PHAN NHẬT LINH

# CHINH PHỤC VDC

# GIẢI TÍCH

*( Dùng cho học sinh luyện thi Đại học năm 2022 )*

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ THÁNG 09/2021

# Lời nói đầu

*Các em học sinh, quý thầy cô và bạn đọc thân mến !*

*Cuốn sách **"Chinh phục Vận dụng – Vận dụng cao"** này được nhóm tác giả biên soạn với mục đích giúp các em học sinh khá giỏi trên toàn quốc chinh phục được các câu khó trong đề thi của Bộ giáo dục trong các năm gần đây. Trong mỗi cuốn sách, chúng tôi trình bày một cách rõ ràng và khoa học, tạo sự thuận lợi nhất cho các em học tập và tham khảo. Tất cả các bài tập trong sách chúng tôi đều tiến hành giải chi tiết 100% để các em tiện lợi cho việc so sánh đáp án và tra cứu thông tin.*

*Để có thể biên soạn đầy đủ và hoàn thiện bộ sách này, nhóm tác giả có sưu tầm, tham khảo một số bài toán trích từ đề thi của các Sở, trường Chuyên trên các nước và đặc biệt là tư liệu của quý thầy cô nhóm **"Strong Team Toán Vận dụng -Vận dụng cao".** Chân thành cảm ơn quý thầy cô đã sáng tạo ra các bài toán hay và các phương pháp giải toán hiệu quả nhất. Mặc dù nhóm tác giả đã tiến hành biên soạn và phản biện kĩ lưỡng nhất nhưng vẫn không tránh khỏi sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến phản hồi và đóng góp từ quý thầy cô, các em học sinh và bạn đọc để cuốn sách trở nên hoàn thiện hơn.*

*Cuối cùng, nhóm tác giả xin gửi lời chúc sức khỏe đến quý thầy cô, các em học sinh và quý bạn đọc. Chúc quý vị có thể khai thác hiệu quả nhất các kiến thức khi cầm trên tay cuốn sách này !*

**Trân trọng./**

**Phan Nhật Linh**

# MỤC LỤC

# CHƯƠNG 1: CÁC BÀI TOÁN VDC HÀM SỐ CHỌN LỌC

## I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### BÀI TOÁN 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP VÀ HÀM TỔNG

- Cho hàm số $u = u(x)$ xác định với $x \in (a;b)$ và $u(x) \in (c;d)$. Hàm số $f\left[u(x)\right]$ cũng xác định với $x \in (a;b)$ thì ta có các nhận xét sau đây:
  - Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a;b)$ . Khi đó, hàm số $f\left[u(x)\right]$ đồng biến với $x \in (a;b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c;d)$.
  - Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a;b)$ . Khi đó, hàm số $f\left[u(x)\right]$ nghịch biến với $x \in (a;b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c;d)$.

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Cho đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ hoặc $y = f'(x)$. Yêu cầu tìm khoảng đơn điệu của hàm số dạng $g(x) = f\left[u(x)\right] + v(x)$.

**PHƯƠNG PHÁP:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của $g(x)$ theo công thức $g'(x) = u'(x).f'\left[u(x)\right] + v'(x)$

**Bước 2:** Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'(x) = 0 \\ f'\left[u(x)\right] = -\dfrac{v'(x)}{u'(x)},\ u'(x) \neq 0. \end{array}\right.$

**Bước 3:** Lập bảng xét dấu của $g'(x)$

**Bước 4:** Từ bảng xét dâú để xét các khoảng đơn điệu của hàm số và có thể mở rộng tìm các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

### BÀI TOÁN 2: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Xác định khoảng đơn điệu của hàm chứa giá trị tuyệt đối

**PHƯƠNG PHÁP:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

**Bước 2:** Dựa vào đồ thị lập bảng xét dấu

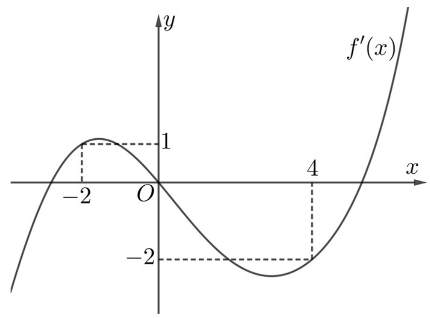
**Bước 3:** Thực hiện các yêu cầu bài toán đưa ra.

**LƯU Ý:**

- Đối với các bài toán vận dụng và vận dụng cao thì không có một cách làm nào có thể bao quát hết được. Khi gặp các bài toán này, chúng ta cần áp dụng linh hoạt các phương pháp và kiến thức lại với nhau.
- Một số phương pháp thường sử dụng: đặt ẩn phụ, biện luận và tối ưu nhất là phương pháp ghép trục. Trong lời giải các bài tập vận dụng, chúng ta sẽ thấy được sự kết hợp giữa các phương pháp trên.

# ĐỀ BÀI

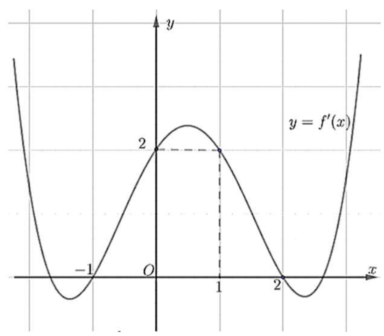
**Câu 1:** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.




Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;0)$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ biết $g(x)=3f(-x^3-3x+m)+(x^3+3x-m)^2(-2x^3-6x+2m-6)$.




**A.** $23$. **B.** $21$. **C.** $5$. **D.** $17$.

**Câu 3:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $g(x)=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

**A.** $4041$. **B.** $4042$. **C.** $2021$. **D.** $4039$.

**Câu 4:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $R$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Hàm số $y=3f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

**A.** $(3;+\infty)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)(x^2+2mx+9)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-4)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

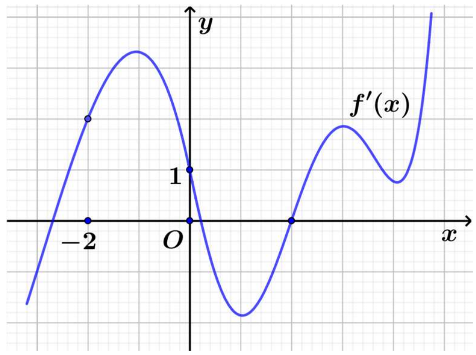
**Câu 6:** Cho hàm số $f(x)=-x^4-(4-m^2)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để $h(x)=g[f(x)]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

**A.** $13$. **B.** $12$. **C.** $7$. **D.** $6$.

**Câu 7:** Cho hàm số $g(x)=f(1-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m+6\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m$ để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 8:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hỏi hàm số $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

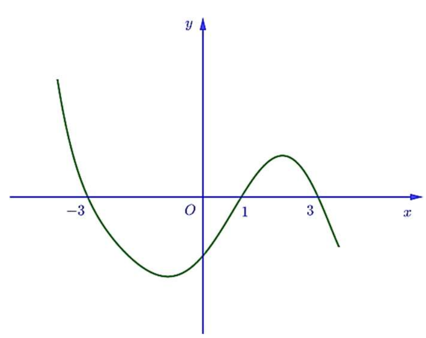



**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$

**Câu 9:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f(x^2+4x+7)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

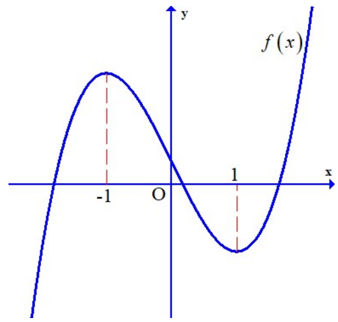
**Câu 10:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thoả $f(-3)=f(3)=\dfrac{1}{2}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau:




Hỏi hàm số $g(x)=\left[f(3-x)\right]^2-f(3-x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây:

**A.** $(-3;1)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;6)$.

**Câu 11:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f(x^3-3x-1)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b);(m;n);(p;q)$. Giá trị của biểu thức $(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2)$ bằng:




**A.** $9$. **B.** $12$. **C.** $14$. **D.** $10$.

**Câu 12:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

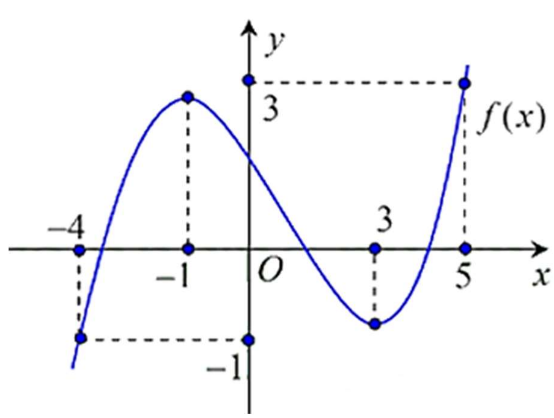
**A.** $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**A.** $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

**Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $f(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

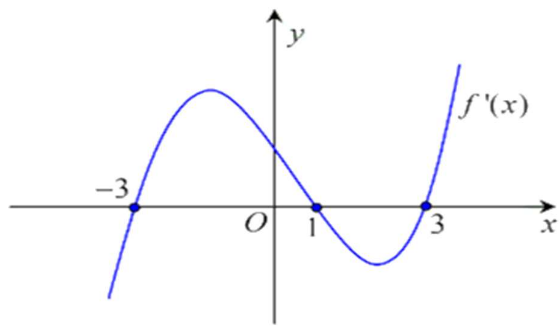



**A.** $(0;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(-5;-3)$.

**Câu 15:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'\left(x\right)=x\left(x-2\right)\left(x+1\right)$. Hỏi tham số thực $m$ thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+m\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$?

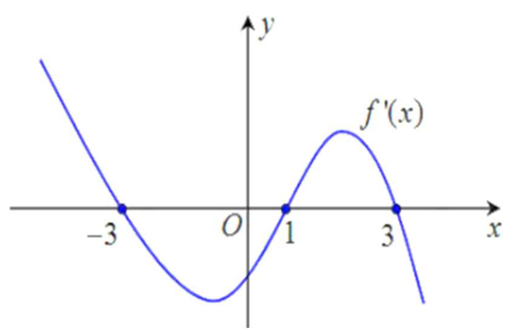
**A.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(1;4\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

**Câu 16:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m$ thuộc đoạn $\left[-20;20\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;3\right)$?




**A.** $19$. **B.** $23$. **C.** $18$. **D.** $17$.

**Câu 17:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-30;30\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3x-m\right)$ đồng biến trên $\left[-2;-1\right]$.




**A.** $24$. **B.** $25$. **C.** $26$. **D.** $31$.

**Câu 18:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-20;20\right]$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+1}{2m-3-\sqrt{x^2-2x+2}}$ đồng biến trên $\left(-\infty;1\right)$?

**A.** $21$. **B.** $19$. **C.** $22$. **D.** $20$.

**Câu 19:** Cho hai hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+4a}{x+b}$ và $g\left(x\right)=\dfrac{x+b}{x+a^2}$ cùng đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Gọi $a_o$ và $b_o$ lần lượt là những số nguyên dương nhỏ nhất của *a* và *b* thỏa mãn. Giá trị của biểu thức $T=a_o+b_o$ tương ứng bằng:

**A.** 25. **B.** 26. **C.** 27. **D.** 28.

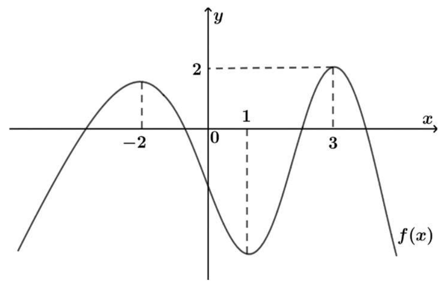
**Câu 20:** Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 - 3(m^2+m-1)x^2 + 3(m-1)x - m - 1$ với $m$ là tham số. Biết rằng với mọi tham số $m$ thì hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b-a)$ bằng:

**A.** $4\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{6}$.

**Câu 21:** Cho hàm số $f(x) = 3m^2x^4 - 8mx^3 + 6x^2 + 12(2m-1)x + 1$ với $m$ là tham số. Biết rằng với mọi tham số $m$ thì hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$; với *a, b* là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b-a)$ sẽ bằng:

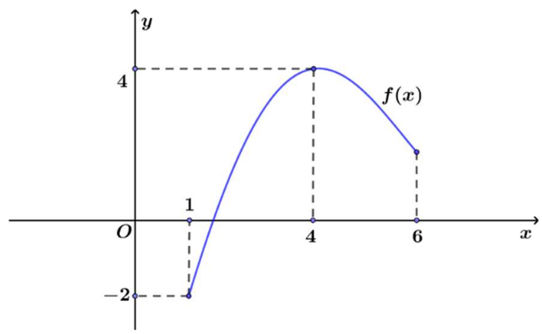
**A.** 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



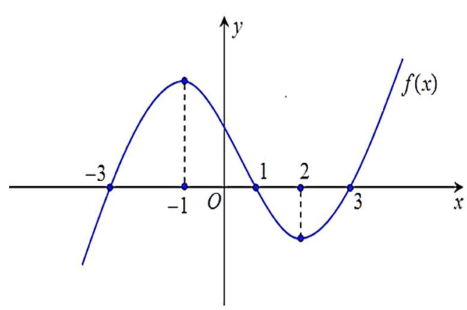

**A.** $(-3;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Câu 23:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;2021)$ để hàm số $y = \dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$?



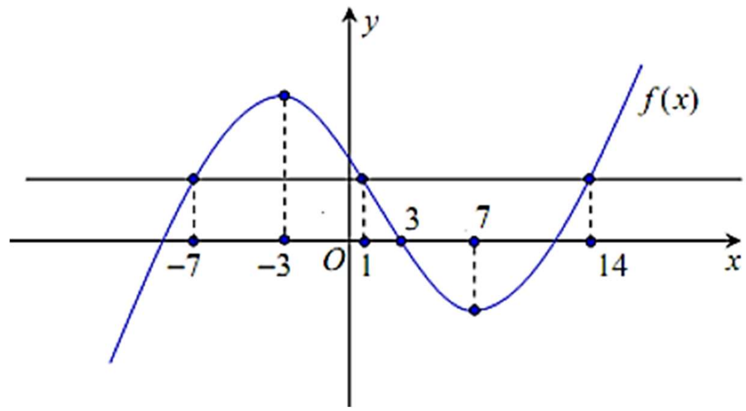

**A.** 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 22.

**Câu 24:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = (f(x))^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



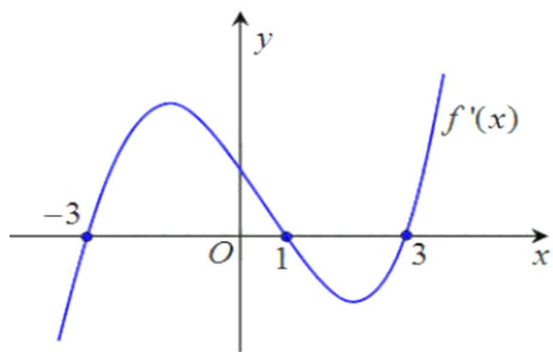
**A.** $(1;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-3;-1)$.

**Câu 25:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=[f(x)]^2-6f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



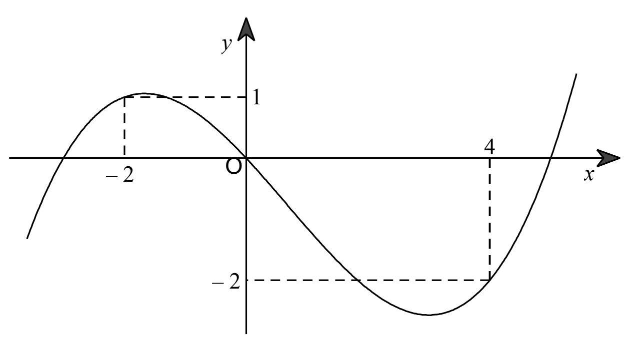

**A.** $(-3;1)$. **B.** $(7;14)$. **C.** $(14;+\infty)$. **D.** $(1;7)$.

**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x-m)$ nghịch biến trên $(-1;2)$.




**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $28$. **D.** $23$.

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

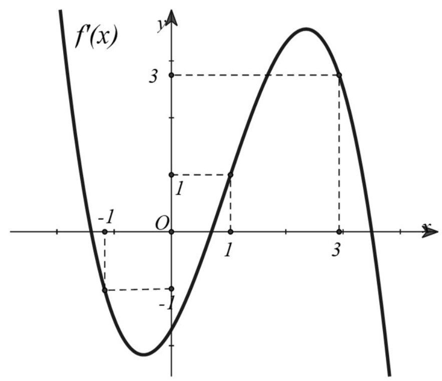



**A.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

**Câu 28:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-40;40]$ để hàm số $g(x) = \left|x^2 - 4mx + m - 3\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

**A.** 79. **B.** 39. **C.** 80. **D.** 40.

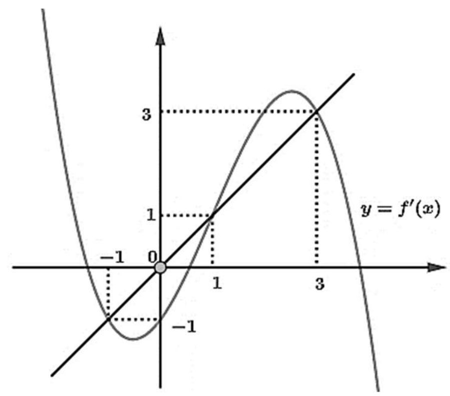
**Câu 29:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ




Hàm số $g(x) = 2f\left(|x-1|\right) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

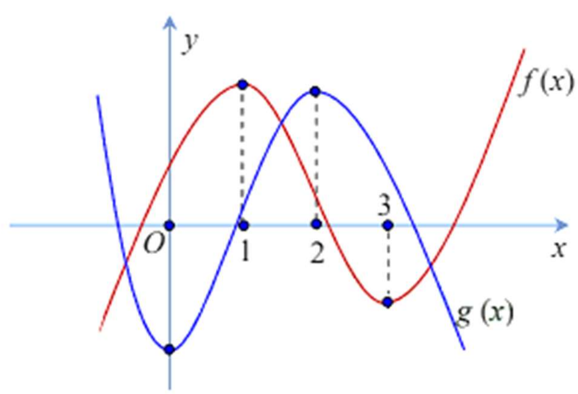
**Câu 30:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.




Hàm số $g(x) = 2f\left(|x-1|\right) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

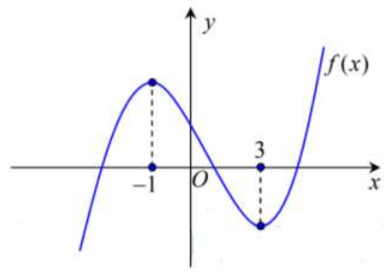
**A.** $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:




**A.** 0. **B.** $-2$. **C.** $-4$. **D.** 3.

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Khi đó hàm số $f(x^3+3x-1)$ nghịch biến trên:




**A.** $(1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

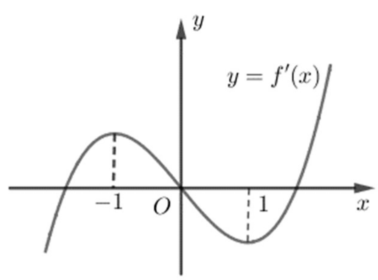
**Câu 33:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x^2-2x)}{f(x^2-2x)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

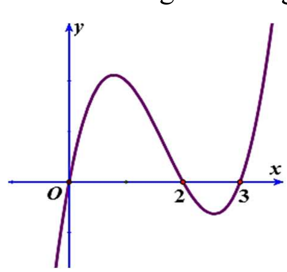
**A.** $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 34:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương $a$ để hàm số $y=|4f(\sin x)+\cos 2x-a|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?




**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** Vô số. **D.** $5$.

**Câu 35:** Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4. Đồ thị của hàm số $y=f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?




**A.** $(-2;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

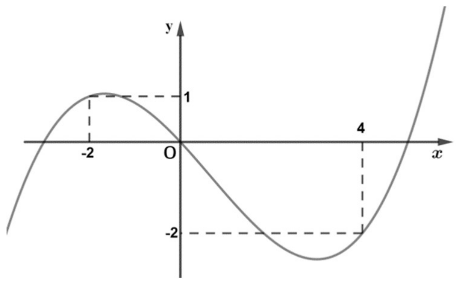
**Câu 36:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn $-10<m<10$ và hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 6 **D.** 1.

**Câu 37:** Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\, a\neq 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số $m$ để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

**A.** 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

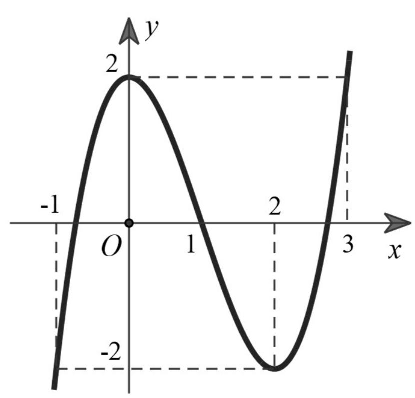
**Câu 38:** Có bao nhiêu giá trị thực của $m$ để hàm số $y=mx^9+(m^2-3m+2)x^6+(2m^3-m^2-m)x^4+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 39:** Cho hàm số $f(x)=\frac{2}{5}m^2x^5-\frac{8}{3}mx^3-(m^2-m-20)x+1$ ($m$ là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

**Câu 40:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



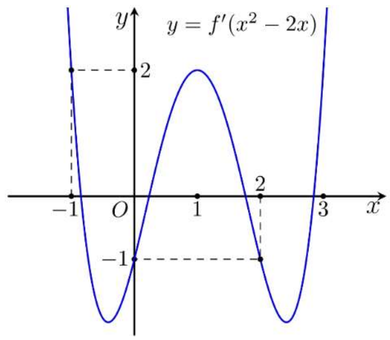

Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$, với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong $S$ bằng:

**A.** 4. **B.** 11.
**C.** 14. **D.** 20.

**Câu 41:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $f(x)=2(m+1)x^3+3(m^2-5m-4)x^2-6(3m^2-6m-19)x-32\sqrt{(x+1)^3}+1$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$. Số phần tử của tập hợp $S$ là

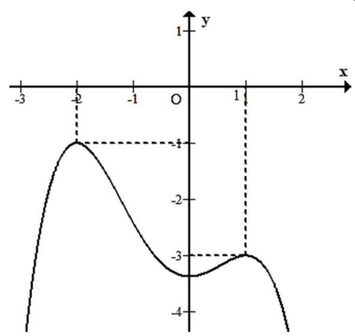
**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 42:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x^2-2x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x^2-1)+\frac{2}{3}x^3+1$ đồng biến trên khoảng nào?




