AC$ ($A = 90^\circ$)

$\Rightarrow BA \perp BD \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$

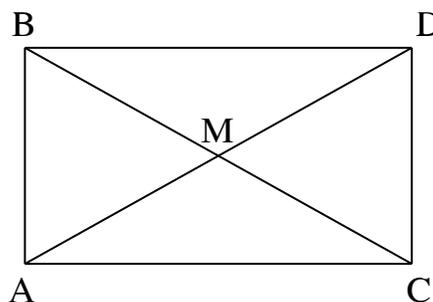
b. Hai tam giác vuông ABC và BAD có:

$AB = BD$ (do $\triangle AMC = \triangle DMB$ c/m trên)

AB chung nên $\triangle ABC = \triangle BAD$ (hai tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau)

c. $\triangle ABC = \triangle BAD$

$\Rightarrow BC = AD$ mà $AM = \frac{1}{2} AD$ (gt) Suy ra $AM = \frac{1}{2} BC$



Bài 3: Cho tam giác ABC có $AB < AC$; BM và CN là hai đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng $CN > BM$.

Giải:

Gọi G là giao điểm của BM và CN

Xét $\triangle ABC$ có BM và CN là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G

Do đó: G là trọng tâm của tam giác ABC

Suy ra $GB = \frac{2}{3} BM$; $GC = \frac{2}{3} CN$

Vẽ đường trung tuyến AI của $\triangle ABC$

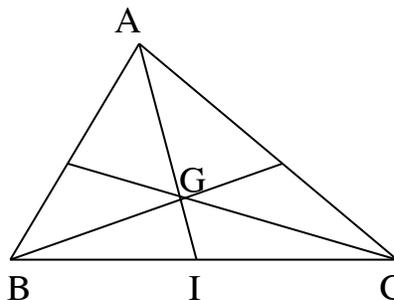
Ta có: A; G; I thẳng hàng

Xét $\triangle AIB$ và $\triangle AIC$ có:

AI cạnh chung, $BI = IC$

$AB < AC$ (gt) $\Rightarrow \angle AIB < \angle AIC$

Xét $\triangle GIB$ và $\triangle GIC$ có



GI cạnh chung; $BI = IC$

$AIC > AIB \Rightarrow GC > GB \Rightarrow CN > BM$

Bài 4: Cho tam giác ABC có BM và CN là hai đường trung tuyến và $CN > BM$. Chứng minh rằng $AB < AC$

Giải:

Gọi G là giao điểm của BM và CN

ΔABC có: BM và CN là hai đường trung tuyến

Do đó: G là trọng tâm của tam giác ABC

Suy ra $GB = \frac{2}{3} BM$; $GC = \frac{2}{3} CN$

Vẽ đường trung tuyến AI của tam giác ABC

thì I đi qua G (Tính chất ba đường trung tuyến)

Ta có: $CN > BM$ mà $GB = \frac{2}{3} BM$; $GC = \frac{2}{3} CN$ nên $GB < GC$

Xét $\Delta GIB = \Delta GIC$ có:

GI cạnh chung; $BI = IC$; $GB < GC$ Suy ra: $GIB < GIC$

Xét ΔAIB và ΔAIC có:

AI cạnh chung; $BI = IC$; $AIB < AIC$ Suy ra: $AB < AC$

Bài 5: Trên hình bên có AC là tia phân giác góc BAD và $CB = CD$

Chứng minh: $ABC = ADC$

Giải:

Vẽ $CH \perp AB$ ($H \in AB$)

$CK \perp AD$ ($K \in AD$)

C thuộc tia phân giác BAD

Do đó: $CH = CK$

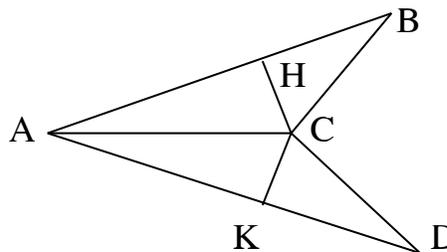
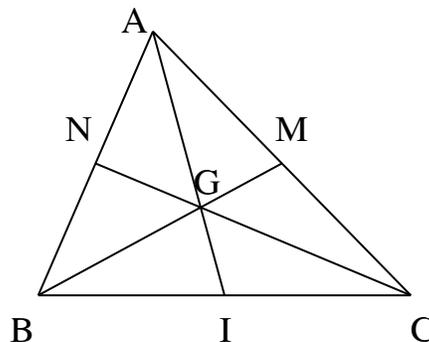
Xét ΔCHB ($CHB = 90^\circ$)

