Chắt lọc tinh túy
môn Toán

Ô dành cho tác giả hoặc thành viên gia đình Lovebook

Cố lên em nhé!

GIÁM ĐỐC
Lương Văn Thùy

Sách gốc phải có chữ ký của tác giả hoặc của thành viên Lovebook nhưng phải được thông báo trên website: vedu.vn/forums hoặc lovebook.vn. Bất kể cuốn sách nào không có chữ ký đều là sách lậu, không phải do Lovebook phát hành.

Lời chúc
& kí tặng

LOVEBOOK.VN

Đời phải trải qua giông tố nhưng không được cúi đầu trước giông tố!

Đặng Thùy Trâm

Hãy phấn đấu vươn lên không chỉ bằng khối óc mà bằng cả con tim của mình nữa!

Lương Văn Thùy

LOVEBOOK tin tưởng chắc chắn rằng em sẽ đỗ đại học một cách tự hào và hãnh diện nhất!

NGUYỄN VĂN HƯỞNG

CHẮT LỌC TINH TÚY TRONG CHUỖI ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN

- *Học sinh lớp 12 chuẩn bị cho kì thi Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng (KÌ THI THPT QUỐC GIA 2016)*
- *Học sinh lớp 10, 11: Tự học Toán, chuẩn bị sớm và tốt nhất cho KÌ THI THPT QUỐC GIA*
- *Học sinh muốn đạt 9,10 trong kì thi Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng (KÌ THI THPT QUỐC GIA 2016)*
- *Học sinh thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố cấp trung học cơ sở và trung học phổ thông*
- *Thí sinh đại học muốn ôn thi lại môn Toán*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤN BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (043) 9728806; Tổng biên tập: (04) 397 15011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc – Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: ĐẶNG PHƯƠNG ANH

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP

Trình bày bìa: NGUYỄN SƠN TÙNG

Sửa bản in: LƯƠNG VĂN THÙY

Đối tác liên kết xuất bản:
CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP

SÁCH LIÊN KẾT

CHẮT LỌC TINH TÚY TRONG CHUỖI ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN

Mã số: 1L – 173 ĐH2016
In 2000 cuốn, khổ 19 x 27 cm tại Công t6y TNHH Trần Công
Địa chỉ: Số 12, ngách 155/176 đường Trường Chinh, Phương Liệt, Thanh Xuân, Hà Nội
Số xuất bản: 679 – 2015/CXB,IPH/03- 124/ĐHQGHN, ngày 25/04/2016
Quyết định xuất bản số: LK-TN/ QĐ – NXBĐHQGHN, ngày 25/04/2016
In xong và nộp lưu chuyển quý II năm 2016.

Lời mở đầu

Cuốn sách **"Chắt lọc tinh túy trong chuỗi đề thi quốc gia môn Toán "** là sự đúc kết tinh hoa và cũng sự miệt mài làm việc của các thành viên trong lovebook. Với bề dày khiêm tốn, tác giả hi vọng rằng đây là cuốn sách chất lượng nhất dành cho các sĩ tử luyện thi đại học năm 2016 này. Về nội dung, cuốn sách bao gồm những câu hỏi hay và khó trong các phần điểm 8; 9; 10 từ hơn 150 bộ đề thi thử đại học năm nay, gắn vào đó là những câu hỏi trích từ các đề thi đại học những năm trước cùng với sự sưu tầm từ khối lượng nguồn khổng lồ cũng như do chính tác giả đề xuất.

Điểm đáng chú ý nhất ở cuốn sách này là sự phân bổ các tiết học thành một chuỗi bài giảng dành cho **đúng 1 tháng** luyện thi cho những học sinh đã có nền tảng tốt. Mỗi bài giảng không nhắc lại những kiến thức cơ bản mà thay vào đó là những bài tập có thể không mới nhưng rất chất bởi có những sự so sánh, liên hệ và cách phân tích bản chất, cội nguồn của vấn đề.

Mặc dù đã xem hơn 150 đề thi thử đại học năm nay thế nhưng có một cái nhìn tổng quan là có tới hơn 90% các bài toán hoàn toàn trùng với tư tưởng của những bài toán trong các cuốn ở bộ **Chinh phục toán – Lovebook.**

Điều cuối cùng muốn gửi gắm bạn đọc: Hi vọng cuốn sách này chính là một người bạn đồng hành, một người thầy cùng các sĩ tử trong suốt quá trình gấp gáp trước ngày thi này.

Riêng gia đình lovebook, có một lời chúc tới các em: Chúc các em "cá chép hóa rồng" đến tới đỉnh vinh quang là những ngôi trường đang mơ ước!

Do cuốn sách được hoàn thành trong thời gian rất ngắn nên không thể tránh khỏi những sai sót, hi vọng bạn đọc sẽ thông cảm và phản hồi cho tôi ngay tại Group facebook: **"Chiến binh lovebook" (https://www.facebook.com/groups/chienbinhlovebook/)** hoặc diễn đàn **http://vedu.vn/forums/.**

Tác giả

Một người con của một gia đình thuần nông từ quê hương Hải Dương

NGUYỄN VĂN HƯỞNG

Mục lục

Lịch sử hình thành cuốn sách

Có rất nhiều em học sinh than thở với Lovebook rằng: "Có quá nhiều đề thi thử hàng năm, có quá nhiều đề, bài tập na ná giống nhau. Nhiều khi các em cảm thấy rất lãng phí thời gian đi sưu tầm đề thi thử để làm thì những yếu tố mới, cần thiết không nhiều. Để giải quyết những khó khăn trên, Lovebook đã quyết định cho ra đời dòng sách "**CHẮT LỌC TINH TÚY**".

Dòng CHẮT LỌC TINH TÚY LOVEBOOK được lên ý tưởng vào những ngày đầu xuân 2016. Tuy nhiên, phải đến giữa tháng 3, dự án mới chính thức được triển khai. Dòng CHẮT LỌC TINH TÚY được kỳ vọng sẽ là 1 sự bổ sung cần thiết cho bộ "Chinh phục", "Công phá" trong quá trình ôn thi giai đoạn nước rút.

Dự án CHẮT LỌC TINH TÚY được thực hiện bởi 9 thành viên:

1- Tăng Hải Tuân
2- Trần Phương Duy
3- Phạm Thị Thanh Thảo
4- Nguyễn Thế Hưng
5- Mai Tôn Minh Trang
6- Đoàn Thị Mai
7- Nguyễn Văn Hưởng
8- Trần Hữu Đức
9- Nguyễn Lan Phương

Cuốn CHẮT LỌC TINH TÚY MÔN TOÁN 2016 được biên soạn bởi thành viên :

NGUYỄN VĂN HƯỞNG

- **Sinh ngày:** 21/02/1995
- **Quê quán:** Tứ kỳ - Hải Dương
- **Facebook: https://www.facebook.com/mathkudo**
- **Học vấn:**
  - Cựu học sinh Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương
  - Giải nhì HSG quốc gia môn Toán 2013
  - K58 KSTN Điều khiển tự động – Đại học Bách khoa Hà Nội
  - Giải nhất Olympic Sinh viên môn Toán 2014
- **Sở thích:** Ăn mì, đá bóng.
- **Câu nói yêu thích:** Tò mò là tố chất của thành công nhưng mày mò mới là nhân tố của thành công.
- **Các dự án sách đã tham gia:** Công phá bất đẳng thức, Chinh phục đề thi HSG, vào lớp 10 chuyên (Bộ 4 cuốn)

Lời cảm ơn

Để cuốn sách hoàn thiện, tôi đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ của những người anh em, đồng nghiệp. Sự giúp đỡ đầu tiên và thiết thực nhất chính là những đóng góp rất ý nghĩa và quan trọng của em Trần Duy Quân (Giải nhất cuộc thi THỬ LÀM TÁC GIẢ LOVEBOOK, hiện đang học Bác Sĩ Răng Hàm Mặt tại Đại Học Y Dược thành phố Hồ Chí Minh). Duy Quân đã giúp tôi hoàn thiện nội dung 4 ngày (từ ngày 11 đến ngày 14) một cách tâm huyết và nhiệt tình nhất. Trong tương lai, nhất định Duy Quân sẽ trở thành 1 nhân sự quan trọng của Gia đình Lovebook. Tiếp đến là những cánh tay hỗ trợ đắc lực nhất là anh Bùi Văn Cường (tác giả của cuốn Chinh phục hệ phương trình và nhiều cuốn khác) cùng bạn Vũ Thị Ngọc Huyền (hiện đang là học sinh lớp 12D - trường THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình) đã tích cực ngày đêm tìm tòi và đưa ra những ý tưởng đóng góp cho cuốn sách mặc dù Ngọc Huyền đang rất bận bịu với việc ôn thi giai đoạn cuối và những khó khăn trong cuộc sống. Nhất định, em Huyền sẽ trở thành 1 sinh viên giỏi giang và trợ giúp rất nhiều cho Lovebook sau này.

Lời cảm ơn tiếp theo xin gửi tới đó là sự giúp đỡ đắc lực nhất từ những người bạn, người anh, người chị: bạn Tăng Ngọc Hà, bạn Nguyễn Huyền Linh, anh Duy Mạnh, anh Lương Văn Thiện, và đặc biệt nhất không thể quên được đó là anh Lương Văn Thùy – Giám đốc VEDU Corp. Công ty VEDU là một công ty mới phát triển, song lại là một trong những công ty hàng đầu về ngành giáo dục của Việt Nam. Công ty phát triển song hành cùng với nhóm GSTT.VN và nhà sách Lovebook đã có những hành động cao cả, thiết thực tới những thế hệ học sinh. Nếu không có sự hỗ trợ đặc biệt từ anh Lương Văn Thùy và nhà xuất bản thì cuốn sách này sẽ không thể đến tới tay bạn đọc. Anh cũng chính là người đã gợi mở -không chỉ cuốn sách của

tôi mà còn nhiều cuốn sách khác - chỉ dẫn tận tình để cuốn sách vươn lên một tầm cao mới, truyền cảm hứng cho người đọc.

Lời cảm ơn cuối cùng tôi muốn gửi tới, đó là những bạn đọc được cuốn sách này. Mặc dù đến đầu tháng 5 sách mới được phát hành nhưng đã có gần 2000 em, thầy cô đặt hàng trước và ngóng chờ. Sự ủng hộ, đón chờ của các bạn, các em yêu quý quả thực là một nguồn động lực vô cùng to lớn giúp tôi hoàn thiện cuốn sách này một cách tâm huyết và hay nhất có thể. Một lần nữa, xin trân trọng cảm ơn tất cả!

Để sử dụng sách Lovebook một cách hiệu quả, mời các em học sinh và các thầy cô tham gia hệ thống online của Lovebook:

Hệ thống online:

🕮 Fan page Lovebook: https://www.facebook.com/lovebook.vn

🕮 Website trưng bày sách: lovebook.vn

🕮 Diễn đàn trao đổi học tập: http://vedu.vn/forums/

🕮 Kênh bài giảng Lovebook: https://www.youtube.com/nhasachlovebook

🕮 Website chia sẻ tài liệu: http://tailieulovebook.com/

🕮 Group trao đổi học tập: https://www.facebook.com/groups/chienbinhlovebook

🕮 Đăng ký nhận tài liệu thường xuyên: https://goo.gl/vEUuQZ

🕮 Website đào tạo: http://vedu.edu.vn

Trước khi bắt tay vào đọc cuốn sách này, Lovebook muốn gửi tới các độc giả yêu quý một câu chuyện sau:

Sách Hoài Nam Tử có chép một câu chuyện như sau:

Một ông lão ở gần biên giới giáp với nước Hồ phía Bắc nước Tàu, gần Trường thành, có nuôi một con ngựa. Một hôm con của ông lão dẫn ngựa ra gần biên giới cho ăn cỏ, vì lơ đễnh nên con ngựa vọt chạy qua nước Hồ mất dạng. Những người trong xóm nghe tin đến chia buồn với ông lão.
Ông lão là người thông hiểu việc đời nên rất bình tỉnh nói: *"Biết đâu con ngựa chạy mất ấy đem lại điều tốt cho tôi"*.

Vài tháng sau, con ngựa chạy mất ấy quay trở về, dẫn theo một con ngựa của nước Hồ, cao lớn và mạnh mẽ. Người trong xóm hay tin liền đến chúc mừng ông lão, và nhắc lại lời ông lão đã nói trước đây. Ông lão không có vẻ gì vui mừng, nói: *"Biết đâu việc được ngựa Hồ nầy sẽ dẫn đến tai họa cho tôi"*.

Con trai của ông lão rất thích cưỡi ngựa, thấy con ngựa Hồ cao lớn mạnh mẽ thì thích lắm, liền nhảy lên lưng cỡi nó chạy đi. Con ngựa Hồ chưa thuần nết nên nhảy loạn lên. Có lần con ông lão không cẩn thận để ngựa Hồ hất xuống, té gãy xương đùi, khiến con ông lão bị què chân, tật nguyền. Người trong xóm vội đến chia buồn với ông lão, thật không ngờ con ngựa không tốn tiền mua nầy lại gây ra tai họa cho con trai của ông lão như thế. Ông lão thản nhiên nói: *"Xin các vị chớ lo lắng cho tôi, con tôi bị ngã gãy chân, tuy bất hạnh đó, nhưng biết đâu nhờ họa nầy mà được phúc"*.

Một năm sau, nước Hồ kéo quân sang xâm lấn Trung nguyên. Các trai tráng trong vùng biên giới đều phải sung vào quân ngũ chống ngăn giặc Hồ. Quân Hồ thiện chiến, đánh tan đạo quân mới gọi nhập ngũ, các trai tráng đều tử trận, riêng con trai ông lão vì bị què chân nên miễn đi lính, được sống sót ở gia đình.

Bình luận của sách Hoài Nam Tử: ***Họa là gốc của Phúc, Phúc là gốc của Họa. Họa Phúc luân chuyển và tương sinh. Sự biến đổi ấy không thể nhìn thấy được, chỉ thấy cái kết quả của nó.***
Do đó, người đời sau lập ra thành ngữ: Tái ông thất mã, an tri họa phúc. Nghĩa là: Ông lão ở biên giới mất ngựa, biết đâu là họa hay là phúc.

Hai điều họa phúc cứ xoay vần với nhau, khó biết được, nên khi được phúc thì không nên quá vui mừng mà quên đề phòng cái họa sẽ đến; khi gặp điều họa thì cũng không nên quá buồn rầu đau khổ mà tổn hại tinh thần. Việc đời, hết may tới rủi, hết rủi tới may, nên bắt chước tái ông mà giữ sự thản nhiên trước những biến đổi thăng trầm trong cuộc sống.

Chuyên đề I: 8 ngày luyện thi phương trình, hệ phương trình

Ngày số 1

Phương pháp phân tích nhân tử trong giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình

Lời bình: *Những bài toán sử dụng phương pháp phân tích nhân tử xuất hiện rất ít trong đề thi thử năm nay và những bài toán đó không hề quá khó khi mà chúng ta đã nắm rõ hình thức cũng như phương pháp của dạng này. Trước mắt, anh xin giới thiệu một số bài toán được trích từ các đề thi các đại học năm trước.*

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \quad (1) \\ xy(x^2+y^2) + 2 = (x+y)^2 \quad (2) \end{cases}$

(Trích đề thi tuyển sinh đại học năm 2011 khối A)

Phân tích:

Rõ ràng, nếu hiểu sâu bản chất của phương pháp sử dụng delta để phân tích thành nhân tử thì đập vào mắt tại phương trình (1) *có thể coi là phương trình bậc hai đối với biến x. Lưu ý rằng, việc các em mò mẫm nhân tử hay sử dụng máy tính đối với phương trình* (1) *sẽ gây rắc rối!!! Thay vào đó, ta nên tính theo delta:*

$$(1) \leftrightarrow 5y.x^2 - 2(2y^2+1)x + (3y^3 - 2y) = 0$$

$$\rightarrow \Delta'_x = (2y^2+1)^2 - (3y^3-2y).5y = -11y^4 + 14y^2 + 1$$

Rõ ràng Δ'_x *là không chính phương nên chắc chắn ta có thể khẳng định phương trình* (1) *không thể phân tích thành nhân tử. Rõ ràng, việc xét hàm đối với phương trình* (1) *cũng không thể được. Do đó, ta có vài sự lựa chọn sau:*

+Kết hợp với phương trình (2) cộng đại số để đưa về phân tích thành tích được.

+Không sử dụng phương pháp nhân tử, không sử dụng phương pháp hàm số nên có thể dự đoán là bất đẳng thức?

+Phương trình (2) có thể xử lý được.

Trong ba hướng đi trên, hướng đi nào đơn giản ta làm trước. Dĩ nhiên là hướng thứ ba, do x;y đối xứng nên ta cứ đưa thử về tổng và tích: $x + y = a; xy = b$. *(Đây là phản xạ tự nhiên của anh ☺).*

$$b(a^2 - 2b) + 2 = a^2$$

Ở đây, ta có thể rút ngay a^2 *theo b:*

$$-2b^2 + 2 = a^2 - b.a^2$$

$$\rightarrow a^2(b-1) = 2b^2 - 2$$

Rõ ràng, đến đây em có thể thấy ngay có nhân tử $b - 1$ *hay chính là nhân tử* $xy - 1$. *Do đó, ta có thể có lời giải sau:*

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$(2) \Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$ hoặc $x^2 + y^2 = 2$

Với $xy = 1$ từ (1) suy ra $y^4 - 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Suy ra $(x;y) = (1;1)$ hoặc $(x;y) = (-1;-1)$

$x^2 + y^2 = 2$ từ (1) suy ra $3y(x^2+y^2) - 4xy^2 + 2x^2y - 2(x+y) = 0$

$$\Leftrightarrow 6y - 4xy^2 + 2x^2y - 2(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-xy)(2y-x)=0$$

$\Leftrightarrow xy = 1$ hoặc $x = 2y$

Với $x = 2y$ từ $x^2 + y^2 = 2$ suy ra $(x;y) = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right);\left(\frac{-2\sqrt{10}}{5};\frac{-\sqrt{10}}{5}\right)$

Vậy hệ có nghiệm $(1;1);(-1;-1);\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right);\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{-\sqrt{10}}{5}\right)$.

Lời bình: *Khi viết lời phân tích cho bài toán trên, anh tự dưng xem lại một bài toán trong cuốn chinh phục hệ phương trình. Bài này ở ví dụ 92 thì phải, anh không nhớ rõ. Anh ấn tượng bài này vì đề bài ngắn quá!!! Cấm mở sách, các em hãy thử làm xem nhé (Gợi ý: không phải phương pháp phân tích nhân tử đâu nhé). Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$$

Nếu như đọc xong bài toán trên mà vẫn chưa biết phương pháp anh nhắc tới là gì thì thêm một bài nữa cho "tình cảm":

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 2 \\ \dfrac{72xy}{x-y} + 29\sqrt[3]{x^2 - y^2} = 4 \end{cases}$$

Sau năm 2011 thì năm 2012 ;2013 thậm chí cả năm 2014 cũng cùng có những bài hệ phương trình mà giải bằng phương pháp phân tích bằng nhân tử. Anh nói như vậy,để dự báo với các em rằng: ***Đừng học tủ, chưa chắc đề năm nay đã khác dạng đề năm ngoái!*** ■

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$$

(Trích đề thi đại học khối D năm 2012)

Lưu ý: Phương trình hai là phương trình bậc hai đối với biến y.

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \quad (1) \\ (2x - y + 1)(x^2 - y) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Nếu $2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

Thay vào (1) ta được:

$$x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Do đó ta được các nghiệm:

$$(x;y) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right);(x;y) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right)$$

Nếu $x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$

Thay vào (1) ta được:

$$x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Ta được nghiệm $(x;y) = (1;1)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là:

$$(x;y) = (1;1);(x;y) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right);(x;y) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right)$$

Nhận xét: *Bài toán năm 2012 là một bài toán rất dễ đối với các em, nhưng sang bài toán năm 2013 và 2014 thì mức độ có tăng lên một chút. Dĩ nhiên, các em được "cày" rất nhiều về hệ phương trình nên những bài toán dạng này chắc đã quá quen thuộc với các em.* ■

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \quad (1) \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 4y} \quad (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi đại học khối B năm 2013)

Phân tích:

Như thường lệ, ta sẽ phân tích từ phương trình (1). Có một điểm lưu ý là ở phương trình (1) đều là phương trình bậc hai đối với biến x hay biến y. Do đó, các em có thể chọn đối với biến nào cũng được. Và dù chọn biến nào thì kết quả của bài toán sau khi thu gọn cũng là một kết quả. Đồng thời, nếu như biến x mà có delta không chính phương thì hiển nhiên biến y cũng như vậy, các em không cần nháp! Giả sử với bài toán này ta coi là biến y:

$$(1) \leftrightarrow y^2 - (3x + 2)y + 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Delta_y = (3x + 2)^2 - 4(2x^2 + 3x + 1) = x^2$$

$$\rightarrow y = \frac{(3x + 2) \pm x}{2}$$

Do đó, ta sẽ có hai trường hợp: $y = x + 1; y = 2x + 1$.

Ở mỗi trường hợp, thì ta đều thay vào phương trình (2) và thu được phương trình có bậc hai, căn bậc hai.

Phương pháp giải ở đây sẽ có:

+Đặt ẩn phụ

+Bình phương hai vế

+Dùng hàm số

+Nhân liên hợp

Bạn đọc tự nhìn nhận để chọn phương pháp cho phù hợp. Lưu ý rằng, khi sử dụng máy tính ra nghiệm đẹp thì phương pháp nhân liên hợp là phương pháp được ưu tiên hơn cả.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $2x + y \geq 0; x + 4y \geq 0$.

Từ (1) ta được: $y = x + 1; y = 2x + 1$

Với $y = x + 1$ thay vào (2) ta được:

$$3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{5x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x) + \left(x + 1 - \sqrt{3x + 1}\right) + \left(x + 2 - \sqrt{5x + 4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)\left(3 + \frac{1}{x + 1 + \sqrt{3x + 1}} + \frac{1}{x + 2 + \sqrt{5x + 4}}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Khi đó ta có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1); (1; 2)$.

Với $y = 2x + 1$ thay vào (2) ta được $3 - 3x = \sqrt{4x + 1} + \sqrt{9x + 4}$

$$\Leftrightarrow 3x + \left(\sqrt{4x + 1} - 1\right) + \left(\sqrt{9x + 4} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(3 + \frac{4}{\sqrt{4x + 1} - 1} + \frac{9}{\sqrt{9x + 4} + 2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Khi đó ta được nghiệm hệ là $(0; 1)$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm hệ đã cho là $(0; 1); (1; 2)$.

Nhận xét: *Nói về việc giải phương trình, thì trong những năm này, cũng có những câu phương trình sử dụng phương pháp tách thành tích để giải.* ■

Bài 4: Giải phương trình: $4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4}$

(Trích đề thi đại học khối D năm 2010)

Gợi ý giải:

Điều kiện: $x \geq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2^{4x} - 2^4)\left(2^{2\sqrt{x+2}} - 2^{x^3-4}\right) = 0$

$$(2^{4x} - 2^4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$2^{2\sqrt{x+2}} - 2^{x^3-4} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = x^3 - 4\ (1)$$

Nhận xét: $x \geq \sqrt[3]{4}$

Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{x+2} - x^3 + 4$ trên $\left[\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - 3x^2 < 0$$

Suy ra f(x) nghịch biến trên $\left[\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$

Ta có: $f(2) = 0$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1; x = 2$.

Nhận xét: *Trên đây là một trong những cách giải trong đáp án. Thế nhưng, việc nghĩ phương trình (1) theo phương pháp hàm số thường ít học sinh nghĩ tới. Thay vào đó, các em có thể dùng máy tính ra nghiệm $x = 2$ và hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp quen thuộc. Các em thử đặt bút xem!* ■

Bài 5: Giải phương trình: $2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x - 2\sqrt{x} + 2)$

(Trích đề thi đại học khối D năm 2013)

Gợi ý giải:

Điều kiện: $0 < x < 1$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{x^2}{1-\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{x}{1-\sqrt{x}} + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{1-\sqrt{x}} + 1\right)\left(\frac{x}{1-\sqrt{x}} - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1-\sqrt{x}} - 2 = 0\ \left(\text{do} \frac{x}{1-\sqrt{x}} > 0\right) \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{3}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Nhận xét: *Bài này anh nêu ra chỉ mục đích ôn lại các công thức về logarit. Em nào thấy mình tự dưng quên thì hãy xem lại đi nhé.* ■

Bài 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y}\ \ (1) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3}\ \ (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi đại học khối B năm 2014)

Nhận xét: *Dĩ nhiên bài toán này cũng xuất phát là sử dụng phương pháp phân tích thành nhân tử nhưng đã không còn ở dạng quen thuộc. Để có thể đánh giá nhanh thì ta sẽ thường bắt đầu từ phương trình (1) vì rõ ràng nhìn phương trình (2) có vẻ phức tạp hơn phương trình (1) về bậc cũng như số lượng căn thức. Điểm chú ý ở phương trình (1) là đại lượng $\sqrt{x-y}$ xuất hiện và cũng kèm theo đại lượng $x - y$ xuất hiện! Nên có một phản xạ tự nhiên của anh là:*

$$\sqrt{x-y} = t \to x = t^2 + y$$

Bây giờ phương trình (1) sẽ viết hết về hai ẩn $y; t$. Ta có:

$$(1-y).t + t^2 + y = 2 + (t^2 - 1).\sqrt{y}$$

Nhìn lướt qua thì đây là phương trình bậc hai đối với ẩn t hay $\sqrt{y}$. Giả sử ta coi là $\sqrt{y}$, ta có:

$$(t-1).y + (t^2-1).\sqrt{y} + (-t^2 - t + 2) = 0$$

Một sự tình cờ nữa là ta có nhân tử $t - 1$ nên ta có:

$$(t-1)\left[y + (t+1)\sqrt{y} - (t+2)\right] = 0$$

Dùng delta hoặc nhẩm nghiệm ta thấy ngay $\sqrt{y} = 1; \sqrt{y} = -t - 2$. Do đó, ta có thể đưa ra lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện $\begin{cases} y \ge 0 \\ x \ge 2y \\ 4x \ge 5y + 3 \end{cases}$ $(*)$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (y - x + 1)(\sqrt{x - y} - 1) + (x - y - 1)(1 - \sqrt{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - y)(x - y - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x - y} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{y}}\right) = 0 \ (3)$$

Do $\left(\frac{1}{\sqrt{x - y} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{y}}\right) > 0$ nên:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = x - 1 \end{array}\right.$$

Với $y = 1$ phương trình (2) trở thành: $9 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Với $y = x - 1$ điều kiện (*) trở thành: $1 \le x \le 2$. Phương trình (2) trở thành:

$$2x^2 - x - 3 = \sqrt{2 - x}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x - 1) + (x - 1 - \sqrt{2 - x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)\left(2 + \frac{1}{(x - 1 + \sqrt{2 - x})}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Đối chiếu (*) và kết hợp trường hợp trên ta có nghiệm của hệ là $(3;1);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Nhận xét: *Lại nói về phương trình $2x^2 - x - 3 = \sqrt{2 - x}$ nếu như không biết sử dụng máy tính là một bất lợi trong trường hợp này. Nhưng lưu ý rằng, ta có thể bình phương hai vế đưa về phương trình bậc bốn hoặc đặt cái căn thức bằng ẩn số mới và đưa về phương trình bậc bốn ngoài ra cũng có thể đưa về dạng hàm số. Như vậy, riêng phương trình này có những bốn cách giải, do bề dày cuốn sách không cho phép nên hẹn gặp các em vào buổi học dành cho những em phấn đấu điểm 10 vào tháng 6 này nếu có thể. Ta tiếp tục vấn đề với hai bài thi trong đề thi thử đại học năm nay.* ■

Bài 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy(x + 1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + (4y + 2)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0 \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Tam Đảo 2016)

Dự đoán:

Phương trình (1) có thể coi là phương trình bậc hai với biến y nên ta có thể tính ngay Δ_y để thử nghiệm. Phương trình (2) sự xuất hiện hình thức của hai biểu thức có hình thức giống nhau nên có thể sau khi thế đưa về phương pháp hàm số.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện xác định: $\forall x \in R$.

Ta có:

$$xy(x + 1) = x^3 + y^2 + x - y$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2y + y^2 - xy + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = x^2 + 1 \end{array}\right.$$

Với $y = x^2 + 1$ thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$2(x^2 + 1)\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + (4x^2 + 6)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0$$

Dễ thấy phương trình vô nghiệm vì vế trái luôn dương.

Với y = x thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=-(2x+1)\left(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2\right)$$
$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=(-2x-1)\left(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2\right)$$

Xét hàm $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+2}+2\right)$ trên R ta có:

$$f'(t)=\sqrt{t^2+2}+2+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0$$

Do đó, hàm số $f(t)$ đồng biến trên R.

Từ đó suy ra:

$$f(3x)=f(-2x-1)\leftrightarrow 3x=-2x-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$.■

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2+x=3(xy+1)+2y \\ \dfrac{2}{3+\sqrt{2x-y}}+\dfrac{2}{3+\sqrt{4-5x}}=\dfrac{9}{2x-y+9} \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Số 3 Bỏa Tháng – 2016)

Phân tích:

Phương trình (1) là phương trình bậc hai đối với biến x hoặc y. Do đó, ta tính thử Δ_x nếu chính phương thì ok! Vấn đề sau khi nháp ta thu được $y=x-1$ và thay vào phương trình hai ta được:

$$\frac{2}{3+\sqrt{x+1}}+\frac{2}{3+\sqrt{4-5x}}=\frac{9}{x+10}$$

Nhận xét: $x=0; x=-1$ là hai nghiệm thỏa mãn nên có thể đưa về $(x^2+x)A=0$ bằng cách nhân liên hợp. Phương pháp này xuất hiện ở trong cuốn chinh phục hệ phương trình rồi! Vấn đề ở đây, do dưới dạng phân số nên ta cứ thử đặt ẩn phụ để đưa về hệ xem sao:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}=a\ge 0 \\ \sqrt{4-5x}=b\ge 0 \\ \dfrac{2}{3+a}+\dfrac{2}{3+b}=\dfrac{9}{x+10} \end{cases} \to \begin{cases} x=a^2-1 \\ b^2+5a^2=9 \\ \dfrac{2}{3+a}+\dfrac{2}{3+b}=\dfrac{9}{a^2+9} \end{cases}$$

Như vậy hệ của bài toán quy về việc giải hệ:

$$\begin{cases} b^2+5a^2=9\ (1) \\ \dfrac{2}{3+a}+\dfrac{2}{3+b}=\dfrac{9}{a^2+9}\ (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow \frac{2(a+b+6)}{(a+3)(b+3)}=\frac{9}{a^2+9}$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+6)(a^2+9)=9(a+3)(b+3)$$

Suy nghĩ tự nhiên là ta thử đưa về đối xứng:

$$a^2+9=a^2+x.(b^2+5a^2)+9-9x=(1+5x)a^2+x.b^2+(9-9x)$$

Chọn $1+5x=x\Rightarrow x=-1/4$ nên:

$$a^2+9=-\frac{1}{4}.(a^2+b^2)+\frac{45}{4}$$

Do đó:

$$(2)\Leftrightarrow (a+b+6)\left(45-(a^2+b^2)\right)=18(a+3)(b+3)$$

Đặt $a+b=S; ab=P$ ta có:

$$(S+6).(45-S^2+2P)=18(P+3S+9)$$

Rõ ràng P là bậc nhất nên ta có thể viết P theo S:

$$2(S-3)P = S^3 + 6S^2 + 9S - 108$$

Rất may là lại có $S-3$ làm nhân tử.

$$2(S-3)P = (S-3)(S^2+9S+36)$$

Vì $a; b \geq 0$ nên:

$$2P \leq \frac{S^2}{2} < S^2 + 9S + 36$$

Nên ta chỉ có: $P = 3$ hay $a + b = 3$.

Như vậy theo phân tích này thì ta có thể giải bài toán theo chính phân tích này, hoặc là có thể đưa được thành nhân tử: $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-5x} - 3$. Do đó, ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x \leq \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ:

$$2x^2 + y^2 + x = 3(xy+1) + 2y$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(2x-y+3) = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$$

Với $y = x - 1$ thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình sau:

$$\frac{2}{3+\sqrt{x+1}} + \frac{2}{3+\sqrt{4-5x}} = \frac{9}{x+10}$$

$$2(x+10)\left(6+\sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}\right) = 9\left(9+3\sqrt{x+1}+3\sqrt{4-5x}+\sqrt{x+1}\sqrt{4-5x}\right)$$

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}-3\right)\left(9\sqrt{x+1}+9\sqrt{4-5x}-4x+41\right) = 0\ (*)$$

Do $x \in \left[-1; \frac{4}{5}\right]$ nên:

$$9\sqrt{x+1}+9\sqrt{4-5x}-4x+41 > 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}.\sqrt{4-5x} = 4 + 4x \Leftrightarrow \sqrt{x+1}.\left(-2\sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} = \sqrt{4-5x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Với $x = 0$ ta có: $y = -1$

Với $x = -1$ ta có: $y = -2$

Đối chiếu với điều kiện và thay hệ phương trình ban đầu thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(0; -1); (-1; -2)$. ■

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{y}{x+1} - \dfrac{y+1}{y} \\ \sqrt{8y+9} = (x+1)\sqrt{y} + 2 \end{cases}$$

Nhận xét: *Chắc chắn xuất phát từ phương trình (1) bằng việc quy đồng mẫu thu gọn thì đây là phương trình bậc hai đối với biến y. Khi đó, bạn đọc có thể tính Δ_y để khảo sát!!! ☺. Đây là một trong những hướng ra đề mà anh nghĩ là có thể xảy ra, vì nó chỉ che dấu đi hình thức quen thuộc mà ta đã biết.*

Lời giải chi tiết:

Điều kiện xác định: $x \neq -1; y > 0$

$$x - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{y}{x+1} - \frac{1+y}{y}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1+y}{y} = \frac{y}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy+y+1}{y} = \frac{y(x+1)+1}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy+y+1}{y} - \frac{yx+y+1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy+y+1=0 \\ y=(x+1)^2 \end{array}\right.$$

Với $y=(x+1)^2$ thay vào (2) ta có:

$$\sqrt{8(x+1)^2+9} = (x+1)|x+1|+2$$

Xét $x > -1$. Đặt $t = x+1$ $(t > 0)$, ta có phương trình:

$$\sqrt{8t^2+9} = t^2+2 \Leftrightarrow 8t^2+9 = t^4+4t^2+4 \Leftrightarrow t^4-4t^2-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=-1 \\ t^2=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow t^2=5$$

$$\Leftrightarrow t = \pm\sqrt{5} \Rightarrow t=\sqrt{5} \Rightarrow x=-1+\sqrt{5} \Rightarrow y=5$$

Xét $x < -1$. Đặt $t = x+1$ $(t < 0)$, ta có phương trình:

$$\sqrt{8t^2+9} = -t^2+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2+9 = t^4-4t^2+4 \\ -t^2+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^4-12t^2-5=0 \\ 2 \geq t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t^2 = 6-\sqrt{41} \\ t^2 = 6+\sqrt{41} \end{array}\right. \\ 2 \geq t^2 \end{cases}$$

Trường hợp này hệ vô nghiệm.

Với $(x+1)y = -1$ thay vào (2) có:

$$\sqrt{8y+9} + \frac{1}{y}\sqrt{y} - 2 = 0 \ (3)$$

Vì $y > 0 \Rightarrow 8y+9 > 9 \Rightarrow \sqrt{8y+9} > 3$ nên phương trình (3) vô nghiệm.

Do đó trường hợp này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=-1+\sqrt{5} \\ y=5 \end{cases}$. ■

Một số bài luyện tập:

Bài toán: Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} 4+\left(x+y^2\right)\sqrt{y-4x+8} = 2y^2-y+6x \\ 4\left(\sqrt{y}+2\sqrt{x+1}\right) = 9y\sqrt{x-1} \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia THPT chuyên Amsterdam 2016)

2. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1} = y+\sqrt{y^2-1} \\ x^2+y^2-xy = 1 \end{cases}$

(Trích đề thi HSG tỉnh Ninh Bình 2015)

Gợi ý phương trình (1) chuyển vế rồi bình phương 2 vế

Kết quả $(x,y) = (0;1); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

3. $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2+2y^2} = x+2y+3xy \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x^2+2y^2} = 2y-x \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia THPT Nguyễn Huệ - tỉnh Ninh Bình)

4. $\begin{cases} \sqrt{4x-3} = \left(2y^2+11\right)(17-y)+\sqrt{y} \\ y(y-3x+3) = 5(3x+2) \end{cases}$

5. $\begin{cases} \left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 185 \\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 65 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^3y-x^2+xy = -1 \\ x^4-x^3y+x^2y^2 = 1 \end{cases}$

Ngày số 1

Phương pháp thế trong giải hệ phương trình

Bình luận: *Phương pháp thế là một trong những phương pháp dễ trong giải hệ phương trình. Tuy nhiên, vẫn có những bài khiến ta phải vắt óc suy nghĩ. Trong các đề thi thử đại học năm nay, phương pháp này được nhắc tới rất ít.*

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 7\sqrt{x+1}-1=y\left(\sqrt{x+1}+1\right) \\ (x+1)y^2+y\sqrt{x+1}=13x+12 \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đội Cấn 2016)

Phân tích:

Rõ ràng, ý tưởng ở đây rất dễ nhìn:

$$\text{Phương trình 1} \xrightarrow{\text{Rút}} \sqrt{x+1} = \text{theo } y \xrightarrow{\text{thế vào phương trình 2}} \text{Giải biến } y.$$

Lời giải chi tiết:

Điều kiện $x \geq -1$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(7-y)\sqrt{x+1} = y+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{y+1}{7-y}$$

(Do $y = 7$ không là nghiệm của phương trình)

Thế $\sqrt{x+1} = \dfrac{y+1}{7-y}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$y^2\left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2 + y\left(\frac{y+1}{7-y}\right) = 13.\left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow y^2(y+1)^2 + y(y+1)(7-y) = 13(y+1)^2 - (7-y)^2$$
$$\Leftrightarrow y^4 + y^3 - 5y^2 - 33y + 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(y-3)(y^2-5y+36) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$$

Với $y = 1 \Rightarrow x = -\dfrac{8}{9}$

Với $y = 3 \Rightarrow x = 0$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = (0;3)$; $\left(-\dfrac{8}{9};1\right)$. ■

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2\sqrt{y+1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases}$ $(*)$

Nhận xét: *Không giống như bài toán 1. Nếu như ta thay thế từ phương trình* (1) *mà:*

$$x = 2\sqrt{y+1} + 3 \ hay \ y = \frac{(x-3)^2}{2} - 1$$

vào phương trình (2) *thì quá phức tạp. Chính vì thế ta cần chú ý hơn ở phương trình* (2), *bài toán này có tính chất giống như bài hệ trong đề thi Đại học năm 2014. Ta chú ý:*

$$x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} = x\left(x - 2\sqrt{y+1}\right)^2 - 13x$$

Do đó, bây giờ nếu thay thế $x - 2\sqrt{y+1} = 3$ *thì bài toán đã đơn giản đi rất nhiều.*

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $y \geq -1$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y+1} + 4xy + 4x - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ x\left(x - 2\sqrt{y+1}\right)^2 - 13x - 8y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ -x - 2y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ \sqrt{y+1} = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \le 5 \\ y^2 - 11y + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{y+1} \\ y \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(7; 3)$. ■

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \quad (1) \\ x(y^3 - x^3) = 7 \quad (2) \end{cases}$$

Phân tích:

Rõ ràng, nếu lại bắt đầu từ phương trình (2) để rút ra:

$x = f(y) \rightarrow$ khó thực hiện vì với biến x thì là phương trình bậc 4 không có gì đặc biệt.

$$(2) \rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{7}{x} + x^3}$$

Nếu thế biểu thức này vào (1) thì ta lại gặp khó khăn vì sự phức tạp của nó. Ta lại bắt trước giống bài toán 2 nhưng hơi khác. Ta sẽ biến đổi xem có gì đặc biệt trong phương trình (1). Có một phản xạ thấy ngay hệ số của phương trình (1) là: 1; 1; 9; 1; 1; 9 nên dễ nhẩm ngay $x = y$ là một nghiệm của (1). Khi đó, ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Từ (2) ta suy ra: $x \neq y$

$$(1) \Leftrightarrow (x^4 - xy^3) + (x^3y - x^2y^2) - 9(x - y) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)[x(x^2 + xy + y^2) + x^2y - 9] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)[x(x + y)^2 - 9] = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x + y)^2 - 9 = 0 \quad (\text{do } x \neq y)$$
$$\Leftrightarrow x(x + y)^2 = 9 \ (3)$$

Từ (3) suy ra $x > 0$. Từ phương trình (2) ta suy ra $y = \sqrt[3]{\frac{7}{x} + x^3}$, thay vào (3) ta được:

$$x\left(x + \sqrt[3]{\frac{7}{x} + x^3}\right)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x\left[x^2 + 2x\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + \sqrt[3]{\left(\frac{7}{x} + x^3\right)^2}\right] - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow +2x^2\left(\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}\right) + x\left(\sqrt[3]{\left(\frac{7}{x} + x^3\right)^2}\right) - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4 + 7)^2} - 9 = 0 \ (4)$$

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4 + 7)^2} - 9 = 0, \ x > 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2\left[\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \frac{6x^6 + 14x^2}{3\sqrt[3]{(x^6 + 7x^2)^2}}\right] + \frac{1}{3}.\frac{9x^8 + 70x^4 + 49}{\sqrt[3]{[x(x^4 + 7)^2]^2}} > 0, \forall x > 0$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ mà $f(1) = 0$

Suy ra (4) có nghiệm duy nhất $x = 1 \rightarrow y = 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm $(x; y) = (1; 2)$. ■

Bài 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y(xy-2) = 3x^2 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét: *Rõ ràng, dù từ phương trình (1) hay (2) thì phép thế đều làm tăng sự phức tạp lên vì chúng đều là phương trình (2). Thực ra bài toán này có hai hướng suy nghĩ. Đối với phép thế trong bài toán này thì thích hợp với những bạn trong phòng thi không có máy tính (giả sử trường hợp máy tính hết pin). Bài này đơn thuần, hãy gộp lại với nhau, hệ tương đương:*

$$\begin{cases} y(xy-2) = 3x^2 & (1) \\ y(y + x^2) = -2x & (2) \end{cases}$$

Do đó, dùng phép chia vế theo vế ở đây sẽ thấy ngay biến y chỉ còn bậc một, nên việc thế đã được giải quyết. Xem lời giải chi tiết sau:

Lời giải chi tiết:

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y(xy-2) = 3x^2 & (1) \\ y(y + x^2) = -2x & (2) \end{cases}$$

Suy ra:

$$\frac{xy-2}{y+x^2} = \frac{-3x}{2} \leftrightarrow y = \frac{4-3x^3}{5x} \quad (3)$$

Thế (3) vào (1), ta được:

$$\frac{4-3x^3}{5x}\left(x.\frac{4-3x^3}{5x} - 2\right) = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow (4-3x^3)^2 - 10(4-3x^3) - 75x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^6 - 69x^3 - 24 = 0$$

Đặt $x^3 = t$, ta được $9t^3 - 69t - 24 = 0$

$$t = 8; t = -\frac{1}{3}$$

+Với $t = 8$ suy ra $x = 2$ dẫn đến $y = -2$

+Với $t = -\frac{1}{3}$ suy ra $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ dẫn đến $y^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}y + 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 0$

Phương trình này vô nghiệm do:

$$\Delta = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^2 - 8.\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 0$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) duy nhất là (2; -2).

Nhận xét: *Như ban đầu đã nói bài toán trên có một hướng đi khác nhẹ nhàng hơn rất nhiều với những bạn có máy tính Casio. Anh sẽ giới thiệu sau. Ngoài ra ta có thể dùng cách sau để đánh mất giá trị của y^2 bằng cách lấy phương trình (1) trừ đi x lần phương trình (2)* ■.

Bài 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - x + y = 3 & (1) \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 3xy - 3x + 3y = 9 \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3y(xy+y-3)+3x-3y=-9\ (3) \\ 4x^3+12x^2+9x=-y^3+6y+5\ (4) \end{cases}$$

Lấy (3) cộng (4) với theo vế ta được:

$$4x^3+12x^2+12x-3xy^2+y^3-3y^2+4=0$$
$$\Leftrightarrow 4(x+1)^3+4y^3-3y^2(y+x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)[4(x+1)^2-4(x+1)y+y^2]=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2(2x+2-y)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ 2x+2-y=0 \end{array}\right.$$

- Với $x+y+1=0 \to y=-x-1$ thay vào (1) ta có $x^2+3x+4=0$ (vô nghiệm)
- Với $2x+2-y=0 \to y=2+2x$ thay vào (1) ta có $2x^2+3x-1=0$

$$x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \to y=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$$
$$x=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \to y=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;\ y)=\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right),\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$. ■

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 16x^3y^3-9y^3=(2xy-y)(4xy^2+3) \\ 4x^2y^2-2xy^2+y^2=3 \end{cases}$

Lời giải chi tiết:

Với $y=0$ không là nghiệm hệ.

Với $y\neq 0$, ta chia phương trình thứ nhất cho y^3, phương trình thứ hai cho y^2 ta được:

$$\begin{cases} 16x^3-9=(2x-1)\left(4x+\frac{3}{y^2}\right) & (1) \\ 4x^2-2x+1=\frac{3}{y^2} & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$16x^3-9=(2x-1)(4x^2+2x+1)$$
$$\leftrightarrow 16x^3-9=8x^3-1$$
$$\leftrightarrow x^3=1 \leftrightarrow x=1$$

Thay $x=1$ vào (2) ta được $y=\pm 1$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x;\ y)=(1;\ -1),(1;\ 1)$. ■

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{x^2-xy+y^2} & (1) \\ 4(x+1)(xy+y-1)-3x=\sqrt[3]{x^4-x^2} \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Giang 2016)

Nhận xét: *Khác với bài toán 6 thì bài toán này thực sự không thể nhìn ra ngay phương pháp giải. Thế nhưng, biến đổi phương trình (1) ta sẽ đem lại được nhiều điều thú vị. Vì khi sử dụng máy tính Casio các em sẽ biết và cảm nhận được:*

$$xy+y=x$$

Lời giải chi tiết:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1\geq y^2-y+1 \\ \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{y^2-y+1}\right)^2=x^2-xy+y^2 & (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow xy+x-y+2=2\sqrt{x^2+x+1}.\sqrt{y^2-y+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - y + 2 \geq 0 \\ (xy + x - y + 2)^2 = 4(x^2 + x + 1)(y^2 - y + 1) \quad (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow (xy + x - y)^2 + 4(xy + x - y) + 4 = 4[(x^2 + x)(y^2 - y) + x^2 + x + y^2 - y + 1]$$

$$\Leftrightarrow (xy + x - y)^2 = 4[x^2y^2 - xy(x - y) + (x - y)^2]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2y^2 + 6xy(x - y) - 3(x - y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(xy + x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow xy + y = x$$

Thế $xy + y = x$ vào phương trình $4(x + 1)(xy + y - 1) - 3x = \sqrt[3]{x^4 - x^2}$ ta được:

$$4(x + 1)(x - 1) - 3x = \sqrt[3]{x^4 - x^2} (4)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x^4 - x^2}$. Vì $x = 0$ không là nghiệm của (4) nên $x \neq 0$

Suy ra $t^2 + tx + x^2 = \left(t + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} > 0, \forall x \neq 0$

Do đó:

$$(4) \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 4 = t \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 4 = t - x$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 1)(t^2 + tx + x^2) = t^3 - x^3$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 1)(t^2 + tx + x^2) = x^4 - x^3 - x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(4t^2 + 4tx + 3x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ vì } 4t^2 + 4tx + 3x^2 = (2t + x)^2 + 2x^2 > 0, \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Với $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (không thỏa mãn)

Với $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ thì $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ ■.

Một số bài luyện tập:

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (2x^2 + y)(x + y) + x(2x + 1) = 7 - 2y \\ x(4x + 1) = 7 - 3y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2(y + 1) = 6y - 2 \\ x^4y^2 + 2x^2y^2 + y(x^2 + 1) = 12y^2 - 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$

Ngày số 3

Đặt ẩn phụ trong giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình

Bài 1: Giải bất phương trình:

$$(x+2)\left(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}\right)+\sqrt{2x^2+5x+3}\ge 1$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Lào Cai 2016)

Nhận xét: *Rõ ràng ta có:* $\sqrt{2x^2+5x+3}=\sqrt{2x+3}.\sqrt{x+1}$

Nên phản xạ mà ta thấy ngay:

$$\begin{cases} a=\sqrt{2x+3} \\ b=\sqrt{x+1} \end{cases}$$

Khi đó, a và b đều cùng là phương trình bậc hai do đó dùng phương pháp delta trong phần trước ta sẽ có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $x\ge -1$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x+3} \\ b=\sqrt{x+1} \end{cases}(a\ge 1; b\ge 0) \Rightarrow \begin{cases} a^2-2b^2=1 \\ \sqrt{2x^2+5x+3}=ab \\ x+2=a^2-b^2 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương:

$$(a^2-b^2)(a-2b)+ab\ge 1$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)(a-2b)+ab-1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-2b^2-ab)+ab-1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(1-ab)-(1-ab)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(1-ab)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b-1=0 \\ 1-ab=0 \\ \begin{cases} a-b-1>0 \\ 1-ab>0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} a-b-1<0 \\ 1-ab<0 \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

Nếu $a-b-1=0$ ta có phương trình $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{x+1}+1$$
$$\Leftrightarrow 2x+3=x+1+2\sqrt{x+1}+1$$
$$\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Nếu $1-ab=0$ ta có phương trình $1-\sqrt{2x^2+5x+3}=0$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}\ (tm) \\ x=-2\ (l) \end{array}\right.$$

Giải hệ (I):

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3}>\sqrt{x+1}+1 \\ \sqrt{2x^2+5x+3}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x+1>2\sqrt{x+1} \\ 2x^2+5x+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ -1<x<-\frac{1}{2} \end{cases} (VN)$$

Giải hệ (II):

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3} < \sqrt{x+1}+1 \\ \sqrt{2x^2+5x+3} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right) < 0 \\ 2x^2+5x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 3 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{-1\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$ ■.

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{xy+x+3y+3} + x + 1 = 2y + \sqrt{y+1} & (1) \\ (x-3)(y+1) = (y-1)(x^2-2x+3)\left(\sqrt{x+1}-2\right) & (2) \end{cases} (x, y \text{ thuộc R})$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lương Tài - 2016)

Nhận xét: *Ý tưởng của bài này rất giống với bài 1. Quan sát nhận thấy trong phương trình (1) có:*

$$\sqrt{xy+x+3y+3} = \sqrt{x+3}.\sqrt{y+1}$$

Nên ta có thể đặt ngay: $a = \sqrt{x+3}; b = \sqrt{y+1}$ *và đưa về phương trình bậc hai đối với mỗi biến.*

Lời giải chi tiết:

Phương trình (1) ta có: $\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)(y+1)} + x - 2y + 1 = \sqrt{y-1}$

Đặt $a = \sqrt{x+3}; b = \sqrt{y+1} (a, b \geq 0)$(1) trở thành:

$$a^2 - 2b^2 + ab + a - b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + 2b + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$a + 2b + 1 = 0$ vô nghiệm do $a, b \geq 0$

Xét $a = b \Rightarrow y = x + 2$ thay vào (2) ta có:

$$(x-3)(x+3) = (x+1)(x^2-2x+3)\left(\sqrt{x+1}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = (x+1)(x^2-2x+3).\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 5 \text{ (tm)} \\ (x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right) = (x+1)(x^2-2x+3) (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2\right]\left(\sqrt{x+1}+2\right) = [(x-1)+2][(x-1)^2+2]$$

Xét hàm $f(t) = (t+2)(t^2+2); t \geq 0; f'(t) > 0$ với mọi t

Suy ra f(t) đồng biến mà $f\left(\sqrt{x+1}\right) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (3; 5).

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = y\left(\sqrt{xy-2y^2} + \sqrt{4y^2-xy}\right) \\ \sqrt{3y} + \sqrt{x^2+2x} - x - x\sqrt{2+9y^2} = 0 \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Biên Hòa 2016)

Nhận xét: *Phương trình (1) là phương trình đẳng cấp nên tư tưởng chung là đặt*

$$\frac{x}{y} = t$$

Công việc còn lại khá quen thuộc.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $4y \geq x \geq 2y \geq 0$

Với $y = 0$ thì $x = 0$,

Với $y > 0$; (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy - y^2 - y\left(\sqrt{xy-2y^2} + \sqrt{4y^2-xy}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} - 1 - \sqrt{\frac{x}{y} - 2} - \sqrt{4 - \frac{x}{y}} = 0$$

Đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow t$ thuộc $[2; 4]$.

Ta có: $2t^2 - 5t - 1 - \sqrt{t-2} - \sqrt{4-t} = 0$

$$\Leftrightarrow 2t(t-3) + \sqrt{t-2}\left(\sqrt{t-2}-1\right) + \left(1 - \sqrt{4-t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t(t-3) + \frac{(t-3)\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}} = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow x = 3y$$

Thay $x = 3y$ thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x^2+2x} - x - x\sqrt{x^2+2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+2}\right) = x(1+\sqrt{x^2+2})$$

Xét hàm $f(t) = t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right)$

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0\,;\text{t thuộc R}$$
$$f\left(\sqrt{x}\right) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0;0)$; $\left(1;\frac{1}{3}\right)$ ■.

Bài 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 + 8x^2 = 3 - (1+3\sqrt[3]{y^2-1})\sqrt[3]{y^2-1} \\ 4 - 3\sqrt[3]{(y^2-1)^2} - 2\sqrt[3]{y^2-1} = 12x^2 + y^2 - \sqrt{1-4x^2} \end{cases}$$

Nhận xét: *Đại lượng xuất hiện nhiều nhất trong bài toán mà có thể đưa về đơn giản mà không có căn thức thì ta có thể nhìn ngay phép đổi biến:*

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{y^2-1} \\ b = \sqrt{1-4x^2},\ b \ge 0 \end{cases}$$

Khi đó, hệ trở thành: $\begin{cases} a^3 + 3a^2 + 2a - 3b^2 - b = 0 \\ a^3 + 3a^2 + a - 2b^2 = 0 \end{cases}$

Điều kiện: $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$; $|y| \ge 1$.

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{y^2-1} \\ b = \sqrt{1-4x^2},\ b \ge 0 \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} a^3 + 3a^2 + 2a - 3b^2 - b = 0 \\ a^3 + 3a^2 + a - 2b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b^2 + b$ thay vào phương trình:

$$(b^2+b)^3 + 3(b^2+b)^2 + 2(b^2+b) - 3b^2 - b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2} = 0 \\ \sqrt[3]{y^2-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là: $\left(\frac{1}{2};1\right), \left(\frac{1}{2};-1\right), \left(-\frac{1}{2};1\right), (-\frac{1}{2};-1)$.

Bài 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{\dfrac{x-1}{y-1}} + \dfrac{4}{y-1} - \dfrac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{x-1} = 0 \\ (y-1)(x-1)\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-1} - \dfrac{y-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Nhận xét: *Rõ ràng, phép đổi biến để đánh mất căn thức là:*

$$\begin{cases} a = \sqrt{x-1}, a \ge 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b > 0 \end{cases}$$

Khi đó, ta thấy ngay, phương trình (1) *là bậc hai đối với biến a hoặc b. Khi đó, ta hoàn toàn có thể dùng delta và thu được kết quả. Riêng lời giải sau cũng được chấp nhận (do delta đã tính nên có thể nhận ra ngay).*

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $x \ge 1, y > 1$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b > 0 \end{cases}$. Ta có

$$(1) \leftrightarrow (b-2)^2 + a^2b^2 + 2ab + ab^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-2)^2 + ab(ab + 2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases} (\text{do } a \geq 0; b > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \text{ thỏa hệ phương trình.}$$

Kết luận: Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 5)$.

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y(x^2 + 2x + 2) = x(y^2 + 6) \\ (y-1)(x^2 + 2x + 7) = (x+1)(y^2 + 1) \end{cases}$$

Nhận xét: *Bài toán này có nét tương đồng giữa hai phương trình. Do đó, ta sẽ thử với phép đổi biến sau:*

$$\begin{cases} a = x + 1 \\ b = y \end{cases}$$

Khi đó, hệ thu được là hệ nửa đối xứng. Do đó, ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $x, y \in R$

Đặt: $\begin{cases} a = x + 1 \\ b = y \end{cases}$, ta có hệ trở thành: $\begin{cases} b(a^2 + 1) = (a-1)(b^2 + 6) \\ (b-1)(a^2 + 6) = a(b^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b^2 + 6) = b(a^2 + 1)(*) \\ (b-1)(a^2 + 6) = a(b^2 + 1)(**) \end{cases}$

Trừ theo vế hai phương trình rồi thu gọn ta có:

$$(a-b)(a + b - 2ab + 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b - 2ab + 7 = 0 \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1: $a = b$ thay vào phương trình (*) ta có:

$$(a-1)(a^2 + 6) = a(a^2 + 1) \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Hệ có 2 nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 2), (2; 3)$.

- Trường hợp 2: $a + b - 2ab + 7 = 0$

  Trừ vế theo vế hai phương trình (*) và (**) rồi rút gọn ta có:

$$\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

  Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b - 2ab + 7 = 0 \\ \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

  Đây là hệ đối xứng loại I, giải hệ ta có các nghiệm: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

  Từ đó ta có các nghiệm $(x; y)$ là : $(1; 2), (2; 3), (1; 3), (2; 2)$.

  Kết luận: Vậy hệ đã cho có các nghiệm: $(1; 2), (2; 3), (1; 3), (2; 2)$.

Bài 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{xy + x + 2} + \sqrt{x^2 + x} - 4\sqrt{x} = 0 \\ xy + x^2 + 2 = x\left(\sqrt{xy + 2} + 3\right) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hai Bà Trưng-Huế 2016)

Nhận xét: *Đây là bài toán khó. Tuy nhiên nếu tinh ý thì ta có thể nhìn thấy sự đối xứng hai vế theo nhiều bài dạng này:*

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ xy + 2 \geq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{xy + x + 2} + \sqrt{x^2 + x} = 4\sqrt{x} \\ xy + x^2 + 2 = x\left(\sqrt{xy + 2} + 3\right) \ (1) \end{cases} \ (\mathrm{I})$$

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn phương trình (1) nên:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(y + \frac{2}{x}\right) + 1} + \sqrt{x + 1} = 4 \\ \left(y + \frac{2}{x}\right) + x = \sqrt{x\left(y + \frac{2}{x}\right) + 3} \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{\left(y + \frac{2}{x}\right) + 1} \\ b = \sqrt{x + 1} \end{cases} (a \geq 0; b \geq 1) \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \left(y + \frac{2}{x}\right) + 1 \\ b^2 = x + 1 \end{cases}$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ (a^2 - 1) + (b^2 - 1) = \sqrt{(b^2 - 1)(a^2 - 1)} + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ (a + b)^2 - 2ab - 5 = \sqrt{(ab)^2 - [(a + b)^2 - 2ab] + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ 11 - 2ab = \sqrt{(ab)^2 + 2ab - 15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab \leq \frac{11}{2} \\ 3(ab)^2 - 46ab + 136 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a, b$ là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$

Vậy ngiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(3; \frac{7}{3}\right)$.

Sau đây là một số bài luyện tập:

Bài toán: Giải hệ phương trình

1. $\begin{cases} 1(2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x - y)^2 = 0 \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0 \\ 8\sqrt{1 - 2x} + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} (4x^2 - 4xy + 4y^2 - 51)(x - y)^2 + 3 = 0 \\ (2x - 7)(x - y) + 1 = 0 \end{cases}$

Kq: $(x,y) = \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Ngày số 4

Nhân liên hợp trong giải phương trình, hệ phương trình

Bài 1: Giải phương trình:

$$x^3+3x^2-4x+1=(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia THPT chuyên Hùng Vương 2016)

Phân tích: *Sử dụng máy tính ta nhẩm được nghiệm* $x=-8/7$*. Do đó, ta phân tích theo tinh thần sau:*

$$(x^2+3)\left(Ax+B-\sqrt{x^2-x+1}\right)+mx^2+nx+p=0$$

Để ý tưởng này là tốt, ta chọn ngay $A=1$ *để mất cái* x^3 *trong phương trình đã cho.*

$$x+B-\sqrt{x^2-x+1}=0$$

Đến đây thì đơn giản là ta cho $x=-8/7$*. Khi đó, ta có:* $B=3$*. Do đó, ta có phân tích:*

$$x^3+3x^2-4x+1=(x^2+3)(x+3)-(7x+8)$$

Lời giải chi tiết:

Ta thấy:

$$x+3+\sqrt{x^2-x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ x^2-x+1=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -3 \\ x=\dfrac{8}{7} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Do đó phương trình đã cho tương đương với :

$$(x^2+3)(x+3)-7x-8=(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3)\left(x+3-\sqrt{x^2-x+1}\right)-(7x+8)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3)\frac{(x+3)^2-(x^2-x+1)}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}}-(7x+8)=0$$

$$\Leftrightarrow (7x+8)\left(\frac{x^2+3}{x+3+\sqrt{x^2-x+1}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{8}{7} \\ x^2+3=x+3+\sqrt{x^2-x+1}\,(2) \end{array}\right.$$

$$(2)\Leftrightarrow x^2-x=\sqrt{x^2-x+1}\,(3)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}$ $(t>0)$, phương trình (3) trở thành:

$$t^2-1=t\Leftrightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện } t>0.$$

Với $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có phương trình:

$$\sqrt{x^2-x+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x^2-x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{8}{7};\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}\right\}$.

Bài 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{2x+2}-2\sqrt{3-x}-\frac{12x-20}{\sqrt{9x^2-18x+25}}=0$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội 2016)

Nhận xét: *Bài toán này có nghiệm $x = 5/3$. Do đó, ta phân tích để có nhân tử này. Khi đó, phương trình còn lại là:*

$$\sqrt{9x^2 - 18x + 25} = 2\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{3-x}$$

Phương trình này có nhiều cách giải, cách giải mà chắc chắn ra là bình phương hai lần để đưa được về phương trình bậc bốn. Trong lời giải sau, sử dụng cách giải tối ưu hơn.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện $-1 \le x \le 3$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{6x-10}{\sqrt{2x+2}+2\sqrt{3-x}} - \frac{12x-20}{\sqrt{9x^2-18x+25}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x - 10 = 0 \ (1) \\ \sqrt{9x^2 - 18x + 25} = 2\sqrt{2x+2} + 4\sqrt{3-x} \ \ (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Bình phương 2 vế của phương trình (2) ta được phương trình:

$$9x^2 - 10x + 31 = 16\sqrt{6 + 4x - 2x^2} \ \ (3)$$

Đặt $t = 2\sqrt{6+4x-2x^2}$ $(t \ge 0)$, phương trình (3) trở thành:

$$t^2 + 8t - x^2 - 6x + 7 = 0 \ \ (4)$$

Ta có: $\Delta = (x+3)^2$

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -x - 7 \\ t = x - 1 \end{array}\right.$$

Với $t = -x - 7$ ta có phương trình $2\sqrt{6+4x-2x^2} = -x - 7$ (vô nghiệm)

Với $t = x - 1$ ta có phương trình $2\sqrt{6+4x-2x^2} = x - 1$.

Giải phương trình này ta được $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{32}}{3} \ (l) \\ x = \dfrac{3+\sqrt{32}}{3} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{5}{3}; \frac{3+\sqrt{32}}{3}\right\}$.

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 4\sqrt{xy} = 7x \\ (2y-1)\sqrt{1+x} + (2y+1)\sqrt{1-x} = 2y \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thanh Chương I– 2016)

Nhận xét: *Rõ ràng, về mặt hình thức ban đầu có thể là phương trình (2) mang cho ta cảm nhận có thể giải được. Thế nhưng, nếu cứ đâm đầu vào phương trình (2) thì khó có thể ra được. Quay lại phương trình (1) thì ta thấy: Khi cho $y = 1000$ thì dùng máy tính ta ran gay nghiệm $x = 1000$. Dù chỉ vậy thôi ta có cảm giác ngay $x = y$. Và nhìn lại một lần nữa khi cho $x = y$ thì hiển nhiên hai vế bằng nhau. Do đó, ta có lời giải sau.*

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $9y^2 + (2y+3)(y-x) \ge 0; xy \ge 0; -1 \le x \le 1$

Từ PT thứ nhất ta có: $x \ge 0; y \ge 0$

Xét $x = 0; y = 0$ thỏa mãn hệ phương trình.

Xét x, y không đồng tới bằng không, phương trình thứ nhất tương đương với:

$$\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} - 3x + 4\sqrt{xy} - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9y^2 + (2y+3)(y-x) - 9x^2}{\sqrt{9y^2+(2y+3)(y-x)}+3x} + \frac{4(xy-x^2)}{\sqrt{xy}+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left[\frac{11y+9x+3}{\sqrt{11y^2+(2y-3)(y-x)}+3x} + \frac{4x}{(\sqrt{xy}+x)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Thế $y = x$ vào phương trình thứ hai ta được: $(2x-1)\sqrt{1+x} + (2x+1)\sqrt{1-x} = 2x$

$$2x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 1\right) - \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) = 0$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1+x}; a \ge 0 \\ b = \sqrt{1-x}; b \ge 0 \end{cases}$ ta có: $2x = a^2 - b^2$

Phương trình trở thành: $(a^2 - b^2)(a + b - 1) - (a - b) = 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)[(a+b)(a++1) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a = b \\ (a+b)^2 + (a+b) - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a = b \\ a + b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $a = b \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0$ (loại).

Với $a + b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ nên $y = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (0; 0); \left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}; \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)$.

Bài 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + 4(x-y+1)^2}{\sqrt{2(x-y+2)}} = 1 + \dfrac{3}{2(x-y+1)} \ (1) \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x^2 + 2y - 5} = 2y + 3 \ (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nghèn – 2016)

Nhận xét: *Bước 1 của bài toán ai cũng nhìn ra là từ phương trình (1) tính $x - y$. Điểm nhấn của bài toán này là ở bước 2:*

$$\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5} = 2y + 3$$

Rõ ràng, nghiệm của chúng ta thu được bằng máy tính là $y = 2; y = 3$. Ta cố gắng đưa về nhân tử

$$T = y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$$

Thay vì xét cái căn bậc ba, anh xét cái căn bậc hai cho đơn giản, khi đó, giá trị còn lại ắt cũng thành nhân tử.

$$Ay + B - \sqrt{9y-2} = \frac{y^2 - 5y + 6}{Ay + B + \sqrt{9y-2}}$$

Cho $y = 2; y = 3 \to 2A + B = 4; 3A + B = 5 \to A = 1; B = 2$.

Khi đó, ta có:

$$\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5} = 2y + 3$$

$$\Leftrightarrow \left(y + 2 - \sqrt{9y-2}\right) + \left(y + 1 - \sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5}\right) = 0$$

Và bài toán được giải quyết.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ y \ge \dfrac{2}{9} \end{cases}$ (*)

Đặt $a = \sqrt{2(x-y+2)}; a > 0, a^2 = 2(x-y+2) \Leftrightarrow x - y + 1 = \dfrac{a^2 - 2}{2}$

Phương trình (1) trở thành:

$$\frac{1 + 4\left(\dfrac{a^2-2}{2}\right)^2}{a} = 1 + \frac{3}{2\left(\dfrac{a^2-2}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+(a^2-2)^2}{a} = \frac{a^2+1}{a^2-2}$$
$$\Leftrightarrow (a^2-2)^3 + a^2 - 2 = a^3 + a$$
$$\Leftrightarrow f(a^2-2) = f(a)$$

Với $f(t) = t^3 + t; f'(t) = 3t^2 + 1 > 0\ \forall t \in R$ nên $f(t)$ đồng biến trên R

Vậy $a^2 - 2 = a \Leftrightarrow a = -1$ loại; $a = 2$(thỏa mãn)

Với $a = 2$ ta có: $x - y + 2 = 2 \Leftrightarrow x = y$.

Thế vào pt (2) ta có:

$$(26.) \Leftrightarrow \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 2y+3$$
$$\Leftrightarrow y + 2 - \sqrt{9y-2} + \left(y + 1 - \sqrt[3]{7y^2+2y-5}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (y^2-5y+6)\left[\frac{1}{y+2-\sqrt{9y-2}} + \frac{y+1}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + \sqrt[3]{(7y^2+2y-5)^2}}\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = x = 2 \text{ hoặc } y = x = 3$$

Vậy hệ có nghiệm $(2;2); (3;3)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+2)\sqrt{x-1} = y^3 + 3y\ (1) \\ x^2 + y^2 = (x+2)\sqrt{y^4+1}\ (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Nhận xét: *Phương trình (1) có thể thấy ngay dùng phương pháp hàm số hoặc đơn thuần xét hiệu hai vế là ta có:* $y = \sqrt{x-1}$. *Khi đó, phương trình (2) trở thành:*

$$x^2 + x - 1 = (x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$$

Bằng phép bấm máy tính ta thu được một nghiệm lẻ. Khi đó, ta bấm ngay $\sqrt{x^2-2x+2}$ *thì thu được kết quả bằng 3. Do đó, ta có cách xử lý nhanh:*

$$x^2 - 2x - 7 = (x+2)\left(\sqrt{x^2-2x+2} - 3\right)$$

Do đó, ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện $x \geq 2$

Phương trình (1)$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^3 + 3\sqrt{x-1} = y^3 + 3y$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} - y\right)\left(x - 1 + y\sqrt{x-1} + y^2 + 3\right) = 0\ (3)$$

Ta có:

$$x - 1 + y\sqrt{x-1} + y^2 + 3 = \left(\sqrt{x-1} + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0; x \geq 1$$
$$(3) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Thế vào (2) ta được: $x^2 + x - 1 = (x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = (x+2)\left(\sqrt{x^2-2x+2} - 3\right)$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x-7)\left(\sqrt{x^2-2x+2} + 3\right) = (x+2)(x^2-2x-7)$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x-7)\left(\sqrt{x^2-2x+2} - x + 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 7 = 0 \\ \sqrt{x^2-2x+2} - x + 1 = 0\ (vn) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Do $x \geq 2$ nên $x = 1 + 2\sqrt{2}; y = \sqrt[4]{8}$

Vậy hệ có nghiệm $(1 + 2\sqrt{2}; \sqrt[4]{8})$

Bài 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+4(x^2+5xy-6y^2)=\sqrt{3x^2-2xy-y^2}\\ 3x^2+10xy+34y^2=47\end{cases}$$

Nhận xét: *Rõ ràng phương trình một là đẳng cấp với x và y. Do đó, ta có thể đặt $x = ty$ rồi giải. Nhưng điểm chốt của bài toán là giải phương trình biến t đó. Bấm máy tính ta thu được: $t = 2; 3$ nên ta lại đưa về nhân tử $T = (t-2)(t-3)$. Điều này lại giống như bài toán số 4.*

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases}3x^2-2xy-y^2\ge 0\\ 4x^2+3xy-7y^2\ge 0\end{cases}$

Chuyển vế nhân liên hợp ở phương trình (1), ta được:

$$(x^2+5xy-6y^2)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+3xy-7y^2}+\sqrt{3x^2-2xy-y^2}}+4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=-6y\end{array}\right.$$

Với x = y thay vào (2), ta được:

$$x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;\ y=1\\ x=-1;\ y=-1\end{array}\right.$$

Với $x=-6y$ thay vào (2), ta được:

$$82y^2=47\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\sqrt{\frac{47}{82}};\ x=-6\sqrt{\frac{47}{82}}\\ y=-\sqrt{\frac{47}{82}};\ x=6\sqrt{\frac{47}{82}}\end{array}\right.$$

Kết luận:

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là: $(1;\ 1), (-1;\ -1), \left(-6\sqrt{\frac{47}{82}};\ \sqrt{\frac{47}{82}}\right), \left(6\sqrt{\frac{47}{82}};-\sqrt{\frac{47}{82}}\right)$.

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+1=4(x+y)^2+\sqrt{3}\sqrt{x+y}\ (1)\\ 2x-y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x+y\ge 0$

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+y+1}-\sqrt{3}\sqrt{x+y}=4(x+y)^2-1$$
$$\Leftrightarrow\frac{2x+2y-1}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{3}\sqrt{x+y}}+(2x+2y-1)(2x+2y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow(2x+2y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y+1}+\sqrt{3}\sqrt{x+y}}+2(x+y)+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y-1=0$$

Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases}2x+2y-1=0\\ 2x-y=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=-\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm (x; y) là $\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right)$.

Bài 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} \end{cases}$$

(Trích đề thi đại học khối B 2014)

Nhận xét: *Phương trình* (1) *nếu đổi biến thì ta cũng thấy ngay là phương trình bậc hai nên có thể dùng delta. Tuy nhiên khi cho $y = 1000$ ta bấm máy thì được $x = 1001$ nên dự đoán có nghiệm $x = y + 1$. Ngoài ra ta cũng thấy ngay: $y = 1$ là một nghiệm thỏa mãn của* (1)*. Do đó, ta có lời giải sau:*

Lời giải chi tiết:

Điều kiện $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ 4x-5y \geq 3 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất viết lại thành:

$$(1-y)\sqrt{x-y}-(1-y)+(x-y-1)=(x-y-1)\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-y)(x-y-1)}{\sqrt{x-y}+1}=(x-y-1)\frac{y-1}{\sqrt{y}+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=y+1 \end{array}\right.$$

TH1: $y = 1$ thay xuống (2) ta có:

$$9-3x=2\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-8} \leftrightarrow x=3\ (\text{TM})$$

TH2: $x = y + 1$ thay xuống (2) ta có:

$$2y^2+3y-2=2\sqrt{1-y}-\sqrt{1-y}$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+3y-2-\sqrt{1-y}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(y^2+y-1)+\left(y-\sqrt{1-y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2+y-1)\left(2+\frac{1}{y+\sqrt{1-y}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Kết luận: Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;\ y)=(3;\ 1),\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Ngày số 3

Phương pháp dùng hàm số trong giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình (tiết 1)

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x - 12y + 7 = 3x^2 - 6y^2 (1) \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{4-y} = x^3 + y^2 - 4x - 2y\ (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2016)

Nhận xét: *Rõ ràng phương trình đầu sau khi thu gọn ta thu được hằng đẳng thức đáng nhớ nên không có gì đáng phải suy nghĩ. Sau khi thế vào phương trình hai ta được:*

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

Dễ dàng nhẩm nghiệm bằng máy tính ta được hai nghiệm là $x = -1; x = 2$. Khi đó, điều đầu tiên nghĩ tới chính là nhân liên hợp và dĩ nhiên phương pháp này mang lại hiệu quả cho bài toán này.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4-y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

Từ (1) ta có:

$$(x-1)^3 = (y-2)^3 \Leftrightarrow x - 1 = y - 2 \Leftrightarrow y = x + 1\ (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{4-(x+1)} = x^3 + (x+1)^2 - 4x - 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1\ (-2 \leq x \leq 3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}\right) - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{x+2}.\sqrt{3-x} - 2\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3} = (x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2[(x+2)(3-x) - 4]}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{x+2}.\sqrt{3-x} + 2\right)} = (x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2 + x + 2)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{x+2}.\sqrt{3-x} + 2\right)} = (x+2)(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)\left(\underbrace{x + 2 + \frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{x+2}.\sqrt{3-x} + 2\right)}}_{>0}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = -1$$

$x = 2$ nên $y = 3$ thỏa mãn điều kiện.