**A.** $(-3;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

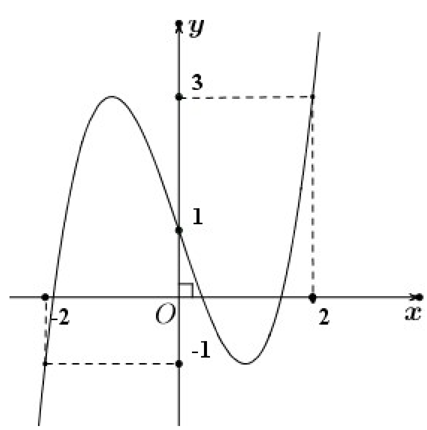
**Câu 43:** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.




Hàm số $g(x)=f(3x+1)-3(2x^3+2x^2-3x+5)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

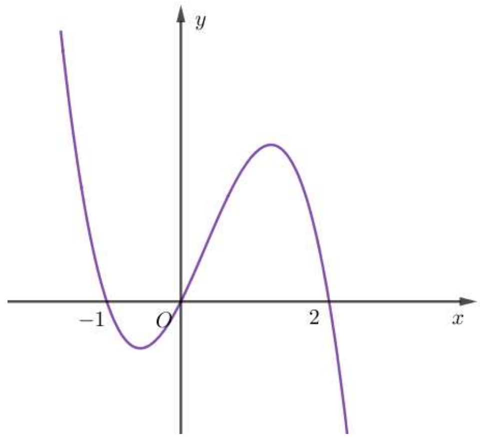
**A.** $(-\infty;-2),(1;+\infty)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;2)$.

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(2x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$. Đồng biến trên khoảng nào sau đây?



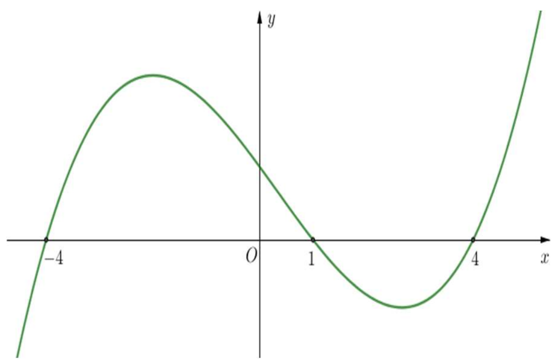

**A.** $(-\infty;-3)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Câu 45:** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(3-2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=f(x^2+1)$ nghịch biến trên khoảng nào?




**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

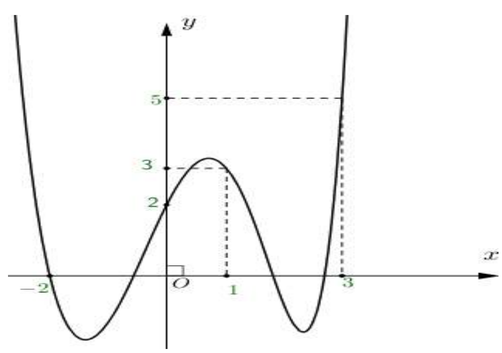
**Câu 46:** Cho hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g(x)=(f(2-x))'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ như dưới




Hàm số $y=f(x^2+2)-x^3+2x^2-x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

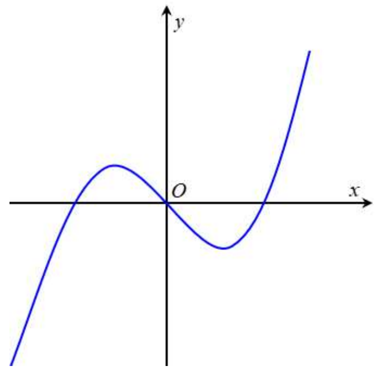
**Câu 47:** Cho hai hàm số $f(x);g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y=f'(x^2+4x)$ như hình vẽ.




Hàm số $g(x)=f(x^2-4)-\frac{2}{3}x^3+2021$ nghịch biến trong khoảng nào?

**A.** $(0;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(2,3)$. **D.** $(4;6)$

**Câu 48:** Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]'$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ:




Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $h(x)=f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 49:** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số $g(x)=f\left(2x^3-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};+\infty\right)$.

**Câu 50:** Cho hàm số $y=f(x^2-2)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(-1)$ | $\searrow$ | $f(-2)$ | $\nearrow$ | $f(-1)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

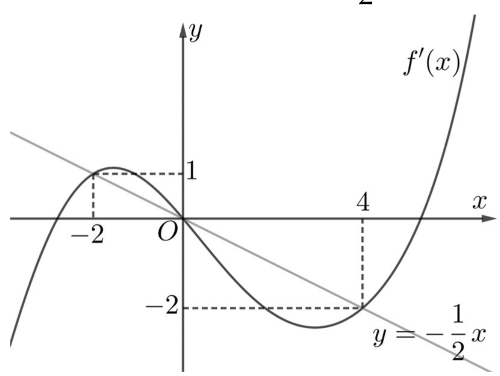
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.B | 2.A | 3.A | 4.B | 5.B | 6.D | 7.C | 8.C | 9.C | 10.D |
| 11.B | 12.C | 13.D | 14.A | 15.B | 16.C | 17.C | 18.A | 19.B | 20.D |
| 21.C | 22.A | 23.C | 24.D | 25.B | 26.A | 27.A | 28.C | 29.A | 30.A |
| 31.B | 32.B | 33.C | 34.B | 35.D | 36.C | 37.B | 38.B | 39.B | 40.C |
| 41.D | 42.C | 43.C | 44.D | 45.D | 46.C | 47.B | 48.D | 49.A | 50.C |

**Câu 1: Chọn B**

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

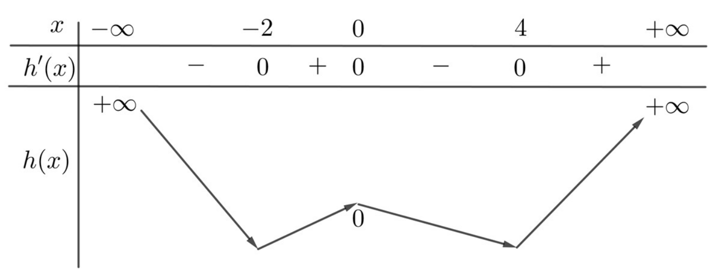
Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0)=4f(0)=0$.

Ta có $h'(x)=4f'(x)+2x$. Do đó $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2}x$.

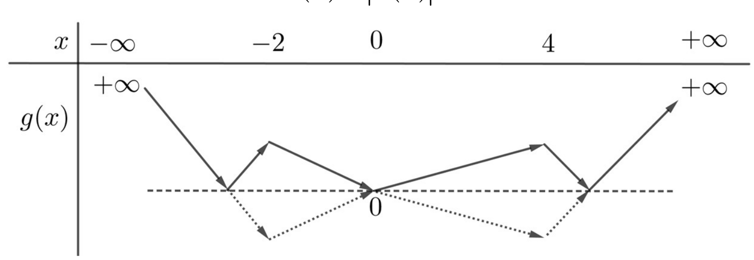



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x$, ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;0;4\}$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:




Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$ như sau:




Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

**Câu 2: Chọn A**

$g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2\left(-x^3-3x+m-3\right)$

$=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^3-6\left(-x^3-3x+m\right)^2$

Ta có

$g'(x)=-9\left(x^2+1\right)f'\left(-x^3-3x+m\right)-18\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)^2+36\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$

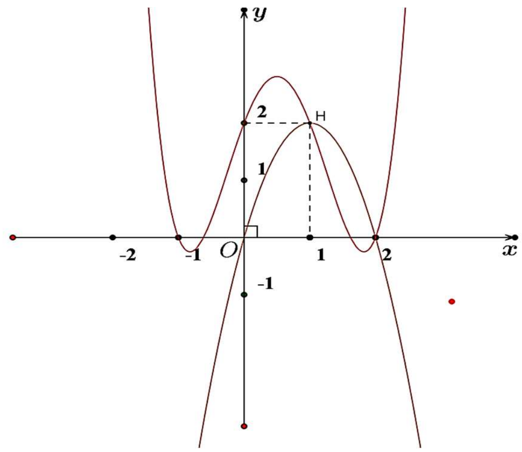
$g'(x)\le 0\ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2-4\left(-x^3-3x+m\right)\ge 0\ \forall x\in(-1;2)$

$\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)\ge -2\left(-x^3-3x+m\right)^2+4\left(-x^3-3x+m\right)\ \forall x\in(-1;2)$

Đặt $t=-x^3-3x+m$. Với $x\in(-1;2)$ có $t'=-3x^2-3<0\ \forall x\in(-1;2)\Rightarrow t\in(m-14;m+4)$

Xét bất phương trình (1) $f'(t)\ge -2t^2+4t\quad(1)$

Đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t^2+4t$ trên cùng hệ trục tọa độ:




Để (1) luôn đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ \left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ t\ge 2 \end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ t\le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ t\ge 2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+4\le 1 \\ m-14\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ m\ge 16 \end{array}\right.$.

Do $m\in[-20;20]$ nên số giá trị của $m$ là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$.

**Câu 3: Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ có $f'(x)=3x^2-6mx-3(m+2)$

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0 \end{cases},\forall x\in(0;3) \\ \begin{cases} f(x)\le 0 \\ f'(x)\le 0 \end{cases},\forall x\in(0;3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0)\ge 0 \\ 3x^2-6mx+3(m+2)\ge 0 \end{cases},\forall x\in(0;3) \\ \begin{cases} f(0)\le 0 \\ 3x^2-6mx+3(m+2)\le 0 \end{cases},\forall x\in(0;3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m-2 \ge 0 \\ m \le \dfrac{x^2-2}{2x+1}, \forall x \in (0;3) \end{cases} \\ \begin{cases} -m-2 \le 0 \\ m \ge \dfrac{x^2-2}{2x+1}, \forall x \in (0;3) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \le -2 \\ m \le -2 \end{cases} \\ \begin{cases} m \ge -2 \\ m \ge 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$$ . Vì $m \in [-2021;2021] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2021 \le m \le -2 \\ 1 \le m \le 2021 \end{array}\right.$

Vậy có tất cả 4041 giá trị $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 4: Chọn B**

Ta đặt: $y = g(x) = f(2x-1) - 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$.

$\Rightarrow g'(x) = 6f'(2x-1) - 12x^2 + 30x - 18 = 6\left[f'(2x-1) - 2x^2 + 5x - 3\right]$.

Có $f'(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \\ x=2 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $2$ | | $\frac{5}{2}$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(2x-1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $-2x^2+5x-3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | | $?$ | $-$ | | $?$ | | $?$ | | $?$ | |

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

**Câu 5: Chọn B**

Ta có $g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x-4)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi

$(2x+3)f'(x^2+3x-4) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-4) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-4)^2(x^2+3x)\left[(x^2+3x-4)^2 + 2m(x^2+3x-4) + 9\right] \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) (1)$

Đặt $t = x^2+3x-4$ $(t>0)$ do $x \in (1;+\infty)$

$(1) \Rightarrow t^2(t+4)(t^2+2mt+9) \ge 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow t^2+2mt+9 \ge 0, \forall t > 0$

$\Leftrightarrow m \ge -\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{9}{t}\right), \forall t > 0 \Leftrightarrow m \ge -3$

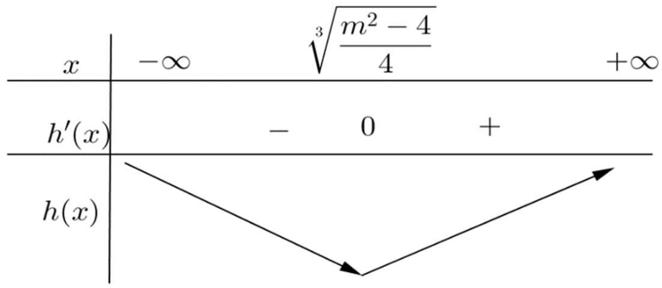
Do $m$ nguyên âm nên $m \in \{-3;-2;-1\}$.

**Câu 6: Chọn D**

Ta có $h(x) = g\left[f(x)\right] \Rightarrow h'(x) = g'\left[f(x)\right].f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g'\left[f(x)\right]=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3f^2(x)+10f(x)-2020=0\,(vn) \\ -4x^3-\left(4-m^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^3=\dfrac{m^2-4}{4} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{m^2-4}{4}}$

Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $\sqrt[3]{\dfrac{m^2-4}{4}} \le 2 \Leftrightarrow -6 \le m \le 6$.

Vậy có $6$ giá trị nguyên dương $m$ thỏa mãn.

**Câu 7: Chọn C**

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x)=-f'(1-x) \Rightarrow f'(1-x)=-g'(x)$.

Suy ra $f'(1-x)=-(3-x)^{2021}(2+x)^{2020}\left[x^2+(m-2)x-3m++6\right]$

$\Leftrightarrow f'(1-x)=-\left[2+(1-x)\right]^{2021}\left[3-(1-x)\right]^{2020}\left[(1-x)^2-m(1-x)-2m+5\right]$

Vậy $f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-m.x-2m+5\right)$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

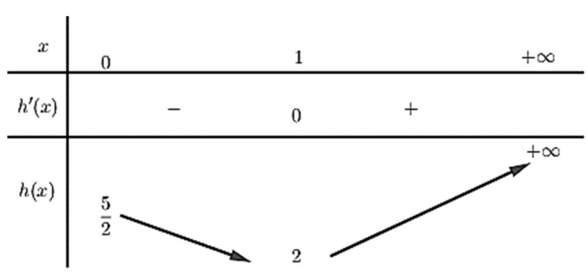
$\Leftrightarrow f'(x)=-(2+x)^{2021}(3-x)^{2020}\left(x^2-m.x-2m+5\right)\le 0 \quad \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2-mx-2m+5\ge 0$, $\forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow m\le \dfrac{x^2+5}{x+2}\ \forall x\in(0;+\infty).(*)$

Xét $h(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}=x-2+\dfrac{9}{x+2}$, $x\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow h'(x)=1-\dfrac{9}{(x+2)^2} \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\dfrac{9}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=3 \\ x+2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

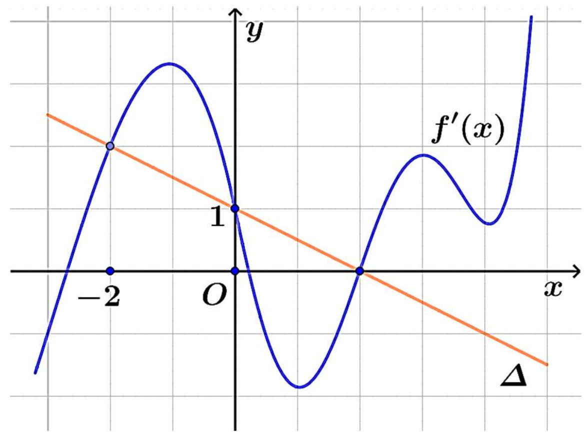


$(*) \Leftrightarrow m\le 2$, mà $m$ nguyên dương suy ra $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của $m$ thỏa mãn.

**Câu 8: Chọn C**

Xét hàm số: $g(x)=4f(x)+x^2-4x+2021 \Rightarrow g'(x)=4.f'(x)+2x-4=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)\right]$

Để hàm số nghịch biến thì: $g'(x)=4\cdot\left[f'(x)-\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)\right]\le 0 \Leftrightarrow f'(x)\le\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)$




Trên hệ trục ta nhận thấy đường thẳng $\Delta: y=-\dfrac{x}{2}+1$ đi qua ba điểm $(-2;2),(0;1),(2;0)$.

Để $f'(x)\le\left(-\dfrac{x}{2}+1\right)$ thì đồ thị hàm số $\left(y=f'(x)\right)$ phải nằm dưới đường thẳng $\Delta$.

Tương ứng với miền $\left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ 0\le x\le 2\end{array}\right.$.

**Câu 9: Chọn C**

Ta có: $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$.

Khi đó: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4\end{array}\right.$. Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4).f'\left(x^2+4x+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x+4=0 \\ f'\left(x^2+4x+7\right)=0\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+4x+7=3 \\ x^2+4x+7=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ (x+2)^2=0 \\ x=-1 \\ x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=-3\end{array}\right..$$

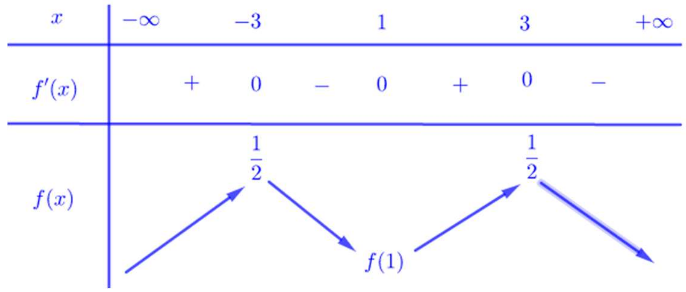
Bảng xét dấu $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

**Câu 10: Chọn D**

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:




Suy ra $f\left(x\right) \le \dfrac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác: $g'\left(x\right) = -2f'\left(3-x\right)f\left(3-x\right) + f'\left(3-x\right) = -f'\left(3-x\right)\left(2f\left(3-x\right)-1\right)$

Ta có $g'\left(x\right) \le 0 \Leftrightarrow -f'\left(3-x\right)\left(2f\left(3-x\right)-1\right) \le 0$

$$\Leftrightarrow f'\left(3-x\right) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x > 3 \\ -3 < 3-x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 < x < 6 \end{array}\right.$$

Do đó hàm số $g$ đồng biến trên khoảng $\left(2;6\right)$.

**Câu 11: Chọn B**

Đặt $u = x^3 - 3x - 1 \Rightarrow g\left(x\right) = f\left(u\right) = f\left(x^3 - 3x - 1\right) \Rightarrow g'\left(x\right) = \left(3x^2 - 3\right)f'\left(x^3 - 3x - 1\right)$

$$\Rightarrow g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x - 1 = -1 \\ x^3 - 3x - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$   $-\sqrt{3}$   $-1$   $0$   $1$   $\sqrt{3}$   $2$   $+\infty$ |
|---|---|
| $u'$ | $+$   \|   $+$   $0$   $-$   \|   $-$   $0$   $+$   \|   $+$   \|   $+$ |
| $f'(u)$ | $+$   $0$   $-$   $0$   $-$   $0$   $+$   $0$   $+$   $0$   $-$   $0$   $+$ |
| $g'(x)$ | $+$   $0$   $-$   $0$   $+$   $0$   $-$   $0$   $+$   $0$   $-$   $0$   $+$ |

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};-1\right), \left(0;1\right), \left(\sqrt{3};2\right)$.

Vậy giá trị của biểu thức $\left(a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2\right) = 12$

**Câu 12: Chọn C**

**Cách 1:** Tập xác định của hàm số $f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$ là $\left[-2;2\right]$

Đạo hàm: $g'\left(x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} f'\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$

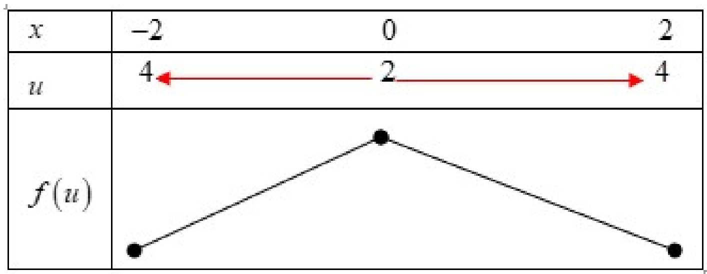
Hàm số đồng biến thì $g'(x)\ge 0$. Từ tập xác định ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \left[\begin{array}{l}-3\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\ 4-\sqrt{4-x^2}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 4\\ 4-\sqrt{4-x^2}\le -3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \left[\begin{array}{l}4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\ VN\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\\ VN\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \sqrt{4-x^2}\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \sqrt{4-x^2}\le 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ VN\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \forall x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-2;0).$$

**Cách 2:** Ghép trục để tối ưu. $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)=f(u),u=4-\sqrt{4-x^2}$, với $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép




Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

**Câu 13: Chọn D**

**Cách 1:**

Tập xác định của hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ là $D=[-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}}f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x)\le 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ -1\le -1+\sqrt{7+6x-x^2}\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \left[\begin{array}{l}-1+\sqrt{7+6x-x^2}\le -1\\ -1+\sqrt{7+6x-x^2}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\ge 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \left[\begin{array}{l}x\le 3-\sqrt{7}\\ x\ge 3+\sqrt{7}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ 3-\sqrt{7}\le x\le 3+\sqrt{7}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x\le 3-\sqrt{7}\\ 3<x\le 3+\sqrt{7}\end{array}\right..$$

**Cách 2:** Sử dụng phương pháp ghép trục

$g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)=f(u)$ với $u=-1+\sqrt{7+6x-x^2}$ và $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

| $x$ | $-1$ | | $3-\sqrt{7}$ | | $3$ | | $3+\sqrt{7}$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $-1$ | $\leftarrow$ | $2$ | $\leftarrow$ | $3$ | $\rightarrow$ | $2$ | $\rightarrow$ | $4$ |
| $f(u)$ | $\bullet$ | $\searrow$ | $\bullet$ | $\nearrow$ | $\bullet$ | $\searrow$ | $\bullet$ | $\nearrow$ | $\bullet$ |

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$

## Câu 14: Chọn A

Xét hàm số: $g(x)=f(f(x))\Rightarrow g'(x)=f'(x).f'[f(x)]$

Hàm số đồng biến khi $g'(x)=f'(x).f'[f(x)]\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\ge 0\\ f'[f(x)]\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x)\le 0\\ f'[f(x)]\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}f(x)\le -1\\ f(x)\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 3\\ -1\le f(x)\le 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\le -4\\ x\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le\le 3\\ -4\le x\le 5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -4\\ -1\le x\le 3\\ x\ge 5\end{array}\right.$$

## Câu 15: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ có biểu thức đạo hàm:

$g'(x)=3x^2.f'\left(x^3+m\right)=3x^2.\left(x^3+m\right)\left(x^3+m-2\right)\left(x^3+m+1\right)$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt[3]{m+1}$ | | $-\sqrt[3]{m}$ | | $-\sqrt[3]{m-2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì ta phải có: $\sqrt[3]{m-2}\le 1\Leftrightarrow m\ge 1\Leftrightarrow m\in[1;+\infty)$

**Câu 16: Chọn C**

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x-m)\Rightarrow g'(x)=2(x-1).f'(x^2-2x-m)$

Với $\forall x\in(1;3)\Rightarrow x-1\ge 0$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì:

$g'(x)=2(x-1).f'(x^2-2x-m)\ge 0\Leftrightarrow f'(x^2-2x-m)\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-m\ge 3\\-3\le x^2-2x-m\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le x^2-2x-3\\x^2-2x-1\le m\le x^2-2x+3\end{array}\right.,\forall x\in(1;3)$$

Suy ra với $\forall x\in(1;3)$ ta có:

$$\left[\begin{array}{l}m\le\min(x^2-2x-3)\\\max(x^2-2x-1)\le m\le\min(x^2-2x+3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 4\\2\le m\le 2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-20\le m\le -4\\m=2\end{array}\right.$$

Do đó có $18$ giá trị $m$ nguyên thỏa mãn.