Và tam giác CKD ($CKD = 90^\circ$)

Có $CB = CD$ (gt); $CH = CK$ (c/m trên)

Do đó: $\Delta CHB = \Delta CKD$ (cạnh huyền - góc vuông)

$\Rightarrow HCB = KCD \Rightarrow ABC = ADC$



Bài 6: Cho tam giác ABC kẻ Ax phân giác BAC tại C kẻ đường thẳng song song với tia Ax, nó cắt tia đối của tia AB tại D. Chứng minh: $\angle CAB = \angle ACD = \angle ADC$

Giải:

Vì Ax là tia phân giác của góc BAC

Nên $\widehat{xAB} = \widehat{xAC}$ (1)

$Ax \parallel CD$ bị cắt bởi đường thẳng AC

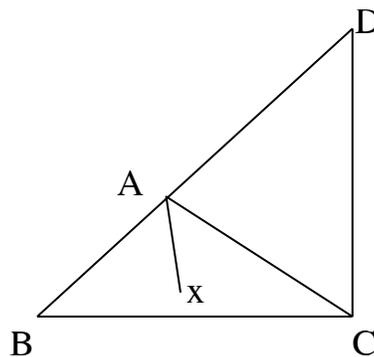
hai góc \widehat{xAC} và \widehat{ACD} là 2 góc so le trong

nên $\widehat{xAC} = \widehat{ACD}$ (2)

hai góc \widehat{xAB} và \widehat{ADC} là 2 góc đồng vị nên

$\widehat{xAB} = \widehat{ADC}$ (3)

So sánh (1); (2); (3) ta có: $\widehat{xAB} = \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$



Bài 7: Cho tam giác ABC , kẻ tia phân giác Bx của góc B , Bx cắt tia AC tại M . Từ M kẻ đường thẳng song song với AB , nó cắt BC tại N . Từ N kẻ tia $Ny \parallel Bx$. Chứng minh:

a. $\widehat{xAB} = \widehat{BMN}$

b. Tia Ny là tia phân giác của góc MNC

Giải:

a. Trong tam giác ABC tại đỉnh B có:

$\widehat{ABx} = \widehat{xBC}$ (vì Bx là tia phân giác của góc B)

$\widehat{BMN} = \widehat{ABx}$ (2 góc so le trong vì $MN \parallel BA$)

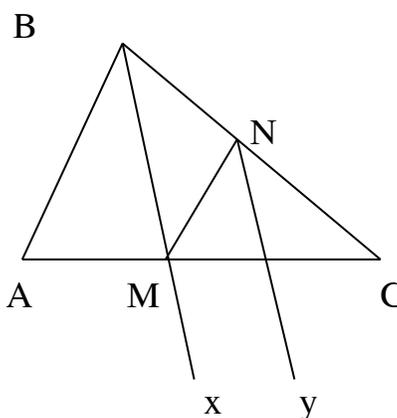
Vậy $\widehat{xBC} = \widehat{BMN}$

b. $\widehat{BMN} = \widehat{MNy}$ (2 góc so le trong vì $Ny \parallel Bx$)

$\widehat{xBC} = \widehat{yNC}$ (2 góc đồng vị vì $Ny \parallel Bx$)

Vậy $\widehat{MNy} = \widehat{yNC}$ mà tia Ny là tia nằm giữa hai tia NM và NC

Do đó: Ny là tia phân giác của MNC



Bài 8: Cho tam giác ABC . Gọi I là giao điểm của hai tia phân giác hai góc A và B . Qua I vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại M , cắt AC tại N . Chứng minh rằng: $MN = BM + CN$

Giải:

Ba phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm nên CI là tia phân giác của góc C .