$x = -1$ nên $y = 0$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(2; 3); (-1; 0)$.

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 1 = \ln\dfrac{y^2 + 4y + 5}{x^2 + 2x + 2} \quad (1) \\ 6\sqrt[3]{y} + 2(y+1)\sqrt{y+1} = 2x^2 - y + 7 \quad (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Phân tích:

Rõ ràng phương trình (1) *đã để cho chúng ta thấy hình thức của phương pháp hàm số. Các em chỉ cần nhớ công thức:*

$$ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\,a - ln\,b$$

Khi đó, công việc khó khăn lại nằm ở phương trình hai.

$$6\sqrt[3]{x-1} + 2x\sqrt{x+2} = 2x^2 - x + 8$$

Nhẩm nghiệm thì ta thấy ngay $x = 2$ là đáp án. Khi đó, ta có thể nhân liên hợp. Tuy nhiên, để xử lý biểu thức trong ngoặc cần phải chứng minh $x \geq 1$. Ngoài ra, ta còn có một lời giải thông minh hơn sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $x \geq -2$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x + 1 + \ln(x^2 + 2x + 2) = y + 2 + \ln(y^2 + 4y + 5)$$
$$\Leftrightarrow x + 1 + \ln((x+1)^2 + 1) = y + 2 + \ln((y+2)^2 + 1)\ (*)$$

Xét hàm: $f(t) = t + \ln(t^2 + 1)$; $t \in R$.

Ta có:

$$f'(t) = 1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(1+t)^2}{1+t^2} \geq 0 \forall t \in R$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = -1$

Nên f(t) đồng biến trên R theo (*) suy ra $f(t+1) = f(y+2) \Leftrightarrow x + 1 = y + 2 \Leftrightarrow x = y + 1$

Thay vào (2) ta được: $6\sqrt[3]{x-1} + 2x\sqrt{x+2} = 2x^2 - x + 8$ (3)

Xét $x \leq 1$ ta có: $6\sqrt[3]{x-1} + 2x\sqrt{x+2} \leq 2\sqrt{3} < 7 < 2x^2 - x + 8$ nên (3) không có nghiệm trên $(-\infty; 1]$

Vì $x > 1$ khi đó

$$6\sqrt[3]{x-1} + 2x\sqrt{x+2} \leq 2\big((x-1) + 1 + 1\big) + x.\frac{4 + (x+2)}{2} = \frac{x^2 + 10x + 4}{2}$$

Mà

$$\frac{x^2 + 10x + 4}{2} \leq 2x^2 - x + 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-2)^2 \geq 0$$

Do đó (3) xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm (2; 1) thỏa mãn điều kiện.

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x^3 + \sqrt{y-2} = y\sqrt{y-2} - 2x \quad (1) \\ (\sqrt{y-2} - 1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29 \quad (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Nhận xét:

Rõ ràng phương trình (1) là bậc ba đối với biến x và $\sqrt{y-2}$. Ta có thể viết lại:

$$8x^3 + 2x = y\sqrt{y-2} - \sqrt{y-2}$$

Ta coi 2x là biến vế trái thì ta có hàm số cần tìm:

$$f(t) = t^3 + t$$

Như vậy để có được điều cần làm ta phải có:

$$y\sqrt{y-2} - \sqrt{y-2} = \left(\sqrt{y-2}\right)^3 + \sqrt{y-2}$$

Đẳng thức này là đúng nên công việc của ta chỉ còn nằm ở phương trình (2). Khi đó, ta có:

$$(2x-1)\left(\sqrt{2x+1}\right) = 8x^3 - 52x^2 + 82x - 29$$

Rõ ràng phương trình trên có ngay nghiệm $2x - 1 = 0$ nên ta chỉ còn:

$$\sqrt{2x+1} = (4x^2 - 24x + 29)$$

Đến đây ta có nhiều hướng đi. Bình phương hay đổi biến để ra phương trình bậc bốn hay xét hàm số hay nhân liên hợp đều được.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases}2x+1\ge 0\\ y-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ y\ge 2\end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (2x)^3+(2x)=\left(\sqrt{y-2}\right)^3+\sqrt{y-2}$

Xét hàm $f(t)=t^3+t; f'(t)=3t^2+1>0\forall t$

Hàm f(t) liên tục và đồng biến trên R. suy ra $2x=\sqrt{y-2}$

Thế vào (2) ta có:

$$(2x-1)\left(\sqrt{2x+1}\right)=8x^3-52x^2+82x-29$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1}=(2x-1)(4x^2-24x+29)$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=0; x=\dfrac{1}{2}; y=3\\ \sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29=0\end{array}\right.$$

Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29=0$

Đặt $t=\sqrt{2x+1}; t\ge 0$ nên $2x=t^2-1$

Ta được: $t-(t^2-1)^2+12(t^2-1)-29=0$

$$\Leftrightarrow t^4-14t^2-t+42=0 \Leftrightarrow (t-2)(t+3)(t^2-t-7)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-3(\text{loại})\\ t=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}\ (\text{loại})\\ t=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.$$

Với $t=2$ ta có: $x=\dfrac{3}{2}; y=11.$

Với $t=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ ta có: $x=\dfrac{13+\sqrt{29}}{2}; y=\dfrac{103+13\sqrt{29}}{2}.$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(\dfrac{1}{2};3\right); \left(\dfrac{3}{2};11\right); \left(\dfrac{13+\sqrt{29}}{2}; \dfrac{103+13\sqrt{29}}{2}\right).$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3(4y^2+1)+x\sqrt{2y}=3\ (1)\\ 2y+\sqrt{4y^2+1}=x+\sqrt{x^2+1}\ \ (2)\end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Yên Mỹ 2016)

Nhận xét: *Bài toán này có thể thấy ngay phương trình (2) suy ra: $2y=x$. Khi đó, thế vào phương trình (1):*

$$x^5+x^3+x\sqrt{x}=3$$

Dễ thấy ngay $x=1$ là nghiệm và là nghiệm duy nhất vì hàm số có tính chất lẻ.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $y\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow x\left(x^2\left((4y^2+1)+\sqrt{2y}\right)\right)=3$ nên $x>0$

Xét hàm $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ trên $[0;+\infty)$

Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}>0$ nên f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$

Khi đó phương trình (2) $\Leftrightarrow f(2y)=f(x)\Leftrightarrow 2y=x$

Thay vào (1) ta có: $x^5+x^3+x\sqrt{x}=3$

Đặt $t=\sqrt{x}>0$ ta có: $g(t)=t^{10}+t^6+t^3; g'(t)=10t^9+6t^5+3t^2>0$ do $t>0$

Mà $g(1)=3$ nên $t=1$ hay $x=1$.

Với $x=1$ ta có $y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x,y) = \left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$ $(x;y\in R)$

(Trích đề thi đại học khối A năm 2010)

Nhận xét: *Điểm khó của bài toán nằm ở bước hai, giải phương trình:*

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0$$

Với phương trình này ta có thể thấy ngay nghiệm $x=1/2$ thế nhưng nếu nhân liên hợp hay đổi biến thì ta được phương trình khá phức tạp. Khi hai phương pháp đó không được, ta nghĩ tới hàm số, vấn đề của phương trình này là xét hàm số thì dấu của f' luôn không đổi.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện $x\le\frac{3}{4}; y\le\frac{5}{2}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $(4x^2+1).2x=(5-2y+1)\sqrt{5-2y}$ (1)

(1) Có dạng $f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)$ với $f(t)=(t^2+1)t$

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0\Rightarrow f$ đồng biến trên R

Do đó (1) $\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\ y=\dfrac{5-4x^2}{2}\end{cases}$

Thế vào phương trình 2 của hệ ta có:

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0\ (3)$$

$x=0; x=\frac{3}{4}$ không phải nghiệm của (3)

Xét hàm $g(x)=4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7$ trên khoảng $\left(0;\frac{3}{4}\right)$

$$g'(x)=8x-8x\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x(4x^2-3)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0$$

Suy ra g(x) đồng biến.

Mặt khác $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ do đó (3) có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$ ■.

Bài 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad x;y \text{ thuộc } R$$

(Trích đề thi đại học khối A năm 2012)

Nhận xét: *Hàm số ở phương trình (1) có nhiều cách biến đổi. Điểm đáng lưu ý là hàm số muốn đồng biến hay nghịch biến cần phải chặn tập giá trị của các biến. Do đó, ta lại quay về phương trình hai. Ở phương trình hai có thể dùng delta không âm để chặn khoảng giá trị hoặc đưa về bình phương như trong lời giải.*

Phân tích và hướng dẫn giải:

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1)\ (1)\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1\ (2)\end{cases}$$

Từ (2) suy ra $-1 \le x - \frac{1}{2} \le 1$ và $-1 \le y + \frac{1}{2} \le 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \le y + 1 \le \frac{3}{2}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t$ trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ta có:

$f'(t) = 3(t^2 - 4) < 0$ suy ra $f(t)$ nghịch biến.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$ (3)

Thay vào (2) ta được:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}$$

Thay vào (3) ta được nghiệm của hệ $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ■.

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y & (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases} \text{(x; y thuộc R)}$$

(Trích đề thi đại học khối A năm 2013)

Nhận xét: *Điểm chốt của bài toán là xét bậc của phương trình* (1) *để dự đoán được ngay dùng hàm số ở đó.*

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện $x \ge 1$. Từ (2) ta được $4y = (x + y - 1)^2 \Rightarrow y \ge 0$

Đặt $u = \sqrt[4]{x-1} \Rightarrow u \ge 0$. Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{u^4+2} + u = \sqrt{y^4+2} + y$ (3)

Xét $f(t) = \sqrt{t^4+2} + t$ với $t \ge 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}} + 1 > 0$ với mọi $t \ge 0$.

Do đó phương trình (3) tương đương $y = u$ nghĩa là $x = y^4 + 1$

Thay vào phương trình (2) ta được: $y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0$ (4)

Hàm $g(y) = y^7 + 2y^4 + y - 4$ có $g'(y) = 7y^6 + 8y^3 + 1 > 0$ với mọi $y \ge 0$.

Mà $g(1) = 0$ nên (4) có 2 nghiệm không âm là $y = 0$ hoặc $y = 1$.

Với $y = 0$ ta được nghiệm $(x; y) = (1; 0)$.

Với $y = 1$ ta được nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ đã cho là $(1; 0); (2; 1)$ ■.

Ngày số 6

Phương pháp dùng hàm số trong giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình(tiết 2)

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+2)=4x^2+2y^2-4x+4\\ x^2+y-12=\sqrt{x+y+3}.\sqrt[3]{x+4}\end{cases}$$

Nhận xét: *Phương trình có x;y cùng bậc ba là dạng quen thuộc để đưa về hàm số. Ta quan tâm tới bước hai của bài toán:*

$$x^2+x-14=\sqrt{2x+1}.\sqrt[3]{x+4}$$

Ta có thể nhẩm được ngay nghiệm $x=4$. Ở đây phương pháp nhân liên hợp sẽ là tối ưu, tuy nhiên vẫn cần những đánh giá khéo léo.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện $x+y+3\ge 0$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x-1)^3-(x-1)^2+(x-1)=(y+1)^3-(y+1)^2+(y+1)$

Xét hàm $f(t)=t^3-t^2+1\Rightarrow f'(t)=3t^2-2t+1>0\ \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R

$$\Rightarrow f(x-1)=f(y+1)\Leftrightarrow x-1=y+1\Leftrightarrow y=x-2$$

Thay $y=x-2$ vào (1) ta có:

$$x^2+x-14=\sqrt{2x+1}.\sqrt[3]{x+4}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-20=\sqrt{2x+1}.\sqrt[3]{x+4}-3\sqrt[3]{x+4}.+3\sqrt[3]{x+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+5)=\sqrt[3]{x+4}\left(\sqrt{2x+1}-3\right)+3\left(\sqrt[3]{x+4}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left[x+5-\frac{2\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{2x+1}+3}-\frac{3}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+2\sqrt[3]{x+4}+4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=0\\ x+5-\dfrac{2\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{2x+1}+3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+2\sqrt[3]{x+4}+4}=0\ (3)\end{array}\right.$$

Với $x-4=0\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=2$. Suy ra nghiệm của hệ là $(4;2)$

Ta sẽ chứng minh phương trình (3) vô nghiệm.

$$\sqrt[3]{(x+4)^2}+2\sqrt[3]{x+4}+4>4 \text{ với } x\ge-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{3}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+2\sqrt[3]{x+4}+4}<\frac{3}{4}\ (*)$$

$$\sqrt{2x+1}+3\ge 3\Rightarrow\frac{2\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{2x+1}+3}\le\frac{2\sqrt[3]{x+4}}{3}=2\frac{2\sqrt[3]{(x+4).1.1}}{3}\le\frac{2}{9}(x+4+1+1)$$

Ta lại có:

$$\frac{2}{9}(x+4+1+1)=\frac{2x+12}{9}\Rightarrow-\frac{2\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{2x+5}+3}\ge-\frac{2x+12}{9}\ (**)$$

Từ (*) và (**) ta có: $A>x+5-\dfrac{2x+12}{9}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{28x+105}{36}>0$ với mọi $x\ge-\dfrac{1}{2}$

Vậy nghiệm của hệ là $(4;2)$.

Bài 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1\\ x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6\end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lương Ngọc Quyến 2016)

Nhận xét: *Phương trình hai không thể làm gì cho bài toán được. Vì thế bắt đầu từ phương trình (1) ta thấy ngay, để cô lập x; y ở hai vế ta sẽ có:*

$$(1) \Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{(2y)^2+1} = y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\ \ (*)$$

Do đó, bài toán không còn nhiều điều để bàn cãi.

Lời giải chi tiết:

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right) = \sqrt{x^2+1}+x\ \ (1) \\ x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x} = 6\ \ (2) \end{cases}$

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left(2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\ \ (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}; t \in (0;+\infty)$ do $f'(t) > 0 \forall t \in (0;+\infty)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ (**)

Từ (*) và (**) nhận được $2y = \frac{1}{x}$ thế vào phương trình (2) trong hệ ta có:

$$x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right) + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x^3 + x + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6$$

Ta thấy hàm số $g(x) = x^3 + x + 2(x^2+1)\sqrt{x} - 6$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Lại có $g(1) = 0$ suy ra phương trình $g(x) = x^3 + x + 2(x^2+1)\sqrt{x} - 6 = 0$ có nghiệm duy nhất:

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y) = \left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 8x - 8y = 3x^2 - 3y^2\ \ (1) \\ (5x^2 - 5y + 10)\sqrt{y+7} + (2y+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13y^2 - 6x + 32\ \ (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2016)

Phân tích: *Bước một của bài toán rất dễ vì ta có thể nhìn thấy ngay. Thế nhưng sang bước hai ta gặp một chút rắc rối.*

$$(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13x^2 - 6x + 32$$

Rõ ràng, $x = 2$ là một nghiệm. Ta sẽ thử dùng phương pháp nhân liên hợp. Tuy nhiên điều kiện trong căn phải xử lý thật khéo léo:

$$\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2} - (x^2+5)$$
$$= (5x^2-5x+10)\left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{1}{5}\right) + (2x+6)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{1}{2}\right)$$

Phân tích này cũng dễ hiểu. Đề nghị các em tự suy ngẫm.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ y+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -7 \end{cases}$

Từ (1) ta có: $(x-1)^3 + 5(x-1) = (y-1)^3 + 5(y-1)$ (3)

Xét hàm $f(t) = t^3 + 5t$ trên R, $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0 \forall t \in R$ nên hàm số đồng biến trên R.

Từ (3): $f(x-1) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y$ (4)

Thay (4) vào (2) ta có:

$(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13x^2 - 6x + 32$ (5). Điều kiện: $x \geq -2$

$$\Leftrightarrow (5x^2 - 5y + 10)\sqrt{y+7} + (2y+6)\left(\sqrt{x+2} - 2\right) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}\right)=(x-2)(x^2+5)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-(x^2+5)\right)=0$$

$x=2$ ta có $y=2$ thỏa mãn điều kiện.

$$\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-(x^2+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-\left(\frac{5x^2-5x+10}{5}+\frac{2x+6}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (5x^2-5x+10)\left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{1}{5}\right)+(2x+6)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (2; 2).

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6 \quad (1) \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} \quad (2) \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Thị Minh Khai 2016)

Nhận xét: Ý tưởng bài toán này giống bài toán 2. Anh chỉ hướng dẫn cách giải.

Hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x \geq 0$

$x=0$ không thỏa mãn hệ.

$$x>0: (2) \Leftrightarrow 2y\left(1+\sqrt{4y^2+1}\right)=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)\ \forall t\in R$; có:

$$f'(t)=1+\frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}>0\ \forall t\in R$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên R.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x}$.

Thế vào (1): $x^3+x+2(x^2+1)\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow x^3+x-6=-2(x^2+1)\sqrt{x}$ (3)

Xét hàm số: $g(x)=x^3+x-6; h(x)=-2(x^2+1)\sqrt{x}$ trên $(0;+\infty)$

Ta thấy $g(x)$ đồng biến $h(x)$ nghịch biến và $g(1)=h(1)$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của (3).

Với $x=1$ ta có $y=\frac{1}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \quad (1) \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \quad (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hậu Lộc 2- 2016)

Nhận xét: *Bài này có trong cuốn chinh phục Hệ Phương Trình. Các em xem lại cách dẫn dắt vấn đề.*

Hướng dẫn giải:

Ta thấy $x=0$ không phải nghiệm của hệ, chia cả 2 vế của (1) cho x^3 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=(3-2y)\sqrt{3-2y}+\sqrt{3-2y}(*)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ luôn đồng biến trên R

$$(*)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}\ \ (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được: $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-3+2-\sqrt[3]{15-x}=0$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{1}{4-2\sqrt[3]{15+x}+\left(\sqrt[3]{15+x}\right)^2}\right)=0$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(7;\frac{111}{98}\right)$.

Bài 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+\dfrac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}\\ 3x^2-8x-3=4(x+1)\sqrt{y+1}\end{cases}x,y\in R$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường chuyên Vĩnh Phúc – 2016)

Nhận xét: *Bài toán này có điểm lừa là từ phương trình (2) ta có thể thế vào phương trình (1) nhưng điều đó chỉ làm cho phương trình trở nên phức tạp hơn. Xuất phát từ phương trình (1) ta sẽ đưa về hàm số như sau:*

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{(x+1)}}=(y+2)\sqrt{(y+1)}$$

Ở vế phải của biểu thức ta đưa về biến $t=\sqrt{y+1}$ thì hàm số đưa về là:

$$f(t)=t^3+t$$

Vì có t^3 nên ta có thể thấy ngay chọn luôn:

$$\frac{x^3}{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$$

Khi đó, điều dự đoán là đúng và ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases}x>-1;\\ y\ge -1\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{(x+1)}}=(y+2)\sqrt{(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}\right)^3+\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}=\left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}$$

Xét $f(t)=t^3+t$ trên R có: $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in R$ hay $f(t)$ đồng biến trên R.

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow \sqrt{y+1}=\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}$$

Từ đây suy ra $x>0$. Thay vào (2) ta được: $3x^2-8x-3=4x\sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sqrt{x+1}=x-1\\ 2\sqrt{x+1}=1-3x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{3} \\ 9x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \dfrac{5 - 2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$$

Ta có: $y = \dfrac{x^2}{x+1} - 1$

Với $x = 3 + 2\sqrt{3}$ ta có: $y = \dfrac{4 + 3\sqrt{3}}{2}$

Với $x = \dfrac{5 - 2\sqrt{13}}{9}$ (loại do $x > 0$)

Vậy hệ PT có nghiệm $\left(3 + 2\sqrt{3}; \dfrac{4 + 3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 15x = (y+1)\sqrt{2y-1} + 7 \quad (1) \\ 6(x-2)y - x + 26 = 6\sqrt[3]{16x + 24y - 28} \quad (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Phú Yên 2016)

Phân tích: *Dĩ nhiên phương trình hai không thể làm gì được. Quay về phương trình một ta thấy bậc của x và $\sqrt{2y-1}$ là như nhau. Ta có thể xét hàm số có rất nhiều cách để tiếp cận. Nhưng anh thường đặt căn kia bằng t. Rồi nắn theo bậc ba và hệ số bậc hai. Vấn đề nằm ở phương trình còn lại:*

$$12x^3 - 48x^2 + 62x - 4 = 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$$

Không thể đưa về phương pháp hệ nửa đối xứng nhưng ta nhẩm được nghiệm là $x = 2$. Ta có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp (các em thử đặt bút xem ra không)? Với bậc phức tạp thế này, anh thường nghĩ tới phương pháp dùng bất đẳng thức. Với $x = 2$ thì:

$$6x^2 - 10x + 4 = 8$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ba số: (do $x \geq 1$ nên $6x^2 - 10x + 4 > 0$).

$$(6x^2 - 10x + 4) + 8 + 8 \geq 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$$

Khi đó, ta kiểm tra:

$$12x^3 - 48x^2 + 62x - 4 - \left((6x^2 - 10x + 4) + 8 + 8\right) = 6(2x-1)(x-2)^2 \geq 0 \ (do\ x \geq 1)$$

Ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $y \geq \dfrac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 8x^3 - 24x^2 + 30x = (2y+2)\sqrt{2y-1} + 14$$

$$\Leftrightarrow [(2x-2)^2 + 3](2x-2) + 14 = \left[\left(\sqrt{2y-1}\right)^2 + 3\right]\sqrt{2y-1} + 14 \quad (3)$$

Xét hàm $f(t) = (t^2 + 3)t + 14$ trên R

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với mọi t

Suy ra f(t) đồng biến trên R

$$(3) \Leftrightarrow f(2x-2) = f\left(\sqrt{2y-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 2x^2 - 4x + \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$3(x-2)(4x^2 - 8x + 5) - x + 26 = 6\sqrt[3]{16x + 12(4x^2 - 8x + 5) - 28}$$

$$\Leftrightarrow 12x^3 - 48x^2 + 62x - 4 = 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 6(2x-1)(x-2)^2 + (6x^2 - 10x + 4) + 8 + 8 = 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4} \quad (*)$$

Với $x \geq 1$ ta có: $6(2x-1)(x-2)^2 \geq 0; 6x^2 - 10x + 4 \geq 0$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số không âm ta có:

$$6x^2 - 10x + 4 + 8 + 8 \geq \sqrt[3]{(6x^2 - 10x + 4).8.8} = 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$$

$$\Rightarrow 6(2x - 1)(x - 2)^2 + (6x^2 - 10x + 4) + 8 + 8 \geq 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x \geq 1 \\ (2x - 1)(x - 2)^2 = 0 \text{ hay } x = 2 \\ 6x^2 - 10x + 4 = 8 \end{cases}$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Sau đây là một số bài luyện tập:

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + x^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$

2. (KA-2010) $\begin{cases} \left(4x^2+1\right)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 4x\sqrt{y+1} + 8x = \left(4x^2 - 4x - 3\right)\sqrt{x+1} \end{cases}$

4. $\begin{cases} (53-5x)\sqrt{10-x} + (5y-48)\sqrt{9-y} = 0 \\ \sqrt{2x-y+6} + x^2 = \sqrt{-2x+y+11} + 2x + 66 \end{cases}$

5. **(Ngô Sĩ Liên lần 3)** $\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1 \\ 3x^2 + y + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{4-5y} \end{cases}$

Kết quả $(x,y) = (0;0);(1;-1)$

6. $\begin{cases} \sqrt{(x+1)y + (x-y+1)\sqrt{y}} + \sqrt{x+1} = y + \sqrt{y} \\ \sqrt{2x+y-9} - \sqrt{2x-y+2} = \dfrac{5}{4x-2y-9} \end{cases}$

Ngày số 7

Dùng bất đẳng thức giải hệ phương trình

Bình luận: *Ở phần này, anh chỉ nêu ra các bài toán và lời giải chi tiết cho từng bài. Bởi vì phần sử dụng bất đẳng thức trong giải hệ phương trình là một phần khó. Và cũng chính là phần anh dự đoán xuất hiện trong đề thi nên anh sẽ giới thiệu lại cho các em ở buổi học số 28.*

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên ĐH Sư Phạm 2016)

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} 3x^3+2x^2+2\ge 0\\ -3x^3+x^2+2x-1\ge 0\end{cases}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{1.(3x^3+2x^2+2)}\le \frac{1+3x^3+2x^2+2}{2}$$

$$\sqrt{(-3x^3+x^2+2x-1).1}\le \frac{1-3x^3+x^2+2x-1}{2}$$

Suy ra:

$$2x^2+2x+2=\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\le \frac{3x^2+2x+3}{2}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2\le 0 \Leftrightarrow x=-1$$

Thử lại $x=-1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1\}$.

Bài 2: Giải bất phương trình:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)\ge \frac{4-8x+9x^2}{3x+2\sqrt{2x-1}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Hưng Đạo-Dak Nông 2016)

Lời giải chi tiết:

Điều kiện $x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x}\ge \frac{9x^2-4(2x-1)}{3x+2\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)}{x}\ge 3x-2\sqrt{2x-1}$$

Vì $x\ge 1$ bất phương trình tương đương $(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)\ge 3x^2-2x\sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(\sqrt{x-1}-1\right)\le 0\quad (1)$$

Ta có nhận xét sau: $\begin{cases}\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)^2\ge 0\\ \left(x-\sqrt{2x-1}\right)^2\ge 0\\ 2\left(\sqrt{x-1}-1\right)\ge 0\end{cases}$ với mọi $x\ge 1$.

Do đó $VT(1)\ge 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $VT=0\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=\sqrt{x-1}\\ x=\sqrt{2x-1}\\ x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{1\}$ ■.

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \dfrac{32}{\left(2\sqrt{y-3}+3\right)^2} = 5 \\ \sqrt{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+\sqrt{y-3}+1)} + \sqrt{(\sqrt{y-3}+1)(\sqrt{x}+2\sqrt{y-3}+2)} = \sqrt{6\left(x+\left(\sqrt{y-3}+1\right)^2\right)} \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đakmil 2016)

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $x \ge 0; y \ge 3$

Đặt $\left(\sqrt{y-3}+1\right) = b; \left(\sqrt{x}\right) = a$

Phương trình thứ 2 trở thành:

$$\sqrt{a(2a+b)} + \sqrt{b(a+2b)} = \sqrt{6(a^2+b^2)} \ (*)$$

Ta có: $VT_* \le \sqrt{(a+b)(2a+b+2b+a)} = \sqrt{3}(a+b) \le \sqrt{6(a^2+b^2)} = VP_*$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y-3}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y-3} = 1$

Thế vào phương trình một của hệ ta có:

$$2\sqrt{x} + \frac{32}{1.\left(2\sqrt{y-3}+3\right)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + \frac{32}{(\sqrt{x}-\sqrt{y-3})\left(2\sqrt{y-3}+3\right)^2} = 5 \ (**)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y-3}\right) + \frac{2\sqrt{y-3}+3}{2} + \frac{2\sqrt{y-3}+3}{2} + \frac{32}{(\sqrt{x}-\sqrt{y-3})\left(2\sqrt{y-3}+3\right)^2} \ge 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{32}{(\sqrt{x}-\sqrt{y-3})\left(2\sqrt{y-3}+3\right)^2} \ge 5 \Leftrightarrow VT_{**} \ge VP_{**}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y-3}\right) = \frac{2\sqrt{y-3}+3}{2} = \frac{32}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y-3})\left(2\sqrt{y-3}+3\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{3}{2} \\ \sqrt{y-3} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{13}{4} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{9}{4}; \dfrac{13}{4}\right)$ ■.

Bài 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{(\tan x - \tan y)(1 - \tan x.\tan y)}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)} \ (1) \\ \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt{5y+4} = 2x + 3 + y(x-1) \ (2) \end{cases} \text{ với } x; y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Bắc Ninh 2016)

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x - y = \frac{(\tan x - \tan y)(1 - \tan x.\tan y)}{\dfrac{1}{\cos^2 x}.\dfrac{1}{\cos^2 y}}$$

$$\Leftrightarrow x - y = (\sin x \cos y - \sin y \cos x)(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$\Leftrightarrow x - y = \sin(x-y)\cos(x+y) \ (*)$$

Trường hợp 1: $\frac{\pi}{2} > x > y \geq 0$ nên $\frac{\pi}{2} > x - y > 0; \sin(x-y) > 0$.

Từ (*) suy ra $\cos(x+y) > 0$ mà $\cos(x+y) \leq 1$ nên từ (*) suy ra $x - y \leq \sin(x-y)$ (**)

Xét $f(t) = t - \sin t$ với $0 < t < \frac{\pi}{2}; f'(t) = 1 - \cos t > 0 \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra f đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $f(t) > f(0) = 0 \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $t > \sin t \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Thay $t = x - y$ ta có: $x - y > \sin(x-y)$ mâu thuẫn với (**)

Trường hợp 2: $\frac{\pi}{2} > y > x \geq 0$ nên $\frac{\pi}{2} > y - x > 0; \sin(y-x) > 0$

$(*) \Leftrightarrow y - x = \sin(y-x)\cos(x+y)$

Tương tự trường hợp 1, Trường hợp này cũng dẫn đến mâu thuẫn

Trường hợp 3: $0 \leq x = y < \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn (1)

Thay vào (2) ta được:

$$\sqrt[3]{7x+1} + \sqrt{5x+4} = 2x + 3 + x(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt{5x+4} = x^2 + x + 3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1} - 1 + \sqrt{5x+4} - 2 = x^2 + x$$
$$\Leftrightarrow \frac{(7x+1)-1}{\sqrt[3]{(7x+1)^2} + \sqrt[3]{7x+1} + 1} + \frac{(5x+4)-4}{\sqrt{5x+4}+2} = x(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x\left[\frac{7}{\sqrt[3]{(7x+1)^2} + \sqrt[3]{7x+1} + 1} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+2} - x - 1\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = \frac{7}{\sqrt[3]{(7x+1)^2} + \sqrt[3]{7x+1} + 1} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+2} - x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy g(x) là hàm nghịch biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên có nhiều nhất một nghiệm.

Mà $g(1) = 0$ nên g(x) có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

$x = 0$ nên $y = 0$ thỏa mãn.

$x = 1$ nên $y = 1$ thỏa mãn.

Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là (0; 0); (1; 1)■.

Bài 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x - 6y + 5} + 2\sqrt{6y - 3x - 1} = \dfrac{6}{\sqrt{x - 2y + 3}} \quad (1) \\ x^3 - 2y + \sqrt{4y^2 - x} + \sqrt{x^2 + 2y + 3} - (x^2 + 2)(1 - 2y - x^2) = 2 \quad (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Khuyến – 2016)

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $\begin{cases} 3x - 6y + 5 \geq 0 \\ 6y - 3x - 1 \geq 0 \\ 4y^2 - x \geq 0 \\ x^2 + 2y + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x - 2y \leq \frac{1}{3} \\ 4y^2 - x \geq 0 \\ x^2 + 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{5 - 3(2y - 3x)} + 2\sqrt{3(2y - x) - 1} = \frac{6}{\sqrt{3 - (2y - x)}}$$

Đặt $t = \sqrt{2y - x}; t \geq 0; t^2 = 2y - x$

(1) Trở thành:

$$\sqrt{5 - 3t^2} + 2\sqrt{3t^2 - 1} = \frac{6}{\sqrt{3 - t^2}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{5 - 3t^2}.\sqrt{3 - t^2} + 2\sqrt{3 - t^2}.\sqrt{3t^2 - 1} = 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{5-3t^2}.\sqrt{3-t^2} \le \frac{8-4t^2}{2} = 4-2t^2$$

$$2\sqrt{3-t^2}.\sqrt{3t^2-1} \le 2t^2+2$$

Suy ra $\sqrt{5-3t^2}.\sqrt{3-t^2} + 2\sqrt{3-t^2}.\sqrt{3t^2-1} \le 6$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sqrt{5-3t^2} = \sqrt{5-3t^2} \\ \sqrt{5-3t^2} = \sqrt{5-3t^2} \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2t^2 = 3-t^2 \\ 3t^2-1 = 3-t^2 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 1 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t = 1$ ta có: $2y - x = 1$ thay vào (2) ta có:

$$x^3 - x + \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+x+4} + (x^2+2)(x^2+x) = 3$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1) + \left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right) - \left(2-\sqrt{x^2+x+4}\right) + (x^2+2)(x^2+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1) + \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x+1}+1} - \frac{-(x^2+x)}{2+\sqrt{x^2+x+4}} + (x^2+2)(x^2+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1) + \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+1} + \frac{x(1+x)}{2+\sqrt{x^2+x+4}} + (x^2+2)x(1+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)\left[x-1+\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}} + x^2+2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}} + x^2+x+1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x+1) = 0 \quad (3) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} + \dfrac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}} + x^2+x+1 = 0 \quad (4) \end{array}\right.$$

Vì $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x thuộc R nên phương trình (4)vô nghiệm.

Giải (3) ta được $x = 0; x = -1$

Với $x = 0$ ta có $y = \frac{1}{2}$ nhận.

Với $x = -1$ ta có $y = 0$ nhận.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(0;\frac{1}{2}\right); (-1;0)$ ■.

Bài 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{2} + \dfrac{3y}{x+y} = \sqrt{x} + 4\sqrt{y} \quad (1) \\ (x^2+y^2)(x+1) = 4 + 2xy(x-1) \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải chi tiết:

Điều kiện: $x \ge 0; y \ge 0$ và $x + y \ne 0$ (*).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy = 4$

$$\Leftrightarrow x(x-y)^2 + (x+y)^2 = 4$$

Từ điều kiện (*) suy ra $x(x-y)^2 \ge 0; x+y > 0$

Do đó $(x+y)^2 \le 4 \Rightarrow 0 < x+y \le 2$

Từ đó suy ra:

$$\frac{7}{2} + \frac{3y}{x+y} \ge \frac{7+3y}{2} \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Cauchy với 2 số không âm ta có:

$$\sqrt{x} \le \frac{x+1}{2}; 4\sqrt{y} \le 2(y+1)$$

Cộng theo vế 2 BĐT trên ta có:

$$\sqrt{x} + 4\sqrt{y} \le \frac{x+1}{2} + 2(y+1)$$

$$=\frac{(x+y)+5+3y}{2}\le\frac{7+3y}{2}\ (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\sqrt{x}+4\sqrt{y}\le\frac{7}{2}+\frac{3y}{x+y}$$

Kết hợp (1) thì đẳng thức phải xảy ra tức là:

$$\begin{cases}x+y=2\\x=1\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\ (\text{thỏa mãn }(*))$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ ■.

Sau đây là một số bài luyện tập:

Bài toán: Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases}\sqrt{12-2x^2}=4+y\\2x+\sqrt{12-2x^2}+\sqrt{1-2y-y^2}-y=9\end{cases}$

2. $\begin{cases}x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12\\x^3-8x-1=2\sqrt{y-2}\end{cases}$ **; Kết quả** $(x,y)=(3;3)$

(Trích đề thi Đại học khối A năm 2014)

3. $\begin{cases}x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2}\\6x-y-11+\sqrt{10-4x-2x^2}=0\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3(x+y)\\\sqrt{x+2y+1}+2\sqrt[3]{12x+7y+8}=2xy+5\end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Huệ - Ninh Bình 2016)

5. $\begin{cases}y\left(\sqrt{x+6}-y\right)=6-\sqrt{6(y^2-x)}\\2+x+\sqrt{x(y^2-10)+3}=\sqrt[3]{x^2(y^2-1)+16x+5}\end{cases}$ **; Kết quả** $(x,y)=\left(1;\sqrt{7}\right);(3;3)$

Ngày số 8

Ôn tập tổng quan giải phương trình; hệ phương trình và bất phương trình

Bài 1: Giải bất phương trình:

$$(5x^2-5x+10)\sqrt{x+7}+(2x+6)\sqrt{x+2}\ge x^3+13x^2-6x+32$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đoàn Thị Điểm –Khánh Hòa 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x\ge -2$

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$(5x^2-5x+10)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+(2x+6)\left(\sqrt{x+2}-2\right)-x^3+2x^2-5x+10\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5\right)\ge 0\ (*)$$

Với mọi $x\ge -2$ ta có $\sqrt{x+2}+2\ge 2$ nên:

$$\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}\le\frac{2x+6}{2}=x+3$$

Và $\sqrt{x+7}+3\ge\sqrt{5}+3>5$ nên:

$$\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}<\frac{5x^2-5x+10}{5}=x^2-x+2$$

Do đó, ta có:

$$\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5<(x^2-x+2)+(x+3)-x^2-5=0$$

$$(*)\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;2]$.

Bài 2: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Ischool-Nha Trang 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x\ge\frac{6}{7}$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{7x+7}\\ v=\sqrt{7x-6}\end{cases}$ $(u;v\ge 0)$, khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

$$u+v+2uv<182-(u^2+v^2)$$
$$\Leftrightarrow (u+v)^2+(u+v)-182<0$$
$$\Leftrightarrow -14<u+v<13$$

Vì $u;v\ge 0$ nên $0\le u+v<13$

Khi đó $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}<13\Leftrightarrow\sqrt{49x^2+7x-42}<84-7x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}49x^2+7x-42\ge 0\\ 84-7x>0\\ 49x^2+7x-42<7056-1176x+49x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge\frac{6}{7}\end{array}\right.\\ x<12\\ x<6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ \frac{6}{7}\le x<6\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{6}{7};6\right)$.

Bài 3: Giải bất phương trình:

$$\frac{x(x-1)^2\left(\sqrt{2x+3}-1\right)}{(x+1)(2x+3)} \geq 2$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Trung Cấp Nghề-Ninh Hòa 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > -\dfrac{3}{2} \\ x \neq -1 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$\frac{x(x-1)^2\left(\sqrt{2x+3}-1\right)}{\left(\sqrt{2x+3}+1\right)\left(\sqrt{2x+3}-1\right)(2x+3)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2}{\left(\sqrt{2x+3}+1\right)(2x+3)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^2 \geq \left(\sqrt{2x+3}+1\right)(2x+3) \ (*)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x \geq (2x+3)\sqrt{2x+3} + 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) \geq (2x+3)\sqrt{2x+3} + x + 3 > 0$$

$$\Rightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow [(x-1)+1](x-1)^2 \geq \left(\sqrt{2x+3}+1\right)\left(\sqrt{2x+3}\right)^2$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)t^2;\ t > 1$

$f'(t) = 3t^2 + 2t > 0, \forall t > 1$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;\ +\infty)$

Khi đó, $f(x-1) \geq f\left(\sqrt{2x+3}\right) \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 4x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 + \sqrt{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[2+\sqrt{6};\ +\infty\right)$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2(4x^2+y^2)} + \sqrt{5x^2+2xy+2y^2} = 3x - 2y \\ \sqrt{y^2+x+6} = 2(x+y) + 1 + 5\sqrt{x+1} \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lê Quý Đôn 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ y^2 + x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1 \ (*)$

Biến đổi vế trái phương trình thứ nhất:

$\sqrt{(2x+y)^2 + (2x-y)^2} + \sqrt{(2x+y)^2 + (x-y)^2} \geq |2x-y| + |x-y| \geq |3x-2y| \geq 3x - 2y$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ (2x-y)(x-y) \geq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = -y \geq 0$

Thay vào (2) ta được phương trình $\sqrt{4x^2+x+6} = -2x + 1 + 5\sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 5(x+1)} = -(2x-1) + 5\sqrt{x+1} \quad (3)$$

Với $x \geq 0$, chia hai vế của phương trình (3) cho $\sqrt{x+1}$ ta được phương trình tương đương :

$$\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 + 5} = -\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} + 5$$

Đặt $t = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$, phương trình được viết thành:

$$\sqrt{t^2+5} = -t + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 5 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

Giải phương trình:

$$\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4(x+1) = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 8x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Khi $x = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y = -2 - \sqrt{7}$.

Nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}; -2 - \sqrt{7}\right)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{y+2} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x \\ \sqrt{(y+4)(2y+12)} - 8 = x^2 + y - \sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Hưng Đạo 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện $\begin{cases} y \geq -2 \\ x^2 \geq y \end{cases}$

Từ phương trình thứ (2) ta có:

$$x^2 + 8 + y - \sqrt{(y+4)(2y+12)} - \sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 8 + y) - 2\sqrt{(y+4)(2y+12)} - 2\sqrt{(x^2+2)(x^2-y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y+8} - \sqrt{y+6}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-y}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2y+8} = \sqrt{y+6} \\ \sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2-y} \end{cases} \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \sqrt{y+2} = 0$$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$2\sqrt{y+2} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x \Rightarrow \sqrt{y+2} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt[3]{y-2}\right)^3 + 4} + \sqrt[3]{y-2} = \sqrt{x^3+4} + x \ (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+4}$ trên $\mathbb{R}$

$$f'(t) = 1 + \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+4}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Do đó, phương trình $(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{y-2}\right) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{y-2} = x$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{y+2} = 0 \\ \sqrt[3]{y-2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{4} \\ y = -2 \end{cases}$ (t/m)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(-\sqrt[3]{4}; -2\right)$.

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2\sqrt{x^2-2x+4} = y + 1 - 2\sqrt{y^2+3} \\ \sqrt{4x^2+x+6} - 5\sqrt{y+2} = \sqrt{xy-2y-x+2} - 1 - 2y - |x-2| \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thuận Thành I-Bắc Ninh 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện $\begin{cases} y \geq -2 \\ (x-2)(y-1) \geq 0 \end{cases}$

Phương trình (1) của hệ tương đương với $(x-1) - 2\sqrt{(x-1)^2+3} = y - 2\sqrt{y^2+3}$

Xét hàm số $f(t) = t - 2\sqrt{t^2+3}$ trên $\mathbb{R}$

$$f'(t) = 1 - \frac{2t}{\sqrt{t^2+3}} = \frac{\sqrt{t^2+3} - 2t}{\sqrt{t^2+3}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+3} = 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 3t^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+3} < 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ 3t^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1$$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t < 1$$

Từ điều kiện ta có:

- Nếu $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ thì (1) $\Leftrightarrow f(x-1) = f(y) \Leftrightarrow x - 1 = y$
- Nếu $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$ thì (1) $\Leftrightarrow f(x-1) = f(y) \Leftrightarrow x - 1 = y$

Thế $y = x - 1$ vào phương trình (2) ta có:

$$\sqrt{4x^2+x+6} - (1-2x) = 5\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6}+1-2x} = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ \sqrt{4x^2+x+6}+1-2x = \sqrt{x+1} \ \ (4) \end{array}\right.$$

Kết hợp (3) và (4) ta được $2\sqrt{x+1} = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 8x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$$

Thử lại ta có: phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (-1;\ -2)$ và $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Bài 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3y} + \sqrt{7x+2y} = \sqrt{5y-x} + 3\sqrt{y} \\ 2x^2 - y^2 + \sqrt{x^4-y^2+4} = -2 + 5\sqrt{xy} \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x+3y \geq 0 \\ 7x+2y \geq 0 \\ 5y - x \geq 0 \\ x^4 - y^2 + 4 \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

Nếu $y = 0$ thì từ phương trình thứ nhất củ hệ ta có $x = 0$ (không thỏa mãn phương trình (2)).

Nếu $y > 0$ thì chia 2 vế của phương trình thứ nhất cho $\sqrt{y}$ ta được:

$$\sqrt{\frac{x}{y}+3} + \sqrt{\frac{7x}{y}+2} = \sqrt{5-\frac{x}{y}} + 3 \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{t+3} + \sqrt{7t+2} = \sqrt{5-t} + 3 \quad (2)$$

Vế trái của (2) là hàm đồng biến theo t, vế phải của (2) là hàm nghịch biến theo t nên phương trình (2) nếu có nghiệm thì có nghiệm duy nhất.

Mà $t = 1$ là một nghiệm ủa phương trình (2).Với t=1 ta có:

$$\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y > 0$$

Thế $x = y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2 + 2 + \sqrt{x^4 - y^2 + 4} = 5x$$

Chia cả hai vế cho $x > 0$ rồi đặt $t = x + \frac{2}{x}$ ta có phương trình:

$$\sqrt{t^2 - 5} = 5 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 5 \\ -10t = -30 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$$

Với $t = 3$ ta có $x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$ (thỏa mãn)

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phong trình là $(x; y) = (1; 1), (2; 2)$.

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 15x = (y + 1)\sqrt{2y - 1} + 7 \\ 6(x - 2)y - x + 26 = 6\sqrt[3]{16x + 24y - 28} \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Phú Yên -2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện $y \ge \frac{1}{2}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$8x^3 - 24x^2 + 30x = (2y + 2)\sqrt{2y - 1} + 14$$

$$\Leftrightarrow [(2x - 2)^2 + 3](2x - 2) + 14 = \left[\left(\sqrt{2y - 1}\right)^2 + 3\right]\sqrt{2y - 1} + 14 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = (t^2 + 3)t + 14$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(2x - 2) = f\left(\sqrt{2y - 1}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 = \sqrt{2y - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ y = 2x^2 - 4x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3(x - 2)(4x^2 - 8x + 5) - x + 26 = 6\sqrt[3]{16x - 12(4x^2 - 8x + 5) - 28}$$

$$\Leftrightarrow 12x^3 - 48x^2 + 62x - 4 = 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 6(2x - 1)(x - 2)^2 + (6x^2 - 10x + 4) + 8 + 8 = 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4} \quad (2)$$

Với $x \ge 1$ ta có $6(2x - 1)(x - 2)^2 \ge 0;\ 6x^2 - 10x + 4 \ge 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số không âm $6x^2 - 10x + 4; 8; 8$ ta có:

$$(6x^2 - 10x + 4) + 8 + 8 \ge 3\sqrt[3]{(6x^2 - 10x + 4).8.8} = 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$$

Suy ra $6(2x - 1)(x - 2)^2 + (6x^2 - 10x + 4) + 8 + 8 \ge 12\sqrt[3]{6x^2 - 10x + 4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (2x - 1)(x - 2)^2 = 0 \\ 6x^2 - 10x + 4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Khi đó ta có: $(2) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$ (tm)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) + (x + y)(3xy + x - 1) = -2 \\ 2(x^2 + y^2) + 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trung Giã – 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)+(x+y)(3xy+x-1)=-2\\ 2(x^2+y^2)+3x-y-2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)(2xy-x+y)=-4\\ 2(x^2+y^2)+3x-y-2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)[(x+y)^2-(x-y)^2-2(x-y)]=-8\\ (x-y)^2+2(x-y)=2-(x-y)-(x-y)^2\end{cases}$$
$$\Rightarrow (x+y)[2(x+y)^2+x+y-2]+8=0$$
$$\Leftrightarrow x+y=-2 \Rightarrow x-y=0 \text{ hoặc } x-y=-2$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(-1;-1);(-2;0)$

Bài 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\left(x\sqrt{y+2}-\sqrt{y+2}\right)-x-2y=\frac{5}{2}\\ 2(x-2)\sqrt{x+2}+y=-\frac{7}{4}\end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Thái Bình 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -2\\ y\ge -2\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$4(x-1)\sqrt{y+2}-2(x-1)-4(y+2)+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-4(x-1)\sqrt{y+2}+4(y+2)=(x-1)^2-2(x-1)+1$$
$$\Leftrightarrow \left(x-1-2\sqrt{y+2}\right)^2=(x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1-2\sqrt{y+2}=2-x\\ x-1-2\sqrt{y+2}=x-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sqrt{y+2}=2x-3\\ 2\sqrt{y+2}=1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{7}{4} \text{ hoặc } \begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ 4(y+2)=(2x-3)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{7}{4} \text{ hoặc } \begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ y=\frac{4x^2+12x+1}{4}\end{cases}$$

Với $y=-\frac{7}{4}$, phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$2(x-2)\sqrt{x+2}-\frac{7}{4}=-\frac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Với $\begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ y=\frac{4x^2+12x+1}{4}\end{cases}$, thế $y=\frac{4x^2+12x+1}{4}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2(x-2)\sqrt{x+2}+2(x-2)\sqrt{x+2}=-\frac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left(2\sqrt{x+2}+x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

(vì $2\sqrt{x+2}+x-1>0, \forall x\ge\frac{3}{2} \Rightarrow y=-\frac{7}{4}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(2;-\frac{7}{4}\right);\left(-2;-\frac{7}{4}\right)$ ■.

Bài 11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4y^2+4y} = \sqrt{x^3-2} + x + 4y + 2 \\ 2(2y^3+x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lý Tự Trọng-Nam Định 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện $x \ge \sqrt[3]{2}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$2(x+1)^3 + 3y(x+1)^2 + 4y^3 = 0 \ \ (1)$$

Với $y = 0 \Rightarrow x = -1$ không là nghiệm của hệ phương trình

Chia cả hai vế của phương trình (1) cho y^3 ta được:

$$2\left(\frac{x+1}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x+1}{y}\right)^2 + 4 = 0$$

Đặt $a = \dfrac{x+1}{y}$ phương trình trở thành $2a^3 + 3a^2 + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (a+2)(2a^2-a+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ 2a^2 - a + 2\ (VN) \end{array}\right.$$

Với $a = 2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{y} = 2 \Leftrightarrow 2y = -x - 1$

Thế $2y = -x - 1$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3-2} - (2x-1) + (x-1) - \sqrt[3]{x^2-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 2 - (2x-1)^2}{\sqrt{x^3-2} + (2x-1)} + \frac{(x-1)^3 - (x^2-1)}{(x-1)^2 + (x-1)\sqrt[3]{x^2-1} + \left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^3-2} + (2x-1)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)^2 + (x-1)\sqrt[3]{x^2-1} + \left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\left(\text{vì } \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^3-2} + (2x-1)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)^2 + (x-1)\sqrt[3]{x^2-1} + \left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2} > 0, \forall x \ge \sqrt[3]{2}\right)$$

Với $x = 3 \Rightarrow y = -2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; -2)$■.

Sau đây là một số bài toán luyện tập:

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x^3-3x+2=y^3+3y^2 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x^3-3x^2+y+2}=x^2-3y \end{cases}$; Kết quả $(x,y)=(3;2)$

2. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+6y^2+8=3x+\dfrac{3}{x}+y^4+8y \\ 2x^3+3y+4=3x^2+6\sqrt{y} \end{cases}$; Kết quả $(x,y)=(1;1)$

3. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$; Kết quả $(x,y)=\left(\dfrac{9+\sqrt{73}}{36};\dfrac{9+\sqrt{73}}{36}\right),\left(\dfrac{9-\sqrt{73}}{36};\dfrac{9-\sqrt{73}}{36}\right)$

4. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{x}-8x}+2\sqrt{1-2x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{4xy} \\ 4x=\sqrt{2y+3}-\sqrt{y} \end{cases}$; Kết quả $(x,y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4};\dfrac{1}{2}\right)$

5. $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$; Kết quả $(x,y)=(0;0);(1;1)$

6. $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=x^2-8x+18$; Kết quả $x=2$

7. $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12}=x^2+6x-1$; Kết quả $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=7 \end{array}\right.$

8. $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$; Kết quả $x=-1$

9. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$; Kết quả $x=\dfrac{1}{7}$

Chuyên đề II: 11 ngày luyện thi hình phẳng tọa độ Oxy

Ngày số 1

Tổng quan kiến thức hình tọa độ

Tổng hợp công thức, lý thuyết hình học giải tích

1. Phương trình đường thẳng

- Vector chỉ phương (thường kí hiệu là $\vec{u}$).

  Khi có $A(x_0;y_0)$ và $\vec{u}=(a;b) \xrightarrow{\text{một điểm và vector chỉ phương}} \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

- Vector pháp tuyến (thường kí hiệu là $\vec{n}$).

  Khi có $A(x_0;y_0)$ và $\vec{n}=(a;b) \xrightarrow{\text{một điểm và vector pháp tuyến}} a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

- Khi có $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B) \xrightarrow{\text{hai điểm}} \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$.
- Khi có $A(a;0)$ và $B(0;b) \xrightarrow{\text{hai điểm trên Ox và Oy}} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.
- Đường thẳng song song hoặc trùng với Oy có phương trình là $ax+c=0$ $(a \neq 0)$.
- Đường thẳng song song hoặc trùng với Ox có phương trình là $by+c=0$ $(b \neq 0)$.
- Đường thẳng đi qua gốc toạ độ $O(0;0)$ có phương trình là $ax+by=0$ $(a^2+b^2 \neq 0)$.
- Hai đường thẳng vuông góc nhau $\begin{cases} (d'): ax+by+c=0 \\ (d) \perp (d') \end{cases} \to (d): bx-ay+m=0$
- Hai đường thẳng song song nhau $\begin{cases} (d'): ax+by+c=0 \\ (d) \parallel (d') \end{cases} \to (d): ax+by+m=0$ $(m \neq c)$
- Khi có hệ số góc $k \xrightarrow{\text{hệ số góc}} y=kx+b$.
- Khi có $A(x_0;y_0)$ và hệ số góc $k \xrightarrow{\text{một điểm và hệ số góc}} y-y_0=k(x-x_0)$.
- Đường thẳng (d) có phương trình $(d): y=hx+q$ vuông góc với đường thẳng (d') có phương trình $(d'): y=h'x+q'$ khi và chỉ khi $h.h'=-1$, hay $d \perp d' \Leftrightarrow h.h'=-1$.
- Đường thẳng (d) có phương trình $(d): y=hx+q$ song song với đường thẳng (d') có phương trình $(d'): y=h'x+q'$ khi $h=h'$, hay $d \parallel d' \Rightarrow h=h'$.

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp của đề thi, ta chủ yếu quy về dạng chính là viết phương trình đường thẳng khi biết một điểm thuộc đường và vector pháp tuyến của đường thẳng ấy.

Cách chuyển đổi giữa vector chỉ phương và vector pháp tuyến: Nếu đường thẳng (d) nhận $\vec{u}=(a;b)$ là vector chỉ phương thì sẽ nhận $\vec{n}=(b;-a)$ là vector pháp tuyến và ngược lại.

2. Khoảng cách và góc

- Khoảng cách từ $A(x_0;y_0)$ đến đường thẳng (Δ) có phương trình $(\Delta): ax+by+c=0$ được tính bởi công thức $d(A;\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- M,N nằm cùng phía so với đường thẳng (Δ) có phương trình $(\Delta): ax+by+c=0$ $\Leftrightarrow(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.
- M,N nằm khác phía so với đường thẳng (Δ) có phương trình $(\Delta): ax+by+c=0$ $\Leftrightarrow(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.
- Cho hai đường thẳng $(d),(d')$ có phương trình $(d): ax+by+c=0, (d'): a'x+b'y+c'=0$ thì
    - Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi (d) và (d') là
    $$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\Leftrightarrow\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$
    - Góc xen giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn và
    $$\cos(d;d')=\left|\cos\left(\vec{n};\vec{n'}\right)\right|=\frac{|aa'+bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$
    - Điều kiện vuông góc: $d\perp d'\Leftrightarrow aa'+bb'=0$.

Bài toán xác định đường thẳng đi qua 1 điểm và hợp với một đường thẳng đã cho một góc α cho trước là xác định được!

3. Đường tròn

- Đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình của một đường tròn với tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
- Điều kiện tiếp xúc: Cho đường thẳng (d) có phương trình $(d): ax+by+c=0$ và đường tròn (C) tâm $I(m;n)$, bán kính R. Khi đó (d) tiếp xúc $(C)\Leftrightarrow d(I;d)=R\Leftrightarrow\dfrac{|am+bn+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=R$.

4. Elip

Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$.

- Tâm sai $e=\dfrac{c}{a}$
- $a^2=b^2+c^2$
- Phương trình tham số $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$
- Hình chữ nhật cơ sở $x=\pm a, y=\pm b$
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$ và $F_2(c;0)$
- Đỉnh trục nhỏ $B_1(0;-b)$ và $B_2(0;b)$
- Đỉnh trục lớn $A_1(-a;0)$ và $A_2(a;0)$

Tổng hợp một vài mô hình, tính chất quen thuộc của hình học sơ cấp

Trong phần này, chúng tôi xin trình bày dưới dạng phát biểu và chứng minh những bài toán cụ thể. Vì phần mô hình này không được dạy một cách "giáo khoa" trong chương trình phổ thông, nên để tránh mất điểm khi đi thi yêu cầu các bạn thí sinh phải phát biểu và chứng minh lại tất cả dưới dạng các bổ đề.

1. Mô hình 1. (mối liên hệ cơ bản giữa tam giác và đường tròn ngoại tiếp)

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm I và có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H.

a) Chứng minh rằng: $IA \perp EF$, $IB \perp FD$ và $IC \perp DE$.

b) Chứng minh rằng: DH là phân giác góc EDF. Từ đó suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

c) Kéo dài AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng: $DH = DK$.

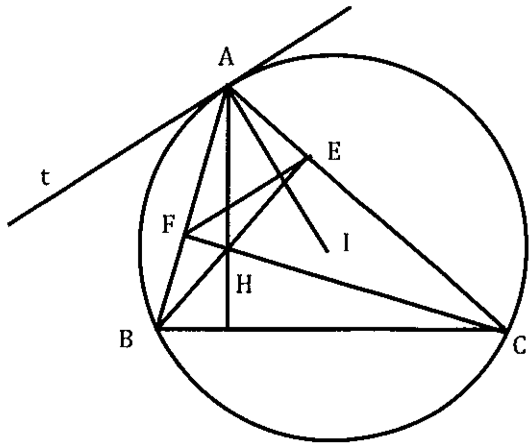
d) Chứng minh rằng: tam giác ABC và tam giác HBC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau.

e) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$.

f) **[Đường thẳng Euler]** Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$.

Lời giải.

a) Kẻ tiếp tuyến At là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Khi đó ta có $At \perp IA$ (định nghĩa tiếp tuyến).

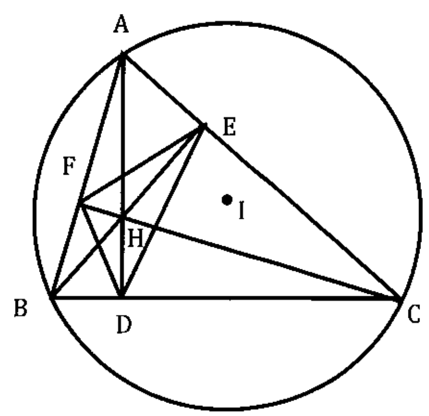
Mặt khác ta có $tAB = ACB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến – Dây cung cùng chắn AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Dễ thấy $BEC = BFC = 90°$, suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp được đường tròn. Nên $ECB = EFA$ (cùng bù EFB).

Vậy $tAB = EFA$, mà hai góc này ở vị trí so le trong. Do đó $At \parallel EF$.

Tóm lại $IA \perp EF$. Chứng minh tương tự ta suy ra $IB \perp FD$ và $IC \perp DE$ Vậy ta có đpcm.

b) Ta có $AD \perp BC$, $BE \perp CA$ và $CF \perp AB$, suy ra các tứ giác $BFHD$, $AEHF$, $CDHE$ và các tứ giác BFEC, AEDB, CDFA đều là tứ giác nội tiếp.

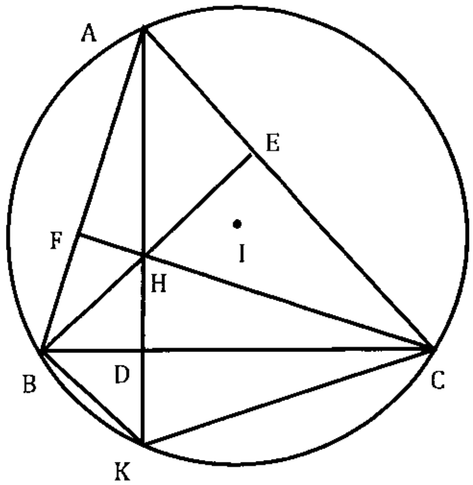


Suy ra $HDF = HBF = HCE = HDE$ (góc nội tiếp bằng nhau của các tứ giác nội tiếp BDHF, BFEC, CEHD).

Do đó DH là phân giác của góc EDF. Chứng minh tương tự cho EH, FH.

Kết hợp lại ta suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF. Vậy ta có đpcm.

c) Xét tam giác BHK có $BD \perp HK$ (tính chất đường cao trong tam giác ABC), suy ra BD là đường cao tam giác BHK.

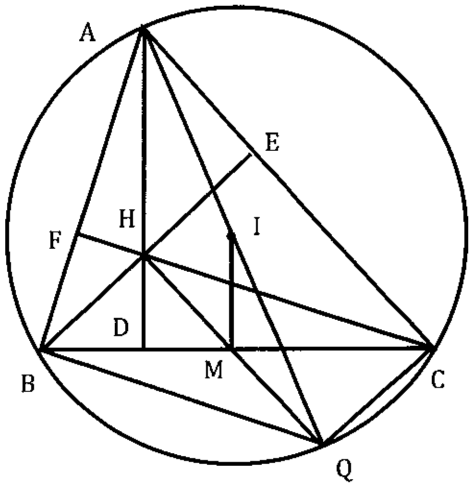


Mặt khác ta có $HBD = HAC$ (cùng phụ ACB), $HAC = KBC$ (góc nội tiếp cùng chắn KC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Do đó $HBD = KBC$, suy ra BD là phân giác trong góc B của tam giác BHK.

Vậy tam giác BHK cân tại B, suy ra BD là đường trung tuyến của tam giác BHK.

Tóm lại ta được $DH = DK$, hay H và K đối xứng nhau qua BC (đpcm).

d) Xét phép đối xứng trục BC là $Đ_{BC}$ ta được $Đ_{BC}(B) = B$, $Đ_{BC}(C) = C$ và $Đ_{BC}(H) = K$ (đã chứng minh ở câu (c)). Từ đó suy ra $Đ_{BC}((BCH)) = (BCK)$ (kí hiệu (XYZ) là đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).



Do đó tam giác KBC và tam giác HBC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau. Mặt khác ta có tam giác KBC và tam giác ABC cùng nội tiếp đường tròn (I).

Vậy hai tam giác ABC và HBC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng nhau (đpcm).

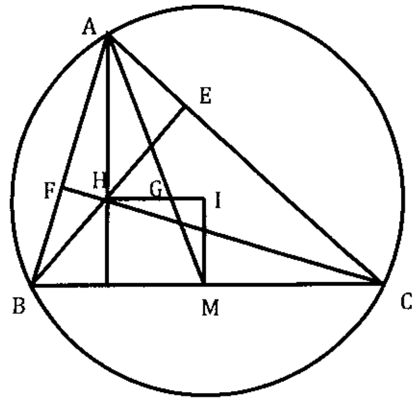
e) Kẻ đường kính AQ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (Q thuộc đường tròn)

Nhận thấy $BH \perp AC$ (tính chất đường cao trong tam giác ABC) và $QC \perp AC$ (tính chất đường kính của đường tròn (I)). Suy ra $BH \parallel QC$.

Tương tự ta có $CH \perp AB$ và $QB \perp AB$. Suy ra $CH \parallel QB$.

Do đó BHCQ là hình bình hành. Mặt khác M là trung điểm BC, nên ta được M là trung điểm HQ.

Theo tính chất đường kính và tâm ta suy ra I là trung điểm AQ.



Vậy IM là đường trung bình của tam giác AHQ, suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ (đpcm).

f) Xét tam giác AHG và MIG có $AH = 2MI$ (đã chứng minh ở câu (e)) và $AG = 2GM$ (tính chất trọng tâm của tam giác ABC), suy ra $\frac{AH}{AG} = \frac{MI}{MG}$.

Mặt khác ta có $AH \parallel IM$ (cùng vuông góc BC), suy ra $HAG = IMG$ (ở vị trí so le trong).

Vậy hai tam giác AHG và MIG đồng dạng với nhau.

Suy ra $HG = 2GI$ và $AGH = MGI$, mà A, G, M thẳng hàng nên H, G, I thẳng hàng.

Do đó $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$ (đpcm).

2. **Mô hình 2. (mối liên hệ giữa một yếu tố thú vị trong tam giác)**

Bài toán. Cho tam giác ABC nhọn có góc A bằng 60° và nội tiếp đường tròn tâm I. Chứng minh rằng: BC chia đôi bán kính vuông góc với dây BC.

Lời giải:

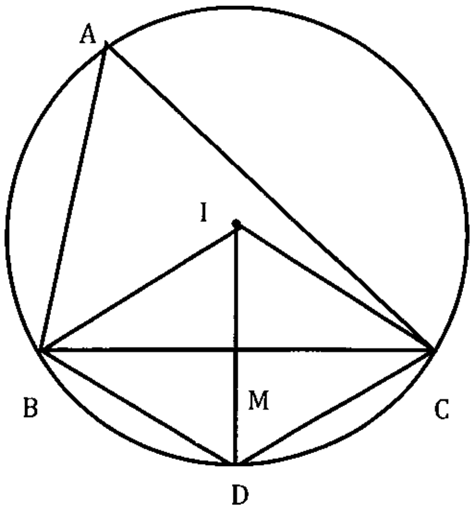
Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, P là trung điểm cung BC không chứa A và M là trung điểm BC.

Vì $BAC = 60^\circ$ nên $BIC = 120^\circ$, suy ra $BC = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow BM = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IM = \dfrac{R}{2} = \dfrac{IP}{2}$.

Do đó M là trung điểm IP.

Vậy ta có đpcm.



Nhận xét:

Do "thói quen" vẽ hình của một số học sinh phổ thông, các bạn thường vẽ góc A nhọn và xấp xỉ bằng 60° *trong một số bài toán, dẫn đến một sự ngộ nhận rằng "BC luôn chia đôi bán kính vuông góc với dây BC".*

Điều này là không đúng nếu $BAC \neq 60^\circ$. *Chú ý rằng đây là một tính chất hay và phải chứng minh lại trong bài thi.*

3. **Mô hình 3 (mối liên hệ cơ bản giữa tam giác và đường tròn nội tiếp)**

Bài toán 3.1. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F là hình chiếu vuông góc của I lên các cạnh BC, CA, AB. Tính độ dài các đoạn thẳng AE, BF, CD theo AB, BC, CA.

Lời giải:

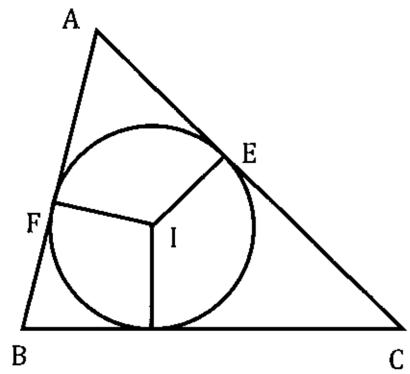
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AE = AF$, $BF = BD$ và $CD = CE$.

Suy ra:

$2AE = AE + AF = AE + CE - CD - BD + BF + AF = AC - CB + BA$ Do đó $AE = AF = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

Tương tự ta được $BF = BD = \dfrac{BA + BC - AC}{2}$ và:

$CD = CE = \dfrac{CB + CA - BA}{2}$.



Nhận xét 1: (mối liên hệ cơ bản giữa tam giác và đường tròn bàng tiếp)

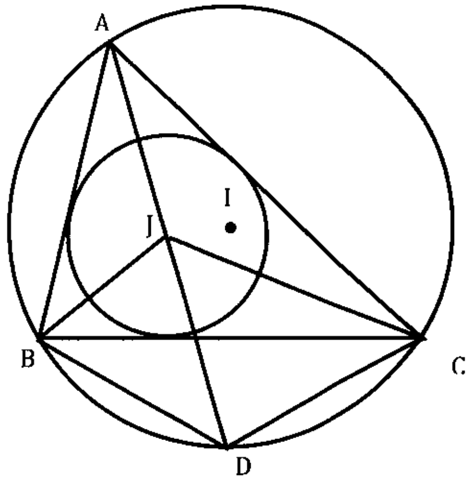
Bài toán. Cho tam giác ABC có đường tròn (J) là đường tròn bàng tiếp ứng với góc A. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của J lên các cạnh BC, CA, AB.

a) Tính AP, BM, CN theo AB, BC, CA.
b) Chứng minh rằng: M là "điểm chia đôi chu vi" của tam giác ABC ứng với đỉnh A.

Nhận xét 2:

Bài toán. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Chứng minh rằng $AB + CD = AD + BC$.

Bài toán 3.2. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (I) và ngoại tiếp đường tròn (J). Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A của đường tròn (I). Chứng minh rằng: $DB = DC = DJ$



Lời giải.

Ta có D là điểm chính giữa cung BC không chứa A của đường tròn (I), suy ra $DB = DC$.

Xét tam giác DBJ có $DBJ = DBC + CBJ$; $DJB = JAB + JBA$ (tính chất góc ngoài)

Mặt khác $JAB = BCD$ (cùng chắn cung BD), $BCD = DBC$ (tam giác DBC cân tại D) và $JBA = CBJ$ (tính chất phân giác).

Do đó $DBJ = DJB$, hay tam giác DBJ cân tại D, suy ra $DB = DJ$
Chứng minh tương tự ta được $DC = DJ$. Vậy ta có đpcm.

4. Mô hình 4

Bài toán. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và D là chân đường phân giác trong của góc A. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại E. Chứng minh rằng: tam giác AED cân tại E.

Lời giải:

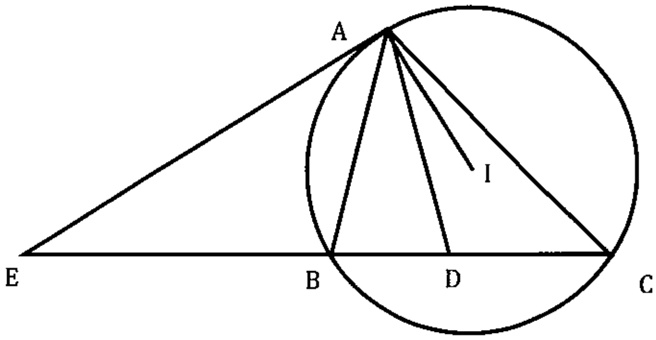
Xét tam giác EAD có: $EAD = EAB + BAD$;

$EDA = DAC + DCA$ (tính chất góc ngoài).

Mặt khác $EAB = DCA$ (cùng chắn cung AB không chứa C của đường tròn (ABC).

Ta lại có $BAD = DAC$ (định nghĩa phân giác).

Do đó $EAD = EDA$, suy ra tam giác AED cân tại E. Vậy ta có đpcm.

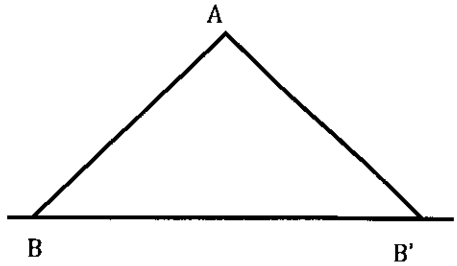


Các bài toán về điểm và đường thẳng

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(1;1) và đường thẳng Δ : $2x + 3y + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm B thuộc đường thẳng Δ sao cho đường thẳng AB và Δ hợp với nhau góc 45^0.

Nhận xét: *Bài toán này đơn thuần là kiểm tra công thức. Nếu không để ý rất dễ bị thiếu nghiệm.*

Hướng dẫn giải:



*Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = -2+2t \end{cases}$ và có vtcp $\vec{u} = (-3;2)$

*A thuộc Δ $\Rightarrow A(1-3t;-2+2t)$

*Ta có $(AB;\ \Delta) = 45^0 \Leftrightarrow \left|\cos(\overrightarrow{AB};\vec{u})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

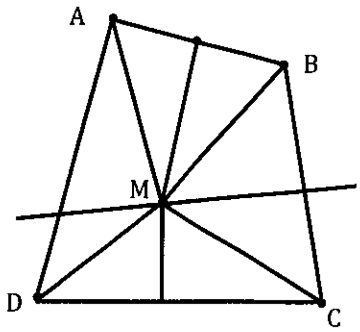
$\Leftrightarrow 169t^2 - 156t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15}{13} \vee t = -\frac{3}{13}$

*Các điểm cần tìm là $B\left(-\frac{32}{13};\frac{4}{13}\right), B'\left(\frac{22}{13};-\frac{32}{13}\right)$ ■.

Bài 2: Trong mp(Oxy) cho 4 điểm A(1;0),B(-2;4),C(-1;4),D(3;5). Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng $(\Delta): 3x - y - 5 = 0$ sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Nhận xét: *Ý tưởng của bài này khá rõ ràng. Tọa độ hóa điểm M rồi sử dụng diện tích tam giác bằng nửa chiều cao nhân cạnh đáy tương ứng ta thu được hệ thức khoảng cách.*

Lời giải chi tiết:



Viết phương trình đường AB: $4x + 3y - 4 = 0$ và $AB = 5$

Viết phương trình đường CD: $x - 4y + 17 = 0$ và $CD = \sqrt{17}$

Điểm M thuộc Δ có toạ độ dạng: $M = (t;3t-5)$. Ta tính được:

$$d(M,AB) = \frac{|13t-19|}{5}; d(M,CD) = \frac{|11t-37|}{\sqrt{17}}$$

Từ đó: $S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow d(M,AB).AB = d(M,CD).CD$

$\Leftrightarrow t = -9 \vee t = \frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ Có 2 điểm cần tìm là: $M(-9;-32), M'\left(\frac{7}{3};2\right)$

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d: mx + y - m - 4 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + 2y + 9 = 0$; điểm B(-3; 2). Gọi H là hình chiếu của B trên d. Xác định tọa độ điểm H biết rằng khoảng cách từ H đến đường thẳng Δ nhỏ nhất.