**Câu 17: Chọn C**

Ta có: $g'(x)=3(x^2-1)f'(x^3-3x-m)$

Với $\forall x\in[-2;-1]\Rightarrow x^2-1\ge 0$

Để hàm số $g(x)=f(x^3-3x-m)$ đồng biến trên $[-2;-1]$ thì

$3(x^2-1)f'(x^3-3x-m)\ge 0,\forall x\in[-2;-1]$

$$\Leftrightarrow f'(x^3-3x-m)\ge 0,\forall x\in[-2;-1]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x-m\le -3,\forall x\in[-2;-1]\\1\le x^3-3x-m\le 3,\forall x\in[-2;-1]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x\le m-3,\forall x\in[-2;-1]\\\begin{cases}m+1\le x^3-3x\\m-3\ge x^3-3x\end{cases},\forall x\in[-2;-1]\end{array}\right.\quad(1)$$

Xét hàm số $h(x)=x^3-3x\Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\notin[-2;-1]\\x=-1\in[-2;-1]\end{array}\right.$

Ta có: $h(-2)=-2$ và $h(-1)=2\Rightarrow\max\limits_{[-2;-1]}h(x)=2$ và $\min\limits_{[-2;-1]}h(x)=-2$

$$\text{Từ }(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\max\limits_{[-2;-1]}h(x)\le m-3\\\begin{cases}m+1\le\min\limits_{[-2;-1]}h(x)\\m+3\ge\max\limits_{[-2;-1]}h(x)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le m-3\\\begin{cases}m+1\le -2\\m+3\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 5\\\begin{cases}m\le -3\\m\ge -1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 5.$$

Mà $m\in[-30;30]\Rightarrow 5\le m\le 30$, do đó có $26$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 18: Chọn A**

Đặt $u=\sqrt{x^2-2x+2}$. Xét trên $(-\infty;1)$ thì $u\in(1;+\infty)$

Để $(-\infty;1)$ nằm trong TXĐ của hàm số đã cho thì: $2m-3\ne\sqrt{x^2-2x+2},\forall x\in(-\infty;1)$
$\Leftrightarrow 2m-3\le 1\Leftrightarrow m\le 2$

Ta có hàm số $y=\dfrac{u+1}{2m-3-u}\longrightarrow y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot u'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ thì $y'=\dfrac{2m-2}{(2m-3-u)^2}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}>0,\ \forall x\in(-\infty;1)$

Suy ra $2m-2<0\Leftrightarrow m<1$

Từ, suy ra $m<1$, mà $m\in[-20;20]$, $m\in\mathbb{Z}\longrightarrow m=\{-20,-19,...,0\}$.

Vậy có 21 giá trị $m$ nguyên thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 19: Chọn B**

Ta có: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{b-4a}{(x+b)^2}>0\Rightarrow b>4a(*) \\ g'(x)=\dfrac{a^2-b}{(x+a^2)}>0\Rightarrow a^2>b(**)\end{cases}\Rightarrow a^2>4a\Rightarrow a>4\Rightarrow a_o=5$

Từ $(*)\Rightarrow b>4a_0=20\Rightarrow b_o=21\Rightarrow T=26$.

**Câu 20: Chọn D**

Ta có $f'(x)=3(m-1)x^2-6(m^2+m-1)x+3(m-1)$

Hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$ nên

$f'(x)=3(m-1)x^2-6(m^2+m-1)x+3(m-1)\le 0\ \ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow(m-1)x^2-2(m^2+m-1)x+(m-1)\le 0\ \ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow -2xm^2+(x^2-2x+1)m-x^2+2x-1\le 0\ \ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow 2xm^2-(x^2-2x+1)m+x^2-2x+1\ge 0\ \ \forall x\in(a;b)$

$\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ \Delta=(x-1)^4-8x(x-1)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ (x-1)^2(x^2-10x+1)\le 0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[5-2\sqrt{6};5+2\sqrt{6}\right]$

$\Rightarrow(b-a)_{\max}=5+2\sqrt{6}-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$

**Câu 21: Chọn C**

Hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$ suy ra

$f'(x)=12m^2x^3-24mx^2+12x+12(2m-1)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$

$\Leftrightarrow m^2x^3-2mx^2+x+(2m-1)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$

$\Leftrightarrow m^2x^3+(2-2x^2)m+x-1\ge 0\ \forall x\in[a;b]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ \Delta=(1-x^2)^2-x^3(x-1)=(x-1)(x^2-x-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ \left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1\le x\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $1\le a\le b\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow(2b-a)_{\max}=\sqrt{5}$.

**Câu 22: Chọn A**

Ta luôn có: $f(x)\le 2<3\rightarrow$ phương trình mẫu số $f(x)-3=0$ vô nghiệm.

Suy ra hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ có tập xác đinh là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}$

Hàm số nghịch biến thì: $y' = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty;-2) \\ x \in (1;3) \end{array}\right.$

**Câu 23: Chọn C**

Tập xác định của hàm số $y = g(x) = \dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ là $D = \{x \in R \mid f(x) \neq -m\}$

Để khoảng $(1;4) \subset D \rightarrow$ phương trình $f(x) = -m$ phải không có nghiệm $x \in (1;4)$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} -m \geq 4 \\ -m \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \quad (1)$

Đạo hàm: $y' = g'(x) = f'(x) \cdot \dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}$; Để ý rằng trên luôn có $f'(x) > 0$

Để hàm số $y = g(x) = \dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên thì:

$g'(x) = f'(x) \cdot \dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2} < 0$ với $\forall x \in (1;4)$

Suy ra: $\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2} < 0 \Leftrightarrow m-5 < 0 \Leftrightarrow m < 5 \quad (2)$

Kết hợp $(1)$ và $(2)$ và điều kiện $m$ nguyên $m \in [-20;2021)$.

Ta suy ra: $\left[\begin{array}{l} -20 \leq m \leq -4 \\ 2 \leq m < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -20 \leq m \leq -4 \\ 2 \leq m \leq 4 \end{array}\right.$. Có 20 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 24: Chọn D**

Đạo hàm: $y' = 2f'(x).f(x)$

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x).f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $y = \left(f(x)\right)^2$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$, $(1;2)$, $(3;+\infty)$.

**Câu 25: Chọn B**

Xét hàm số $g(x) = \left[f(x)\right]^2 - 6f(x)$.

$g'(x) = 2f(x).f'(x) - 6f'(x) = 2f'(x)\left(f(x)-3\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x) = 2f'(x)\left(f(x)-3\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(x)-3 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f'(x) \leq 0 \\ f(x)-3 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 7\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 1\le x\le 14\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-3\le x\le 7\\ \left[\begin{array}{l}-7\le x\le 1\\ x\ge 14\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 7\le x\le 14\end{array}\right.\\ -3\le x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -7\\ 7\le x\le 14\\ -3\le x\le 1\end{array}\right..$$

**Câu 26: Chọn A**

Ta có: $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-m)$

Để hàm số $g(x)=f(x^3-3x-m)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ thì

$g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-m)\le 0,\forall x\in(-1;2)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2(x-1)f'(x^2-2x-m)\le 0,\forall x\in(-1;1)\\ 2(x-1)f'(x^2-2x-m)\le 0,\forall x\in(1;2)\end{array}\right.\quad(1)$$

$$(1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x^2-2x-m)\ge 0,\forall x\in(-1;1)\\ f'(x^2-2x-m)\le 0,\forall x\in(1;2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-m\ge 3\\ -3\le x^2-2x-m\le 1\end{array}\right.,\forall x\in(-1;1)\\ \left[\begin{array}{l}1\le x^2-2x-m\le 3\\ x^2-2x-m\le -3\end{array}\right.,\ \forall x\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2-2x\ge m+3\\ m-3\le x^2-2x\le m+1\end{array}\right.,\forall x\in(-1;1)\\ \left[\begin{array}{l}m+1\le x^2-2x\le m+3\\ x^2-2x\le m-3\end{array}\right.,\ \forall x\in(1;2)\end{array}\right.\quad(2)$$

Xét hàm số $h(x)=x^2-2x\Rightarrow h'(x)=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$

Với $\forall x\in(-1;1)\Rightarrow h'(x)=2x-2<0\Rightarrow h(1)<h(x)<h(-1)\Leftrightarrow -1<h(x)<3,\forall x\in(-1;1)$

Với $\forall x\in(1;2)\Rightarrow h'(x)=2x-2>0\Rightarrow h(1)<h(x)<h(2)\Leftrightarrow -1<h(x)<0,\forall x\in(1;2)$

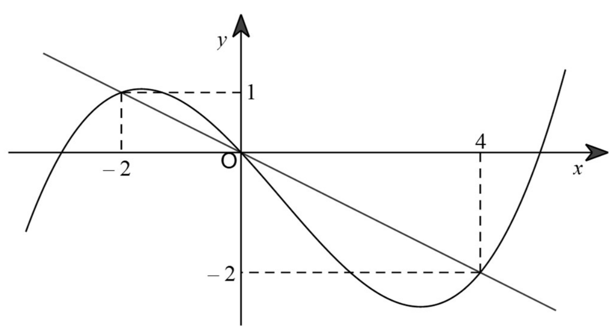
**Câu 27: Chọn A**

Ta có : $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\ \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

Đặt $t=1-2x\Rightarrow g'(x)=-2f'(t)-t$

$g'(x)=0\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0 \Rightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\ge \dfrac{1-2x}{-2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le 1-2x\le 0\\ 4\le 1-2x\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2}\\ x\le -\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\subset\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

Từ $(2)$ $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-1\ge m+3\\ \left\{\begin{array}{l}m-3\le -1\\ 3\le m+1\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m+1\le -1\\ 0\le m+3\end{array}\right.\\ 0\le m-3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}-4\ge m\\ \left\{\begin{array}{l}m\le 2\\ 2\le m\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\le -2\\ -3\le m\end{array}\right.\\ 3\le m\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m=2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-3\le m\le -2\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy không có giá trị nguyên của $m\in[-30;30]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 28: Chọn C**

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=|x^2-4mx+m-3|$ có $f'(x)=2x-4m$

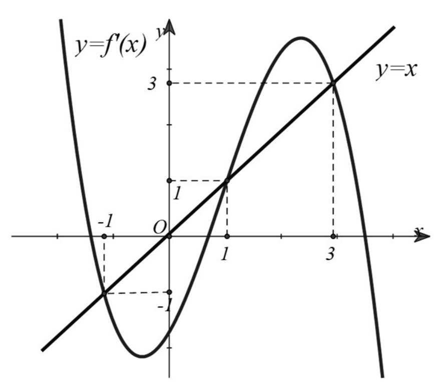
Để hàm số nghịch biến trên $(1;3)$ thì $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}f(-1)\ge 0\\ f'(x)=2x-4m\le 0\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\\ \left\{\begin{array}{l}f(-1)\le 0\\ f'(x)=2x-4m\ge 0\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}5m-2\ge 0\\ m\ge \dfrac{x}{2}\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\\ \left\{\begin{array}{l}5m-2\le 0\\ m\le \dfrac{x}{2}\end{array}\right.,\forall x\in(-2;-1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}m\ge \dfrac{2}{5}\\ m\ge -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}m\le \dfrac{2}{5}\\ m\le -1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge \dfrac{2}{5}\\ m\le -1\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z},m\in[-40;40]} \left[\begin{array}{l}1\le m\le 40\\ -40\le m\le -1\end{array}\right.$.

Vậy có $80$ giá trị nguyên $m$ thỏa mãn.

**Câu 29: Chọn A**

Ta có đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm $x=-1;\ x=1;\ x=3$ như hình vẽ sau:




Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x)>x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ 1<x<3\end{array}\right.$ và $f'(x)<x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x<1\\ x>3\end{array}\right.$.

**Trường hợp 1:** $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$, khi đó ta có $g(x)=2f(1-x)-x^2+2x+2020$.

Ta có $g'(x)=-2f'\left(1-x\right)+2(1-x)$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow -2f'\left(1-x\right)+2(1-x)>0\Leftrightarrow f'\left(1-x\right)<1-x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<1-x<1\\1-x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<2\\x<-2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x<-2\end{array}\right.$.

**Trường hợp 2:** $x-1>0\Leftrightarrow x>1$, khi đó ta có $g(x)=2f\left(x-1\right)-x^2+2x+2020$.

$g'(x)=2f'\left(x-1\right)-2(x-1)$

$g'(x)>0\Leftrightarrow 2f'\left(x-1\right)-2(x-1)>0\Leftrightarrow f'\left(x-1\right)>x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1<-1\\1<x-1<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\2<x<4\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0\Leftrightarrow 2<x<4$.

Vậy hàm số $g(x)=2f\left(\left|x-1\right|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

**Câu 30: Chọn A**

Với $x>1$, ta có $g\left(x\right)=2f\left(x-1\right)-\left(x-1\right)^2+2021\Rightarrow g'\left(x\right)=2f'\left(x-1\right)-2\left(x-1\right)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'\left(x-1\right)-2\left(x-1\right)>0\Leftrightarrow f'\left(x-1\right)>x-1 \qquad \left(*\right)$.

Đặt $t=x-1$, khi đó $\left(*\right)\Leftrightarrow f'\left(t\right)>t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<t<3\\t<-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<4\\x<0\quad (loai)\end{array}\right.$.

Với $x<1$, ta có $g\left(x\right)=2f\left(1-x\right)-\left(1-x\right)^2+2021\Rightarrow g'\left(x\right)=-2f'\left(1-x\right)+2\left(1-x\right)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'\left(1-x\right)+2\left(1-x\right)>0\Leftrightarrow f'\left(1-x\right)<1-x \qquad \left(**\right)$.

Đặt $t=1-x$, khi đó $\left(**\right)\Leftrightarrow f'\left(t\right)<t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<t<1\\t>3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<2\\x<-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x<-2\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right),\left(0;1\right),\left(2;4\right)$.

**Câu 31: Chọn B**

Xét hàm số $y=f(2x-1)\Rightarrow\left(f(2x-1)\right)'=2f'(2x-1)$ nghịch biến khi $f'\left(x\right)<0$

$\Leftrightarrow\left(f(2x-1)\right)'=2.f'(2x-1)<0\Leftrightarrow f'(2x-1)<0\Leftrightarrow 1<2x-1<3\Leftrightarrow 1<x<2$.

Xét hàm số $y=g(ax+b)\Rightarrow\left(g(ax+b)\right)'=a.g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\g'(ax+b)<0\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\g'(ax+b)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\\left[\begin{array}{l}ax+b<0\\ax+b>2\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\0<ax+b<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\\left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-b}{a}\\x>\dfrac{2-b}{a}\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}a<0\\-\dfrac{b-2}{a}<x<-\dfrac{b}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

Nếu $a>0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{a}\right);\left(\dfrac{2-b}{a};+\infty\right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $\left(1;2\right)$.

Nếu $a<0$ thì hàm số $y=g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b-2}{a};\dfrac{-b}{a}\right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất nên $\begin{cases}-\dfrac{b-2}{a}=1\\ \dfrac{-b}{a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}\Rightarrow 4a+b=-4$.

**Câu 32: Chọn B**

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x-1\right)$

Đạo hàm hàm hợp $g'(x)=\left(3x^2+3\right).f'\left(x^3+3x-1\right)=3\left(x^2+1\right).f'\left(x^3+3x-1\right)$.

Để hàm số nghịch biến thì $g'(x)=3\left(x^2+1\right).f'\left(x^3+3x-1\right)\le 0$

$f'\left(x^3+3x-1\right)\le 0\Leftrightarrow -1\le x^3+3x-1\le 3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+3x\ge 0\\ x^3+3x-4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x^2+3\right)\ge 0\\ (x-1)\left(x^2+x+4\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1.$

**Câu 33: Chọn C**

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

**Câu 34: Chọn B**

Đặt $g(x)=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-a\right|\Rightarrow g(x)=\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}$.

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left[4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}}.$$

Ta có $4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x=4\cos x\left[f'(\sin x)-\sin x\right]$.

Với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x>0,\sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)-\sin x<0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x)+\cos 2x-a\ge 0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x \ge a, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t=\sin x$ được $4f(t)+1-2t^2 \ge a, \forall t \in (0;1)$.

Xét $h(t)=4f(t)+1-2t^2 \Rightarrow h'(t)=4f'(t)-4t=4\left[f'(t)-1\right]$.

Với $t\in(0;1)$ thì $h'(t)<0 \Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $\Leftrightarrow a \le h(1)=4f(1)+1-2.1^2=3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của $a$ thỏa mãn.

**Câu 35: Chọn D**

Đặt $t=1-x \Rightarrow f(t)=f(1-x) \Rightarrow f'(t)=-f'(1-x)$

Ta có $f'(t)=0 \Rightarrow f'(1-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right.$

$f'(t)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2<x<3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ -2<t<-1 \end{array}\right.$

BBT của $f(t)$

| $t$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Mặt khác $g'(x)=2x.f'(x^2-3)$

Nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x.f'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right.$

Ta có $f'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3=1 \\ x^2-3=-1 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

$f'(x^2-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3>1 \\ -2<x^2-3<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \\ -\sqrt{2}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x^2-3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$

**Câu 36: Chọn C**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Xét $y=g(x)=f(x^2+2x+m)$

Ta có: $y'=g'(x)=2(x+1)f'(x^2+2x+m)$

Vì $x+1>0\forall x\in(0;1)$ nên để hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(x^2+2x+m)>0\forall x\in(0;1)$, do hàm số $x^2+2x+m$ luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên

Đặt $t=x^2+2x+m$. Vì $x\in(0;1)$ nên $t\in(m;m+3)$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l} m+3\le -2 \\ \begin{cases} m\ge 0 \\ m+3\le 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m=0 \end{array}\right.$

Mà $-10<m<10$ nên $m=\{-9;-8;-7;-6;-5;0\}$

Vậy có tất cả $6$ giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 37: Chọn B**

Xét $g'(x)=-2f'(3-2x+m)+2x-(m+3)$. Xét phương trình $g'(x)=0$

Đặt $t=3-2x+m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t)-\dfrac{-t}{2}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \\ t=0 \end{array}\right.$.

Từ đó, $g'(x)=0\Leftrightarrow x_1=\dfrac{5+m}{2},x_2=\dfrac{m+3}{2},x_3=\dfrac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x>x_1$ thì $t<t_1$ nên $f(x)>0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x)\le 0\Leftrightarrow x\in[x_2;x_1]\cup(-\infty;x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x)\le 0,\forall x\in(0;1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3+m}{2}\le 0<1\le\dfrac{5+m}{2} \\ 1\le\dfrac{-1+m}{2} \end{array}\right.$

và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của $m$ là -3; 3; 4; 5.

**Câu 38: Chọn B**

Ta có: $y'=9mx^8+6(m^2-3m+2)x^5+4(2m^3-m^2-m)x^3$

$=x^3\left(9mx^5+6(m^2-3m+2)x^2+4(2m^3-m^2-m)\right)$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác ta thấy $y'=0$ có nghiệm bội lẻ $x=0$, do đó để $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì phương trình $9mx^5+6(m^2-3m+2)x^2+4(2m^3-m^2-m)=0$ có nghiệm $x=0$

$$\Rightarrow 2m^3 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \\ m = 0 \end{array}\right.$$

Thử lại:

Với $m = 0 \Rightarrow y' = 12x^5$.

Với $m = 1 \Rightarrow y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y' = -\dfrac{9}{2}x^8 + \dfrac{45}{2}x^5$.

Vậy có 1 giá trị của $m$.

**Câu 39: Chọn B**

Ta có: $f(x) = \dfrac{2}{5}m^2x^5 - \dfrac{8}{3}mx^3 - (m^2 - m - 20)x + 1$.

$\Rightarrow f'(x) = 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta có: $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 \geq 0$ $(*)$, $\forall t \geq 0$ nên ta có các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** $m = 0$: khi đó bpt $(*)$ trở thành $20 \geq 0$. Nên $m = 0$ thỏa mãn.