Vì $MN \parallel BC$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{I_1}$ (2 góc so le trong)

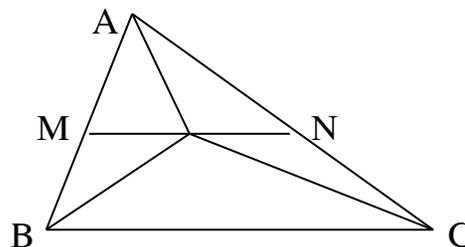
$\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ nên $\widehat{C_2} = \widehat{I_2}$

Do đó: $\triangle NIC$ cân và $NC = NI$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $MB = MI$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$MI + IN = BM + CN$ hay $MN = BM + CN$



Bài 9: Cho tam giác ABC ($A = 90^\circ$) các đường trung trực của các cạnh AB, AC cắt nhau tại D. Chứng minh rằng D là trung điểm của cạnh BC

Giải:

Vì D là giao điểm của đường trung trực của các cạnh AB và AC nên 2 tam giác DAB và DAC là cân và các góc ở đáy của mỗi tam giác đó bằng nhau.

$$DBA = DAB \text{ và } DAC = DCA$$

Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có:

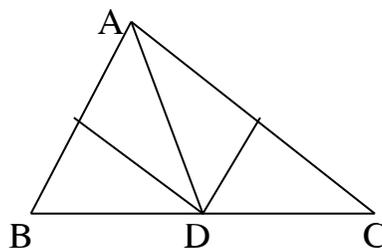
$$ADB = DAC + DCA$$

$$ADC = DAB + DBA$$

$$\text{Do đó: } ADB + ADC = DAC + DCA + DAB + DBA = 180^\circ$$

Từ đó suy ra ba điểm B, D, C thẳng hàng

Hơn nữa vì $DB = DC$ nên D là trung điểm của BC



Bài 10: Cho hai điểm A và D nằm trên đường trung trực AI của đoạn thẳng BC. D nằm giữa hai điểm A và I, I là điểm nằm trên BC. Chứng minh:

a. AD là tia phân giác của góc BAC

$$b. \angle ABD = \angle ACD$$

Giải:

a. Xét hai tam giác ABI và ACI chúng có:

AI cạnh chung

$$\angle AIC = \angle AIB = 90^\circ$$

$IB = IC$ (gt cho AI là đường trung trực của đoạn thẳng BC)

$$\text{Vậy } \triangle ABI = \triangle ACI \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle CAI$$

Mặt khác I là trung điểm của cạnh BC nên tia AI nằm giữa hai tia AB và AC

Suy ra: AD là tia phân giác của góc BAC

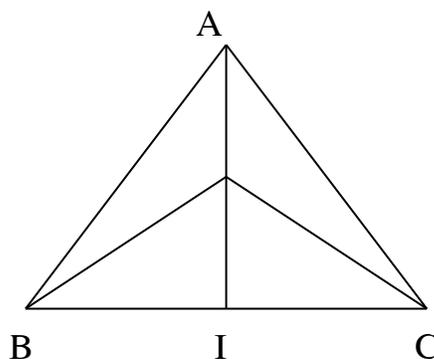
b. Xét hai tam giác ABD và ACD chúng có:

AD cạnh chung

Cạnh AB = AC (vì AI là đường trung trực của đoạn thẳng BC)

$$\angle BAI = \angle CAI \text{ (c/m trên)}$$

$$\text{Vậy } \triangle ABD = \triangle ACD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle ABD = \angle ACD \text{ (cặp góc tương ứng)}$$



Bài 11: Hai điểm M và N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB, N là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên tia đối của tia NM xác định M' sao cho $MN' = NM$

a. Chứng minh: AB là ssường trung trực của đoạn thẳng MM'

b. $M'A = MB = M'B = MA$

Giải:

a. Ta có: $AB \perp MM'$

(vì MN là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên $MN \perp AB$)

Mặt khác N là trung điểm của MM'

(vì M' nằm trên tia đối của tia NM và $NM = NM'$)

Vậy AB là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.