Nhận xét: *Bài toán kiểu này có ít nhất hai lời giải. Một là lời giải đại số, hai là lời giải hình học. Sau đây là một lời giải hình học.*

Lời giải chi tiết:

Ta có phương trình $d: mx+y-m-4=0 \Leftrightarrow (x-1)m+(y-4)=0$. Suy ra d luôn đi qua điểm cố định A(1; 4), mà BH vuông góc với d nên suy ra H luôn thuộc đường tròn (C) đường kính AB. Gọi I là tâm của (C). Ta có pt (C): $(x+1)^2+(y-3)^2=5$

Gọi d' là đường thẳng đi qua I và vuông góc với Δ. Khi đó d' có pt: $2x-y+5=0$.

Tọa độ giao điểm của d' và (C) là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ (x+1)^2+(y-3)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$. Khi đó d' cắt (C) tại $M_1(0;5); M_2(-2;1)$

Ta có $d(M_1,\Delta)=\dfrac{19\sqrt{5}}{5}; d(M_2,\Delta)=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$. Vậy H trùng với $M_2(-2;1)$. ■.

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình AB, AC lần lượt là $x+2y-2=0, 2x+y+1=0$, điểm M(1; 2) thuộc đoạn thẳng BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho tích vô hướng $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Sơ đồ tư duy:

Thay vì quá chú ý điểm D, ta tự đặt ra câu hỏi có tìm được B và C không?

$AB; AC \to A$

$B \in AB \to B$ *còn 1 ẩn số là b*

$C \in AC \to C$ *còn 1 ẩn số là c*

ΔABC *cân tại A*$\to AB = AC \to$ *phương trình thứ nhất giữa b và c*

$M \in BC \to$ *phương trình thứ hai giữa b và c*

Từ đó tìm được B và C. Cách này, giải cũng ok thế nhưng lượng tính toán lại hơi dài, đòi hỏi cẩn thận.

Hướng đi thứ hai:

$$M \in BC \to (BC): a(x-x_M)+b(y-y_M)=0$$

$$\Delta ABC \text{ cân} \to \hat{B}=\hat{C} \to \text{dùng công thức}$$

Sau khi xác định được B;C. Điều cần suy nghĩ là tìm D. Nếu như không giỏi hình học có một hướng suy nghĩ tự nhiên:

+ $D \in BC \to D$ còn 1 ẩn số là m.

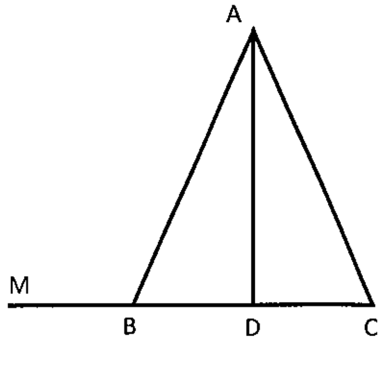
+ $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ = biểu diễn được theo m là tam thức bậc hai nên không còn gì để nói.

Ngoài ra, nếu giỏi hình học hơn, thì ta nhận thấy. Nếu gọi I là trung điểm BC thì ta có:

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC})=DI^2-\frac{BC^4}{4}\geq-\frac{BC^4}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $D \equiv I$ và bài toán được giải quyết.

Lời giải chi tiết:



Gọi vecto pháp tuyến của AB, AC, BC lần lượt là $\overrightarrow{n_1}(1;2), \overrightarrow{n_2}(2;1), \overrightarrow{n_3}(a;b)$. Phương trình BC có dạng $a(x-1)+b(y-2)=0$ với $a^2+b^2>0$. Tam giác ABC cân tại A nên:

$$\cos\hat{B}=\cos\hat{C} \Leftrightarrow |\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3})|=|\cos(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3})|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}}=\frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$$

Với $a=-b$. Chọn $b=-1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow BC: x-y+1=0$

$\Rightarrow B(0;1), C\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, không thỏa mãn M thuộc đoạn BC.

Với $a=b$. Chọn $a=b=1 \Rightarrow BC: x+y-3=0 \Rightarrow B(4;1), C(-4;7)$ thỏa mãn M thuộc BC.

Gọi trung điểm của BC là I $\Rightarrow I(0;3)$

Ta có:

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC}) = DI^2 - \frac{BC^4}{4} \geq -\frac{BC^4}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $D \equiv I$. Vậy $D(0; 3)$.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, với A (-2; 5), trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$;tâm đường tròn ngoại tiếp I (2; 2). Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Sơ đồ tư duy:

Tính chất hình: trọng tâm của tam giác là giao ba đường trung tuyến nên chia theo tỉ lệ 1/3 và tâm đường tròn ngoại tiếp thì cách đều ba đỉnh (giao của ba đường trung trực).

$$AG \cap BC = M \xrightarrow{G \text{ là trọng tâm}} \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \to M$$

$$G \text{ là trọng tâm} \to M \text{ là trung điểm } BC \to IM \perp BC \to (BC)?$$

Công thức cần nhớ:

$$A(x_A; y_A) \xrightarrow{G(x_G; y_G) \text{ là trọng tâm } \Delta ABC} \begin{cases} \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \end{cases}; M \text{ là giao của } AG \text{ và } BC \text{ hay } M \text{ là trung điểm } BC.$$

Ngoài ra công thức trọng tâm cần nhớ:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

$$(\Delta): ax + by + c = 0 \xrightarrow{\Delta' \perp \Delta; A(x_0; y_0) \in \Delta'} -b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$$

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{10}{3}; -\frac{10}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{3} = 2\left(x_M - \dfrac{4}{3}\right) \\ -\dfrac{10}{3} = 2\left(y_M - \dfrac{5}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3; 0)$$

$\overrightarrow{IM} = (1; -2)$ là vecto pháp tuyến của BC.

Phương trình BC: $(x - 3) - 2y = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$ ∎.

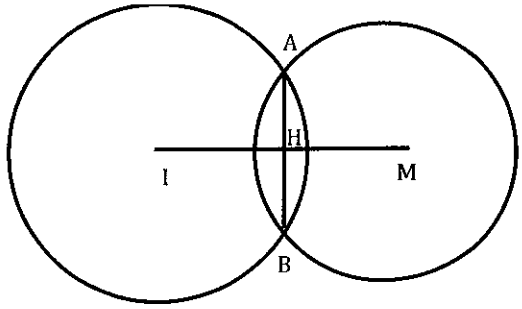
Ngày số 11

Các bài toán về đường tròn

Bài 1: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5; 1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$

Nhận xét: *Bài toán này chỉ nhằm kiểm tra công thức và tính chất: Đoạn nối hai tâm là trung trực của dây cung chung. Khi đó, áp dụng định lý Pytago ta có thể giải quyết bài toán dễ dàng.*

Phân tích và hướng dẫn giải:



Đường tròn (C):

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3 \to I(1; -2)$ và $R = \sqrt{3}$

Gọi H là giao của AB với (IM).

Do đường tròn (C') tâm M có bán kính $R' = MA$

Nếu $AB = \sqrt{3} = IA = R$ thì ΔIAB là tam giác đều

Cho nên $IH = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

Mặt khác $IM = 5$ suy ra $HM = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$

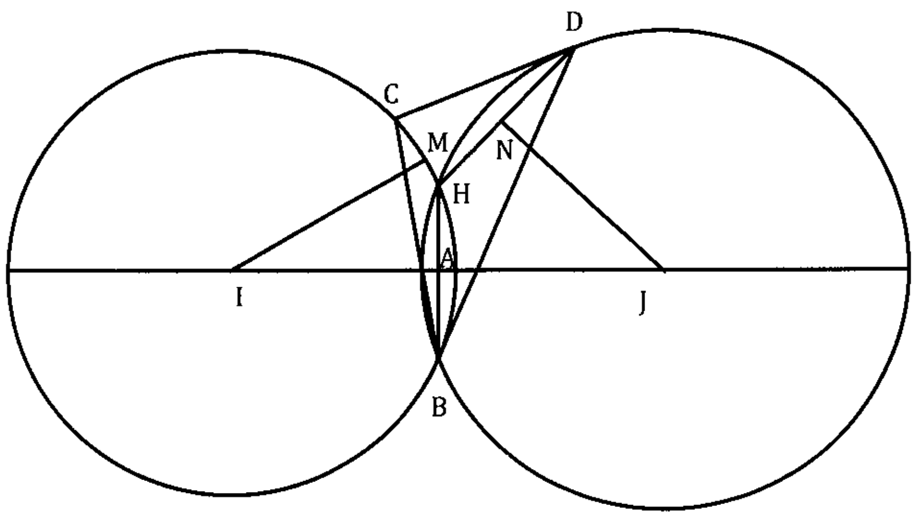
Trong tam giác vuông HAM ta có $MA^2 = IH^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{49}{4} + \frac{3}{4} = 13 = R'^2$

Vậy (C'): $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): x - y + 1 = 0$ và $(d_2): y - 6 = 0$. Các đường tròn $(C_1), (C_2)$ có bán kính bằng nhau, có tâm cùng thuộc đường thẳng (d_1) và chúng cắt nhau tại hai điểm $A(1; 6)$, B. Đường thẳng (d_2) cắt $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại hai điểm C, D (khác A) sao cho diện tích của tam giác BCD bằng 24. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác BCD.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Khuyến 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:



Gọi I, J là tâm của các đường tròn $(C_1), (C_2)$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, AC và H là giao điểm của AB với (d_1).

Ta có $AB \perp (d_1) \Rightarrow (AB): x + y + m = 0$

Mà $A(1; 6) \in (AB) \Rightarrow 1 + 6 + m = 0 \Leftrightarrow m = -7$

Phương trình $(AB): x + y - 7 = 0$

Vì $H = (AB) \cap (d_1)$ nên tọa độ của H thỏa hệ:

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow H(3;4)$$

Vì H là trung điểm của AB nên tọa độ của B thỏa $\begin{cases} x_B = 2x_B - x_A = 5 \\ y_B = 2y_B - y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow B(5;2)$

Khoảng cách từ B đến (d_2) là $BK = d_{(B,(d_2))} = \dfrac{|y_B - 6|}{\sqrt{1}} = |2 - 6| = 4$

Diện tích của tam giác BCD là $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}.BK.CD$

Suy ra $CD = \dfrac{2S_{BCD}}{BK} = \dfrac{2.24}{4} = 12$

Vì hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có bán kính bằng nhau nên các tâm I và J đối xứng nhau qua H.

Ta có: $I \in (d_1) \Rightarrow I(t; t+1)$

H là trung điểm IJ nên $\begin{cases} x_J = 2x_H - x_I = 6 - t \\ y_J = 2y_H - y_I = 7 - t \end{cases} \Rightarrow J(6 - t; 7 - t)$

$\overrightarrow{IH} = (3 - t; 3) \Rightarrow IH = \sqrt{(3 - t)^2 + 3^2}$

$\overrightarrow{AH} = (2; -2) \Rightarrow AH = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

Khoảng cách từ I và J đến (d_2) là:

$IM = d_{(I,(d_2))} = \dfrac{|y_I - 6|}{1} = |t + 1 - 6| = |t - 5|$

$JN = d_{(J,(d_2))} = \dfrac{|y_J - 6|}{1} = |7 - t - 6| = |1 - t|$

Bán kính của hai đường tròn là:

$$R = IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (3 - t)^2 + 3^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 26}$$

Tam giác AIM vuông tại M, có:

$$AM = \sqrt{IA^2 - IM^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 26 - (t - 5)^2} = \sqrt{4t + 1}$$

Tam giác AJN vuông tại N, có:

$$AN = \sqrt{IA^2 - JN^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 26 - (1 - t)^2} = \sqrt{25 - 4t}$$

Ta có: $CD = CA + AD = 2(AM + AN) = 2\left(\sqrt{4t + 1} + \sqrt{25 - 4t}\right)$

Suy ra: $2\left(\sqrt{4t + 1} + \sqrt{25 - 4t}\right) = 12 \Leftrightarrow \sqrt{4t + 1} + \sqrt{25 - 4t} = 6$

$$\Leftrightarrow 26 + 2\sqrt{(4t + 1)(25 - 4t)} = 36$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4t + 1)(25 - 4t)} = 5$$

$$\Leftrightarrow (4t + 1)(25 - 4t) = 25 \Leftrightarrow -16t^2 + 96t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 6 \end{array}\right.$$

Với $t = 0$, ta có $I(0;1), J(6;7), R = \sqrt{26}$

Suy ra phương trình đường tròn là $(C_1): x^2 + (y - 1)^2 = 26$ và $(C_2): (x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 26$

Vì $C = (d_2) \cap (C_1)$ nên tọa độ của C thỏa hệ: $\begin{cases} y - 6 = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow D(-1;6)$ (do $C(1;6)$ trùng với A)

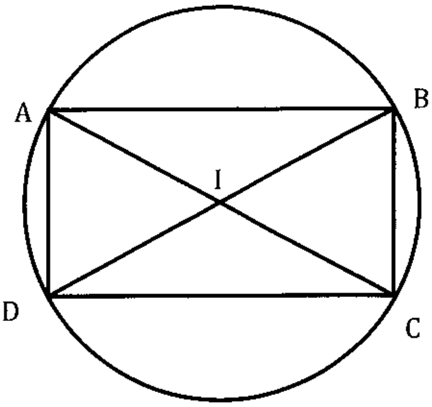
Với $t = 6$, ta có: $I(6;7), J(0;1)$ và $R = \sqrt{26}$

Làm tương tự, ta có $C(11;6), D(-1;6)$

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác BCD là: $B(5;2), C(-1;6)$ hoặc $C(11;6), D(-1;6)$.

Bài 3: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$ và $A(1;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật ABCD nội tiếp (C) và có diện tích bằng 4, biết AB là chiều dài và B có hoành độ nguyên.

Phân tích và hướng dẫn giải:



Đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$ và bán kính R

$= \frac{\sqrt{10}}{2}$ khi đó I là trung điểm AC ta có C(2; 5)

Đặt AB = a; AD = b; (a > b > 0) khi đó:

$$\begin{cases} S_{ABCD} = 4 \\ AB^2 + AD^2 = BD^2 = 4R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{(loại)}$$

Vậy $AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ B thuộc đường tròn tâm A(1; 2) có bán kính $R' = 2\sqrt{2}$ có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

Khi đó tọa độ B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - 3y \\ 5y^2 - 44y + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases} \text{loại}$$

$\Rightarrow B(3;4) \Rightarrow D(0;3)$ vì I là trung điểm DB. Vậy B(3; 4); C(2; 5); D(0; 3).

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm E(-1; 0) và đường tròn (C) :$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm E và cắt (C) theo dây cung MN có độ dài ngắn nhất.

Phân tích và hướng dẫn giải:

(C): $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 36 \rightarrow I(4;2), R = 6$

Nhận xét: EI <R suy ra E nằm trong (C)

Gọi d là đường thẳng qua E(-1; 0) có vecto chỉ phương $\vec{u} = (a;b) \rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + at \\ y = bt \end{cases}$

Đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm M, N có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -1 + at \\ y = bt \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2)r^2 - 2(5a + 2b)t - 7 = 0 \ (1)$$

Gọi $M(-1 + at; bt)$, $N(-1 + at'; bt')$ với t, t' là 2 nghiệm của (1). Khi đó độ dài của dây cung

$$MN = \sqrt{a^2(t-t')^2 + b^2(t-t')^2} = |t - t'|\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{\Delta'}}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2\sqrt{18a^2 + 20ab + 11b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$= 2\sqrt{\frac{18 + 20\left(\frac{b}{a}\right) + 11\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} = 2\sqrt{\frac{18 + 20t + 11t^2}{1 + t^2}}\left(t = \frac{b}{a}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{18 + 20t + 11t^2}{1 + t^2}$.

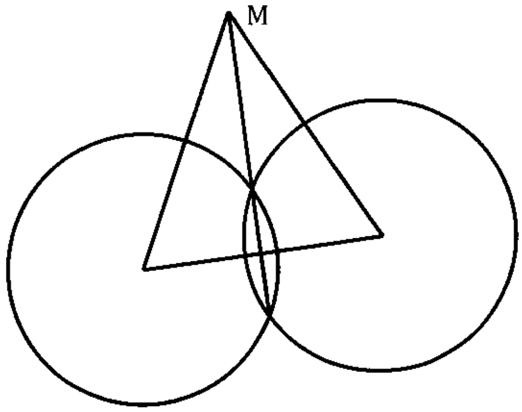
Tính đạo hàm f'(t)cho bằng 0, lập bảng biến thiên suy ra GTLN của t, từ đó suy ra t (tức là suy ra tỷ số b/a). Tuy nhiên cách này dài.

Chú ý: *ta sử dụng tính chất dây cung ở lớp 9: Khoảng cách từ tâm đến dây cung càng nhỏ thì dây cung càng lớn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d bất kỳ qua E(-1; 0). Xét tam giác vuông HIE (I là* *đỉnh) ta luôn có:* $IH^2 = IE^2 - HE^2 \le IE^2 \to IH \le IE$. *Do đó IH lớn nhất hi HE = 0 có nghĩa là H trùng với E. Khi đó d cắt (C) theo dây cung nhỏ nhất. Lúc này d là đường thẳng qua E và vuông góc với IE cho nên d có vecto pháp tuyến* $\vec{n} = \overrightarrow{IE} = (5;2)$. *Vậy d:* $5(x+1) + 2y = 0$ *hay* $5x + 2y + 5 = 0$.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C_1): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm là I_1 và đường tròn (C_2): $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 10$ có tâm là I_2 biết hai đường tròn cắt nhau tại A và B. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng AB sao cho diện tích tam giác MI_1I_2 bằng 6.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:



Nhắc lại trục đẳng phương của hai đường tròn tổng có phương trình quát:

$(C_1): x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$

$(C_2): x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$

Thì trục đẳng phương của hai đường tròn (C_1), (C_2) là:

$$2x(A_1 - A_2) + 2y(B_1 - B_2) + C_1 - C_2 = 0$$

Phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm A và B (trục đẳng phương) là d: x+y-4=0

Đường thẳng (I_1I_2) đi qua tâm $I_1(1;1)$ và $I_2(4;4)$ có pt:

$$x - y = 0$$

$$M(m; 4-m) \in d$$

$$S_{MI_1I_2} = \frac{1}{2}d\big(M,(I_1I_2)\big).I_1I_2 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 0 \end{array}\right.$$

Vậy M(4; 0) và M(0; 4).

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C):: $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 4$. Tìm điểm $M \in Ox$ sao cho từ M kẻ được đến (C) hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn đường thẳng đi qua A, B tiếp xúc với đường tròn (C_1): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Phan Bội Châu 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Gọi $M(m;0) \in Ox$

Đường tròn (C) có tâm I(1; -4) và bán kính R=2.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(3;1)$ và bán kính $R_1 = 4$.

Từ M kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (C) suy ra MI > R

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 + (0+4)^2 > 4 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 12 > 0$$

Gọi tọa độ A, B là $A(x_A;\ y_A); B(x_B;\ y_B)$. Phương trình tiếp tuyến tại A, B của (C) lần lượt là:

$x_A.x + y_A.y - (x + x_A) + 4(y + y_A) + 13 = 0 \quad (d_1)$

$x_B.x + y_B.y - (x + x_B) + 4(y + y_B) + 13 = 0 \quad (d_2)$

Do $M \in (d_1); M \in (d_2) \Rightarrow \begin{cases} mx_A - (m + x_A) + 4y_A + 13 = 0 \\ mx_B - (m + x_B) + 4y_B + 13 = 0 \end{cases}$

Suy ra phương trình đường thẳng AB là:

$$mx - (m + x) + 4y + 13 = 0 \Leftrightarrow (m-1)x + 4y + 13 - m = 0$$

Đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn (C_1)

$$\Leftrightarrow d\big(I_1,(AB)\big) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|3(m-1) + 4 + 13 - m|}{\sqrt{(m-1)^2 + 16}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m+7| = 2\sqrt{m^2 - 2m + 17} \Leftrightarrow 3m^2 - 22m + 19 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{19}{3} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm M cần tìm là (1; 0)và $\left(\frac{19}{3}; 0\right)$ ■.

Bài 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Tìm tọa độ tiếp điểm M trên đường thẳng d: $3x - 22y - 6 = 0$, sao cho từ M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) mà đường thẳng AB đi qua C(0; 1).

Phân tích và hướng dẫn giải:

(C): $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$, có $I(3; -1)$ và $R = 5$

Gọi $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ là 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ M.

Gọi $M(x_0;\ y_0) \in d \to 3x_0 - 22y_0 - 6 = 0$ (*)

Hai tiếp tuyến của (C) tại A, B có phương trình là:

$$(x_1 - 3)(x - 3) + (y_1 + 1)(y + 1) = 25\ (1)$$
$$(x_2 - 3)(x - 3) + (y_2 + 1)(y + 1) = 25\ (2)$$

Để 2 tiếp tuyến trở thành 2 tiếp tuyến kẻ từ M thì 2 tiếp tuyến phải đi qua M:

$$(x_1 - 3)(x_0 - 3) + (y_1 + 1)(y_0 + 1) = 25\ (3)$$
$$(x_2 - 3)(x_0 - 3) + (y_2 + 1)(y_0 + 1) = 25\ (4)$$

Từ (3) (4) chứng tỏ (AB) có phương trình:

$$(x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 + 1)(y + 1) = 25\ (5)$$

Theo giả thiết thì (AB) qua C(0; 1)suy ra: $-3(x_0 - 3) + 2(y_0 + 1) = 25$

$\Leftrightarrow -3x_0 + 2y_0 - 14 = 0$ (6)

Kết hợp với (*) ta có hệ: $\begin{cases} 3x_0 - 22y_0 - 6 = 0 \\ -3x_0 + 2y_0 - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -\dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\dfrac{16}{3};\ -1\right)$ ■.

Bài 8: Trong hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

a. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(2; 4) cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến ấy song song với đường thẳng có phương trình: $2x + 2y - 7 = 0$

c. Chứng tỏ đường tròn (C) và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ tiếp xúc nhau. Viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại tiếp điểm.

Phân tích và hướng dẫn giải:

(C): $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \to I(1; 3)$ và $R = 2$

a. Gọi (x; y) thuộc (C) suy ra $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ (1), B đối xứng với A qua M suy ra $B(4 - x; 8 - y)$. Để đảm bảo yêu cầu bài toán thì B thuộc (C): $(3 - x)^2 + (5 - y)^2 = 4$(2)

Từ (1) (2) ta có hệ: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (3-x)^2 + (5-y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0\ (3) \\ x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0\ (4) \end{cases}$

Lấy (3) - (4) ta có phương trình: $4x + 4y - 24 = 0$ hay $x + y - 6 = 0$. Đó là đường thẳng cần tìm.

b. Gọi d' là đường thẳng song song với d nên nó có dạng: $2x + 2y + m = 0$ (*). Để d' là tiếp tuyến của (C) thì:

$$\Rightarrow h(I; d) = \frac{|2 + 6 + m|}{\sqrt{8}} = 2 \Leftrightarrow |m + 8| = 4\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4\sqrt{2} - 8 \\ m = -4\sqrt{2} - 8 \end{array}\right.$$

c. (C'): $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \to I'(2; 3)$ và $R' = 3$

Ta có $II' = 1, R' - R = 1$. Chứng tỏ hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

Tìm tọa độ tiếp điểm: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 2 = 0$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3$$

Vậy $M(1;\ 3)$■.

Bài 9: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và d: $x+y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Phân tích và hướng dẫn giải:

(C) có $I(1;\ -2)$và $R=3$. Nếu tam giác ABC vuông góc tại A (nghĩa là từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C) và 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau) khi đó ABIC là hình vuông. Theo tính chất hình vuông ta có:

$$IA = IB = \sqrt{2}\ (1).$$

Nếu A nằm trên d thì $A(t;\ -m-t)$suy ra: $IA = \sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}$ Thay vào (1):

$$\Rightarrow \sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2t^2-2(m-1)t+m^2-4m-13=0\ (2)$$

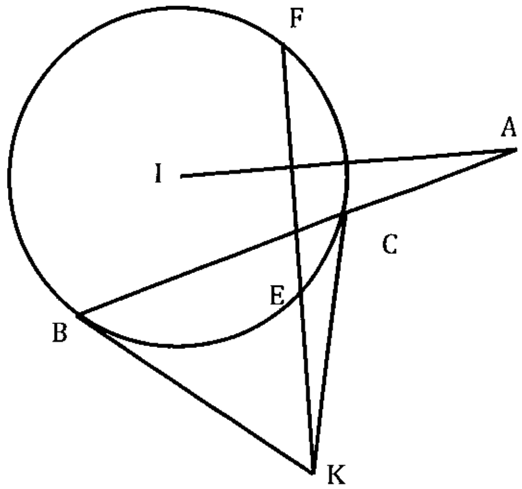
Để trên d có đúng 1 điểm A thì (2) có đúng 1 nghiệm t, từ đó có điều kiện:

$\Delta = -(m^2+10m+25)=0 \Leftrightarrow -(m+5)^2=0 \Leftrightarrow m=5$

Khi đó (2) có nghiệm kép là $t_1=t_2=t_0=\dfrac{m-1}{2}=\dfrac{-5-1}{2}=-3 \rightarrow A(-3;8)$ ■.

Bài 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho (T): $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ với tâm I và A(4; 5). Từ A kẻ đường thẳng cắt (T) tại B, C tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc IA cắt (T) tại E, F. xác định E, F.

Phân tích và hướng dẫn giải:



Gọi K (a; b) khi đó $M\left(\dfrac{a+1}{2};\dfrac{b+1}{2}\right)$ là trung điểm của IK. Do IBKC nội tiếp đường tròn tâm M bán kính $\dfrac{\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}}{2}$ nên B, C thuộc đường tròn có phương trình:

$$\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{(a-1)^2+(b-1)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-(a+1)x-(b+1)y+a+b=0$$

Do B, C thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=5$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$$

Khi đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2-(1+a)x-(b+1)y+a+b=0 \\ x^2+y^2-2x-2y-3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a-1)x+(b-1)y-a-b-3=0$$

Suy ra phương trình BC: $(a-1)x+(b-1)y-a-b-3=0$

Do A thuộc BC $\Rightarrow 4(a-1)+5(b-1)-a-b-3=0 \Leftrightarrow 3a+4b=12$

Do $\overline{EF} \perp \overline{IA}=(3;4)$ và EF đi qua K(a; b) nên có phương trình:

$$3(x-a)+4(y-b)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+4y-(3a+4b)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+4y-12=0$$

Khi đó E, F là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} 3x+4y-12=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; y=3 \\ x=\dfrac{16}{5}; y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $E\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{3}{5}\right)$; F(0; 3) hoặc ngược lại ■.

Bài 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ M thuộc d sao cho M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) đồng thời khoảng cách từ $N\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ đến AB là lớn nhất.

Phân tích và hướng dẫn giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính IA=3. Gọi $M(m; m+1)$

Để từ M kẻ được tiếp tuyến tới (C) thì:

$$MI > R \Leftrightarrow \sqrt{(m-1)^2 + (m+3)^2} > 3 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m + 1 > 0 \ (*)$$

Ta có: $MA = MB = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2m^2 + 4m + 1}$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $M(m; m+1)$ bán kính là $\sqrt{2m^2 + 4m + 1}$ có phương trình:

$$(x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 2m^2 + 4m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y - 2m = 0$$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y - 2m = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m-1)x + (m+3)y + m - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ phương trình AB: $(m-1)x + (m+3)y + m - 2 = 0$

Gọi $K(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà AB luôn đi qua khi đó:

$(m-1)x_0 + (m+3)y_0 + m - 2 = 0$ luôn đúng với mọi m

$\Leftrightarrow (x_0 + y_0 + 1)m = x_0 - 3y_0 + 2$ luôn đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_0 + 1 = 0 \\ x_0 - 3y_0 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{5}{4} \\ y_0 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên AB khi đó $d(N; AB) = NH \le NK = \dfrac{\sqrt{26}}{4}$

Suy ra $d(N; AB)\max = \dfrac{\sqrt{26}}{4}$ khi H trùng K hay NK vuông góc với AB (2*)

$$\overrightarrow{NK} = \left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4}(1;5); \overrightarrow{u_{AB}} = (m+3; 1-m)$$

Suy ra (2*) $\Leftrightarrow m + 3 + 5(1-m) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thỏa mãn (*).

Vậy $M(2;3)$ ■.

Sau đây là một số bài toán cần luyện tập:

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $d: x+y-3=0$. Hình chiếu vuông góc của tâm đường tròn nội tiếp hình tam giác ABC lên đường thẳng AC là điểm $E(1;4)$. Đường thẳng BC có hệ số góc âm và tạo với đường thẳng AC góc 45°. Đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn $(C):(x+2)^2+y^2=5$. Tìm phương trình các cạnh của tam giác ABC.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường chuyên Lương Thế Vinh 2016)

Kết quả: $\begin{cases} AB: x+2y-3=0 \\ AC: 2x+y-3=0 \\ BC: x+3y-\dfrac{29+10\sqrt{2}}{3}=0 \end{cases}$

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-6x-2y+5=0$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC, biết đường thẳng MN có phương trình: $20x-10y-9=0$ và điểm H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Lý Thái Tổ - Bắc Ninh 2016)

Kết quả $A(1;2); BC: 2x+y-7=0.$

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ và $P(2;1)$. Một đường thẳng d đi qua P cắt đường tròn tại A và B. Tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tai M. Tìm tọa độ điểm M biết M thuộc đường tròn $x^2+y^2-6x-4y+11=0.$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường chuyên Nguyễn Huệ lần 3-2016)

Kết quả: $M(4;1)$.

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC. Biết $M(3;-1)$ là trung điểm của cạnh BD, điểm $C(4;-2)$. Điểm $N(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng đi qua B và vuông góc với AD. Đường thẳng AD đi qua điểm $P(1;3)$. Tìm tọa độ điểm A, B, D.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia Sở GD-ĐT Lào Cai 2016)

Kết quả: $A(2;2), D(5;-1), B(1;-1)$.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $E(3;4)$, đường thẳng $d: x+y-1=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-2y-4=0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d và nằm ngoài đường tròn (C). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Gọi (E) là đường tròn tâm E và tiếp xúc với đường thẳng AB. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia Sở GD-ĐT Thanh Hóa 2016)

Kết quả: $M(-3;4)$.

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình tam giác ABC có đường phân giác trong góc A nằm trên đường thẳng $d: x+y=0$ và đường tròn ngoại tiếp hình tam giác ABC có phương trình $x^2+y^2-4x+2y-20=0$. Biết rằng điểm $M(3;-4)$ thuộc đường thẳng BC và điểm A có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm A, B, C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Trần Đại Nghĩa 2016)

Kết quả: $\left[\begin{array}{l} A(-2;2);B(7;-1);C\left(\frac{3}{5};-\frac{29}{15}\right) \\ A(-2;2);B\left(\frac{3}{5};-\frac{29}{15}\right);C(7;-1) \end{array}\right.$.

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2=5$ tâm O, đường thẳng $(d):3x-y-2=0$.

Tìm tọa độ điểm a, B trên (d) sao cho $OA=\frac{\sqrt{10}}{5}$ và đoạn OB cắt (C) tại K sao cho $KA=KB$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Tĩnh Gia -2015)

Kết quả: $A\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right), B(2;4)$ hoặc $B\left(-\frac{4}{5};-\frac{22}{5}\right)$.

Bài 8:) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y-8=0$ và đường thẳng Δ có phương trình : $2x-3y-1=0$. Chứng minh rằng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích hình tam giác ABM lớn nhất.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Thường Xuân 3- 2015

Kết quả: $M(-3;5)$.

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;2)$ và hai đường thẳng $d:x+2y=0;\Delta:4x+3y=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm M, có tâm thuộc đường thẳng d và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài bằng $4\sqrt{3}$. Biết tâm đường tròn có tung độ dương.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia Sở GD-ĐT Vĩnh Phúc 2015)

Kết quả: $(x+4)^2+(y-2)^2=16$.

Ngày số 12

Các bài toán về tam giác (tiết 1)

Bài toán 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng chứa trung tuyến và đường cao kẻ từ C lần lượt là $y+2=0$ và $3x-2y+8=0$. Đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ A đi qua $K(-18;3)$. Tính ABC biết rằng điểm A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $d: x+2y+2=0$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Đại Học Vinh – Lần 1 – 2016)

Sơ đồ tư duy:

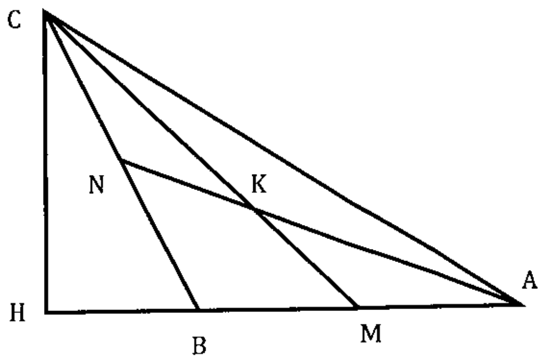
$ABC \longleftarrow \cos ABC \longleftarrow$ có 2 hướng chính $\begin{cases} \text{tọa độ } A, B, C \\ \text{phương trình đường thẳng } AB, BC \end{cases}$

$C \leftarrow \begin{cases} \text{phương trình trung tuyến} \\ \text{phương trình đường cao} \end{cases}$

Tọa độ N trung điểm BC theo 2 ẩn $\longleftarrow$ Tọa độ B theo 2 ẩn $\longleftarrow \begin{cases} \text{Tham số } A \text{ theo } a \\ \text{Tham số trung điểm } M \text{ của } AB \text{ theo } m \end{cases}$

$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} a \\ m \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} \overrightarrow{KA} \text{ cùng phương } \overrightarrow{KN} \\ CH \perp AB \end{cases}$

Lời giải:



Ta có tọa độ C thỏa hệ $\begin{cases} y+2=0 \\ 3x-2y+8=0 \end{cases} \Rightarrow C(-4;-2)$

Gọi M, N là trung điểm AB, BC. Ta có :

$A \in d: x+2y+2=0 \Rightarrow A(-2a-2;a)(a<0)$.

$M \in CM: y+2=0 \Rightarrow M(m;-2)$.

Mà M là trung điểm AB nên $B(2a+2m+2;-a-4)$

$\Rightarrow N\left(a+m-1;\dfrac{-a-6}{2}\right)$.

Vì $CH \perp AB$ nên:

$\overrightarrow{u_{CH}}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 2(2a+m+2)+3(-a-2)=0 \Leftrightarrow a=-2m+2$ (1).

Ta có $\overrightarrow{KA}=(-2a+16;a-3), \overrightarrow{KN}=\left(a+m+17;\dfrac{-a-12}{2}\right)$.

Vì A, N, K thẳng hàng nên $\overrightarrow{KA}$ cùng phương $\overrightarrow{KN}$. Do đó: $(-2a+16)(-a-12)=2(a-3)(a+m+17)$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được $2m^2+21m-65=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{5}{2} \Rightarrow a=-3 \\ m=-13 \Rightarrow a=28 \end{array}\right.$

Vì $a<0$ nên ta nhận $a=-3$. Suy ra $A(4;-3), B(1;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;-2), \overrightarrow{BC}=(-5;-1) \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{3(-5)+(-2)(-1)}{\sqrt{9+4}.\sqrt{25+1}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $ABC=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=135^\circ$.

Nhận xét:

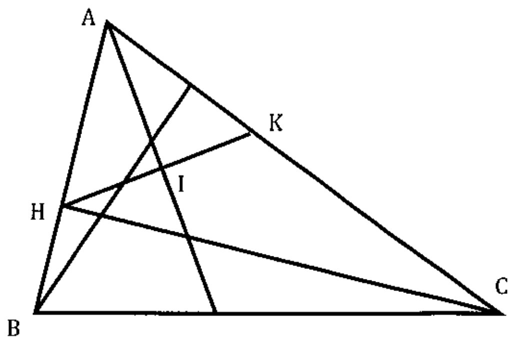
Đây là một bài toán hết sức cơ bản và quen thuộc, phương pháp giải chính dạng toán này là tham số hóa các điểm theo phương trình đường thẳng đã biết. Sau đó dùng mối liên kết đặc trưng giữa các yếu tố hình học để thiết lập nên các hệ phương trình. Cuối cùng là giải hệ ấy và hoàn thiện lời giải.

Tiếp theo ta sẽ đến với một bài toán tương tự với mức độ nâng lên đôi chút.

Bài toán 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường phân giác trong góc A có phương trình $d: x-y+2=0$, đường cao hạ từ B có phương trình $d': 4x+3y-1=0$. Biết hình chiếu của C lên AB là điểm $H(-1;-1)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lê Xoay – 2015)

Lời giải.



Gọi K là điểm đối xứng với H qua đường phân trong góc A. Khi đó K thuộc đường thẳng AC. Đường thẳng HK có phương trình $x+y+2=0$.

Gọi I là giao điểm của HK và đường phân giác trong góc A thì I có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow I(-2;0).$$

I là trung điểm HK nên suy ra $K(-3;1)$.

Khi đó AC là đường thẳng qua K và vuông góc với d'. Suy ra $AC: 3x-4y+13=0$.

A có tọa độ thỏa mãn $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow A(5;7)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(-6;-8)$ là một vector chỉ phương của AB, suy ra đường thẳng AB có phương trình $4x-3y+1=0$.

B có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

HC có phương trình là $3x+4y+7=0$.

C có tọa độ thỏa mãn $\begin{cases} 3x+4y+7=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{3}{4}\right)$.

Vậy $A(5;7), B\left(0;\dfrac{1}{3}\right), C\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{3}{4}\right)$.

Nhận xét.

Kiến thức cơ bản và quan trọng nhất trong bài toán là tính chất của đường phân giác trong tam giác. Tính chất ấy được phát biểu như sau: "Cho tam giác ABC có đường phân giác AD, lấy một điểm M trên đường thẳng AB. Khi đó điểm N đối xứng với M qua AD sẽ nằm trên đường thẳng AC". Trong các bài toán có xuất hiện yếu tố phân giác thì hầu hết sẽ sử dụng tính chất đối xứng này, nên các bạn thí sinh cần lưu ý khi giải toán hình học giải tích!

Một số bài tập tự luyện:

Để kết thúc dạng toán này, xin nêu ra một vài bài toán tương tự và mở rộng, dành cho bạn đọc tự luyện và tìm hiểu thêm:

Bài toán 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường phân giác trong AD có phương trình là $x-y=0$. Đường cao CH có phương trình $2x+y+3=0$. Biết rằng đường thẳng AC đi qua điểm $M(0;-1)$ và $AB=2AM$. Hãy viết phương trình các đường thẳng chứa ba cạnh tam giác ABC.

Đáp số. Phương trình các đường thẳng là $AB: x-2y+1=0$, $BC: 2x+5y+11=0$, $CA: 2x-y-1=0$.

Bài toán 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường trung tuyến và phân giác trong ứng với đỉnh B lần lượt là $d_1: 2x+y-3=0$ và $d_2: x+y-2=0$. Biết $M(2;1)$ thuộc AB và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tìm tọa độ ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC biết rằng đỉnh A có hoành độ dương.

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là $A(3;1)$, $B(1;1)$, $C(1;-3)$.

Bài toán 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(5;2), đường trung trực d của đoạn BC có phương trình là $x+y-6=0$ và đường trung tuyến Δ kẻ từ C có phương trình $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các điểm B và C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm – Vĩnh Long – 2015)

Đáp số. Tọa độ các điểm là $B\left(-\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right)$.

Bài toán 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $x-3y=0$ và $x+5y=0$. Đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ và có hoành độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ C đi qua điểm E(-2;6).

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hồng Quang – Hải Dương – Lần 1 – 2015)

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là $A(0;0)$, $B(4;2)$, $C(6;-4)$.

Bài toán 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong của góc B có phương trình là $d_1: x+y-2=0$, đường trung tuyến kẻ từ B có phương trình $d_2: 4x+5y-9=0$. Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=\frac{5}{2}$. Tìm tọa độ đỉnh A.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lê Lợi – Thanh Hóa – 2016)

Đáp số. Tọa độ đỉnh A là $A(5;-1)$ hoặc $A(-3;3)$

Tiếp theo, xin trình bày dạng toán về các tính chất trong hình học sơ cấp, một số bài toán áp dụng các mô hình quen thuộc đã trình bày trong ngày 9.

Bài toán 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H 5;5 , phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x+y-8=0$. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm M 7;3 ,N 4;2 . Tính diện tích tam giác ABC.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Vĩnh Phúc – Lần 4 – 2015)

Lời giải.

Gọi H_1 đối xứng H qua BC suy ra phương trình $HH_1: x-y=0$. Ta có $I=HH_1\cap BC \Rightarrow I(4;4)\Rightarrow H_1(3;3)$. Ta chứng minh được điểm H_1 thuộc (ABC).

$(ABC): x^2+y^2-2ax-2by+c=0, \left(a^2+b^2-c>0\right)$ Do $\begin{cases} M\in(ABC)\\ N\in(ABC)\\ H_1\in(ABC)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7^2+3^2-14a-6b+c=0\\ 4^2+2^2-8a-4b+c=0\\ 3^2+3^2-6a-6b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ b=4\\ c=36\end{cases}$

$\Rightarrow(ABC): x^2+y^2-10x-8y+36=0$.

$A=HH_1\cap(ABC)\Rightarrow A(6;6), A\ne H_1$

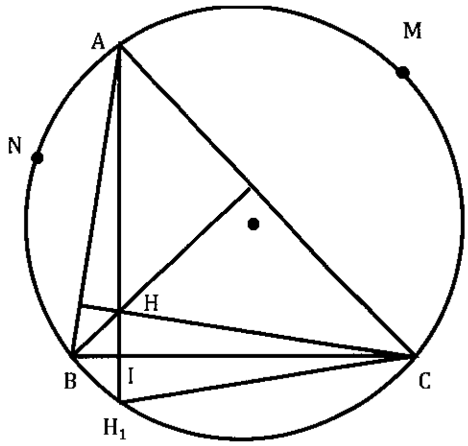
$\{B,C\}=BC\cap(ABC)$ nên tọa độ B,C là nghiệm hệ

$\begin{cases}x+y-8=0\\ x^2+y^2-10x-8y+36=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$

$\Rightarrow BC=3\sqrt{2}, d(A,BC)=\dfrac{|6+6-8|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}d(A,BC).BC=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{2}.3\sqrt{2}=6$ (đvdt).



Nhận xét.

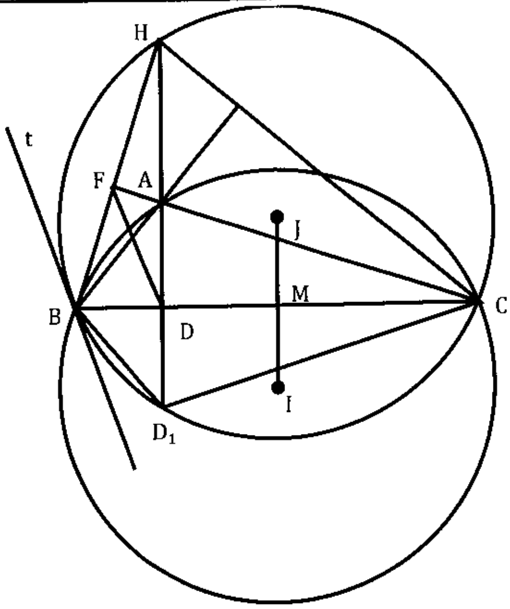
Tư duy sáng tác của bài toán xuất phát từ phần đảo của ý (c) trong mô hình 1, cách chứng minh hoàn toàn tương tự với phần thuận.

Tiếp theo ta sẽ đến với một bài toán tương tự với mức độ khó và phức tạp được nâng lên đôi chút. Bài toán được sáng tạo từ sự kết hợp nhiều tính chất quen thuộc của mô hình 1.

Bài toán 9. [Trần Duy Quân] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $BAC>90^\circ$, trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC, \Delta HBC$ lần lượt là $(I),(J)$ với $I(4;5), J(-1;0)$. Giao điểm của AC,BH là $F(2;-1)$, giao điểm của AH,BC là D. Tìm tọa độ các điểm A,B,C,H biết rằng điểm $Q(2;2)$ thuộc đường thẳng DF.

Lời giải:

Gọi D_1 là giao điểm thứ hai của AH và đường tròn (J) (D_1 khác H).



Ta sẽ chứng minh A và D_1 đối xứng nhau qua đường thẳng BC. Thật vậy, xét tam giác BAD_1 có $BD \perp AD_1$ (tính chất đường cao trong tam giác ABC), suy ra BD là đường cao tam giác BAD_1. Mặt khác, ta có $ABD = AHC$ (cùng phụ với BCH), $AHC = D_1BD$ (góc nội tiếp cùng chắn D_1C của đường tròn (J)), do đó $ABD = D_1BD$, suy ra BD là đường phân giác trong góc B của tam giác BAD_1. Vậy tam giác BAD_1 cân tại B, suy ra BD là đường trung tuyến của tam giác BAD_1. Tóm lại ta được A và D_1 đối xứng nhau qua đường thẳng BC (đpcm).

Trở lại bài toán, kí hiệu (XYZ) là đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z. Xét phép đối xứng qua đường thẳng BC ta có $Đ_{BC}(A) = D_1$, $Đ_{BC}(B) = B$, $Đ_{BC}(C) = C$.

Từ đó ta suy ra $Đ_{BC}((ABC)) = (D_1BC)$ hay $Đ_{BC}((I)) = (J)$, do đó I và J đối xứng nhau qua đường thẳng BC.

Ta có $I(4;5)$, $J(-1;0)$. Gọi M là trung điểm BC, suy ra M là trung điểm IJ (vì I, J đối xứng nhau qua BC và I, J thuộc đường trung trực của BC). Suy ra $M\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. Ta tính được $\overrightarrow{IJ} = (-5;-5)$, ta chọn $\overrightarrow{n_{BC}} = (1;1)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC. Vậy phương trình BC là $BC: x + y - 4 = 0$.

Ta sẽ chứng minh $JB \perp DF$. Thật vậy, kẻ tiếp tuyến Bt của đường tròn (J) tại B. Khi đó $tBH = HCB$ (cùng chắn BH của đường tròn (J)), $HCB = DFB$ (cùng bù với DFH, tứ giác DFHC nội tiếp), do đó $tBH = DFB$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $Bt \parallel DF$. Mặt khác theo tính chất tiếp tuyến ta có $Bt \perp BJ$. Vậy $DF \perp BJ$.

Trở lại bài toán, ta có $\overrightarrow{QF} = (0;-3)$, chọn $\overrightarrow{n_{JB}} = (0;1)$. Vậy phương trình JB là $JB: y = 0$. Vì B là giao điểm của JB và BC nên toạ độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$. Suy ra $B(4;0)$. Do đó $C(-1;5)$ (thông qua mối quan hệ M là trung điểm BC).

Mặt khác $\overrightarrow{CF} = (3;-6) \Rightarrow CF: 2x + y - 3 = 0, BF: x - 2y - 4 = 0$. Ta viết được $AH: x - y = 0$.

Vì $\{A\} = AH \cap CF \Rightarrow A(1;1), \{H\} = AH \cap BF \Rightarrow H(-4;-4)$.

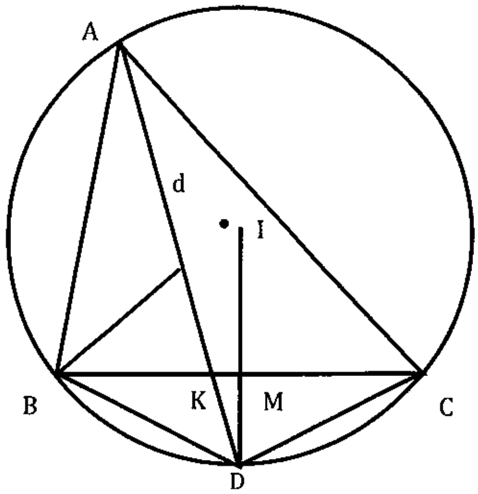
Vậy $A(1;1), B(4;0), C(-1;5), H(-4;-4)$.

Nhận xét: *Từ những mô hình hết sức quen thuộc mà chúng ta đã tìm hiểu ở ngày 9, khi ráp chúng lại với nhau ta sẽ được một bài toán hay, vô cùng thú vị và phức tạp. Do đó cần nắm vững kiến thức cơ bản, nhận ra những đặc trưng quen thuộc của các mô hình ẩn sau các bài toán lớn và tinh tế xử lí một cách cẩn thận chắc hẳn các bạn sẽ thành công tìm ra một lời giải hoàn chỉnh.*

Tiếp theo, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một ví dụ xuất phát từ mô hình 2. Bài toán được sáng tạo ở mức độ không quá cao, chủ yếu để nhắc nhở các bạn thí sinh về "thói quen" vẽ hình và sự ngộ nhận do chủ quan của mình. Và điều đáng nói ở đây là tất cả các mô hình, dù quen thuộc nhưng vì không được công nhận như một định lí trong sách giáo khoa, nên khi trình bày trong các kì thi, yêu cầu các bạn thí sinh phát biểu và chứng minh lại dưới dạng các bổ đề rồi mới sử dụng để có thể hoàn thiện bài làm và được điểm trọn vẹn.

Bài toán 10. [Trần Duy Quân] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC}=60^\circ$. Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=5$. Đường thẳng đi qua A, cắt đoạn thẳng BC tại K, hợp với đường thẳng chứa cạnh AB một góc 30° có phương trình là $d: x+y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng điểm A có hoành độ dương.

Lời giải:



Phương trình đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$

Gọi D là giao điểm của AK và (C) (khác A).

Nhận thấy, d là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Suy ra D là trung điểm cung BC không chứa A, hay $ID \perp BC$ (1)

Gọi M là trung điểm của BC. Ta sẽ chứng minh D đối xứng với I qua đường thẳng BC. Thật vậy, vì $\widehat{BAC}=60^\circ \Rightarrow \widehat{BIC}=120^\circ$

$\Rightarrow BC=R\sqrt{3} \Rightarrow BM=\frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IM=\frac{R}{2}=\frac{ID}{2}$, hay $IM=DM$. Kết hợp (1) suy ra đpcm.

Trở lại bài toán, ta có $\{A;D\}=AK\cap(C)$. Chú ý rằng điểm A có hoành độ dương.

Suy ra tọa độ A và D là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=25\\ x+y-2=0\end{cases}$. Giải hệ ta được $D(-3;5)$ và $A(4;-2)$. Vì M trung điểm BC, kết hợp điều đã chứng minh trên suy ra M là trung điểm $ID \Rightarrow M\left(-1;\frac{7}{2}\right)$. Ta tính được

$\overrightarrow{ID}=(-4;3)$. Suy ra phương trình $BC: 4x-3y+\frac{29}{2}=0$. Ta có $\{B;C\}=BC\cap(C)$.

Suy ra tọa độ B,C là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=25\\ 4x-3y+\frac{29}{2}=0\end{cases}$.

Giải hệ ta được:

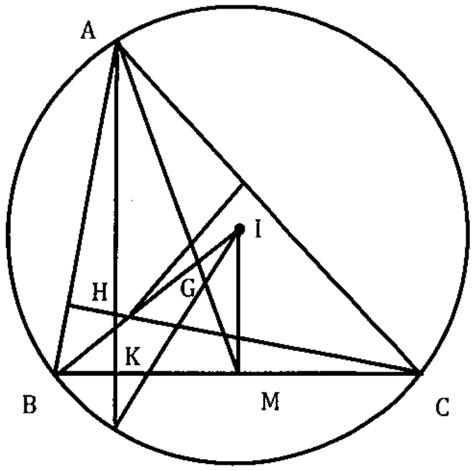
$B\left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{2};\frac{7+4\sqrt{3}}{2}\right);C\left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{2};\frac{7-4\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{2};\frac{7-4\sqrt{3}}{2}\right);C\left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{2};\frac{7+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vậy $A(4;-2)$ và $\left[\begin{array}{l}B\left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{2};\frac{7+4\sqrt{3}}{2}\right);\ C\left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{2};\frac{7-4\sqrt{3}}{2}\right)\\ B\left(\frac{-2-3\sqrt{3}}{2};\frac{7-4\sqrt{3}}{2}\right);\ C\left(\frac{-2+3\sqrt{3}}{2};\frac{7+4\sqrt{3}}{2}\right)\end{array}\right.$.

Tiếp theo ta sẽ tìm hiểu một bài toán xuất phát từ mô hình 1, một bài toán đơn giản, với nhiều cách giải và nhiều gốc độ nhìn nhận vấn đề khác nhau. Từ đây ta có thể rút ra nhiều kinh nghiệm giải toán, chọn hướng giải ngắn gọn và phù hợp nhất để vừa tiết kiệm thời gian trong phòng thi, vừa nhận được số điểm trọn vẹn từ giám khảo khó tính nhất.

Bài toán 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;3)$. Biết rằng chân đường cao kẻ từ A đến BC là $K(-1;1)$. Tìm tọa độ ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{HK}=(0;-2)$.

Gọi M là trung điểm BC suy ra phương trình đường thẳng $IM: x=-3$ (qua I và nhận $\overrightarrow{HK}$ làm vector chỉ phương).

Do đó phương trình đường thẳng $BC: y=1$ (qua K và nhận $\overrightarrow{HK}$ làm vector pháp tuyến).

Vậy ta tìm được tọa độ $M(-3;1)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Theo tính chất đường thẳng Euler ta có $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GI}$, suy ra tọa độ $G\left(-\frac{7}{3};3\right)$.

Mặt khác từ tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM}$, suy ra tọa độ $A(-1;7)$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (tâm I, bán kính IA) là $(I):(x+3)^2+(y-3)^2=20$.

Do đó tọa độ B, C là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x+3)^2+(y-3)^2=20\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-7\end{array}\right.\end{cases}$.

Vậy $A(-1;7)$ và $B(1;1), C(-7;1)$ hoặc $B(-7;1), C(1;1)$.

Nhận xét.

Đây là một bài toán có nhiều hướng tiếp cận khác nhau từ những gợi ý trong mô hình 1 ngày 9. Chúng tôi xin trình bày ba hướng giải quen thuộc và ngắn gọn nhất, bạn đọc có thể rèn luyện bằng cách tìm thêm nhiều hướng ngắn gọn hoặc sáng tạo hơn và hãy mở rộng vấn đề theo nhiều chiều hướng khác nhau để phát triển tư duy và có thể dự đoán được xu hướng ra đề trong kì thi THPT quốc gia 2016 này!

Hướng 1 (lời giải chính thức – tính chất đường thẳng Euler $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GI}$)

$$\left.\begin{array}{l} IM\to BC\to M\\ G\end{array}\right\}\to A;\ \left.\begin{array}{c} A\\ I\end{array}\right\}\to (I);\ \left.\begin{array}{c}(I)\\ BC\end{array}\right\}\to B,C.$$

Hướng 2 (tính chất $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$)

$$\left.\begin{array}{l} IM\to BC\to M\\ H,I\end{array}\right\}\to A;\ \left.\begin{array}{c} A\\ I\end{array}\right\}\to (I);\ \left.\begin{array}{c}(I)\\ BC\end{array}\right\}\to B,C.$$

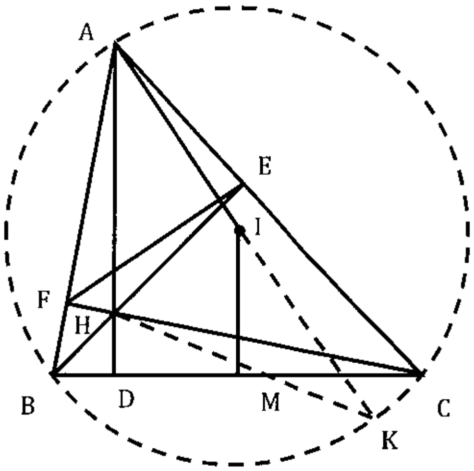
Hướng 3 (tính chất H, Q đối xứng nhau qua BC, với Q là giao điểm thứ hai của AH và (I))

$$\left.\begin{array}{l} H,K\to BC\\ I,Q\to (I)\end{array}\right\}\to B,C;\ \left.\begin{array}{c} AH\\ (I)\end{array}\right\}\to A.$$

Bài toán 12. [Trần Duy Quân] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có trực tâm $H(0;3)$. Gọi D,E,F lần lượt là chân đường cao hạ từ A,B,C của tam giác ABC và $M\left(\frac{3}{2};1\right)$ là trung điểm cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác, biết rằng đường thẳng chứa BC và EF có phương trình lần lượt là $d_1: y-1=0, d_2: 3x-7y+27=0$.

Lời giải:

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, kẻ đường kính AK.



Xét tứ giác CHBK có $CH \parallel BK$ (cùng vuông góc AB), $CK \perp BH$ (cùng vuông góc AC), suy ra CHBK là hình bình hành, mà M là trung điểm BC nên M cũng là trung điểm HK. Ta có $BC: y-1=0$ và $H(0;3)$ nên suy ra phương trình $AD: x=0$. Vì M là trung điểm HK (chứng minh trên) nên suy ra tọa độ $K(3;-1)$. Dựa vào mô hình quen thuộc đã phát biểu và chứng minh ở mô hình 1, ta suy ra $IA \perp EF$. Từ phương trình $EF: 3x-7y+27=0$ và $K(3;-1)$ ta suy ra phương trình đường thẳng $AI: 7x+3y-18=0$.

Vậy $\{A\} = AD \cap AI \Rightarrow A(0;6) \Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. Ta tính được $AI = \frac{\sqrt{58}}{2}$. Phương trình đường tròn $(I;AI)$ là:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{2}.$$

Ta có $\{B;C\} = BC \cap (I;AI)$, suy ra tọa độ B,C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{2} \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ B,C là $(5;1),(-2;1)$ hoặc hoán vị và $A(0;6)$.

Một số bài tập tự luyện

Để kết thúc vấn đề này, xin nêu ra một vài bài tập hay và khó được trích từ hệ thống đề thi tham khảo 2015, 2016 trong hệ thống các trường THPT trong cả nước và một số bài toán do chính tác giả sáng tác.

Bài toán 13. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A(3;5), trực tâm H(3;3), tâm đường tròn ngoại tiếp là I(4;2). Tìm tọa độ các đỉnh B và C biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường chuyên Bạc Liêu – 2015)

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là B(1;1), C(7;1).

Bài toán 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;-2)$, điểm E(10;6) thuộc đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ A và điểm $F(9;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết B có tung độ bé hơn 2.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Đại Học Vinh – Lần 2 – 2015)

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là $A(-4;-2)$, $B(5;1)$, $C(1;3)$.

Bài toán 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2+y^2-3x-5y+6=0$. Trực tâm của tam giác ABC là H(2;2) và đoạn $BC=\sqrt{5}$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết A có hoành độ dương.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Việt Trì – Phú Thọ - Lần 1 – 2016)

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là A(1;4), B(3;2), C(1;1) hoặc A(1;4), B(1;1), C(3;2).

Bài toán 16. [Trần Duy Quân] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có trực tâm $H(0;3)$. Gọi D,E,F lần lượt là chân đường cao hạ từ A,B,C của tam giác ABC và $M\left(\frac{3}{2};1\right)$ là trung điểm cạnh BC. Giả sử BC cắt EF tại $K\left(-\frac{20}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác.

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là A(0;6), $B(-2;1)$, C(5;1) hoặc A(0;6), B(5;1), $C(-2;1)$.

Ngày số 13

Các bài toán về tam giác (tiết 2)

Bài toán 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ đỉnh $A(-3;-4)$. Tâm đường tròn nội tiếp là I(2;1), tâm đường tròn ngoại tiếp là $K\left(-\frac{1}{2};1\right)$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Lời giải:

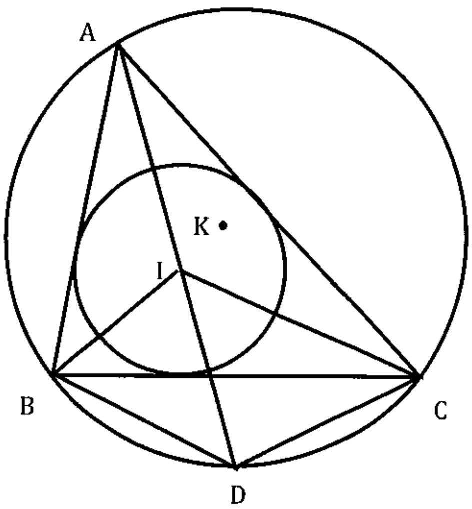
Gọi D là giao điểm thứ hai của AI và (K).

Ta sẽ chứng minh tam giác DBI và tam giác DCI cân tại D.

Thật vậy $DIC = ICA + IAC = ICB + IAB = ICB + BCD = ICD$.

Chứng minh tương tự suy ra $DIB = IBD$.

Vậy ta có đpcm.



Ta tính được $AK = \frac{5\sqrt{5}}{2}$, suy ra phương trình đường tròn $(K): \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AI} = (5;5)$, suy ra phương trình đường thẳng $AD: x - y - 1 = 0$.

Do đó tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4} \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (loại)} \\ x = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{2} \end{cases} \text{ hay } D\left(\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right).$$

Ta tính được $DI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, suy ra phương trình đường tròn $(D): \left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

Vì B, C là giao điểm của (K) và (D), nên ta có hệ $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4} \\ \left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$.

Do đó ta được $10x + 5y = 50$ hay phương trình đường thẳng $BC: 2x + y - 10 = 0$.

Vậy $BC: 2x + y - 10 = 0$.

Đây là một mô hình cơ bản và quen thuộc, tuy nhiên thí sinh cần phát biểu và chứng minh lại thì làm bài để có thể đạt số điểm trọn vẹn. Để rèn luyện thêm mời bạn đọc đến với bài toán sau:

Bài toán 2. [THPT chuyên Vĩnh Phúc – Lần 1 – 2016] Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm J(2;1). Biết đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình $2x + y - 10 = 0$ và $D(2;-4)$ là giao điểm thứ hai của AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC biết B có hoành độ âm và B thuộc đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Đáp số. Tọa độ các đỉnh tam giác ABC là A(2;6), B(–3;–4), C(5;0).

Bài toán 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong ứng với đỉnh A là $7x + 2y - 37 = 0$. Tâm đường tròn nội tiếp là $J\left(\frac{21}{5};\frac{19}{5}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là

$I(5;4)$, bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=3$. Viết phương trình đường thẳng BC biết điểm A có tung độ lớn hơn 4.

Đáp số. Phương trình đường thẳng BC là $y-\frac{181}{75}=0$.

Năm 2015 vừa qua, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã gộp hai kì thi tốt nghiệp THPT và kì thi tuyển sinh ĐH-CĐ thành một kì thi chung, mang tên THPT quốc gia. Và để thực hiện được mục tiêu đó, đề thi phải đáp ứng được hai yêu cầu, hai mức độ nhằm phân loại học sinh. Nhằm giúp cho giáo viên và học sinh trên cả nước nắm được cách thức ra đề, Bộ đã giới thiệu một bộ đề thi minh họa cho kì thi này. Tiếp theo vấn đề Oxy hôm nay, xin giới thiệu một vài bài toán liên quan đến tính chất của tam giác và đường tròn bàng tiếp mà quen thuộc, gần gũi hơn cả là một bài toán hay được trích trong Đề thi minh họa Kì thi THPT quốc gia 2015 môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo:

Bài toán 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A,B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$ và điểm $K\ 6;6$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC=AO$ và các điểm C,B nằm khác phía nhau so với điểm A. Biết điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ của các đỉnh A,B.

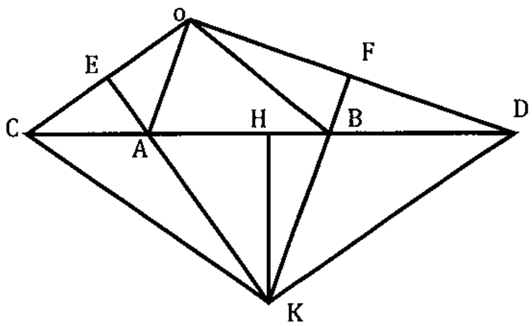
(Trích đề thi minh họa Kì thi THPT quốc gia 2015 – Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Lời giải.

Trên Δ lấy điểm D sao cho $BD=BO$ sao cho D,A nằm khác phía nhau so với B.

Gọi $E=KA\cap OC, F=KB\cap OD$. Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O của ΔOAB nên KE là phân giác của OAC. Mà ΔOAC cân tại A (giả thiết), nên suy ra KE cũng là đường trung trực của OC. Do đó E là trung điểm của OC và $KC=KO$.

Xét tương tự đối với KF, ta cũng có F là trung điểm của OD và $KD=KO$.



Suy ra ΔCKD cân tại K. Do đó, hạ $KH\perp\Delta$, ta có H là trung điểm của CD. Như vậy A là giao của Δ và đường trung trực d_1 của đoạn OC_1 1 ; B là giao của Δ và đường trung trực d_2 của đoạn OD, với D là điểm đối xứng của C qua H và H là hình chiếu vuông góc của K trên Δ 2 .

Vì $C\in\Delta$ và có hoành độ $x_0=\frac{24}{5}$ (giả thiết), nên gọi y_0 là tung độ của C, ta có $y_0=-\frac{12}{5}$.

Từ đó, trung điểm E của OC có tọa độ là $\left(\frac{12}{5};-\frac{6}{5}\right)$ và đường thẳng OC có phương trình $x+2y=0$.

Suy ra phương trình của $d_1: 2x-y-6=0$.

Do đó, theo (1), tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+3y-12=0\\2x-y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(3;0)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $K(6;6)$ và vuông góc với Δ, ta có phương trình của $d: 3x-4y+6=0$. Từ đây, do H là giao điểm của Δ và d nên tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}4x+3y-12=0\\3x-4y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=\dfrac{12}{5}\end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{12}{5}\right) \Rightarrow D\left(-\dfrac{12}{5};\dfrac{36}{5}\right)$.

Do đó, trung điểm F của OD có tọa độ là $\left(-\dfrac{6}{5};\dfrac{18}{5}\right)$ và đường thẳng OD có phương trình: $3x+y=0$.

Suy ra $d_2: x-3y+12=0$.

Do đó theo (2) tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}4x+3y-12=0\\x-3y+12=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=4\end{cases} \Rightarrow B(0;4)$

Vậy $A(3;0), B(0;4)$.

Tiếp theo mời bạn đọc cùng đến với một bài toán về sự tiếp xúc giữa cạnh tam giác và một đường tròn "lạ", không nằm trong số những đường tròn đặc trưng mà chúng ta đã tìm hiểu. Tuy nhiên vẫn thỏa mãn những tính chất quen thuộc của sự tiếp xúc, như các tính chất về tiếp tuyến, góc và khoảng cách.

Bài toán 5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $d: x+y-3=0$. Hình chiếu vuông góc của tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC lên đường thẳng AC là điểm $E(1;4)$. Đường thẳng BC có hệ số góc âm và tạo với đường thẳng AC góc 45^0. Đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn $(C): (x+2)^2+y^2=5$. Tìm phương trình các cạnh của tam giác ABC.

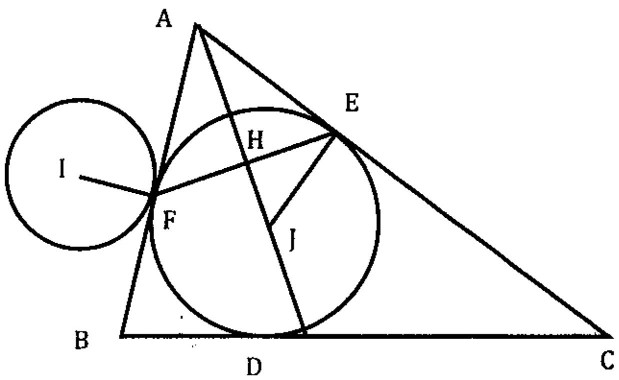
(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – Lần 3 – 2015)

Lời giải.

Gọi F là điểm đối xứng với E qua đường thẳng d. Suy ra tọa độ điểm $F(-1;2)$.

Nhận xét đường tròn (C) có tâm $I(-2;0)$, bán kính $R=\sqrt{5}$ và điểm F thuộc đường tròn (C).

Suy ra đường thẳng AB qua $F(-1;2)$ và vuông góc với IF nên có phương trình $AB: x+2y-3=0$.



Vì A là giao điểm của hai đường thẳng d và AB nên tọa độ điểm A thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y-3=0\\x+2y-3=0\end{cases} \Rightarrow A(3;0).$$

Đường thẳng AC qua $A(3;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AE}=(-2;-4)$ nên có phương trình $AC: 2x+y-6=0$

Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;4)$ và vuông góc với đường thẳng AC có phương trình $\Delta: x-2y+7=0$

Vì J là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ nên tọa độ điểm A thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y-3=0\\x-2y+7=0\end{cases} \Rightarrow J\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right).$$

Gọi vector pháp tuyến của đường thẳng BC là $\vec{n}=(a;b), a^2+b^2\neq 0$.

Ta có $\cos 45^0 = \dfrac{|2a+b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3a^2+8ab-3b^2=0$.

- Với $a=0$ suy ra $b=0$ (loại)

- Với $a \neq 0$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = 3$ hoặc $b = -\frac{1}{3}$ (loại).

Suy ra phương trình có dạng $BC: x + 3y + C = 0$.

Do J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Nên $d(J, AC) = d(J, BC) \Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}-6\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|-\frac{1}{3}+10+C\right|}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow C = \frac{-29-10\sqrt{2}}{3}$ (nhận) hoặc $C = \frac{-29+10\sqrt{2}}{3}$ (loại vì khi đó hai điểm A, J nằm khác phía so với đường thẳng BC)

Suy ra $BC: x + 3y - \frac{29+10\sqrt{2}}{3} = 0$.

Vậy: $AB: x + 2y - 3 = 0$, $AC: 2x + y - 6 = 0$, $BC: x + 3y - \frac{29+10\sqrt{2}}{3} = 0$.

Sau một loạt các bài toán về tính chất tiếp xúc, đường tròn bàng tiếp và đường tròn nội tiếp vừa qua, chắc hẳn các bạn cũng phần nào nắm được những kiến thức cơ bản, rút ra không ít kinh nghiệm riêng cho mình và học tập được cách xử lí những dạng bài ấy. Do đó anh đã kết hợp các mô hình, tính chất ấy lại với nhau, cho ra đời một bài toán tự rèn luyện khá thú vị với cách phát biểu "hơi" khủng tí xíu, dành riêng cho các bạn muốn tìm hiểu sâu hơn và muốn mở rộng dạng toán này. Hi vọng rằng các bạn sẽ vận dụng tốt những kiến thức và kĩ năng như anh đã hướng dẫn trong ngày hôm nay để công phá thành công bài toán này nhé!

Bài toán 6. [Trần Duy Quân] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn ngoại tiếp đường tròn (I). Lấy điểm N trên cạnh BC thỏa mãn chu vi tam giác ABN bằng chu vi tam giác ACN. Đường phân giác trong góc BAC và đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình lần lượt là $d_1: \sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0, d_2: 5x - 2y + 4 = 0$. Kẻ đường thẳng d qua N và vuông góc d_2; d cắt d_1 tại K. Gọi M, P là hình chiếu của K lên đường thẳng AC, AB. Giả sử góc $BIC = 120°, DBP < 90°$ (với D là giao điểm của đường thẳng AI và đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác ABC). Tìm tọa độ điểm A, biết điểm N thuộc trục tung và P có tung độ dương, M có hoành độ âm.

Đáp số. Tọa độ điểm $A\left(5-\sqrt{29}; \sqrt{87}\right)$.

Tiếp theo mời các bạn cùng đến với một tính chất rất hay của sự tiếp xúc, đó chính là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác tại một đỉnh của chính tam giác ấy. Đây là một tính chất không hề xa lạ trong hình học phẳng, nhưng đa số các bạn đều không nhận ra khi nó được che giấu một cách cẩn thận trong bài toán hình tọa độ. Cùng tìm hiểu về tính chất thú vị này qua một vài bài toán được hầu hết học sinh nhận định ở mức độ khá khó mà trước hết là bài toán được trích trong Đề thi chính thức Kì thi tuyển sinh ĐH-CĐ 2014 môn Toán Khối D của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Bài toán 7. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm $D(1;-1)$. Đường thẳng AB có phương trình $3x + 2y - 9 = 0$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $d: x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

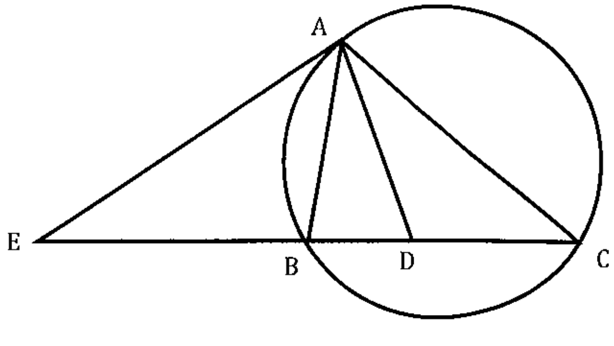
(Trích đề thi chính thức Kì thi tuyển sinh ĐH-CĐ 2014 Khối D – Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Lời giải:

Vì A là giao điểm của hai đường thẳng d và AB nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ phương trình

$\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 3x+2y-9=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$.

Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng d và BC (do AD không vuông góc với đường thẳng d nên điểm E luôn tồn tại và ta có thể giả sử $EB < EC$).



Ta có $EAB = ACB$ và $BAD = DAC$

Suy ra $EAD = EAB + BAD = ACB + DAC = ADE$

Do đó tam giác ADE cân tại E.

Gọi đường thẳng Δ là đường trung trực của cạnh AD, trung điểm M của đoạn thẳng AD có tọa độ $M(1;1)$.

Đường thẳng Δ qua $M(1;1)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AD} = (0;-4)$ nên có phương trình là $\Delta:\ y-1=0$.

Vì E là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ nên tọa độ điểm E thỏa mãn hệ phương trình:

Đường thẳng BC đi qua điểm $E(5;1)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{DE} = (4;2)$ nên có phương trình là $BC: x-2y-3=0$.

Vậy $BC: x-2y-3=0$.