**Trường hợp 2:** $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3 \leq m \leq 4 \end{cases}$.

**Trường hợp 3:** $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

Khi đó: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$

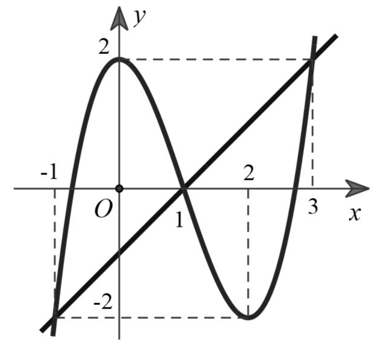
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{m} < 0 \\ \dfrac{-m^2 + m + 20}{2m^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m + 20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-4 \leq m < -3$

Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$\left[\begin{array}{l} -3 \le m \le 4 \\ -4 \le m < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -4 \le m \le 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

**Câu 40: Chọn C**




Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$

Đặt $x-m=t \Rightarrow f'(t) = t-1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và và đường thẳng $y = t-1$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t) = t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$

Hay $\left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x-m < 1 \\ x-m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 < x < m+1 \\ x > m+3 \end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ thì $\left[\begin{array}{l} m-1 \le 5 < 6 \le m+1 \\ m+3 \le 5 < 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \le m \le 6 \\ m \le 2 \end{array}\right.$

Vì $m$ là các số nguyên dương nên $S = \{1;2;5;6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của $S$ là: $1+2+5+6=14$.

**Câu 41: Chọn D**

Ta có $f'(x) = 6.\left[(m+1)x^2 + (m^2-5m-4)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19\right]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty) \Leftrightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in (-1;+\infty)$

$(m+1)x^2 + (m^2-5m-4)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19 \ge 0, \forall x \in (-1;+\infty)$

$\Leftrightarrow [x-3].\left[(m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right] \ge 0 \Leftrightarrow (x-3).g(x) \ge 0, \forall x \in (-1;+\infty)$

Với $g(x) = (m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}$

**Điều kiện cần:** $g(3) = 0 \Leftrightarrow 3(m+1) + m^2 - 2m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

**Điều kiện đủ:**

Với $m=0$ ta có $f'(x) = (x-3)\left(x-1-\frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right) =$

$$(x-3)\left[(x-3)+\left(2-\frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)\right]=(x-3)\left[(x-3)+\frac{2\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt{x+1}+2}\right]$$

$$=(x-3)^2\left[1+\frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2}\right]\geq 0,\forall x\in(-1;+\infty)\Rightarrow m=0 \text{ thỏa mãn}$$

Với $m=-1$ ta có

$$f'(x)=(x-3)\left(2-\frac{8}{\sqrt{x+1}+2}\right)=(x-3).\frac{2\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{2(x-3)^2}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2}\geq 0,\forall x\in(-1;+\infty)$$

$\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn.

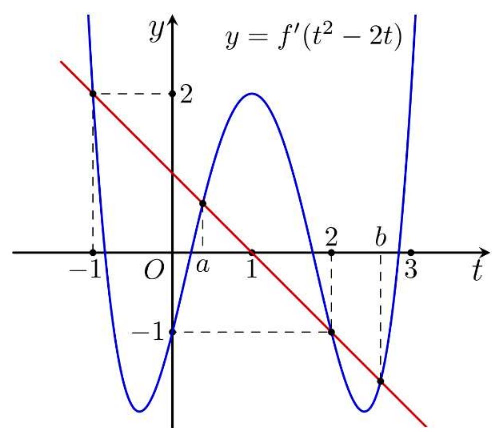
**Câu 42: Chọn C**

Đặt $t=x+1\Leftrightarrow t-1=x$.

Khi đó $y(t)=f\left(t^2-2t\right)+\frac{2}{3}(t-1)^3+1$.

$$y'(t)=2(t-1)f'\left(t^2-2t\right)+2(t-1)^2=2(t-1)\left[f'\left(t^2-2t\right)+t-1\right]$$

$$y'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ f'\left(t^2-2t\right)=1-t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-1\\ t=a\in(0;1)\\ t=2\\ t=b\in(2;3)\end{array}\right.$$




$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x=a-1\in(-1;0)\\ x=1\\ x=b-1\in(1;2)\end{array}\right.$$

Với $x=2\Rightarrow t=3$, ta có $\begin{cases}t-1>0\\ f'\left(t^2-2t\right)>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$. Ta có bảng biến thiên sau

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | $-2$ | | -1 | | $a-1$ | | $0$ | | $1$ | | $b-1$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| $y$ | | ↘ | | | | ↗ | | | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | | ↗ | | |

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

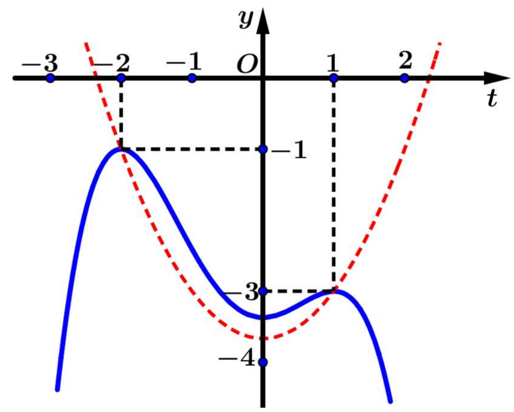
**Câu 43: Chọn C**

Ta có, $g'(x)=3f'(3x+1)-\left(18x^2+12x-9\right)<0$

$$\Leftrightarrow f'(3x+1)<6x^2+4x-3=\frac{2}{3}\left(9x^2+6x+1\right)-\frac{11}{3}=\frac{2}{3}(3x+1)^2-\frac{11}{3}.$$

Đặt $t=3x+1$, ta được $f'(t)<\frac{2}{3}t^2-\frac{11}{3}$.

Vẽ Parabol $(P): y=\frac{2}{3}t^2-\frac{11}{3}$ trên cùng hệ trục tọa độ $Oty$ với đồ thị hàm số $y=f'(t)$ như hình vẽ sau.




Ta thấy, $f'(t)<\frac{2}{3}t^2-\frac{11}{3}$ với mọi $t\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3x+1<-2\\3x+1>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>0\end{array}\right.$.

**Câu 44: Chọn D**

Ta có $g(x)=f(x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ có $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

Cho: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ $(1)$

Đặt $x=2t+1$, phương trình $(1)\Leftrightarrow f'(2t+1)=\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow f'(2t+1)=t+1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(2x+1)$ phương trình có các nghiệm:

$$f'(2t+1)=t+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=5\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

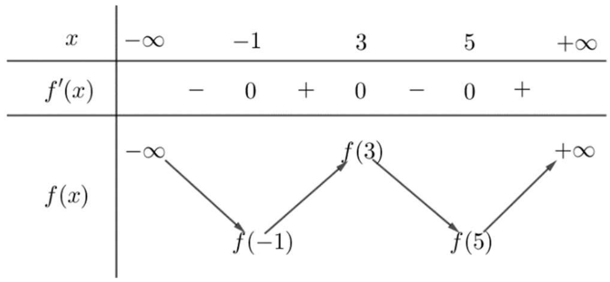
| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-3;1)$, $(5;+\infty)$

**Câu 45: Chọn D**

Đặt $t=3-2x\Rightarrow f'(t)=f'(3-2x)$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow f'(3-2x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow t=5\\x=0\Rightarrow t=3\\x=2\Rightarrow t=-1\end{array}\right.$.

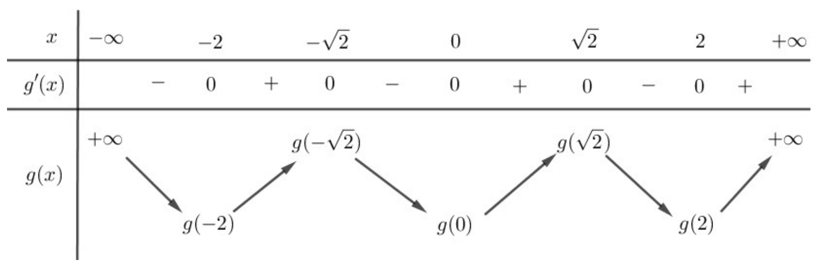
Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$:




Xét $g(x)=f(x^2+1)$, ta có $g'(x)=2xf'(x^2+1)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2xf'(x^2+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=-1\\ x^2+1=3\\ x^2+1=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm 2\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên sau:




Do đó hàm số $f(x^2+1)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

**Câu 46: Chọn C**

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3 nên có dạng:

$g(x)=\left(f(2-x)\right)'=a(x+4)(x-1)(x-4), a>0\Rightarrow f'(2-x)=-a(x+4)(x-1)(x-4)$

Đặt $t=2-x\Rightarrow f'(t)=a(t-6)(t+2)(t-1)$

Đạo hàm của hàm số $y=f(x^2+2)-x^3+2x^2-x+2021$ là

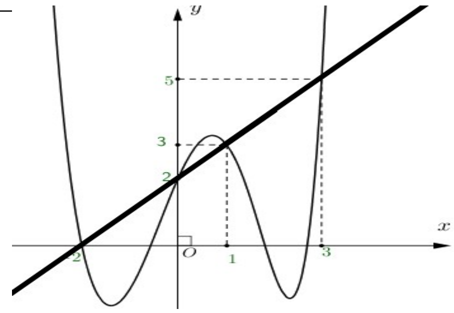
$$y'=2xf'(x^2+2)-3x^2+4x-1=2ax(x^2-4)(x^2+4)(x^2+1)+\left[-3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]$$

Lập bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2xf'(x^2+2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-3x^2+4x-1$ | | $-$ | | - | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu trên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;2)$.

**Câu 47: Chọn B**




Ta có $g'(x) = 2xf'\left(x^2-4\right) - 2x^2 = 2x\left[f'\left(x^2-4\right) - x\right]$. Đặt $t = x-2 \Rightarrow x = t+2$

Suy ra: $g'(t) = 2(t+2)\left[f'\left(t^2+4t\right) - t - 2\right]$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(t^2+4t\right) = t+2 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| $t$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\left[\begin{array}{l} t<0 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2<0 \\ 1<x-2<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ 3<x<5 \end{array}\right.$

**Câu 48: Chọn D**

Ta có: $g(x) = \left[f\left(x^2-4\right)\right]' = 2xf'\left(x^2-4\right)$

Dựa trên đồ thị ta có $g(x) = kx(x-1)(x+1) = kx\left(x^2-1\right)$; $k>0$

Vì vậy, $f'\left(x^2-4\right) = \dfrac{k}{2}\left(x^2-1\right)$; $k>0$. Đặt $t = x^2-4, t \geq -4$ ta có $f'(t) = \dfrac{k}{2}(t+3)$; $k>0$

Phương trình đạo hàm: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -3$. Bảng xét dấu

| $t$ | $-4$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | - | $0$ | $+$ | |

Hàm số $h(x) = f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi

$h'(x) = (2x+1)f'\left(x^2+x+m\right) > 0, \forall x \in (0;1)$ mà $2x+1>0, \forall x \in (0;1)$ nên

$h'(x) > 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow f'\left(x^2+x+m\right) > 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow x^2+x+m > -3, \forall x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow m > -x^2-x-3, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right) = -3$ vì $\max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right) = -3$ tại $x=0$

Kết luận: có 3 giá trị nguyên âm của $m$ thỏa đề là $m = -1; -2; -3$.

**Câu 49: Chọn A**

Xét $y = f\left(x^2-2x\right)$ có $y' = 2xf'\left(x^2-1\right)$; $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-1\right) = 0 \end{array}\right.$.

Có $x = \pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội lẻ của $f'\left(x^2-1\right) = 0$ và $f'(1) = 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

Xét $g(x)=f(2x^3-x)$, cho $g'(x)=(6x^2-1)f'(2x^3-x)$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 2x^3-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ x=1 \end{array}\right.$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ và $(1;+\infty)$.

**Câu 50: Chọn C**

Ta có $y'=2x.f'(x^2-2)$, dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ do đó

$f'(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ và do đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Xét $g(x)=f(x^3-3x+3)$ ta có $g'(x)=(3x^2-3)f'(x^3-3x+3)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (3x^2-3)=0 \\ f'(x^3-3x+3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x+3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

## II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

### BÀI TOÁN 1: CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Cho hàm số $y=f(x)$ (Đề có thể cho bằng công thức, đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$). Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[u(x)\right]$.

**PHƯƠNG PHÁP:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số theo công thức $y'=u'.f'(u)$

**Bước 2:** Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'=0 \\ f'(u)=0 \end{array}\right.$

**Bước 3:** Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà $y'$ không xác định.

### BÀI TOÁN 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y=\left|f(x)\right| \Rightarrow y'=\dfrac{f(x).f'(x)}{\left|f(x)\right|}$.

**Bước 2:** Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \quad (1) \\ f'(x)=0 \quad (2) \end{array}\right.$

**Bước 3:** Số nghiệm của phương trình $(1)$ chính là số giao điểm của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của phương trình $(2)$ là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị ta có thể suy ra $(2)$. Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của phương trình $(1)$ và $(2)$ chính là số điểm cực trị cần tìm.

**LƯU Ý:**

Ta có thể sử dụng công thức đếm nhanh số điểm cực trị của hàm $f(u)$ để tối ưu thời gian trong khi giải toán trắc nghiệm như sau:

Số điểm cực trị của $f(u)=$ Số điểm cực trị của $u$ + Số nghiệm đơn (bội lẻ) của $u=a; u=b; u=c,...$

# ĐỀ BÀI

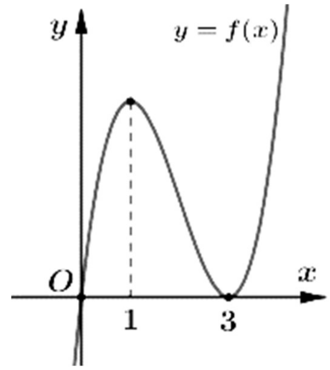
**Câu 1:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $8$. **B.** $7$. **C.** $9$. **D.** $10$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $f(1)>1$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.




Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2020;2021)$ để hàm số sau đây có tất cả $9$ điểm cực trị $g(x)=\left|f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m\right|$.

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 4

**Câu 3:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↘ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số $y=2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2+12f(x)+2021$ có bao nhiêu điểm cực đại?

**A.** $5$. **B.** $10$. **C.** $7$. **D.** $9$.

**Câu 4:** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-\infty$ |

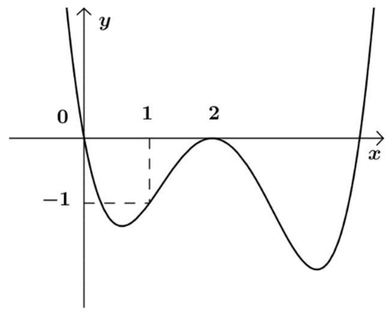
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=\left[f(x-1)\right]^2+2021$ là

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $7$.

**Câu 5:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{3}\}$, thỏa mãn $1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x)$ và $f(1)=0$. Hàm số $g(x)=[f(2x-1)]^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 6:** Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



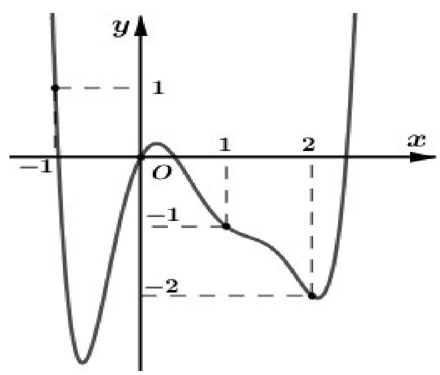

Tìm tất cả các giá trị của $m$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-3x+m)$ là $5$.

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{17}{4}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{17}{4}\right)$.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x-12)^{2020}(x^2-2x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2020;2020)$ để hàm số $y=f(x^2-2020x+2021m)$ có 3 điểm cực trị dương.

**A.** 4038. **B.** 2021. **C.** 2020. **D.** 2019.

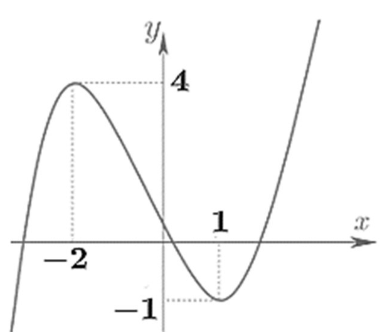
**Câu 8:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $g(-2)>0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.




Số điểm cực trị của hàm số $y=|g(x)|=|2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021|$ là

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên để hàm số $y = f\left(\left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|\right)$ có 17 cực trị.

**A.** $4$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $6$.

**Câu 10:** Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $\frac{13}{4}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số $g(x) = \left|f(x^3) + 6x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

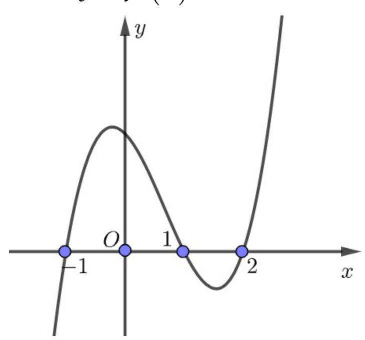
**Câu 11:** Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{6}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Tìm $m$ nguyên để hàm số $g(x) = \left|f(x^3) + 3m^2x + m - 1\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất có thể. Thì giá trị m nhỏ nhất thỏa mãn thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

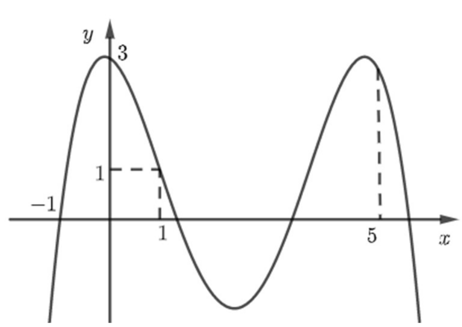
**Câu 12:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.




Hàm số $g(x) = \left(|x| + \left|x^2 - 1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $7$.

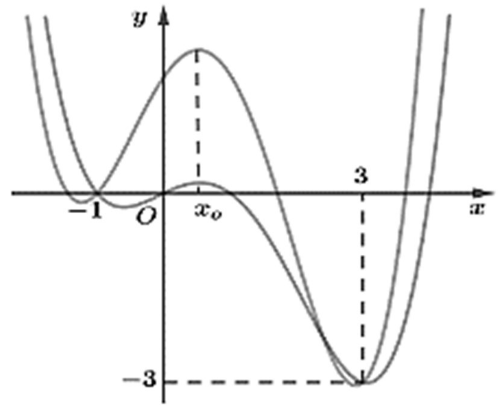
**Câu 13:** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$, có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=8f(x^3-3x+3)-(2x^6-12x^4+16x^3+18x^2-48x+1)$ là

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $7$. **D.** $9$.

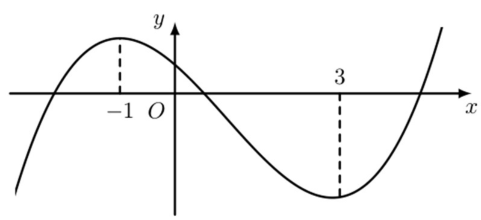
**Câu 14:** Cho hai hàm số bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có các đồ thị như hình dưới đây.




Số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f^2(x)+g^2(x)-2f(x)g(x)$ là

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $6$. **D.** $3$.

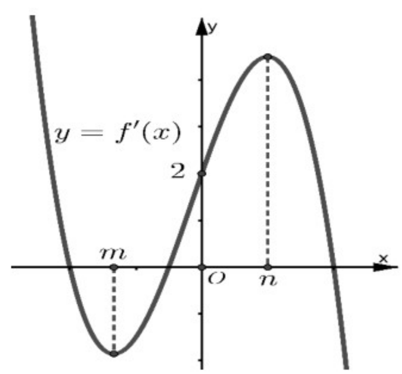
**Câu 15:** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=f\left((x-1)^2+m\right)$ có 3 điểm cực trị. Tổng các phần tử của $S$ là

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 10.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.




Biết rằng $e>n$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f'(f(x)-2x)$ bằng

**A.** $7$. **B.** $10$. **C.** $14$. **D.** $6$.

**Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left[f(2x^2 + x)\right]^2$ là

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $1$.

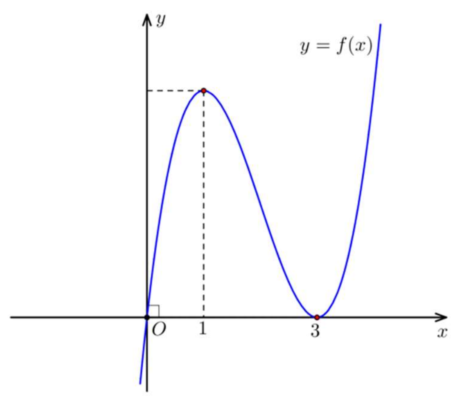
**Câu 18:** Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{1}{x^4}\left[f(x) - 1\right]^4$ là

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Câu 19:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:




Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $h(x) = \left|f^2(x) + f(x) + m\right|$ có đúng $3$ cực trị.

**A.** $m \ge \dfrac{1}{4}$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m > \dfrac{1}{4}$.

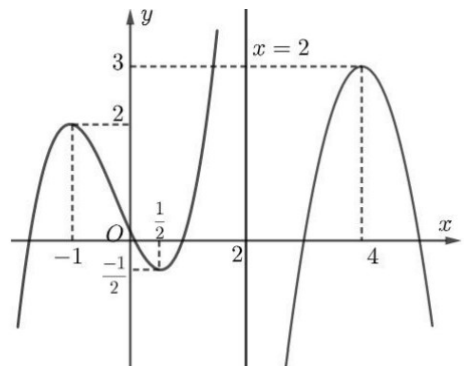
**Câu 20:** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\dfrac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$ là

**A.** $7$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $6$.

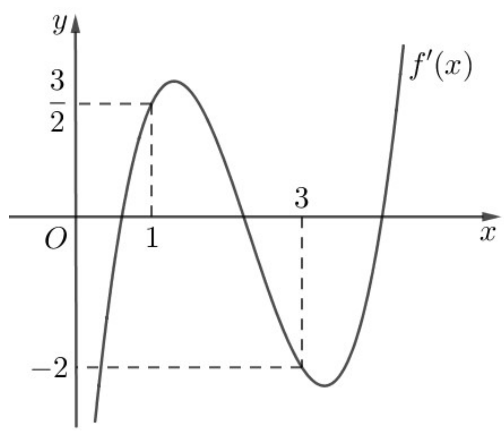
**Câu 21:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.




Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(|2x-1|+2)$ là

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $3$.