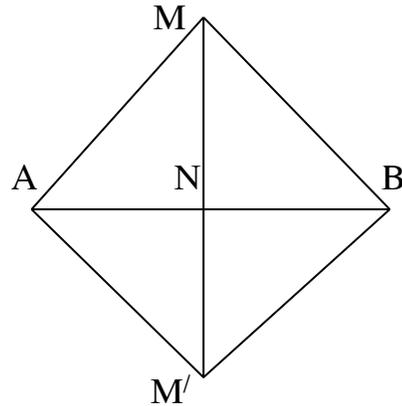
b. Theo giả thiết ta có:

MM' là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên

$MA = MB; M'B = M'A$

Ta lại có: AB là đường trung trực của đoạn thẳng MM' nên $MA = M'B$

Từ đó suy ra: $M'A = MB = M'B = MA$



Bài 12: Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Xác định điểm D trên cạnh AC sao cho : $DA + DB = AC$

Giải:

Vẽ đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt cạnh AC tại D

D là điểm cần xác định

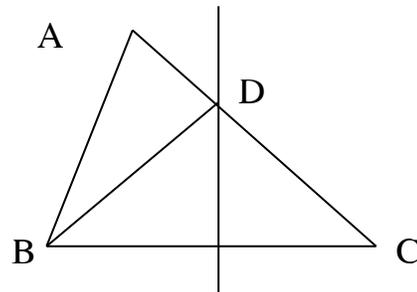
Thật vậy

Ta có: $DB = DC$ (vì D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC)

Do đó: $DA + DB = DA + DC$

Mà $AC = DA + DC$ (vì D nằm giữa A và C)

Suy ra: $DA + DB = AC$



Bài 13:

a. Gọi AH và BK là các đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $CKB = CAH$

b. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), AH và BK là các đường cao

Chứng minh rằng $CBK = BAH$

Giải:

a. Trong tam giác AHC và BKC có:

CBK và CAH đều là góc nhọn

Và có các cạnh tương ứng vuông góc với nhau

$CB \perp AH$ và $BK \perp CA$

Vậy $CBK = CAH$

b. Trong tam giác cân đã cho thì đường cao AH

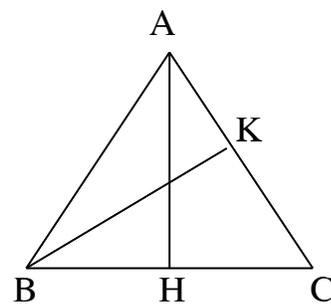
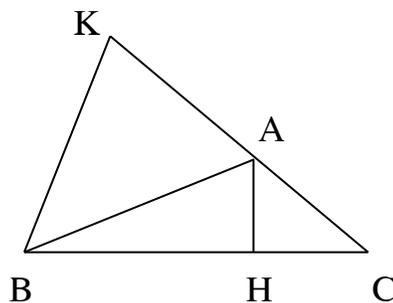
cũng là đường phân giác của góc A

Do đó: $BAH = CAH$

Mặt khác: CAH và CBK là hai góc nhọn và

có các cạnh tương ứng vuông góc nên

$CAH = CBK$. Như vậy $BAH = CBK$



Bài 14: Hai đường cao AH và BK của tam giác nhọn ABC cắt nhau tại D.

a. Tính HDK khi $C = 50^\circ$

b. Chứng minh rằng nếu $DA = DB$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

Giải:

Vì hai góc C và ADK đều là nhọn và có các

cạnh tương ứng vuông góc nên $C = ADK$

Nhưng HDK kề bù với ADK nên hai góc

C và HDK là bù nhau. Như vậy $HDK = 180^\circ - C = 130^\circ$

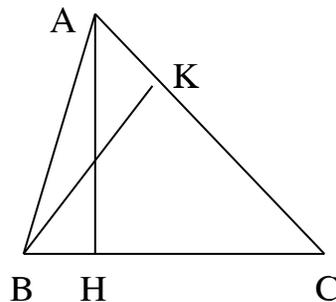
b. Nếu $DA = DB$ thì $DAB = DBA$

Do đó hai tam giác vuông HAB và KBA bằng nhau

Vì có cạnh huyền bằng nhau và có một góc nhọn bằng nhau

Từ đó suy ra $KAB = HBA$ hai góc này cùng kề với đáy AB của tam giác ABC

Suy ra tam giác ABC cân với $CA = CB$



Bài 15: Cho tam giác ABC cân tại A phân giác AM. Kẻ đường cao BN cắt AM tại H.

a. Khẳng định $CN \perp AB$ là đúng hay sai?