Với cùng mô hình, cùng tính chất và cùng ý tưởng sáng tác, nhưng với cách tiếp cận khác nhau, mức độ khó có nâng cao đôi chút, mời bạn đọc tìm hiểu về bài toán sau đây:

Bài toán 8. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy,cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại Acủa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D,đường phân giác trong của góc ADB là $d: x-y+2=0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Vĩnh Phúc – Lần 2 – 2016)

Với cùng hướng tiếp cận như bài toán 7, ta có lời giải 1 như sau:

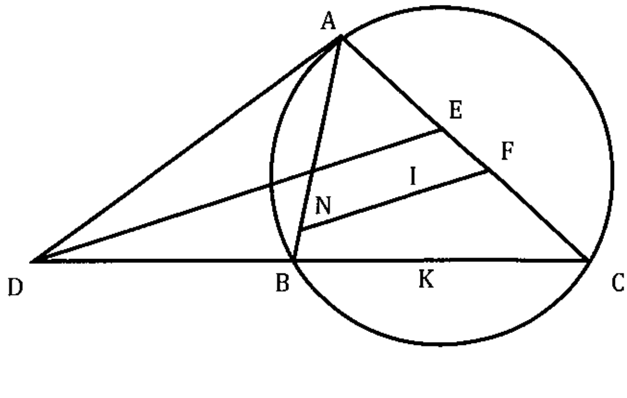
Lời giải 1:

Gọi AK là phân giác góc BAC (K thuộc BC).
Ta sẽ chứng minh tam giác DAK cân tại D.
Thật vậy, ta có:

$DKA = KCA + KAC = BAD + KAB = KAD$

Suy ra tam giác DAK cân tại D (đpcm).
Do đó phân giác của góc ADK chính là đường cao của tam giác DAK, hay ta có $DE \perp AK$ (với E là giao điểm của đường phân giác trong góc ADB và đường thẳng AC).
Vậy ta có phương trình đường thẳng AK là:

$x+y-5=0$.



Gọi N là điểm đối xứng với M qua AK, suy ra phương trình đường thẳng $MN: x-y+5=0$.

Từ đó tìm được giao điểm I của MN và AK có tọa độ I(0;5). Vì I là trung điểm MN nên ta tìm được tọa độ N(4;9).

Ta tính được $\overrightarrow{AN}=(3;5)$.

Vậy đường thẳng AB (qua A và N) có phương trình là $5x-3y+7=0$.

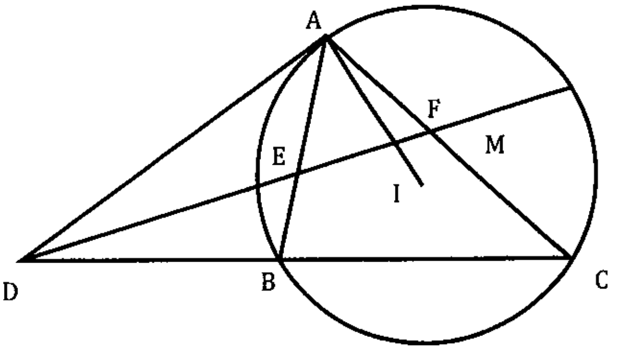
Với một hướng tiếp cận mới mẻ hơn, sáng tạo hơn, ta có lời giải 2 cho bài toán này như sau:

Lời giải 2:

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng d với các đường thẳng AB và AC.

Ta có $\begin{cases} AFD = C+\dfrac{1}{2}ADC \\ AEF=\dfrac{1}{2}ADC+DAB \end{cases}$ mà $C=DAB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

Suy ra $AFD=AEF \Rightarrow AE=AF$.



Đường thẳng AC đi qua $A(1;4)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AC}=(-5;-3)$ nên có phương trình là $AC: 3x-5y+17=0$.

Vì F là giao điểm của hai đường thẳng d và AC nên tọa độ điểm F là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x-5y+17=0 \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right).$$

Gọi điểm $E(t;t+2)$ thuộc đường thẳng d, ta có $\overrightarrow{AE}=(t-1;t-2) \Leftrightarrow AE=\sqrt{(t-1)^2+(t-2)^2}$.

Ta lại có $AF=\sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(4-\frac{11}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2} \Rightarrow AE=\frac{\sqrt{34}}{2}$

Suy ra $\sqrt{(t-1)^2+(t-2)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2} \Leftrightarrow 2t^2-6t-\frac{7}{2}=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$ hoặc $t=\frac{7}{2}$ (loại vì trùng điểm F) $\Rightarrow E\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Đường thẳng AB qua $A(1;4)$ có vector chỉ phương $\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ nên có phương trình là $AB: 5x-3y+7=0$

Vậy phương trình đường thẳng $AB: 5x-3y+7=0$.

Trong hệ thống Đề thi thử Kì thi THPT quốc gia 2015 và 2016 của các trường THPT trong cả nước, xuất hiện rất nhiều mô hình và tính chất hình học quen thuộc trong hình học phẳng, nhưng chúng hết sức mới lạ khi ẩn mình dưới cái tên hình tọa độ. Một trong số đó là tính chất vuông góc của dây cung và đường kính đi qua trung điểm của dây cung ấy, tính chất liên quan đến tứ giác nội tiếp,... Mời bạn đọc cùng tìm hiểu qua bài toán sau đây:

Bài toán 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm I(0; 5). Đường thẳng AI cắt đường tròn tại M 5;0 , $M\neq A$. Đường cao qua C cắt đường tròn tại $N\left(\frac{-17}{5};\frac{-6}{5}\right)$, $N\neq A$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết hoành độ điểm B lớn hơn 0.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 1 – 2016)

Lời giải.

I là trung điểm AM suy ra A $-5;10$.

$\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow$ AM là trung trực của BC $\Rightarrow MB = MC$.

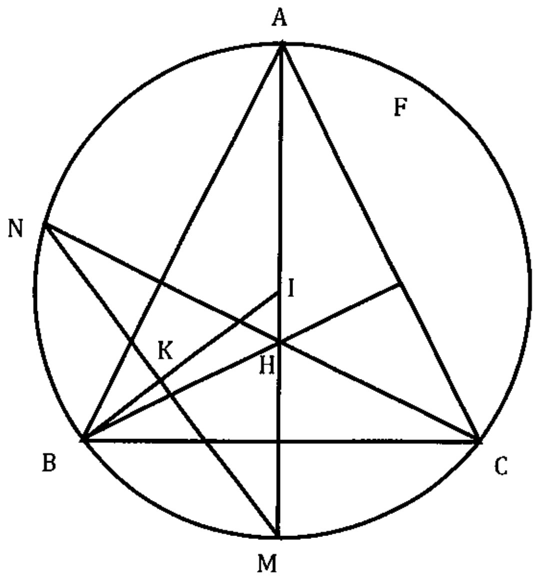
H là trực tâm $\Rightarrow BH \parallel MC$ (cùng vuông góc với AC), $CH \parallel MB$ (cùng vuông góc với AB), do đó tứ giác BMCH là hình bình hành.

Mà $HM \perp BC$ nên BMHC là hình thoi $\Rightarrow$ BC là phân giác của NCM $\Rightarrow BN = BM \Rightarrow \triangle BMN$ cân tại B.

Gọi K là trung điểm MN $\Rightarrow BK \perp MN$. (1)

Mặt khác $\triangle IMN$ có $IM = IN = R \Rightarrow \triangle IMN$ cân tại I $\Rightarrow IK \perp MN$. (2)

Từ 1 , 2 suy ra B,K,I thẳng hàng $\Rightarrow BI \perp MN$.



$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-42}{5}; \frac{-6}{5}\right)$, đường thẳng BI qua I $0;5$ vuông góc với MN, suy ra $BI: 7x + y - 5 = 0$.

$B \in BI \Rightarrow B\ b;5-7b$, $b > 0 \Rightarrow \overrightarrow{IB} = b;-7b$, ta có $IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow b^2 + 49b^2 = 50 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow B\ 1;-2$.

Đường thẳng BC qua B $1;-2$ vuông góc với IM, suy ra $BC: x - y - 3 = 0$.

$C \in CB \Rightarrow C\ c;c-3$, ta có $IC^2 = IM^2 \Leftrightarrow c^2 + (c-8)^2 = 50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(1;-2) \equiv B \\ C(7;4) \end{array}\right.$, do đó ta loại C $1;-2$.

Vậy A $-5;10$,B $1;-2$,C $7;4$.

Nhận xét. *Mấu chốt của bài toán là việc chứng minh được* $IB \perp MN$. *Ngoài hướng tiếp cận như trong lời giải (lời giải chính thức của người biên soạn đề), chúng ta còn có một hướng tiếp cận khác ngắn gọn và hiệu quả hơn, xin giới thiệu bổ sung cho bạn đọc cùng tìm hiểu.*

Chứng minh $IB \perp MN$ *: Ta có* BAM = BCN *(cùng phụ* ABC *), suy ra* BM = BN *(cung đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC), hay nói cách khác B chính là điểm chính giữa cung MN. Do đó* $IB \perp MN$ *(đpcm).*

Để nâng cao kĩ năng làm bài của các bạn và kiểm tra lại kiến thức anh đã trình bày, xin nêu ra một bài tập hoàn toàn tương tự cho các em tự rèn luyện thêm. Chú ý rằng mặc dù mô hình và tính chất hình học quen thuộc nhưng khi làm bài thi cần phát biểu và chứng minh lại hoàn chỉnh để có thể đạt được số điểm trọn vẹn.

Bài toán 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (C) có tâm I và phương trình là $(x-1)^2 + y^2 = 25$. Đường trung tuyến AE cắt đường tròn (C) tại M $-2;-4$, $M \neq A$. Đường cao CD cắt đường tròn tại N $4;-4$, $N \neq A$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ điểm B nhỏ hơn 0.

Đáp số. Tọa độ các đỉnh của tam giác ABC là A(4;4), $B(1;-5)$, $C\left(-\frac{19}{5}; -\frac{7}{5}\right)$.

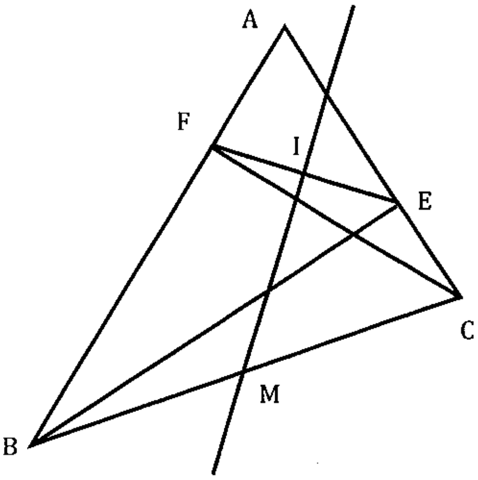
Trong hôm nay chúng ta đã gặp không ít những mô hình quen thuộc, nhưng từ đó có thể sáng tạo nên những bài toán hết sức thú vị. Để kết thúc phần kiến thức ngày hôm nay, xin gửi đến bạn đọc một tính chất hay liên quan đến yếu tố vuông góc thông qua hai bài toán sau đây:

Bài toán 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC, gọi E,F lần lượt là hình chiếu của các đỉnh B,C lên các cạnh AC,AB. Các đường thẳng BC,EF lần lượt có phương trình là $BC: x-4y-12=0, EF: 8x+49y-6=0$, trung điểm I của EF nằm trên đường thẳng $\Delta: x-12y=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $BC=2\sqrt{17}$ và đỉnh B có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hai Bà Trưng – Lần 3 – 2015)

Lời giải.

Vì $I\in\Delta$ nên $I\ 12m;m$, mà $I\in EF$ nên ta có $m=\dfrac{6}{145}$, suy ra $I\left(\dfrac{72}{145};\dfrac{6}{145}\right)$.



Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với EF, ta có: $d: 49x-8y-24=0$. Đường thẳng d cắt BC tại trung điểm M của BC, do vậy $M\ 0;-3$.

Ta có $BM=\sqrt{17}$, gọi $B\ 4b+12;b\ \in BC$, ta có:

$$4b+12^{\ 2}+\ b+3^{\ 2}=17\Leftrightarrow 17b^2+102b+136=0$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=-2\Rightarrow B(4;-2)\\ b=-4\Rightarrow B(-4;-4)\end{array}\right.$, xét điều kiện đầu bài ta nhận $B\ -4;4\ \Rightarrow C\ 4;-2$ .Lấy $E\left(e;\dfrac{6-8e}{49}\right)$, ta có $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{EC}=0$

Do vậy $E\left(\dfrac{16}{5};-\dfrac{2}{5}\right),F\left(-\dfrac{64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$ hoặc $F\left(\dfrac{16}{5};-\dfrac{2}{5}\right),E\left(-\dfrac{64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$.

Với $E\left(\dfrac{16}{5};-\dfrac{2}{5}\right),F\left(-\dfrac{64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$. Ta có $BE: x-2y-4=0, CF: 2x+5y+2=0$, suy ra $A\left(\dfrac{16}{9};-\dfrac{10}{9}\right)$ (loại vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}<0\Rightarrow\cos\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\ <0\Rightarrow A>90^\circ$).

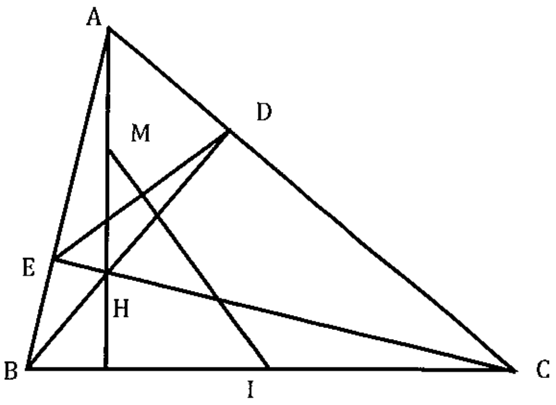
Với $F\left(\dfrac{16}{5};-\dfrac{2}{5}\right),E\left(-\dfrac{64}{29};\dfrac{14}{29}\right)$. Ta có $BE: 5x-2y+12=0, CF: 2x+y-6=0$, suy ra $A\ 0;6$ (thỏa mãn).

Vậy $A\ 0;6\ ,B\ -4;-4\ ,C\ 4;2$.

Nhận xét. *Mấu chốt của bài toán là yếu tố vuông góc giữa MI và EF. Tính chất này được chứng minh như sau: Chứng minh* $EF\perp MI$ *: Ta có* $BEC=BFC=90^\circ$, *suy ra tứ giác BFEC nội tiếp được trong một đường tròn. Vì M là trung điểm BC nên M chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC. Mặt khác ta có I là trung điểm dây cung EF của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC. Do đó* $EF\perp MI$ *(tính chất vuông góc của dây cung và đường kính đi qua trung điểm của dây cung ấy). Vậy ta có đpcm.*

Bài toán 12. [THPT Bình Minh – Vĩnh Long – 2015] Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng $AH: x+2y-3=0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng $DE: x-2=0$ và điểm D có tung độ dương.

Lời giải.



Các tứ giác BEDC, HEAD nội tiếp:

$\Rightarrow MI \perp ED \Rightarrow MI: y = 1$

$\Rightarrow M = MI \cap AH = (1;1) \Rightarrow A(-1;2)$.

Ta có:

$BD \perp AC; D \in ED \Rightarrow D(2;t), MD = \sqrt{1+(t+1)^2}, MA = \sqrt{5}$

Mà $MA = MD \Rightarrow t - 1 = \pm 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(2;3) \\ D(2;-1) \end{array}\right.$,

nhận $D(2;3)$.

Ta lại có $AC: x - 3y + 7 = 0$, $BC: 2x - y - 11 = 0$.

Vì C là giao điểm của hai đường thẳng AC và BC nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ 2x - y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(8;5)$.

Vì $I(6;1)$ là trung điểm đoạn BC nên tọa độ điêm B là $B(4;-3)$.

Vậy $A(-1;2)$, $B(4;-3)$, $C(8;5)$.

Nhận xét. *Mấu chốt của bài toán là yếu tố vuông góc giữa MI và ED. Tính chất này có thể dễ dàng được chứng minh như sau:*

Chứng minh $ED \perp MI$ *: Ta có* $BEC = BDC = 90^\circ$ *, suy ra tứ giác BEDC nội tiếp được trong một đường tròn. Vì I là trung điểm BC nên I chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BEDC. Mặt khác ta có* $AEH = ADH = 90^\circ$ *suy ra tứ giác AEHD nội tiếp được trong một đường tròn. Vì M là trung điểm AH nên M chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHD. Dễ thấy MI là đường nối tâm hai đường tròn và DE là dây chung của hai đường tròn ấy, do đó ta có* $ED \perp MI$ *(đpcm).*

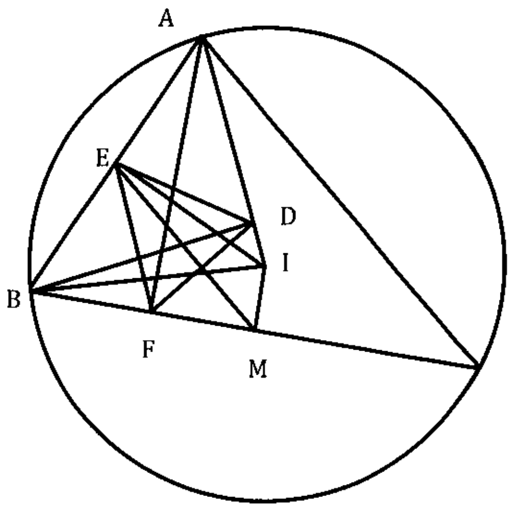
Ngày số 14

Các bài toán về tam giác (tiết 3)

Bài toán 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I, điểm $M(2;-1)$ là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của B lên AI là $D\left(\frac{9}{5};\frac{-8}{5}\right)$. Biết rằng AC có phương trình $x+y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Văn Trỗi – Hà Tĩnh – Lần 1 – 2016)

Lời giải:



Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên BC, E là trung điểm AB. Ta có tứ giác $BFDA$ nội tiếp đường tròn đường kính AB và ngũ giác $BEDIM$ nội tiếp đường tròn đường kính BI.

Suy ra $DEM = DBM = DBF = \frac{1}{2}DEF$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung) nên EM là phân giác của góc DEF, mặt khác $FE = DE = \frac{1}{2}AB$ nên ME là đường trung trực của DF. Đường thẳng ME qua M và song song với AC nên có phương trình $x+y-1=0$, F đối xứng với D qua ME nên $F\left(\frac{13}{5};\frac{-6}{5}\right)$, $\overrightarrow{MF}=\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$ nên VTPT của BC là $\vec{n}(1;-3)$ suy ra phương trình BC là $x-3y-5=0$.

Tọa độ C là nghiệm hệ $\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-3y-5=0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$.

M là trung điểm BC suy ra $B(-1;-2)$.

AF qua F và vuông góc với BC nên AF có phương trình $3x+y-\frac{33}{5}=0$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3x+y-\frac{33}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;4)$.

Vậy tọa độ các đỉnh tam giác là $A(1;4)$, $B(-1;-2)$, $C(5;0)$.

Nhận xét: *Một trong số những kiến thức cơ bản của hình học phẳng là vấn đề về tứ giác nội tiếp. Từ những gì cơ bản nhất, sau quá trình kết hợp, mở rộng, thêm bớt vài chi tiết mới lạ sẽ cho ra đời một bài toán hay và khó, đó chính là tư duy sáng tác chính của bài toán nêu trên. Qua đó anh muốn khuyên các bạn, trong quá trình ôn luyện, không thể xem nhẹ những kiến thức cơ bản mà anh đã cung cấp, ngược lại các bạn cần phải học tập thật kĩ những mô hình và tính chất ấy. Ngoài ra, qua bài toán này ta có thể rút ra một kinh nghiệm nhỏ, chính là cần chú ý đến những yếu tố vuông góc, góc bằng nhau,... trong hình vẽ, dẫn đến việc chứng minh các tứ giác nội tiếp và cuối cùng là sử dụng một vài ứng dụng của tứ giác nội tiếp để giải quyết bài toán.*

Nhằm giúp các bạn hiểu rõ vấn đề hơn, mời các bạn cùng tự rèn luyện thêm với bài toán sau:

Bài toán 2. [THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An – Lần 2 – 2015] Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Điểm $M(2;-1)$ là trung điểm cạnh BC và điểm $E\left(\frac{31}{13};-\frac{1}{13}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AI. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng AC có phương trình $3x+2y-13=0$.

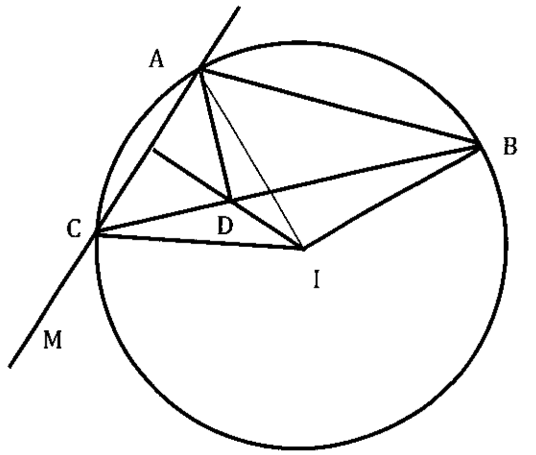
Đáp số. Tọa độ các đỉnh của tam giác ABC là $A(1;5), B(-1;-1), C(5;-1)$.

Trong ngân hàng đề thi thử kì thi THPT quốc gia năm 2015, có đến hai trường cùng sử dụng một bài toán hay làm đề thi thi cho trường mình. Phần kiến thức được nêu ra trong bài toán này vẫn xoay quanh mối quan hệ của tam giác, đường tròn ngoại tiếp và một số tính chất về góc nội tiếp. Từ đó ta có thể dự đoán được xu hướng ra đề mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo đa phần sẽ liên quan đến tam giác, đường tròn và vấn đề nội tiếp trong hình học phẳng. Minh chứng cụ thể nhất cho dự đoán này chính là bài toán hình tọa độ trong Đề thi chính thức Kì thi THPT quốc gia 2015 của Bộ - một bài toán rất hay và thú vị mà chúng ta sẽ cùng tìm hiểu ở phần cuối chuyên đề. Bây giờ mời các bạn đến với bài toán sau:

Bài toán 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $AIB = 90^\circ$, chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết rằng đỉnh A có hoành độ dương.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chu Văn An – Hà Nội – 2015)

Lời giải:



Do $AIB = 90^\circ \Rightarrow ACB = 45^\circ$ hoặc $ACB = 135^\circ$

$\Rightarrow ACD = 45^\circ$ suy ra tam giác ACD vuông cân tại D nên $DA = DC$. Hơn nữa $IA = IC \Rightarrow DI \perp AC$ suy ra đường thẳng AC thỏa mãn điều kiện AC qua điểm M và AC vuông góc ID.

Phương trình đường thẳng $AC: x-2y+9=0$.

Gọi $A(2a-9;a) \in AC$.

Do $DA = \sqrt{2}d(D, AC) = 2\sqrt{10}$ nên:

$$\sqrt{(2a-8)^2+(a+1)^2} = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow a^2-6a+5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \Rightarrow A(-7;1) \\ a=5 \Rightarrow A(1;5) \end{array}\right., \text{ nhận } A(1;5).$$

Phương trình đường thẳng $DB: x+3y+4=0$.

Gọi $B(-3b-4;b)$. Vì tam giác IAB vuông tại I nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 3(-3b-2)+4(b-1)=0 \Leftrightarrow b=-2 \Rightarrow B(2;-2)$

Vậy $A(1;5), B(2;-2)$.

Với bài toán này, chúng ta có rất nhiều hướng phát triển và mở rộng, chẳng hạn như khi ẩn nó trong một mô hình khác (ẩn yếu tố tam giác vào một hình vuông) nhằm làm lệch hướng suy nghĩ, thay đổi cách phát biểu và tên điểm – đường nhằm tránh đi mô hình quen thuộc,... Khi đó ta sẽ có một bài toán mới, tuy mức độ không cao hơn nhưng độ phức tạp có nâng lên đôi chút. Để làm quen với cách sáng tác như vậy, mời bạn đọc cùng rèn luyện thêm kĩ năng với bài toán sau:

Bài toán 4. [Trần Duy Quân] Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tọa độ $B(-2;1)$ Trên đường tròn tâm B, bán kính BC, lấy điểm M thuộc cung lớn AC sao cho M, B, D không thẳng hàng.

Chân đường vuông góc kẻ từ A xuống MC là $K(-1;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A,C của hình vuông biết rằng điểm $H(-1;4)$ thuộc đường thẳng chứa đoạn MA và đỉnh A có hoành độ dương.

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là $A(1;5), C(2;-2)$.

Trong chương trình toán THCS, chắc hẳn các bạn đã ít nhất một lần gặp phải bài toán kinh điển sau:

"Cho tam giác ABC đều nội tiếp trong đường tròn tâm I. Lấy M trên cung BC không chứa A. Chứng minh rằng $MA = MB + MC$ *".*

Lời giải bài toán không quá khó, mấu chốt là việc gọi thêm điểm N trên đoạn MA sao cho $MN = MB$. *Sau đó là chứng minh tam giác bằng nhau và hoàn thiện lời giải. Tuy nhiên, từ bài toán đơn giản ấy, chúng ta có nhiều hướng phát triển. Nếu như ở các lớp chuyên Toán, chúng ta sẽ có những bài toán hình học phẳng căng não và phức tạp; thì ở chương trình phổ thông, chúng ta có thể mở rộng theo hướng hình học giải tích. Một trong số những ứng dụng đó chính là bài toán thú vị chúng ta cùng tìm hiểu sau đây:*

Bài toán 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác đều ABC có $A(4;-1)$, điểm $M\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3};3\right)$ thuộc cung BC không chứa điểm A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $MC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ và tọa độ điểm B là các số nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác ABC.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hồng Quang – Hải Dương – Lần 2 – 2015)

Lời giải:

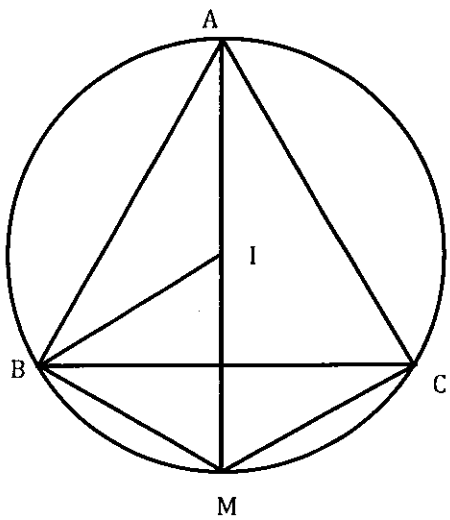
Ta sẽ chứng minh $MA = MB + MC$.

Trên đoạn thẳng AM lấy điểm I sao cho $MB = MI$ (1), vì $BCA = BMA = 60$ nên tam giác MBI đều $\Rightarrow BM = BI$ và $ABI + IBC = MBC + IBC = 60^\circ \Rightarrow ABI = MBC$.

Mặt khác $BA = BC$ suy ra $\Delta BIA = \Delta BMC$ (c.g.c).

$\Rightarrow MC = AI$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MB + MC = MI + AI = MA$.



Ta có $MA = \frac{8\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MA = 2MC = MB + MC \Rightarrow MB = MC$ và $AB = AC$ nên suy ra MA là đường trung trực của đoạn thẳng BC nên MA là một đường kính nữa của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Hai cạnh AB và AC nằm trên các đường thẳng qua A và tạo với AM một góc 30°.

Phương trình AB, AC có dạng: $\Delta: a(x-4) + b(y+1) = 0\ (a^2 + b^2 > 0)$.

$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{-4\sqrt{3}}{3}; 4\right) \Rightarrow \vec{n}_{AM} = \left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ là VTPT của AM.

Gọi α là góc tạo bởi AB, AC với AM ta có $\alpha = 30^\circ$.

$$\cos\alpha = \frac{\left|a.1 + b.\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \sqrt{3}ab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, a = 1 \\ b = \sqrt{3}, a = 1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \Delta: x-4=0$ hoặc $\Delta': x+\sqrt{3}y-4+\sqrt{3}=0$

Vì AM là một đường kính nên góc $MBA = MCA = 90$, phương trình các đường thẳng MB,MC qua M và vuông góc với Δ và Δ' lần lượt là $y-3=0$ và $\sqrt{3}y-y+7-4\sqrt{3}=0$.

Tọa độ B,C là nghiệm của các hệ phương trình

$$\begin{cases} x-4=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x+\sqrt{3}y-4+\sqrt{3}=0 \\ \sqrt{3}x-y+7-4\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$$

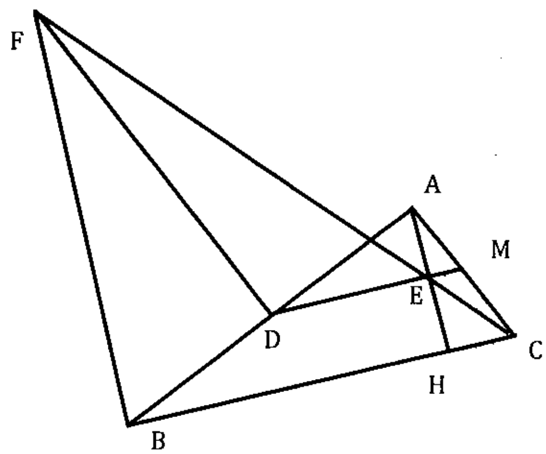
Vì tọa độ B là các số nguyên nên $B(4;3), C\left(4-2\sqrt{3};1\right)$.

Trong chương trình toán THCS, có hai định lí hình học nổi tiếng mà dường như các bạn học sinh luôn thuộc nằm lòng, đó chính là định lí Pythagore và định lí Thalès. Tuy nhiên, khi tiếp cận chương trình toán THPT, nhiều công cụ, phương pháp, định lí mới xuất hiện và tỏ ra hiệu quả hơn nhiều trong quá trình giải toán. Và cũng từ đó hai định lí nổi tiếng kia đã bị lãng quên. Qua bài toán tiếp đến đây, xin nhắn nhủ đến các bạn, bất cứ kiến thức nào cũng rất quan trọng, dù sớm hay muộn thì nó vẫn luôn tỏ ra rất lợi hại trong một số tình huống đặc trưng.

Bài toán 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và AH. Đường thẳng vuông góc với AB tại D cắt đường thẳng tại CE tại $F(-1;3)$. Đường thẳng BC có phương trình là $x-2y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm D thuộc đường thẳng $3x+5y=0$ và có hoành độ của điểm D là số nguyên.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hồng Quang – Hải Dương – Lần 3 – 2015)

Lời giải:



Gọi điểm M là giao điểm của hai đường thẳng DE và AC.

Theo giả thiết, ta có $FD \perp AB$; $AC \perp AB \Rightarrow FD \parallel AC$

Áp dụng định lý Thalès, ta có:

$$\frac{CE}{EF} = \frac{ME}{ED} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow \frac{CE}{EF} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow EH \parallel BF \Rightarrow BF \perp BC.$$

Đường thẳng FB đi qua $F(-1;3)$ và vuông góc với BC nên nó nhận vector chỉ phương của đường thẳng BC là $\vec{u}=(2;1)$ là vector pháp tuyến

Phương trình đường thẳng $BF: 2x+y-1=0$.

Vì điểm B là giao điểm của hai đường thẳng BF và BC nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right).$$

Gọi $D\left(d;-\frac{3d}{5}\right), (d \in \mathbb{Z})$ thuộc đường thẳng $3x+5y=0$.

Ta có $\overrightarrow{FD} = \left(d+1;-\frac{3d}{5}-3\right)$; $\overrightarrow{BD} = \left(d-\frac{1}{5};-\frac{3d}{5}-\frac{3}{5}\right)$

Mà $BD \perp FD \Leftrightarrow \overrightarrow{FD}.\overrightarrow{BD}=0 \Rightarrow 17d^2+37d+20=0 \Leftrightarrow d=-1$ hoặc $d=-\frac{20}{17}$ (loại).Vậy $D\left(-1;\frac{3}{5}\right)$.

Vì D là trung điểm của AB nên điểm A có tọa độ là $A\left(-\frac{11}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Đường thẳng AC đi qua $A\left(-\frac{11}{5};\frac{3}{5}\right)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{12}{5};0\right)$

Phương trình đường thẳng $AC: x+\frac{11}{5}=0$.

Vì điểm C là giao điểm của hai đường thẳng BC và AC nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x+\frac{11}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{11}{5};-\frac{3}{5}\right).$$

Vậy $A\left(-\frac{11}{5};\frac{3}{5}\right)$, $B\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$, $C\left(-\frac{11}{5};-\frac{3}{5}\right)$.

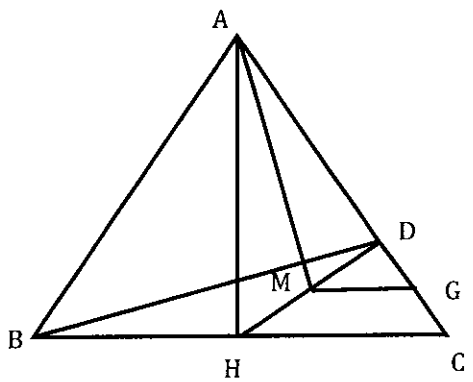
Trong đa số các bài toán hay và khó của hình tọa độ, ngoài yếu tố nội tiếp thì yếu tố vuông góc cũng rất thường xuất hiện. Do đó, các bạn thí sinh cần rèn luyện kĩ năng dự đoán và chứng minh vuông góc. Cách dự đoán cơ bản nhất là vẽ hình chính xác và ước lượng góc vuông, ngoài ra cũng có thể dựa vào các dữ kiện ban đầu của đề bài và xâu chuỗi, liên kết chúng lại với nhau. Về phương pháp chứng minh vuông góc chắc hẳn rất đa dạng, từ quen thuộc đến xa lạ đều đã được trình bày rất nhiều trong quá trình học toán phổ thông. Nhân đây xin nhắc lại những kĩ thuật thường gặp nhất, chẳng hạn như dùng định lí đảo định lí Pythagore, dùng tính chất hình học phẳng (tam giác bằng nhau, đồng dạng, biến đổi góc, yếu song song – vuông góc, ứng dụng tứ giác nội tiếp, đường tròn, phương tích – trục đẳng phương,...), dùng hệ thức lượng trong tam giác (định lí sin – cosin và một số công thức tính toán giá trị lượng giác), dùng vector (tích vô hướng),...

Mấu chốt của bài toán sau đây là việc dự đoán và chứng minh vuông góc. Đây là một bài toán hay, cái hay ở chỗ có rất nhiều hướng chứng minh vuông góc (chẳng hạn như gọi thêm điểm phụ; dùng tam giác đồng dạng; tích vô hướng hai vector,...), xin trình bày lời giải chuẩn nhất theo đáp án chính thức và mời bạn đọc cùng rèn luyện thêm việc chứng minh vuông góc bằng những phương pháp kĩ thuật mà anh đã gợi ý.

Bài toán 7. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A với đường cao AH. Gọi HD là đường cao tam giác AHC và $M\left(\frac{3}{4};\frac{15}{4}\right)$ là trung điểm đoạn thẳng HD. Biết A thuộc đường thẳng $d: x+y-4=0$ và đường thẳng BD có phương trình $x-3y+10=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, C biết hoành độ điểm H nguyên.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Cổ Loa – Hà Nội – 2015)

<u>Lời giải:</u>



Vì tam giác ABC cân nên AH là đường cao. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng CD thì GM là đường trung bình của tam giác DHC nên $GM \parallel HC$. Suy ra $GM \perp AH$.

Mà $GM \perp AH$ nên $AM \perp HG$.

Mặt khác, ta có HG là đường trung bình của tam giác BDC nên $HG \parallel BD$.

Vậy $AM \perp BD$.

Đường thẳng AM qua $M\left(\frac{3}{4};\frac{15}{4}\right)$ và vuông góc với BD nên có phương trình $AM: 3x+y-6=0$.

Vì điểm A là giao điểm của hai đường thẳng d và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;3).$$

Gọi điểm $D(3d-10,d)$ thuộc đường thẳng $BD: x-3y+10=0$.

Mặt khác, ta có $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MD}=0 \Rightarrow 10d^2-72d+\frac{259}{2}=0 \Leftrightarrow d=\frac{7}{2}$ hoặc $d=\frac{37}{10}$.

- Với $d=\frac{7}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right) \Rightarrow H(1;4)$, phương trình $AD: x+y-4=0$. Đường thẳng BC đi qua $H(1;4)$ và nhận $\overrightarrow{AH}=(0;1)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình $BC: y-4=0$.

Suy ra $C(0;4)$.

- Với $d=\frac{37}{10} \Rightarrow D\left(\frac{11}{10};\frac{37}{10}\right) \Rightarrow H\left(\frac{2}{5};\frac{19}{5}\right)$ loại do điểm H có hoành độ nguyên.

Vậy $A(1;3)$, $C(0;4)$.

Không có gì thuyết phục hơn một bài toán trích trong đề thi chính thức, và hơn cả chính là bài toán đầu tiên của Kì thi THPT quốc gia, kì thi đã mở ra một chương mới cho ngành giáo dục của Việt Nam. Trong bài toán này, chúng ta có thể thấy sự kết hợp hết sức tinh tế của những yếu tố tam giác, đường tròn, vuông góc và nội tiếp. Mời bạn đọc cùng đến với bài toán được mong chờ nhất trong năm 2015 vừa qua!

Bài toán 8. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5;-5)$, $K(9;-3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$. Tìm tọa độ điểm A.

(Đề thi chính thức Kì thi THPT quốc gia 2015 – Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Lời giải:

Gọi M là trung điểm đoạn thẳng AC.

Ta có $MH=MK=\frac{1}{2}AC$ nên M thuộc đường trung trực của HK.

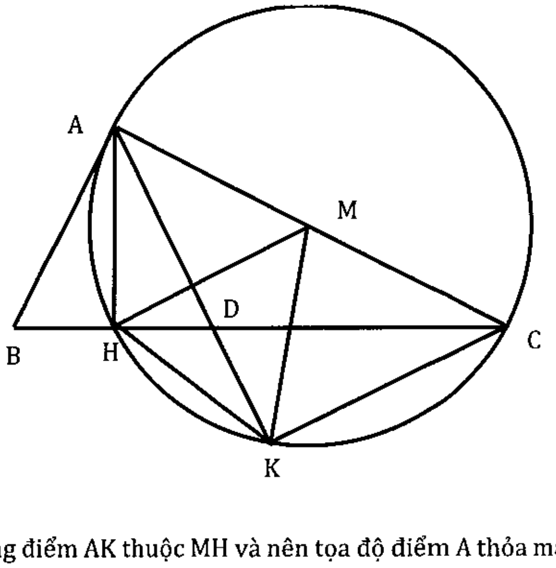
Đường trung trực của HK có phương trình $7x+y-10=0$, nên tọa độ của M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y+10=0 \\ 7x+y-10=0 \end{cases} \Rightarrow M(0;10).$$ Ta có

$HKA=HCA=HAB=HAD$, nên tam giác AHK cân tại H, suy ra $HA=HK$.

Mà $MA=MK$, nên A đối xứng với K qua MH.

Ta lại có $\overrightarrow{MH}=(5;15)$;



Đường thẳng MH có phương trình $3x-y+10=0$. Trung điểm AK thuộc MH và nên tọa độ điểm A thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3\left(\frac{x+9}{2}\right)-\left(\frac{y-3}{2}\right)+10=0 \\ (x-9)+3(y+3)=0 \end{cases} \Rightarrow A(-15;5).$$

Vậy $A(-15;5)$ thỏa yêu cầu đề bài.

Để kết thúc ngày 14 hôm nay, cũng như kết thúc vấn đề về tam giác, xin nêu một vài lưu ý và kinh nghiệm cho các bạn thí sinh. Thứ nhất các bạn cần chú ý học tập thật kĩ phần kiến thức cơ bản, nắm vững những mô hình và tính chất quen thuộc để có thể nhanh chóng nhận ra và công phá bài toán. Thứ hai, chú ý các yếu tố quan trọng anh đã dự đoán và một số những mô hình hay, khó, lạ anh đã trình bày trong thời gian qua. Thứ ba là việc trình bày bài làm, cần phát biểu và chứng minh lại những kiến thức không có sẵn trong sách giáo khoa, trình bày rõ ràng, vẽ hình chính xác, dự đoán nhanh chóng và hoàn thiện lời giải thật nhanh chóng và chính xác.

Cuối cùng xin nêu một vài bài toán khó và thú vị cho các bạn rèn luyện tư duy và kĩ năng.

Bài toán 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm AC. Điểm $K(1;0)$ và $E\left(\frac{1}{3};4\right)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và trọng tâm tam giác ABD. Điểm $P(-1;6)$ và $Q(-9;2)$ lần lượt thuộc AC và BD. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng điểm D có hoành độ dương.

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là $A(7;6)$, $B(-9;2)$, $C(-1;-2)$.

Bài toán 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(6;1)$. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và trực tâm tam giác DBC là $H(4;-2)$. Giả sử HM cắt DI tại $G\left(\frac{16}{3};-\frac{4}{3}\right)$, với M là trung điểm BC. Tính diện tích tam giác ABC.

Đáp số. Diện tích tam giác $S_{ABC}=15$ (đvdt).

Bài toán 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có phương trình là $x^2+y^2-x-5y+4=0$. Biết rằng H thuộc đường thẳng có phương trình $\Delta: 3x-y-4=0$ và $M(2;3)$ là trung điểm AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Đáp số. Tọa độ các đỉnh là $A(3;2)$, $B(1;4)$, $C(1;1)$.

Ngày số 15

Hình vuông, hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành (tiết 1)

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD tâm I. Biết trung điểm cạnh AB là M(0; 3), trung điểm đoạn thẳng IC là E(1; 0) và điểm A có tọa độ nguyên. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Kim Liên-2016)

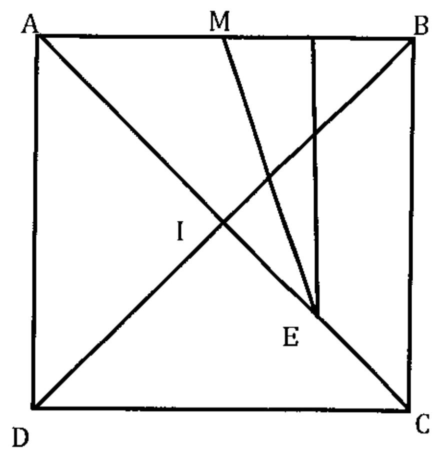
Sơ đồ tư duy:

Với giả thiết cho duy nhất là hai điểm và hình vuông thì ta phải tận dụng tính chất hình vuông!

Tính chất hình vuông: Các cạnh bằng nhau và hai cạnh kề nhau thì vuông góc với nhau. Hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường.

Ta có:

$$E; M \to \text{đường thẳng } EM?$$



Từ tính chất hình vuông nên ta hoàn toàn tính được các cạnh MH;EH theo cạnh hình vuông. Điểm H là hình chiếu vuông góc của E với AB. Mục đích lấy điểm H là chân đường vuông góc là vì anh muốn tính góc $\widehat{EMB}$. Ngoài ra, ta cũng có thể tính góc $\widehat{AEM}$ bằng cách kẻ MK vuông góc AC (theo anh nghĩ lời giải kẻ MK vuông góc AC sẽ ngắn hơn ý tưởng một, thế nhưng anh muốn trình bày cách dài để em suy ngẫm thêm).

Mục đích tính một trong hai góc trên, đơn thuần là để xác định đường thẳng AB hoặc AC theo bài toán qua một điểm và hợp với một góc.

$$AC; MA = ? \to A? \to B? \xrightarrow{I} C; D?$$

Lời giải chi tiết:

Đặt $\alpha = \widehat{AEM}, 0° < \alpha < 90°$, ta có:

$$\tan EMB = \frac{BF}{BM} = 3 \Leftrightarrow \tan(45° + \alpha) = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = 3 \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Phương trình đường thẳng ME là : $3x + y - 3 = 0$

Đường thẳng AC đi qua điểm E(1; 0) và tạo với đường thẳng ME góc α sao cho $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ có pt là: $x - y + 1 = 0$ hoặc $-7x + y + 7 = 0$

TH1. Ptđt AC là: $x + y - 1 = 0$

$\Rightarrow d(M, AC) = \sqrt{2} \Rightarrow AM = MI = 2$. Suy ra phương trình đường tròn tâm M qua A và I là: $x^2 + (y-3)^2 = 4$

Tọa độ A và I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vì I nằm giữa A và E nên $A(-2; 3), I(0; 1) \Rightarrow B(2; 3), C(2; -1), D(-2; -1)$ (thỏa mãn)

TH2. Ptđt AC là: $-7x + y + 7 = 0$

Tương tự tìm được tọa độ A nhưng không nguyên nên loại.

Tóm lại tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD là $A(-2; 3), B(2; 3), C(2; -1), D(-2; -1)$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh C thuộc đường thẳng d: $x + 2y - 6 = 0$, điểm M (1; 1) thuộc cạnh BD biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Bình Minh 2016)

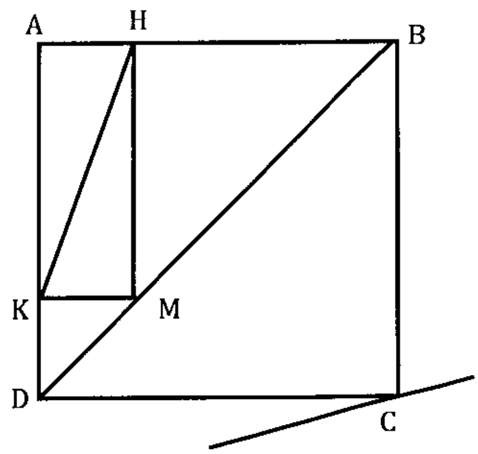
Sơ đồ tư duy:

Tính chất cần nhớ: $CM \perp HK$.

(gợi ý: sử dụng tam giác bằng nhau)

Khi đó, ta có:

$$HK; CM \perp HK \to CM?$$
$$CM; d \to C?$$



Lời giải chi tiết

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AD.

Gọi N là giao điểm của KM và BC.

Gọi I là giao điểm của CM và HK.

Ta có ΔDKM vuông tại K và $\widehat{DKM} = 45°$

$\Rightarrow KM = KD \Rightarrow KM = NC$ (1)

Lại có MH = MN (do MHBN là hình vuông) suy ra hai tam giác vuông KMH, CNM bằng nhau $\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{MCN}$

Mà $\widehat{NMC} = \widehat{IMK}$ nên $\widehat{NMC} + \widehat{NCM} = \widehat{IMK} + \widehat{HKM} = 90°$

Suy ra $CI \perp HK$.

Đường thẳng CI đi qua M(1; 1) và vuông góc với đường thẳng d nên VTPT $\overrightarrow{n_{CI}}$=VTPT $\overrightarrow{u_d} = (-1; 1)$ nên có phương trình: $-(x-1) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

Do điểm C thuộc đường thẳng CI và đường thẳng Δ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy C(2; 2).

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh C(2; −5) và nội tiếp đường tròn tâm I. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (I) lấy điểm E, trên tia đối của tia EA lấy điểm M sao cho EM = EC. Tìm tọa độ đỉnh A, biết đỉnh B thuộc đường thẳng d: $y - 2 = 0$ và điểm M(8; −3).

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Phú Yên 2016)

Tính chất cần nhớ: *Tam giác MEC vuông cân (gợi ý: sử dụng tính chất góc nội tiếp để chứng minh).*

Sơ đồ tư duy:

Khi đó, ta có:

$$M; C \to BE?$$
$$BE; d \to B?$$
$$B; C \to BC?$$
$$AB \perp BC; AB = BC \to A?$$

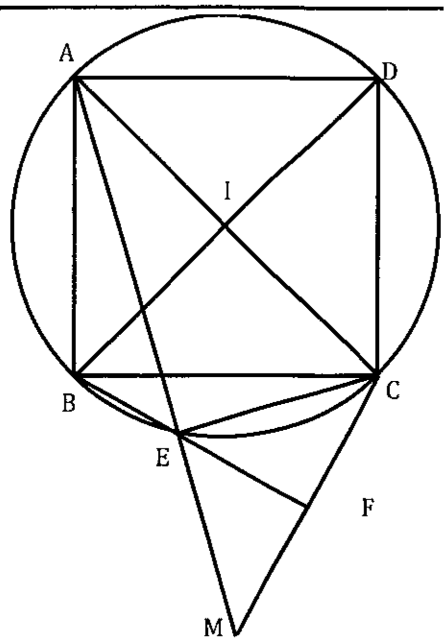
Để loại nghiệm thừa:

$$A; M \text{ khác phía với } BC \to A??$$

Công thức cần nhớ:

$$A(x_1; y_1); B(x_2; y_2); (\Delta): ax + by + c = 0$$
$$\xrightarrow{A;B \text{ khác phía với } \Delta} (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) < 0$$

Lời giải chi tiết:



BE cắt CM tại F.

AC là đường kính của (I) nên $\widehat{AEC} = 90° \Rightarrow \widehat{CEM} = 90°$

Suy ra tam giác ECM vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{ECF} = 45°$

ABEC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CEF} = \widehat{CAB} = 45°$ (ΔCAB vuông cân)

Suy ra tam giác ECF vuông cân tại F.

EF là đường cao của tam giác cân ECM suy ra F là trung điểm CM $\Rightarrow F(5; -4)$

Đường thẳng BF đi qua F, nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{CM} = (3; 1)$ làm VTPT

$\Rightarrow$ pt BF: $3x + y - 11 = 0$

Tọa độ điểm B thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 3x + y - 11 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3; 2)$

Ta có $\overrightarrow{CB} = (1; 7)$. Do đó đường thẳng BC đi qua B và nhận vecto $\vec{n} = (7; -1)$ làm VTPT

$\Rightarrow$ pt BC: $7x - y - 19 = 0$

AB qua B và nhận $\overrightarrow{CB} = (1; 7)$ làm VTPT

$\Rightarrow$ pt AB: $x + 7y - 17 = 0$

Gọi $A(17 - 7a; a) \in AB$. Ta có:

$$AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{(14 - 7a)^2 + (a - 2)^2} = \sqrt{50} \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \end{array}\right.$$

A và M nằm khác phía so với BC nên $(7x_A - y_A - 19)(7x_M - y_M - 19) < 0$

+Với $a = 1 \Rightarrow A(10; 1) \Rightarrow (7x_A - y_A - 19)(7x_M - y_M - 19) > 0$ (loại)

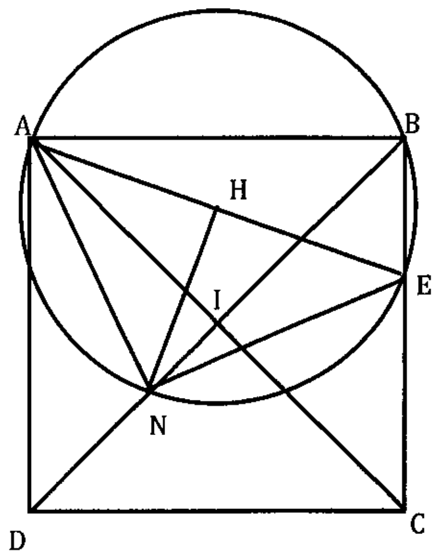
+Với $a = 3 \Rightarrow A(-4; 3) \Rightarrow (7x_A - y_A - 19)(7x_M - y_M - 19) < 0$ (t/m)

Vậy $A(-4; 3)$.

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Điểm E (7; 3) là một điểm nằm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường chéo BD tại điểm N (N khác B). Đường thẳng AN có phương trình $7x + 11y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông ABCD, biết A có tung độ dương, C có tọa độ nguyên và nằm trên đường thẳng $2x - y - 23 = 0$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Sơ đồ tư duy:



Tính chất hình: *Hình vuông có các cạnh bằng nhau và hai cạnh kề nhau thì vuông góc với nhau, hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường. Đường tròn có đường kính AB thì mọi điểm M thuộc đường tròn đều có $\widehat{AMB} = 90^0$.*

Điểm mấu chốt: Điểm N.

$(AN): NE \perp AN \to NE?$

$(AN): EN \to N?$

$A \xleftarrow{\Delta ANE \text{ vuông cân}}$ *Có hai hướng chính:*

$$\begin{cases} +AN = NE \to A \in AN; NA = NE \\ +EA = NE\sqrt{2} \to A \in AN \cap (E; NE\sqrt{2}) \end{cases}$$

$C \in (d): 2x - y - 23 \leftarrow$ *tọa độ hóa C còn 1 ẩn.*

$A; C \xrightarrow{\text{trung điểm } I} I$ *còn 1 ẩn theo C.*

$IA \perp IN \to \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IN} = 0 \to I?$

$C \xleftarrow{I \text{ là trung điểm } AC} I; A$

$B \xleftarrow{BD \cap BC} \begin{cases} BC \leftarrow EC \leftarrow E; C \\ BD \leftarrow IN \leftarrow I; N \end{cases}$

$D \xleftarrow{I \text{ là trung điểm } BD} I; B$

Công thức cần nhớ:

$$A(x_1;y_1); B(x_2;y_2) \xrightarrow{\text{trung điểm } M} M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$(\Delta): ax+by+c=0 \xrightarrow{\Delta'\perp\Delta; A(x_0;y_0)\in\Delta'} -b(x-x_0)+a(y-y_0)=0$$

Lời giải chi tiết:

Tứ giác ABEN nội tiếp đường tròn đường kính AE.

$$\Rightarrow \widehat{ANE}=90° \Rightarrow AN\perp NE \Rightarrow NE: 11(x-7)-7(y-3)=0 \Leftrightarrow 11x-7y-56=0$$

Tọa độ của N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}11x-7y-56=0\\ 7x+11y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\ y=-\dfrac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$$

Gọi H là trung điểm của AE, có $\widehat{NBE}=45° \Rightarrow \widehat{NHE}=90° \Rightarrow AN=NE$

Gọi $A\left(a;-\dfrac{7a+3}{11}\right)$. Ta có:

$$AN^2=NE^2 \Leftrightarrow \left(a-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{49-14a}{22}\right)^2=\frac{85}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=9\ (l)\\ a=-2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A(-2;1)$$

Gọi C (c; 2c − 23) suy ra trung điểm I của AC: $I\left(\dfrac{c-2}{2};c-11\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA}=\left(-\frac{c+2}{2};12-c\right);\ \overrightarrow{IN}=\left(\frac{9-c}{2};\frac{17}{2}-c\right)$$

Ta có $\widehat{AIN}=90° \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IN}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=10\\ c=\dfrac{39}{5}\ \text{(loại vì không nguyên)}\end{array}\right. \Rightarrow C(10;-3); I(4;-1)$$

$\overrightarrow{EC}=(3;-6) \Rightarrow BC: 2(x-7)+(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y-17=0$

$\overrightarrow{IN}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow BD: 3(x-4)-(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x-y-13=0$

Tọa độ điểm B: $\begin{cases}3x-y-13=0\\ 2x+y-17=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ y=5\end{cases} \Rightarrow B(6;5); D(2;-7).$

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm I. Các điểm $G\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{11}{3}\right)$, $E\left(3;-\dfrac{2}{3}\right)$ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABI và tam giác ADC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết tung độ đỉnh A là số nguyên.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thanh Chương I 2016)

Tính chất hình: *ΔAGE vuông cân tại G và B thuộc đường tròn $(G;GA)$*

Sơ đồ tư duy:

Khi đó, ta có:

$AG\perp GE \to AG?$

$A \xleftarrow{\text{giải hệ}} A\in AG; AG=GE$

G là trọng tâm → trung điểm M của BE? $\left(\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right)$

$E; M \to BD?$

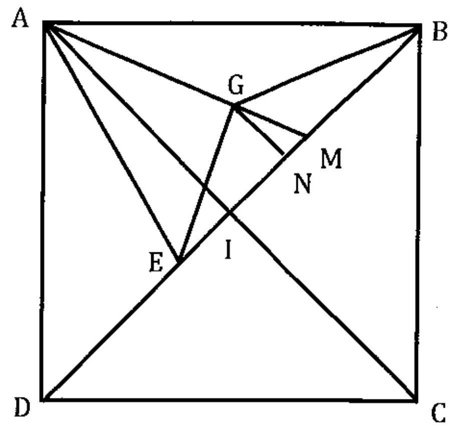
$B \xleftarrow{\text{giải hệ}} B\in(G;GA); B\in BD$

$AD\perp AB \to AD?$

$D \xleftarrow{\text{giải hệ}} D \in BD; D \in AD$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \rightarrow C?$

Lời giải chi tiết:



Gọi M là trung điểm của BI và N là hình chiếu vuông góc của G lên BI.

Ta có GN//AC.

$$\Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IN = \frac{2}{3}IM = \frac{1}{3}BI \quad (1)$$

E là trọng tâm tam giác ACD:

$\Rightarrow IE = \frac{1}{3}DI = \frac{1}{3}BI \Rightarrow EN = IN + IE = \frac{2}{3}BI = BN$

$\Rightarrow BN = EN \Rightarrow \Delta BGE$ cân tại G

$\rightarrow GA = GB = GE \rightarrow$ A, E, B cùng thuộc đường tròn tâm G.

$\rightarrow \widehat{AGE} = 2\widehat{ABE} = 2.45° = 90° \rightarrow \Delta AGE$ vuông cân tại G.

Phương trình (AG): $\begin{cases} \text{qua } G \\ \perp GE \end{cases}$

$$\Rightarrow (AG): x + 13y - 51 = 0 \Rightarrow A(51 - 13a; a)$$

Khi đó ΔAGE vuông cân tại G:

$$\rightarrow AG = GE \rightarrow AG^2 = \left(\frac{143}{3} - 13a\right)^2 + \left(a - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{170}{9} \leftrightarrow \left(a - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = \frac{10}{3} \end{array}\right. \rightarrow A(-1; 4)$$

Ta có:

$$AG = \frac{2}{3}AM \rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow M\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

Phương trình (BD) đi qua E và M : (BD): $5x - 3y - 17 = 0$

Phương trình đường tròn (G): $\begin{cases} \text{tâm } G \\ R = GA \end{cases}$

$$\rightarrow (G): \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{170}{9}$$

B là giao điểm thứ hai của (BD) và (G) suy ra B(7; 6)

Phương trình (AD): $\begin{cases} \text{qua } A \\ \perp AB \end{cases}$

$$\rightarrow (AD): 4x + y = 0 \rightarrow D(1; 4)$$

ABCD là hình vuông $\rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow C(9; -2)$

Bài toán có một nghiệm $A(-1; 4), B(7; 6), C(9; -2), D(1; -4)$.

Nhận xét: *Tính chất hình trong bài toán trên được sử dụng làm đề thi thử khá nhiều. Chính vì thế anh muốn nhấn mạnh để các em chú ý hơn.*

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD tâm I. Điểm $G\left(\frac{5}{6}; \frac{13}{6}\right)$ là trọng tâm tam giác ABI. Điểm $E\left(2; \frac{7}{3}\right)$ thuộc đoạn BD, biết tam giác BGE cân tại G và tung độ của điểm A bé hơn 3. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Quốc học Huế 2016)

Tính chất hình: *Giống như bài 5.*

Lời giải chi tiết:

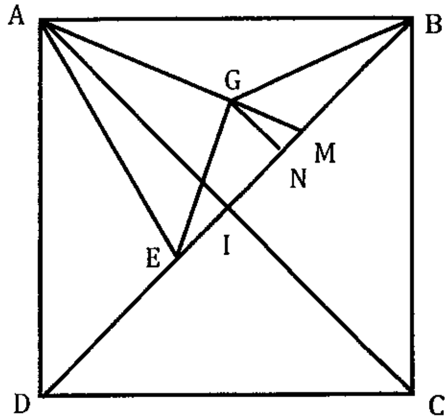
Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BI, AB

ΔBEG cân tại G suy ra GB = GE.

ΔAIB vuông cân tại I nên IK là trung trực AB $\Rightarrow$ GA = GB

Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABE

Suy ra $\widehat{AGE} = 2\widehat{ABE} = 90°$ (góc liên quan đến góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn 1 cung) $\Rightarrow AG \perp GE$



Đường thẳng AG đi qua G, nhận $6\overrightarrow{GE} = (7; 1)$ làm VTPT có phương trình $7x + y - 8 = 0$

Gọi $A(a; 8 - 7a) \in AG$. Ta có:

$$GA = GE \Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(8 - 7a - \frac{13}{6}\right)^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1; 1)\ \left(\dfrac{t}{m}\right) \\ A\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{10}{3}\right)\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Gọi $H(h; 8 - 7h) \in AG$. Ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}(h - 1) \\ \dfrac{7}{6} = \dfrac{2}{3}(8 - 7h - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{3}{4} \Rightarrow H\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right)$$

Đường thẳng BD đi qua H và E nên có phương trình $x + 3y - 9 = 0$

Đường thẳng AC qua A và vuông góc với BD nên có phương trình $3x - y - 2 = 0$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3y - 9 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Gọi $B(x_B; y_B), C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$

H là trung điểm BC nên:

$$\begin{cases} 2.\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2} + x_B \\ 2.\dfrac{11}{4} = \dfrac{5}{2} + y_B \end{cases} \Rightarrow B(0; 3)$$

I là trung điểm AC và BD nên:

$$\begin{cases} 2.\dfrac{3}{2} = 1 + x_C \\ 2.\dfrac{5}{2} = 1 + y_C \end{cases} \Rightarrow C(2; 4)$$

$$\begin{cases} 2.\dfrac{3}{2} = 0 + x_D \\ 2.\dfrac{5}{2} = 0 + y_D \end{cases} \Rightarrow D(3; 2)$$

Vậy $A(1; 1), B(0; 3), C(2; 4), D(3; 2)$.

Bài 7: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(4;\ 6)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN} = 45°$, $M(-4;\ 0)$ và đường thẳng MN có phương trình $11x + 2y + 44 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Hạ Long 2016)

Sơ đồ tư duy:

Tính chất hình: $AI \perp MN$ và $\Delta AMB = \Delta AMH$ (gợi ý dùng tứ giác nội tiếp chứng minh I là trực tâm tam giác AMN để chứng minh!).

Khi đó, ta có:

$AI \perp MN; A \to AI?$

$H \in AI; H \in MN \to H?$

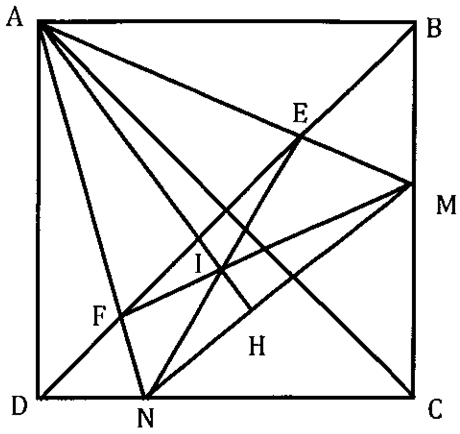
$\Delta AMB = \Delta AMH; AM \xrightarrow{\text{tính đối xứng}} B?$

$B; M \to BC?$

$C \in BC; BC = BA \to C?$ (C và M cùng phía với AB)

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \to D?$

Lời giải chi tiết:



Gọi $E = BD \cap AN, F = BD \cap AM, I = ME \cap NF$.

Ta có $\widehat{MAN} = \widehat{NDB} = \widehat{MBD} = 45°$ nên hai tứ giác ADNF, ABNE nội tiếp. Do đó $ME \perp AN, NF \perp AM$. Suy ra $AI \perp MN$.

Gọi $H = AI \cap MN$. Ta có ABME, MNEF là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMB} = \widehat{AEB} = \widehat{AMH}$. Suy ra $\Delta AMB = \Delta AMH$. Do đó B là đối xứng của H qua đường thẳng AM.

Từ $AH \perp MN$ tại H, tìm được $H\left(-\frac{24}{5}; \frac{22}{5}\right)$. Do B là đối xứng của H qua AM, nên tìm được $B(0; -2)$.

Tìm được BC: $2x + 4y + 8 = 0$, CD: $2x - y + 18 = 0$ suy ra $C(-8; 2)$.

Từ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ta tìm được $D(-4; 10)$.

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm M sao cho $DM = 4MB$ và gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DM và BC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $E(1; 6), F(2; 3)$, D có hoành độ lớn hơn 1 và A có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Lương Thế Vinh 2016)

Nhận xét: *Bài toán này đơn thuần là tính toán.*

Lời giải

Đặt $AB = a$, suy ra $AD = 2a$

$$\frac{BM}{BD} = \frac{BA^2}{BD^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow EM = ED = \frac{2}{5}BD$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\overrightarrow{AD}$$

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FE} = -\frac{6}{50}AB^2 + \frac{3}{25}AD^2 = 0$ nên $AE \perp FE$.

Mà $\overrightarrow{EF} = (1; -3)$ nên ta có phương trình AE: $x - 3y + 17 = 0$. Suy ra $A(3a - 17; a)$

Lại có:

$$FE^2 = \frac{9}{25}AB^2 + \frac{1}{100}AD^2 = \frac{2}{5}a^2 \Rightarrow a = 5$$

Suy ra:

$$AE^2 = \frac{9}{25}AD^2 + \frac{4}{25}AB^2 = 40 \Leftrightarrow (3a - 18)^2 + (a - 6)^2 = 40 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 8 \\ a = 4 \end{array}\right.$$

Mà $x_A < 0$ nên $A(-5; 4)$

Từ $AD = 10$ và $FA = FD$ nên tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 100 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 10\end{cases} \Rightarrow D(3; 10)\ \ (x_D > 1)$$

Vì $\overrightarrow{BD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{ED} \Rightarrow B(-2; 0) \Rightarrow C(6; 6)$.

Bài 9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD và M là một điểm thuộc cạnh CD ($M \neq C, D$). Qua điểm A dựng đường thẳng d vuông góc với AM, d cắt đường thẳng BC tại điểm N. Biết rằng trung điểm của đoạn thẳng MN là gốc tọa độ O, I là giao điểm của AO và BC. Tìm tọa độ điểm B của hình vuông biết $A(-6; 4), O(0; 0), I(3; -2)$ và điểm N có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hùng Vương 2016)

Tính chất hình: *ΔAMN vuông cân tại A.*

Hướng dẫn giải:

$$\Delta ABM = \Delta ADN$$

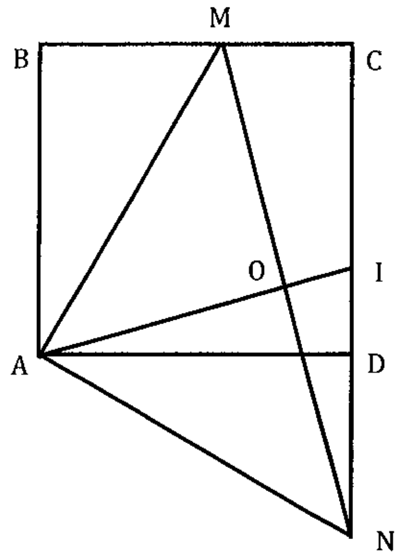
Chứng minh được tam giác AMN vuông cân tại A.

$$MN \perp AO; O \in MN$$

$$\to MN: 3x - 2y = 0, N(-4; -6)$$

$$BC: 4x - 7y - 26 = 0, AB: 7x + 4y + 26 = 0$$

$$B\left(-\frac{6}{5}; -\frac{22}{5}\right)$$



Bài 10: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đường thẳng AD đi qua điểm M(3; 6), điểm N(1; −2) thuộc cạnh BC thỏa thỏa mãn BC = 3BN và H là hình chiếu của A xuống DN. Cho biết khoảng cách từ H đến cạnh CD bằng $\frac{12\sqrt{2}}{13}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết hoành độ của A là một số nguyên lớn hơn -2.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Quang Khải 2016)

Hướng dẫn giải:

$HK \parallel NC \Rightarrow \frac{HK}{NC} = \frac{DK}{DC} \Rightarrow DK = \frac{DC.HK}{NC} = \frac{BC.HK}{\frac{2}{3}BC} = \frac{18\sqrt{2}}{13}$

$\Rightarrow DH = \frac{6\sqrt{26}}{13}$

$\Delta ADH \sim \Delta DHK \Rightarrow \frac{AD}{DH} = \frac{DH}{HK}$

$\Rightarrow AD = \frac{DH^2}{HK} = 3\sqrt{2} \Rightarrow AN = 2\sqrt{5}$

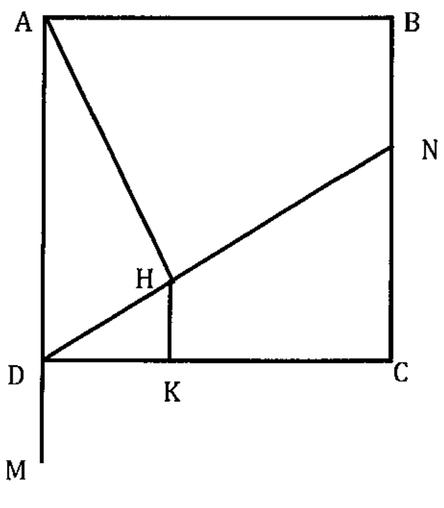
AD qua M có dạng $y = k(x-3) + 6 \Leftrightarrow kx - y - 3k + 6 = 0$

Ta có

$$d(N, AD) = DC = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|8 - 2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -\frac{27}{3} \end{array}\right.$$

Với $k = 1 \Rightarrow AD: x - y + 3 = 0$. Gọi A(a; a+3).

Ta có $AN = 2\sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-1; 2) \\ A(-3; 0) \end{array}\right. \Rightarrow A(-1; 2)$



Với $k = -\frac{27}{3}$. Giải tương tự và ta loại trường hợp này vì hoành độ của A không phải là số nguyên.

$AB: x + y - 1 = 0$; $BC: x - y - 3 = 0$ suy ra $B(2; -1)$

Gọi C(m; m-3). Ta có $BC = 3\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(5; 2) \\ C(-1; -4) \end{array}\right.$

Vì N thuộc cạnh BC nên $BC > NC \Rightarrow C(-1; -4) \Rightarrow D(-4; -1)$

Vậy $A(-1; 2), B(2;; -1), C(-1; -4), D(-4; -1)$

Sau đây là một số bài luyện tập:

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có các đỉnh $A(-1;2);C(3;-2)$. Gọi E là trung điểm cạnh AD; BM là đường thẳng vuông góc với CE tại M; N là trung điểm cạnh BM và P là giao điểm của AN và DM. Biết phương trình đường thẳng BM: $2x-y-4=0$. Tìm tọa độ đỉnh P.

Kết quả: $P\left(\frac{19}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm cạnh CI là $J(1;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Ngô Gia Tự- Vĩnh Phúc)

Kết quả : $A(-2;3);B(2;3);C(2;-1);D(-2;-1)$.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có $A(-1;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD và DC; K là giao điểm của BN với CM. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp hình tam giác BMK, biết BN có phương trình $2x+y-8=0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường chuyên Hưng Yên 2015)

Kết quả: $(x-1)^2+(y-3)^2=5$.

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x+2y-6=0$, điểm $M(1;1)$ thuộc cạnh BD. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên cạnh AB và AD đều nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Chu Văn An- An Giang)

Kết quả: $C(2;2)$.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $I(1;1)$, hai đường thẳng AB và CD lần lượt đi qua các điểm $M(-2;2);N(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết C có tung độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Nguyễn Huệ - Ninh Bình)

Kết quả: $A(1;5);B(-3;1);C(1;-3);D(5;1)$.

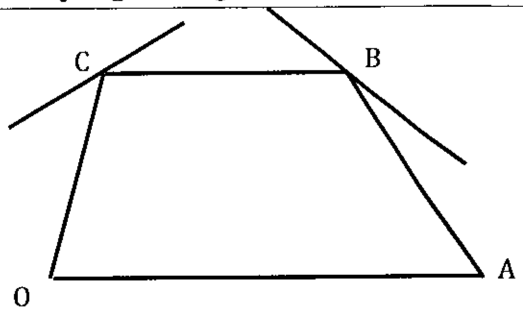
Ngày số 16

Hình vuông, hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành (tiết 2)

Bình luận: *Các bài toán trong tiết này là những bài toán mang tính chất đặc biệt của hình thang.*

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang OABC (O là gốc tọa độ) có diện tích bằng 6, OA song song với BC, đỉnh A(-1; 2), đỉnh B thuộc đường thẳng (d_1): $x + y + 1 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng (d_2): $3x + y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thạch Thành I 2016)



Sơ đồ tư duy:

$O; A \to OA$

$OA//BC \to BC$ còn 1 ẩn số là m.

$B \in (d_1); B \in BC \to B$ biểu diễn được theo m.

$C \in (d_2); C \in BC \to C$ biểu diễn được theo m.

$S_{ABCD} = 6$

→ Lập được phương trình theo m và giải m.

Lời giải chi tiết:

$$OA: 2x + y = 0$$

$$OA//BC \Rightarrow BC: 2x + y + m = 0 \ (m \neq 0)$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + y + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m \\ y = m - 2 \end{cases} \Rightarrow B(1 - m; m - 2)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ 2x + y + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 2 \\ y = 4 - 3m \end{cases} \Rightarrow C(m - 2; 4 - 3m)$$

$$S_{OABC} = \frac{1}{2}(OA + BC).d(O, BC) \Leftrightarrow (|2m - 3| + 1)|m| = 12$$

Giải phương trình này bằng cách chia trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối ta được $m = 1 - \sqrt{7}$; $m = 3$.

Vậy $B(\sqrt{7}; -1 - \sqrt{7}), C(-1 - \sqrt{7}; 1 + 3\sqrt{7})$ hoặc $B(-2; 1), C(1; -5)$

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với AB//CD có diện tích bằng 14, $H\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ là trung điểm của cạnh BC và $I\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AH. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D thuộc đường thẳng d: $5x - y + 1 = 0$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Phan Trúc Trực 2016)

Sơ đồ tư duy:

Kéo dài AH cắt CD tại M. Khi đó, ta thấy ngay ABMC là hình bình hành. Do đó, ta có thể thấy ngay:

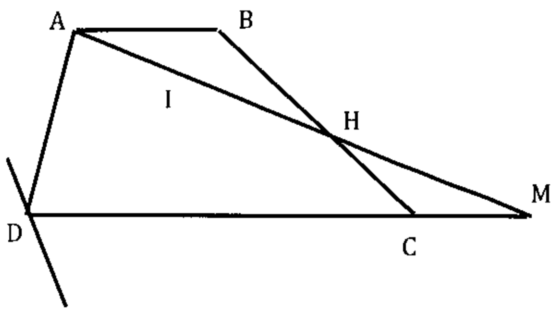
$$S_{ABCD} = S_{DAM} = \frac{1}{2}AM.d(D; AH)$$

Ta xác định được điểm M vì:

I là trung điểm AH $\to \overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$

H là trung điểm AM $\to \overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{HA}$

$\to \overrightarrow{IH} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{HM} \to M?$



$$I; H \to AH?$$
$$S_{ABCD}; AM \to d(D; AH)?$$
$$\begin{cases} d(D; AH); AH \\ D \in d \end{cases} \to D?$$
$$\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{DC} \xleftarrow{AB//CD} D; M$$
$$A; \overrightarrow{u_{AB}} \to AB?$$

Lời giải chi tiết:

Vì I là trung điểm của AH nên A(1; 1). Ta có:

$$AH = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Phương trình AH là: $2x - 3y + 1 = 0$. Gọi $M = AH \cap CD$ thì H là trung điểm của AM.
Suy ra $M(-2;\ -1)$. Giả sử $D(a; 5a + 1)$ $(a > 0)$. Ta có:

$$\Delta ABH = \Delta MCH \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ADM} = AH.d(D, AH) = 14 \Rightarrow d(D, AH) = \frac{28}{\sqrt{13}}$$

Hay $|13a + 2| = 28 \Leftrightarrow a = 2$ (vì a>0) $\Rightarrow D(2; 1)$

Vì AB đi qua $A(1;\ 1)$ và có VTCP là $\frac{1}{4}\overrightarrow{MD} = (1; 3)$ $\Rightarrow$ AB có VTPT là $\vec{n} = (3;\ -1)$

$\Rightarrow$ AB có phương trình là $3x - y - 2 = 0$.