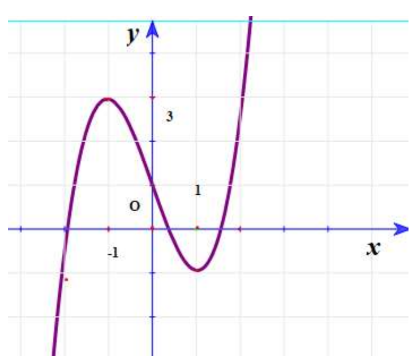
**Câu 22:** Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x^4)-2x^3+1$ là

**A.** $3$. **B.** $6$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 23:** Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=[xf(x-1)]^2$ là




**A.** $9$. **B.** $7$. **C.** $6$. **D.** $5$.

**Câu 24:** Cho bảng biến thiên của hàm số $f(2x-1)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$ tương ứng là

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $7$

**Câu 25:** Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=a;x=8-a$. Bên dưới cho bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^2-2x+3\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x^3-3x^2+1\right)$ là

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $1$ | | $5+2x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $8$. **D.** $6$

**Câu 27:** Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4.\left[f(x)\right]^2$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

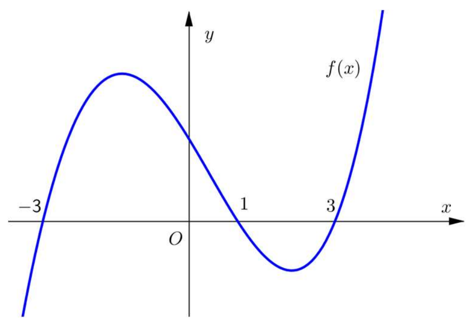
**A.** $9$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $7$

**Câu 28:** Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2.\left[f(x+2)\right]^6$ là

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**A.** $5$. **B.** $12$. **C.** $7$. **D.** $9$

**Câu 29:** Cho đồ thị hàm đa thức $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(x).f(2x+1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



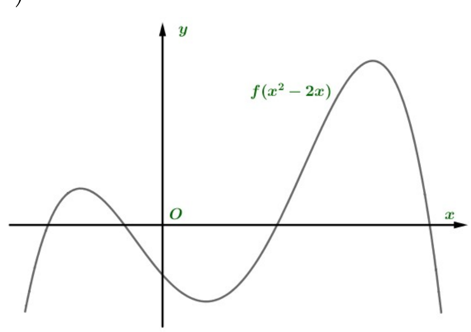

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $9$

**Câu 30:** Cho bảng biến thiên của hàm đa thức $f(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=(x-2)^3\left[f(x-1)\right]^2$ là:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | |

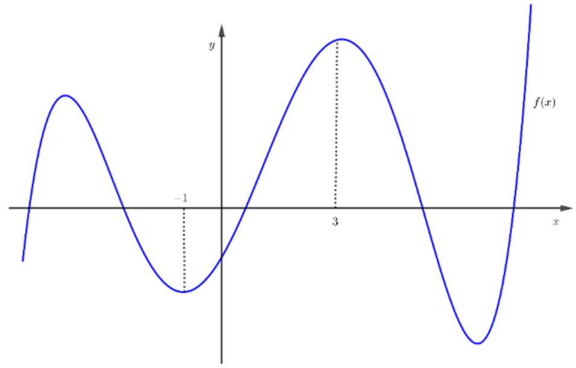
**A.** $8$. **B.** $5$. **C.** $7$. **D.** $6$.

**Câu 31:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x^2-x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2mx-|x-m|+m^2\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



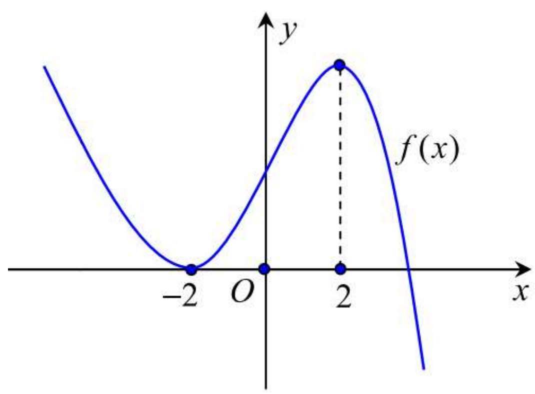

**A.** $7$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $9$

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ được cho như hình vẽ. Gọi $S$ là tập các giá trị nguyên của tham số $m\in[-21;21]$ để hàm số $y=f\left(-\left|x+2021m\right|-2m+1\right)$ có đúng $5$ điểm cực trị. Số phần tử của $S$ là:




**A.** $5$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 33:** Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)$ có 6 điểm cực trị?



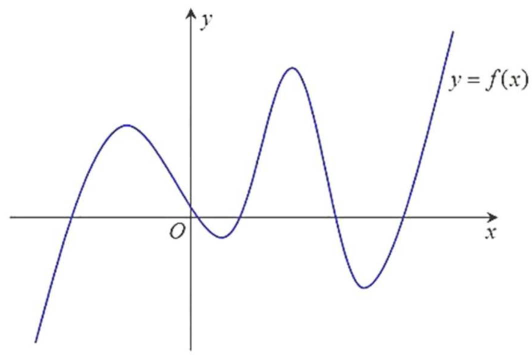

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 34:** Cho bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left[f(x)-m\right]^3-3f(x)$ có đúng 9 điểm cực trị?

| $x$ | $-\infty$ | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-5$ ↗ | $2$ ↘ | $-2$ ↗ | $+\infty$ |

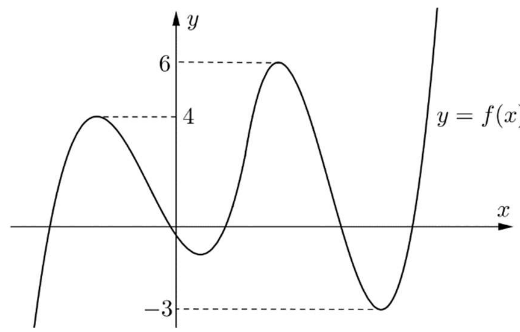
**A.** 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

**Câu 35:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới. gọi $S$ là tập hợp chứa các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left(f(x)\right)^3-m.\left(f(x)\right)^2-(2m-3)f(x)+2021$ có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập $S$ là:



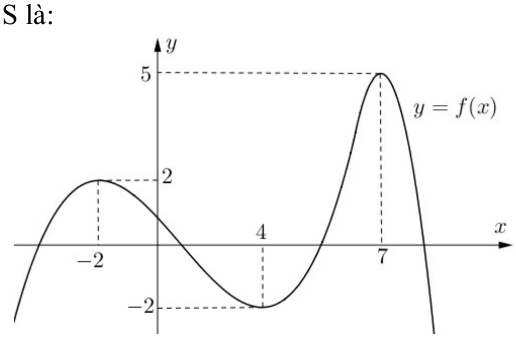

**A.** 11. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

**Câu 36:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để hàm số $y = (f(x))^2 - 2(m+2)f(x) - 3m + 12$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:




**A.** 35 **B.** 32 **C.** 33 **D.** 34

**Câu 37:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R, đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để hàm số $y = (f(x) + m)^2$ có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập S là:



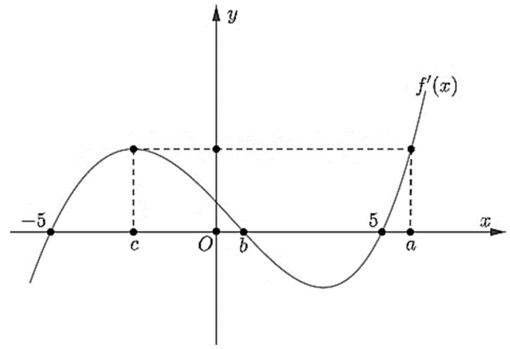

**A.** 20 **B.** 22 **C.** 21 **D.** 19

**Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ. Hàm số $y = [f(x)]^3 + 6[f(x)]^2 + 2021$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |

**A.** 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

**Câu 39:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f\left(10\right)=30f\left(-6\right)=30f\left(5\right)=30$. Hỏi hàm số $y=f\left(f\left(x\right)-3x+9\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



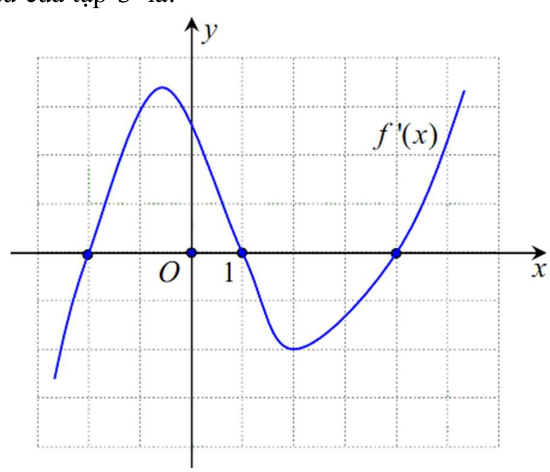

**A.** 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

**Câu 40:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi hàm số $y=f\left(x^3-3x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**A.** 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9

**Câu 41:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Gọi $S$ là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị. Số phần tử của tập $S$ là:




**A.** 8. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10

**Câu 42:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-5x+1-\frac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\frac{m}{4}+8\right)$. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập $S$ là

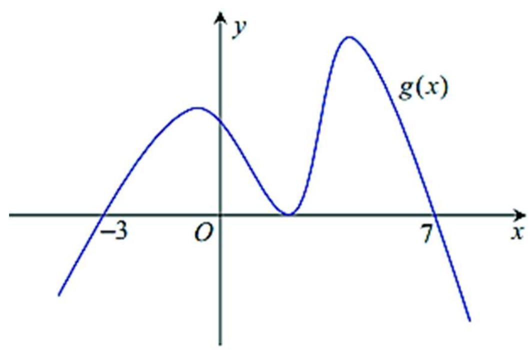
**A.** 31. **B.** 35. **C.** 33. **D.** 37

**Câu 43:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá tị nguyên của tham số $m$ để hàm số $g(x)=f^3(x)-3mf(x)+11-2m$ có đúng $9$ điểm cực trị?

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $8$. **D.** $9$

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đặt $f(x)=\int_{2018}^{x^2-2x} g(t)dt$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ tương ứng là:




**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$

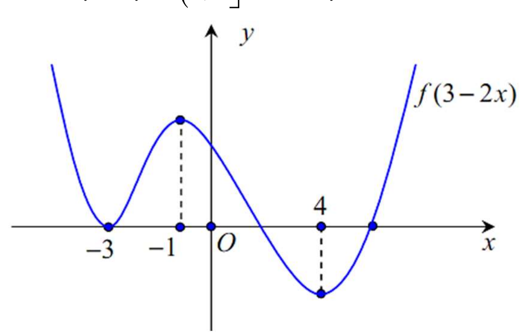
**Câu 45:** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-60;60]$ để phương trình $f(x^2-2mx+1)$ có đúng $3$ điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $1$

**Câu 46:** Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-3mx^2+3(2m-1)x-m\right|$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)$ có đúng $5$ điểm cực trị nằm về phía bên phải của trục tung $Oy$?

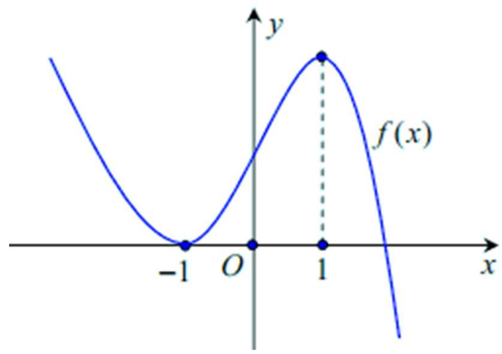
**A.** $2019$. **B.** $2020$. **C.** $2021$. **D.** $2022$

**Câu 47:** Cho hàm số $y=f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết rằng tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $f\left(x^2-2m|x|\right)$ có đúng $7$ điểm cực trị là $(a;b]$. Giá trị của biểu thức $P=2\left(a^2+b^2\right)$ là:




**A.** $5$. **B.** $10$. **C.** $15$. **D.** $20$

**Câu 48:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $f\left(x^3-mx^2-2x+m\right)$ có đúng $6$ điểm cực trị?




**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $2$

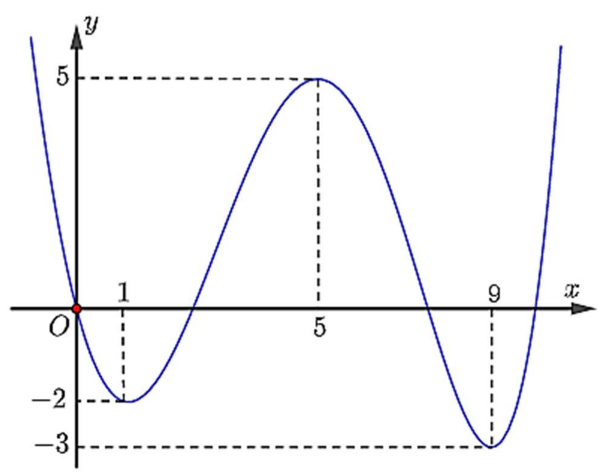
**Câu 49:** Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=f\left(x^3-3\left|x^2-1\right|+m\right)$ có $10$ điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$

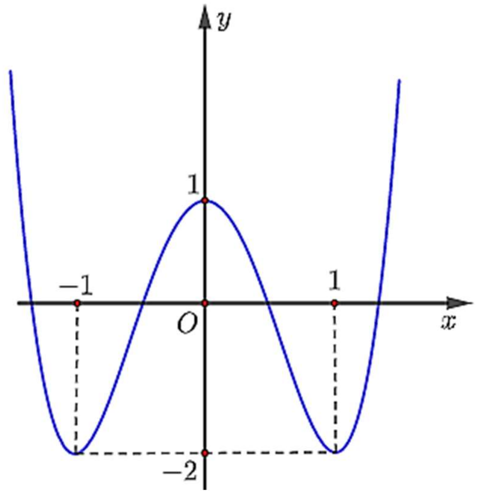
**Câu 50:** Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:




Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)-m\right|\right)$ có $51$ điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$

**Câu 51:** Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:




Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$ là

**A.** $5$. **B.** $7$. **C.** $9$. **D.** 1

**Câu 52:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | |
| $u(x)$ | $-\infty$ | ↗ | | ↘ | 0 | ↗ | | ↘ | -3 | ↗ | 2 | ↘ | $-\infty$ |

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là:

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $8$. **D.** $9$

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn B**

Ta có: $g'(x)=\left(2x-2-\dfrac{x-1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$

$=(x-1)\left(2-\dfrac{1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)=(x-1)\left(\dfrac{2|x-1|-1}{|x-1|}\right).f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$

Phương trình + $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Khi: $2.|x-1|-1=0\Leftrightarrow |x-1|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Khi: $f'\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1-|x-1|=-1\\ x^2-2x+1-|x-1|=0\\ x^2-2x+1-|x-1|=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-1|^2-|x-1|+1=0\\ |x-1|^2-|x-1|=0\\ |x-1|^2-|x-1|-1=0\end{array}\right.$

Giải các phương trình trên ta được $\left[\begin{array}{l}|x-1|=0\\ |x-1|=1\\ |x-1|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=0\\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có $7$ lần đổi dấu . Vậy hàm số có $7$ điểm cực trị.

**Câu 2: Chọn C**

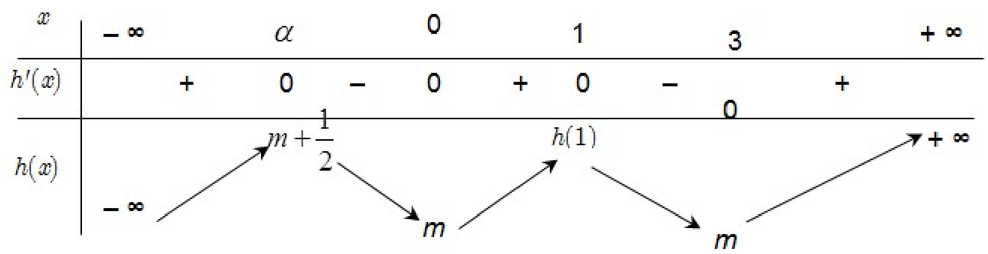
Số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$ cộng với số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$ và đường thẳng: $y=0$.

Xét hàm số: $h(x)=f^3(x)+\dfrac{3}{2}f^2(x)+m$.

Có: $h'(x)=3f^2(x).f'(x)+3f(x).f'(x)=3f(x).f'(x)\left[f(x)+1\right]$

Giải phương trình: $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f'(x)=0\\ f(x)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\\ x=1\\ x=\alpha\ ,(\alpha<0)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên




Ta có $h(1) > m + \frac{1}{2}$. Nên để đồ thị hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 0 < m + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < 0$. Đối chiếu điều kiện suy ra không có giá trị nào của $m$.

**Câu 3: Chọn A**

Hàm số $y = g(x) = 2\left[f(x)\right]^3 - 9\left[f(x)\right]^2 + 12f(x) + 2021$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6.f^2(x).f'(x) - 18f(x).f'(x) + 12f'(x) = 6f'(x)\left[f^2(x) - 3f(x) + 2\right]$.

Giải phương trình đạo hàm: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \\ f(x) = 2 & (3) \end{array}\right.$.

Từ $(1)$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Từ $(2)$, ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-\infty; 1) \\ x = 2 \text{ (nghiem } kep) \\ x = b \in (3; 4) \\ x = c \in (4; +\infty) \end{array}\right.$.

Từ $(3)$, ta có $f(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = d \in (a; 1) \\ x = e \in (1; 2) \\ x = 3 (nghiem\ \ kep) \\ x = u \in (c; +\infty) \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu, ta có

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $d$ | | 1 | | $e$ | | 2 | | 3 | | $b$ | | 4 | | $c$ | | $u$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | $\mid$ | + | $\mid$ | + | 0 | | $\mid$ | | 0 | | 0 | | $\mid$ | - | 0 | | $\mid$ | + | $\mid$ | + | |
| $f(x)-1$ | | - | 0 | | $\mid$ | | $\mid$ | + | $\mid$ | | 0 | | $\mid$ | | 0 | - | $\mid$ | - | 0 | + | $\mid$ | + | |
| $f(x)-2$ | | - | $\mid$ | - | 0 | | $\mid$ | | 0 | - | $\mid$ | - | 0 | - | $\mid$ | - | $\mid$ | | $\mid$ | - | 0 | + | |
| $y'$ | | + | 0 | - | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | - | 0 | | 0 | - | 0 | | 0 | - | 0 | + | |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực đại.

**Câu 4: Chọn B**

Ta có: $g'(x)=2f(x-1)f'(x-1)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2f(x-1).f'(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x-1)=0\\ f'(x-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x-1=a(a<-1)\\ x-1=b(-1<b<0)\\ x-1=c(0<c<1)\\ x-1=d(d>1)\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x-1=-1\\ x-1=0\\ x-1=1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1+a(x<0)\\ x=1+b(0<x<1)\\ x=1+c(1<x<2)\\ x=1+d(x>2)\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$f'(x-1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1<-1\\ 0<x-1<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ 1<x<2\end{array}\right.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1+a$ | | $0$ | | $1+b$ | | $1$ | | $1+c$ | | $2$ | | $1+d$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x-1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x-1)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

**Câu 5: Chọn D**

Ta có:

$$1-x^3=2x^2f(x)+xf^2(x)-f'(x)\Leftrightarrow 1+f'(x)=x\left[x^2+2xf(x)+f^2(x)\right]=x\left[x+f(x)\right]^2$$

$$\Rightarrow\frac{1+f'(x)}{\left[x+f(x)\right]^2}=x\Rightarrow\int\frac{1+f'(x)}{\left[x+f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Rightarrow-\frac{1}{x+f(x)}=\frac{x^2}{2}+C$$

Do $f(1)=0\Rightarrow-\dfrac{1}{1+f(1)}=\dfrac{1}{2}+C\Rightarrow C=-\dfrac{3}{2}$

Khi đó: $-\dfrac{1}{x+f(x)}=\dfrac{x^2-3}{2}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^2-3}-x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2-3\right)^2}-1$

Suy ra: $f(x)=0\Leftrightarrow-\dfrac{2}{x^2-3}=x\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-2$

Và $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x=\left(x^2-3\right)^2\Leftrightarrow 4x=x^4-6x^2+9\Leftrightarrow x^4-6x^2-4x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=a>2\end{array}\right.$

Khi đó: $g'(x)=4f'(2x-1)f(2x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=-2\\ 2x-1=1\\ 2x-1=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=\dfrac{a+1}{2}>\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Ta có: $f(x)$ không xác định khi $x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow g(x)$ không xác định khi $2x-1=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pm\sqrt{3}+1}{2}$

Mặt khác: $g'(-1)=4.f'(-3).f(-3)=4.\left(-\dfrac{4}{3}\right).\dfrac{8}{3}<0$ và

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^{+}} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^{-}} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{+}} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^{-}} g(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Ta có bảng biến thiên:

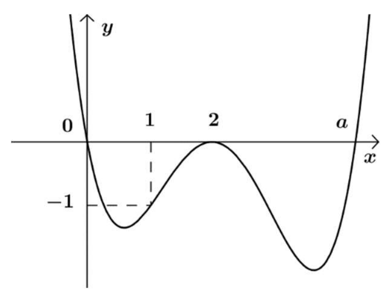
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ | | $\frac{a+1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | | ↗ $+\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | | ↗ $+\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu

**Câu 6: Chọn C**

Ta có: $g'(x)=(2x-3).f'(x^2-3x+m)$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x-3=0 & (1)\\ f'(x^2-3x+m)=0 & (2)\end{array}\right.$.

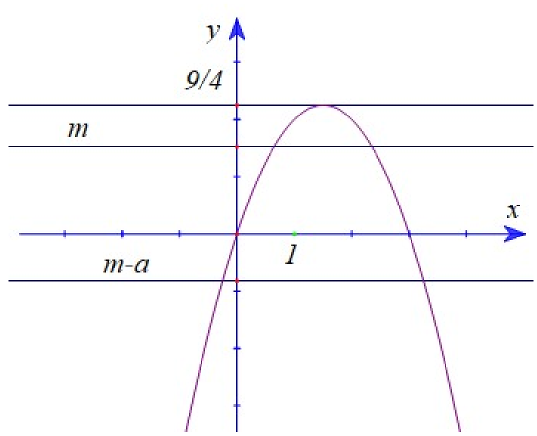
Ta có: $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.