A. Đúng

B. Sai

b. Tính số đo các góc: BHM và MHN biết $C = 39^\circ$

A. $BHM = 131^\circ$; $MHN = 49^\circ$

C. $BHM = 141^\circ$; $MHN = 39^\circ$

B. $BHM = 49^\circ$; $MHN = 131^\circ$

D. $BHM = 39^\circ$; $MHN = 141^\circ$

Giải:

a. Chọn A

vì $AM \perp BC$ tam giác ABC cân tại A

Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC

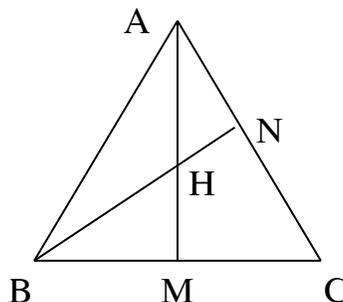
Do đó $CH \perp AB$

b. Chọn D

Ta có: $BHM = C = 39^\circ$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$MHN = 180^\circ - C = 141^\circ$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc và một góc nhọn, một góc tù)

Vậy ta tìm được $BHM = 39^\circ$; $MHN = 141^\circ$



Bài 16: Cho góc $xOy = 60^\circ$ điểm A nằm trong góc xOy vẽ điểm B sao cho Ox là đường trung trực của AC, vẽ điểm C sao cho Oy là đường trung trực của AB

a. Khẳng định $OB = OC$ là đúng hay sai?

b. Tính số đo góc BOC

A. 60° ;

B. 90° ;

C. 120° ;

D. 150°

Giải:

a. Chọn A

Nhận xét là:

$OA = OB$ vì Ox là đường trung trực của AB

$OA = OC$ vì Oy là đường trung trực của AC

Do đó: $OB = OC$

b. Chọn C.

Nhận xét là:

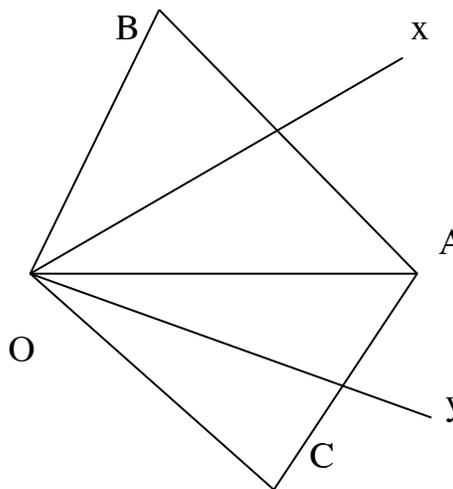
Tam giác OAB cân tại O nên $O_1 = O_2$

Tam giác OAC cân tại O nên $O_3 = O_4$

Khi đó: $BOC = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2O_2 + 2O_3$

$= 2(O_2 + O_3) = 2xOy = 120^\circ$

Vậy ta có: $BOC = 120^\circ$



Bài 17: Chứng minh rằng trong một tam giác trung tuyến ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn trung tuyến ứng với cạnh nhỏ.

Giải:

Xét tam giác ABC các đường trung tuyến

AM, BN, CP trọng tâm G

Giả sử $AB < AC$

Ta cần đi chứng minh $CP > BN$

Thật vậy

Với hai tam giác ABM và ACM

Ta có: $MB = MC$ (vì M là trung điểm của BC)

AM chung: $AB < AC$ do đó: $M_1 < M_2$.

Với hai tam giác GBM và GCM ta có: $MB = MC$ (M là TĐ của BC); GM chung

Do đó: $GB < GC \Leftrightarrow \frac{2}{3}GB < \frac{2}{3}GC \Leftrightarrow BN < CP$