Bài 3: (Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Triệu Sơn I 2016)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A, B và AD = 2BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của HD. Giả sử $H(-1;\ 3)$, phương trình đường thẳng AE: $4x + y + 3 = 0$ và $C\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B và D của hình thang ABCD.

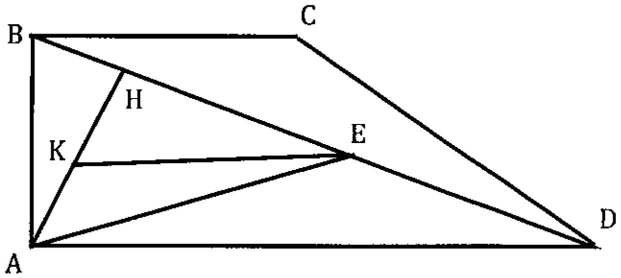
Sơ đồ tư duy:

Tính chất cần nhớ:

$$BC//AD; BC = \frac{1}{2}AD; AH \perp BD; EH = ED \to CE \perp AE$$

Khi đó, ta có:

$$C; CE \perp AE \to CE?$$
$$E \in AE; E \in CE \to E?$$
$$H; E \xrightarrow{E \text{ là trung điểm } HD} D?$$
$$H; E \to BE? + (AH \perp BE) \to AH? + AE$$
$$\to A? + (AB \perp AD)$$
$$\to AB? + BD \to B?$$



Lời giải chi tiết:

Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I.

Suy ra K là trực tâm của tam giác ABE, nên $BK \perp AE$.

K là trung điểm của AH nên KE//= $\frac{1}{2}$AD hay KE//= BC.

Do đó $CE \perp AE \Rightarrow CE: 2x - 8y + 27 = 0$

Mà $E = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$, mặt khác E là trung điểm của HD nên $D(-2;\ 3)$

Khi đó BD: $y - 3 = 0$, suy ra AH: $x + 1 = 0$ nên $A(-1;\ 1)$

Suy ra AB: $x - 2y + 3 = 0$. Do đó $B(3;\ 3)$

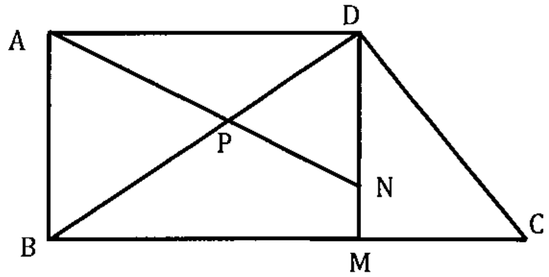
Vậy A(-1; 1), B(3; 3) và D(-2; 3).

Bài 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và B có 2BC = 3AD. Gọi M là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật BADM, P là giao điểm của AM với BD và N là điểm trên cạnh BM sao cho BM = 4MN. Biết $N(-1;-2)$, $P\left(\frac{11}{7};\frac{1}{7}\right)$ và $\sin MAD = \frac{5}{\sqrt{89}}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Khuyến 2016)

Nhận xét: *Bài toán này có hai hướng đi. Đơn thuần là tính toán khéo léo.*

Lời giải chi tiết:



Ta có:

$$\Delta PAD \sim \Delta PBN \Rightarrow \frac{PA}{PN} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{NB} = \frac{BM}{BN} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{PA}{PN} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{PA} = 4\overrightarrow{NP}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x_A - \frac{11}{7}\right) = 4(x_P + 1) \\ 3\left(y_A - \frac{1}{7}\right) = 4(y_P + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow A(5;3)$$

Đường thẳng đi qua hai điểm A và N có phương trình:

$$(AN): \frac{x+1}{5} = \frac{y+2}{6} \Leftrightarrow 5x - 6y - 7 = 0$$

Suy ra hệ số góc của đường thẳng (AN) là $k_1 = \frac{5}{6}$

Đường thẳng (BN) đi qua điểm N với hệ số góc k_2 có phương trình (BN): $y = k_2(x+1) - 2$

Theo giả thiết $\sin\widehat{MAD} = \frac{5}{\sqrt{89}} \Rightarrow \tan\widehat{MAD} = \frac{5}{8}$

Tam giác MAD vuông tại D, có

$$\tan\widehat{MAD} = \frac{MD}{AD} = \frac{AB}{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{5}{8}; \frac{BM}{BN} = \frac{4}{3} \to \frac{AB}{BN} = \frac{5}{6}$$

Tam giác ANB vuông tại B có

$$\tan\widehat{ANB} = \frac{AB}{BN} = \frac{5}{6}$$

$$\tan\widehat{ANB} = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \left|\frac{\frac{5}{6} - k_2}{\frac{5}{6} + k_1k_2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5}{6} = \dfrac{\frac{5}{6} - k_2}{\frac{5}{6}k_2 + 1} \\ -\frac{5}{6} = \dfrac{\frac{5}{6} - k_2}{\frac{5}{6}k_2 + 1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_2 = 0 \\ k_2 = \frac{60}{11} \end{array}\right.$$

Với $k_2 = 0 \Rightarrow (BN): y = -2$

Đường thẳng (AB) đi qua A và vuông góc với (BN) có phương trình là (AB): $x - 5 = 0$

Tọa độ của B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(5;\ -2)$$

$$\left.\begin{array}{r} AD = \frac{2}{3}BC \\ BM = AD \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} BM = \frac{2}{3}BC \\ BN = \frac{3}{4}BM \end{array}\right\} \Rightarrow BN = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}BC = \frac{1}{2}BC$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_D - 5) = 2(-7-5) \\ 3(y_D - 5) = 2(-2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow D(-3; 3)$ (nhận vì B và D cùng phía so với đường thẳng (AN))

Với $k_2 = \dfrac{60}{11} \Rightarrow (BN): y = \dfrac{60}{11}(x+1) - 2 \Leftrightarrow 60x - 11y + 38 = 0$

Đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với BN có phương trình là (AB): $11x + 60y - 235 = 0$

Tọa độ điểm B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 60x - 11y + 38 = 0 \\ 11a + 60y - 235 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{61} \\ y = \dfrac{238}{41} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{61}; \frac{238}{41}\right)$$

$$BN = \frac{3}{4}BC \Rightarrow 4\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(-1 - \dfrac{5}{61}\right) = 3(x_D - 5) \\ 4\left(-2 - \dfrac{238}{41}\right) = 3(y_D - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{217}{61} \\ y_D = -\dfrac{297}{61} \end{cases}$$

$\Rightarrow D\left(\dfrac{217}{61}; -\dfrac{297}{61}\right)$ (loại vì B và D cùng phía so với đường thẳng (AN))

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD là $A(5;\ 3), B(-7;\ -2), C(5;\ -2), D(-3;\ 3)$.

***Cách khác xác định tọa độ các đỉnh B, C, D**

Gọi $B(a; b)$

$$\left.\begin{array}{l} PD = \dfrac{4}{3}PB \\ PD + PB = BD \end{array}\right\} \Rightarrow BD = \left(1 + \frac{4}{3}\right)PB = \frac{7}{3}PB$$

$$\sin\widehat{MAD} = \cos\widehat{AMD} = \cos\widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{\frac{7}{3}PB} = \frac{3}{7}\frac{AB}{PB}$$

$$\left.\begin{array}{r} \sin\widehat{MAD} = \cos\widehat{AMD} = \cos\widehat{ABD} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AB}{\frac{7}{3}PB} = \dfrac{3}{7}\dfrac{AB}{PB} \\ \sin\widehat{MAD} = \dfrac{5}{\sqrt{89}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{7}\frac{AB}{PB} = \frac{5}{\sqrt{89}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{49}AB^2 = \frac{25}{89}PB^2 \Leftrightarrow \frac{9}{49}\left[\left(a - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{7}\right)^2\right] = \frac{25}{89}[(a-5)^2 + (b-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow 53a^2 + 53b^2 + 520a + 575b - 3020 = 0$$

Gọi I là trung điểm AN ta có $I\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AN} = (6; 5) \Rightarrow AN = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$

Đường tròn (C) tâm $I\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$ với đường kính $AN = \sqrt{61}$ có phương trình là:

$$(C): (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{61}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - y - 11 = 0$$

$B \in (C) \Rightarrow a^2 + b^2 - 4a - b - 11 = 0$

Như vậy tọa độ của B thỏa hệ: $\begin{cases} 53a^2 + 53b^2 + 520a + 575b - 3020 = 0 \quad (1) \\ a^2 + b^2 - 4a - b - 11 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 53a^2 + 53b^2 + 520a + 575b - 3020 = 0 \\ 53a^2 + 53b^2 - 212a - 53b - 583 = 0 \end{cases} \Rightarrow 732a + 610b - 2437 = 0$$

$\Leftrightarrow 366a + 305b = 1220 \Leftrightarrow a = \dfrac{220 - 305b}{366}$ thay vào (2) ta được:

$$\left(\frac{220 - 305b}{366}\right)^2 + b^2 - 4\left(\frac{220 - 305b}{366}\right) - b - 11 = 0 \Leftrightarrow 226981b^2 - 431636b - 1771196 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2 \\ b = \dfrac{238}{61} \end{array}\right.$$

$* \, b = -2 \Rightarrow a = \dfrac{220 - 305(-2)}{366} = 5 \Rightarrow B(-2; 5)$

$* \, b = \dfrac{238}{61} \Rightarrow a = \dfrac{220 - 305.\frac{238}{61}}{366} = \dfrac{5}{61} \Rightarrow B\left(\dfrac{5}{61}; \dfrac{238}{61}\right)$

Với $B(-2;\ 5)$

$BN = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow 2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-1-5) = x_C - 5 \\ 2(-2+2) = y_C + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -7 \\ y_C = -2 \end{cases} \Rightarrow C(-7;\ -2)$

$AD = \dfrac{2}{3}BC \Rightarrow 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_D - 5) = 2(-7-5) \\ 3(y_D - 3) = 2(-2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-3;\ 3)$

(nhận vì B và D cùng phía so với đường thẳng (AN))

Với $B\left(\dfrac{5}{61}; \dfrac{238}{61}\right)$

$\dfrac{AD}{BN} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_D - 5) = 4\left(-1 - \dfrac{5}{61}\right) \\ 3(y_D - 3) = 4\left(-2 - \dfrac{238}{61}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{217}{61} \\ y_D = -\dfrac{297}{61} \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{217}{61}; -\dfrac{297}{61}\right)$

(loại vì B và D khác phía so với đường thẳng (AN)).

Bài 5: Trong mặt phẳng Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD$. Gọi E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $AB = 3AE$. Điểm F thuộc BC sao cho tam giác DEF cân tại E. Biết $E(2;\ 4)$ phương trình của EF: $2x + y - 8 = 0$, D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và điểm A có hoành độ nguyên thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD.

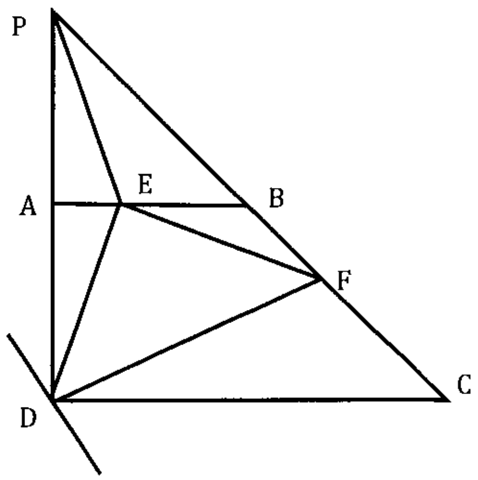
(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Quốc Oai 2016)

Sơ đồ tư duy:

Tính chất cần nhớ: E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF.

Khi đó, ta có: $\widehat{DEF} = 90°$.

Ta có lời giải chi tiết sau:



Lời giải chi tiết:

Ta chứng minh tam giác DEF vuông cân tại E

Gọi P là điểm đối xứng của D qua A. Tam giác DBP vuông tại B do $BA = AD = AP$. Do tam giác CBD vuông tại B, nên C, B, P thẳng hàng.

Vì $EP = ED = EF$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PDF, do đó $\widehat{AED} = \widehat{DFP}$ nên tứ giác AEBF nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{DEF} = 90°$.

Đường thẳng DE qua E vuông góc với EF nên có phương trình $x - 2y + 6 = 0$

Điểm D là giao của đường thẳng DE và d nên $D(-2;\ 2)$.

Tam giác ADE vuông có $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 10.AE^2 \Rightarrow AE^2 = 2$

Gọi $A(a; 8 - 3a) \in d' \Rightarrow (a-2)^2 + (4-3a)^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \dfrac{9}{5} \end{array}\right. \Rightarrow A(1; 5)$

Vì $\overrightarrow{EB} = -2\overrightarrow{EA} \Rightarrow B(4; 2)$; $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow C(4;\ -4)$

Kết luận: $A(1; 5), B(4; 2), C(4;\ -4), D(-2; 2)$.

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD (AB//CD) có đỉnh A(2; -1). Giao điểm hai đường chéo AC và BD là điểm I(1; 2). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI có tâm là $E\left(-\frac{27}{8}; -\frac{9}{8}\right)$. Biết đường thẳng BC đi qua điểm M(9; -6). Tìm tọa độ đỉnh B, D biết điểm B có tung độ nhỏ hơn 3.

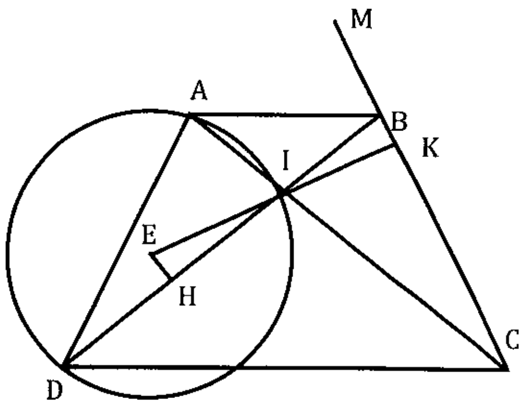
Gợi ý: *Sử dụng E là tâm ngoại tiếp tam giác ADI và sử dụng tính chất góc ở tâm.*

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm DI và K là giao điểm của EI và BC.

Ta có $EH \perp DI, \widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ (tính chất thang cân) và $\widehat{IEH} = \widehat{DAC}$ (góc ở tâm), suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{IEH}$ mà $\widehat{IEH} = \widehat{BIK}$ (đối đỉnh). Do đó $\widehat{BKI} = 90°$

$\Rightarrow EK \perp BC$.



Ta có $\overrightarrow{EI} = \left(\frac{35}{8}; \frac{25}{8}\right)$, đường thẳng BC có phương trình là:

$$7x + 5y - 33 = 0$$

Ta có $\overrightarrow{AI} = (-1; 3)$, đường thẳng AC có phương trình là:

$$3x + y - 5 = 0$$

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 7x + 5y - 33 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 8)$

Điểm $B \in BC \Rightarrow B\left(\frac{33 - 5b}{7}; b\right), b < 3$

Ta có $IA = IB = \sqrt{10} \Leftrightarrow 10 = \left(\frac{33 - 5b}{7} - 1\right)^2 + (b - 2)^2$

$$\Leftrightarrow 37b^2 - 228b + 191 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \text{ (nhận)} \\ b = \frac{191}{37} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Suy ra B(4; 1)

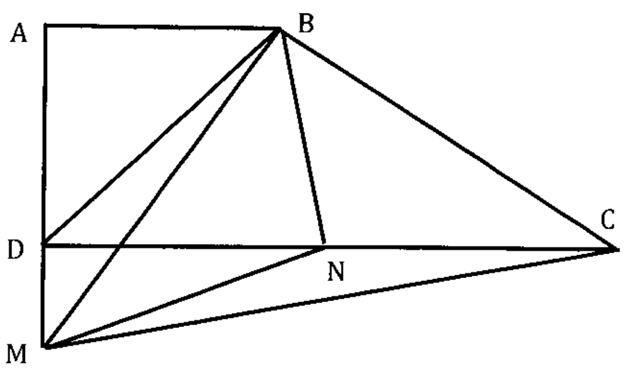
Ta có $IC = ID = 2\sqrt{10} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_D = 6 \\ 2 - y_D = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -5 \\ y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D(-5; 4)$

Vậy B(4; 1), D(-5; 4).

Bài 7: (Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Vĩnh Phúc 2016)

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D có AB=AD<CD, điểm B(1; 2), đường thẳng BD có phương trình là y-2=0. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M. Đường phân giác trong góc $\widehat{MBC}$ cắt cạnh DC tại N. Biết rằng đường thẳng MN có phương trình 7x-y-25=0. Tìm tọa độ đỉnh D.

Nhận xét: *Bài toán này cũng cùng sử dụng góc nội tiếp chắn cùng một cung như bài 6 nhưng có mô hình khác đáng để ý.*



Lời giải chi tiết:

Tứ giác BMDC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BDC} = \widehat{DBA} = 45° \Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại B, BN là phân giác trong $\widehat{MBC} \Rightarrow M, C$ đối xứng qua BN.

$\Rightarrow AD = d(B, CN) = d(B, MN) = \frac{4}{\sqrt{2}}$

Do $AB = AD \Rightarrow BD = AD\sqrt{2} = 4$

$BD: y - 2 = 0 \Rightarrow D(a; 2)$

$BD = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \Rightarrow D(5;2) \\ a = -3 \Rightarrow D(-3;2) \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy có một điểm thảo mãn là D(5; 2).

Sau đây là một số bài luyện tập:

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang OABC, O là gốc tọa độ. Hình thang có diện tích bằng 6, OA song song với BC, đỉnh $A(-1;2)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d_1: x+y+1=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng d_2: $3x+y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia Sở GD – ĐT tỉnh Thanh Hóa lần 1 2016)

Kết quả $\left[\begin{array}{l} B\left(\sqrt{7};-1-\sqrt{7}\right);C\left(-1-\sqrt{7};1+3\sqrt{7}\right) \\ B(-2;1);C(1;-5) \end{array}\right.$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD có AB song song CD, CD = 2AB. Gọi I là giao điểm hai đường chéo AC và BD. M là điểm đối xứng của I qua A. Biết phương trình đường thẳng CD là $x+y-1=0$, điểm $M\left(\frac{2}{3};\frac{17}{3}\right)$, và diện tích hình thang ABCD là 12. Viết phương trình đường thẳng BC biết C có hoành độ dương.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia Sở GD Hải Phòng lần 1 -2016)

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và B. Điểm $A(1;1)$, B thuộc đường thẳng $x+y-2=0$, M thuộc đoạn AB thỏa mãn $BM=2AM$ và CM vuông góc với DM. Điểm $N(1;4)$ là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng CD. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90°$) có đỉnh $D(2;2);CD=2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D lên đường chéo AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng $(\Delta): x-2y+4=0$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Nguyễn Viết Xuân – Phú Yên)

Kết quả: $A(2;4);B(4;4);C(6;2)$.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D có đáy lớn là cạnh CD, đường thẳng chứa cạnh AD có phương trình $3x-y=0$, đường thẳng chứa cạnh BD có phương trình $x-2y=0$; góc tạo bởi 2 đường thẳng BC và AB bằng $45°$. Biết diện tích hình thang ABCD bằng 24. Viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm B có hoành độ dương.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Kết quả $BC: 2x+y-4\sqrt{10}=0$.

Ngày số 17

Hình vuông, hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành (tiết 3)

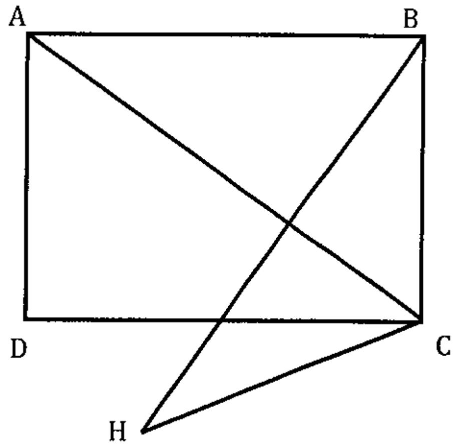
Bình luận: *Tiết này bao gồm những bài toán hình chữ nhật ở dạng đơn giản nhưng cũng có những tính chất mà ta phải để ý.*

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$. Điểm $H\left(\frac{31}{5}; \frac{17}{5}\right)$ là điểm đối xứng với điểm B qua đường chéo AC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, biết phương trình CD: $x - y - 10 = 0$ và C có tung độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Nhận xét:

Bài toán này không có gì đặc biệt. Nhưng khi sử dụng thành thạo công thức lượng giác ta sẽ có những lời giải thực sự ngắn gọn hơn những cách giải đại số.



Lời giải chi tiết:

$\tan\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\widehat{ACD} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \cos\widehat{ACH}$

$\sin\widehat{ACH} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos\widehat{ACD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\widehat{ACD} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \sin\widehat{HCD} = \sin(\widehat{ACD} - \widehat{ACH}) = \frac{3}{5}$

Ta có:

$$d(H, CD) = \frac{18\sqrt{2}}{5} \Rightarrow HC = \frac{18\sqrt{2}}{5}.\frac{5}{3} = 6\sqrt{2}$$

Gọi $C(c; c - 10)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \left(\frac{31}{5} - c; \frac{65}{5} - c\right)$$

Ta có:

$$\left(\frac{31}{5} - c\right)^2 + \left(\frac{65}{5} - c\right)^2 = 72 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 5 \\ c = \frac{73}{5} \end{array}\right. \Rightarrow C(5; -5)$$

Phương trình BC: $(x - 5) + (y + 5) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

Gọi $B(b; -b)$, ta có:

$$BC = CH = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow BC^2 = 72 \Leftrightarrow (b - 5)^2 + (-b + 5)^2 = 72 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 11 \text{ (loại)} \\ b = -1 \end{array}\right. \Rightarrow B(-1; 1)$$

Tìm được $A(2; 4)$, $D(8; -2)$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu của B lên AC là $E(5; 0)$, trung điểm AE và CD lần lượt là $F(0;2)$, $I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Viết phương trình đường thẳng CD.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Hưng Đạo 2016)

Nhận xét: *Bài toán này là bài toán dễ có nhiều cách giải, nhưng hãy luôn nhớ những kiến thức mình được học.*

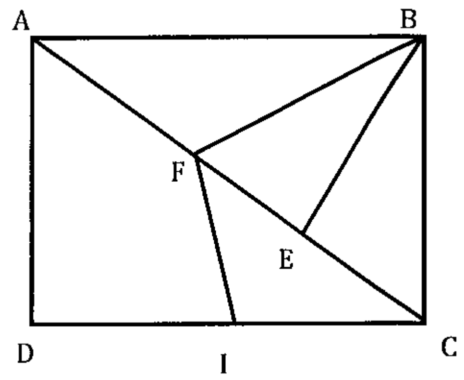
Hướng dẫn giải:

Tọa độ đỉnh A(−5; 4)

Phương trình đường thẳng (AC): $2x + 5y - 10 = 0$

Ta đi chứng minh: $BF \perp IF$. Thật vậy ta có:

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE});\ \overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC})$$



Suy ra

$$4\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FI} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC})$$
$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{EC}$$
$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC}$$
$$= -\overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BE} = 0$$

BF vuông góc với IF nên có phương trình: $7x + 3y - 6 = 0$

BE đi qua E và vuông góc EF nên có phương trình:

$$5x - 2y - 25 = 0$$

Do đó B(7; 5)

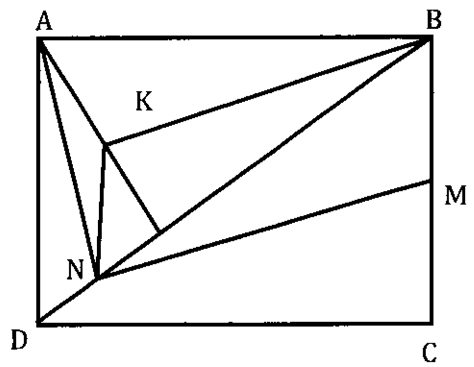
Từ đây tìm được phương trình (CD): $2x - 24y - 39 = 0$

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có hình chiếu vuông góc vủa A lên đường thẳng BD là $H\left(-\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right)$, điểm M(-1; 0) là trung điểm cạnh BC và phương trình đường trung tuyến kẻ từ A cảu tam giác ADH có phương trình là $7x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lý Thái Tổ 2016)

Nhận xét: *Tính chất cần nhớ: $BK \perp AN$.*

Lời giải chi tiết:



Gọi N, K lần lượt là trung điểm của HD và AH ⇒ NK//AD và $NK = \frac{1}{2}AD$.

Do $AD \perp AB \Rightarrow NK \perp AB$

Mà $AK \perp BD$ ⇒ K là trực tâm tam giác ABN.

Suy ra $BK \perp AN$ (1)

Vì M là trung điểm BC ⇒ $BM = \frac{1}{2}BC$

Do đó NK//BM và NK = BM

⇒ BMNK là hình bình hành ⇒ MN//BK (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp AN$.

⇒Phương trình MN có dạng: $x - 7y + c = 0$

$M(-1; 0) \in MN \Leftrightarrow -1 - 7.0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow$ pt AM: $x - 7y + 1 = 0$

Mà $N = MN \cap AN \Rightarrow N\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$. Vì N là trung điểm HD suy ra D(2; -1)

Ta có $\overrightarrow{HN} = \left(\frac{8}{5}; \frac{-6}{5}\right)$.

Do $AH \perp HN$ ⇒ AH đi qua H và nhận $\vec{n} = (4; -3)$ là VTPT

Suy ra phương trình AH: $4x - 3y + 9 = 0$

Mà $A = AH \cap AN \Rightarrow A(0; 3)$

Ta có $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2(-1 - x_B) \\ -4 = 2(0 - y_b) \end{cases} \Rightarrow B(-2; 2)$

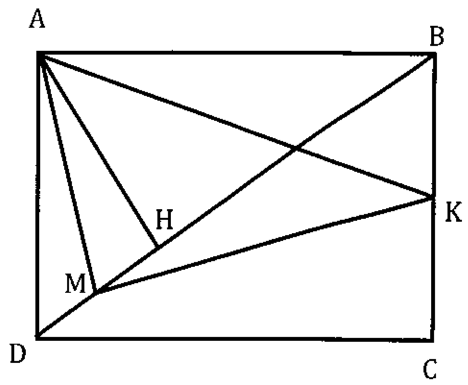
Vì M là trung điểm BC suy ra C(0; -2)

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là : $A(0;3), B(-2;2), C(0;\ -2), D(2;\ -1)$.

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm H(3; 0) là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng BD, điểm K(0; -2) là trung điểm cạnh BC, phương trình đường trung tuyến đi qua đỉnh A của tam giác ADH là 7x+9y-47=0. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Bắc Ninh 2016)

Lời giải chi tiết:



Gọi M là trung điểm DH.

Ta có:

$\widehat{ABC} = \widehat{AHD} = 90°;\ \widehat{ADH} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BC}{DH} = \dfrac{2BK}{2MH} = \dfrac{BK}{MH}$

$\Rightarrow \Delta ABK \sim \Delta AHM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AKB}$

$\Rightarrow$ AMKB là tứ giác nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AMK} = 180° - \widehat{ABK} = 90° \Rightarrow AM \perp MK$

Viết phương trình đường thẳng MK:

VTCP của đường thẳng AM là $\overrightarrow{u_{AM}} = (9;\ -7)$

Đường thẳng MK đi qua K(0; -2), nhận $\overrightarrow{u_{AM}} = (9;\ -7)$ là VTPT có phương trình:

$$9x - 7(y+2) = 0 \Leftrightarrow 9x - 7y - 14 = 0$$

M là giao điểm của AM và MK nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 7x + 9y - 47 = 0 \\ 9x - 7y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$

M là trung điểm của DH nên:

$\begin{cases} x_D + 3 = 2.\dfrac{7}{2} \\ y_D + 0 = 2.\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow D(4;5)$

Phương trình đường thẳng AH qua H(3; 0) nhận $\overrightarrow{HD} = (1;5)$ làm VTPT: $x + 5y - 3 = 0$

A là giao điểm của AH và AM nên tọa độ cđiểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x + 5y - 3 = 0 \\ 7x + 9y - 47 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(8;1)$

Phương trình AB qua A và nhận $\overrightarrow{DA} = (4;\ -6)$ làm VTPT: $2x - 3y - 19 = 0$

Phương trình BD: $5x - y - 15 = 0$

Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 5x - y - 15 = 0 \\ 2x - 3y - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2;\ -5)$$

K(0; -2) là trung điểm BC suy ra C(-2; 1)

Vậy $A(8;\ -1), B(2;\ -5), C(-2;1), D(4;5)$.

Bài 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CD và BH. Biết điểm $A(1;\ 1)$ phương trình đường thẳng EF: $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D của hình chữ nhật.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Ngô Sĩ Liên 2016)

Nhận xét: *Tính chất của bài toán này giống bài 5 nhưng ta có các tiếp cận khác như sau.*

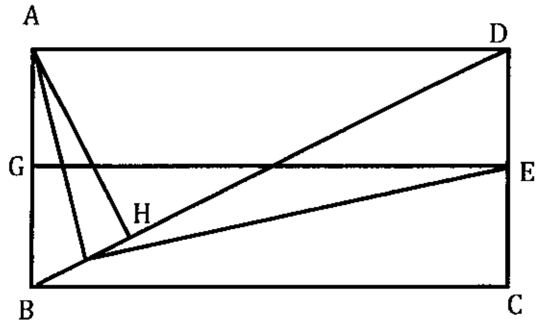
Phân tích và hướng dẫn giải:

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các đoạn CD, BH, AB. Ta chứng minh $AF \perp EF$

Ta thấy các tứ giác ADEG, ADFG nội tiếp nên tứ giác ADEF cũng nội tiếp do đó: $AF \perp EF$. Từ đó suy ra AF: $x + 3y - 4 = 0$

Tìm tọa độ của $F = AF \cap EF$, ta được $F\left(\frac{17}{5}; \frac{1}{5}\right)$, suy ra: $AF = \sqrt{\frac{32}{5}}$

Ta có:



$$\Delta AFE \sim \Delta DCB \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AF = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Gọi $E(a; 3a - 10) \in EF$

$$\Rightarrow EF^2 = \left(a - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(3a - \frac{51}{5}\right)^2 = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow 5a^2 - 34a + 57 = 0 \Rightarrow a = 3 \vee a = \frac{19}{5}$$

Hay $E(3; -1)$ hoặc $E\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

Theo giả thiết ta được $E(3; -1)$, phương trình AE: $x + y - 2 = 0$. Gọi $D(x;; y)$.

Tam giác ADE vuông cân tại D nên:

$$\begin{cases} AD = DE \\ AD \perp DE \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ (x-1)(x-3) = (y-1)(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đó $D(1; -1)$ hoặc $D(3; 1)$

Vì D, F nằm về hai phía so với đường thẳng AE nên $D(1; -1)$

Khi đó $C(5; -1), B(1; 5)$.

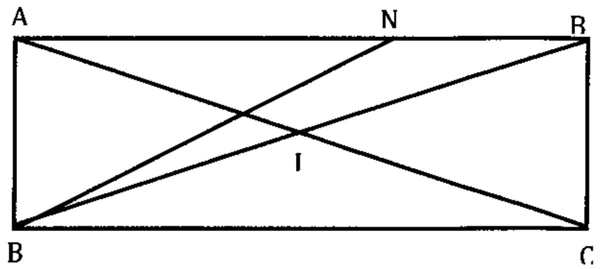
Vậy $B(1; 5), C(5; -1), D(1; 1)$.

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I(1; 3)$. Gọi N là điểm thuộc cạnh AB sao cho $3AN = 2AB$. Biết đường thẳng DN có phương trình $x + y - 2 = 0$ và $AB = 3AD$. Tìm tọa độ điểm B.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Bố Hạ 2016)

Hướng dẫn giải:

Gọi $\vec{n}(a; b)$ là vtpt của BD, BD đi qua điểm $I(1; 3)$.



Phương trình BD:

$ax + by - a - 3b = 0$

$\cos \widehat{BDN} = |\cos(\vec{n}, \vec{n_1})|$

$$= \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$\Leftrightarrow 24a^2 + 24b^2 - 50ab = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = 4b \\ 4a = 3b \end{array}\right.$$

Với $3a = 4b$, chọn $a = 4, b = 3$, pt

BD: $4x + 3y - 13 = 0$

$D = BD \cap DN \Rightarrow D(7; -5) \Rightarrow B(-5; 11)$

Với $4a = 3b$, chọn $a = 3, b = 4 \Rightarrow$ pt BD: $3x + 4y - 15 = 0$

$D = BD \cap DN \Rightarrow D(-7; 9) \Rightarrow B(9; -3)$.

Bài 7: Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $DC = BC\sqrt{2}$, tâm $I(-1; 2)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD, H(-2; 1) là giao điểm của hai đường thẳng AC và BM.

a.Viết phương trình đường thẳng IH.

b.Tìm tọa độ các điểm A và B

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Khoái Châu 2016)

Hướng dẫn giải:

a. $\overrightarrow{IH} = (-1;\ -1)$ nên đường thẳng IH có phương trình: $x - y + 3 = 0$.

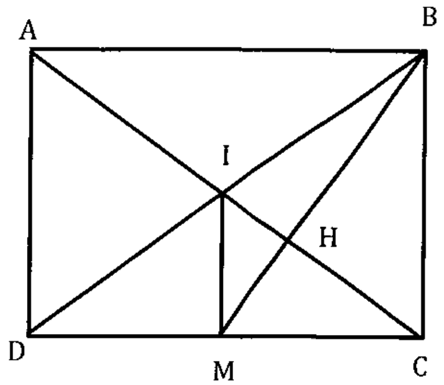
b. Từ giả thiết suy ra H là trọng tâm của tam giác BCD suy ra $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{HI} \Rightarrow A(2;5)$.

Ta có:

$$HB = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\sqrt{BC^2 + MC^2} = \frac{BC\sqrt{6}}{3}, HC = \frac{1}{3}AC = \frac{BC\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow HB^2 + HC^2 = BC^2 \to BM \perp AC$

Suy ra: BM đi qua $H(-2;1)$, nhận $\overrightarrow{IH} = (-1;\ -1)$ làm VTPT có phương trình $x + y + 1 = 0 \Rightarrow$ tọa độ điểm B có dạng $B(t;\ -t-1)$



Lại có: IA = IB nên $18 = (t+1)^2 + (t+3)^2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 - \sqrt{8} \\ t = -2 + \sqrt{8} \end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l} B(-2 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}) \\ B(-2 + 2\sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}) \end{array}\right.$.

Sau đây là một số bài luyện tập:

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $BD = \frac{\sqrt{10}}{5}AC$. Biết rằng $M(-2;-1); N(2;-1)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của D xuống các đường thẳng AB, BC và đường thẳng $x - 7y = 0$ đi qua A, C. Tìm tọa độ điểm A, C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Chí Linh- Hải Dương)

Kết quả: $A\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right); C\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và hoán vị.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $D(-6;-6)$. Đường trung trực của đoạn CD có phương trình $2x + 3y + 17 = 0$ và đường thẳng phân giác góc BAC có phương trình $5x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh còn lại của hình bình hành ABCD.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường Nam Yên Thành- Nghệ An-2015)

Kết quả $A(1;-2), B(5;4), C(-2;0)$.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có điểm $A(2;1); C(6;7); M(3;2)$ là điểm thuộc miền trong hình bình hành. Viết phương trình cạnh AD biết khoảng cách từ M đến CD bằng 5 lần khoảng cách từ M đến AB và đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 11 = 0$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường chuyên Lê Quý Đôn – HP-2015)

Kết quả: $3x - y - 5 = 0$

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $D(5;-2); M(3;4)$ thuộc cạnh AB, điểm $N(7;2)$ thuộc cạnh BC sao cho $BA = 3BM$, $CB = 4CN$. Tìm tọa độ điểm A, B, C biết BD cắt MN tại $K\left(\frac{55}{13}; \frac{14}{13}\right)$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường cBhuyên Lê Quý Đôn – HP-2015) ến Tâm- lần 1)

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có hai đỉnh $A(0;1); B(3;4)$ nằm trên parabol $(P): y = x^2 - 2x + 1$, tâm I nằm trên cung AB của (P). Tìm tọa độ điểm C, D sao cho hình tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0); B(0;2)$ và giao điểm I của 2 đường chéo nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ điểm C và D.

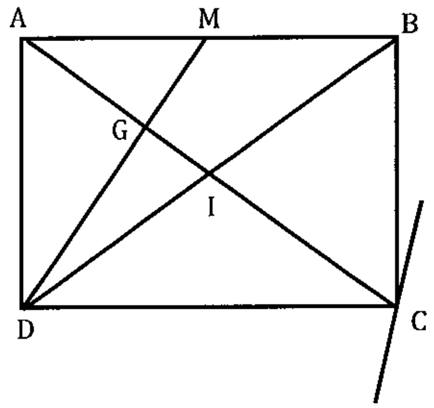
Ngày số 18

Hình vuông, hình chữ nhật, hình thang, hình bình hành (tiết 1)

Bài 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I(1;\ 2)$. Gọi M là trung điểm của AB, đường thẳng DM có phương trình $5x + 3y - 7 = 0$, điểm C thuộc đường thẳng d có phương trình $2x - y - 7 = 0$. Xác định tọa độ các điểm $A, B, C <$ D biết điểm D có hoành độ dương.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thăng Long 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:



Gọi $G\left(a;\ \frac{7-5a}{3}\right)$ là giao điểm của CI và DM.

Ta có G là trọng tâm tam giác ADB.

Suy ra $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IG} = (3a-3; 1-5a) \Rightarrow A(3a-2; 3-5a)$

I là trung điểm $AC \Rightarrow C(4-3a; 1-5a)$

Vì C thuộc đường thẳng $2x - y - 7 = 0$ nên:

$2(4-3a) - (1+5a) - 7 = 0 \Rightarrow a = 0$

Suy ra $A(-2; 3), C(4; 1), IA^2 = 10$

Gọi tọa độ điểm $D\left(d;\ \frac{7-5d}{3}\right)$,

$d > 0$ thuộc đường thẳng DM

$ID = IA \Leftrightarrow (1-d)^2 + \left(\frac{1-5d}{3}\right)^2 = 10$

$\Leftrightarrow 34d^2 - 28d - 80 = 0$

$\Leftrightarrow d = -\frac{20}{17}$ (l) hoặc $d = 2$ (tm)

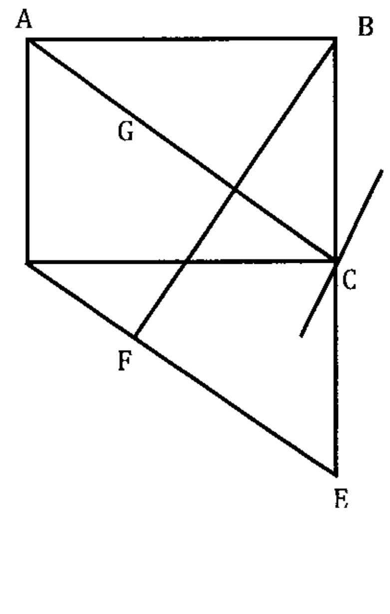
Suy ra D(2; -1)

I là trung điểm BD nên B(0; 5)

Vậy $A(-2; 3), B(0; 5), C(4; 1), D(2;\ -1)$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng d:2x+y+5=0 và A(-4; 8). Gọi E là điểm đối xứng với B qua C, F(5; -4) là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng ED. Tìm tọa độ điểm C và tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

Phân tích và hướng dẫn giải:



Ta có $C \in d: 2x + y + 5 = 0 \Rightarrow C(t; -2t-5)$

Ta chứng minh 5 điểm A, B, C, D, F cùng nằm trên đường tròn đường kính BD. Do tứ giác ABCD là hình chữ nhật thì AC cũng là đường kính của đường tròn trên nên suy ra được $\widehat{AFC} = 90° \Leftrightarrow AC^2 = AF^2 + CF^2$. Kết hợp với giả thiết ta có phương trình:

$(t+4)^2 + (-2t-13)^2 = 81 + 144 + (t-5)^2 + (-2t-1)^2$

$\Leftrightarrow t = 1$

Từ đó ta được $C(1;\ -7)$

Từ giả thiết ta có $AC//EF, BF \perp ED$ nên $BF \perp AC$, do C là trung điểm BE nên BF cắt và vuông góc với AC tại trung điểm.

Suy ra F đối xứng với B qua AC, suy ra $\Delta ABC = \Delta AFC$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{AFC} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{AFC} = 75$ (đvdt).

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABD có A(1; 5), AB=2BC và điểm C thuộc đường thẳng d: x+3y+7=0. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB, N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ các điểm B và C biết $N\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và điểm B có tung độ nguyên.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đội Cấn 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Gọi $I = AC \cap BD$.

Do $BN \perp DM \Rightarrow IN = IB = ID \Rightarrow IN = IA = IC$

$\Rightarrow \Delta ANC$ vuông tại N.

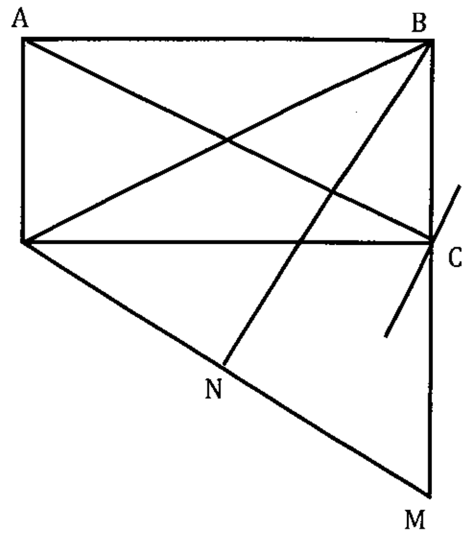
Đường thẳng CN qua $N\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{NA} = \left(\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$ là pháp tuyến nên có phương trình:

$7x + 9y + 13 = 0$. Do $C = CN \cap d \Rightarrow C(2; -3)$

Gọi B(a; b). Do $AB = 2BC$ và $AB \perp BC$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (a-1)(a-2) + (b-5)(b+3) = 0 \\ (a-1)^2 + (b-5)^2 = 4[(a-2)^2 + (b+3)^2] \end{cases}$$

Giải hệ trên suy ra $\left[\begin{array}{l} a = 5, b = -1 \\ a = -\frac{7}{5}, b = -\frac{9}{5} \text{ (ktm)} \end{array}\right.$



Vậy $B(5; -1), C(2; -3)$.

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh B thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 10$, đỉnh C thuộc đường thẳng có phương trình $x + 2y - 1 = 0$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của B lên AC. Trung điểm của AM và CD lần lượt là $N\left(\frac{-3}{5}; \frac{1}{5}\right)$ và P(1; 1). Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết rằng điểm B có hoành độ dương và điểm C tung độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Quỳnh Lưu II 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Gọi Q là trung điểm BM, khi đó $\begin{cases} NQ // AB \\ NQ = \frac{1}{2}AB \end{cases}$ suy ra PCQN là hình bình hành

Suy ra CQ//PN

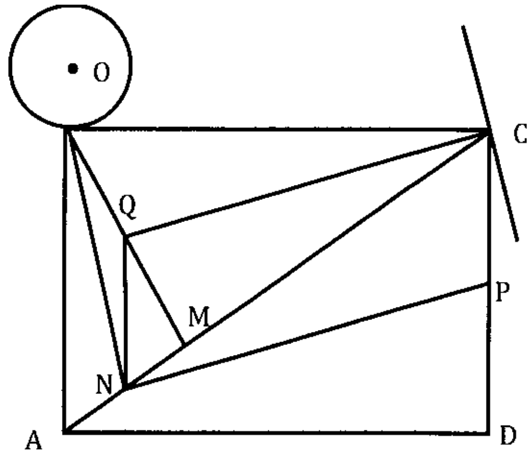
Trong tam giác BCN thì Q là trực tâm nên CQ vuông góc với BN. Vì vậy PN vuông góc với BN.

Đường thẳng BN đi qua N và vuông góc với ON nên có phương trình: $2x + y + 1 = 0$

B là giao điểm của đường tròn (C) và BN:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = -3 \\ x = \frac{-9}{5}; y = \frac{13}{5} \end{array}\right.$$

Vì B có hoành độ dương nên điểm B(1; -3)



Gọi $C(1-2c; c), \overrightarrow{CB} = (2c; -3-c), \overrightarrow{CP} = (2c; 1-c)$. Do CP vuông góc với BC nên:

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP} = 0 \Leftrightarrow 5c^2 + 2c - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -1 \\ c = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vì C có tung độ âm nên C(3; -1)

P là trung điểm CD nên $\begin{cases} x_D = 2x_P - x_C = -1 \\ y_D = 2y_P - y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 3)$

Ta có $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 1 = -4 \\ y_A + 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = 1 \end{cases}$

Vậy $A(-3; 1), B(1; -3), C(3; -1), D(-1; 3)$.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB, AD tiếp xúc với đường tròn (C) có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$. Phương trình đường chéo AC: x+2y-6=0. Chứng minh đường tròn (C) tiếp xúc với trục tung. Gọi N là tiếp điểm của (C) và trục tung. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết A có hoành độ âm và điểm D có hoành độ dương, diện tích tam giác CND bằng 15.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Thái Bình 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

(C) có tâm I(-2; 3), bán kính R=2

Có $d(I; Oy) = |x_I| = 2 = R \Rightarrow$ (C) tiếp xúc với trục tung

N là tiếp điểm của (C) và trục tung nên N(0; 3)

$\Rightarrow N \in (AC)$

Vì AB, AD tiếp xúc với (C) nên $IA = \sqrt{2}R = 2\sqrt{2}$

Gọi $A(6-2a, a) \in (AC)$

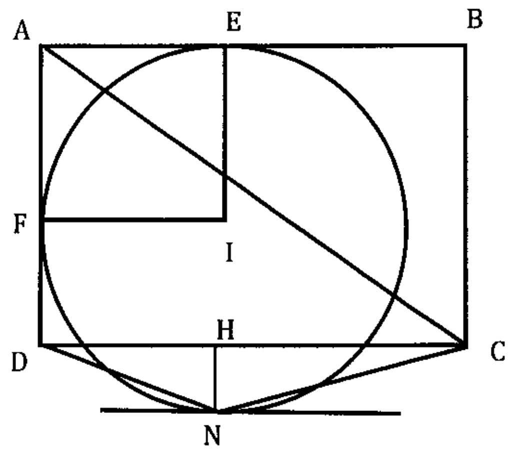
$\Rightarrow (6 - 2a + 2)^2 + (a-3)^2 = 8$

$\Rightarrow 5a^2 - 38a + 65 = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \Rightarrow A(-4; 5) \text{ (tm)} \\ a = \dfrac{13}{5} \Rightarrow A\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{13}{5}\right) \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy A(-4; 5)

Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của AB, AD với (C)



Suy ra E, F là giao của (A, 2): $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 4$ và (C): $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

Suy ra E, F thuộc đường thẳng $(x+4)^2 + (y-5)^2 - (x+2)^2 + (y-3)^2 = 0$

$$\Rightarrow (EF): x - y + 7 = 0$$

Suy ra tọa độ E, F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ (x+4)^2 + (y-5)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 7 & (1) \\ (x+4)^2 + (y-5)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2):

$(y-3)^2 + (y-5)^2 = 4 \Leftrightarrow 2y^2 - 16y + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 \Rightarrow x = -2 \\ y = 3 \Rightarrow x = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (0; -2); \overrightarrow{AF} = (2; 0) \\ \overrightarrow{AF} = (0; -2); \overrightarrow{AE} = (2; 0) \end{array}\right.$

Vậy AE, AF song song với 2 trục tọa độ.

Vì D có hoành độ dương nên AF phải song song với trục hoành

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = (0; -2), \overrightarrow{AF} = (2; 0)$

Ta có phương trình các đường thẳng:

(AB): x=-4

(AD): y=5

Gọi D(d; 5)

Vì CD//Oy kết hợp với C thuộc AC nên $C\left(d; \dfrac{6-d}{2}\right)$

Kẻ đường cao NH của tam giác CND suy ra NH=d

$$\Rightarrow S_{CND} = \frac{1}{2}NH.CD = \frac{1}{2}d\left(5 - \frac{6-d}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(2 + \frac{d}{2}\right) = 15$$

$$\Rightarrow d^2 + 4d - 60 = 0 \Rightarrow d = 6\ (d \geq 0) \Rightarrow D(6;5), C(6;0) \Rightarrow B(-4;\ 0)$$

Vậy $A(-4;5), B(-4;0), C(6;0), D(6;5)$.

Bài 6: Trong mặt phẳng hệ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B lên MD. Tam giác BDM nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết phương trình đường thẳng CN: 3x-4y-17=0; đường thẳng BC đi qua điểm E(7; 0) và điểm M có tung độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Xuân Trường –Nam Định 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

(T) có tâm $I(4;\ 1)$, R=5.

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và N, C là chân các đường cao nên chứng minh được $IM \perp CN$.

Lập ptđt IM qua I và $IM \perp CN$:

$4(x-4) + 3(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 3y - 19 = 0$

M là giao điểm (T) với IM: $\left[\begin{array}{l} M(7;\ -3) \\ M(1;5)\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

Đường thẳng BC qua M, E có phương trình: $x = 7$

C là giao điểm BC và NC suy ra $C(7;\ 1)$

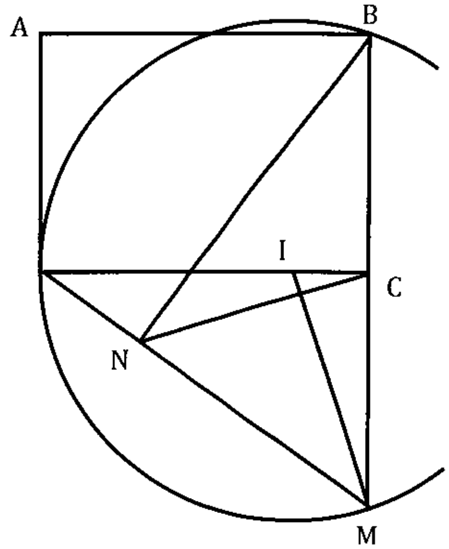
B đối xứng M qua C suy ra $B(7;\ 5)$

Đường thẳng DC qua C và vuông góc BC: y=1

D là giao điểm (T) và DC: $\left[\begin{array}{l} D(9;1) \\ D(-1;1) \end{array}\right.$

Vì B, D nằm cùng phía với CN nên D(-1; 1)

Do $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow A(-1;5)$.



Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hình bình hành ABCD có hai đỉnh $A(-2;\ -1), D(5;\ 0)$ và có tâm $I(2;\ 1)$. Hãy xác định tọa độ hai đỉnh B, C và góc nhọn hợp bởi hai đường chéo của hình bình hành đã cho.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Vĩnh Phúc 2016)

Sơ đồ tư duy:

Tính chất hình: *Hình bình hành có các tính chất hai cặp cạnh đối tương ứng song song, hai đường chéo đi qua trung điểm mỗi đường.*

$$A \xrightarrow{\text{trung điểm I}} B$$

$$D \xrightarrow{\text{trung điểm I}} C$$

$$\rightarrow \alpha = (AC;BD) \rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}\right)\right|$$

Các công thức cần nhớ:

$$A(x_1;y_1); B(x_2;y_2) \xrightarrow{\text{trung điểm M}} M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$\cos(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}) = \frac{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}$$

$$\vec{u} = (x;y) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\overrightarrow{u_1} = (x_1;y_1); \overrightarrow{u_2} = (x_2;y_2) \rightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = x_1.y_1 + x_2.y_2$$

Lời giải chi tiết:

Do I là trung điểm BD. Suy ra :

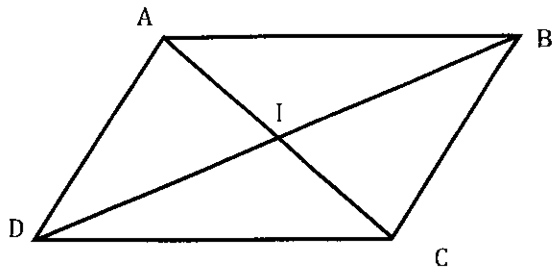
$\begin{cases} x_B = 2x_t - x_D = 4 - 5 = -1 \\ y_B = 2y_t - y_D = 2 - 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 2)$

Do I là trung điểm AC. Suy ra:

$\begin{cases} x_C = 2x_t - x_A = 4 + 2 = 6 \\ y_C = 2y_t - y_A = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow C(6; 3)$

Góc nhọn $\alpha = (AC, BD)$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (8; 4), \overrightarrow{BD} = (6; -2)$



$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})| = \left|\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}\right| = \left|\frac{48 - 8}{4\sqrt{5}.2\sqrt{10}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \alpha = 45°$.

Bài 8: (Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên I 2016)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, có $AD = 2AB$. Điểm $H\left(\frac{31}{5}; \frac{17}{5}\right)$ là điểm đối xứng của điểm B qua đường chéo AC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, biết phương trình CD: $x - y - 10 = 0$ và C có tung độ âm.

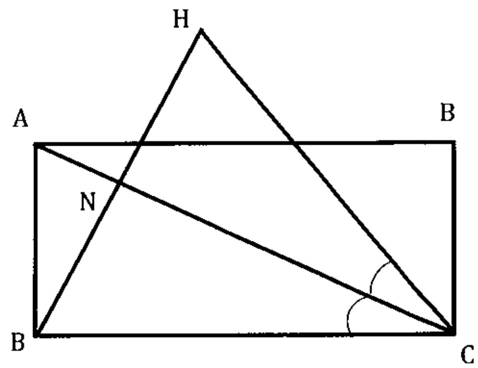
<u>Sơ đồ tư duy:</u>

Điểm C là điểm được để ý nhiều hơn cả vì có nhiều dữ liệu: (CD): $x - y - 10 = 0$ và C có tung độ âm.

$$C \leftarrow \begin{cases} C \in (CD) \rightarrow \text{tọa độ hóa còn 1 ẩn số.} \\ ? \end{cases}$$

Dữ liệu tiếp theo ta cần dùng đến là điểm H và hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$.

Một trong nhiều hướng đi là tính đoạn HC (còn một hướn giải nữa là tính góc (HC; DC)). Khi đó, ta có thể dẫn tới lời giải sau:



<u>Lời giải chi tiết:</u>

$\tan\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\widehat{ACD} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \cos\widehat{ACH}$

$\sin\widehat{ACH} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos\widehat{ACD} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin\widehat{ACD} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \sin\widehat{HCD} = \sin(\widehat{ACD} - \widehat{ACH}) = \frac{3}{5}$

Ta có:

$$d(H, CD) = \frac{18\sqrt{2}}{5} \Rightarrow HC = \frac{18\sqrt{2}}{5}.\frac{5}{3} = 6\sqrt{2}$$

Gọi C (c; c − 10)

$$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \left(\frac{31}{5} - c; \frac{65}{5} - c\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{31}{5} - c\right)^2 + \left(\frac{65}{5} - c\right)^2 = 72 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 5 \\ c = \frac{73}{5} \end{array}\right. \Rightarrow C(5; -5)$$

Phương trình BC: $(x - 5) + (y + 5) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

Gọi B (b; −b), ta có:

$$BC = CH = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow BC^2 = 72 \Leftrightarrow (b - 5)^2 + (-b + 5)^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 11 \text{ (loại)} \\ b = -1 \end{array}\right. \Rightarrow B(-1; 1)$$

Từ đó ta tìm được A(2; 4), D(8; −2).

Một số bài luyện tập:

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD với $A(1;0)$, đường chéo BD có phương trình $d: 3x+y-7=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn của hình thoi ABCD biết diện tích của hình thoi ABCD bằng 20.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\frac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có đường chéo BD nằm trên đường thẳng có phương trình $\Delta: x-y-2=0$. Điểm $M(4;-4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC, điểm $N(-5;1)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB. Biết $BD=8\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD biết điểm D có hoành độ âm.

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có phương trình hai cạnh AB và AD lần lượt là $x+2y-2=0$ và $2x+y+1=0$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đường thẳng BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD.

Bài 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn $(I): (x+5)^2+(y-6)^2=\frac{32}{5}$ biết rằng các đường thẳng AC và AB lần lượt đi qua các điểm $M(7;8); N(6;9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD.

Kết quả $\left[\begin{array}{l} A(9;10);B(3;8);C(1;2);D(7;4) \\ A(2;3);B\left(-\frac{23}{2};\frac{45}{2}\right);C(8;9);D\left(\frac{43}{2};-\frac{21}{2}\right) \end{array}\right.$.

Bài 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có đường thẳng $d: x+y-1=0$. Điểm $E(9;4)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB, điểm $F(-2;-5)$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh AD, $AC=2\sqrt{2}$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD biết điểm C có hoành độ âm.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia Sở Giáo Dục và Đào Tạo Bắc Ninh lần 2-2015)

Kết quả: $A(0;1);B(-3;0);C(-2;3);D(1;4)$.

Ngày số 19

Các bài toán tổng ôn hình phẳng Oxy

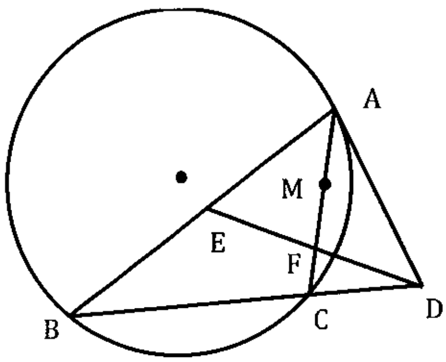
Bài 1: Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(1; 4), tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của góc $\widehat{ADB}$ là d:x-y+2=0, điểm M(-4; 1) thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Việt Yên II 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Gọi E, F là giao điểm của d và AB, AC.

Ta có:



$$\begin{cases} \widehat{AFD} = \hat{C} + \frac{1}{2}\widehat{ADC} \\ \widehat{AEF} = \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \widehat{DAB} \end{cases}$$

Mà $\hat{C} = \widehat{DAB}$ (cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{AEF}$

$\Rightarrow AE = AF.$

Ta có $\overrightarrow{AC}(-5;\ -3)$ suy ra vtpt của AC là $\overrightarrow{n_{AC}} = (3;\ -5)$

$\Rightarrow AC: 3(x-1) - 5(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y + 17 = 0$

Tọa độ F là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 17 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

Ta có $AF = \sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(4-\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{34}}{2}$

Vì $E \in d \Rightarrow E(t; t+2) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (t-1; t-2) \Rightarrow AE = \sqrt{(t-1)^2 + (t-2)^2}$

$$AE = \frac{\sqrt{34}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{7}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right) \text{ (loại do trùng F)} \\ E\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ (tm)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow$ vtpt của AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (5;\ -3)$

Suy ra phương trình AB: $5(x-1) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 7 = 0$

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC. Đường phân giác trong BD có phương trình x+y-2=0. Đường trung tuyến BN có phương trình $4x + 5y - 9 = 0$. Điểm $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$ nằm trên cạnh BC. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{15}{6}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Hùng Vương 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + 5y - 9 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 1)$

Phương trình BC đi qua B và M: x+2y-3=0

H là giao MM' và BD suy ra $H\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Ta có H là trung điểm MM' nên $M'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Phương trình BA qua B và M': 2x+y-3=0

Gọi tọa độ $A(a; 3-2a) \in BA, C(3-2b; b) \in BC$

N là trung điểm AC thì $N\left(\frac{3-2b+a}{2};\frac{3-2a+b}{2}\right)$

Vì $N \in BN \Rightarrow 4.\frac{3-2b+a}{2}+5.\frac{3-2a+b}{2}-9=0 \Rightarrow b=3-2a$

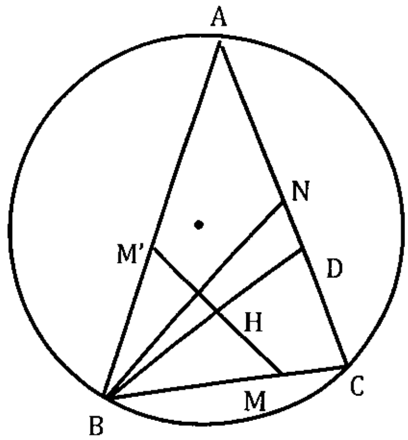
Suy ra $A\left(\frac{3-b}{2};b\right)$; $C(3-2b;b) \Rightarrow N\left(\frac{9-5b}{4};b\right)$

Phương trình AC là $y=b$

Phương trình đường trung trực AC vuông góc AC tại N có dạng:

$x=\frac{9-5b}{4}$ (d)

Gọi E là trung điểm BC suy ra $E\left(2-b;\frac{1+b}{2}\right)$



Phương trình trung trực BC đi qua E vuông góc BC có dạng $2x-y-\frac{7-5b}{2}=0$ (d')

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì I là giao (d) và (d') nên có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}2x-y-\frac{7-5b}{2}=0\\ x=\frac{9-5b}{4}\end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9-5b}{4};1\right)$$

Ta có: $BI=\left|\frac{9-5b}{4}-1\right|=\frac{15}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=-1\\ b=3\end{array}\right.$

+Với $b=-1 \Rightarrow C(5;-1)$, thỏa mãn M thuộc cạnh BC. Suy ra $A(2;-1)$.

+Với $b=3 \Rightarrow C(-3;3)$, M không thuộc cạnh BC, loại.

Vậy $A(2;-1), B(1;1), C(5;-1)$

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, cạnh BC nằm trên đường thẳng $d_1: x-y+1=0$. Đường cao của tam giác ABC kẻ từ B là $d_2: x+2y-2=0$. Điểm $M(1;1)$ thuộc đường cao kẻ từ C. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh còn lại của tam giác ABC.

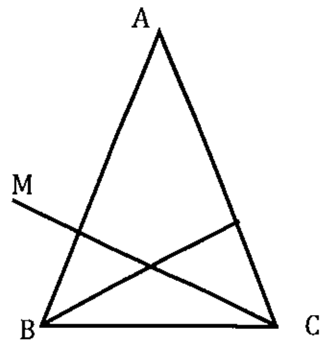
(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Thái Nguyên 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

B là giao điểm của d_1, d_2 nên có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y+1=0\\ x+2y-2=0\end{cases} \Rightarrow B(0;1)$$

Vì tam giác ABC cân tại A nên góc giữa d_1, d_2 bằng góc giữa d_1 và MC.



VTPT của d_1, d_2 lần lượt là $\overrightarrow{n_1}(1;-1), \overrightarrow{n_2}(1;2)$

Góc giữa d_1, d_2 là $(d_1, d_2)=\alpha$

$$\cos\alpha=|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Phương trình đường thẳng MC qua M có dạng:

$$a(x-1)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow ab+by-a-b=0 \quad (d_3)$$

d_3 nhận $\overrightarrow{n_3}(a;b)$ làm VTPT

Góc giữa d_1 và d_3 là $(d_1, d_3)=\beta$

$$\cos\beta=|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3})|=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ta có:

$$\cos\alpha=\cos\beta \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 5|a-b|$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2 = 5(a^2-2ab+b^2)$$
$$\Leftrightarrow 4a^2-10ab+4b^2 = 0$$
$$b = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$a = 3 \Rightarrow (d_3): x + 2y - 3 = 0$ (loại do $d_3//d_2$)

$a = 2 \Rightarrow (d_3): 2x + y - 3 = 0$ (thỏa mãn)

Phương trình AB qua B và vuông góc với d_3 : x-2y+2=0

Tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Phương trình AC qua C và vuông góc với d_2: $2x - y + \frac{1}{3} = 0$

Vậy (AB): $x - 2y + 2 = 0$; (AC): $2x - y + \frac{1}{3} = 0$.

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia AC sao cho GD=GC. Biết điểm G thuộc đường thẳng d: 2x+3y-13=0 và tam giác BDG nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm B và viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm B có hoành độ âm và tọa độ điểm G là số nguyên.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Phù Cừ 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Tam giác ABC vuông cân tại A có G là trọng tâm nên GB = GC.

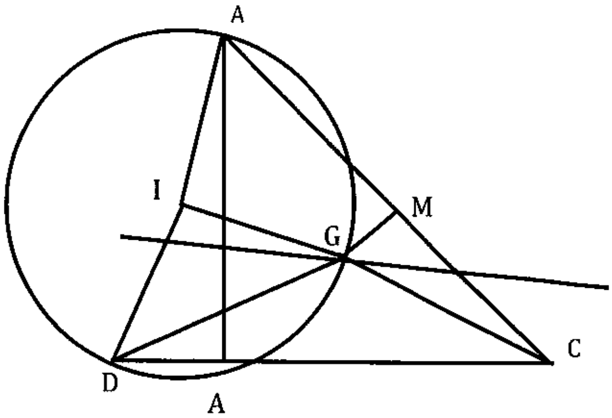
Mà GD=GC nên tam giác BCD nội tiếp đường tròn tâm G.

Suy ra $\widehat{BGD} = 2\widehat{BCD} = 2\widehat{BCA} = 90° \Rightarrow BG \perp GD$ hay tam giác BDG vuông cân tại G.

Đường tròn (C) tâm I(1; 6) bán kính $R = \sqrt{10}$ ngoại tiếp tam giác BDG nên I là trung điểm của BD.

Do đó $IG = \sqrt{10}$; $IG \perp BD$

Vì $G \in d: 2x + 3y - 13 = 0 \Rightarrow G\left(m; \frac{13-2m}{3}\right)$



Từ $IG = \sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} G(2;3) \\ G\left(-\frac{28}{13}; \frac{75}{13}\right) \end{array}\right.$

Do tọa độ điểm G là số nguyên nên G(2; 3)

BD đi qua I(1; 6) và $IG \perp BD$ nên phương trình BD: x-3y+17=0

$B, D \in BD \cap (C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-2;5) \\ D(4;7) \end{array}\right.$ (do hoành độ điểm B âm)

Vậy B(-2; 5)

Gọi M là trung điểm của BC ta có AM=MB=MC (do ABC vuông cân tại A)

Suy ra $AM \perp BC \Rightarrow GM \perp MB$ và $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}MB$

Nên $\tan\widehat{GBM} = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\widehat{GBM} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Gọi $\vec{n}(a; b)$ với $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là VTPT của BC.

Ta có VTCP của BG là $\overrightarrow{BG} = (4; -2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BG}} = (1; 2)$ là VTPT của BG.

Có $\cos(BG, BC) = |\cos(\overrightarrow{n_{BG}}, \vec{n})| \Leftrightarrow \cos\widehat{GBM} = |\cos(\overrightarrow{n_{BG}}, \vec{n})|$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|\overrightarrow{n_{BG}}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{n_{BG}}|.|\vec{n}|} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{|a+2b|}{\sqrt{5(a^2+b^2)}}$$

$$\Leftrightarrow 35a^2 - 40ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 7a - b = 0 \end{array}\right.$$

+TH1: Với $a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1; 1) \Rightarrow$ ptBC: $x + y - 3 = 0$

+TH2: Với $7a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1; 7) \Rightarrow$ ptBC: $x + 7y - 33 = 0$

Do hai điểm D và G cùng nằm về một phía đối với đường thẳng BC nên phương trình BC thỏa mãn là:

$$x + y - 3 = 0$$

Vậy BC: $x + y - 3 = 0$ và $B(-2;\ 5)$

Bài 5: Cho elip (E) và đường thẳng (d) có phương trình: $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$; $(d): x - y\sqrt{2} + 2 = 0$.

1. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.
2. Tìm tọa độ điểm C thuộc (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đào Duy Từ 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

1. Xét phương trình tung độ của giao điểm (d) và (E):

$$\frac{(y\sqrt{2}-2)^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 4y\sqrt{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Vậy (d) cắt (E) tại hai điểm phân biệt, giả sử đó là:

$$A\left(-1+\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right), B\left(-1-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$$

Suy ra $AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}$

2. Gọi điểm $C(x_C;\ y_C) \in (E)$:

$$\Rightarrow \frac{{x_C}^2}{8} + \frac{{y_C}^2}{4} = 1 \Rightarrow x_C^2 + 2y_C^2 = 8$$

Vẽ $CH \perp AB$ tại H thì $CH = d(C, (d)) = \frac{|x_C - y_C\sqrt{2} + 2|}{\sqrt{1+2}}$

Áp dụng hai bất đẳng thức đúng

$|a + b| \le |a| + |b| \Leftrightarrow ab \le |ab|$ và

$|a + b| \le \sqrt{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow (a - b)^2 \ge 0$

Ta có:

$$|x_C - y_C\sqrt{2} + 2| \le |x_C - y_C\sqrt{2}| + |2| \le \sqrt{2(x_C^2 + 2y_C^2)} + 2 = 6$$

$\Rightarrow CH \le 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH \le 3\sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = -y\sqrt{2} \ge 0 \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $C(2;\ -\sqrt{2})$.

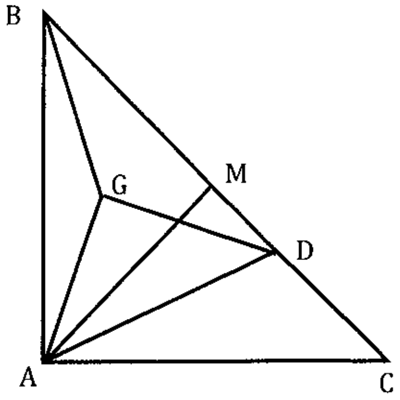
Bài 6: Cho ΔABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABM, điểm D(7; -2) là điểm nằm trên đoạn MC sao cho GA = GD. Tìm tọa độ điểm A, lập phương trình AB, biết hoành độ của A nhỏ hơn 4 và AG có phương trình $3x - y - 13 = 0$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hậu Lộc II 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có:

$$d(D; AG) = \frac{|3.7 - (-2) - 13|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$



ΔABMvuông cân $\Rightarrow GA = GB \Rightarrow GA = GB = GD$
Vậy G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD

$$\Rightarrow \widehat{AGD} = 2\widehat{ABD} = 90°$$

$\Rightarrow \Delta GAD$ vuông cân tại G.
Do đó $GA = GD = d(D; AG) = \sqrt{10} \Rightarrow AD^2 = 20$.
Gọi $A(a; 3a - 13); a < 4$

$$AD^2 = 20 \Leftrightarrow (a-7)^2 + (3a - 11)^2 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \text{ (loại)} \\ a = 3 \end{array}\right.$$

Vậy $A(3;\ -4)$
Gọi VTPT của AB là $\overrightarrow{n_{AB}}(a; b)$

$$\cos\widehat{NAG} = |\cos(\overrightarrow{n_{AB}}, \overrightarrow{n_{AG}})| = \frac{|3a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{10}} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\cos\widehat{NAG} = \frac{NA}{AG} = \frac{NM}{\sqrt{NA^2 + NG^2}} = \frac{3NG}{\sqrt{9NG^2 + NG^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{|3a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 6ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3a = -4b \end{array}\right.$$

Với $b = 0$ chọn $a = 1$ ta có $AB: x - 3 = 0$
Với $3a = -4b$ chọn $a = 4;\ b = -3$ ta có $AB: 4x - 3y - 24 = 0$
Nhận thấy với $AB: 4x - 3y - 24 = 0$

$$d(D; AB) = \frac{|4.7 - 3.(-2) - 24|}{\sqrt{16 + 9}} = 2 < d(D; AG) = \sqrt{10} \text{ (loại)}$$

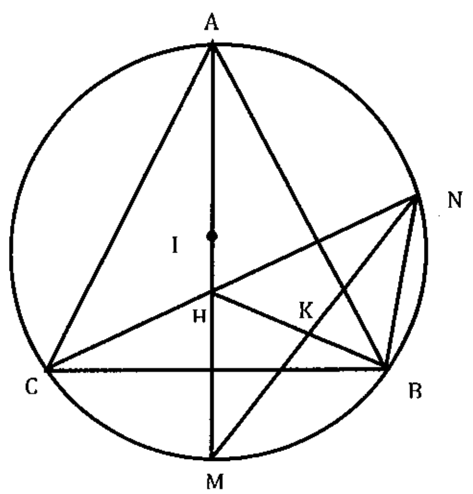
Vậy $AB: x - 3 = 0$

Bài 7: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm $I(0; 5)$. Đường thẳng AI cắt đường tròn tại $M(5; 0)$ (M khác A). Đường cao qua C cắt đường tròn tại $N\left(-\frac{17}{5};\ -\frac{6}{5}\right)$, (N khác C). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết hoành độ điểm B lớn hơn 0.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nghèn 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

I trung điểm AM suy ra A(-5; 10)
ΔABC cân tại A $\Rightarrow$ AM là trung trực của BC $\Rightarrow MB = MC$, H là trực tâm
$\Rightarrow BH//MC$ (cùng vuông góc với AC), $CH//MB$ (cùng vuông góc AB) $\Rightarrow$ tứ giác BMCH là hình bình hành, do $HM \perp BC \Rightarrow$ BMHC là hình thoi $\Rightarrow$BC là phân giác của $\widehat{NCM} \Rightarrow BN = BM \Rightarrow \Delta BMN$ cân tại B.
Gọi K là trung điểm $MN \Rightarrow BK \perp MN$ (1)
Mặt khác tam giác IMN có $IM = IN = R \Rightarrow \Delta IMN$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp MN$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra B, K, I thẳng hàng $\Rightarrow BI \perp MN$



$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{42}{5}; -\frac{6}{5}\right)$$

$$BI \left\{\begin{array}{l} \text{qua } I(0; 5) \\ \perp MN \end{array}\right. \Rightarrow BI: 7x + y - 5 = 0$$

$B \in BI \Rightarrow B(b; 5 - 7b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IB}(b; -7b), \overrightarrow{IM} = (5; -5)$

Ta có $IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow b^2 + 49b^2 = 50$

$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow B(1; -2)$

$BC\begin{cases} \text{qua } B(1; -2) \\ \perp IM \end{cases} \Rightarrow \text{pt } BC: x - y - 3 = 0$

$C \in BC \Rightarrow C(c; c-3), IC^2 = IM^2$

$$\Leftrightarrow c^2 + (c-8)^2 = 50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(1; -2) \equiv B \text{ (loại)} \\ C(7; 4) \end{array}\right.$$

Vậy $A(-5; 10), B(1; -2), C(7; 4)$.