Và $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+m=0\\ x^2-3x+m=2\\ x^2-3x+m=a,\ a>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-x^2+3x\\ m-2=-x^2+3x\\ m-a=-x^2+3x\end{array}\right.$.

Với $x^2-3x+m=2$ thì $g'(x)=0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y=-x^2+3x$ ta có đồ thị



Do $a>2$, suy ra $m<\frac{9}{4}$ phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m<\frac{9}{4}$

**Câu 7: Chọn D**

Ta có: $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right)\Rightarrow y'=(2x-2020)f'\left(x^2-2020x+2021m\right)$

$=(2x-2020)\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020}\left(x^2-2020x+2021m\right)\left(x^2-2020x+2021m-2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x-2020=0 & (1)\\ x^2-2020x+2021m-12=0 & (2)\\ x^2-2020x+2021m=0 & (3)\\ x^2-2020x+2021m-2=0 & (4)\end{array}\right.$$

Dễ thấy $(2),(3),(4)$ không có nghiệm chung, và $\left(x^2-2020x+2021m-12\right)^{2020}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f\left(x^2-2020x+2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương khi hai phương trình $(3),(4)$ có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 .

$(3)$ có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow\begin{cases}2021m<0\\ 1010^2-2020.1010+2021m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$

$(4)$ có 2 nghiệm trái dấu khác 1010 $\Leftrightarrow\begin{cases}2021m-2<0\\ 1010^2-2020.1010+2021m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{2}{2021}$

Vậy $m<0$ thì hàm số có 3 cực trị dương.

Do $m\in(-2020;2020)$ nên có 2019 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

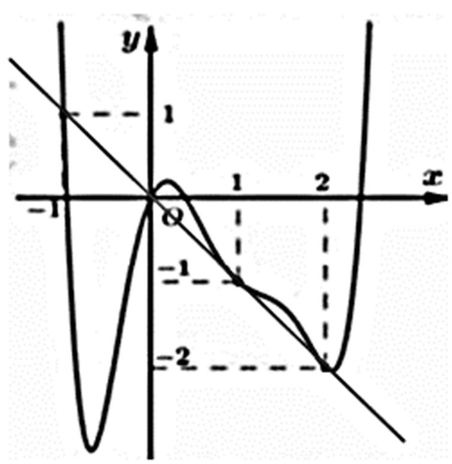
**Câu 8: Chọn C**

Xét hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021$

Ta có $g'(x)=2f'(x+2)+2x+4$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x+2)=-(x+2)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'(t)=-t$. $(1)$

$(1)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $d: y=-t$




Dựa vào đồ thị của $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

$$f'(t)=-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=-1 \\ x+2=0 \\ x+2=1 \\ x+2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | | $\nearrow$ | | | | |

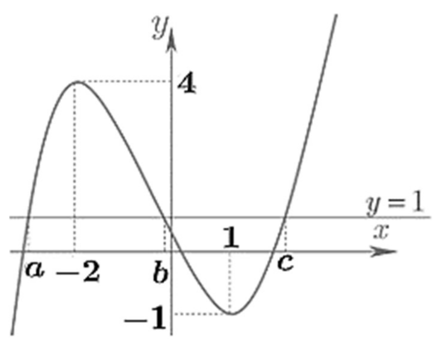
Suy ra hàm số $g(x)=2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021$ có 2 điểm cực trị và $g(x)=0$ có 1 nghiệm bội lẻ .

Vậy hàm số $y=|g(x)|=|2f(x+2)+(x+1)(x+3)+\log_2 2021|$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 9:** Ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=-2$ và $x=1$

Ta có: $y'=\dfrac{\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)'\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}f'\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$

$$=\frac{2f'(x)\left(f(x)-1\right)\left(f^2(x)-2f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|}\left(\underbrace{\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|+2}_{>0}\right)\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|-1\right)$$

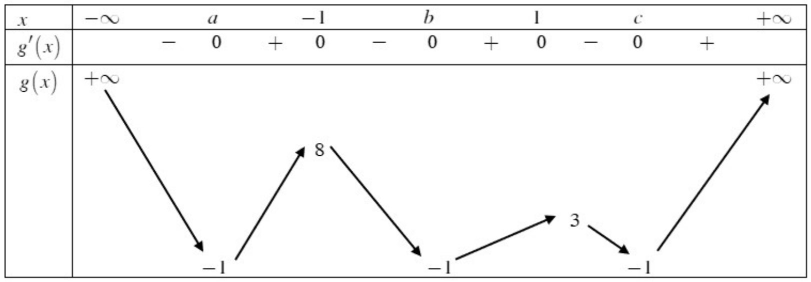



$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2; x=1 \\ f(x)=1 \Leftrightarrow x=a,\ x=b,\ \ x=c \\ f^2(x)-2f(x)-m=0 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m \\ \left|f^2(x)-2f(x)-m\right|=1 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=m\pm 1 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-2f(x)$; $g'(x)=2f'(x)\left[f(x)-1\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2; x=1 \\ f(x)=1 \Leftrightarrow x=a,\ x=b,\ \ x=c \end{array}\right.;\ \begin{cases} g(a)=g(b)=g(c)=1^2-2.1=-1 \\ g(-2)=4^2-2.4=8 \\ g(1)=(-1)^2-2.(-1)=3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$




Số nghiệm bội lẻ của $y'=0$ phụ thuộc vào số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với 3 đường thẳng $d_1: y=m+1,\ d_2: y=m,\ d_3: y=m-1$.

Yêu cầu bài toáng tương đương với 3 trường hợp sau.

**Trường hợp 1:** $d_1,d_2,d_3$ đều cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm phân biệt không trùng với các điểm $x\in\{-2;1;a;b;c\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\le m+2<8 \\ 3\le m<8 \\ 3\le m-2<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m<6 \\ 3\le m<8 \\ 5\le m<10 \end{cases} \Leftrightarrow 5\le m<6 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=5.$$

**Trường hợp 2:** 2 đường thẳng $d_1,d_2$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt và $d_3$ không cắt hoặc tiếp xúc đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có tung độ bằng $-1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<m+2<3 \\ -1<m<3 \\ m-2\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ -1<m<3 \\ m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<1 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=0\ (2).$$

**Trường hợp 3:** Hai đường thẳng $d_1$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 2 điểm phân biệt và $d_2$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại hai điểm phân biệt, $d_3$ cắt $g(x)$ tại 6 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2\ge 8 \\ 3\le m<8 \\ -1<m-2<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 6 \\ 3\le m<8 \\ 1<m<5 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing\,(3)$$

Từ $(1),(2)\,\&\,(3)\Rightarrow$ có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 10: Chọn D**

Xét hàm số $h(x)=f(x^3)+6x$ có $h'(x)=3x^2f'(x^3)+6$.

Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x^3)=\dfrac{-2}{x^2}\ (*)$

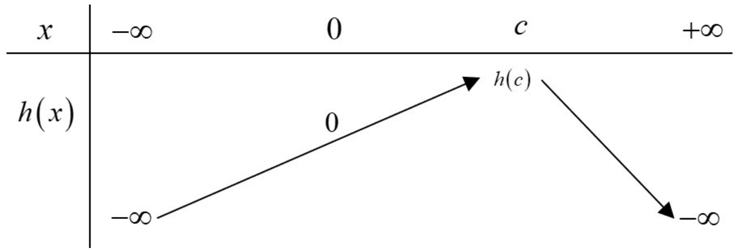
Ta dễ dàng thấy được $f''(x)=a(x+1)(x+2)\Rightarrow f'(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C\right)$

Từ bảng biến thiên: $f'(-2)=3,\ f'(-1)=\dfrac{13}{4}$ ta tìm được $a=-\dfrac{3}{2},\ C=-\dfrac{4}{3}$, từ đó $f'(0)=2>0$

Với $x<0$, $f'(x)>0$ nên kéo theo $f'(x^3)>0$ mà $\dfrac{-2}{x^2}<0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm và $h'(x)>0$.

Với $x>0$, $f'(x)$ là hàm sô nghịch biến, còn $\dfrac{-2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ có nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $h'(0)\approx+\infty$ và $h'(+\infty)\approx-\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=c>0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$




Do ta có $h(0)=f(0)+6.0=0$ nên $h(c)>0$

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 3 cực trị.

**Câu 11: Chọn D**

Xét hàm số $h(x)=f(x^3)+3m^2x+m-1$ có $h'(x)=3x^2f'(x^3)+6m^2$.

Nếu $m=0$ thì $h(x)=f(x^3)$ nên $g(x)=\left|f(x^3)+3m^2x+m-1\right|$ có 3 cực trị

Xét với $m\neq0$

Ta có $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x^3)=\dfrac{-2m^2}{x^2}$ $(*)$

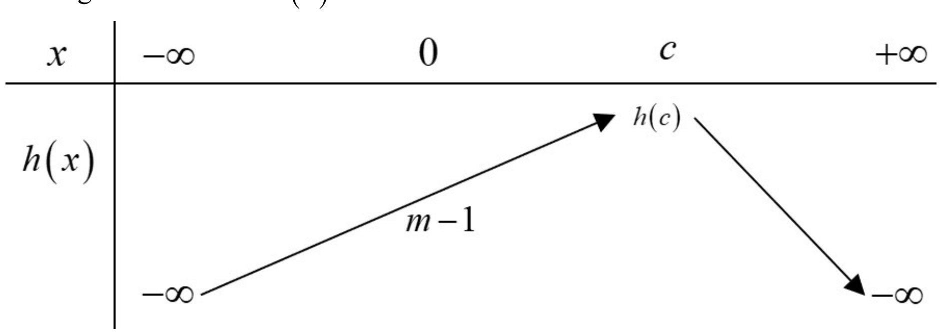
Ta dễ dàng thấy được $f''(x)=a(x+1)(x+2)\Rightarrow f'(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+2x+C\right)$

Từ bảng biến thiên: $f'(-2)=1,\ f'(-1)=\dfrac{7}{6}$ ta tìm được $a=-1,\ C=-\dfrac{1}{3}$, từ đó $f'(0)=\dfrac{1}{3}>0$

Với $x<0$, $f'(x)>0$ nên kéo theo $f'(x^3)>0$ mà $\dfrac{-2m^2}{x^2}<0$ nên phương trình $(*)$ không có nghiệm và $h'(x)>0$ .

Với $x>0$, $f'(x)$ là hàm số nghịch biến, còn $\dfrac{-2m^2}{x^2}$ là hàm số đồng biến nên phương trình $(*)$ nhiều nhất 1 nghiệm. Ta có $\lim\limits_{x\to0}\left(f'(x^3)+\dfrac{2m^2}{x^2}\right)\approx+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x^3)+\dfrac{2m^2}{x^2}\right)\approx-\infty$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=c>0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $h(x)$



Dựa vào bảng biến thiên và $h(0) = f(0) + m - 1 = m - 1$ nên hàm số $g(x) = |h(x)|$ có nhiều nhất 3 cực trị nếu $h(c) > 0$. Từ đó ta cần $h(0) \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$. Vậy $m \geq 0$.

**Câu 12: Chọn A**

Từ đồ thị của $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Đặt $u = |x| + |x^2 - 1|$.

Ta có bảng ghép trục sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x \rvert$ | | $-x$ | | $-x$ | $0$ | $x$ | | $x$ | |
| $\lvert x^2-1 \rvert$ | | $x^2-1$ | $0$ | $1-x^2$ | | $1-x^2$ | $0$ | $x^2-1$ | |
| $u$ | | $x^2-x-1$ | | $1-x-x^2$ | | $1+x-x^2$ | | $x^2+x-1$ | |
| $u$ | | $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ | | $\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ | | $\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ | | $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ | |
| $u$ | $+\infty$ | ↘ $2$ ↘ | $1$ | ↗ $\frac{5}{4}$ ↘ | $1$ | ↗ $\frac{5}{4}$ ↘ | $1$ | ↗ $2$ ↗ | $+\infty$ |
| $f(u)$ | | ↘ ↗ | | ↘ ↗ | | ↘ ↗ | | ↘ ↗ | |

Vậy hàm số $g(x) = f\left(|x| + |x^2 - 1|\right)$ có ba điểm cực đại.

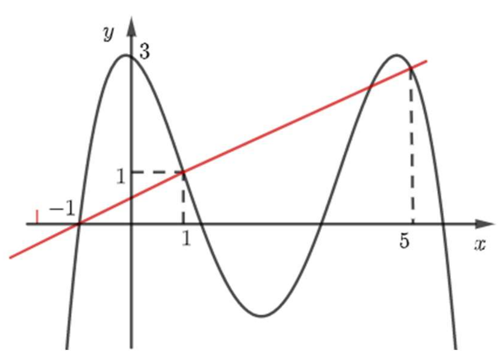
**Câu 13: Chọn A**

Ta có: $g'(x) = 8(3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + 3) - (12x^5 - 48x^3 + 48x^2 + 36x - 48)$.

$$= 24(x^2 - 1)\left[f'(x^3 - 3x + 3) - \frac{(x^3 - 3x + 3) + 1}{2}\right];$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1. \\ f'(x^3 - 3x + 3) = \dfrac{(x^3 - 3x + 3) + 1}{2} \quad (1). \end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có:



Đặt $t = x^3 - 3x + 3$. Phương trình $(1)$ trở thành: $f'(t) = \frac{t+1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=5 \end{array}\right.$.

Với $t=-1$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = -1$. Phương trình này có 1 nghiệm.

Với $t=1$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm kép.

Với $t=5$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

Như vậy $g'(x)=0$ có $3$ nghiệm đơn phân biệt và $2$ nghiệm bội ba.

**Câu 14: Chọn A**

Ta có: $h(x) = \left[f(x) - g(x)\right]^2 \Rightarrow h'(x) = 2\left[f(x) - g(x)\right]\left[f'(x) - g'(x)\right]$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) - g(x) = 0 & (1) \\ f'(x) - g'(x) = 0 & (2) \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta thấy phương trình $(1)$ có đúng $3$ nghiệm phân biệt là $x=-1$; $x = x_1\left(x_1 \in (-1;3)\right)$; $x=3$, và $f(x) - g(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm này. Do đó các nghiệm trên là nghiệm bội lẻ của $(1)$. Mà $f(x)$ và $g(x)$ đều là đa thức bậc $4$ nên bậc của phương trình $(1)$ nhỏ hơn hoặc bằng $4$. Từ đó suy ra phương trình $(1)$ là phương trình bậc $3$.

Do phương trình $(1)$ là phương trình bậc $3$ có $3$ nghiệm phân biệt nên phương trình $(2)$ phải có $2$ nghiệm phân biệt không trùng các nghiệm của phương trình $(1)$.

Suy ra $h'(x)=0$ có $5$ nghiệm phân biệt và $h'(x)$ đổi dấu khi đi qua các nghiệm đấy, nên hàm $h(x)$ có $5$ điểm cực trị.

**Câu 15: Chọn A**

Xét hàm số $y = f\left((x-1)^2 + m\right)$ có đạo hàm $y' = 2(x-1)f'\left((x-1)^2 + m\right)$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-1)^2 = -1-m \\ (x-1)^2 = 3-m \end{array}\right.$

Để hàm số có $3$ điểm cực trị thì $-1-m \le 0 < 3-m \Leftrightarrow -1 \le m < 3 \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2\}$

Vậy tổng các phần tử của $S$ là $2$.

**Câu 16: Chọn A**

Ta có $y' = \left(f(x) - 2x\right)'.f''\left(f(x) - 2x\right) = \left(f'(x) - 2\right).f''\left(f(x) - 2x\right)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) - 2 = 0 \\ f''\left(f(x) - 2x\right) = 0 \end{array}\right.$.

Khi $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có 3 nghiệm.

Khi $f''\left(f(x) - 2x\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - 2x = m \ (1) \\ f(x) - 2x = n \ (2) \end{array}\right.$.

Xét phương trình $(1): f(x)-2x=m\,(m<0)$, đặt $g(x)=f(x)-2x \Rightarrow g'(x)=f'(x)-2$.

Phương trình đạo hàm $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<m \\ x=0 \\ x=x_2>n \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1<m$ | | $0$ | | $x_2>n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | | ↘ | $e$ | ↗ | | ↘ | |

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $(1)$ có 2 nghiệm.

Xét phương trình $(2): f(x)-2x=n\,(n<e)$, đặt $h(x)=f(x)-2x \Rightarrow h'(x)=f'(x)-2$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<m \\ x=0 \\ x=x_2>n \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1<m$ | | $0$ | | $x_2>n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | | ↗ | | ↘ | $e$ | ↗ | | ↘ | |

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình  có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y=f'(f(x)-2x)$ có 7 điểm cực trị.

**Câu 17: Chọn C**

Ta có $g'(x)=\left(\left[f(2x^2+x)\right]^2\right)'=2f(2x^2+x)(4x+1)f'(2x^2+x)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2x^2+x)=0 \\ 4x+1=0 \\ f'(2x^2+x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x=a\ \ (a>1) \\ x=-\dfrac{1}{4} \\ 2x^2+x=1 \\ 2x^2+x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}\,(a>1) \\ x=-\dfrac{1}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vì $a>1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x)=0$ là:

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+8a}}{4}<x_2=-1<x_3=-\dfrac{1}{4}<x_4=\dfrac{1}{2}<x_5=\dfrac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}$.

Vậy $g'(x)=0$ có $5$ nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi $x$ chạy qua các nghiệm đơn.

Với $0\in\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\left(0\in\left(x_3;x_4\right)\right)$. Xét $g'(0)=2.f(0)f'(0)>0$. Suy ra $g'(x)>0$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ hay khoảng $\left(x_3;x_4\right)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $x_3$ | | $x_4$ | | $x_5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Ta có hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ có 2 điểm cực đại là $x=x_2=-1$ và $x=x_4=\frac{1}{2}$.

**Câu 18: Chọn C**

Giả sử $f(x)=ax^4+bx^2+c$. Từ $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \\ f'(\pm1)=0 \\ f(\pm1)=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$. Suy ra $f(x)=2x^4-4x^2+1$.

Khi đó $y=\frac{1}{x^4}\left[2x^4-4x^2\right]^4=2^4x^4(x^2-2)^4$. Có $y'=2^4.4.x^3.(x^2-2)^3.(3x^2-2)$.

Và $y'=0\Leftrightarrow x=0$ ; $x=\pm\sqrt{2}$ ; $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Do đó, hàm số $y$ có 5 cực trị.

**Câu 19: Chọn D**

Xét $g(x)=f^2(x)+f(x)+m\Rightarrow g'(x)=2f(x)f'(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ta có: $f'(x)=0\Rightarrow$có hai nghiệm là $x=0;x=3$ và $f(x)=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ có một nghiệm là $x=a<0$ nên hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Do đó để đồ thị hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+f(x)+m\right|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $f^2(x)+f(x)+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta=1-4m<0\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

**Câu 20: Chọn C**

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-1$; $x=0$; $x=1$

$\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'(x)=kx(x-1)(x+1)=k\left(x^3-x\right)$, với $k\in\mathbb{R}$ và $k\neq0$

$\Rightarrow f(x)=k\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C\right)$, $C$ là một hằng số

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1;3)$ và $(0;-1)\Rightarrow\begin{cases} k\left(-\frac{1}{4}+C\right)=3 \\ kC=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k=-16 \\ C=\frac{1}{16} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = -16\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{16}\right) = -4x^4 + 8x^2 - 1$

$\Rightarrow f(x+1) = -4(x+1)^4 + 8(x+1)^2 - 1$

$\Rightarrow f(x+1) = -4\left(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\right) + 8\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1$

$\Rightarrow f(x+1) = -4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3 \Rightarrow f'(x+1) = -16x^3 - 48x^2 - 32x$

Ta có: $g'(x) = \dfrac{4(x-2)^3\left[f(x+1)\right]^3 - (x-2)^4.3\left[f(x+1)\right]^2.f'(x+1)}{\left[f(x+1)\right]^6}$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{4(x-2)^3 f(x+1) - 3(x-2)^4 f'(x+1)}{\left[f(x+1)\right]^4} = \dfrac{(x-2)^3\left[4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1)\right]}{\left[f(x+1)\right]^4}$

Do đó: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ 4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0 \end{array}\right.$

Phương trình: $4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(-4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3\right) - 3(x-2)\left(-16x^3 - 48x^2 - 32x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 - 3\left(-16x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 64x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 + 48x^4 + 48x^3 - 192x^2 - 192x = 0$

$\Leftrightarrow 32x^4 - 16x^3 - 256x^2 - 192x + 12 = 0 \Leftrightarrow 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3 = 0$

Xét hàm số $h(x) = 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3$

Ta có: $h'(x) = 32x^3 - 48x^2 - 128x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{array}\right.$ với $x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < 2 < x_3$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $1$ | | $x_3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | | | $+$ | | | $0$ | | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $h(x_1)$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $h(x_2)$ | $\searrow$ | $-105$ | $\searrow$ | $h(x_3)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x) = 0$ có $4$ nghiệm phân biệt

Mà $h(2) = -233 \Rightarrow x = 2$ không là nghiệm của phương trình $h(x) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $g'(x) = 0$ có $5$ nghiệm phân biệt

Vậy hàm số $g(x) = \dfrac{(x-2)^4}{\left[f(x+1)\right]^3}$ có $5$ điểm cực trị.

**Câu 21: Chọn C**

$$g(x)=f(|2x-1|+2)\Rightarrow g'(x)=\frac{2(2x-1)}{|2x-1|}f'(|2x-1|+2)$$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(|2x-1|+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x-1|+2=-1(VN)\\|2x-1|+2=\frac{1}{2}(VN)\\|2x-1|+2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow|2x-1|+2=4$

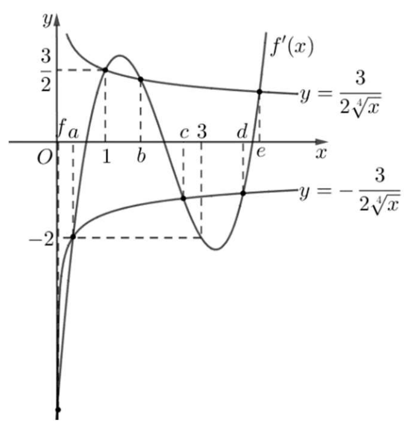
$\Leftrightarrow|2x-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=2\\2x-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$g'(x)$ không xác định tại $x=\frac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x=\frac{1}{2}$, nhưng tại $x=\frac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định . Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x=\frac{-1}{2},x=\frac{3}{2}$.

**Câu 22: Chọn C**

Ta có: $g(x)=f(x^4)-2x^3+1\Rightarrow g'(x)=4x^3.f'(x^4)-6x^2=2x^2.\left[2x.f'(x^4)-3\right]$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f'(x^4)=\frac{3}{2x}\quad(*)\end{array}\right.$




$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\f'(x^4)=-\frac{3}{2\sqrt[4]{x^4}}\end{cases}\\\begin{cases}x>0\\f'(x^4)=\frac{3}{2\sqrt[4]{x^4}}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x^4=f\vee x^4=a\vee x^4=c\vee x^4=d\end{cases}\\\begin{cases}x>0\\x^4=1\vee x^4=b\vee x^4=e\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt[4]{f}\\x=-\sqrt[4]{a}\\x=-\sqrt[4]{c}\\x=-\sqrt[4]{d}\\x=1\\x=\sqrt[4]{b}\\x=\sqrt[4]{e}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt[4]{d}$ | | $-\sqrt[4]{c}$ | | $-\sqrt[4]{a}$ | | $-\sqrt[4]{f}$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt[4]{b}$ | | $\sqrt[4]{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Vậy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

**Câu 23: Chọn B**

Đặt: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Ta có: đồ thị giao với trục $Oy$ tại điểm $(0;1) \Rightarrow d=1$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị là $(-1;3)$; $(1;-1)$ nên

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ a+b+c+1=-1 \\ -a+b-c+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=1 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^3-3x+1.$$

$$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)^3-3(x-1)+1=x^3-3x^2+3 \Rightarrow f'(x-1)=3x^2-6x.$$

Có $g(x)=\left[xf(x-1)\right]^2 \Rightarrow g'(x)=2xf(x-1)\left[f(x-1)+xf'(x-1)\right]$.

$$\Rightarrow g'(x)=2x\left(x^3-3x^2+3\right)\left(4x^3-9x^2+3\right).$$

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3-3x^2+3=0 \\ 4x^3-9x^2+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\approx 2{,}532 \\ x\approx 1{,}347 \\ x\approx -0{,}879 \\ x\approx 2{,}076 \\ x\approx 0{,}694 \\ x\approx -0{,}52 \end{array}\right.$.

Phương trình $g'(x)$ là phương trình bậc 7 và có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

**Câu 24: Chọn A**

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2}\in[0;2]$

$$y=f\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right) \Rightarrow y'=3\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=0 \end{array}\right.$$

$$f'\left(4-3\sqrt{4x-x^2}\right)=f'\left[2\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0$$

Ta có $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2}\in[0;2]$ nên $\dfrac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$

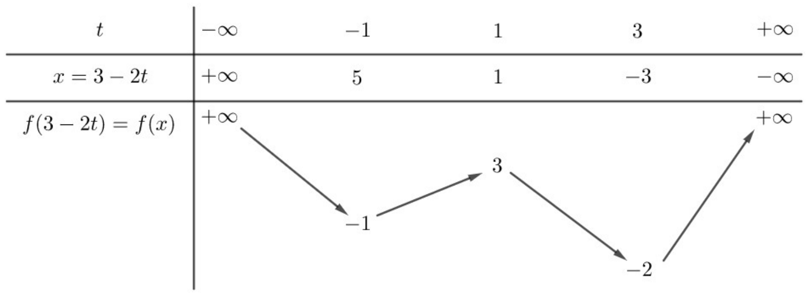
$$f'\left[2\frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}-1\right]=0 \Leftrightarrow \frac{5-3\sqrt{4x-x^2}}{2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{4x-x^2}=\frac{1}{3}.$$

Phương trình này có 2 nghiệm

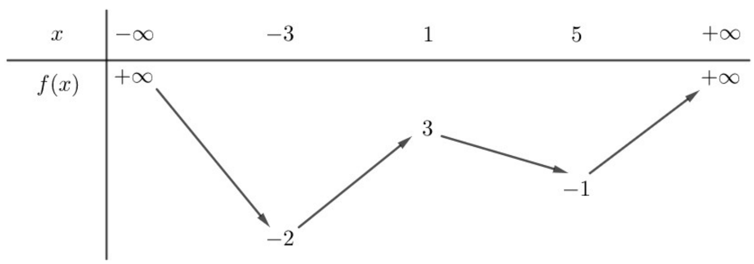
Vậy $y'$ có 3 nghiệm, và qua mỗi nghiệm này thì $y'$ đổi dấu, do đó hàm số có 3 cực trị.

**Câu 25: Chọn B**

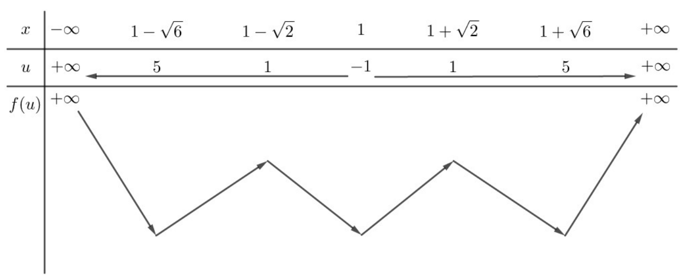
Trước hết ta khôi phục bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ từ bảng biến thiên của hàm $f(v(t))=f(3-2t)$ như sau:




Ta có thể vẽ lại bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ cho dễ nhìn như sau:




Xét hàm số $f(x^2-2x)=f(u);u=x^2-2x$. Ta có bảng biến thiên ghép $[x;u;f(u)]$ từ kỹ năng ghép trục như sau:




Suy ra hàm số đồng biến trên $\left(1-\sqrt{6};1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1;1+\sqrt{2}\right)$, $\left(1+\sqrt{6};+\infty\right)$.

Mà $(1;2)\subset\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. Nên hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

**Câu 26: Chọn B**

Chọn hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x^2-12x+4$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+8x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2=a \\ x=6=8-a \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=a; x=8-a$.

Ta có $f\left(x^2-2x+3\right)=-\frac{1}{3}\left(x^2-2x+3\right)^3+4\left(x^2-2x+3\right)^2-12\left(x^2-2x+3\right)+4$

$$\Rightarrow\left[f\left(x^2-2x+3\right)\right]'=0\Leftrightarrow(2x-2)f'\left(x^2-2x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x+3=2\\x^2-2x+3=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1=x_0\\x=3=5+2x_0\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^2-2x+3\right)$ thỏa đề bài.

Mặt khác: $\left[f\left(x^3-3x^2+1\right)\right]'=0\Leftrightarrow\left(3x^2-6x\right)f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\f'\left(x^3-3x^2+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-6x=0\\x^3-3x^2+1=2\\x^3-3x^2+1=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x\approx 3,103\\x\approx 3,425\end{array}\right.\text{(4 nghiệm đơn)}$$

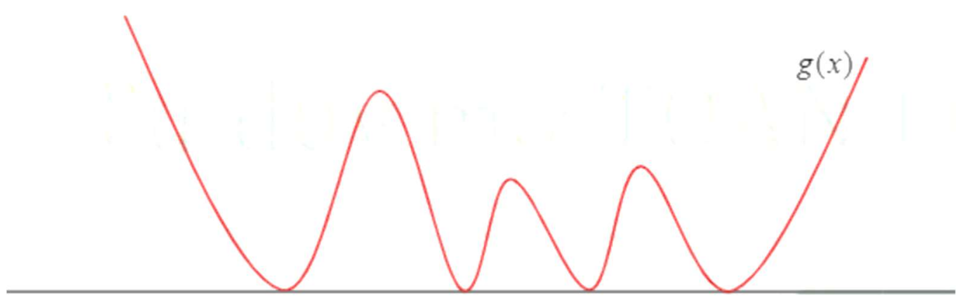
Vậy hàm số $f\left(x^3-3x^2+1\right)$ có 4 điểm cực trị.

**Câu 27: Chọn D**

Ta có :

$$x^2.f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=0\\x=a,(a<-2)\\x=b,(-2<b<0)\\x=4\end{array}\right.$$, trong đó $x=0$ là nghiệm bội chẵn, $x=a,x=b$ là nghiệm bội lẻ, $x=4$ là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x)=x^4.[f(x)]^2=0$ có bốn nghiệm bội chẵn suy ra ĐTHS $g(x)$ tiếp xúc với trục $Ox$ tại bốn điểm. Mặt khác hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty$ nên ta có thể phác họa đồ thị hàm số $g(x)$ như sau :




Vậy hàm số có 7 cực trị.

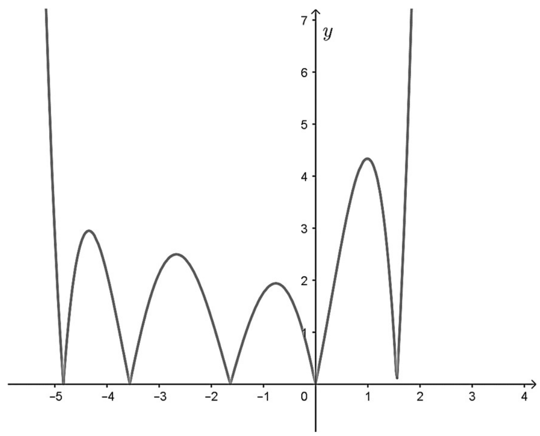
**Câu 28: Chọn D**

Ta có: $g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\\left[f(x+2)\right]^6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x+2)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+2=a<-2 \\ x+2=b,\ b\in(-2;0) \\ x+2=c,\ c\in(0;2) \\ x+2=d>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a-2<-4 \\ x=b-2\in(-4;-2) \\ x=c-2\in(-2;0) \\ x=d-2>0 \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại $5$ điểm phân biệt, và cả $5$ nghiệm đều là nghiệm kép.

Ta suy ra hình dáng đồ thị $y=g(x)$ như sau




Dựa vào đồ thị ta suy ra hàm số có 9 điểm cực trị.

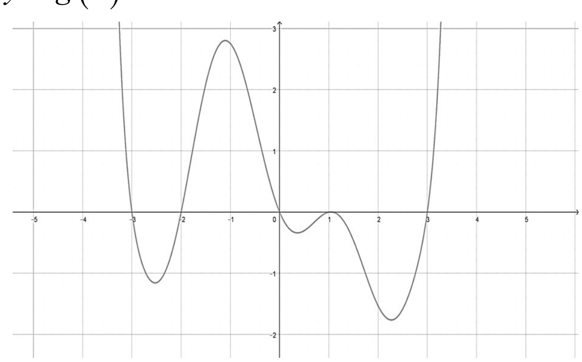
**Câu 29: Chọn A**

Ta có:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x).f(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(2x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \\ 2x+1=-3 \\ 2x+1=1 \\ 2x+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ cắt trục hoành tại $6$ điểm, trong đó các nghiệm $\{-3;3;-2;0\}$ là nghiệm đơn và $x=1$ là nghiệm kép

Ta có hình dáng đồ thị $y=g(x)$ như sau



Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

**Câu 30: Chọn D**

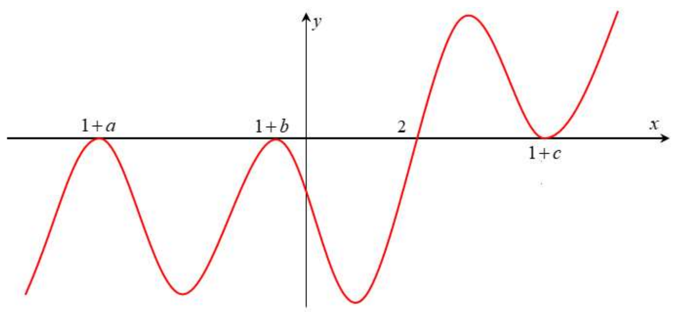
Nhận xét $\begin{cases} g(x) \geq 0, \forall x \geq 2 \\ g(x) < 0, \forall x < 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$,

Cho $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^3 = 0 \\ \left[f(x-1)\right]^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x-1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x-1 = a(a<-2) \\ x-1 = b(-2<b<-1) \\ x-1 = 1 \\ x-1 = c(c>2) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1+a < -1 \\ x = 1+b \in (-1;2) \\ x = 1+c > 3 \end{array}\right.$.

Do đó $g(x) = 0$ có $4$ nghiệm phân biệt trong đó có ba nghiệm bội chẵn và 1 nghiệm bội lẻ

Hay đồ thị $g(x)$ có 3 điểm tiếp xúc với trục hoành và một điểm giao điểm với trục hoành mà tại đó hàm số đổi dấu




Vậy hàm số $g(x)$ có 6 cực trị.

**Câu 31: Chọn C**

Ta có $y = f\left(|x-m|^2 - |x-m|\right)$

Đặt $g(x) = f(x^2 - x)$. Suy ra $g(|x|) = f(x^2 - |x|)$. Suy ra $g(|x-m|) = f\left(|x-m|^2 - |x-m|\right)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x-m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có $2$ điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x-m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

**Câu 32: Chọn B**

Hàm số $y = f(-|x+2021m| - 2m + 1)$ có cùng số điểm cực trị với hàm số $y = f(-|x| - 2m + 1)$.

Sơ đồ biến đổi đồ thị:

$f(x) \to f(-x) \to f(-(x+2m-1)) = f(-x-2m+1) \to f(-|x| - 2m + 1)$

Các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là: $(x_1 = a < -1)$; $(x_2 = -1)$; $(x_3 = -3)$; $(x_4 = -b < -3)$

Suy ra các điểm cực trị của hàm số $f(-(x+2m-1)) = f(-x-2m+1)$ là

$(x_1=-a-2m+1)$; $(x_2=1-2m+1)$;$(x_3=-3-2m+1)$;$(x_4=-b-2m+1)$

Để hàm số $y=(-|x|-2m+1)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(-x-2m+1)$ có đúng 2 giá trị của m.

**Câu 33: Chọn B**

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$

$y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)\Leftrightarrow y'=\left(3x^2-2mx-5\right).f'\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-5=0\\f'\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2mx-5=0\\x^3-mx^2-5x+4m=-2\\x^3-mx^2-5x+4m=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}3x^2-2mx-5=0 & (1)\\(x-2)\left[x^2-(m-2)x-2m-1\right]=0 & (2)\\(x+2)\left[x^2-(m+2)x+2m-1\right]=0 & (3)\end{array}\right.$

Có $\begin{cases}\Delta_1=m^2+15>0\\\Delta_2=m^2-4m+8>0\\\Delta_3=m^2-4m+8>0\end{cases}$

Nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt, (2) luôn có 3 nghiệm phân biệt, (3) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $y=f\left(x^3-mx^2-5x+4m\right)$ có 6 điểm cực trị thì (1) có 2 nghiệm trùng với các nghiệm của (2) hoặc (3).

**Trường hợp 1:** Phương trình (1) nhận $x=-2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m=\frac{7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

**Trường hợp 2:** Phương trình (1) nhận $x=2$ là nghiệm $\Leftrightarrow m=\frac{-7}{4}$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị $m=\pm\frac{7}{4}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 34: Chọn A**

Ta có: $y=\left[f(x)-m\right]^3-3\left[f(x)-m\right]-3m$

$\Rightarrow y'=\left\{3\left[f(x)-m\right]^2-3\right\}.f'(x)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\left[f(x)-m\right]^2-3=0\\f'(x)=0\end{array}\right.$

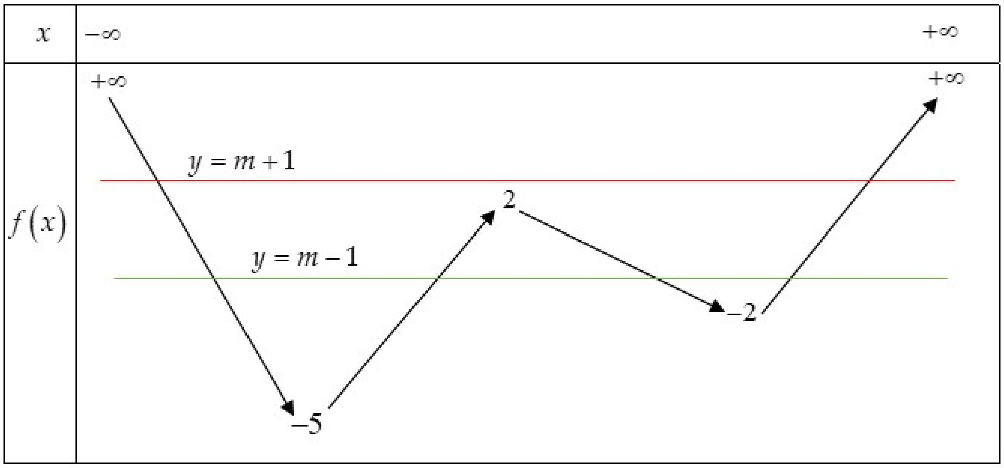
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[f(x)-m\right]^2=1\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m+1(1)\\f(x)=m-1(2)\\f'(x)=0(3)\end{array}\right.$

**Nhận xét:** số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f(x)-m\right]^3-3f(x)$ là tổng số nghiệm bội lẻ của ba phương trình (1);(2);(3).

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để hàm số $y=\left[f(x)-m\right]^3-3f(x)$ có 9 điểm cực trị thì phương trình (1) và (2) có 6 nghiệm phân biệt bội lẻ. Căn cứ vào bảng biến thiên, có 2 trường hợp sau:

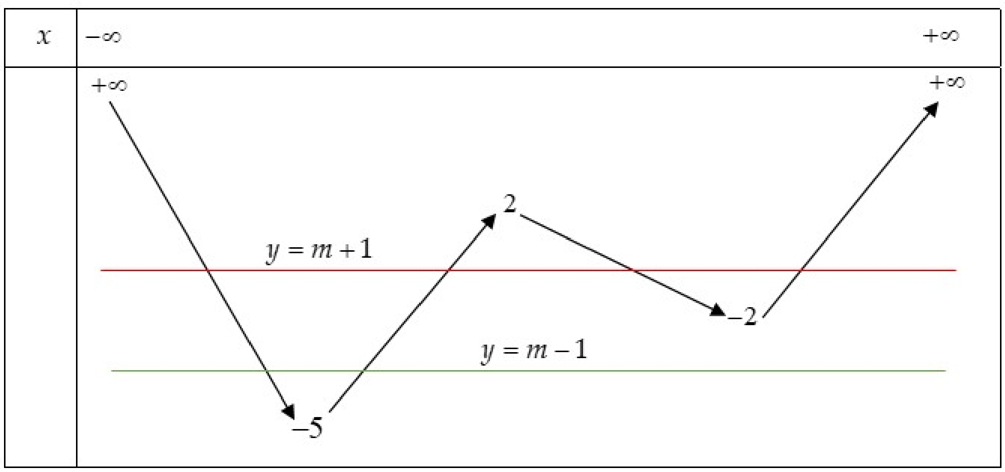
**Trường hợp 1:** Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt.




$$\Rightarrow \begin{cases} m+1>2 \\ -2<m-1<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ -1<m<3 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<3 \xrightarrow{m\in Z} \Rightarrow m=2.$$

Khi $m+1=2 \Leftrightarrow m=1$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=1$ (thỏa mãn).

**Trường hợp 2:** Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.




$$\Rightarrow \begin{cases} -2<m+1<2 \\ -5<m-1<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ -4<m<- \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<-1 \xrightarrow{m\in Z} \Rightarrow m=-2.$$

Khi $m-1=-2 \Leftrightarrow m=-1$ thì phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn nên $m=-1$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in\{-2;-1;1;2\}$.

**Câu 35: Chọn D**

Ta có:

$$y'=3f'(x)\left[f(x)\right]^2-2m.f'(x).f(x)-(2m-3).f'(x)$$
$$=f'(x)\left[3\left(f(x)\right)^2-2mf(x)-(2m-3)\right]$$

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 3\left(f(x)\right)^2-2mf(x)-(2m-3)=0 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Để hàm số có 4 cực trị $\Rightarrow 3\left(f\left(x\right)\right)^2-2mf\left(x\right)-\left(2m-3\right)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Đặt $t=f\left(x\right)\Rightarrow 3t^2-2mt-\left(2m-3\right)=0$

Phương trình vô nghiệm:

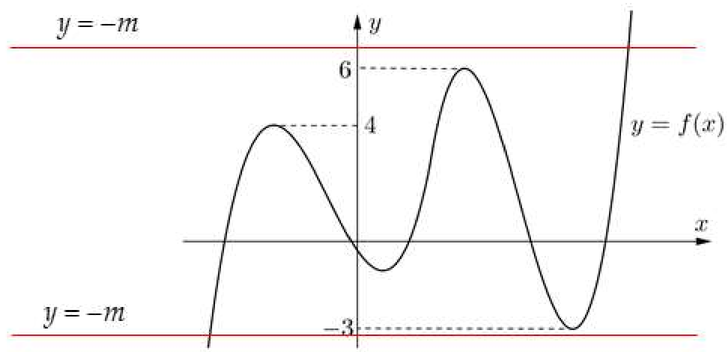
$\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2+3\left(2m-3\right)\le 0\Leftrightarrow m^2+6m-9\le 0\Leftrightarrow -3-3\sqrt{2}\le m\le -3+3\sqrt{2}$

Vậy có 9 giá trị của tham số $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 36: Chọn C**

Ta có $y'=2f(x)f'(x)-2\left(m+2\right)f'(x)=2f'(x)\left(f(x)-m-2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0\ (*) \\ f(x)=m+2 \end{array}\right.$$



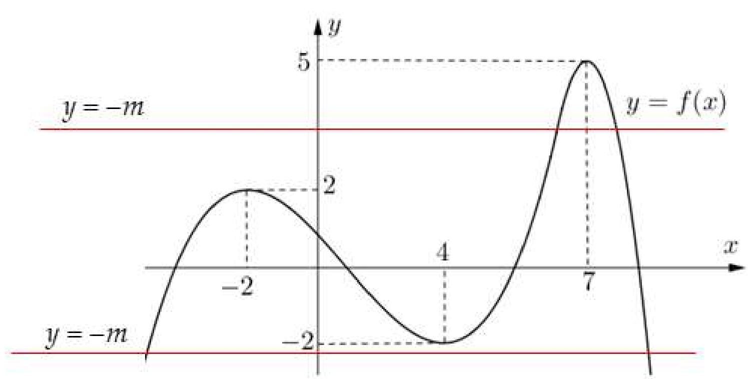

Dựa vào đồ thị thì $(*)$ có 4 nghiệm

Do đó để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2\le -3 \\ m+2\ge 6 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$. Vậy có 33 giá trị $m$.