Chuyên đề III: 8 ngày luyện thi bất đẳng thức

Ngày số 20

Một số kĩ năng sử dụng bất đẳng thức cổ điển

Bình luận: *Có quá nhiều những phương pháp bất đẳng thức dùng bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopski. Riêng ở buổi học này, anh chỉ điểm danh một vài bài cần lưu ý. Các em có thể đọc thêm cuốn Công phá Bất Đẳng Thức cho đầy đủ.*

Bài 1: Cho 3 số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$S = \sqrt{\frac{ab}{ab + 2c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc + 2c}} + \sqrt{\frac{ca}{ca + 2b}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Tam Đảo 2016)

Nhận xét: *Số 2 xuất hiện vô duyên nên đó là điểm chốt của bài toán. Bài này sử dụng bất đẳng thức ở mẫu.*

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab + 2c}} = \sqrt{\frac{ab}{ab + (a + b + c)c}} = \sqrt{\frac{ab}{ab + (a + b + c)c}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a + c} + \frac{b}{b + c}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{a}{a + c} = \frac{b}{b + c}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\sqrt{\frac{bc}{bc + 2c}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b + a} + \frac{c}{c + a}\right);\ \sqrt{\frac{ca}{ca + 2b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c + b} + \frac{a}{a + b}\right)$$

Cộng các vế ta được:

$$S \le \frac{1}{2}\left(\frac{a + b}{a + b} + \frac{b + c}{b + c} + \frac{c + a}{c + a}\right) = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Vậy $S_{max} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$.

Bài 2: Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(b + c)^2 + 5bc} + \frac{b^2}{(c + a)^2 + 5ca} - \frac{3}{4}(a + b)^2$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Việt Yên II 2016)

Nhận xét: *Tương tự như bài 1, do tính đối xứng thì ta sẽ đưa về biến c. Ở bài toán này ta cũng dùng bất đẳng thức ở mẫu và áp dụng các bất đẳng thức phụ như sau:*

$$x^2 + y^2 \ge \frac{(x + y)^2}{2} \ge 2xy$$

Lời giải chi tiết:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} \ge \frac{a^2}{(b+c)^2+\frac{5}{4}(b+c)^2} = \frac{4a^2}{9(b+c)^2}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge \frac{4b^2}{9(c+a)^2}$$

Suy ra

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} + \frac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge \frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2}\right)$$

$$\ge \frac{2}{9}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}\right)^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c(a+b)}{ab+c(a+b)+c^2}\right)^2$$

$$\ge \frac{2}{9}\left(\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)}{\frac{(a+b)^2}{4}+c(a+b)+c^2}\right)^2 = \frac{2}{9}\left(\frac{2(a+b)^2+4c(a+b)}{(a+b)^2+4c(a+b)+4c^2}\right)^2$$

Vì $a+b+c=1 \Leftrightarrow a+b=1-c$ nên

$$P \ge \frac{2}{9}\left(\frac{2(1-c)^2+4c(1-c)}{(1-c)^2+4c(1-c)+4c^2}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 = \frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(c) = \frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2$ với $c \in (0;1)$

Ta có:

$$f'(c) = \frac{16}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right).\frac{2}{(c+1)^2} - \frac{3}{2}(c-1)$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow (c-1)(64-(3c+3)^3) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

C	0		$\frac{1}{3}$		1
f'(c)		-	0	+	
f(c)	↘		$-\frac{1}{9}$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(c) \ge -\frac{1}{9}$ với mọi $c \in (0;1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P \ge -\frac{1}{9}$ dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{9}$ đạt khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 3: Với $a, b, c > 0$ là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ac=3$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a^2+bc} + \frac{b}{2b^2+ac} + \frac{c}{2c^2+ac} \ge abc$$

Nhận xét: *Đôi khi bài toán trông có vẻ phức tạp nhưng lại thực sự rất đơn giản, bài toán này là một ví dụ. Bài này, thực chất ta chỉ cần sử dụng bất đẳng thức phụ quen thuộc:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$$

Lời giải chi tiết:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$P = \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{bc}} + \frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ac}} + \frac{1}{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}} \geq (abc)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ ta có:

$$P \geq \frac{9}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2} = \frac{9(abc)^2}{(ab+bc+ac)^2} = (abc)^2$$

Bài 4: Với $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{2a+c}{b} + \frac{4(a+b)}{a+c} \geq 9$$

Nhận xét: *Ý tưởng của bài toán này là đưa được về dạng tích của hai biểu thức dạng Bunhicopski.*

Lời giải chi tiết:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{b+c}{a}+2\right) + \left(\frac{2a+c}{b}+1\right) + \left(\frac{4(a+b)}{a+c}+4\right) \geq 16$$

$$\leftrightarrow (2a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+c}\right) \geq 16\ (*)$$

Ta có:

$$P = (2a+b+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geq 16$$

$$P \geq (2a+b+c).\frac{8^2}{8a+4b+4c} = \frac{8^2}{4} = 16$$

Nhận xét: Ngoài ra bất đẳng thức $(*)$ có cách chứng minh khác đơn giản hơn:

$$(2a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+c}\right) = [a+b+(a+c)].\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+c}\right) \geq (1+1+2)^2 = 16$$

Bài 5: Với $a, b, c>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-1\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right) \geq 8$$

Ý tưởng: *Tư tưởng của bài toán này là ghép cặp cho phù hợp. Ý tưởng này đã được giới thiệu trong sách bất đẳng thức của anh.*

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$1-\frac{a}{1+b} = \frac{1+b-a}{1+b} = \frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+a)(1+c)}}$$

$$1-\frac{b}{1+c} = \frac{1+c-b}{1+C} = \frac{a}{1+b}+\frac{c}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+b)(1+a)}}$$

$$1-\frac{c}{1+a} = \frac{1+a-c}{1+a} = \frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+b)(1+c)}}$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

$$(1+b-a)(1+c-b)(1+a-c) \geq 8abc$$

$$\rightarrow \left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-1\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right) \geq 8$$

Bài 6: Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ac \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+3}+\sqrt{b+3}+\sqrt{c+3} \leq 2(a^2+b^2+c^2)$$

Ý tưởng: *Bài toán này, chính xác là sử dụng cân bằng hệ số. Dễ thấy dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.*

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$(a+3)+4 \geq 2\sqrt{(a+3)4} \leftrightarrow \sqrt{a+3} \leq \frac{a+7}{4}$$

Tương tự:

$$\sqrt{b+3} \leq \frac{b+7}{4}; \sqrt{c+3} \leq \frac{c+7}{4}$$

Suy ra:

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \leq \frac{a+b+c+21}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức:

$$a \leq \frac{a^2+1}{2}, b \leq \frac{b^2+1}{2}, c \leq \frac{c^2+1}{2}$$

Thu được:

$$\frac{a+b+c+21}{4} \leq \frac{\frac{a^2+1}{2} + \frac{b^2+1}{2} + \frac{c^2+1}{2} + 21}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2+45}{8}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+45}{8} \leq 2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 15(a^2+b^2+c^2) \geq 45$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2) \geq 3$$

Ta có: $(a^2+b^2+c^2) \geq ab+bc+ac \geq 3$, bất đẳng thức đúng.

Từ đó, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét: Ta có bài toán tương tự nhưng khó hơn một chút sau:

Bài 7: Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq 2(a^4+b^4+c^4)$$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ba số:

$$(a+7)+8+8 \geq 3\sqrt[3]{(a+7)8.8} = 12\sqrt[3]{a+7}$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{a+7} \leq \frac{a+23}{12}$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt[3]{b+7} \leq \frac{b+23}{12}, \sqrt[3]{c+7} \leq \frac{c+23}{12}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta nhận được:

$$\sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq \frac{a+b+c+69}{12}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy bốn số:

$$a \leq \frac{a^4+1+1+1}{4} = \frac{a^4+3}{4}, b \leq \frac{b^4+3}{4}, c \leq \frac{c^4+3}{4}$$

Suy ra:

$$\frac{a+b+c+69}{12} \leq \frac{\frac{a^4+3}{4} + \frac{b^4+3}{4} + \frac{c^4+3}{4} + 69}{12} = \frac{a^4+b^4+c^4+285}{48}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{a^4+b^4+c^4+285}{48} \leq 2(a^4+b^4+c^4)$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy bốn số:

$$a^4 + b^4 + b^4 + 1 \geq 4ab^2$$
$$b^4 + c^4 + c^4 + 1 \geq 4bc^2$$
$$c^4 + a^4 + a^4 + 1 \geq 4ca^2$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được: $3(a^4 + b^4 + c^4) + 3 \geq 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) = 12$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq 3$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 8: Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{a+2c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} > 2$$

Nhận xét:

Bất đẳng thức là đối xứng với biến c nên ta có thể đưa về biến c. Tuy nhiên, ta cũng có thể suy nghĩ một cách khác cũng khá tự nhiên.

Lời giải chi tiết:

Ta có: $a + b + c + d \geq 2\sqrt{a(b+c+d)}$

Tương tự $a + b + c + d \geq 2\sqrt{b(c+d+a)}$

$a + b + c + d \geq 2\sqrt{c(d+a+b)}$

Từ đó, suy ra:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2$$

Chọn $d = c$ ta thu được:

$$\sqrt{\frac{a}{b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{a+2c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} > 2 \text{ (đpcm)}.$$

Ngày số 21

Bất đẳng thức một biến

Lời bình: *Rõ ràng, bất đẳng thức một biến là vấn đề rất dễ đối với học sinh hiện nay. Chúng ta không có nhiều dạng bài tập mới có thể gây áp lực, câu này có thể là câu cho điểm. Thế nhưng, chúng ta vẫn rất cần đề phòng vì đề minh họa 2015 là một thảm họa sẽ được giới thiệu cuối. Mọi vấn đề đều cần bắt đầu ôn từ đơn giản đến phức tạp. Vì thế điều chúng ta cần là thực sự bình tĩnh.*

Cách giải chung: Với hàm một biến đơn giản, ta dùng đạo hàm và bảng biến thiên để đưa ra đáp án. Với hàm một biến phức tạp hơn một chút, ta có thể nghĩ tới việc đổi ẩn phụ và nhớ điều kiện của ẩn phụ. Một số bài toán đặc biệt, được nêu trong cuốn Công phá bất đẳng thức.

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[-2; 2]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đức Thọ 2016)

Hướng dẫn giải:

Xét trên đoạn $[-2; 2]$ ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ (loại)} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ta có: $f(-2) = 23; f(1) = -4; f(2) = 3$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 23;\ \min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(1) = -4$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 4$ trên đoạn $[-2; 1]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ và $y' = 3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2; 1] \\ x = 2 \notin [-2; 1] \end{array}\right.$$

$$f(-2) = -16; f(0) = 4; f(1) = 2$$

Vậy giá trị lớn nhất 4 là khi $x = 0$; giá trị nhỏ nhất là -16 khi $x = -2$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhát của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên $[-1; 5]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Tam Đảo 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 12$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1; 5] \\ x = -2 \notin [-1; 5] \end{array}\right.$$

Ta có: $y(-1) = 14; y(1) = -6; y(5) = 266$

Vậy $\min\limits_{[-1;5]} y = -6$ khi $x = 1$; $\max\limits_{[-1;5]} y = 266$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Việt Trì 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1 \text{ thuộc } [0; 4]; x = -1 \text{ loại}$$

Ta có: $f(0) = 3; f(1) = 2; f(4) = 227$

Vậy giá trị lớn nhất là $y = 227$ trên $[0; 4]$ khi $x = 4$

Giá trị nhỏ nhất là $y = 2$ trên $[0; 4]$ khi $x = 1$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau: $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Yên Mỹ 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$

Trên $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

$$y(-2) = -7; y(-1) = 2; y(0) = 1; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{16}$$

Kết luận $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} y = y(-1) = 2$; $\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} y = y(-2) = -7$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)^2\left(x + \sqrt{2}\right)^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thạch Thành I 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$; $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$; $f'(x) = 4x^3 - 8x$

Với $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \sqrt{2}$

Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{16}$; $f(0) = 4$; $f(\sqrt{2}) = 0$; $f(2) = 4$

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ lần lượt là 4 và 0.

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Việt Yên II 2016)

Hướng dẫn giải:

Hàm số $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 5x^2 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1; 2] (\text{nhận}) \\ x = 1 \in [-1; 2] (\text{nhận}) \\ x = 3 \notin [-1; 2] (\text{loại}) \end{array}\right.$

Ta có: $f(0) = 0^5 - 5.0^4 + 5.0^3 + 1 = 1$

$$f(1) = 1^5 - 5.1^4 + 5.1^3 + 1 = 2$$

$$f(-1) = (-1)^5 - 5.(-1)^4 + 5.(-1)^3 + 1 = -10$$

$$f(2) = 2^5 - 5.2^4 + 5.2^3 + 1 = -7$$

Trong các kết quả trên, số nhỏ nhất là -10 và số lớn nhất là 2.

Vậy $\min\limits_{[-1;2]} y = -10$ khi $x = -1$; $\max\limits_{[-1;2]} y = 2$ khi $x = 1$.

Bài 8: Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Hưng Đạo 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta thấy hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[2; 4]$

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Trên $[2; 4]$ thì $y' = 0$ có một nghiệm là $x = 2$

Ta có: $y(2) = 4$; $y(4) = \frac{16}{3}$

Vậy Max $y = \frac{16}{3}$ khi $x = 4$

Min $y = 4$ khi $x = 2$

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Xuân Trường 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \notin \left[-2; \frac{1}{2}\right]$$

Ta có: $f(-2) = -2; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{15}}{2}$

Vậy GTLN trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là $\frac{1 + \sqrt{15}}{2}$; GTNN trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là -2.

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = x + \sqrt{18 - x^2}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2016)

Hướng dẫn giải:

Hàm số xác định và liên tục trên $D = \left[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$

Ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{18 - x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{18 - x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 18 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Mà $f\left(-3\sqrt{2}\right) = -3\sqrt{2}; f\left(3\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}; f(3) = 3 + \sqrt{18 - 9} = 6$

Suy ra:

$$\max_{x \in [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]} f(x) = f(3) = 6; \min_{x \in [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]} f(x) = f(-3\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$$

Bài 11: Tìm GTLN và GTNN của:

$$y = \frac{7\sqrt{5 - 4x} + 2\sqrt{5 + x - 4x^2} - \sqrt{1 + x} - 4x + 5}{\sqrt{5 - 4x} + 2\sqrt{1 + x} + 6}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Quốc học Huế 2016)

Nhận xét: Bài toán này ta có thể đặt:

$$\sqrt{5 - 4x} = \sqrt{6}\sin 2t; \sqrt{1 + x} = \sqrt{6}\cos 2t.$$

Rồi dùng:

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1 + \tan^2 t}; \cos 2t = \frac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t}$$

Cách đổi ẩn phụ này được giới thiệu trong một bài của cuốn Công phá bất đẳng thức.

Tuy nhiên, với bài này ta cũng có thể sử dụng đạo hàm luôn vì dấu của y' không đổi nên không tốn sức giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải chi tiết:

Tập xác định: $D = \left[-1; \frac{5}{4}\right]$

Đặt $A = \sqrt{5 - 4x} + 2\sqrt{1 + x} + 6$

Với mọi $x \in \left(-1;\frac{5}{4}\right)$ ta có:

$$y' = \frac{\left(-\frac{2}{\sqrt{5-4x}}-\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\left(\sqrt{5-4x}+2\sqrt{1+x}+6\right)}{A^2}-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{2}{\sqrt{5-4x}}\right)\left(\sqrt{5-4x}-\sqrt{1+x}\right)}{A^2}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5-4x}}$$

$$= -\frac{2\left(3\sqrt{1+x}+6\right)}{A^2\sqrt{5-4x}}-\frac{3\sqrt{5-4x}+6}{2A^2\sqrt{1+x}}-\frac{3\sqrt{5-4x}+6}{2A^2\sqrt{1+x}}-\frac{2}{\sqrt{5-4x}}<0\ \forall x \in \left(-1;\frac{5}{4}\right)$$

Hàm số nghịch biến trên $\left(-1;\frac{5}{4}\right)$ và liên tục trên D.

Vậy GTLN của hàm số là $y(-1)=\frac{10}{3}$.

Bài 12: Cho x là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3}}+\frac{1}{\sqrt{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia đề thi minh họa 2015)

Nhận xét: *Với bài toán này, ta có một lời giải kinh khủng trong đáp án là dùng hình học phẳng. Thế nhưng suy nghĩ theo hướng tự nhiên ta thấy hai biểu thức sau có dạng kiểu tương thích với nhau, nên ta sẽ thử sử dụng bất đẳng thức phụ để đưa về một:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$$

Khi sử dụng bất đẳng thức này thì ta đã mặc định dấu bằng xảy ra khi:

$$a=b\leftrightarrow\sqrt{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3}=\sqrt{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3}\leftrightarrow x=0$$

Khi đó, ta hoàn toàn có thể dùng thêm bất đẳng thức sau để biểu thức có vẻ thu gọn hơn:

$$a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Khi đó, ta có:

$$P\ge\frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3}+\frac{4}{\sqrt{2(4x^2+6x+6)}}$$

Do dấu "=" xảy ra khi $x=0$ nên ở đây ta sẽ thử xét hai đánh giá:

Hoặc:

$$P\ge\frac{\sqrt{3\left(\frac{4}{3}.x^2+2x+1\right)}}{3}+\frac{4}{\sqrt{2(4x^2+6x+6)}}\ \left(\text{để đặt ẩn phụ: } x^2+\frac{3}{2}x=t\right)$$

Hoặc:

$$P\ge\frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3}+\frac{4}{\sqrt{2(6x^2+6x+6)}}\ (\text{để đặt ẩn phụ } x^2+x=t)$$

Dù làm theo cách nào thì ta vẫn thu được hàm đơn giản với biến t nên có thể dùng đạo hàm và bảng biến thiên để giải quyết. Do đó, ta có lời giải chi tiết sau:

Lời giải chi tiết:

Áp dụng bất đẳng thức phụ:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\ge\frac{4}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

Ta thu được:

$$P \geq \frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3} + \frac{4}{\sqrt{2(4x^2+6x+6)}}$$
$$= \frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3} + \frac{2}{\sqrt{2x^2+3x+3}}$$
$$\geq \frac{\sqrt{2(3x^2+3x)+3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{(3x^2+3x)+3}}$$
$$= \frac{\sqrt{2t+3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{t+3}} = f(t)\ (t = 3x^2+3x)$$
$$\rightarrow f'(t) = \frac{1}{3\sqrt{2t+3}} - \frac{1}{\sqrt{(t+3)^3}} = \frac{\sqrt{(t+3)^3} - 3\sqrt{2t+3}}{3\sqrt{(2t+3)(t+3)^3}}$$
$$= \frac{t^3+9t^2+27t+27-18t-27}{3\sqrt{(2t+3)(t+3)^3}\left[\sqrt{(t+3)^3}+3\sqrt{2t+3}\right]}$$
$$\rightarrow f'(t) = \frac{t(t^2+9t+18)}{3\sqrt{(2t+3)(t+3)^3}\left[\sqrt{(t+3)^3}+3\sqrt{2t+3}\right]}$$
$$f'(t) = 0 \leftrightarrow t = 0$$

Do đó; ta có:

$$P \geq f(t) \geq f(0) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3} = \dfrac{1}{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3} \\ 2x^2+3x+3 = 3x^3+3x+3 \\ x^2+x = t = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = 0$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3}$ khi $x = 0$.

Ngày số 22

Bất đẳng thức hai biến

Bài 1: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $4(x^3+8y^6)=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\frac{(x+2y^2+2)^3}{5(x^2+y^2)-5(x+y)+3}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Khuyến 2016)

Mò mẫm lời giải:

Nhìn vào bài toán, cảm giác rất dễ nhưng cũng không thể nào tìm ngay ra lời giải được, thế nhưng chúng ta hãy chú ý vào biểu thức trong giả thiết: x^3+8y^6 và biểu thức trong kết luận: $x+2y^2$. Khi đó ta thấy ngay có gì đó liên quan tới nhau??? Ta thử đổi biến cho thuận tiện:

$$x=a;2y^2=b$$

Khi đó giả thiết thành: $4(a^3+b^3)=1$. Do đó, trên tử số : $a+b$???

Ta có biết tới bất đẳng thức rất quen thuộc:

$$(a+b)^3\le 4(a^3+b^3) \text{ (bất đẳng thức này chỉ cần biến đổi tương đương)}$$

Khi đó ta có ngay: $a+b\le 1$. Bây giờ, dù chưa biết gì ta thử kiểm tra dấu "=" xem sao:

$$\begin{cases} x=2y^2\\ 4(x^3+8y^6)=1\end{cases}\leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

Cũng rất may mắn khi mẫu số ta lại có:

$$x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge-\frac{1}{4};y^2-y=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge-\frac{1}{4}$$

Dấu "=" cũng xảy ra khi: $x=y=\frac{1}{2}$ nên ta có lời giải hoàn chỉnh sau.

Lời giải chi tiết:

Với mọi $a,b>0$ ta có: $4(a^3+b^3)\ge(a+b)^3 (1)$

Thật vậy ta có:

$$(1)\leftrightarrow 4(a^3+b^3)\ge a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow 3(a^3+b^3)\ge 3ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)$$
$$\leftrightarrow (a+b)(a^2-2ab+b^2)\ge 0\leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0\ (2)$$

Vì $a,b>0$ nên (2) luôn đúng. Dấu = xảy ra khi $a=b$. Do đó,(1) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức (1) với $a=x; b=2y^2$ ta có:

$$1=4(x^3+8y^6)=4(x^3+(2y^2)^3)\ge(x+2y^2)^3$$
$$\Rightarrow x+2y^2\le 1$$

Lại có: $5(x^2+y^2)-5(x+y)+3=5x^2-5x+5y^2-5y+3$

$$=5\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+5\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-\frac{10}{4}+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P=\frac{(x+2y^2+2)^3}{5(x^2+y^2)-5(x+y)+3}\le\frac{(1+2)^3}{\frac{1}{6}}=54$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}4(x^3+8y^6)=1\\ x=2y^2\\ x=y=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 54 khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 2: Cho x, y là số thực dương sao cho $2x + 3y \le 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = 2xy + y + \sqrt{5(x^2 + y^2)} - 24\sqrt[3]{8(x + y) - (x^2 + y^2 + 3)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Phan Thúc Trực 2016)

Mò mẫm lời giải:

So với bài toán 5 thì bài toán này khó hơn rất nhiều. Hoàn toàn do cảm nhận:

$$5 = 1^2 + 2^2$$

Và với $2x + 3y = 7$ *thì ta có thể dự đoán dấu "=" xảy ra khi:* $x = 2; y = 1$.

Khi đó, ta có những đánh giá sau:

$$\sqrt{5(x^2 + y^2)} = \sqrt{(2^2 + 1^2)(x^2 + y^2)} \ge 2x + y$$

$$\to P \ge 2(xy + x + y) - 24\sqrt[3]{8(x + y) - (x^2 + y^2 + 3)}$$

Rõ ràng là P đã đối xứng nhưng dấu "=" xảy ra lại khi: $x = 2; y = 1$ *nên đánh giá theo tổng và tích là rất khó.*

Rõ ràng, sau khi ta dùng $\sqrt{5(x^2 + y^2)} \ge 2x + y$ *là đã đưa được về* $2(xy + x + y)$. *Vậy thì suy nghĩ tự nhiên là đưa biểu thức sau về biến* $xy + x + y$ *này????*

$$8(x + y) - (x^2 + y^2 + 3) \le f(x + y + xy)$$

$$\to 8S - S^2 + 2P - 3 \le f(S + P); (S = x + y; P = xy)$$

Dấu " = " khi $S = x + y = 3; P = xy = 2$ *. Rõ ràng như vậy thì ta có:*

$$8S - S^2 + 2P - 3 = 2S - (S^2 - 6S + 9) + 2P + 6 = 2(S + P) + 6 - (S - 3)^2 \le 2(S + P) + 6$$

Như vậy ta có thể chọn: $f(S + P) = 2(S + P) + 6$.

Công việc đưa về một biến đã ok! Nhưng hoàn toàn vẫn chưa thể kết thúc được bài toán. Theo trên ta có:

$$P \ge 2(x + y + xy) - 24\sqrt[3]{2(x + y + xy) + 6}$$

Đặt $t = (x + y + xy)$ *ta có:*

$$P \ge 2t - 24\sqrt[3]{2t + 6} = f(t)$$

Đơn giản xét :

$$f'(t) = 2 - \frac{24.2}{3\sqrt[3]{(2t + 6)^2}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{(2t + 6)^2} - 8\right)}{\sqrt[3]{(2t + 6)^2}}$$

$$f'(t) = 0 \leftrightarrow \sqrt[3]{(2t + 6)^2} - 8 = 0 \leftrightarrow (2t + 6)^2 = 8^3 = 2^9$$

$$\leftrightarrow |t + 3| = 8\sqrt{2} \leftrightarrow t = -3 \pm 8\sqrt{2}$$

Vì xét $t > 0$ *nên rõ ràng theo bảng biến thiên ta có:*

t	*0*		$-3 + 8\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(t)		−	0	+	
f(t)		↘		↗	

Rõ ràng, khi $x = 2; y = 1$ *thì* $t = xy + x + y = 5 < -3 + 8\sqrt{2}$ *nên suy nghĩ đơn giản của ta là chứng minh:*

$$xy + x + y \le 5; \forall x, y > 0; 2x + 3y \le 7$$

Bởi lẽ nếu không có $xy + x + y \le 5$ *thì mọi thứ đánh giá trên là vô nghĩa. Bây giờ, dù không biết là làm thế nào, nhưng chúng ta có một cách khá đơn giản là thử bằng phương pháp thế!!!*

$$t = xy + x + y = y(x + 1) + x \le \frac{7 - 2x}{3}.(x + 1) + x = g(x)$$

Đánh giá $g(x)$ *dĩ nhiên là công việc của các em rồi!!!*

$$t \le \frac{(7 - 2x)(x + 1) + 3x}{3} = \frac{-2x^2 + 8x + 7}{3} = \frac{15 - 2(x - 2)^2}{5} \le 5$$

Rất may dấu "=" xảy ra cuối cùng cũng tại điểm $x = 2$. *Như vậy ta có thể chắc chắn lời giải.*

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$t = xy + x + y = y(x+1) + x \le \frac{7-2x}{3}.(x+1) + x$$

$$= \frac{(7-2x)(x+1)+3x}{3} = \frac{-2x^2+8x+7}{3} = \frac{15-2(x-2)^2}{5} \le 5 \to t = xy + x + y \le 5$$

Lưu ý: Rõ ràng các em thấy cách đánh giá trên rất tự nhiên, dễ hiểu, ngoài ra còn một cách đánh giá nữa khi biết cân bằng hệ số Cauchy, cũng là cách đáng chú ý mà lời giải trong đáp án nhắc tới:

$$6(x+1)(y+1) = (2x+2)(3y+3) \le \left(\frac{2x+2+3y+3}{2}\right)^2 \le 36 \to x + y + xy \le 5$$

Ta có:

$$5(x^2+y^2) \ge (2x+y)^2 \to \sqrt{5(x^2+y^2)} \ge 2x + y;$$
$$(x+y-3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \ge 0$$
$$\to 2(x+y+xy+3) \ge 8(x+y) - (x^2+y^2+3)$$
$$\Rightarrow P \ge 2(xy+yz+xz) - 24\sqrt[3]{2(x+y+xy+3)}$$

Đặt $t = x + y + xy; t \in (0;5]; P \ge f(t) = 2t - 24\sqrt[3]{2t+6}$

Lại có $f'(t) = 2 - \frac{24.2}{3\sqrt[3]{(2t+6)^2}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{(2t+6)^2} - 8\right)}{\sqrt[3]{(2t+6)^2}} < 0 \forall t \in (0;5]$

Do đó, f(t) nghịch biến trên (0; 5].

$$\to P \ge f(t) \ge f(5) = 10 - 48\sqrt[3]{2}$$

Vậy $\min P = 10 - 48\sqrt[3]{2}$ khi $x = 2$ và $y = 1$.

Nhận xét: *Bài toán trên là một minh họa cho bài toán hai biến khó trong đề thi. Cùng với vấn đề bất đẳng thức hai biến, có một số trường đưa ra những bài toán cũng rất hay và thú vị sau.*

Bài 3: Cho các số thực dương x, y sao cho $xy + 1 \le y$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} + \frac{2y - x}{6(x+y)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Yên Lạc 2016)

Bình luận: *Biểu thức trong kết luận là đồng bậc hai biến nên ta có thể đổi biến:* $t = \frac{x}{y}$. *Do đó, thứ mà chúng ta cần là tìm miền giá trị của biến mới này từ giả thiết. Rõ ràng, từ giả thiết ta suy ra:*

$$0 < \frac{x}{y} \le \frac{y-1}{y^2}$$

Bên vế còn lại chỉ có biến y nên ta có thể dùng bảng biến thiên, hoặc đơn giản hơn là dùng:

$$\frac{y-1}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

Do đó, ta có lời giải chi tiết sau.

Lời giải chi tiết:

Do $x > 0; y > 0; xy \le y - 1$ nên:

$$0 < \frac{x}{y} \le \frac{y-1}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

Đặt:

$$t = \frac{x}{y} \to 0 < t \le \frac{1}{4}$$

$$\to P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6t+6} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2(t+1)} = f(t)$$

Ta có:

$$f'(t) = \frac{7 - 3t}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^2}} - \frac{1}{2(t+1)^2}$$

$$0 < t \le \frac{1}{4} \to t^2 - t + 3 = t(t-1) + 3 < 3; 7 - 3t > 6; t + 1 > 1$$

$$\rightarrow \frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^2}} > \frac{7-3t}{6\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{2(t+1)^2} > -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow f'(t) > \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} > 0$$

Do đó, f(t) đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{4}\right]$ nên ta có:

$$P = f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$$

Khi $x = \frac{1}{2}; y = 2$, ta có: $P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$.

Do đó, giá trị lớn nhất của $P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$ khi $x = \frac{1}{2}; y = 2$.

Nhận xét: *Song song với bất đẳng thức cùng bậc ta cũng có bất đẳng thức dạng đối xứng hai biến.*

Bài 4: Cho x, y thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2y \geq x^2 \\ y \leq -2x^2 + 3x \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = x^4 + y^4 + \frac{2}{(x+y)^2}$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Vĩnh Phúc 2016)

Bình luận: *Bài toán này không có nhiều điều để bàn luận, anh chỉ đưa ra cho mang tính chất hệ thống kiến thức. Chỉ có một lưu ý rằng* ***tìm điều kiện tốt nhất có thể của các biến.***

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$y \geq 0; \frac{x^2}{2} \leq -2x^2 + 3x \rightarrow 0 \leq x \leq \frac{6}{5}; x^2 + y^2 \leq x^2 + (-2x^2 + 3x)^2 = 2x^2(2x^2 - 6x + 5)$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2(2x^2 - 6x + 5)$ trên $\left[0;\frac{6}{5}\right]$ ta được:

$$\mathrm{Max}_{\left[6;\frac{6}{5}\right]} f(x) = 2 \rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$$

$$P = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{(x+y)^2} \geq (x^2+y^2)^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} + \frac{2}{x^2+y^2}$$

Đặt $t = x^2 + y^2$

$$\rightarrow P \geq \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}; 0 < t \leq 2$$

Xét hàm số:

$$g(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t}; t \in (0;2];$$

$$g'(t) = t - \frac{2}{t^2} = \frac{t^3 - t}{t^2}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2^{\frac{1}{3}}$$

Lập bảng biến thiên ta thu được giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ khi $x = y = \frac{\sqrt[6]{16}}{2}$.

Nhận xét: Một số bài toán hai biến dễ trong đề thi anh muốn các em xem qua:

Bài 5: Cho $x \geq 0; y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = xy + \frac{1}{xy + 1}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Đình Chiểu 2016)

Gợi ý giải:

Ta có:

$$0 \leq xy \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$$

Đặt $t = xy$ thì suy ra: $0 \leq t \leq 1$

$$P = t + \frac{1}{t+1} = f(t) \rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$$

x	0	1
f'(x)	0 +	
f(x)	1 ↗	$\frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{3}{2}$ khi $x = 1; y = 1$.

Bài 6: Cho các số thực x, y thỏa mãn: $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thứ:

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thạch Thành I 2016)

Gợi ý giải:

Ta có:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 8$$

$$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên đoạn $[0; 8]$

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Ta có: $f(0) = 6; f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}; f(8) = 398$. Suy ra $A \geq \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}$

Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ thì dấu bằng xảy ra.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}$.

Bài 7: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Hưng Đạo 2016)

Gợi ý giải:

Ta có: $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x+y)(2 - xy) - 3xy$

Đặt $t = x + y$. Điều kiện $|t| \leq 2$

$$xy = \frac{t^2 - 2}{2}; P = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3 \text{ với } |t| \leq 2$$

Xét $f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên $[-2; 2]$

$$f'(t) = -3t^2 - 3t + 6$$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = -2$$

$$f(1) = \frac{13}{2}; f(2) = 1; f(-2) = -7$$

$\max\limits_{[-2;2]} f(t) = \frac{13}{2}$ khi $t = 1$ nên $\max P = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\min\limits_{[-2;2]} f(t) = -7$ khi $t = -2$ nên $\min P = -7$

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$$

Bài 8: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} + \sqrt{3x^2 + xy + 5y^2} + \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + xy + y^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2016)

Nhận xét: Bài toán này dù là đối xứng bậc hai nhưng ta không nên sử dụng $x + y = a; xy = b$ bởi lẽ làm như thế quá phức tạp đối với bài toán này!!!(Trừ khi người đó thực sự kiên nhẫn).

Thế nhưng, ngay khi đọc bài này, chúng ta có ngay hướng nghĩ sử dụng bất đẳng thức:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \ (*)$$

Có hai cách chứng minh bất đẳng thức (*). Một là biến đổi tương đương, hai là đưa về hình phẳng Oxy thì nó là bất đẳng thức $AB + BC \geq AC$.

Áp dụng bất đẳng thức này, thì ta cần đưa về dạng đối xứng nhưng phải là tổng hai số chính phương.

$$\sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} + \sqrt{3x^2 + xy + 5y^2} = \sqrt{5\left(x + \frac{y}{10}\right)^2 + \frac{59}{20}y^2} + \sqrt{5\left(y + \frac{x}{10}\right)^2 + \frac{59}{20}x^2}$$

$$\geq \sqrt{5\left[\frac{11}{10}(x + y)\right]^2 + \frac{59}{20}(x + y)^2} = (x + y)\sqrt{\frac{5.121}{100} + \frac{59}{20}} = 3(x + y)$$

$$\sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2x^2 + xy + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2} + \sqrt{\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}x^2}$$

$$\geq \sqrt{\left[\frac{3}{2}(x + y)\right]^2 + \frac{7}{4}(x + y)^2} = (x + y)\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = 2(x + y)$$

Do đó, ta có ngay:

$$P \geq 3(x + y) + 2(x + y) = 5(x + y) = 10080.$$

Dấu " = " xảy ra khi: $x = y = 1008$.

Ngoài ra ta còn một hướng đi khác cũng rất là lý thú. Vì do đối xứng nên ta dự đoán được dấu "=" xảy ra khi: $x = y$.

Ta nghĩ tới cách phân tích:

$$\sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} = \sqrt{(ax + by)^2 + c(x - y)^2} \to \sqrt{5y^2 + xy + 3x^2} = \sqrt{(ay + bx)^2 + c(x - y)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + xy + 2y^2} = \sqrt{(a'x + b'y)^2 + c'(x - y)^2} \to \sqrt{y^2 + xy + 2x^2} = \sqrt{(a'y + b'x)^2 + c'(x - y)^2}$$

Nếu $c; c' \geq 0$ thì hướng giải này là làm được!!!

Cách tìm $a; b; c; a'; b'; c'$ cũng khá đơn giản, chỉ là đồng nhất thức:

$$\sqrt{5x^2 + xy + 3y^2} = \sqrt{(ax + by)^2 + c(x - y)^2} \to \begin{cases} a^2 + c = 5 \\ b^2 + c = 3 \\ 2ab - 2c = 1 \end{cases} \to \begin{cases} a = \frac{11}{6} \\ b = \frac{7}{6} \\ c = \frac{59}{36} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2}=\sqrt{(a'x+b'y)^2+c'(x-y)^2}\rightarrow\begin{cases}a'^2+c'=1\\ b'^2+c'=2\\ 2a'b'-2c'=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a'=\dfrac{3}{4}\\ b'=\dfrac{5}{4}\\ c'=\dfrac{7}{16}\end{cases}$$

Do đó, ta có lời giải chi tiết khác sau:

Lời giải chi tiết:

Đặt $A=\sqrt{5x^2+xy+3y^2}+\sqrt{3x^2+xy+5y^2}; B=\sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+xy+y^2}; P=A+B$

Ta có:

$$\begin{aligned}6A&=\sqrt{180x^2+36xy+108y^2}+\sqrt{108x^2+36xy+180y^2}\\&=\sqrt{(11x+7y)^2+59(x-y)^2}+\sqrt{(11y+7x)^2+59(y-x)^2}\end{aligned}$$

$$\geq(11x+7y)+(11y+7x)=18(x+y)\Rightarrow A\geq 3(x+y)=3.2016=6048\ (*)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1008$

$$\begin{aligned}4B&=\sqrt{16x^2+16xy+32y^2}+\sqrt{32x^2+16xy+16y^2}\\&=\sqrt{(3x+5y)^2+7(x-y)^2}+\sqrt{(3y+5x)^2+7(y-x)^2}\end{aligned}$$

$\geq(3x+5y)+(3y+5x)=8(x+y)\Rightarrow B\geq 2(x+y)=2.2016=4032\ (**)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1008$

Từ (*) và (**) ta được $P=A+B\geq 6048+4032=10080$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1008$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P=10080 khi và chỉ khi $x=y=1008$.

Nhận xét: *Dĩ nhiên, những bất đẳng thức hai biến thường là bất đẳng thức dễ, thế nhưng đôi khi nếu không khéo léo thì việc đưa về $x+y=a; xy=b$ là tương đối phức tạp. Ví dụ sau là minh họa.*

Bài 9: Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn: $2(a^2+b^2)+(a+b)=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=6\left(\frac{a^2+1}{a^2+a}+\frac{b^2+1}{b^2+b}\right)+\frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+5}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia THPT Yên Lạc 2 2016)

Mò mẫm lời giải:

Trong P có chứa biểu thức $a+b$. Trong giả thiết có $a+b$ và a^2+b^2. Do đó, đại lượng ta nên chọn ở đây là tổng $a+b$.

Từ đó, ta có thể suy ra dấu "=" xảy ra khi: $a=b=1$. Nếu làm theo cách thông thường thì ta phải quy đồng mẫu rồi biến đổi:

$$\frac{a^2+1}{a^2+a}+\frac{b^2+1}{b^2+b}=\frac{(a^2+1)(b^2+b)+(b^2+1)(a^2+a)}{(a^2+a)(b^2+b)}=\frac{2a^2b^2+(a^2b+ab^2)+(a^2+b^2)+(a+b)}{ab(a+1)(b+1)}$$

Từ giả thiết ta suy ra:

$$4ab=2(a+b)^2+(a+b)-6$$

Rõ ràng biểu thức rất phức tạp. Vì thế ta cần có hướng nghĩ mới. Ở đây, có một ý tưởng đơn giản là dùng "đánh giá toàn phần":

$$\frac{a^2+1}{a^2+a}\geq x(a-1)+1$$

Sau đó, ta tìm được:

$$\frac{2(a^2+1)}{a^2+a}\geq 3-a$$

Chi tiết có thể xem thêm phần "đánh giá toàn phần". Và ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Những bài toán kiểu này thường sẽ có khá nhiều lời giải.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$

Từ giả thiết suy ra:

$$(a+b)^2+(a+b)-6\le 0 \Leftrightarrow (a+b-2)(a+b+3)\le 0$$
$$\Rightarrow 0<a+b\le 2 \text{ (do } a,b>0)$$

Ta chứng minh:

$$\frac{2(a^2+1)}{a^2+a}\ge 3-a \quad (*)$$

Thật vậy (*)$\Leftrightarrow 2(a^2+1)\ge (a^2+a)(3-a)\Leftrightarrow (a-1)^2(a+2)\ge 0$ (luôn đúng)
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=1$
Tương tự có:

$$\frac{2(b^2+1)}{b^2+b}\ge 3-b$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b=1$.

$$\Rightarrow P\ge 3(6-a-b)+\frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+5}}.$$

Đặt $t=a+b\Rightarrow 0<t\le 2$. Khi đó:

$$P\ge -3t+\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}+18; t\in(0;2] \quad (1)$$

Xét hàm số:

$$f(t)=-3t+\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}+18\,; t\in(0;2]\to f'(t)=-3+\frac{5}{\sqrt{(t^2+5)^3}}<0;\ \forall t\in(0;2]$$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(0;2]$.Suy ra:

$$P\ge f(t)\ge f(2)=\frac{38}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=2$ .Dấu "=" khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b \\ a+b=2 \end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Vậy Pmin $=\dfrac{38}{3}$ khi $a=b=1$.

Ngày số 23

Bất đẳng thức ba biến (tiết 1)

Bình luận: *Bài học đầu tiên trong bất đẳng thức ba biến là bất đẳng thức ba biến đối xứng hoàn toàn và không sử dụng bất đẳng thức phụ phức tạp để chứng minh.*

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2 \le 4abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ac}} + \frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{ab}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Hạ Long 2016)

Bình luận: *Đây là một bài toán dễ vì ta chỉ đơn thuần áp dụng bất đẳng thức Cauchy dưới mẫu.*

$$\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}} \le \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} \le \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$$

Như vậy, chỉ bằng những bất đẳng thức đơn giản ta sẽ thu được:

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}} \le \frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}} \le 2016.$$

Do đó, ta có lời giải chi tiết:

Lời giải chi tiết:

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$P \le \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}} + \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b\sqrt{ac}}} + \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{c\sqrt{ab}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ac}}\right)$$

Với các số thực x, y, z ta có:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow xy + yz + xz \le x^2 + y^2 + z^2$$

Do đó

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ac}}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2\sqrt{abc}} \le \frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$$

Suy ra:

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} + \frac{1}{\sqrt[4]{bc}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ac}}\right) \le \frac{a+b+c}{2\sqrt{abc}}$$

Từ giả thiết ta có: $a + b + c \le 4032\sqrt{abc}$. Do đó $P \le 2016$

Với $a = b = c = \frac{1}{1344^2}$ ta có: $P = 2016$. Vậy GTLN của P là 2016.

Bài 2: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của:

$$P = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{ab} - 1\right)\left(\frac{1}{bc} - 1\right)\left(\frac{1}{ca} - 1\right)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Yên Lạc 2016)

Hướng dẫn giải:

Đặt $A = P^3$.Ta có:

$$A = \left(\frac{1}{ab} - 1\right)\left(\frac{1}{bc} - 1\right)\left(\frac{1}{ca} - 1\right) = \frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$$

Áp dụng BĐT TBC và TBN ta có:

$$1 - ab \ge 1 - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(2+a+b)(2-a-b)}{4} = \frac{[(1+a)+(1+b)](1+c)}{4} \ge \frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$$

Tương tự ta có:

$$1 - bc \ge \frac{(1+a)\sqrt{(1+c)(1+b)}}{2}$$

$$1 - ca \ge \frac{(1+b)\sqrt{(1+a)(1+c)}}{2}$$

$$\Rightarrow A \ge \frac{1}{8}\left(\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)^2$$

Mà $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \ge \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \ge 4^3$

Vậy Min $P = 8$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 3: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$. Tìm GTLN của:

$$P = (x-1)(y-1)(z-1)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hà Huy Tập – 2016)

Nhận xét:

Rõ ràng, đặc tính ở đây là không biết dấu âm hay dương của các biểu thức $x-1; y-1; z-1$.

Ta có hai hướng nghĩ đơn giản nhất như sau:

+Một là tách ra rồi thu gọn P.

+Hai là đặt ẩn phụ: $a = x-1; b = y-1; c = z-1$ và xét dấu a; b; c cũng như biến đổi hết về a;b;c.

Đi theo hướng một ta có:

$$P = xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1$$

Ở đây, rõ ràng là ta sẽ phải đưa về biến $t = xy + yz + zx$.

$$P = 2xyz - (xy + yz + zx) - 1 \le 2\left(\frac{xy + yz + zx}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - (xy + yz + zx) - 1 = 2.\left(\frac{t}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - t - 1 = f(t)$$

Ở đây, ta dùng bất đẳng thức Cauchy ba số:

$$xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

Như vậy, ta chỉ còn xét xem biến $t = xy + yz + zx$ thuộc trong tập hợp nào. Ta dùng bất đẳng thức phụ:

$$3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2 = x^2y^2z^2 \le \left(\frac{xy + yz + zx}{3}\right)^3$$

$$\to 3t \le \left(\frac{t}{3}\right)^3 \to t \ge 9$$

Xét hàm số ta sẽ dẫn tới mâu thuẫn (Vì dùng đạo hàm ta suy ra: $f'(t) \ge 0 \to f(t) \ge f(9)$ và hiển nhiên không được gì vì ta cần tìm giá trị lớn nhất).

Đi theo hướng hai thì ta sẽ có được lời giải như trong lời giải chi tiết.

Lời giải chi tiết:

Từ giả thiết ta có: $x < xyz$ suy ra $yz > 1$ tương tự cũng có $xz > 1; xy > 1$. Do đó có tối đa một trong ba số x, y, z nhỏ hơn 1

Trường hợp 1: Có đúng 1 số bé hơn 1, chẳng hạn $x < 1; y \ge 1; z \ge 1$ khi đó $P \le 0$.

Trường hợp 2: $x \ge 1; y \ge 1; z \ge 1$ đặt $x - 1 = a; y - 1 = b; z - 1 = c$ với $a, b, c > 0$. Giả thiết bài toán trở thành:

$$a + b + c + 3 = (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca + abc = 2 \ (*)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$ ta có:

$$ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^3} = 3t^2 \ (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $t^3 + 3t^2 \le 2 \Leftrightarrow (t+1)(t+1+\sqrt{3})(t+1-\sqrt{3}) \le 0 \Leftrightarrow t \le \sqrt{3}-1$

Do đó $\sqrt[3]{abc} \le \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow abc \le (\sqrt{3}-1)^3$ hay $(x-1)(y-1)(z-1) \le (\sqrt{3}-1)^3$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \sqrt{3}$

Vậy $\max P = (\sqrt{3}-1)^3$.

Bài 4: Cho các số dương x; y; z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTLN của

$$P = (x+y+z)^2 - \frac{x^3+y^3+z^3}{9xyz} + \frac{3}{xy+yz+xz}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Văn Trỗi 2016)

Nhận xét: *Có nhiều hướng đi cho bài toán này, sau đây là một lời giải.*

Lời giải:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{cases} xy+yz+xz \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2y^2z^2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz} \ge \frac{9}{xy+yz+xz}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+y^3+z^3}{9xyz} \ge \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{xy+yz+xz}\right)[3-(xy+yz+xz)]$$

$$\Rightarrow P \le 3 + 2(xy+yz+xz) - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{xy+zx+yz}\right)[3-(xy+yz+xz)]$$

$$+ \frac{3}{xy+yz+xz} = \frac{11}{3} + 2(xy+yz+xz)$$

$$\Rightarrow 0 < xy+yz+xz \le \frac{x^2+y^2+z^2+y^2+z^2+x^2}{2} = 3$$

$$\Rightarrow P \le \frac{11}{3} + 6 = \frac{29}{3}$$

$$\Rightarrow \text{GTLN của } P = \frac{29}{3} \text{ khi } \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 3 \\ xy = yz = xz \\ xy+xz+yz = 3 \end{cases} \text{ hay } x = y = z = 1$$

Bài 5:

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của

$$A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Bình Minh – 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ac = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} - \frac{121}{7(1-(a^2+b^2+c^2))}$$

Đặt $t = a^2+b^2+c^2$

Vì $a, b, c > 0; a+b+c = 1 \Rightarrow 0 < a < 1; 0 < b < 1; 0 < c < 1$

$$\Rightarrow t = a^2+b^2+c^3 \ge \frac{1}{3} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{7}{t} + \dfrac{121}{7(1-t)}; t \in \left[\dfrac{1}{3};1\right); f'(t) = -\dfrac{7}{t^2} + \dfrac{121}{7(1-t)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{7}{18}$

Vẽ BBT ta có: $f(t) \geq \frac{324}{7}\ \forall t \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$.

Vậy $A \geq \frac{324}{7}\ \forall a; b; c$ thỏa mãn đề bài

Hơn nữa $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{18}$ và $a + b + c = 1; A = \frac{324}{7}$

Vậy $\text{Min } A = \frac{324}{7}$

Bài 6: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 3$
Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - (ab + bc + ca)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nguyễn Trung Thiên)

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = ab + bc + ca$ ta có: $t = ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 3$

Do đó $t \leq 3$

Mặt khác ta có: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2(ab + bc + ca)$$

Khi đó: $P = \frac{9 - 2t}{t} - t$ với $t \leq 3$

Xét hàm $f(t) = \frac{9 - 2t}{t} - t$ với $t \leq 3$

$$f'(t) = -\frac{9}{t^2} - 1 < 0 \text{ với mọi } t \leq 3 \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } (-\infty; 3]$$

Suy ra $\min_{(-\infty;3]} f(t) = f(3) = -2$ không tồn tại $\max f(t)$

Vậy $\text{Min } P = -2$ khi $a = b = c = 1$

Bài 7: Cho x, y, z là 3 số thực dương có tổng bằng 3. Tìm GTNN của:

$$P = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lệ Thủy – 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= 3[(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz)] - 2xyz \\ &= 3[9 - 2(xy + yz + xz)] - 2xyz \\ &= 27 - 6x(y + z) - 2yz(x + 3) \\ &\geq 27 - 6x(3 - x) - \frac{(y + z)^2}{2}(x + 3) \\ &= \frac{1}{2}(-x^3 + 15x^2 - 27x + 27) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 27$ với $0 < x < 3$

$$f'(x) = -3x^2 + 30x - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 9 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$ 0 1 3 $+\infty$
y'	$-$ 0 $+$
y	27 ↘ 14 ↗ 54

Từ bảng biến thiên ta có: $\min P = 7$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 8: Cho các số a, b, c là các số thực dương và $a+b+c=3$. Tìm GTLN của:

$$P=\frac{2}{3+ab+bc+ac}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Ngô Sĩ Liên – 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $(ab+bc+ac)^2\ge 3abc(a+b+c)=9abc>0$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\ge 3\sqrt{abc}$$

Chứng minh được $(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3\forall a,b,c>0$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$. Khi đó:

$$P\le\frac{2}{3\left(1+\sqrt{abc}\right)}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}=Q$$

Đặt $\sqrt[3]{abc}=t$. Vì $a,b,c>0$ nên

$$0<abc\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$$

Xét hàm $Q=\dfrac{2}{3(1+t^3)}+\dfrac{t^2}{1+t^2}; t\in(0;1]$

$$\Rightarrow Q'(t)=\frac{2t(t-1)(t^3-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2}\ge 0;\forall t\in(0;1]$$

Do hàm đồng biến trên $(0;1]$ nên $P\le Q(1)=\dfrac{5}{6}$

Và từ đó ta tìm được $\text{Max}P=\dfrac{5}{6}$ khi $a=b=c=1$.

Bài 9: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc\ge 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}+\frac{b}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{c}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Tĩnh Gia – 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Đặt $x=\sqrt{a}; y=\sqrt{b}; z=\sqrt{c}$

Bài toán trở thành:

$$P=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+yz}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^2+xz}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+xy}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ta có:

$$P\ge\left[\frac{(x+y+z)^2}{\left(\sqrt{x^2+yz}+\sqrt{y^2+xz}+\sqrt{z^2+xy}\right)}\right]^2$$

$$=\frac{(x+y+z)^4}{\left(\sqrt{x^2+yz}+\sqrt{y^2+xz}+\sqrt{z^2+xy}\right)^2}\ge\frac{(x+y+z)^4}{3[(x+y+z)^2-3]}$$

vì $xy+yz+xz\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}\ge 3$

Đặt $t=(x+y+z)^2\Rightarrow t\ge 9$

Khi đó:

$$P^2\ge\frac{t^2}{3(t-3)}=\frac{3t+15}{12}+\frac{t-3}{12}+\frac{3}{t-3}\ge\frac{3.9+15}{12}+2\sqrt{\frac{t-3}{12}.\frac{3}{t-3}}=\frac{9}{2}\Rightarrow P\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 10: Cho a, ... sao cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Tìm GTNN của:

$$P=(a+1)(b+1)(c+1)+\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh – 2016)

Lời giải:

Ta có ... $3abc$

$$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$$
$$=\frac{4}{3}(ab+bc+ca)+a+b+c+1$$

Nên $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

$$\Rightarrow a+b+c\le ab+bc+ac$$

Có $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\le(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)$

Đặt $t=ab+bc+ca$ ta có: $a+b+c\ge\sqrt{3t}$ nên $t\ge\sqrt{3t}\Rightarrow t\ge 3$

$$P\ge\frac{4}{3}t+\sqrt{3t}+1+\frac{4}{\sqrt{t^2-2t+1}}=\frac{4}{3}t+\sqrt{3t}+\frac{4}{t-1}+1=f(t)$$

Xét hàm số f(t) với $t\ge 3$ ta có:

$$f'(t)=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}-\frac{4}{(t-1)^2}$$

Vì $t\ge 3$ nên

$$(t-1)^2\ge 4\Rightarrow\frac{1}{(t-1)^2}\le\frac{1}{4}$$

Do đó $f'(t)>0\ \forall t\ge 3$ suy ra $f(t)\ge f(3)=10$ nên $P\ge 10$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy GTNN của P là 10

Bài 11: Cho x, y, z là 3 số thực dương $x+y+z\ge 3$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{x^2}{yz+\sqrt{8+x^3}}+\frac{y^2}{xz+\sqrt{8+y^3}}+\frac{z^2}{xy+\sqrt{8+z^3}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lý Thái Tổ 2016)

Nhận xét: *Đại lượng $\sqrt{8+x^3}$ là đại lượng rất hay được chú ý bởi bất đẳng thức:*

$$\sqrt{8+x^3}=\sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)}\le\frac{2+x+4-2x+x^2}{2}=\frac{6-x+x^2}{2}$$

Đã được nhắc tới trong cuốn Công Phá Bất đẳng thức.

Mục tiêu của ta là đưa về biến $t=x+y+z$. Do đó, ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$P\left[\left(yz+\sqrt{8+x^3}\right)+\left(xz+\sqrt{8+y^3}\right)+\left(yz+\sqrt{8+z^3}\right)\right]\ge(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+xz+\sqrt{8+x^3}+\sqrt{8+y^3}+\sqrt{8+z^3}}$$

...có:

$$\sqrt{8+x^3}=\sqrt{(2+x)(4-2x+x^2)}\le\frac{2+x+4-2x+x^2}{2}=\frac{6-x+x^2}{2}$$

...g tự

$$\sqrt{8+y^3}\le\frac{6-y+y^2}{2};\sqrt{8+z^3}=\frac{6-z+z^2}{2}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{2(x+y+z)^2}{2xy+2yz+2xz+18-(x+y+z)+x^2+y^2+z^2}=\frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-(x+y+z)+18}$$

Đặt $t = x + y + z; t \ge 3$, khi đó

$$P \ge \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}$$

Xét hàm $f(t) = \frac{2t^2}{t^2 - t + 18}; t \ge 3; f'(t) = \frac{2(-t^2 + 36)}{t^2 - t + 18}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 36$

Bảng biến thiên:

t	3		36		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{144}{71}$	$\searrow$	2

Từ BBT ta có GTNN của P là $\frac{3}{4}$ khi $t = 3$

Vậy GTNN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = y = z = 1$

Bài 12: Cho x, y, z là số thực dương sao cho $xyz = 8$. Tìm GTNN của:

$$P = (x + y)(y + z)(z + x) + \frac{48}{\sqrt{x + y + z + 3}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Số 3 Bảo Thăng 2016)

Lời giải:

Ta có: $(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)(xy + yz + xz) - 8$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$$
$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)(*)$$

Thay $a = xy; b = yz; c = xz$ vào (*)

$$\Rightarrow (xy + yz + xz)^2 \ge 3xyz(x + y + z) \Rightarrow (xy + yz + xz) \ge 2\sqrt{6(x + y + z)}$$

Do đó:

$$P \ge 2(x + y + z)\sqrt{6(x + y + z)} + \frac{48}{\sqrt{x + y + z + 3}} - 8$$

Đặt $t = x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 6$

$$\Rightarrow P \ge 2t\sqrt{6t} + \frac{48}{\sqrt{3 + t}} - 8 \ (t = x + y + z; t \ge 6)$$

Xét hàm số:

$$f(t) = 2t\sqrt{6t} + \frac{48}{\sqrt{3 + t}} - 8 \ (t \ge 6) \Rightarrow f'(t) = \frac{3\sqrt{6t(t + 3)^3} - 24}{\sqrt{(t + 3)^3}} \Rightarrow f'(t) > 0 \ \forall t \ge 6$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[6; +\infty)$.

Vậy $\min f(t) = f(6) = 80$

Suy ra $P \ge 80$ dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 2$

Bài 13: Cho các số dương x, y, z thỏa điều kiện $xy + yz + xz = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + xz} + \sqrt{z + xy} \ge \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đội Cấn 2016)

Lời giải chi tiết:

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow a, b, c > 0; a + b + c = 1$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+1$$

Thật vậy:

$\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}=\sqrt{a^2+a(b+c)+bc}\ge\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}$

$$\Rightarrow\sqrt{a+bc}\ge\sqrt{\left(a+\sqrt{bc}\right)^2}=a+\sqrt{bc}$$

Tương tự $\sqrt{b+ac}\ge b+\sqrt{ac}$

$$\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}+1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Bài 14: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$S=\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Việt Trì 2016)

Nhận xét: *Đây là một hình thức của phương pháp đánh giá toàn phần. Xem thêm bài 15 bên dưới.*

Lời giải:

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{x^3+1}{x+2}\ge\frac{7}{18}x^2+\frac{5}{18}\ (x>0)(*)$$

$$(*)\Leftrightarrow 18(x^3+1)\ge(x+2)(7x^2+5)\Leftrightarrow(x-1)^2(11x+8)\ge0$$

Luôn đúng với mọi $x>0$ dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Áp dụng $(*)$ cho x lần lượt là $\frac{a}{b};\frac{b}{c};\frac{c}{a}$

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b}\ge\frac{7a^2}{18}+\frac{5b^2}{18};\frac{b^3+c^3}{b+2c}\ge\frac{7b^2}{18}+\frac{5c^2}{18};\frac{c^3+a^3}{c+2a}\ge\frac{7c^2}{18}+\frac{5a^2}{18}$$

Từ đẳng thức trên suy ra $S\ge\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{18}=2$

Vậy Min S=2 khi $a=b=c=1$

Bài 15: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2016)

Nhận xét: *Bài toán này chỉ cần nhìn là có thể biết được giải bằng phương pháp đánh giá toàn phần:*

$$\frac{4}{b+c}-\frac{1}{a}=\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}$$

$$\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\le x\left(a-\frac{1}{3}\right)+3$$

Lưu ý: $a<b+c\rightarrow 0<a<1/2$.

Do đó, ta có lời giải chi tiết sau:

Lời giải chi tiết:

Ta có: $\frac{5a-1}{a-a^2}-(18a-3)=\frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2}\le0;\ \forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Từ đó suy ra: $\frac{5a-1}{a-a^2}\le18a-3$ với mọi $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Ta cũng có 2 bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{5b-1}{b-b^2} \le 18b - 3\ \forall a \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$$

Ta cũng có 2 bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{5b-1}{b-b^2} \le 18b-3; \forall b \in \left(0;\frac{1}{2}\right); \frac{5c-1}{c-c^2} \le 18c-3; \forall c \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$$

Cộng các bất đẳng thức này lại với nhau ta có:

$$T = \frac{5a-1}{a-a^2} + \frac{5b-1}{b-b^2} + \frac{5c-1}{c-c^2} \le 18(a+b+c) - 9 = 9$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow Tmax = 9$

Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 9 khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 16: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Thái Nguyên 2016)

Nhận xét:

Đây là bất đẳng thức thuần nhất, đã là một bài y nguyên trong sách Công phá bất đẳng thức. Bài toán này do tính thuần nhất nên ta có thể giả sử: $a + b + c = 3$, khi đó, ta có thể sử dụng đánh giá toàn phần để giải:

$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} \le a(x-1) + \frac{8}{3} \to a = \frac{4}{3}$$

Lời giải chi tiết:

Đặt

$$x = \frac{3a}{a+b+c}; y = \frac{3b}{a+b+c}; z = \frac{3c}{a+b+c} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z > 0 \\ x+y+z = 3 \end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{(2y+x+z)^2}{2y^2+(x+z)^2} + \frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2} \le 8\ (*)$$

Vì $x + y + z = 3$

$$\Rightarrow \frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} = \frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2} = \frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9}$$

Xét:

$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} - \frac{4x+4}{3} = -\frac{(x-1)^2(2x+3)}{3(x^2-2x+3)} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} \le \frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} \le \frac{4x+4}{3}$$

Ta có 2 BĐT tương tự, cộng từng vế của 3 BĐT thu được:

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{(2y+x+z)^2}{2y^2+(x+z)^2} + \frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2} \le \frac{4(x+y+z)+12}{3} = 8 \Rightarrow (*)\text{đúng} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bất đẳng thức ba biến (tiết 2)

Bình luận: *Tiết học này sẽ dành cho những bài bất đẳng thức ba biến đối xứng, nhưng phải sử dụng tới những bất đẳng thức phụ khó nhìn.*

Bài 1: Cho $x; y; z \geq 0; x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Yên Thế - lần 3)

Mò mẫm lời giải:

Điều đầu tiên chúng ta nhìn thấy trong bài toán : đây là bất đẳng thức đối xứng ba biến.

Nhận xét đầu tiên cần để ý tới:

Trong bất đẳng thức đối xứng ba biến thì hơn 90% bài toán có dấu "=" xảy ra là một trong hai trường hợp sau:

+Một là hai biến bằng nhau (thông thường hay rơi vào trường hợp ba biến bằng nhau).

+Hai là một biến bằng 0 (thông thường rơi vào trường hợp một biến bằng 0 và hai biến bằng nhau).

Với hai trường hợp trên, kết hợp với giả thiết của đề bài, ta hoàn toàn có thể đưa được về bất đẳng thức một biến và giải quyết.

Riêng đối với bài toán này, sau khi thử ta có dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$ và ngoài ra, khi đọc, hai hướng đi sẽ đập ngay vào mắt chúng ta:

-Một là đưa về các đại lượng $p = x + y + z; q = xy + yz + zx; r = xyz$. Rồi dùng những bất đẳng thức đã biết.

-Hai là sử dụng các bất đẳng thức cổ điển Cauchy, Bunhiacopski (trong sách này anh thống nhất viết hai cái tên này cho thân quen với chúng ta mà không sử dụng tên quốc tế AM-GM hay Cauchy-Schwatz).

Hãy thử đi theo từng hướng giải nhé. ☺

Hướng 1:

$$P = \frac{16}{\sqrt{(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z) + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z} = \frac{16}{\sqrt{q^2 - 2pr + 1}} + \frac{q + 1}{p}$$

Cũng từ giả thiết ta có ngay: $p^2 - 2q = 3$.

Như vậy ta có sự ràng buộc ngay giữa p và q. Điều đó gợi ý cho chúng ta là phải đánh giá r. Vì cần tìm giá trị nhỏ nhất mà r lại mang dấu âm và dưới mẫu nên ta cần đánh giá $r \geq ???$. Điều này gợi ý cho các em nghĩ tới bất đẳng thức Schur. Đây là bất đẳng thức rất quen thuộc và được giới thiệu và có những bài tập rất cụ thể trong sách Công phá bất đẳng thức của anh. Bây giờ anh chỉ nói qua về bất đẳng thức đơn giản nhất mà anh đang nghĩ tới, bất đẳng thức Schur bậc ba:

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9}$$

Khi đó ta có:

$$P \geq \frac{16}{\sqrt{q^2 - \frac{2}{9}.p^2(4q - p^2) + 1}} + \frac{q + 1}{p}$$

Trong đó ta có:

$$p^2 - 2q = 3 \leftrightarrow q = \frac{p^2 - 3}{2}$$

Khi đó ta có:

$$P \geq \frac{16}{\sqrt{q^2 - \frac{2}{9}.p^2(2(p^2 - 3) - p^2) + 1}} + \frac{\frac{p^2 - 3}{2} + 1}{p} = \frac{16}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}} + \frac{p^2 - 1}{2p} = f(p)$$

Đây là bất đẳng thức một biến với biến p và có:

$$p = x + y + z \le \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = 3$$

Trong trường hợp biểu thức phức tạp với bất đẳng thức một biến, thay vì xét đạo hàm, ta có thể xét hiệu: (Lưu ý là ở đây, do biểu thức chỉ là căn thức và phân thức nên việc đánh giá các bất đẳng thức Cauchy,...sẽ làm cho bất đẳng thức bị lỏng đi!!!! Như anh đã từng nói đến trong cuốn công phá bất đẳng thức, ***càng biến đổi tương đương nhiều thì khả năng đúng càng lớn.***)

$$f(p) - f(3) = \frac{16}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}} + \frac{p^2 - 1}{2p} - \frac{28}{3} = \left(\frac{16}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}} - 8\right) + \left(\frac{p^2 - 1}{2p} - \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{8\left(2 - \sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}\right)}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}} + \frac{3p^2 - 8p - 3}{6p}$$

$$= \frac{\frac{8}{9}(2p^4 - 21.p^2 + 27)}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}\left(2 + \sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}\right)} + \frac{(p-3)(3p+1)}{6p}$$

$$= \frac{\frac{8}{9}.(p^2 - 9)(2p^2 - 3)}{\sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}\left(2 + \sqrt{1 + \frac{7}{3}p^2 - \frac{2}{9}.p^4}\right)} + \frac{(p-3)(3p+1)}{6p}$$

Rất buồn khi từ giả thiết ta lại có: $p \le 3$ nên ta có:

$$P \ge f(p); f(p) \le f(3)$$

Hai bất đẳng thức này ngược nhau nên không thể giải quyết bài toán theo cách này được ☹.

Dù không giải quyết được, thế nhưng ta đã học được gì cho hướng đi này???? Đánh giá Schur kia đã làm cho bài toán lỏng đi quá nhiều? Điều đó lại càng giúp ta khẳng định:

Biến đổi tương đương càng nhiều, bất đẳng thức càng dễ đúng.

Hướng 2:

Mặc dù hướng đi thứ nhất đã để cho chúng ta một bài học xương máu thế nhưng cũng chính là ý tưởng để chúng ta đi tiếp hướng đi thứ 2 là cố gắng đánh giá đại lượng:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \le ???$$

Điều may mắn ở đây, bài toán này lại sử dụng một bài toán phụ nằm ngay chương **chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng hằng đẳng thức đáng nhớ** trong chính cuốn Công phá Bất đẳng thức của anh.☺

Anh phát biểu lại bài toán:

Bài toán: Cho $a + b + c = 3; a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \ge ab + bc + ca$$

Nếu phát biểu bài toán theo hình thức này, những ai từng đọc qua thì rõ ràng là thấy ngay cách giải (cực kì đơn giản).

Áp dụng vào bài toán của mình, thì ta thấy ngay:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \le x + y + z$$

Và công việc còn lại là mò mẫm như trên và không có nhiều bàn cãi. Khi đó, ta có lời giải hoàn thiện sau:

Lời giải chi tiết:

Trước tiên, ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \le x + y + z \ (*)$$

Thật vậy ta có:

$$(*) \leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 - (x^4 + y^4 + z^4) \le 2(x + y + z)$$

Do $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ nên ta có:

$$(*) \leftrightarrow (x^4+y^4+z^4)+2(x+y+z)\geq 9$$

Bất đẳng thức cuối đúng do theo bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta có:

$$\begin{cases} x^4+x+x\geq 3x^2\\ y^4+y+y\geq 3y^2\\ z^4+z+z\geq 3z^2\end{cases}$$

Cộng vế với vế ta có ba bất đẳng thức (*) đúng.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$P\geq \frac{16}{\sqrt{x+y+z+1}}+\frac{xy+yz+zx+1}{x+y+z}$$

Do $x^2+y^2+z^2=3$ nên ta có:

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-3}{2}$$

Thay vào và đổi biến $t=x+y+z$ ta có:

$$P\geq \frac{16}{\sqrt{t+1}}+\frac{\frac{t^2-3}{2}+1}{t}=\frac{16}{\sqrt{t+1}}+\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}=f(t)$$

Do $x^2+y^2+z^2\leq (x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$ nên $\sqrt{3}\leq t\leq 3$.

Xét hàm số f(t) trên $[\sqrt{3};3]$ ta có:

$$f'(t)=-\frac{8}{\sqrt{(t+1)^3}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2}\leq -\frac{8}{\sqrt{4^3}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}<0$$

Do đó, f(t) nghịch biến trên $[\sqrt{3};3]$ nên ta có:

$$P\geq f(t)\geq f(3)=\frac{28}{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi: $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là: $\frac{28}{3}$ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét 1: Cũng rất thú vị là khi sử dụng bài toán phụ nêu trong lời giải trên thì câu bất đẳng thức trong đề thi **THPT Lương Thế Vinh** cũng lấy ý tưởng tương tự:

Bài 2: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=(x+y)(y+z)(z+x)-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}$$

Hướng dẫn giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương:

$$x^3+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\geq 4x$$

Tương tự ta cũng có:

$$y^3+3\sqrt[3]{y}\geq 4y; z^3+3\sqrt[3]{y}\geq 4z$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta thu được:

$$x^3+y^3+z^3+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)\geq 4(x+y+z)=12\ (1)$$

Mặt khác, ta lại có:

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$$

Thay vào (1) ta được:

$$27-3(x+y)(y+z)(z+x)+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)\geq 12$$
$$\rightarrow P=(x+y)(y+z)(z+x)-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}\leq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x=y=z=1$.

Nhận xét 2: Cũng theo ý tưởng này thì một loạt đề thi thử của các trường khác, đã sử dụng ý tưởng sử dụng một bất đẳng thức phụ đã biết để đưa về một biến và đánh giá.

Bài 3: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $c = \min\{a, b, c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{2\ln\left(\frac{6(a+b)+4c}{a+b}\right)}{\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Hưng Đạo)

Mò mẫm lời giải:

So với bài toán 1 thì bất đẳng thức phụ trong bài toán này có thể là sẽ khá dễ nhìn vì đã xuất hiện trong cuốn **Công phá Bất đẳng thức** của anh. Anh xin nhắc lại bất đẳng thức đó:

$$c = \min(a; b) \geq 0 \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}\ (*)$$

Trước khi đi tiếp ta theo dõi lời giải mà đáp án đưa ra:

Lời giải chi tiết:

Ta đi chứng minh bất đẳng thức phụ sau:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}\ (*)$$

Thật vậy ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{a(b+c)}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b(c+a)}}$$

$$\geq \frac{(a+b)^2}{a\sqrt{a(b+c)} + b\sqrt{b(c+a)}} \geq \frac{(a+b)^2}{\sqrt{(a+b)[a^2(b+c)+b^2(c+a)]}}\ (1)$$

Mặt khác ta có: $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow a + b - 2c \geq 0$ do đó:

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) = ab(a+b-2c) + c(a+b)^2$$

$$\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a+b-2c) + c(a+b)^2 = \frac{(a+b)^3 + 2c(a+b)^2}{4}\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ta lại có:

$$\ln\left(\frac{6(a+b)+4c}{a+b}\right) = \ln\left(2\left(\frac{(a+b+2c)}{a+b} + 2\right)\right) \geq \ln\left(\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right)^2\right)$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right)\ (4)$$

Mặt khác: Vì $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 2c \leq a + b$. Ta có:

$$\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}} \leq \sqrt[4]{\frac{2(a+b+2c)}{a+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right)\ (5)$$

Từ (3), (4), (5) ta được:

$$P \geq \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}} + \frac{8\ln\left(\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2c}{a+b}} + \sqrt{2}}$$

Đặt $t = \sqrt{1+\frac{2c}{a+b}}$ mà do $c = \min\{a, b, c\}$:

$$\rightarrow \frac{2c}{a+b} \leq 1 \rightarrow t \leq \sqrt{2}$$

Xét hàm: $f\left(t\right)=\frac{2}{t}+\frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{t+\sqrt{2}}$ trên $t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$

Ta có:

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2}+\frac{8}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2}-\frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2}=\frac{(t-\sqrt{2})(3t+\sqrt{2})}{t^2\left(t+\sqrt{2}\right)^2}-\frac{8\ln\left(t+\sqrt{2}\right)}{\left(t+\sqrt{2}\right)^2}<0$$

Từ đó suy ra: $f(t) \geq f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}(1+\ln 8)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bình luận:

Anh xin nhấn mạnh bất đẳng thức lại bất đẳng thức phụ:

$$c=\min(a;b)\geq 0 \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}\ (*)$$

Lời giải mà đáp án đưa ra khá hoang mang bởi lẽ ta không thể nhận ra được những đánh giá khó nhìn ở (4); (5). Ta hoàn toàn có thể giải theo cách khác. Rõ ràng đại lượng xuất hiện nhiều đã rõ nên ta có thể đặt:

$$t=\sqrt[4]{\frac{8c}{a+b}}\rightarrow\frac{t^4}{8}=\frac{c}{a+b}\rightarrow\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{1}{1+\frac{t^4}{8}}=\frac{8}{t^4+8}$$

$$\rightarrow P\geq 2\sqrt{\frac{8}{t^4+8}}+\frac{2\ln\left(6+\frac{t^4}{2}\right)}{t}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{t^4+8}}+\frac{2\ln\left(6+\frac{t^4}{2}\right)}{t}=g(t)$$

Lưu ý rằng: $c = \min(a; b)$ nên hiển nhiên thấy: $0 < t \leq \sqrt{2}$.

Xét hàm số $g(t)$ trên $(0; \sqrt{2})$ ta có:

$$g'(t)=4\sqrt{2}.\left(\sqrt{t^4+8}\right)'.\left(\frac{-1}{t^4+8}\right)+2\left(\ln\left(6+\frac{t^4}{2}\right)\right)'.\frac{1}{t}+2\ln\left(6+\frac{t^4}{2}\right).\left(\frac{1}{t}\right)'$$

$$=4\sqrt{2}.4t^3.\frac{1}{2\sqrt{t^4+8}}.\left(\frac{-1}{t^4+8}\right)+2.\frac{4t^3}{2}.\frac{1}{6+\frac{t^4}{2}}.\frac{1}{t}+2\ln\left(6+\frac{t^4}{2}\right).\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=-\frac{8t^3\sqrt{2}}{\sqrt{(t^4+8)^3}}+\frac{8t^2}{t^4+12}-\frac{2\ln\left(6+\frac{t^4}{2}\right)}{t^2}$$

$$=8t^2.\left(\frac{1}{t^4+12}-\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{(t^4+8)^3}}\right)-\frac{2\ln\left(6+\frac{t^4}{2}\right)}{t^2}$$

$$<8.2.\left(\frac{1}{12}-0\right)-\frac{2\ln 6}{2}=\frac{4}{3}-\ln 6<0\ \left(\text{do } 0\leq t<\sqrt{2}\right)$$

Do đó, bài toán được giải quyết.

Vậy thì kinh nghiệm rút ra là gì???? Đó là khi ở bất đẳng thức một biến, dù có phức tạp thì cũng cố gắng mà chịu khó tính toán tiếp. ***Đừng nhụt chí khi công thức cồng kềnh.*** Tiếp tục vấn đề về dùng bất đẳng thức phụ thì có một bài toán trong giới học sinh chuyên thì khá quen thuộc nhưng đối với học sinh đại học thì rất khó xơi của đề thi thử trường **THPT Ngô Gia Tự.**

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực không âm và không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+z^2}\right)$$

Đầu tiên anh giới thiệu tới các em lời giải trong đáp án:

Lời giải chi tiết:

Ta có bổ đề sau:

Với mọi m, n, p không có 2 số đồng thời bằng 0 thì:
$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{p+m}\ge\frac{5}{2\sqrt{mn+np+pm}}$$

Đổi biến:
$$a=\frac{m}{t};b=\frac{n}{t};c=\frac{p}{t}\ (a,b,c\ge 0);t=\sqrt{mn+np+pm}\Rightarrow ab+bc+ca=1\ (*)$$

Khi đó bổ đề tương đương:
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{2}\quad(1)$$

Giả sử: $c\ge b\ge a$, ta sẽ chứng minh:
$$a+b+c+\frac{5}{3abc}\ge 2\quad(2)$$

Từ (*) ta có: $c=\dfrac{1-ab}{a+b}$ ta có:
$$(2)\Leftrightarrow\frac{1-ab}{a+b}\left(1+\frac{5}{3}ab\right)\ge 2-a-b\Leftrightarrow ab(2-5ab)+3(a+b-1)^2\ge 0$$

Hiển nhiên đúng vì $c\ge b\ge a$ nên $ab\le\frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)=\frac{1}{3}$.

Trở lại bổ đề ta có:
$$(1)\Leftrightarrow 2(a+b)(b+c)+2(b+c)(c+a)+2(c+a)(a+b)\ge 5(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)\ge 5(a+b+c)(ab+bc+ca)-5abc$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2+5abc+2\ge 5(a+b+c)(\text{ do }ab+bc+ca=1)$$

Vì theo (2) ta có: $5abc\ge 6-3(a+b+c)$

Do đó :
$$2(a+b+c)^2+5abc+2-5(a+b+c)$$
$$\ge 2(a+b+c)^2+8-8(a+b+c)=2(a+b+c-2)^2\ge 0$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Theo bổ đề ta có:
$$A=(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\right)\ge(xy+yz+xz).\frac{5}{2\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}}\quad(3)$$

Ta có:
$$xy+yz+xz\ge\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}$$
$$\Leftrightarrow(xy+yz+xz)^2\ge x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$$
$$\Leftrightarrow 2xyz(x+y+z)\ge 0\text{ luôn đúng với mọi }x,y,z\ge 0$$
$$\Rightarrow xy+yz+xz\ge\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}$$

Từ (3)suy ra: $A\ge\dfrac{5}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y;z=0$ và các hoán vị.

Bình luận:

Rõ ràng, khi đọc lời giải trên thì chỉ mang lại cho chúng ta những hoang mang đáng sợ. Không phải ai trong số chúng ta cũng biết được những bất đẳng thức phụ. Mặc dù trong sách công phá của anh cũng đã từng giới thiệu bất đẳng thức phụ:

Bài toán phụ: Cho $a;b;c\ge 0;ab+bc+ca=1$. Khi đó ta luôn có:
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{2}$$

Thế nhưng cũng rất nhiều lần anh không thể nghĩ tới là có bài toán này vì bất đẳng thức là quá nhiều. Anh đã đặt câu hỏi là giả sử vào một người không biết gì, liệu có lời giải nào khác cho bài toán trên không? Câu trả lời là có, dồn biến với bài toán như thế này chắc chắn ra! Đề nghị các em thử làm theo hướng này!!!

Bây giờ, cũng theo tư tưởng dồn biến, nhưng không sử dụng nguyên lý dồn biến mà sử dụng dồn biến theo kiểu rất tự nhiên.

Lời giải khác:

Ta giả sử $z = \min(x; y)$. Khi đó ta đặt:

$$a = x + \frac{z}{2}; b = y + \frac{z}{2}$$

Ta có:

$$ab = \left(x + \frac{z}{2}\right)\left(y + \frac{z}{2}\right) = xy + \frac{xz}{2} + \frac{yz}{2} + \frac{z^2}{4} \le xy + yz + zx \text{ (do } z \le x; y)$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \ge \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{y^2 + z^2} \ge \frac{1}{y^2 + yz + \frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1}{b^2} \text{ (do } z \le y)$$

$$\frac{1}{z^2 + x^2} \ge \frac{1}{x^2 + xz + \frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\left(x + \frac{z}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \text{ (do } z \le x)$$

Từ đó ta suy ra:

$$A = (xy + yz + xz)\left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2}\right) \ge ab\left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = f(a; b)$$

Đánh giá $f(a; b)$ có nhiều cách chứng minh, sau đây là một trong những cách khá đơn giản là biến đổi tương đương:

$$A \ge \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \frac{5}{2} = -\frac{(a - b)^2}{2(a^2 + b^2)} + \frac{(a - b)^2}{ab} + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{(a - b)^2[2(a^2 + b^2) - ab]}{2ab(a^2 + b^2)} + \frac{5}{2} \ge \frac{5}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi: $z = 0; a = b \leftrightarrow x = y; z = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{5}{2}$.

Nhận xét: Bài toán 4 này giúp ta liên tưởng tới bài toán sau, đề nghị các em tự làm.

Bài toán: Cho $a; b; c \ge 0; ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + 10\sqrt{(1 + a)(1 + b)(1 + c)}$$

Bài 5: Cho x, y, z là số thực không âm sao cho $xy + yz + xz = 1$. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{5}{2}(x + 1)(y + 1)(z + 1)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Quốc Oai 2016)

Nhận xét: Bài toán này sử dụng bài toán phụ nhẹ hơn bài toán 4.

Hướng dẫn giải:

Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$. Đặt $x + \frac{z}{2} = u; y + \frac{z}{2} = v \Rightarrow u > 0; v > 0$

Ta có: $x^2 + z^2 \le \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}z^2 - xz \le 0 \Leftrightarrow z(3z - 4x) \le 0$ luôn đúng

$$x^2 + z^2 \le \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 = u^2; y^2 + z^2 \le v^2; x^2 + y^2 \le u^2 + v^2$$

Mà với $u, v > 0$ ta có:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \ge \frac{4}{u + v}; \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \ge \frac{8}{(u + v)^2}$$

Vậy

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+z^2}\geq\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}$$
$$=\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\geq\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{1}{2uv}+\frac{6}{(u+v)^2}$$
$$\geq\frac{4}{(u+v)^2}+\frac{6}{(u+v)^2}=\frac{10}{(u+v)^2}=\frac{10}{(x+y+z)^2}$$

Mà $(x+1)(y+1)(z+1)=xyz+(xy+yz+xz)+x+y+z+1$
$$=xyz+x+y+z+2\geq x+y+z+2$$

Vậy $P\geq\frac{10}{(x+y+z)^2}+\frac{5}{2}(x+y+z)+5$

Đặt $x+y+z=t\ (t\geq\sqrt{3})$

Xét $f(t)=\frac{10}{t^2}+\frac{5}{2t}; t\geq\sqrt{3}; f'(t)=-\frac{20}{t^3}+\frac{5}{2}=0$ hay $t=2$

Từ đó ta có $P\geq f(2)=10+\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

Khi $x=y=1; z=0$ thì $P=\frac{25}{2}$

Vạy GTNN của biểu thức là $25/2$

Bài 6: Cho 3 số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của:
$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}$$
(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Bắc Giang – 2016)

Nhận xét: *Rõ ràng, P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=b=c$. Bài toán này đã từng xuất hiện trong cuốn công phá bất đẳng thức. Ý tưởng là dùng bất đẳng thức phụ sau:*
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2\sqrt{2}.\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}$$
Khi đó, ta hoàn toàn có thể đổi biến.
$$t=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Lời giải chi tiết:

BĐt phụ với 6 số dương bất kỳ $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ áp dụng BĐT Bunhiacopski cho 2 bộ số:
$$\left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{\sqrt{y_2}}\right)^2+\left(\frac{x_3}{\sqrt{y_3}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{y_1}\right)^2+\left(\sqrt{y_2}\right)^2+\left(\sqrt{y_3}\right)^2\right]$$
$$\geq\left(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}.\sqrt{y_1}+\frac{x_2}{\sqrt{y_2}}.\sqrt{y_2}+\frac{x_3}{\sqrt{y_3}}.\sqrt{y_3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\frac{x_3^2}{y_3}\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{y_1+y_2+y_3}\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{y_1+y_2+y_3}\ (*)$$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT AM- GM cho 2 số dương ta có:
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\sqrt{\frac{2a^2}{2a(b+c)}}\geq\sqrt{\frac{4.2a^2}{2a+b+c}}=2\sqrt{2}.\frac{a}{2a+b+c}=2\sqrt{2}.\frac{a^2}{2a^2+ab+ac}$$

Ta có 2 BĐT tương tự, kết hợp áp dụng BĐT (*) ta được:
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2\sqrt{2}\left(\frac{a^2}{2a^2+ab+bc}+\frac{b^2}{2b^2+bc+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ca+cb}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{2}.\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+2\right)}{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+1}$$

Đặt $t\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}; t \ge 1$ ta có: $P \ge \frac{\sqrt{2}(t+2)}{t+1} + \sqrt{2t}$

Xét $f(t) = \frac{\sqrt{2}(t+2)}{t+1} + \sqrt{2t}$ trên $[1; +\infty)$

Hàm số f(t) đồng biến và liên tục trên $[1; +\infty)$

$$\to f(t) \ge f(1) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ nên } P \ge \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy GTNN của P là $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ khi $a = b = c$.

Bài 7: Cho các số không âm a, b, c có tổng 2 số bất kỳ đều dương. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \ge 6$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Biên Hòa 2016)

Nhận xét: *Dù cùng biểu thức như bài toán 6 thế nhưng nếu dùng bất đẳng thức phụ bài 6 thì không giải quyết được bài toán này vì giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b; c = 0$. Hướng nghĩ của bài toán này đơn giản hơn như sau:*

Lời giải chi tiết:

Đặt $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$.

Giả sử $a \ge b \ge c$ khi đó ta có:

$$\sqrt{\frac{ab}{b+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+c}} \ge \sqrt{\frac{b.b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c.c}{b+c}} = \sqrt{b+c}$$

$$\to \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} \ge \sqrt{\frac{b+c}{a}}$$

Đặt $t = b + c$ thì $P \ge \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} = \frac{a+t}{\sqrt{at}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} \ge 6$$

Do đó $P \ge 6$.

Dấu bằng xảy ra khi $a + t = 3\sqrt{at}$ chẳng hạn một bộ (a, b, c) thỏa mãn là $\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; 1; 0\right)$

Bài 8: Cho a,b,c là số thực dương và $a+b+c \le \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của:

$$P = \sqrt{2a^2 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{2b^2 + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{2}{c}} + \sqrt{2c^2 + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{2}{a}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thăng Long 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\ge\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\ (1)$$

Thật vậy

$$(1)\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_1^2+y_1^2y_2^2}\ge x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2}\ge x_1x_2+y_1y_2$$

$$\Leftrightarrow(x_1y_2-x_2y_1)^2\ge0$$

Áp dụng (1) hai lần ta có: $\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}\ge\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}$ (2)

Đặt $a+b+c=t$ $\left(\text{t thuộc }\left(0;\frac{3}{2}\right]\right)$

$$\Rightarrow abc\le\frac{t^3}{27}$$

Áp dụng (2) ta có:

$$P=\sqrt{a^2+\left(a+\frac{1}{ab}\right)^2}+\sqrt{b^2+\left(b+\frac{1}{bc}\right)^2}+\sqrt{c^2+\left(\frac{1}{ca}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{abc}\right)^2}\ge\sqrt{t^2+\left(t+\frac{27}{t^2}\right)^2}$$

Xét hàm $f(t)=t^2+\left(t+\frac{27}{t^2}\right)^2=2t^2+\frac{54}{t}+\frac{27^2}{t^2}$ trên $\left(0;\frac{3}{2}\right]$

$$f'(t)=4t-\frac{54}{t^2}-\frac{4.27^2}{t^5}=\frac{4t^3-54}{t^2}-\frac{4.27^2}{t^5}<0$$

Hàm số f(t) nghịch biến trên $\left(0;\frac{3}{2}\right]$ do đó:

$$f(t)\ge f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{369}{2}\Rightarrow P\ge\frac{3\sqrt{82}}{2}$$

Khi $a=b=c=\frac{1}{2}$ dấu bằng xảy ra.

Bài 9: Cho $x,y,z\in[0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm GTLN của:

$$P=\frac{1}{x^2+y^2+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2}+\frac{1}{x^2+z^2+2}+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Xuân Trường 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta chủ định đưa về biến: $t=xy+yz+zx$. Khi đó, ta có:

Ta có:

$$x^2+y^2+2=(x^2+1)+(y^2+1)\ge2(x+y);\ \sqrt{xy}\le\frac{xy+1}{2}$$

Tương tự cho hai hoán vị còn lại.

$$\to P\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+xy+yz+xz+3\right]$$

Ta có:

$$(x+y+z)(xy+yz+xz)\ge9xyz$$

$$\Rightarrow(x+y)(y+z)(x+z)=(x+y+z)(xy+yz+xz)-xyz\ge\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+xz)$$

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}=\frac{(x+y)(y+z)+(y+z)(x+z)+(x+y)(x+z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}{(x+y)(x+z)(z+x)}\le\frac{(x+y+z)^2+xy+yz+xz}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+xz)}=\frac{27}{8(xy+yz+xz)}+\frac{3}{8}$$

Suy ra

$$P \le \frac{1}{2}\left[\frac{27}{8(xy+yz+xz)} + xy + yz + xz + \frac{27}{8}\right]$$

Đặt $t = xy + yz + xz$
Do $x, y, z \in [0; 2]$

$$\Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \ge 0 \Leftrightarrow xy + yz + xz \ge \frac{4 + xyz}{2} \ge 2 \Rightarrow t \ge 2$$

Mặt khác ta có:

$$xy + yz + xz \le \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3 \Rightarrow t \le 3$$

Vậy $t \in [2; 3]$
Ta có: $P \le \frac{1}{2}\left[\frac{27}{8t} + t + \frac{27}{8}\right] = f(t)$
Xét hàm $f(t)$ với t thuộc $[0; 2]$ ta có:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left[t - \frac{27}{8t^2}\right] = \frac{8t^3 - 27}{16t^2} > 0; t \in [2; 3]$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;3]$ suy ra

$$f(t) \le f(3) = \frac{15}{4}$$

Do $P \le f(t) \Rightarrow P \le \frac{15}{4}$. Ta có: $P = \frac{15}{4}$ khi $x = y = z = 1$.
Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{15}{4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Ngày số 25

Bất đẳng thức ba biến (tiết 3)

Bình luận: *Tiết học này dành cho những bài bất đẳng thức ba biến và có đúng hai biến đối xứng.*

Bài 1: Cho 3 số thực $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4z}{x+y} + \frac{z^2 + 4xy}{(x+y)^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Nhận xét: *Đây là bài toán rất dễ vì ta có thể thấy ngay biến mà chúng ta muốn đưa về:*

$$P = \frac{4z}{x+y} + \frac{z^2}{(x+y)^2} + \frac{4xy}{(x+y)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì: $(x+y)^2 \geq 4xy$. *Nên ta có thể đổi biến ngay:*

$$P \leq 4t + t^2 + 1\,;\left(t = \frac{z}{x+y}\right)$$

Do đó, ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

$$P = \frac{4z}{x+y} + \frac{z^2}{(x+y)^2} + \frac{4xy}{(x+y)^2} \leq 4t + t^2 + 1\,;\left(t = \frac{z}{x+y}\right)$$

Vì $x; y; z \in [1; 2]$ nên:

$$t = \frac{z}{x+y} \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

Xét hàm số: $f(x) = t^2 + 4t + 1; t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Ta có bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{4}$	1
f(t)	$\frac{33}{16}$ ↗	6

Vậy $MaxP = 6 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow (a, b, c) = (1,1,2)$

Bài 2: Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $x > y; xy + (x+y)z + z^2 = 1$. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{1}{4(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Quảng Xương IV 2016)

Ý tưởng:

Khá rõ ràng với giả thiết:

$$xy + (x+y)z + z^2 = 1 \rightarrow (x+z)(y+z) = 1$$

Từ đó, ta thấy nếu:

$$x + z = a \rightarrow y + x = \frac{1}{a} \rightarrow |x - y| = \left|a - \frac{1}{a}\right|$$

nên bài toán này đã đưa về bài một biến đơn giản.

Lời giải chi tiết:

Đặt $z + x = a$. Từ giả thiết ta có: $(x+z)(y+z) = 1$

$$\rightarrow y + z = \frac{1}{a}$$

Do $x > y$ nên $x + z > y + z \Rightarrow a > 1$.

Ta có:

$$x - y = x + z - (y + z) = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a}$$

Ta có:

$$P = \frac{a^2}{4(a^2-1)^2} + \frac{1}{a^2} + a^2 = \frac{a^2}{4(a^2-1)^2} + \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2}\right)$$

$$\geq \frac{a^2}{4(a^2-1)^2} + \frac{3a^2}{4} + 1 \ (1)$$

Đặt $a^2 = t > 1$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4(t+1)^2} + \frac{3t}{4} + t$.

Ta có:

$$f'(t) = \frac{-t-1}{4(t-1)^3} + \frac{3}{4}; f'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(3t^2 - 3t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Bảng biến thiên

t	1	2	$+\infty$
f'(t)	-	0	+
f(t)	↘	3	↗

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq 3$ với mọi $t > 1$ (2)

Từ (1); (2) suy ra $P \geq 3$ dấu bằng đạt được tại $\begin{cases} x + z = \sqrt{2} \\ y + z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a^2 + ab + b^2 = c$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} - \frac{3(ab+2)\sqrt{2c^2+36}}{4ab(2c+3)^2}$$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ý tưởng:

Để đơn giản hóa bài toán ta sử dụng:

$$\sqrt{2c^2 + 36} \geq k(2c + 3)$$

Đến đây, có thể dùng cân bằng Bunhiacopski.

Ta có:

$$(2c+3)^2 = \left(\sqrt{2}.\sqrt{2}c + \frac{1}{2}.6\right) \leq \frac{9}{4}(2c^2 + 36) \Rightarrow \sqrt{2c^2+36} \geq \frac{2}{3}(2c+3)$$

$$\rightarrow \frac{3(ab+2)\sqrt{2c^2+36}}{4ab(2c+3)^2} \leq \frac{ab+2}{2ab(2c+3)}$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} = \frac{a^2+b^2+4}{a^2b^2 + 2(a^2+b^2) + 4}$$

$$= \frac{a^2+b^2+4}{a^2b^2 + 1 + 2(a^2+b^2) + 3} \leq \frac{a^2+b^2+4}{2(a^2+ab+b^2)+3} = \frac{a^2+b^2+4}{2c+3}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{a^2+b^2+4}{2c+3} - \frac{\frac{ab+2}{2ab}}{2c+3} = \frac{a^2+b^2+4 - \frac{ab+2}{2ab}}{2c+3}$$

Đến đây ta chứng minh:

$$a^2 + b^2 + 4 - \frac{ab+2}{2ab} \leq (a^2 + b^2 + ab) + \frac{3}{2} = c + \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{ab} + ab \geq 2 \text{ (đúng do Cauchy)}$$

Từ đó suy ra:

$$P \le \frac{1}{2}$$

Khi đó $P \le \frac{1}{2}$. Vậy $Pmax = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $ab = 1; c = 12; a^2 + ab + b^2 = c$ hay $\begin{cases} a = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ b = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ c = 12 \end{cases}$

Bài 4: Cho 2 số thực x, y, z không âm sao cho $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{z+1}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trung Giã 2016)

Nhận xét: *Tính đối xứng nằm ở y và z. Do đó, ta cố gắng đưa về biến x. Lưu ý dấu "=" xảy ra khi:* $y = z = 0; x = 1$.

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{z+1}}\right)^2 = \frac{y+z+2}{yz+y+z+1} + \frac{2}{\sqrt{yz+y+z+1}}$$

$$\le \frac{y+z+2}{y+z+1} + \frac{2}{\sqrt{y+z+1}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{y+z+1}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y+1}} + \frac{1}{\sqrt{z+1}} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{y+z+1}}$$

$$(x+y+z)^2 \ge x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\Rightarrow y + z \ge 1 - x \Rightarrow P \le f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2+x}} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}; x \text{ thuộc } [0;1]$$

Chứng minh được f(x) đồng biến trên [0; 1] nên $f(x) \le f(1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy GTLN của P là $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $y = z = 0; x = 1$

Bài 5: Cho 3 số thực dương x, y, z thay đổi sao cho $x + y + 1 = z$. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+xz} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{14}{z+1\sqrt{1+xy+x+y}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lương Ngọc Quyến –2015)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $x, y, z > 0$ nên $(1+x)(1+y) \le \frac{(x+y+2)^2}{4} = \frac{(z+1)^2}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Lại có: $1 + xy + x + y = (1+x)(1+y)$; $2xy \le x^2 + y^2$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

Nên ta được:

$$P = \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+xz} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}$$

$$= \frac{x^4}{x^2+xyz} + \frac{y^4}{y^2+xyz} + \frac{z}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}$$

$$P = \frac{x^4}{x^2+xyz} + \frac{y^4}{y^2+xyz} + \frac{z}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)+2xyz} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^2+y^2}{2(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{(x+y)^2}{2(1+z)} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2} = \frac{(z-1)^2}{2(1+z)} + \frac{4z^3+28}{(z+1)^2} = \frac{9z^3-z^2-z+57}{2(z+1)^2}$$

Xét hàm $f(z) = \dfrac{9z^3-z^2-z+57}{2(z+1)^2}; z > 1$

Ta có: $f'(z) = \dfrac{(3z-5)(3z^2+14z+23)}{2(z+1)^3}; z > 1; f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{5}{3}$

Lập BBT của f(z) ta có: $\min f(z) = f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{53}{8}$

Vậy GTNN của P bằng $\dfrac{53}{8}$ khi $x = y = \dfrac{1}{3}; z = \dfrac{5}{3}$.

Bài 6: Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy + yz + xz = 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{2x}{2+x^2} + \frac{2y}{2+y^2} + \frac{z^2}{2+z^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên đại học Vinh 2016)

Hướng dẫn giải:

Đặt $x = \sqrt{2}\tan\dfrac{A}{2}; y = \sqrt{2}\tan\dfrac{B}{2}; z = \sqrt{2}\tan\dfrac{C}{2};$ với $0 \leq A, B, C < \pi$ (1)

Từ giả thiết ta có:

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

Khi đó:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}} = \cot\frac{B+C}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right)$$

Suy ra $\dfrac{A}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B+C}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Hay $A + B + C = \pi + k2\pi$

Từ (1) suy ra $k = 0$. Do đó $A + B + C = \pi$ khi đó:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin B + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.2.\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - \cos^2\frac{C}{2}$$

$$\leq \sqrt{2}\cos\frac{C}{2} - \cos^2\frac{C}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\frac{C}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ A = B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = B = \dfrac{\pi}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2-\sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy GTLN của P bằng $\dfrac{3}{2}$.

Bài 7: Cho a, b, c là các số thực không âm và thỏa mãn: $ab + bc + ac = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a}{16(b+c)(a^2+bc)}} + \sqrt{\frac{b}{16(a+c)(b^2+ac)}} + \frac{a^2+1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab}\right)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đăkmil 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\frac{a^2+bc}{ab+ac} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{a^2+bc}{ab+ac}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}} \geq \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{(b+c)(a^2+bc)}} \geq \frac{2a}{(a+b)(a+c)} (1)$$

Tương tự ta cũng sẽ có:

$$\sqrt{\frac{b}{(a+c)(b^2+ac)}} \geq \frac{2b}{(c+b)(a+b)} \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta sẽ có:

$$P \geq \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b}{(c+b)(a+b)}\right] + \frac{a^2+1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab}\right)$$
$$= \frac{1}{4}.\frac{4ab+2ac+2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{(a^2+1)(b+c)}{4ab}$$

Mặt khác ta có a, b, c là các số không âm và $ab + bc + ca = 1$. Nên ta sẽ có:

$$\frac{(a^2+1)(b+c)}{4ab} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4ab} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4ab+2c(a+b)}$$

Từ đây ta sẽ có:

$$P \geq \frac{1}{4}.\frac{4abc+2ac+2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4ab+2c(a+b)} \geq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{a^2+bc}{ab+ac} = 1 \\ \dfrac{b^2+ac}{ab+bc} = 1 \\ ab+bc+ca = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$

Bài 8: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab \geq 1; c(a+b+c) \geq 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Đức Thọ 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$P + 2 = \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c)$$
$$= (a+b+2c+1)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{b+1}\right) + 6\ln(a+b+2c)$$

Ta chứng minh BĐT quen thuộc sau:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \ (1)$$
$$\sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \ (2)$$

Thật vậy:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (2+a+b)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right) \geq 0 \text{ luôn đúng vì } ab \geq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}-1\right)^2 \geq 0$$

Dấu "=" khi $ab = 1$.

Do đó:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\ge\frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}}=\frac{4}{3+ab}\ge\frac{4}{ab+bc+ca+c^2}=\frac{4}{(a+c)(b+c)}\ge\frac{16}{(a+b+2c)^2}$$

Đặt $t=a+b+2c; t>0$ ta có:

$$P+2\ge f(t)=\frac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t; t>0$$

$$f'(t)=\frac{6}{t}-\frac{16(t+2)}{t^3}=\frac{6t^2-16t-32}{t^3}=\frac{(t-4)(6t+8)}{t^3}$$

Bảng biến thiên:

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		↘	5+6ln4	↗	

Vậy, GTNN của P là 3+6ln4 khi $a=b=c=1$

Bài 9: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{2x^2+2yz+1}+\frac{y^2}{2y^2+2xz+1}+\sqrt{x+y}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Phú 2016)

<u>Lời giải chi tiết:</u>

Ta có: $2yz+1=x^2+y^2+z^2+2yz=x^2+(y+z)^2\ge 2x(y+z)$

Suy ra $2x^2+2yz+1\ge 2x^2+2x(y+z)=2x(x+y+z)$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{2x^2+2yz+1}\le\frac{1}{2}.\frac{x}{x+y+z}$$

Tương tự:

$$\frac{y^2}{2y^2+2xz+1}\le\frac{1}{2}.\frac{y}{x+y+z}$$

Suy ra

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)+\sqrt{x+y}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{x+y+z}\right)+\sqrt{x+y}$$

Ta có: $x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2(1-z^2)}=\sqrt{2-2z^2}$

Suy ra $P\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2-2z^2}+z}\right)+\sqrt[4]{2-2z^2}$

Xét hàm số: $f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2-2z^2}+z}\right)+\sqrt[4]{2-2z^2}$ trên $[0; 1]$

$$f'(z)=-\frac{1}{\sqrt{2-2z^2}\left(\sqrt{2-2z^2}+z\right)}-\frac{z}{\sqrt[4]{(2-2z^2)^3}}<0\ \forall c\in(0;1)$$

Do hàm số liên tục trên $[0; 1]$ nên $f(z)$ nghịch biến trên $[0; 1]$

Suy ra $P\le f(z)\le f(0)=\frac{1}{2}+\sqrt[4]{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}; z=0$

Vậy GTLN của P là $\frac{1}{2}+\sqrt[4]{2}$ đạt được khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}; z=0$

Bài 10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}}+\frac{25b^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16bc}}+\frac{c^2(3+a)}{a}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Hưng Đạo 2016)

Lời giải:

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2+b^2$. Nên ta sẽ có:

$$\sqrt{2a^2+7b^2+16ab} = \sqrt{2a^2+7b^2+2ab+14ab}$$
$$\leq \sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq \frac{4a+6b}{2} = 2a+3b$$

Vậy ta sẽ có:

$$\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2+7b^2+16ab}} \geq \frac{25a^2}{2a+3b} \quad (1)$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{25a^2}{\sqrt{2b^2+7c^2+16cb}} \geq \frac{25a^2}{2a+3b} \quad (2)$$

Mặt khác theo Cauchy-shwarz ta có:

$$\frac{3c^2}{a}+2c = c^2\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{c}\right) \geq \frac{25c^2}{3a+2c} \ (3)$$

Từ (1); (2);(3) ta sẽ có:

$$P \geq 25\left(\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\right)+c^2-2c$$
$$\geq 25.\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}+c^2-2c = 5(a+b+c)+c^2-2c$$

Mà $a+b+c=3$ theo giả thiết nên ta sẽ có: $P \geq c^2-2c+15 = (c-1)^2+14 \geq 14$

Vậy GTNN của P=14

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 11: Cho 3 số thực x, y, z thuộc $[1;4]$ thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm GTNN của

$$T = \frac{z}{8(x^2+y^2)}+\frac{x^2+y^2-1}{xyz}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

Lời giải:

Ta có:

$$T = \frac{z}{8(x^2+y^2)}+\frac{x^2+y^2-1}{xyz} = \frac{z}{8(x^2+y^2)}+\frac{x^2+y^2}{xyz}-\frac{1}{xyz}$$

Với xyz thuộc $[1;4]$ thỏa mãn $x+y+z=6$ ta có:

$$\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$$
$$(x-1)(y-1) = xy-x-y+1 > 0$$
$$\Rightarrow xy \geq x+y-1 = 5-z \Rightarrow -\frac{1}{xyz} \geq -\frac{1}{(5-z)z}$$
$$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy \leq (6-z)^2-2(5-z) = z^2-10z+26$$
$$\Rightarrow T \geq \frac{z}{8(z^2-10z+26)}+\frac{2}{z}-\frac{1}{z(5-z)}$$

Xét hiệu $\left[\frac{z}{8(z^2-10z+26)}+\frac{2}{z}-\frac{1}{z(5-z)}\right]-\frac{1}{2} = \frac{(z-4)^2(4z^2-45z+117)}{8z(5-z)(z^2-10z+26)} \geq 0$ với mọi z thuộc $[1;4]$

Do đó $T \geq \frac{1}{2}$. Với $x=y=1; z=4 \Rightarrow T = \frac{1}{2}$

Vậy GTNN của T là $\frac{1}{2}$

Bài 12: Cho x, y, z dương thỏa mãn:

$$\frac{2}{3x+2y+z+1}+\frac{2}{3x+2z+y+1}=(x+y)(x+z)$$

Tìm GTLN của:

$$P=\frac{2(x+3)^2+y^2+z^2-16}{2x^2+y^2+z^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lý Thái Tổ 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$$(x+y)(x+z)\le\frac{(x+y+x+z)^2}{4}=\frac{(2x+y+z)^2}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{3x+2y+z+1}+\frac{1}{3x+2z+y+1}\right)\ge\frac{8}{3(2x+y+z)+2}$$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{8}{2(2x+y+z)+2}\le\frac{(2x+y+z)^2}{4}$$

Đặt: $2x+y+z=t(t>0)$

$$\Rightarrow\frac{8}{3t+2}\le\frac{t^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow(t-2)(3t^2+8t+16)\ge0$$

$$\Leftrightarrow t\ge2\Rightarrow 2x+y+z\ge2$$

Mà:

$$4\le(2x+y+z)^2\le(2^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge\frac{2}{3}$$

Ta có:

$$P=\frac{2x^2+y^2+z^2+12x+2}{2x^2+y^2+z^2}=1+\frac{12x+2}{x^2+x^2+y^2+z^2}$$

$$\le1+\frac{12x+2}{x^2+\frac{2}{3}}=1+\frac{36x+6}{3x^2+2}$$

Xét hàm số:

$$f(x)=1+\frac{36x+6}{3x^2+2};x>0$$

Ta có:

$$f'(x)=-\frac{36(3x^2+x-2)}{(3x^2+2)^2};f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\text{ (loại)}\\ x=\frac{2}{3}\text{ nên }f\left(\frac{2}{3}\right)=10\end{array}\right.$$

BBT

X	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'	+	0	-
Y	2 ↗	10	↘ 1

$$\Rightarrow f(x)\le10\Rightarrow P\le10$$

Vậy GTLN của P là 10. Dấu " = " xảy ra khi $x=\frac{2}{3};y=z=\frac{1}{3}$

Ngày số 26

Bất đẳng thức ba biến (tiết 4)

Bình luận: Bất đẳng thức ba biến không đối xứng.

Bài 1: Cho các số thực dương x, y, z. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{9}{7x + y + 4\sqrt{xy} + 18\sqrt[3]{xyz}} + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + 2$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lương Tài 2016)

Ý tưởng bài toán:

Đây là bài quen thuộc, ý tưởng của bài toán là đưa đại lượng $7x + y + 4\sqrt{xy} + 18\sqrt[3]{xyz}$ về đại lượng $(x + y + z)$ bằng phương pháp cân bằng hệ số trong bất đẳng thức Cauchy:

$$4\sqrt{xy} = 4.\sqrt{(ax)\left(\frac{1}{a}y\right)} \le 2.\left(ax + \frac{1}{a}.y\right)$$

$$18.\sqrt[3]{xyz} = \frac{18}{\sqrt[3]{b}}.\sqrt[3]{(ax).\left(\frac{1}{a}y\right).bz} \le \frac{6}{\sqrt[3]{b}}.\left(ax + \frac{1}{a}.y + bz\right)$$

Cộng vào ta suy ra:

$$7x + y + 4\sqrt{xy} + 18\sqrt[3]{xyz} \le \left(7 + 2a + \frac{6a}{\sqrt[3]{b}}\right).x + \left(1 + \frac{2}{a} + \frac{6}{a\sqrt[3]{b}}\right).y + 6\sqrt[3]{b^2}.z$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } ax = \frac{1}{a}y = bz$$

Để đưa được về tổng x + y + z ta phải có:

$$7 + 2a + \frac{6a}{\sqrt[3]{b}} = 1 + \frac{2}{a} + \frac{6}{a\sqrt[3]{b}} = 6\sqrt[3]{b^2}$$

Thông thường hệ như này có nghiệm đẹp. Và ta nhẩm ra nhanh:

$$a = \frac{1}{2}; b = \frac{9}{2}$$

Dấu "=" này sẽ làm cho biến x + y + z không bị lệ thuộc điều kiện gì.

Do đó, ta có lời giải:

Lời giải chi tiết:

Ta có: $4\sqrt{xy} = 2\sqrt{x.4y} \le x + 4y$; $18\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{x.4y.9z} \le x + 4y + 9z$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 4y = 9z$

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{x + y + z} + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 + 2$$

Đặt $t = x + y + z; t > 0$ xét hàm:

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + 2; t > 0$$

Lập bảng biến thiên tìm được:

$$\min f(t) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $\min P = \frac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x = \frac{26}{49}; y = \frac{9}{49}; z = \frac{4}{49}$.

Bài 2: Cho x, y, z là số thực dương sao cho $x+y+z \ge 2; x^2+y^2+2z^2=4$. Tìm GTLN của;

$$P=\frac{1}{(z+y+z)^2}-\frac{2}{2x+y+\sqrt{8yz}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Cù Huy Cận 2016)

Ý tưởng giải:

Rõ ràng, giả thiết cho $x+y+z \ge 2$ và trong P cũng có $x+y+z$ nên có thể ý tưởng của bài toán là đưa các đại lượng về tổng $x+y+z$. Khi đó, ta nhận xét:

$$\left(x^2+y^2+\left(z\sqrt{2}\right)^2\right).\left(1^2+1^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right) \ge (x+y+z)^2$$

Và cũng cân bằng hệ số như bài 1 thì:

$$2x+y+\sqrt{8yz} \le (2x+y)+(y+2z)=2(x+y+z)$$

May mắn bài toán này ta có thể khẳng định bài toán giải theo cách này là bởi vì dấu "=" của hai bất đẳng thức trên:

$$x=y=2z$$

Dấu "=" này sẽ làm cho bất đẳng thức biến $x+y+z$ không bị lệ thuộc điều kiện gì.

Do đó, ta có lời giải chi tiết:

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$4=x^2+y^2+2z^2=\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{\frac{1}{2}} \ge \frac{(x+y+z)^2}{1+1+\frac{1}{2}}=\frac{(x+y+z)^2}{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{4.5}{2} \ge (x+y+z)^2 \Rightarrow (x+y+z)^2 \le 10$$

$$\Rightarrow x+y+z \le \sqrt{10}$$

Đặt $x+y+z=t \Rightarrow 2 \le t \le \sqrt{10}$

Ta có:

$2x+y+\sqrt{8yz}=2x+y+2\sqrt{y.2z} \le 2x+y+y+2z=2x+2y+2z$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2x+y+\sqrt{8yz}} \ge \dfrac{1}{2x+2y+2z}$

$\Rightarrow -\dfrac{2}{2x+y+\sqrt{8yz}} \le -\dfrac{2}{2x+2y+2z}=-\dfrac{1}{x+y+z}$

$\Rightarrow P \le \dfrac{1}{(x+y+z)^2}-\dfrac{1}{x+y+z}$

Xét hàm số: $f(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}; t \in \left[2;\sqrt{10}\right] \Rightarrow f'(t)=\dfrac{t-2}{t^3} \ge 0$ với mọi t thuộc $\left[2;\sqrt{10}\right]$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\left[2;\sqrt{10}\right]$

$$\Rightarrow f(t) \le f\left(\sqrt{10}\right)=\frac{1-\sqrt{10}}{10}$$

Vậy $\mathrm{Max}P=\dfrac{1-\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=2z \\ x^2+y^2+2z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \\ z=\dfrac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$.

Bài 3: Cho a, b, c là 3 số thực không âm sao cho $a^2+b^2+c^2=2$. Tìm GTLN của:

$$P=\frac{a^2}{a^2+bc+a+1}+\frac{b+c}{a+b+c+1}-\frac{1+bc}{9}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Nghèn 2016)

Nhận xét: *Đây chính là đề thi đại học năm 2015 và đã được giải thích rất rõ ràng trong cuốn* ***Công phá bất đẳng thức*** *nên giờ anh chỉ đưa ra lời giải.*

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$a(b+c) \le \frac{a^2+(b+c)^2}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+2bc}{2} = 1+bc$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2bc+2a(b+c) = 2(1+bc)+2a(b+c)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \le 2(1+bc)+2(1+bc) \Rightarrow 1+bc \ge \frac{(a+b+c)^2}{4}$$

Do đó:

$$\begin{cases} a(b+c) \le 1+bc \\ 1+bc \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{4} \end{cases}$$

Vậy

$$P \le \frac{a^2}{a^2+a+a(b+c)} + \frac{b+c}{a+b+c+1} - \frac{\frac{(a+b+c)^2}{4}}{9}$$

$$P \le \frac{a^2}{a^2+a+a(b+c)} + \frac{b+c}{a+b+c+1} - \frac{(a+b+c)^2}{36}$$

$$\le \frac{a}{a+b+c+1} + \frac{b+c}{a+b+c+1} - \frac{(a+b+c)^2}{36}$$

$$\le \frac{a+b+c}{a+b+c+1} - \frac{(a+b+c)^2}{36}$$

Đặt $t = a+b+c; 0 \le t \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = \sqrt{6}$

$$f(t) = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36}; f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{t}{18};$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t(t+1)^2 = 18 \Leftrightarrow t = 2 \text{ thuộc } [0;\sqrt{6}]$$

t	0		2		$\sqrt{6}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{5}{9}$	$\nearrow$	

$$P \le \frac{5}{9} \Rightarrow \text{Max } P = \frac{5}{9}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=2 \\ a=b+c \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1; c=0 \\ a=c=1; b=0 \end{array}\right.$

Bài 4: Cho x, y, z là số thực dương $x+y+z^2 = xy+5$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{2x}{x^2+y^2+18} + \frac{y}{x+y+4z} - \frac{4(x+y)}{25z}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Thanh Chương I 2016)

Ý tưởng:

Nếu nhìn qua thì bài toán này rất khó. Nhưng thực chất nó có hình thức giống như bài thi đại học 2015. Do đó, ý tưởng là chứng minh:

$$x^2+y^2+18 \ge k(x+y+4z)$$

Và rõ ràng, để thuận tiện thì ta phải chọn $k=2$ để khi đó có:

$$\frac{2x}{x^2+y^2+18} + \frac{y}{x+y+4z} \le \frac{2x}{2(x+y+4z)} + \frac{y}{x+y+4z} = \frac{x+y}{x+y+4z}$$

Như vậy ta thử xét tính đúng sai của bất đẳng thức:

$$x^2+y^2+18 \ge 2(x+y+4z) \ (*)$$

Với giả thiết: $x + y + z^2 = xy + 5$.

Nhìn qua ta có thể thấy ngay cần thay: $2(x + y) = 2xy + 10 - 2z^2$. Khi đó, để có hằng đẳng thức $(x^2 + y^2 - 2xy)$.

$$(*) \leftrightarrow x^2 + y^2 + 18 \geq 2xy + 10 - 2z^2 + 4z$$
$$\leftrightarrow (x - y)^2 + 2(z - 2)^2 \geq 0$$

Như vậy bất đẳng thức $(*)$ là đúng và dấu "=" xảy ra khi: $x = y; z = 2$. Khi đó, biến mới:

$$t = \frac{z}{x + y}$$

sẽ không bị phụ thuộc vào điều kiện gì. Do đó, ta có lời giải chi tiết:

Lời giải chi tiết:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy = 2(x + y + z^2 - 5)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10 \geq 2(x + y + z^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 18 \geq 2(x + y) + 2(z^2 + 4) \geq 2(x + y) + 8z = 2(x + y + 4z)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{2x}{x^2 + y^2 + 18} \leq \frac{2x}{2(x + y + 4z)} = \frac{x}{x + y + 4z}$$

Khi đó ta có:

$$P \leq \frac{x}{x + y + 4z} + \frac{y}{x + y + 4z} - \frac{4(x + y)}{25z} = \frac{x + y}{x + y + 4z} - \frac{4(x + y)}{25z}$$
$$= \frac{\frac{x + y}{z}}{\frac{x + y}{z} + 4} - \frac{4(x + y)}{25z} = f(t) = \frac{t}{t + 4} - \frac{4t}{25}$$

Với $t = \frac{x + y}{z} > 0$ xét $f(t) = \frac{t}{t + 4} - \frac{4t}{25}$ ta có:

$$f'(t) = \frac{4}{(t + 4)^2} - \frac{4}{25}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t + 4)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó suy ra $f(t) \leq f(1) = \frac{1}{25} \Rightarrow Pmax = \frac{1}{25}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y = z; x = y \\ x + y + z^2 = xy + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy GTLN của P là $\frac{1}{25}$.

Bài 5: Cho các số thực dương: $a \in [0; 1]; b \in [0; 2]; c \in [0; 3]$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8 - b}{b + c + b(a + c) + 8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2 + 8}}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Anh Sơn II 2016)

Ý tưởng:

Bài toán này thực sự rất khó. Để giải quyết thì ý tưởng ở đây là đưa về một biến trong các biến trên. Cũng cùng có một hướng đi với bài 3 và 4. Hai biểu thức sau có $(8 - b)$ và b đồng thời dưới mẫu có số 8. Nên ý tưởng sẽ là:

$$P \leq \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8 - b}{x} + \frac{b}{x} = \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2a + b + 3c} + \frac{8}{x}$$

Như vậy, đại lượng x sẽ biểu diễn về biến ở mẫu hoặc tử số của biểu thức đầu.

Rõ ràng khi có hai số bằng 0 thì tử số bằng 0 còn mẫu số vẫn dương, nên biến chúng ta cần đưa về nhiều khả năng là: $t = 2ab + ac + bc$. Như vậy ta cần chứng minh:

$$2a + b + 3c \geq m(2ab + bc + ac) + n$$
$$b + c + b(a + c) \geq k(2ab + ac + bc) + h$$
$$\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} \geq k(2ab + ac + bc) + h$$

Có khó để tìm các hệ số???? Ở đây ta chú ý hơn cả là hai bất đẳng thức đầu (vì nó đơn giản):

Ta coi lần lượt hai bất đẳng thức đầu là một biến (hai cái còn lại là hằng số). Thì ta dẫn tới các hệ số gì?

$$a \to \begin{cases} 2 - m(2b + c) \\ b - k(2b + c) \end{cases}; b \to \begin{cases} 1 - m(2a + c) \\ 1 + a - k(2a + c) \end{cases}; c \to \begin{cases} 3 - m(a + b) \\ 1 + b - k(a + b) \end{cases}$$

Với giả thiết $a \in [0;1]; b \in [0;2]; c \in [0;3]$ thì ta nhận thấy với tính chất biên thì ta sẽ chỉ ra ba trường hợp:

$$a \to \begin{cases} m = \frac{2}{7} \\ k = \frac{2}{7} \end{cases}; b \to \begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ k = \frac{2}{5} \end{cases}; c \to \begin{cases} m = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Như vậy ta cần thử từ cao nhất đến thấp nhất để cho bất đẳng thức được chặt nhất có thể tức là $m = k = 1$.

$$2a + b + 3c \ge (2ab + bc + ac) + n$$
$$b + c + b(a + c) \ge (2ab + ac + bc) + h$$

Khi đó; ta có:

$$2a + b + 3c = 2.a + 1.b + (2 + 1).c \ge b.a + a.b + (b + a).c = 2ab + bc + ac$$

Như vậy chọn $n = 0$, ta được bất đẳng thức: $2a + b + 3c \ge 2ab + bc + ac$. Dấu "=" xảy ra khi: $a = 1; b = 2$.

Tiếp tục: $b + c + b(a + c) \ge (2ab + ac + bc) + h \leftrightarrow b + c \ge ab + ac + h$

Dùng: $b + c = 1.(b + c) \ge a(b + c) = ab + ac$. Như vậy ta chọn $h = 0$, ta được bất đẳng thức: $b + c + b(a + c) \ge 2ab + ac + bc$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 1$.

Để chắc chắn ta cần chứng minh:

$$\sqrt{12a^2 + 3b^2 + 27c^2} \ge (2ab + ac + bc)$$
$$\leftrightarrow 12a^2 + 3b^2 + 27c^2 \ge 4a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(2a + 2b + c)$$

Do hai bất đẳng thức trên có dấu "=" tại $a = 1; b = 2$. Nên bất đẳng thức này, ta sẽ đưa về biến c để tối ưu.

$$(27 - a^2 - b^2 - 2ab).c^2 - 4ab(a + b)c + 12a^2 + 3b^2 - 4a^2b^2 \ge 0$$

Anh sẽ đưa về hai biến tích ab và c. Ta sẽ dùng: $a + b \le 3; a^2 \le 1; b^2 \le 4$ thì sẽ có:

$$(27 - (a + b)^2).c^2 - 4ab.(a + b).c + 3.a^2.4 + 3.1.b^2 - 4a^2b^2$$
$$\ge 18.c^2 - 12ab.c + 3a^2b^2 + 3a^2b^2 - 4a^2b^2 = 2(3c - ab)^2 \ge 0$$

Rõ ràng, bất đẳng thức ba cần chứng minh là đúng. Dấu "=" xảy ra khi: $3c = ab$.

Như vậy, điều chúng ta mong muốn cuối cùng là bất đẳng thức với biến $t = 2ab + ac + bc$ có dấu "=" xảy ra khi: $a = 1; b = 2; 3c = ab$ hay tức là có dấu "=" xảy ra khi $t = 6$. Cũng rất may điều này đã xảy ra. Ta có lời giải sau:

Lời giải chi tiết:

Ta có: $a \in [0;1]; b \in [0;2]; c \in [0;3]$

$$\Rightarrow P \le \frac{2(2ab + ac + bc)}{1 + 2ab + bc + ac} + \frac{8}{2ab + bc + ac + 8}$$

Đặt $t = 2ab + bc + ac$ với $t \in [0;13]$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t + 1} + \frac{8}{t + 8}; t \in [0;13]$ ta có:

$$f'(t) = \frac{2}{(t + 1)^2} - \frac{8}{(t + 8)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

Tính $f(t) = 1; f(6) = \frac{16}{7}; f(13) = \frac{47}{21}$ nên $f(t) \le \frac{16}{7} \forall t \in [0;13]$ và $f(t) = \frac{16}{7}$ khi $t = 6$.

Do đó $P \le \frac{16}{7}$ khi $a = 1; b = 2; c = \frac{2}{3}$ thì $P = \frac{16}{7}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{16}{7}$.

Bài 6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 17(a + b + c) - 2ab$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = a + b + c + 243\left(\frac{3}{\sqrt{2a + 67}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b + c}}\right)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Hùng Vương 2016)

Nhận xét: *Bài này có hình thức giống bài toán thi thử đại học Vinh năm 2015. Tư tưởng chính của bài toán là cân bằng hệ số trong bất đẳng thức Cauchy và đưa về biến $t = a + b + c$ (xuất hiện trong cả giả thiết và kết luận).*

Lời giải chi tiết:

Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 17(a + b + c) - 2ab$$
$$\Leftrightarrow (a + b)^2 + c^2 = 17(a + b + c)$$
$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 \le 2[(a + b)^2 + c^2]$$
$$[(a + b)^2 + b^2] \ge \frac{1}{2}(a + b + c)^2$$
$$\Leftrightarrow 17(a + b + c) \ge \frac{1}{2}(a + b + c)^2$$
$$0 < a + b + c \le 34$$

Áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$(2a + 67) + 81 \ge 2\sqrt{(2a + 67).81}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2a + 67}} \ge \frac{9}{a + 74} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2a + 67}} \ge \frac{27}{a + 74}$$

Áp dụng BĐT Cô si:

$$(a + c) + 27 + 27 \ge 3\sqrt[3]{(b + c).27.27} = 27.\sqrt[3]{b + c} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{b + c}} \ge \frac{27}{b + c + 54}$$
$$\frac{3}{\sqrt{2a + 67}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b + c}} \ge \frac{27}{a + 74} + \frac{27}{b + C + 54} \ge \frac{27.4}{a + b + c + 128}$$
$$P \ge a + b + c + \frac{234.27.4}{a + b + c + 128} = t + \frac{162^2}{t + 128}; 0 < t = a + b + c \le 34$$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{162^2}{t + 128}; t \in (0; 34]$;

$$f'(t) = 1 - \frac{162^2}{(t + 128)^2} = \frac{(t - 34)(t + 290)}{(t + 128)^2}$$
$$f'(t) = 1 - \frac{162^2}{(t + 128)^2} = \frac{(t - 34)(t + 290)}{(t + 128)^2} \le 0\ \forall t \in (0; 34]$$

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0; 34]$ nên $f(t)$ đạt GTNN bằng 196 khi $t = 34$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a + b + c = 34 \\ a + b = c \\ b + c = 27 \\ a + 74 = b + c + 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 10 \\ c = 17 \end{cases}$

Vậy Min P=196 khi $a = 7; b = 10; c = 17$

Bài 7: Cho $x, y, z > 0$ sao cho $a + 2b > c; a^2 + b^2 + c^2 - 2 = ab + bc + ca$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{a + b + c + 2}{a(b + c) + a + b + 1} - \frac{a + b + 1}{(a + c)(a + 2b - c)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hùng Vương 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $2 + ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 \ge a^2 + 2bc$

$\Rightarrow 2(ab + ca + 1) \ge a^2 + ab + bc + ca$

$\Rightarrow 2(ab + ac + 1) \ge (a + b)(a + c)$

$\Rightarrow a(b + c) + a + b + 1 \ge \frac{(a + b)(a + c + 2)}{2}$

$\Rightarrow \frac{a + b + 2}{a(b + c) + a + b + 1} \le \frac{2}{a + b}$

$$(a + c)(a + 2b - c) \le \frac{1}{4}(a + c + a + 2b - c)^2 = (a + b)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+1}{(a+c)(a+2b-c)} \ge \frac{a+b+1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{(a+b)^2}$$

Khi đó $P \le \frac{2}{a+b} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{(a+b)^2}; t = \frac{1}{a+b} > 0$

Xét hàm $f(t) = t - t^2; t > 0; f'(t) = 1 - 2t; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy Max $p = \frac{1}{4}$ khi $a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, b = c = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Bài 8: Cho a, b, c là số thực dương. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{1}{4a + 2b + 4\sqrt{2bc}} - \frac{4}{8 + a + 2b + 3c} + \frac{1}{4 + b + 2c}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Như Xuân 2016)

Nhận xét: *Mặc dù không đối xứng nhưng chúng ta có thể lưu ý, số $\sqrt{2}$ xuất hiện ở mẫu số một. Còn mẫu số hai thì có:*

$$a + 2b + 3c = b + 2c + (a + b + c)$$

Do đó, có ý tưởng giải quyết bài toán.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $2\sqrt{2bc} \le b + 2c$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a + 2b + 4\sqrt{2bc}} \ge \frac{2}{4a + 4b + 4c}; -\frac{4}{8 + a + 2b + 3c} \ge -\frac{1}{4 + a + b + c} + \frac{-1}{4 + (a + b + 2c)}$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{4(a+b+c)} - \frac{1}{4 + (a+b+c)}$$

Đặt $t = a + b + c; t > 0$

Xét $f(t) = \frac{1}{4t} - \frac{1}{4+t}; t > 0; f'(t) = -\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{(t+4)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

t	0		4		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$	

GTNN của P là $-\frac{1}{16}$ khi $\begin{cases} b = 2c \\ a + b + c = b + 2c \\ a + b + c = 4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = c = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Bài 9: Cho a, b, c là số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a + 3c}{a + 2b + c} + \frac{4b}{a + b + 2c} - \frac{8c}{a + b + 3c}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hậu Lộc 2 2016)

Nhận xét: *Bài toán này có tư tưởng và hình thức giống một bài toán trong phần đổi biến bất đẳng thức Cauchy của cuốn Công phá bất đẳng thức. Các em tự tìm hiểu.*

Lời giải chi tiết:

Đặt $\begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = a + b + 2c \\ z = a + b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + 5y - 3c \\ b = x - 2y + z \\ c = -y + z \end{cases}$

Do đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{-x + 2y}{x} + \frac{4x - 8y + 4z}{y} - \frac{-8y + 8z}{z} = \left(\frac{4x}{y} + \frac{2y}{x}\right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y}\right) - 17$$

$$P \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z}.\frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = \left(1 + \sqrt{2}\right)a$; $c = \left(4 + 3\sqrt{2}\right)a$

Vậy GTNN của P là $12\sqrt{2} - 17$

Ngày số 27

Tổng ôn bất đẳng thức

Bài 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(bc+1)^2 + a^2 = 2(1+a) + bc$. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{a+1+a^2c}{a^2bc} + \frac{4}{(1+c)^2} - \frac{12\sqrt{a}}{a^2+1}$$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có: $(bc+1)^2 + a^2 = 2(1+a) + bc$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + bc = 1 + 2a - a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + bc = 1 + 2a - a^2 = 2 - (a-1)^2 \le 2$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + bc - 2 \le 0 \Rightarrow bc \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} \ge c$$

Ta có:

$$P = \frac{a+1}{a^2bc} + \frac{1}{b} + \frac{4}{(1+c)^2} - \frac{12\sqrt{a}}{a^2+1}$$

Do $bc \le 1 \Rightarrow \frac{a+1}{a^2bc} \ge \frac{a+1}{a^2}$

Vì $\frac{1}{b} \ge c \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{4}{(1+c)62} \ge c + \frac{4}{(1+c)^2}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{c+1}{2} + \frac{c+1}{2} + \frac{4}{(1+c)^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{c+1}{2}.\frac{c+1}{2}.\frac{4}{(1+c)^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow c + \frac{4}{(1+c)^2} \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{4}{(1+c)^2} \ge 2$$

Do đó:

$$P \ge \frac{a+1}{a^2} + 2 - \frac{12\sqrt{a}}{a^2+1} \ge \frac{a+1}{a^2} + 2 - \frac{12\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{6}{\sqrt{a}} + 2$$

Đặt $t = \frac{1}{\sqrt{a}}$ $(t > 0) \Rightarrow P \ge t^4 + t^2 - 6t + 2 = f(t)$

Xét $f(t) = t^4 + t^2 - 6t + 2$ trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên:

t	0		1		+∞
f'(t)		-	0	+	
f(t)		↘	-2	↗	

$P \ge f(t) \ge -2\ \forall t \in (0; +\infty)$

Vậy GTNN của P bằng -2 khi và chỉ khi $\begin{cases} t = 1 \\ bc = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 2: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0; a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm GTLN của $F = a^2b^2c^2$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Kim Liên 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases} b + c = -a \\ bc = a^2 - 3 \end{cases}$

Hệ có nghiệm khi $a^2 \ge 4(a^2 - 3) \Leftrightarrow a^2 \le 4 \Rightarrow 0 \le a^2 \le 4$

$$F = a^2b^2c^2 = a^2(a^2-3)^2 = t^3 - 6t^2 + 9t; t = a^2$$

$$F'_t = 3t^2 - 12t + 9; F'_t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t = 1 \text{ thuộc } [0;4] \\ t = 3 \text{ thuộc } [0;4] \end{matrix}\right.$$

$F(0) = F(3) = 0; F(1) = F(4) = 4 \Rightarrow \max F = 4$ khi $(a, b, c) = (2; -1; -1)$ hoặc các hoán vị hoặc $(a, b, c) = (-2; 1; 1)$ hoặc các hoán vị.

Bài 3: Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn [0;1]. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lê Lợi 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Đặt $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z$. Ta có:

$$f'(x) = 6x^2 - 2yz - z^2; f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{6}\left(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}\right); x = x_2 = \frac{1}{6}\left(y + \sqrt{y^2 + 6z^2}\right)$$

Nhận xét: x_1 không thuộc (0; 1), lập bảng biến thiên ta thấy khi x_2 thuôc (0; 1) hay x_2 không thuộc (0; 1) thì $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = \max\{f(0); f(1)\}$

Mà $f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \le 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$

$$\Rightarrow f(x) \le f(1) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2 \ (1)$$

Lại đặt $g(y) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2$ (1)

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1; g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1 = \frac{1}{6}\left(z - \sqrt{z^2 + 6}\right); y = y_2 = \frac{1}{6}\left(z + \sqrt{z^2 + 6}\right)$$

Nhận xét tương tự suy ra $\text{Max}_{y\in[0;1]}g(y) = \text{Max}\{g(0); g(1)\}$

Lại có: $g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \le 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1)$

$$\Rightarrow g(y) \le g(1) = 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \quad (2)$$

Cuối cùng đặt $h(z) = 2z^3 - z^2 - z + 3$ với $z \in [0; 1]$; $h'(z) = 6z^2 - 2z - 1$;

$$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6}; z_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$$

Lập BBT suy ra $\text{Max}_{(x\in[0;1])}h(z) = h(1) = 3$ (3)

Dấu bằng xảy ra ở (1);(2);(3) khi $x = y = z = 1$. Vậy GTLN của P là 3 đạt được khi $x = y = z = 1$

Bài 4:

Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 8xyz + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Ngô Sĩ Liên 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{zy} + \frac{1}{xz} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}};\ t = \sqrt[3]{xyz} > 0$$

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < t \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P \ge 8t^3 + \frac{3}{t^2}$$

Xét hàm số $f(t) = 8t^3 + \frac{3}{t^2}$

$$f'(t) = 24t^2 - \frac{6}{t^3}; f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$$

Ta có bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$
f'(t)	||	-	0
f(t)		13	

Từ bảng ta có: $f(t) \ge 13$ với mọi giá trị t thỏa mãn $0 < t \le \frac{1}{2}$

Suy ra $P \ge 13$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{1}{2}$ hay $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Bài 5: Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xy \geq 1; z \geq 1$. Tìm GTNN của:
$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{z^3+2}{3(xy+1)}$$

Phân tích và hướng dẫn giải:
Trước hết ta phương trình kết quả sau:
Với $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \geq 1$ ta có:
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \ (1)$$
Thật vậy $(1) \Leftrightarrow (x+y+2)(1+\sqrt{xy}) \geq 2(xy+x+y)$
$$\Leftrightarrow (x+y)\sqrt{xy} + x + y + 2\sqrt{xy} + 2 \geq 2xy + 2(x+y) + 2$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(\sqrt{xy}-1) \geq 2\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-1)$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy}-1)(x+y-2\sqrt{xy}) \geq 0$$
Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $z^3 + 2 = z^3 + 1 + 1 \geq 3z \geq 3$
$$\Rightarrow P \geq \frac{x}{y+1} + 1 + \frac{y}{x+1} + 1 + \frac{1}{xy+1} - 2$$
$$= (x+y+1)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right) + \frac{1}{xy+1} - 2$$
$$\geq (2\sqrt{xy}+1).\frac{2}{1+\sqrt{xy}} + \frac{1}{xy+1} - 2 \ (\text{do } (1))$$
Đặt $t = \sqrt{xy}; t \geq 1$ ta được:
$$P \geq P(t) = (2t+1).\frac{2}{t+1} + \frac{1}{t^2+1} - 2 = \frac{2t}{t+1} + \frac{1}{t^2+1}$$
Ta có:
$$P'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(t+1)^2(t^2+1)^2} \geq 0 \ \forall t \geq 1$$
$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow P(t) \geq P(1) = \frac{3}{2}$ với mọi $t \geq 1 \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$

Vậy $P\min = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 6: Cho các số dương x; y; z thỏa mãn $x > y$; $(x+z)(y+z) = 1$. Tìm GTNN của:
$$P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{4}{(x+z)^2} + \frac{4}{(y+z)^2}$$
(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lương Ngọc Quyến – 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải: **(giống bài 2 ngày 27)**
Đặt $x + z = a$. Từ giả thiết
$$(x+z)(y+z) = 1 \Rightarrow y + z = \frac{1}{a}$$
Vì $x > y \Rightarrow x + z > y + z \Rightarrow a = x + z > 1$
Ta có:
$$x - y = x + z - (y + z) = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2-1}{a}$$
Thay vào P ta được:
$$P = \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + \frac{4}{a^2} + 4a^2 = \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + 3a^2 + a^2 + \frac{4}{a^2}$$
Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:
$$P \geq \frac{a^2}{(a^2-1)^2} + 3a^2 + 4$$
Xét hàm số:
$$f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} + 3t + 4; t = a^2 > 1$$
$$f'(t) = \frac{-t-1}{(t-1)^3} + 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$
Vẽ bảng biến thiên ta có: $f(t) \geq 12$ với mọi $t > 1$ hay $\min\limits_{(1;+\infty)} f(t) = 12 \Leftrightarrow t = 2$

Vậy P min =12 khi và chỉ khi :

$$x+y=\sqrt{2}; y+z=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài 7: Cho 3 số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=1$. Tìm GTLN và GTNN của:

$$T=2\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Bắc Ninh 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Giá trị nhỏ nhất:

Với mọi $y, z \geq 0$ ta có: $\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2} \geq \sqrt{4+(y+z)^2}$ (*)

Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow 1+y^2+1+z^2+2\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} \geq 4+y^2+z^2+2yz$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2+z^2+y^2z^2} \geq 1+yz$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2+z^2+y^2z^2 \geq 1+2yz+y^2z^2 \Leftrightarrow (y-z)^2 \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) với $y+z=1-x$ ta có:

$$T \geq 2\sqrt{1+x}+\sqrt{4+(1-x)^2}=2\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2-2x+5}$$

Vì $x, y, z \geq 0$ và $x+y+1=1$ nên $x \in [0;1]$

Xét hàm $f(x)=2\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2-2x+5}\ \forall x \in [0;1]$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

Vì $x \in [0;1]$ nên

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \leq 1-x \leq 1; \sqrt{x^2-2x+5} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \geq f(0)=2+\sqrt{5}\forall x \in [0;1] \Rightarrow T \geq 2+\sqrt{5}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=0 \\ y=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=0 \\ y=z=\frac{1}{2} \end{cases}$

Giá trị lớn nhất:

Vì $y; z \in [0;1] \Rightarrow y^2 \leq y; z^2 \leq z \Rightarrow T \leq 2\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho 2 bộ số:

$$1.\sqrt{1+y}+1.\sqrt{1+z} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(1+y+1+z)}$$

$$\Rightarrow T \leq 2\sqrt{1+x}+\sqrt{2(2+y+z)}=2\sqrt{1+x}+\sqrt{2(3-x)}$$

Xét hàm số: $g(x)=2\sqrt{1+x}+\sqrt{2(3-x)}$ trên $[0;1]$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{2(3-x)}}; x \in [0;1] \Rightarrow 3x<5 \Rightarrow 1+x<2(3-x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2(3-x)}}$$

$$\Rightarrow g'(x)>0\forall x \in [0;1] \Rightarrow g(x) \leq g(1)=2\sqrt{2}+2 \Rightarrow T \leq 2\sqrt{2}+2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1; y=z=0$

Vậy GTNN của T là $2+\sqrt{5}$; GTLN của T là $2\sqrt{2}+2$

Bài 8: Cho số thực dương x, y, z sao cho $5(4x^2+y^2+z^2)=18(xy+yz+xz)$

Tìm GTLN của:

$$P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{2}{(2x+y+z)^3}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Trần Phú 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có:

$$5(4x^2+y^2+z^2)=18(xy+yz+xz)$$

$$\Leftrightarrow 5(2x+y+z)^2=18(xy+yz+xz)+10(2xy+yz+2xz)$$

$$\Leftrightarrow 5(2x+y+z)^2 = 38x(y+z) + 28yz \le 38x(y+z) + 7(y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{2x}{y+z}+1\right)^2 \le \frac{38x}{y+z} + 7 \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} \le 1$$

$$\Leftrightarrow x \le y+z \text{ (do } y+z>0)$$

Mặt khác ta có:

$$(y+z)^2 \le 2(y^2+z^2) \Leftrightarrow y^2+z^2 \ge \frac{1}{2}(y+z)^2$$

Đặt $t = y + z > 0$

$$\Rightarrow P \le \frac{y+z}{\frac{1}{2}(y+z)^2} - \frac{2}{(2(y+z)+y+z)^3} = \frac{2}{y+z} - \frac{2}{27(y+z)^3} = \frac{2}{t} - \frac{2}{27t^3}$$

Xét $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{2}{27t^3}; t > 0$. Ta có: $f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{9t^4}$

Với $t > 0; f'(t) = 0 \Leftrightarrow 9t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Vẽ BBT ta có: $x = \frac{1}{3}; y = z = \frac{1}{6}$ thỏa mãn điều kiện bài toán và $P = 4$.

Vậy $\max P = 4$

Bài 9: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} + \frac{121}{14(ab+bc+ca)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Yên Mỹ 2016)

Hướng dẫn giải:

Ta có: $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1-(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

Do đó:

$$A = \frac{7}{a^2+b^2+c^2} - \frac{121}{7\big(1-(a^2+b^2+c^2)\big)}$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$

Vì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 < a < 1; 0 < b < 1; 0 < c < 1$

$$\Rightarrow t = a^2+b^2+c^2 < a+b+c = 1$$

Mặt khác $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \le 3(a^2+b^2+c^2)$

$$\Rightarrow t = a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$$

Vậy $t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{7}{t} + \frac{121}{7(1-t)}; t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$

$$f'(t) = -\frac{7}{t^2} + \frac{121}{7(1-t)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{18}$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{3}$		$\frac{7}{18}$		1
f'(t)		-	0	+	
f(t)		$\searrow$	$\frac{324}{7}$	$\nearrow$	

Suy ra $f(t) \ge \frac{324}{7}$; $\forall t \in \left[\frac{1}{3};1\right)$. Vậy $A \ge \frac{324}{7}$ với mọi a, b, c thỏa điều kiện đề bài.

Hơn nữa, với $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{18} \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ và $A = \frac{324}{7}$

Vậy $\min A = \frac{324}{7}$

Bài 10: Cho ba số thực x, y, z thay đổi thỏa mãn: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Khoái Châu 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y)$

$$\Rightarrow P = x^3 + y^3 - (x + y)^3 = 3xyz$$

Từ $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Rightarrow (x + y)^2 - 2xy + z^2 = 2$

$$\Rightarrow 2z^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = z^2 - 1$$

Vậy $P = 3z(z^2 - 1)$

Do $2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 + z^2 = \frac{3}{2}z^2$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{4}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Đặt $P = f(z) = 3z^3 - 3z$ với $z \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right] = K$

Ta có: $f'(z) = 9z^2 - 3; f'(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} z &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \in K \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}} \in K \end{aligned}\right.$$

Ta có:

$$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{4}{3}}; f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \sqrt{\frac{4}{3}}; f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}; f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Do vậy $\max P = \frac{2}{\sqrt{3}}$ khi $z = \frac{2}{\sqrt{3}}; x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 11: Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$. Tìm $P = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y^2z^2$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Nguyễn Huệ 2016)

Phân tích và hướng dẫn giải:

Giả sử $x = \min\{x, y, z\}$ suy ra $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + xz)]$$

$$= 3xyz + \frac{27}{8} = \frac{9(xy + yz + xz)}{2}$$

Ta có: $P = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y^2z^2 = x^2y^2z^2 + 3xyz + \frac{27}{8} - \frac{9}{2}(xy + yz + xz)$

$$= \left(xyz - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64} + \frac{13}{4}xyz + \frac{27}{8} - \frac{9}{2}(xy + yz + xz)$$

$$\geq \frac{215}{64} - \frac{9}{2}(xy + xz) - yz\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right)$$

Vì $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \frac{9}{2} - \frac{13}{4}x \geq 0$

$$\Rightarrow -yz\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right) \geq -\left(\frac{y + z}{2}\right)^2\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right)$$

Suy ra

$$P \ge \frac{215}{64} - \frac{9}{2}x\left(\frac{3}{2} - x\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2\left(\frac{9}{2} - \frac{13}{4}x\right); x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

Hàm số f(x) nghịch biến trên $\left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(x) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{64}$

Vậy GTLN của P bằng $\frac{25}{64}$ đạt khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Sau đây là một số bài toán luyện tập:

1. Tìm GTLN của: $P = 5^{2x} + 5^y$ biết $x \ge 0; y \ge 0$ và $x + y = 1$.

(Trích đề thi thử THPT quốc gia THPT Quỳnh Lưu 2 2016)

2. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh:

$$\frac{2a}{a+2} + \frac{3b}{b+3} + \frac{c}{c+1} \le \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6} \quad (1)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Phù Cừ 2016)

3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{1+c^2} + \frac{bc}{1+a^2} - \frac{a^3b^3 + b^3c^3}{24c^3a^3}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Hùng Vương 2016)

4. Với x, y, z là số thực đôi một phân biệt. Hãy tìm GTNN của:

$$M = \left(\frac{2x-y}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{2y-z}{y-z}\right)^2 + \left(\frac{2z-x}{z-x}\right)^2$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên KHTN 2016)

5. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^3 + z^4 \ge x^3 + y^4 + z^5$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 + z^3 \le 3$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên KHTN 2016)

6. Cho x, y, z là số thực dương thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + xz)$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Lào Cai 2016)

7. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi. Tìm GTNN của:

$$P = \frac{(a+c)(a+4b+c)(a+b+c)^3}{abc[5(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca]}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lê Quý Đôn 2016)

8. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $abc = 1; a + b \le 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$M = \frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} - \sqrt{1+c}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Phan Bội Châu 2016)

9. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $(x+y)(xy - z^2) = 3xyz$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{(z^2 + 2xy)^2 - 3z^4}{2xyz^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Phú Yên 2016)

10. Cho các số dương a, b thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTLN của:

$$P = 3(a^2b + b^2c + c^2a) - 5c^2 + 4c + 2ab$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên ĐH sư phạm Hà Nội 2016)

11. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + 2y + 3z = 1$. Tìm GTLN của:

$$P = x^2(5 - 6x) + 4y^2(5 - 12y) + z^2(45 - 162z)$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên Thái Bình 2016)

12. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 1. Tìm GTLN của:

$$T = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT chuyên Vĩnh Phúc 2016)

13. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x > 2; y > 1; z > 0$. Tìm GTLN của:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

14. Cho a, b, c là số thực dương. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hậu Lộc 2 2016)

15. Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=1$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{a^2}{(1-a)^2+5bc}+\frac{16b^2-27(a+bc)^2}{36(a+c)^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Lý Tự Trọng 2016)

16. Cho a, b, c là số thực không âm sao cho: $a^2b^2+c^2b^2+1\le 3b$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4b^2}{(1+2b)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Triệu Sơn 2016)

17. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x>2; y>1; z>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}}-\frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Hàn Thuyên 2016)

18. Cho a, b, c là số thực không âm sao cho: $a^2b^2+c^2b^2+1\le 3b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4b^2}{(1+2b)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Triệu Sơn 1 2016)

19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+ab+b^2=c(a+b+c)$. Tìm GTLN của:

$$P=\frac{(a+c)^2}{2a^2+2ac+c^2}+\frac{(b+c)^2}{2b^2+2bc+c^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{ab}{a^2+4ab+b^2}$$

(Trích đề thi thử THPT quốc gia trường THPT Chuyên KHTN 2016)

Chuyên đề IV: 3 ngày luyện đề và đưa ra những dự đoán

Ngày số 28 & 29

Một số vấn đề dự đoán trong kì thi năm nay

Vấn đề 1. Dự đoán hệ phương trình:

Trong hơn 150 đề thi thì phần ít bài tập nhất trong hệ phương trình là hệ phương trình được giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức, lý do cũng chỉ vì đây là dạng toán khó học sinh khó có thể làm được. Chính vì thế anh muốn đưa ra một số bài toán để các em tham khảo.

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x-y+4}} \quad (1) \\ x^2+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{y-2} \quad (2) \end{cases}$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $y \ge x; x-y+1 \ge 0; x \ge \frac{1}{2}; y \ge 2$

Nhận thấy phương trình đầu có biến $x-y$ là duy nhất nên ta có thể đổi biến.

Đặt $\sqrt{y-x}=a; a \ge 0 \Rightarrow -a^2 = x-y$.

Khi đó (1) trở thành:

$$\sqrt{2-a^2}+2a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4-a^2}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2-a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{4-a^2}=3\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2}=9 \quad (*)$$

Đến phương trình $(*)$ này ta có thể nhẩm ngay ra nghiệm $a=1$ thế nhưng, việc nhân liên hợp là rất khó. Ta sẽ để ý dấu bằng xảy ra và thử dùng bất đẳng thức Cauchy (vì đơn giản là đại lượng bên vế phải là tổng các tích lại có căn thức...)

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2} \le \dfrac{10-4a^2}{2} = 5-2a^2 \\ 2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2} \le 2a^2+4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2} \le 9$$

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-3a^2}=\sqrt{4-a^2} \\ a\sqrt{3}=\sqrt{4-a^2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow y-x=1 \Leftrightarrow y=x+1$$

Thay vào (2) ta được

$$x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{x-1}$$
$$\Leftrightarrow x^3+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}-2=0 \quad (3)$$

Phương trình (3) này nhìn qua thì ta có thể dùng ngay phép nhân liên hợp cũng có thể giải quyết được bài toán. Sau đây là một lời giải khác.

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} - 2$

Ta có:

$$f'(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

Mà $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (3)

Ta thấy $x = 1; y = 2$ thỏa mãn ĐK. Vậy nghiệm của hệ PT là $(x;y) = (1;2)$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)}\\ 3x^2 - x + \dfrac{1}{2} = y\sqrt{x^2+x}\end{cases}$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x > 0; y > 0$. Ta có:

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)}\\ 6x^2 - 2x + 1 = 2y\sqrt{x^2+x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)}\\ 5x^2 + (x-1)^2 = 2y\sqrt{x^2+x}\end{cases}$$

Vẫn giống như bài toán 1, ý tưởng ở đây đã khó nhìn hơn, ta phải dự đoán được dấu "=" xảy ra trước khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopski.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số:

$$\sqrt[3]{2.4x.(2x+1)} \le \frac{2x+1+4x+2}{3} = 2x+1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \le \frac{2x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 \le 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \le 0$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số thì:

$$5x^2 + (x-1)^2 = 2y\sqrt{x^2+x} \le y^2 + x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 1 - y^2 \le 0$$

Kết hợp lại ta được:

$$2(5x^2 - 3x + 1 - y^2) + 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ PT là $(x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2x} + 2\sqrt[3]{6-x} - y^3 = 2\sqrt{2} \quad (1)\\ \sqrt[4]{2x} + 2\sqrt{6-x} + 2\sqrt{2y} = 8 + \sqrt{2} \quad (2)\end{cases}$$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $0 \le x \le 6$

Bài toán này có thể thấy ngay cộng hai vế của phương trình rồi dồn x sang một vế, y sang một vế và đánh giá bằng bất đẳng thuwsv Cauchy hoặc Buniacopski.

Lấy $(1) + (2) \Rightarrow \left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) + \left(\sqrt[4]{2x} + 2\sqrt[4]{6-x}\right) = \left(y - \sqrt{2}\right)^2 + 6 + 3\sqrt{2}$

Ta có: $\text{VP} = \left(y-\sqrt{2}\right)^2 + 6 + 3\sqrt{2} \ge 6 + 3\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $y = \sqrt{2}$ (3)

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) = \left(1.\sqrt{2x} + \sqrt{2}.\sqrt{12-2x}\right)^2 \le \left(1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2\right)(2x + 12 - 2x) = 36$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}\right) \le 6$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$ (4)

$$\left(\sqrt{2x}+2\sqrt{6-x}\right)^2 \le (1+2)\left(\sqrt{2x}+2\sqrt{6-x}\right) \le 18$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x}+2\sqrt{6-x}\right) \le 3\sqrt{2}$ và dấu bằng xảy ra khi $x = 2$ (5)

Lấy (4)+(5) $\Rightarrow VT = \left(\sqrt{2x}+2\sqrt{6-x}\right) + \left(\sqrt[4]{2x}+2\sqrt[4]{6-x}\right) \le 6+3\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Từ (3);(4);(5) nghiệm của hệ là $(x;y) = (2;\sqrt{2})$

Bài 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9\sqrt{\dfrac{41}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{2x+y}\right)} = 3+40x \\ x^2+5xy+6y = 4y^2+9x+9 \\ x;y>0 \end{cases}$$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Phương trình (1) tương đương:

$$\sqrt{82\left(x^2+\frac{1}{2x+y}\right)} = \frac{6+80x}{9}$$

Ta có:

$$VT = \sqrt{(1^2+9^2)\left(x^2+\frac{1}{2x+y}\right)} \ge \left|9x+\frac{1}{\sqrt{2x+y}}\right|$$

$$\ge 9x+\frac{3}{\sqrt{9(2x+y)}} \ge 9x+\frac{6}{2x+y+9}$$

$$\Rightarrow \frac{6+80x}{9} \ge \frac{6}{2x+y+9} \Leftrightarrow 3x-2x^2-xy+6y \ge 0 \quad (*)$$

Lấy (*) cộng với phương trình (2) ta thu được:

$$-x^2+4xy-4y^2+12y-6x-9 = 0 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-2y+3)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x+3 = 2y$$

Để các dấu bằng xảy ra thì $x = y = 3$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (3;3)$

Bài 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2\sqrt{xy}+x^3+y^3 = 4x^2y \\ y+\sqrt{x} = \sqrt{-2x^2+14y-9} \end{cases}$$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện $x, y > 0$

Ta có:

$$x^2\sqrt{xy}+x^2\sqrt{xy}+x^3+y^3 \ge 4\sqrt[4]{x^2\sqrt{xy}x^2\sqrt{xy}x^2y^3} = 4x^2y$$

Tức là $VT \ge VP$ đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$$x+\sqrt{x} = \sqrt{-2x^2+14x-9}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{x}+x = -2x^2+14x-9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2x\sqrt{x}-13x+9 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x} > 0$ như vậy ta có:

$$3t^4+2t^3-13t^2+9 = 0 \Leftrightarrow (3t^2-t-3)(t^2+t-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1+\sqrt{37}}{6} \Rightarrow x = \dfrac{19+\sqrt{37}}{18} \\ t = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm:

$$(x;y)=\left(\frac{19+\sqrt{37}}{18};\frac{19+\sqrt{37}}{18}\right);\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2};\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$$

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=2\left(1+\dfrac{1-y^2}{x}\right)\\ 4y^2=\left(y^2-x^3+3x-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\end{cases}$

Phân tích và hướng dẫn giải:

Điều kiện: $x\neq 0; -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$

Phương trình (1)$\Leftrightarrow x(x+1)^2+xy^2=2(x+1-y^2)$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+x-2)+y^2(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-1)+y^2(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+y^2-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2=0\ (\text{loại})\\ x^2+y^2=1\end{array}\right.$$

Với $x^2+y^2=1\Rightarrow x^2=1-y^2$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$4y^2=(y^2-x^3+3x-2)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 4(y^2+1-1)=(y^2-x^3+3x-2)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=(y^2-x^3+3x-2)\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)=y^2-x^3+3x-2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x-2=y^2-4\sqrt{y^2+1}\ (3)$$

Do $x^2+y^2=1\Rightarrow\begin{cases}0\le x^2\le 1\\0\le y^2\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$

Xét hàm số: $f(x)=x^3-3x-2$ trên đoạn $[-1;1]$

$$f'(x)=3x^2-2\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$$

Do hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(-1)=0; f(1)=-4$

Suy ra $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=-4;\ \max\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=0$

Hay $f(x)\ge -4\ \forall x\in[-1;1]$(a)

Xét hàm số $g(y)=y^2-4\sqrt{y^2+1}$ trên $[-1;1]$

Ta có:

$$g'(y)=2y-\frac{4y}{\sqrt{y^2+1}}\Rightarrow g'(y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\in(-1;1)\\ y=\pm\sqrt{3}\notin[-1;1]\end{array}\right.$$

Do hàm số g(y) liên tục trên $[-1;1]$ và $g(-1)=g(1)=1-4\sqrt{2}; g(0)=-4$

Suy ra $\max\limits_{y\in[-1;1]} g(y)=-4;\ \min\limits_{y\in[-1;1]} g(y)=1-4\sqrt{2}$

Hay $g(y)\le -4\ \forall y\in[-1;1]$(b)

Từ (a) và (b) suy ra phương trình (3)$\Leftrightarrow f(x)=g(y)=-4\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

Thỏa mãn phương trình (1)

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$

Bài tập tự luyện:

Giải các hệ phương trình sau:

(Vì khuôn khổ không cho phép nên phần này, anh sẽ dành cho các em làm và anh sẽ chữa cho các em vào khóa học tháng 6 tới).

1. $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+6y^2+8=3x+\dfrac{3}{x}+y^2=8y\\ 2x^3+3y+4=3x^2+6\sqrt{y}\end{cases}$; 2. $\begin{cases}\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x-y+4}}\\ x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{y-2}\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{4y^2+x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}}\\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+4(y-1)}{2}\end{cases}$; 4. $\begin{cases}x-y=6\left(1-\sqrt{xy}\right)\\ x+\dfrac{6\sqrt{2(x^8+y^8)}}{x^2+xy+y^2}=3+\sqrt{2(x^2+y^2)}\end{cases}$

5. $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=\sqrt[3]{x(2x+1)}\\ 3x^2-x+\dfrac{1}{2}=y\sqrt{x^2+x}\end{cases}$; 6. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{x}-8x+2\sqrt{1-2x}}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{4xy}\\ 4x=\sqrt{2y+3}-\sqrt{y}\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^3+y^3=xy\sqrt{2(x^2+y^2)}\\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(y-1)\sqrt{2x-2}\end{cases}$; 8. $\begin{cases}\sqrt{(x^2+1)^3}-8x^3=2\sqrt{2y-1}-2\\ y^2+1=2\sqrt{-9x^3+3x+1}\end{cases}$

Vấn đề 2. Dự đoán hình phẳng:

Trước tiên ta đi tới vấn đề dự đoán hình phẳng ta hãy thử sức với bài toán sau.

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC có A(0; 1). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn đường kính BC. Biết phương trình đường thẳng MN;BC lần lượt là: $x + 2y - 4 = 0$ và $3x - y - 1 = 0$. Xác định tọa điểm các đỉnh B và C.

Phân tích:

Do đề bài xuất hiện đường tròn đường kính BC nên ta có thể hình thành các đường cao $AA'; BB'; CC'$ thì khi đó dễ thấy $B; B'; C'; C$ cùng thuộc một đường tròn.

Sau khi vẽ hình, ta nhận thấy tính chất rất đặc biệt là M;H;N thẳng hàng.(H là trực tâm ΔABC).

Dĩ nhiên, nếu tính chất này là đúng thì ta hoàn toàn có thể xác định các điểm cần tìm.

Sơ đồ tư duy:

$$A; BC \xrightarrow{AH \perp BC} AH?$$

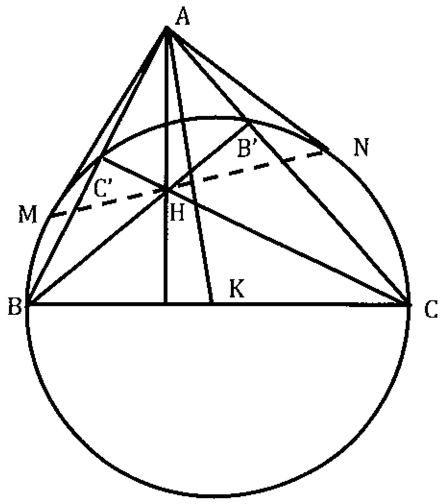
$$M; H; N \text{ thẳng hàng} \rightarrow H \in MN$$

$$H \xleftarrow{\text{giao điểm}} \begin{cases} AH \\ MN \end{cases}$$

$$B; C \in BC \rightarrow \text{tọa độ hóa} \rightarrow \begin{cases} B \text{ còn 1 ẩn số là } b \\ C \text{ còn 1 ẩn số là } c \end{cases}$$

Ta phải tìm hai phương trình cho b và c để đưa ra một hệ phương trình?

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0; \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MN} = 0$$



(Rất nhiều em tự đặt câu hỏi sao không dùng $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ và $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$ thì anh trả luôn, dùng hai cái này thực chất là một cái, không tin các em tự biến đổi? Lý do là vì ta đã dùng $AH \perp BC$ để xác định AH, nên ta chỉ được dùng $BH \perp AC$ hoặc $CH \perp AB$ để xác định vì trực tâm của tam giác ta chỉ cần dùng giao của hai đường cao là đủ. Còn $AK \perp MN$ là một tính chất được suy ra từ tính chất tiếp tuyến trong đường tròn, đây là một tính chất khác nên ta có thể dùng được).

Rõ ràng, hai phương trình này sẽ đưa ra hệ mà ta có thể giải được. Vấn đề còn lại là chứng minh ba điểm M;H;N thẳng hàng và đây là một vấn đề thuộc về ***tính chất hình.***

Lời giải chi tiết:

Chứng minh: M;H;N thẳng hàng.

Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC, đường tròn (K) có đường kính BC.

Ta có:

$$\Delta AMC' \sim ABM(\text{ do chung góc A và } AMC' = ABM) \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC'}{AM} \rightarrow AM^2 = AB.AC'$$

$$\Delta AC'H \sim \Delta AA'B(\text{do là hai tam giác vuông chung góc A})$$

$$\rightarrow \frac{AC'}{AA'} = \frac{AH}{AB} \rightarrow AC'.AB = AH.AA'$$

$$\rightarrow AM^2 = AB.AC' = AH.AA' \rightarrow \frac{AM}{AA'} = \frac{AH}{AM}$$

Suy ra $\Delta AHM \sim \Delta AMA'$ (c – g – c). Do đó $\widehat{AMH} = \widehat{AA'M}$.

Mặt khác AMA'N là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AK (do AM;AN là tiếp tuyến và AA' là đường cao ΔABC) nên: $\widehat{AMH} = \widehat{AA'M} = \widehat{MNA} = \widehat{AMN}$.

Vậy $\widehat{AMH} = \widehat{AMN}$ mà H và N nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ AM nên M, H, N thẳng hàng.

Xác định điểm H.

Ta có: A(0; 1); BC: $3x - y - 1 = 0$; $AH \perp BC$ nên:

$$AH: 1(x - 0) + 3(y - 1) = 0 \leftrightarrow AH: x + 3y - 3 = 0$$

Do đó, $H(x_H; y_H)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x+3y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow H(6;-1)$$

Ta có:

$$B; C \in BC \to B(b; 3b-1); C(c; 3c-1)$$

$$BH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (6-b).(c-0) + (-1-3b+1).(3c-1-1) = 0$$

$$\Rightarrow c(6-b) - 3b(3c-2) = 0 \to 6c + 6b - 10bc = 0$$

$$\Rightarrow 3c + 3b - 5bc = 0\ (1)$$

K là trung điểm BC nên: $K\left(\frac{b+c}{2}; \frac{3b+3c-2}{2}\right)$

$AK \perp MN$ nên:

$$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_{MN}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{b+c}{2} - 0\right).(-2) + \left(\frac{3b+3c-2}{2} - 1\right).1 = 0$$

$$\Rightarrow -(b+c) + \frac{3}{2}.(b+c) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow b + c = 4\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\begin{cases} b+c=4 \\ 3c+3b-5bc=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=4 \\ bc=\frac{12}{5} \end{cases}$$

Do đó, b ; c là nghiệm của phương trình:

$$5X^2 - 20X + 12 = 0 \Rightarrow X = \frac{10 \pm 2\sqrt{10}}{5}$$

Kết luận:

$$B\left(\frac{10+2\sqrt{10}}{5}; \frac{25+6\sqrt{10}}{5}\right); C\left(\frac{10-2\sqrt{10}}{5}; \frac{25-6\sqrt{10}}{5}\right) \text{ hoặc}$$

$$B\left(\frac{10-2\sqrt{10}}{5}; \frac{25-6\sqrt{10}}{5}\right); C\left(\frac{10+2\sqrt{10}}{5}; \frac{25+6\sqrt{10}}{5}\right)$$

Nhận xét: *Đúng vậy, điều dự đoán mà anh muốn nhắc tới đó chính là việc sử dụng tính chất hình học trong bài toán để giải quyết bài toán. Dĩ nhiên, đối với những bạn nắm bắt được nhiều tính chất hình thì sẽ có tư duy tốt và nhanh hơn nhiều so với những bạn chưa biết tới. Như vậy ngoài việc đã trải qua những tính chất hình có trong đề thi thử đại học năm nay thì cuốn Chinh phục hình phẳng cũng đã đóng góp rất nhiều tính chất hình mà các em nên biết. Riêng trong cuốn tinh túy này,* ***anh sẽ giới thiệu 8 bài với tính chất hình đơn giản nhưng khó nhìn*** *như bài toán trên. Và dĩ nhiên, cách tư duy ở đây sẽ được đề cập tới.*

Bài 2: Cho đường tròn tâm O và dây cung AB (biết đường thẳng AB có phương trình: $x + 2y - 1 = 0$) ; điểm M thuộc AB. Dựng (O_1) qua A, M tiếp xúc với (O); (O_2) qua M, B tiếp xúc với (O). Hai đường này cắt nhau tại điểm thứ hai là N(0;0). Cho phương trình đường thẳng ON là $y = 3x$. Xác định tọa độ điểm M.

Phân tích: *Sau khi vẽ hình thì ta thấy ngay: $MN \perp OM$. Như vậy, chỉ cần chứng minh được tính chất này của bài toán thì ta sẽ được ngay lời giải vì:*

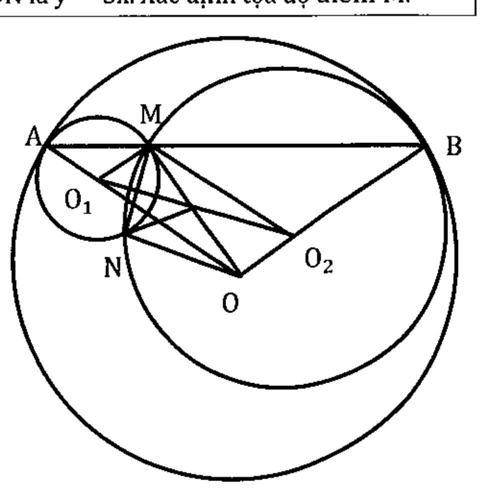
$$MN \perp OM; N \to MN$$

M thuộc MN và M thuộc AB nên hiển nhiên tìm được M. Để chứng minh tính chất trên ta cần chú ý:

+ O_1O_2 là trung trực của MN. (đây là tính chất dây chung của hai đường tròn giao nhau).

+O_1MO_2N là hình bình hành. (Nhìn hình vẽ có thể cảm nhận được ngay).

Rõ ràng sẽ nhận ra ngay tính chất cần dùng tới ở đây:



Đường trung tuyến của một tam giác mà bằng nửa cạnh đối diện với nó thì đó là tam giác đó vuông.
Ta có lời giải chi tiết:

Lời giải chi tiết:

Chứng minh: $MN \perp OM$

(O) tiếp xúc với (O_1) tại A suy ra $O; O_1; A$ thẳng hàng.

Tương tự $O; O_2; B$ thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}; \widehat{O_1AM} = \widehat{O_1MA} \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{O_1MA} \Rightarrow O_1M // OB$

Tương tự $O_2M//OA$. Do đó OO_1MO_2 là hình bình hành.

$\Rightarrow O_1O_2$ đi qua trung điểm của OM, MN vuông góc với O_1O_2 và cắt nhau tại trung điểm MN

$\Rightarrow O_1O_2//ON \Rightarrow \widehat{MNO} = 90°$

.....

Sau hai bài toán trên, anh muốn giới thiệu thêm các em các bài toán có tính chất hình học phẳng chưa gắn hệ tọa độ. Khi nắm vững tính chất hình thì ta có thể giải quyết bài toán dễ dàng hơn.

Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A, P là điểm trên cạnh đáy BC. Kẻ đường thẳng song song với các cạnh bên, các giao điểm đó là D và E (D thuộc AB, E thuộc AC) .Gọi Q là điểm đối xứng của P qua DE. Chứng minh Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh:

Ta có: $PD//AC; PE//AB \Rightarrow ADPE$ là hình bình hành

$\Rightarrow PE = AE; AD = EP$; Q và P đối xứng qua DE

$\Rightarrow DP = DQ; EQ = EP \Rightarrow AE = DQ$ kết hợp $EQ = DA$

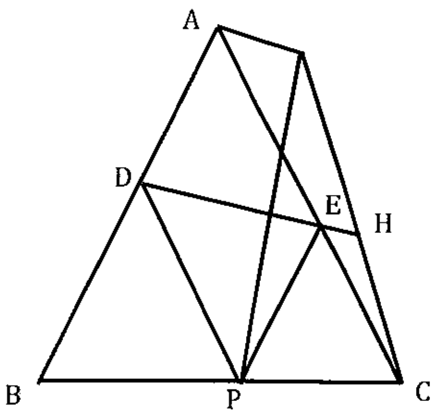
$\Rightarrow ADEQ$ là hình thang cân $\Rightarrow AQ//DE$

Tam giác ABC cân $\Rightarrow EP = EC \Rightarrow EQ = EC \Rightarrow \widehat{EQC} = \widehat{ECQ}$.

Kéo dài DE cắt CQ tại H $\Rightarrow \widehat{EPH} = \widehat{EQH} \Rightarrow \widehat{EPH} = \widehat{ECH}$

$\Rightarrow EPCH$ nội tiếp; $\widehat{PEH} = \widehat{BAQ} \Rightarrow \widehat{BAQ} + \widehat{BCQ} = 180°$

$\Rightarrow$ Q thuộc đường tròn qua (A, B, C)



Bài 4: Cho tam giác ABC, D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh BC, CA, AB; H là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh HD là phân giác của góc BHC.

Chứng minh:

Gọi I, G là hình chiếu của B, C trên EF thì $HD//BI//CG$, E, F là các tiếp điểm.

$\Rightarrow AE = AF \Rightarrow \Delta AFE$ cân $\Rightarrow \widehat{BFI} = \widehat{CEG}$

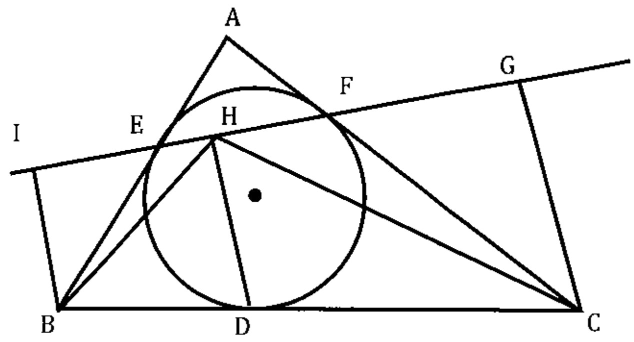
$\Rightarrow \Delta BFI \backsim \Delta CHG(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BI}{CG} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{HI}{HG}$

$\Rightarrow \Delta BHI \backsim \Delta CHG(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BHI} = \widehat{CHG}$

$\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{CHD}$

$\Rightarrow$ HD là phân giác của góc BHC.



Bài 5: Cho tam giác ABC đường cao AH, gọi M và N lần lượt là trung điểm AB, AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BMH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CNH tại E. Chứng minh AMEN là tứ giác nội tiếp và HE đi qua trung điểm của MN.

Chứng minh:

Tứ giác MBHE và HENC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MEH} = 180° - \widehat{B}; \widehat{HEN} = 180° - \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{MEN} = 360° - \widehat{MEH} - \widehat{HEN}$

$= 360° - 180° + \widehat{B} - 180° + \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A} = 180°$

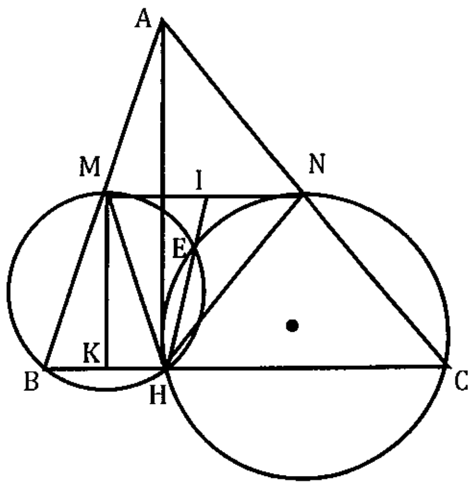
$\Rightarrow$ AMEN nội tiếp.

HE cắt MN tại I, hạ MK vuông góc với BC, theo giả thiết AH vuông góc với BC, MA=MB

$\Rightarrow MB = MH \Rightarrow KB = KH$, MK vuông góc với MN

$\Rightarrow$ MN là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MBH, $IM^2 = IE.IH$.

Tương tự $IN^2 = IE.IH \Rightarrow IM = IN$



Nhận xét: *Điểm E trong hình học còn được gọi là điểm Brocaard nhưng ta không cần để ý tới bài toán đó, ta chỉ cần chú ý tính chất tiếp tuyến chung của hai đường tròn thì dây chung đi qua trung điểm.*

Bài 6: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Kéo dài AB về phía B lấy M, từ M kẻ tiếp tuyến ME, MF với (O) (E, F là các tiếp điểm, F cùng phía (O') đối với AB). Đường BE và BF cắt (O') tại P và Q, gọi I là giao của PQ và EF. Chứng minh rằng: QI = IP.

Chứng minh:

Kéo dài EF cắt PQ tại I.

MF là tiếp tuyến$\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{FAB}$

$\Rightarrow \Delta MFB \backsim \Delta MAE \Rightarrow \dfrac{ME}{MA} = \dfrac{EB}{EA}$ mà $ME = MF$

$\Rightarrow \dfrac{FB}{FA} = \dfrac{EB}{EA}$ (1);

$\widehat{AFE} = \widehat{ABE}$ (chắn cung AE)

$\Rightarrow$ ABPQ là tứ giác nội tiếp

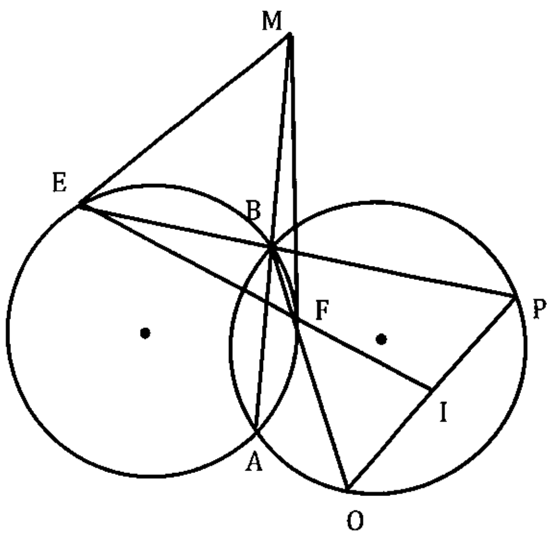
$\Rightarrow \widehat{AFQ} = \widehat{AIQ} \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AIP}$

Mặt khác $\widehat{ABF} = \widehat{APQ} \Rightarrow \Delta FBA \backsim \Delta IPA$

$\Rightarrow \dfrac{BF}{AF} = \dfrac{PI}{AI}$ (2)

Tương tự: $\Delta ABE \backsim \Delta AQI \Rightarrow \dfrac{QI}{IA} = \dfrac{BE}{AE}$ (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \dfrac{QI}{IA} = \dfrac{PI}{IA} \Rightarrow QI = IP$



Bài 7: Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AH, BC. Các phân giác trong của các góc ABH, ACH cắt nhau tại P. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh:

Gọi BB', CC' lần lượt là đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Ta có:

$\widehat{PCB} = \widehat{PCC'} + \widehat{C'CB}$

$= \frac{1}{2}(90° - \widehat{A}) + (90° - \widehat{B}) = 135° - \frac{1}{2}\widehat{A} - \widehat{B}$

Tương tự:

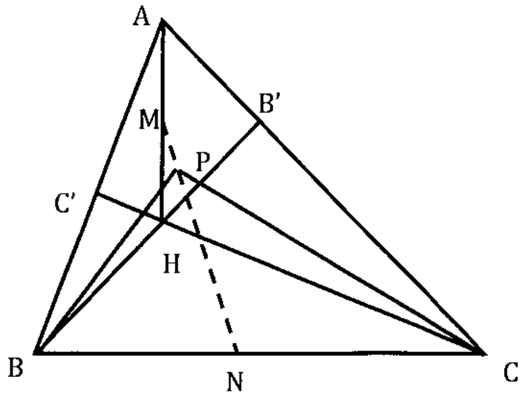
$\widehat{PBC} = 135° - \frac{1}{2}\widehat{A} - \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{PCB} + \widehat{PBC} = 270° - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = 90°$

$\Rightarrow \widehat{CPB} = 90°$.

Vậy P thuộc đường tròn đường kính BC.

Mặt khác CP là phân giác góc ACC' nên P là điểm chính giữa cung nhỏ B'C' của đường tròn nói trên. Do đường tròn đường kính BC và đường tròn đường kính AH cắt nhau tại B', C' nên đường nối tâm MN đi qua điểm chính giữa P cung B'C'.



Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao CH và trung tuyến AD. Đường tròn (O) đi qua D và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A, cắt BC tại điểm thứ hai là E. Chứng minh AE đi qua trung điểm của CH

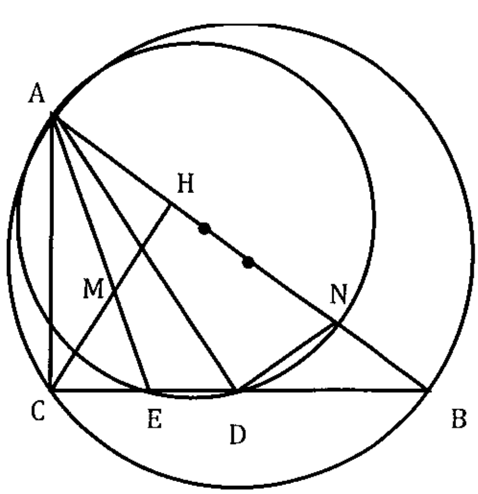
Chứng minh:

Gọi M là giao điểm của AE với CH, giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác AED với AB là N. Do hai đường tròn tiếp xúc nhau nên hai tâm cùng điểm A thẳng hàng, do đó AN là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AED. Khi đó, $\widehat{ADN} = 90^0$.

Ngoài ra, hai góc $\widehat{AND} = \widehat{AEC}$ (do tứ giác AEDN nội tiếp)

Suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{DAB}$.

Mặt khác 2 tam giác vuông AHC và ACB đồng dạng với nhau nên AD là trung tuyến của tam giác ACB ta suy ra AM cũng là trung tuyến của tam giác AHC.



Vấn đề 3. Dự đoán các bài toán khác:

Ở đây, anh không dự đoán về bất đẳng thức bởi vì bất đẳng thức luôn là bất đẳng thức ba biến và chỉ có một vài chủ đề khá cơ bản nhưng cách phát triển lại muôn màu muôn vẻ. Anh đã nhắc tới ở trong phần hệ. Mặc dù, về độ đánh giá là loại khó nhất nhưng dạng toán này yêu cầu có sự nhanh nhậy cao thì có khả năng làm được. Vấn đề anh muốn đề cập tới là một số bài toán hướng tới thực tế. Lý do là vì năm 2015 đã xuất hiện những dạng toán này trong đề thi dự bị của bộ giáo dục:

Bài toán 1: (Đề thi dự bị của bộ năm 2015) Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu, để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được điểm thưởng cao nhất?

Phân tích và hướng dẫn giải:

Phát biểu có vẻ lằng nhằng. Nhưng thực tế bài toán chỉ có hai biến:

a là số lít nước cam, b là số lít nước táo

Khi đó, theo giả thiết:

$30a + 10b$ là số gam đường cần dùng, $a + b$ là số lít nước cần dùng và $a + 4b$ là số gam hương liệu cần dùng.

Để dùng được tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường ta phải có:

$$\begin{cases} a; b \geq 0 \\ 30a + 10b \leq 210 \\ a + b \leq 9 \\ a + 4b \leq 24 \end{cases}$$

Để thu được nhiều điểm thưởng nhất thì ta phải có: $f(a; b) = 60a + 80b$ đạt giá trị lớn nhất có thể.

Đến đây, ta có hai hướng giải:

+Một hướng là ta biểu diễn tất cả các giả thiết trên hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó, các điểm nằm ở vị trí đầu mút sẽ là các điểm cực trị của f. Do đó, ta chỉ cần so sánh chúng với nhau là được. Kết quả: $(a; b) = (4; 5) \to f(a; b) = 640$.

+Hướng thứ hai tốt hơn hướng thứ nhất bởi vì nó có thể giải quyết được nhiều biến số.

Do chỉ có hai biến số nên ta chọn 2 trong 3 bất phương trình ở giả thiết để đưa về dạng:

$$f(a; b) = 60a + 80b = x(30a + 10b) + y(a + b)$$
$$f(a; b) = 60a + 80b = x(a + b) + y(a + 4b)$$
$$f(a; b) = 60a + 80b = x(a + 4b) + y(30a + 10b)$$

Sau khi tìm ra được $(x; y)$ đối với bài này, giá trị x hoặc y âm ta có thể loại ngay vì không thể đánh giá được. Khi có ít nhất hai cặp $(x; y)$ cùng dương thì ta phải đối chiếu với bất phương trình thứ ba. Với bài này ta có:

$$f(a; b) = 60a + 80b = \frac{160}{3}(a + b) + \frac{20}{3}(a + 4b) \leq \frac{160}{3}.9 + \frac{20}{3}.24 = 640$$

Đối chiếu dấu bằng xảy ra: $a = 4; b = 5$ thỏa mãn $30a + 10b \leq 210$ nên ta được điều phải chứng minh.

Lưu ý: *Có một sai lầm khá lớn là các học sinh thường mặc định a;b là các số tự nhiên, nhưng ngụ ý của tác giả không phải vậy, nên có thể những bạn làm trong trường hợp a;b là số tự nhiên thường chỉ được* 0,25 *đến* 0,5 *số điểm.*

Bài toán 2: (Tự tin làm nhà kinh doanh thành đạt-Sáng tác) Một thương gia đang bán buôn các con súc vật, gồm có ba loại con: gà, lợn và dê. Biết rằng thương gia này làm việc với ba nhà hàng bán đồ ăn (A;B;C) của một cơ sở. Yêu cầu của cơ sở này là mỗi ngày mang tới ba nhà hàng đúng 100 con súc vật (loại nào cũng được). Biết rằng, khi mang đến nhà hàng A thì mỗi con gà được lời 3000 đồng, mỗi con lợn được lời 4.000 đồng, mỗi con dê được lời 20.000 đồng. Khi mang đến nhà hàng B thì mỗi con gà được lời 7000 đồng, mỗi con lợn được lời 8000 đồng và mỗi con dê được lời 18.000 đồng. Khi mang đến nhà hàng C thì mỗi con gà được lời 8000 đồng, mỗi con lợn được lời 9000 đồng và mỗi con dê được lời 16000 đồng. Biết rằng, ngày hôm đó, thương gia phải tiêu thụ ít nhất 20 con gà, ít nhất 20 con lợn và ít nhất 20 con dê vì sắp có đại dịch gia súc. Hỏi thương gia đó cần mang gia súc của mình đến các cửa hàng như thế nào để thu được nhiều lợi nhuận có thể?

Phân tích và hướng dẫn giải:

Nhận xét 1:

Trong mỗi cửa hàng, số tiền lợi nhuận thu được của mỗi con súc vật theo giá trị từ thấp đến cao là gà; lợn; dê. Điều đó, chứng tỏ rằng với số lượng súc vật không đổi để thu được lợi nhuận cao nhất thì số gà phải ít nhất có thể? Như vậy ta tiêu thụ đúng 20 con gà, và dĩ nhiên số gà đó phải nằm trong cửa hàng C vì giá mỗi con gà ở cửa hàng C là cao nhất. Còn 80 con còn lại?

Nhận xét 2:

Gọi $a_1; a_2; a_3$ là số lợn đưa tới cửa hàng A;B;C và $b_1; b_2; b_3$ là số dê đưa tới cửa hàng A;B;C.

Khi đó ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 80$.

Cửa hàng A sẽ thu lại được: $S_1 = 4a_1 + 20b_1$ (nghìn đồng).

Cửa hàng B sẽ thu lại được: $S_2 = 8a_2 + 18b_2$ (nghìn đồng).

Cửa hàng C sẽ thu lại được: $S_3 = 9a_3 + 16b_3$ (nghìn đồng).

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của:

$$T = S_1 + S_2 + S_3 = (4a_1 + 8a_2 + 9a_3) + (20b_1 + 18b_2 + 16b_3)$$

Việc đánh giá ở đây khá đơn giản:

$$T \le 9(a_1 + a_2 + a_3) + 20(b_1 + b_2 + b_3) = 9a + 20b$$

Dấu " = " xảy ra khi: $a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = 0$. Khi đó, ta có:

$$T \le 9a + 20b$$

Với a là số lợn, b là số dê. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} a + b = 80 \\ a \ge 20 \\ b \ge 20 \end{cases} \rightarrow 20 \le b \le 60$$

$$\rightarrow T \le 9(a + b) + 11.b \le 9.80 + 11.60 = 1380$$

Dấu " = " xảy ra khi: $a = 20; b = 60$.

Như vậy ta có thể khẳng định giá trị lợi nhuận lớn nhất thu được khi mang tới nhà hàng C là 20 con gà và 20 con lợn mang tới nhà hàng A là 60 con dê. Số tiền thu được lớn nhát là: 1.540.000 đồng.

Bình luận: *Khi đọc những bài toán về thực tế. Yếu tố kiên quyết là không được nản vì những lời văn dài dòng phức tạp. Phân tích thật chậm, đề bài cho gì, yêu cầu gì và các biến có thể có là gì.*

Sau đây là một số bài toán luyện tập:

Bài 1: (Điện thoại Galaxy S7- trích THPT chuyên Long An lần 2 2016) Nhằm thu hút khách hàng cho sản phẩm Samsung Galaxy S7, hãng điện thoại Samsung tiến hành quảng cáo trên hệ thống phát thanh và truyền. Chi phí mời cả hai diễn viên Song Joong Ki và Song Hye Kyo tham gia quảng cáo trên truyền hình là 3.000.000 USD và trên sóng phát thanh là 1.000.000 USD. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên truyền hình là 4.000.000 USD và 1 phút trên sóng phát thanh là 800.000 USD. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất 5 phút và đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài tối đa 4 phút. Theo phân tích, cùng thời lượng 1 phút quảng cáo thì trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty Samsung dự định tối đa 20.000.000 USD cho quảng cáo. Hỏi công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để đạt hiệu quả nhất?

Bài 2: (Tệ nạn tham nhũng ở Việt Nam-Bài toán chỉ mang tính chất mô phỏng vui, không có ý định đả kích hay nói xấu tới bất kì tổ chức nào) Tại Việt Nam, tệ nạn tham nhũng được hoành hành khá phổ biến. Theo cục khảo sát, mỗi met vuông đất nếu mua trót lọt thu được lợi nhuận theo hình thức: $y \geq x^2$ (trong đó, x là số mét vuông đất; y là số triệu đồng). Mỗi công trình xây dựng nếu là loại nhỏ sẽ thu được 30 triệu, loại lớn sẽ thu được 50 triệu và loại cực lớn sẽ thu được 100 triệu.. Giả sử rằng, người ta phải phân vân giữa việc xây 3 công trình nhỏ, 2 công trình lớn với việc xây 1 công trình nhỏ, 1 công trình lớn và 1 công trình cực lớn. Nếu tham nhũng được trên 2 tỷ thì sẽ bị phát hiện và bỏ tù. Hỏi rằng, để không bị bắt vào tù thì cần tham nhũng nhiều nhất bao nhiêu met vuông đất và xây dựng công trình như thế nào mà vẫn đảm bảo lợi nhuận thu được là lớn nhất? (số met vuông đất là số nguyên dương)

Bài 3: (Đưa con đi thi đại học) Một người mẹ đưa con lên Hà Nội đi đại học mà trong ví chỉ có đúng 500k. Chi phí đi lại: nếu đi xe khách mỗi chuyến sẽ mất 80k; nếu đi tàu mỗi chuyến sẽ mất 100k(phải đi 2 lần: 1 lúc đi và 1 lúc về).Chi phí ăn và nhà ở là 250k. Do đi lại trong thành phố không tiện đi bus vì đông nên chọn đi xe máy. Biết rằng phòng trọ tìm được cách chỗ thi đúng 6km. Với hãng xe ôm Hà Thành mất 9k/ 1 km và mỗi km mất 7 phút; với xe ôm sinh viên mất 7k/ 1km và mỗi km mất 9 phút. Biết rằng từ phòng đi thi đến địa điểm thi chỉ được đi không quá 45 phút. Hỏi rằng, người mẹ có thể đưa con đi thi bằng tàu hỏa được hay không?

Bài 4* (Bài toán khó): Hai người hẹn gặp nhau trước của nhà hát lớn từ 10 giờ đến 10 giờ 30 phút với quy định người đến trước chờ người kia trong vòng 10 phút, nếu không gặp thì bỏ đi. Tính sác xuất để họ được gặp nhau, biết rằng mỗi người có thể tới điểm hẹn vào một thời điểm bất kì trong khoảng thời gian trên.

Bài 5. Để chuẩn bị cho kì bầu cửu quốc hội ngày 22/5/2016 , quốc hội thống nhất số đại biểu ở các địa phương tham gia ứng cử. theo đó số đại biểu ở thành phố hồ Chí Minh và ở Hà Nội là 30 đại biểu ,Thanh Hóa là 14 đại biểu là Nghệ An là 13 đại biểu. Sẽ có 20 đại biểu của 4 tỉnh này trúng cử cử. Truyền nhân của bà Vanga- Kaede Uber đã đến Việt Nam và cô tiên tri rằng Hồ Chí Minh có ít nhất 10 đại biểu của Hà Nội và thành phố Hồ Chí Minh trúng cử. Tính xác suất để lời tiên tri của Kaede Uber xảy ra.

Bài 6. Để phản kháng lại hành vi cắm dàn khoan HD 981 của Trung Quốc, cũng như hỗ trợ khi khai thác vùng xa biển, một làng đã tổ chức cho năm tàu có đánh số cùng lúc khai thác. Trong quá trình khai thác, xác suất để hai tàu một và hai bị hỏng là 0,1 và của ba tàu còn lại là 0,2. Tính xác suất để :

a) Cả năm tàu trở về mà không bị hư hại.

b) Có ít nhất 4 tàu bị hỏng.

Ngày số 30

Luyện đề tổng hợp

[redacted]

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm các giá trị thực của m để đường thẳng (d): $y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B nằm ở hai phía trục tung sao cho góc AOB nhọn (O là gốc tọa độ).

Câu 2 (1,0 điểm).

a) Cho $\tan\alpha = 2$. Tính:

$$M = \frac{\cos^3\alpha + \cos\alpha.\sin^2\alpha - \sin\alpha}{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}$$

a) Tìm môđun số phức z, biết rằng $z + (3-i)\bar{z} = 2-5i$.

Câu 3: Giải phương trình: $\log_2(2x-3)^2 - 2\log_2 x = 4$

Câu 4: Giải bất phương trình: $\dfrac{x-3}{x+3-3\sqrt{x+1}} \geq \dfrac{3\sqrt{4-x}}{x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Bài 5: Tính tích phân: $I = \displaystyle\int_2^5 \frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}dx$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA = a, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a. Tính theo a thể tích khối chóp S.BCD và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

Câu 7: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-4)^2 + y^2 = 4$ và điểm E(4; 1). Tìm điểm M trên trục tung sao cho từ điểm M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là các tiếp điểm sao cho đường thẳng AB đi qua E.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 3y + 4z - 1 = 0$, đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}$ và điểm A(3; 1; 1). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (P).

Câu 9: Cho tập E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Từ các chữ số của tập E lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

Câu 10: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \leq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}} + \frac{3z}{z+x}.$$

[redacted]

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$, có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Tìm m để đường thẳng d: $y = x + m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có trọng tâm là điểm $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Câu 2:

a) Tính: $A = \tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ biết $\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{9}{41} \\ \pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$

b) Giải phương trình sau trên tập số phức $z^3 - 3iz^2 - 3z + 2i = 0$.

Câu 3: Giải phương trình $4^{2x} - 15.2^{2\left(x+\sqrt{x+4}\right)} - 16^{1+\sqrt{x+4}} = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

Câu 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2(x-7y) = -12 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y-3} = x^2 + y^2 - 10x - 5y + 22 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 5: Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x^3\sqrt{x^3+8} + \left(6x^3 + 4x^2\right)\ln x}{x}dx$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là trung điểm cạnh BC, góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và (ABCD) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.DCM theo a.

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(0;4), trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và trực tâm trùng với gốc tọa độ. Tìm tọa độ các đỉnh B, C và diện tích tam giác ABC biết $x_B < x_C$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các đường thẳng (d_1): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ và (d_2): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2.

Câu 9: Một chiếc hộp đứng 6 cái bút màu xanh, 6 cái bút màu đen, 5 cái bút màu tím và 3 cái bút màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên ra 4 cái bút. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bút cùng màu.

Câu 10: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (xy + yz + 2zx) - \dfrac{8}{(x+y+z)^2 - xy - yz - 2}$, trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 4: Giải bất phương trình: $\dfrac{x-3}{x+3-3\sqrt{x+1}} \geq \dfrac{3\sqrt{4-x}}{x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Định hướng, phân tích: Ta thấy rằng bất phương trình này khá là phức tạp về mặt hình thức. Vậy nên điều đầu tiên nên làm đó là giảm độ phức tạp của nó đi (nếu có thể).

Một thần chú khi mẫu thức có dạng $(ax + b + c\sqrt{dx + e})$ và thấy hình thức phức tạp thì hãy thử xem nhân liên hợp có giúp được gì cho bài toán không.

$$x+3-3\sqrt{x+1} = \frac{(x+3)^2-9(x+1)}{x+3+3\sqrt{x+1}} = \frac{x(x-3)}{x+3+3\sqrt{x+1}}.$$

Đến đây thì thấy mẫu số có $(x - 3)$ để rút gọn cho tử số, đồng thời có x "**giống với mẫu số vế phải**" (chứ chưa được rút gọn cho vế phải do còn chưa xác định được dấu của x để quy đồng).

Vậy sau khi liên hợp ta thu được bất phương trình: $\dfrac{x+3-3\sqrt{x+1}}{x} \geq \dfrac{3\sqrt{4-x}}{x}$. Vì bất phương trình này còn chồng chéo ở việc quy đồng (phải chia trường hợp $x > 0, x < 0$ mới quy đồng được) nên ta lại dùng "phương trình để xử lí bất phương trình" (cách lập bảng xét dấu).

Ta đi tìm nghiệm của tử số bằng cách giải phương trình

$x+3+3\sqrt{x+1}-3\sqrt{4-x}=0$ trên miền xác định của nó là $[-1; 4]$. Giải phương trình này thì không khó, nhưng nhận thấy vế phải là hàm tăng (khi x tăng thì vế phải tăng) $\Rightarrow$ dễ nhẩm được nghiệm duy nhất $x = 0$. Vậy tóm lại thì nếu chia hai trường hợp $x > 0$ và $x < 0$ thì cũng không khó để lí luận về nghiệm của bất phương trình nữa ☺.

Thực ra việc định hướng trên là cho những bạn nào "thường lao vào bài toán ngay" mà không tìm điều kiện trước. Nếu tìm điều kiện trước thì ta phát hiện vấn đề một cách đơn giản:

$x+3 \neq 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (x+3)^2 \neq 9(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$ → chứng tỏ mẫu số có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 3$ → tức là mẫu số này có thể phân tích thành dạng $x(x - 3)$

⇒ Định hướng rút gọn của bài toán.

Bài giải:

+) Điều kiện: $\begin{cases} 4 \geq x \geq -1 \\ x \neq 0 \\ x+3 \neq 3\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x \geq -1 \\ x \neq 0 \\ (x+3)^2 \neq 9(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x \geq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Với điều kiện trên thì bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{x-3}{\dfrac{(x+3)^2-9(x+1)}{x+3+3\sqrt{x+1}}} \geq \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3+3\sqrt{x+1})}{x(x-3)} \geq \frac{3\sqrt{4-x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3+3\sqrt{x+1}}{x} \geq \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \Leftrightarrow \frac{x+3+3\sqrt{x+1}-3\sqrt{4-x}}{x} \geq 0 \ (*).$$

+) Nếu $4 \geq x > 0$ và $x \neq 3$ thì $x+3+3\sqrt{x+1}-3\sqrt{4-x} > 0+3+3\sqrt{1}-3\sqrt{4}=0$

$\Rightarrow \dfrac{x+3+3\sqrt{x+1}-3\sqrt{4-x}}{x} \geq 0 \Rightarrow$ (*) được thỏa mãn.

+) Nếu $0 > x \geq -1$ thì $x+3+3\sqrt{x+1}-3\sqrt{4-x} < 0+3+3\sqrt{1}-3\sqrt{4}=0$

$\Rightarrow \dfrac{x+3+3\sqrt{x+1}-3\sqrt{4-x}}{x} \geq 0$, cũng thỏa mãn (*).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là S = [−1; 4] \ {0; 3}.

Bài 5: Tính tích phân: $I = \int\limits_2^5 \dfrac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}dx$.

Định hướng: Nhận thấy tích phân có chứa cả hàm vô tỉ, hữu tỉ và cả hàm mũ (các hàm khác tính chất) nên ta nghĩ đến phương pháp tích phân từng phần, hoặc tác dạng $I = \int\limits_a^b f(x) + \int\limits_a^b \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ để làm dễ dàng hơn. Nhưng với bài toán thì cách dùng tích phân từng phần gần như... vô hiệu. Vậy nên ta suy nghĩ đến hướng thứ hai là tách I thành dạng như trên. Một điều gợi ý cho chúng ta thực hiện theo phương án thứ hai nữa đó là tử số có phần giống với mẫu số (phải nói là rất giống), nên việc rút gọn bớt đi là điều đương nhiên:

$$\frac{e^x(3x-2)+\sqrt{x-1}}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}} = 1 + \frac{e^x(2x-1)}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}.$$

Như vậy số 1 tách ra thì dễ dàng lấy nguyên hàm, còn lượng $\dfrac{e^x(2x-1)}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}$ thì vẫn chưa có dạng $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$. Vậy phải làm sao? Không lẽ lại bỏ cuộc giữa chừng? Đừng lo, khi chưa gặp dạng này thì muốn xuất hiện dạng $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ thì nhiều lúc ta nhân phải cùng chia cả tử cả mẫu cho một lượng nào đó (và thường thì lượng này là lượng tương đồng, hoặc là nhân tử ở mẫu số hoặc tử số), hoặc có lúc là cả tử và mẫu với một lượng nào đó để xuất hiện được dạng đó. Thử xem nhé!

Với "cục diện" như thế này thì ta sẽ có hai hướng:

+ Hướng 1: Chia hai vế cho e^x ta được: $\dfrac{2x-1}{(x-1)+\dfrac{\sqrt{x-1}}{e^x}}$

$\Rightarrow$ Cũng chưa thấy xuất hiện dạng $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

+ Hướng 2: Chia hai vế cho $\sqrt{x-1}$ ta được: $\dfrac{\dfrac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}}}{e^x\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}}$.

Thử lấy đạo hàm mẫu $\left(e^x\sqrt{x-1}\right)' = \dfrac{e^x(2x-1)}{\sqrt{x-1}}$, thành công!

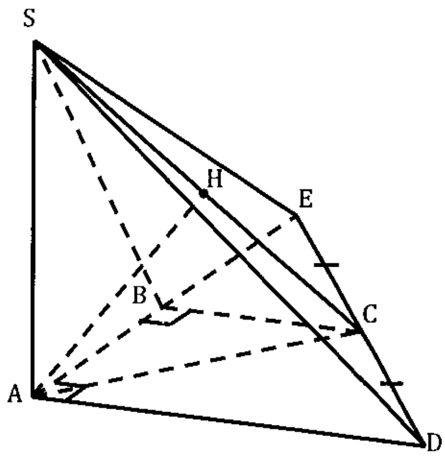
Bài giải:

Ta có: $I = \int\limits_2^5 dx + \int\limits_2^5 \dfrac{e^x(2x-1)}{e^x(x-1)+\sqrt{x-1}}dx$.

$I_1 = \int\limits_2^5 dx = x\Big|_2^5 = 5-2=3$.

$$I_2 = 2\int_2^5 \frac{\dfrac{e^x(2x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{e^x\sqrt{x-1}+1}dx = 2\int_2^5 \frac{\left(e^x\sqrt{x-1}+1\right)'}{e^x\sqrt{x-1}+1}dx = 2\ln\left(e^x\sqrt{x-1}+1\right)\Big|_2^5 = 2\ln\frac{2e^5+1}{e^2+1}$$ Vậy $I = I_1 + I_2 = 3 + \ln\dfrac{2e^5+1}{e^2+1}$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA = a, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a. Tính theo a thể tích khối chóp S.BCD và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).



Định hướng:

– Đường của khối chóp S.BCD là SA = 2a $\Rightarrow$ cần tính $S_{\Delta BCD}$ nữa là hoàn thành việc tính thể tích khối chóp. Điều này cũng không khó, khi mà đáy ABCD là một hình thang vuông biết độ dài 3 cạnh $\Rightarrow$ việc tính $S_{\Delta BCD}$ quá dễ dàng.

– Tính khoảng cách:

Khối chóp đã biết trước đường cao nên việc tính khoảng cách ta cứ "bám" vào cái chân đường cao thôi nhé.

Chân đường cao là A, trong khi khoảng cách yêu cầu tính là từ B đến (SCD)

$\Rightarrow$ cần xác định giao điểm E của AB với (SCD) để tính tỉ số $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{d(B, (SCD))}{d(A, (SCD))}$.

AB cắt CD tại E, dễ thấy $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ C là trung điểm ED, đồng thời

AE = 2AB = 2a $\Rightarrow$ ΔAED cân tại A $\Rightarrow$ AC $\perp$ CD $\Rightarrow$ (SAC) $\perp$ CD. Vậy trong mặt phẳng (SAC) cần dựng thêm AH $\perp$ SC thì AH = d(A, (SCD)). Từ đó dễ dàng tính được d(B, (SCD)).

Trong quá trình tư duy trên thì ta thấy rằng (SAC) $\perp$ CD $\Rightarrow$ ΔSCD vuông tại C

$\Rightarrow$ $S_{\Delta SCD}$ tính được $\Rightarrow$ khỏi cần dùng tỉ số khoảng cách mà dùng công công thức d(B, (SCD)) = $\dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SCD}}$ cũng là một cách làm hay!

Bài giải:

+) $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}.BC.d(D, BC) = \dfrac{1}{6}.SA.BC.AB = \dfrac{1}{6}.2a.a.a = \dfrac{a^3}{3}$ (đvtt).

+) Ta có: $CD = \sqrt{AB^2 + (AD - BC)^2} = \sqrt{a^2 + (2a-a)^2} = a\sqrt{2}$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ ΔACD cân tại C có AD = $\sqrt{2}$ CD $\Rightarrow$ ΔACD vuông cân tại C $\Rightarrow$ AC $\perp$ CD.

Mặt khác CD $\perp$ SA (do SA $\perp$ (ABCD)) nên CD $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ SC $\perp$ CD.

+) Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{6}$.

$$d(B, (SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{3V_{S.BCD}}{\frac{1}{2}.SC.CD} = \frac{6.\frac{a^3}{3}}{a\sqrt{6}.a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 7: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-4)^2 + y^2 = 4$ và điểm E(4; 1). Tìm điểm M trên trục tung sao cho từ điểm M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là các tiếp điểm sao cho đường thẳng AB đi qua E.

Định hướng: Đây là một bài toán liên quan đến tính chất tiếp tuyến và đầu tiên ta phải nắm vững được các tính chất liên quan. Ví dụ ở bài này ta sẽ có: $MA \perp AI; MB \perp BI; MI \perp AB$, từ đây ta hoàn toàn nghĩ đến tích vecto của chúng bằng 0, hoặc thêm chút nữa là $MA^2 + AI^2 = MB^2 + IB^2 = MI^2$. Như vậy đây chính là tập hợp những dữ kiện quan trọng để chúng ta đi tìm hướng làm. Điều đầu tiên ta phải làm đó chính là gọi dạng tham số của điểm M bởi đây chính là điều dễ dàng nhất và cũng dễ thấy nhất. Tiếp theo ta cũng dễ dàng tìm được $\overrightarrow{MI}$. Có thể nói rằng các dữ kiện ta nhìn bằng "mắt thường" gần như đã hết. Bây giờ ta hãy đi sâu chút nào, để ý thấy $\overrightarrow{MI}$ chính là VTPT của AB mà ta đã biết điểm E thuộc AB, từ $\overrightarrow{MI}$ ta sẽ tìm được VTCP của AB và có thể viết được phương trình tham số AB. Bài toán coi như đã có chìa khóa. Từ phương trình ta viết được ta sẽ gọi dạng tham số A hoặc B và bắt đầu kết hợp các dữ kiện của bài để hoàn thành bài toán. Ta sẽ gọi điểm $A \Rightarrow A(4+mt; 1+4t)$, thay A vào dữ kiện: $\begin{cases} A \in (C) \\ \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MA} = 0 \end{cases}$ bài toán đến đây coi như thành công, chú ý các bước tính toán để giải bài này một cách chính xác.

Các bạn chú ý: AB chính là đường giao của đường tròn tâm M bán kính MA với đường tròn (C). Cũng từ việc gọi dạng tham số điểm M sau đó sẽ tính được $MA = \sqrt{MI^2 - AI^2}$. Sau đó ta viết phương trình giao điểm hai đường tròn này và đó chính là phương trình AB, thay điểm E vào ta sẽ tìm được M.

Yêu cầu: nắm được các tính chất tiếp tiếp và các phương pháp tiếp cận bài toán để sau đó giải quyết bài toán này dễ dàng hơn

Bài giải:

+) Đường tròn (C) có tâm I(4; 0), bán kính R = 2. Điểm M ∈ trục Oy ⇒ M(0; m).

Ta có $\overrightarrow{IM} = (-4; m) \Rightarrow$ đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_{AB}} = (m;4)$.

Đường thẳng AB đi qua E(4; 1) và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{AB}}$ nên AB có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4 + mt \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

+) A thuộc đường thẳng AB ⇒ A(4 + mt; 1 + 4t).

Do $\begin{cases} A \in (C) \\ IA \perp MA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_A - 4)^2 + y_A^2 = 4 \\ \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (mt)^2 + (1+4t)^2 = 4 \\ (mt)^2 + 4mt + (1+4t)^2 - m(1+4t) = 0 \end{cases}$

+) Trừ vế theo vế ta được m = 4.

Vậy M(0; 4) là điểm cần tìm.

Câu 10: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \le z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}} + \frac{3z}{z+x}.$$

Định hướng, phân tích: Nhận định đầu tiên về bài toán này đó là P là một biểu thức đồng bậc với x, y, z nên có thể dùng cách dồn biến để đưa về bài toán với ít ẩn hơn. Ngoài ra, khi đánh giá hình thức của P thì thấy trong căn có điều "bất thường": các số hạng trong căn đều có nhân tử là 2, đồng thời:

$$\frac{z(2y+z)}{(y+z)^2} = 1 - \frac{y^2}{(y+z)^2} \Rightarrow \sqrt{2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}} = \sqrt{\frac{2x^2}{(x+y)^2} + \frac{2y^2}{(y+z)^2}}.$$

Đến đây thì trong căn có hai bình phương, đồng thời có nhân tử chung là 2 khiến ta liên tưởng đến bất đẳng thức $\sqrt{2(a^2+b^2)} \ge a + b \Rightarrow$ áp dụng ngay liền tay ☺.

$$P \ge \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{3z}{z+x}.$$

Đến đây thì dạng vế trái gần tương đương với Đề đại học Khối A – năm 2011. Ta chọn hai số hạng đầu tiên để áp dụng bất đẳng thức phụ $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$ (với a, b > 0 và ab ≥ 1):

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{x}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}$$

(do $x\le z\Rightarrow\frac{y}{x}.\frac{z}{x}=\frac{z}{x}\ge1$ nên có thể áp dụng bất đẳng thức bổ đề).

$\Rightarrow P\ge\frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}+\frac{3.\frac{z}{x}}{\frac{z}{x}+1}\Rightarrow$ dạng hàm $f(t)=\frac{2}{1+t}+\frac{3t}{t^2+1}$ (với t ≥ 1).

Bài giải:

+) Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$ (*) (với a, b > 0 và ab ≥ 1).

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+2\right)\left(1+ab\right)\ge2\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)ab+2ab\ge a^2+b^2+2a^2b^2$

$\Leftrightarrow\left(ab-1\right)\left(a-b\right)^2\ge0$, luôn đúng với mọi a, b dương và ab ≥ 1.

Đẳng thức xảy ra ⇔ ab = 1 hoặc a = b.

+) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki và (*) ta được:

$$P=\sqrt{2\left[\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2}\right]}+\frac{3z}{z+x}\ge\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{3z}{z+x}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{x}}+\frac{3.\frac{z}{x}}{\frac{z}{x}+1}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}+\frac{3.\frac{z}{x}}{\frac{z}{x}+1}$$

(do $x\le z\Rightarrow\frac{y}{x}.\frac{z}{x}=\frac{z}{x}\ge1$).

+) Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{1+t}+\frac{3t^2}{t^2+1}$ trên $\mathbb{D}=[1;+\infty)$.

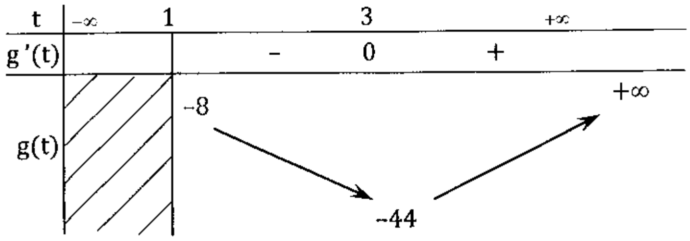
Ta có: $f'(t)=\frac{-2}{(1+t)^2}+\frac{6t\left(t^2+1\right)-2t.3t^2}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(t^4-3t^3-4t^2-3t+1\right)}{(1+t)^2\left(t^2+1\right)}$;

$f'(t)=0\Leftrightarrow t^4-3t^3-4t^2-3t+1=0$.

Đặt $g(t)=t^4-3t^3-4t^2-3t+1$ với t ≥ 1.

Ta có: $g'(t)=4t^3-9t^2-8t-3$; $g'(t)=0\Leftrightarrow(t-3)\left(4t^2+3t+1\right)=0\Leftrightarrow t=3$.

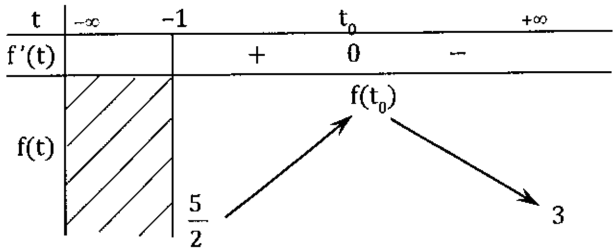
Lập bảng biến thiên của g(t):



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng g(x) chỉ có một nghiệm duy nhất $t_0 > 3$ trên miền $[1; +\infty) \Rightarrow$ đây chính là nghiệm của $f'(t)$.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{t+1}+\frac{3t^2}{t^2+1}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{t+1}+\frac{3}{1+\frac{1}{t^2}}\right) = 3$.

Lập bảng biến thiên của f(t):



Từ đó kết luận được $\min(f(t)) = \frac{5}{2} \Rightarrow P \ge \frac{5}{2}$. Kết luận $\min P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = z > 0; y > 0$.

Nhận xét: *Khi thấy đạo hàm không dương, hoặc nghiệm không đẹp thì ta đi giải phương trình* $f'(t) = 0$ *rồi cố gắng khảo sát, biện luận để lập được bảng biến thiên của f(t). Đây là một tư duy thường được sử dụng trong nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức dựa vào phương pháp dồn biến, nên hạn chế của nó "độ ì" trong cách trình bày. Bài toán này có một số cách trình bày ngắn gọn hơn như sau:*

Cách 1: Do $t \ge 1$ nên $f(t) \ge \frac{2}{1+t^2}+\frac{3t^2}{t^2+1} = \frac{5}{2}+\frac{t^2-1}{t^2+1} \ge \frac{5}{2}$ với $t \ge 1$.

Cách 2:

Cách này sử dụng khi đã biết được giá trị nhỏ nhất của bài toán.

$$f(t) - \frac{5}{2} = \frac{2}{1+t}+\frac{3t^2}{t^2+1}-\frac{5}{2} = \frac{\left(t^2+6t+1\right)\left(t-1\right)}{2\left(t+1\right)\left(t^2+1\right)} \ge 0 \Rightarrow f(t) \ge \frac{5}{2}.$$

Ngoài ra, do sự "hơi đối xứng" về hình thức của hai phân số $\frac{x}{x+y}$ và $\frac{y}{y+z}$,

ta có cách dồn biến khác như sau:

Đặt $P = f(y)$.

Lúc đó: $f'(y) = \frac{-x}{(x+y)^2}+\frac{(y+z)-y}{(y+z)^2} = \frac{(z-x)\left(y^2-zx\right)}{(x+y)^2(y+z)^2}$ (đạo hàm theo biến y).

- Nếu $z = x$ thì $P = \frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x}+\frac{3x}{x+x} = \frac{5}{2}$.

- Nếu $z > x$ thì $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{zx}$.

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow f(y) \ge f\left(\sqrt{xz}\right) = \frac{x}{x+\sqrt{xz}}+\frac{\sqrt{xz}}{\sqrt{xz}+z}+\frac{3z}{z+x} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}+\frac{3}{1+\frac{z}{x}}$.

Câu 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2(x-7y) = -12 & (1) \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y-3} = x^2 + y^2 - 10x - 5y + 22 & (2) \end{cases}$$

Lời giải chi tiết:

+) Điều kiện: $x \le 3$ và $y \ge 3$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 + 2x = (y-2)^3 + 2(y-2)$ (3).

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 2t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác (3) có dạng $f(x) = f(y-2) \Leftrightarrow x = y - 2 \Leftrightarrow y = x + 2$. Thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = x^2 + (x+2)^2 - 10x - 5(x+2) + 22 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2x^2 - 11x + 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (2x-7)(x-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \quad (5) \\ \dfrac{-1}{\sqrt{3-x}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = 2x-7 \quad (6) \end{array}\right.$$

+) (5) $\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$.

+) (6) $\Leftrightarrow (7-2x) - \dfrac{-1}{\sqrt{3-x}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = 0$

Vì $x \le 3$ nên $7 - 2x \ge 1$ và $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+1} < 1 \Rightarrow \left[(7-2x) - \dfrac{1}{\sqrt{3-x}+1}\right] + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 0 \Rightarrow$ (6) vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 4)$.

Bình luận: Phương trình (2) có vẻ "khó nhằn". Vì vậy ta xuất phát từ **(1)**.

Nhận thấy dạng có $(x^3 - y^3)$, ta nghĩ đến hai hướng:

+ Một là phân tích nhân tử (nhưng phần sau khó tạo ra nhân tử giống $(x^3 - y^3)$) $\Rightarrow$ chuyển hướng.

+ Hai là phương pháp hàm số:

Chuyển x về một vế có $x^3 + 2x \Rightarrow$ tạo vế trái có dạng tương tự rồi xét hàm tìm liên hệ giữa x và y $\Rightarrow y = x + 2$.

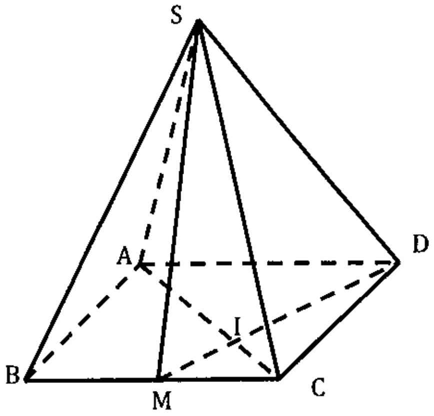
Thế vào (2) ta có $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2x^2 - 11x + 16$.

Ta sử dụng phương pháp nhẩm nghiệm rồi "ép" nghiệm. Ta tìm được nghiệm $x = 2 \Rightarrow$ ta sẽ liên hợp tạo ra nhân tử chung $(x - 2)$.

Sau khi tạo ra (6) có thể đánh giá như trên hoặc xét hàm:

$f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{3-x}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} - (2x-7)$ với $x \in [1; 3]$ (do $y = x + 2 \ge 3$).

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là trung điểm cạnh BC, góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và (ABCD) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.DCM theo a.



+) Từ giả thiết $\begin{cases} BC = 2a \\ CD = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MC = a \\ MD = a\sqrt{3} \\ AC = a\sqrt{6} \end{cases}$

+) Do MC // AD nên ta có:

$$\frac{MC}{AD} = \frac{MI}{ID} = \frac{IC}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} MI = \frac{1}{2}ID \\ IC = \frac{1}{2}IA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ID = \frac{2}{3}MD = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \\ IC = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow IC^2 + ID^2 = 2a^2 = CD^2 \Rightarrow \Delta ICD$ vuông tại I

$\Rightarrow MD \perp AC$ (1).

Lại có $SA \perp MD$ (2).Từ (1) và (2) có:

$MD \perp (SAC) \Rightarrow DM \perp SI$

Từ đó suy ra góc giữa 2 mặt phẳng (SMD) và (ABCD) là $\widehat{SIA} = 60^0$.

+) Xét tam giác SIA vuông tại A có $\widehat{SIA} = 60^0$ nên $SA = IA\tan 60^0 = 2a\sqrt{2}$..

+) Thể tích của hình chóp S.CDM là $V_{S.DCM} = \frac{1}{3}.SA.S_{DCM} = \frac{1}{3}.SA.\frac{1}{2}.CD.MC = \frac{1}{3}.2a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a = \frac{2a^3}{3}$ (đvtt).

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán là ở xác định góc giữa 2 mặt phẳng (SMD) và (ABCD) là $\widehat{SIA} = 60^0$. Để giải quyết vấn đề này chắc chắc chúng ta sẽ phải dựa vào những gì giả thiết đã cho. Có một tính chất mà các bạn cần nhớ và liên tưởng đến khi giả thiết cho. Đó là hình chữ nhật ABCD có $BC = AD\sqrt{2}$ thì luôn có $DM \perp CA$ (với M là trung điểm của BC). Khi đã có $DM \perp CA \Rightarrow DM \perp (SAI) \Rightarrow DM \perp SI$, kết hợp với $MD \perp AI$ thì theo định nghĩa góc giữa 2 mặt phẳng ta sẽ có ngay $\widehat{SIA} = 60^0$. Sau khi tìm ra được mấu chốt đó thì công việc còn lại là rất đơn giản. Dựa vào công thức thể tích $V = \frac{1}{3}S.h$. Mà S, h đều có thể tính thông qua những dữ kiện cho trên.

Câu 10: Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (xy + yz + 2zx) - \frac{8}{(x+y+z)^2 - xy - yz - 2}$, trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Lời giải chi tiết:

Từ giả thiết ta có:

$$P = (xy + yz + 2xz)^2 - \frac{8}{xy + yz + 2xz + 3}$$

Đặt $t = xy + yz + 2xz$

vì $0 \le (x + y + z)^2 = 1 + 2(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xy + yz + 2xz \ge -\frac{1}{2} + xz \ge -\frac{1}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2} = -1 + \frac{y^2}{2} \ge -1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Vậy $t \ge -1$

Khi đó P trở thành

$P = f(t) = t^2 - \frac{8}{t+3}, t \ge -1$

Ta có $f'(t) = 2t + \frac{8}{(t+3)^2} = \frac{2(t+1)^2(t+4)}{(t+3)^2} \ge 0. \forall t \ge -1$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$

$\Rightarrow$ Min P = min f(t) ..... = f(−1) = 3

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Bình luận:

Xét biểu thức P: có $xy + yz + 2xz$ có vẻ khó biến đổi. Vậy ta sẽ biến đổi:

$(x + y + z)^2 - xy - yz + 2$ thành $xy + yz + 2xz + 3$.

Quan trọng và khó khăn nhất là ta đi đánh giá $xy + yz + 2xz$.

Nhận thấy có $2xz$ khác với xy, yz suy ra dự đoán dấu bằng của bđt Cô si tại $x = z$

Ta lại dùng giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 1 + 2(xy + yz + xz) \geq 0$

Ta bắt đầu rút: $xy + yz + xz \geq -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow xy + yz + 2xz \geq -\dfrac{1}{2} + xz \geq -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2 + z^2}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1 - y^2}{2} = -1 + \dfrac{y^2}{2} \geq -1$

Cuối cùng, toàn thể anh chị em đại gia đình Lovebook muốn gửi riêng tới các em học sinh:

Nhất định các em sẽ làm được

Đừng bao giờ nản chí các em nhé!