**Câu 37: Chọn B**

Ta có: $y'=2\left(f(x)+m\right).f'(x)$

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-m \\ f'(x)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-m \\ x=-2 \\ x=4 \\ x=7 \end{array}\right.$$



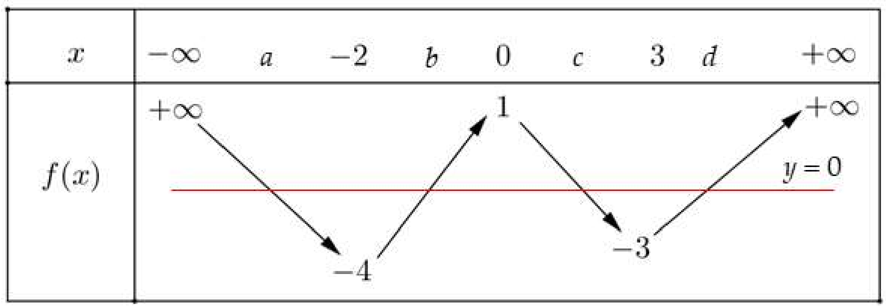

Hàm số có 5 điểm cực trị khi

$\left[\begin{array}{l} -m\le -2 \\ 2\le -m<5 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ -5<m\le -2 \end{array}\right.$. Vậy có 22 giá trị $m$

**Câu 38: Chọn B**

Ta có: $y' = 3f^2(x).f'(x) + 12f(x).f'(x) = 3f(x).f'(x)\left(f(x)+4\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \\ f(x)=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\left(a<-2\right) \\ x=b\left(-2<b<0\right) \\ x=c\left(0<c<3\right) \\ x=d\left(d>3\right) \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$$




Bảng xét dấu.

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $-2$ | | $b$ | | $0$ | | $c$ | | $3$ | | $d$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu $y'$ thì hàm số có 4 điểm cực tiểu

**Câu 39: Chọn A**

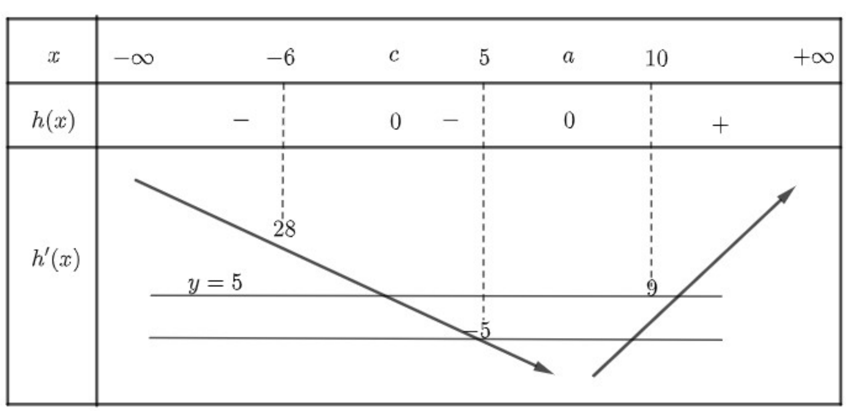
Xét hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(f\left(x\right)-3x+9\right) \Rightarrow g'\left(x\right) = \left(f'\left(x\right)-3\right)f'\left(f\left(x\right)-3x+9\right)$.

Giải phương trình đạo hàm: $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=3 \quad (co\,mot\,nghiem\,boi\,le) \\ f'\left(f\left(x\right)-3x+9\right)=0 \end{array}\right.$

Để xét phương trình $f'\left(f\left(x\right)-3x+9\right)=0$ thì ta cần khảo sát hàm số $h\left(x\right)=f\left(x\right)-3x+9$.

Ta có: $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-3=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=3 \Leftrightarrow x=c; x=a$.

Bảng biến thiên:



Xét $f'\left(f\left(x\right)-3x+9\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h\left(x\right)=f\left(x\right)-3x+9=-5 \Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le \\ h\left(x\right)=f\left(x\right)-3x+9=b\in\left(0;5\right) \Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le \\ h\left(x\right)=f\left(x\right)-3x+9=5 \Rightarrow 2\,nghiem\,boi\,le \end{array}\right.$

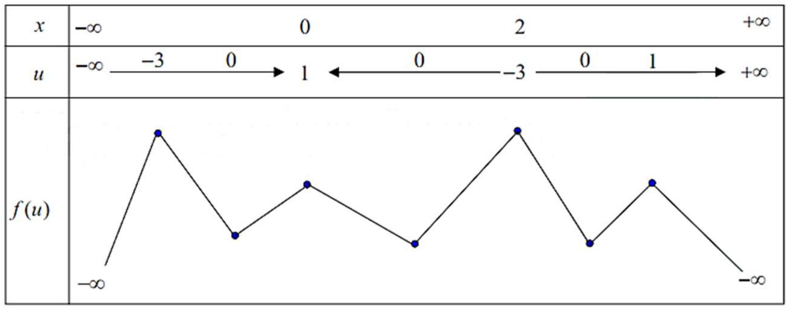
Như vậy phương trình đạo hàm $g'\left(x\right)=0$ có $7$ nghiệm bội lẻ ứng với $7$ điểm cực trị.

**Câu 40:**

**Chọn A**

Đặt $u=x^3-3x^2+1 \Rightarrow u'=3x^2-6x$.

Sử dụng phương pháp ghép trục như sau:




Như vậy hàm số có tất cả $7$ điểm cực trị.

**Câu 41:** **Chọn B**

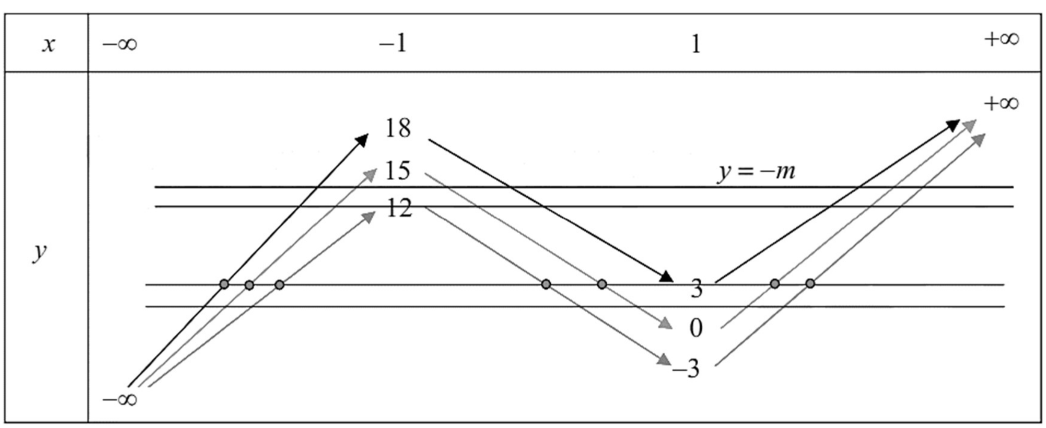
Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(2^{x^3-3x+2}+m\right) \Rightarrow g'\left(x\right)=3\left(x^2-1\right).2^{x^3-3x+2}.f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right).\ln 2$.

Cho $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow co\ 2\ nghiem\ boi\ le \\ f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0 \end{array}\right.$.

Để thoả mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có $7$ nghiệm bội lẻ.

Ta có: $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^3-3x+2}+m=-2 \\ 2^{x^3-3x+2}+m=1 \\ 2^{x^3-3x+2}+m=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^3-3x+2}+2=-m \\ 2^{x^3-3x+2}-1=-m \\ 2^{x^3-3x+2}-4=m \end{array}\right.$

Xét sự biến thiên của ba hàm số $2^{x^3-3x+2}+2$, $2^{x^3-3x+2}-1$, $2^{x^3-3x+2}-4$ trên cùng một hệ trục toạ độ




Để phương trình $f'\left(2^{x^3-3x+2}+m\right)=0$ phải có $7$ nghiệm bội lẻ thì

$$\left[\begin{array}{l}12\le -m<15\\0<-m\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-15<m\le -12\\-3\le m<0\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m=\{-14;-13;-12;-3;-2;-1\}.$$

Vậy có $6$ giá trị nguyên của tham số $m$ thoả mãn.

**Câu 42: Chọn C**

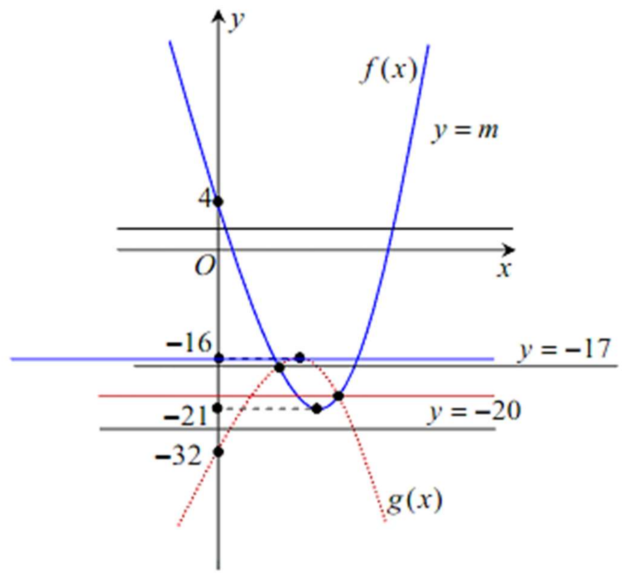
Hàm số liên tục và xác định trên toàn $\mathbb{R}$ và có đạo hàm không triệt tiêu trên một lân cận chứa điểm $x=0$ nên hàm số $f(|x|)$ đạt cực trị tại điểm $x=0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có $5$ điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị dương.

Ta có: $f'(x)=\left(x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}\right)\left(x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+1-\dfrac{m}{4}=0\\x^2-4x+\dfrac{m}{4}+8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\left(x^2-5x+1\right)=m=f(x)\\-4\left(x^2-4x+8\right)=m=g(x)\end{array}\right.$$

Vẽ hai đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ trên cùng một hệ trục toạ độ như sau:




Để có đúng hai điểm cực trị dương thì $\left[\begin{array}{l}-16\le m<4\\-32<m\le -21\\m=-17\\m=-20\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-16\le m\le 3\\-31\le m\le -21\\m=-17\\m=-20\end{array}\right.\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có tất cả $33$ giá trị nguyên của tham số $m$ thoả mãn.

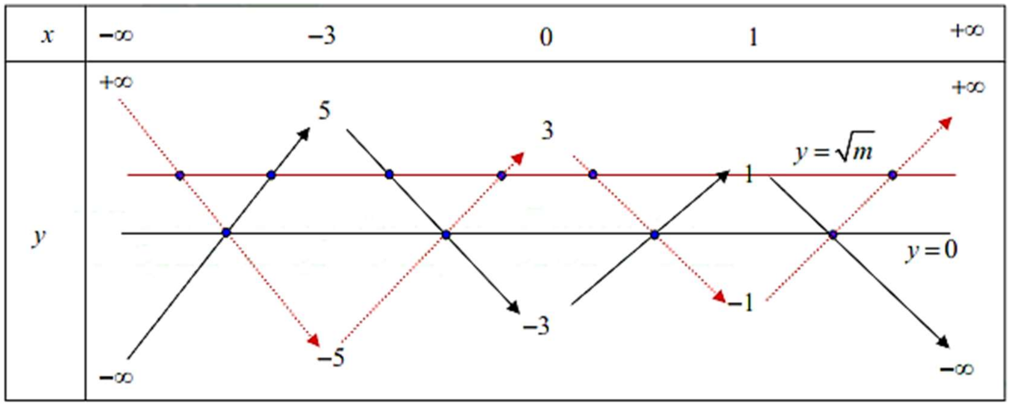
**Câu 43: Chọn C**

Có: $g'(x)=3\left(f^2(x)-m\right).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\Rightarrow co\ 3\ nghiem\ don:x=-3;x=0;x=1\\f^2(x)-m=0\end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ có đúng $9$ điểm cực trị thì phương trình $f^2(x)-m=0$ phải có $6$ nghiệm bội lẻ.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{m}\\-f(x)=\sqrt{m}\end{array}\right.$.

Xét sự tương giao của hai hàm số $f(x)$ và $-f(x)$ trên cùng một bảng biến thiên như hình vẽ sau đây:




Suy ra $1 \le \sqrt{m} < 3 \Leftrightarrow 1 \le m < 9 \Rightarrow$ có $8$ giá trị nguyên $m$ thoả mãn.

**Câu 44: Chọn C**

Ta có: $f(x) = \int\limits_{2018}^{x^2-2x} g(t)dt = G(t)\Big|_{2018}^{x^2-2x} = G(x^2-2x) - G(2018)$.

Đạo hàm $f'(x) = G'(x^2-2x)(2x-2) = g(x^2-2x).2(x-1)$.

Xét phương trình

$$g(x^2-2x).2(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \ \Rightarrow nghiem\ boi\ le \\ g(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-3\ (vo\ nghiem) \\ (x^2-2x)^2 = a>0 \Rightarrow co\ hai\ nghiem\ kep \\ x^2-2x=7 \Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow hai\ nghiem\ boi\ le \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Suy ra phương trình đạo hàm có $3$ nghiệm bội lẻ nên hàm số có $3$ điểm cực trị.

**Câu 45: Chọn A**

Xét hàm số $g(x) = f(x^2-2mx+1) \Rightarrow g'(x) = 2(x-m)f'(x^2-2mx+1)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ f'(x^2-2mx+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=1 \\ x^2-2mx+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=m & (1) \\ x^2-2mx=0 & (2) \\ x^2-2mx+2=0 & (3) \end{array}\right. \quad (*)$

Bài toán yêu cầu phương trình $(*)$ phải có đúng $3$ nghiệm bội lẻ. Đã có một nghiệm bội lẻ ở phương trình $(1)$, vậy nên trong hai phương trình bậc hai còn lại phải có một phương trình có hai nghiệm phân biệt và phương trình còn lại không có nghiệm phân biệt.

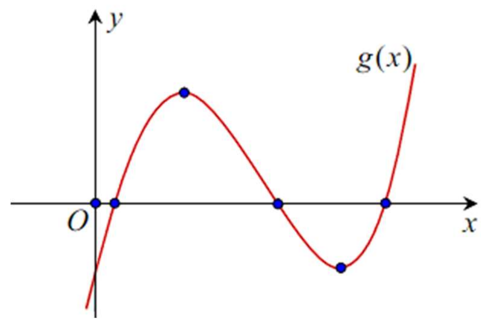
Ta có: $\Delta_2 = 4m^2$ và $\Delta_3 = 4m^2 - 8 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_2 = 4m^2 > 0 \\ \Delta_3 = 4m^2 - 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ -\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m = \{\pm 1\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên của $m$ thoả mãn.

**Câu 46: Chọn C**

Đặt $g(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x - m$.

Hình vẽ minh hoạ:




Đạo hàm $g'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1)=3\left(x^2-3mx+2m-1\right)=0\Rightarrow x=1;x=2m-1$.

Yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm phía bên phải $Oy$ và nằm về hai phía của trục hoành, đồng thời $g(0)<0$. Suy ra:

$$\begin{cases}2m-1\neq 1\\2m-1>0\\g(1).g(2m-1)<0\\g(0)=-m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m>\dfrac{1}{2}\\(2m-2)\left(-4m+12m^2-10m+2\right)<0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m>\dfrac{1}{2}\\\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\\m>\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Kết hợp điều kiện $\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in[-2022;2022]}2\le m\le 2022$. Vậy có tất cả $2021$ giá trị thoả mãn.

**Câu 47: Chọn B**

Hàm số $f(3-2x)$ đạt cực trị tại $\left[\begin{array}{l}x=-3\Rightarrow 3-2x=9\\x=-1\Rightarrow 3-2x=5\\x=4\Rightarrow 3-2x=-5\end{array}\right.$.

Vậy ta coi như hàm số $f(x)$ sẽ đạt cực trị tại các điểm $x=-5;x=5;x=9$.

Ta đặt $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)\Rightarrow g(|x|)=f\left(x^2-2m|x|\right)$.

Nhận thấy hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)$ xác định tại điểm $x=0$ và không phải là hằng số trong một khoảng chứa điểm $x=0$, nên hàm số $g(|x|)=f\left(x^2-2m|x|\right)$ sẽ đạt cực trị tại $x=0$.

Để hàm số $g(|x|)=f\left(x^2-2m|x|\right)$ có $7$ điểm cực trị thì hàm số $g(x)=f\left(x^2-2mx\right)$ có $3$ điểm cực trị dương.

Ta có: $g'(x)=(2x-2m)f'\left(x^2-2mx\right)=0\left[\begin{array}{l}x=m\\x^2-2mx=9\\x^2-2mx=5\\x^2-2mx=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=m & (1)\\x^2-2mx-9=0 & (2)\\x^2-2mx-5=0 & (3)\\x^2-2mx+5=0 & (4)\end{array}\right.$

Dễ thấy phương trình $(2)$ và $(3)$ mỗi phương trình cho ta một nghiệm đơn và dương. Phương trình $(4)$ nếu có nghiệm đơn và dương thì sẽ có hai nghiệm phân biệt. Vì vậy phương trình $(4)$ không thể có hai nghiệm phân biệt dương, tức là phải có hai nghiệm phân biệt âm hoặc không có hai nghiệm phân biệt và phương trình $(1)$ có nghiệm dương.

Suy ra:

$$\begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} \Delta'_{(4)}=m^2-5\le 0 \\ \begin{cases} \Delta'_{(4)}=m^2-5>0 \\ 2m\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} 0<m\le\sqrt{5}\to m\in\left(0;\sqrt{5}\right]\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=\sqrt{5} \end{cases}\Rightarrow P=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(0^2+5\right)=10$$

**Câu 48: Chọn D**

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3-mx^2-2x+m\right)\Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-2mx-2\right)f'\left(x^3-mx^2-2x+m\right)$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi phương trình đạo hàm phải có $6$ nghiệm bội lẻ:

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3x^2-2mx-2=0 \\ f'\left(x^3-mx^2-2x+m\right)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2-2mx-2=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3-mx^2-2x+m=-1 \\ x^3-mx^2-2x+m=1 \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Phương trình $3x^2-2mx-2=0$ luôn cho hai nghiệm phân biệt. Suy ra hai phương trình còn lại phải cho đúng $4$ nghiệm bội lẻ:

$$\left[\begin{array}{l} x^3-mx^2-2x+m=-1 \\ x^3-mx^2-2x+m=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} (x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0\ \ (1) \\ (x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0\ \ (2) \end{array}\right.$$

Nhận thấy hai phương trình $(1),(2)$ luôn cho hai nghiệm phân biệt, và các nghiệm của hai phương trình này là không trùng nhau.

Để hai phương trình có đúng $4$ nghiệm bội lẻ thì:

Trường hợp 1: $x=1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$ và $x=-1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$.

Trường hợp 2: $x=-1$ là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m+1)x+m-1\right)=0$ và $x=1$ không phải là nghiệm của $(x-1)\left(x^2-(m-1)x-m-1\right)=0$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-(m-1)-m-1=0 \\ 1+(m+1)+m-1\ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-(m-1)-m-1\ne 0 \\ 1+(m+1)+m-1=0 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=\dfrac{1}{2} \\ m\ne-\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m\ne\dfrac{1}{2} \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

Vậy có hai giá trị thực của $m$ thoả mãn.

**Câu 49:**

**Chọn C**

Ta có: $f'(x)=a(x+2)(x-1)\Rightarrow f(x)=a\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+b$.

Đồ thị hàm số đi qua $A(-2;4)$, $B(1;-1)$ nên ta có: $\begin{cases} 4=\dfrac{10}{3}a+b \\ -1=-\dfrac{7}{6}a+b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{10}{9} \\ b=\dfrac{8}{27} \end{cases}$.

Hàm số ban đầu là $f(x)=\dfrac{10}{9}\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x\right)+\dfrac{8}{27}$.

Đặt $\begin{cases} u=x^3-3\left|x^2-1\right|+m \\ f(x)\to f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1+m$ | $\searrow$ | $-3+m$ | $\nearrow$ | $1+m$ | $\searrow$ | $-1+m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2>-3+m \\ 1<-1+m \end{cases} \\ \begin{cases} -3+m<-2<-1+m \\ -1+m<1<1+m \end{cases} \\ \begin{cases} -2>-1+m \\ 1<1+m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<1 \\ m>2 \end{cases} (loai) \\ \begin{cases} -1<m<1 \\ 0<m<2 \end{cases} \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>0 \end{cases} (loai) \end{array}\right.$.

Vậy $m\in(0;1) \Rightarrow$ không có giá trị nào của $m$ thoả mãn.

**Câu 50:**

**Chọn D**

Đặt $\begin{cases} u=f^2(x)-2f(x)-m \\ h(x)=f(|x|) \end{cases} \Rightarrow u'(x)=2f'(x).f(x)-2f'(x)$.

Giải phương trình đạo hàm: $u'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;5;9\} \\ f(x)=1 \Leftrightarrow x\in\{a;b;c;d\} \end{array}\right.$.

Lại có: $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\{\pm 9;\pm 5;\pm 1;0\}$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | a | | 1 | | b | | 5 | | c | | 9 | | d | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $u(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | -1-m | $\nearrow$ | 8-m | $\searrow$ | -1-m | $\nearrow$ | 15-m | $\searrow$ | -1-m | $\nearrow$ | 15-m | $\searrow$ | -1-m | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để hàm số $g(x)$ có 51 điểm cực trị thì $\begin{cases} -9 \le -1-m \\ -5 > -1-m \\ 1 < 8-m \\ 5 > 8-m \\ 9 < 15-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 8 \\ m > 4 \\ m < 7 \\ m > 3 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 6$.

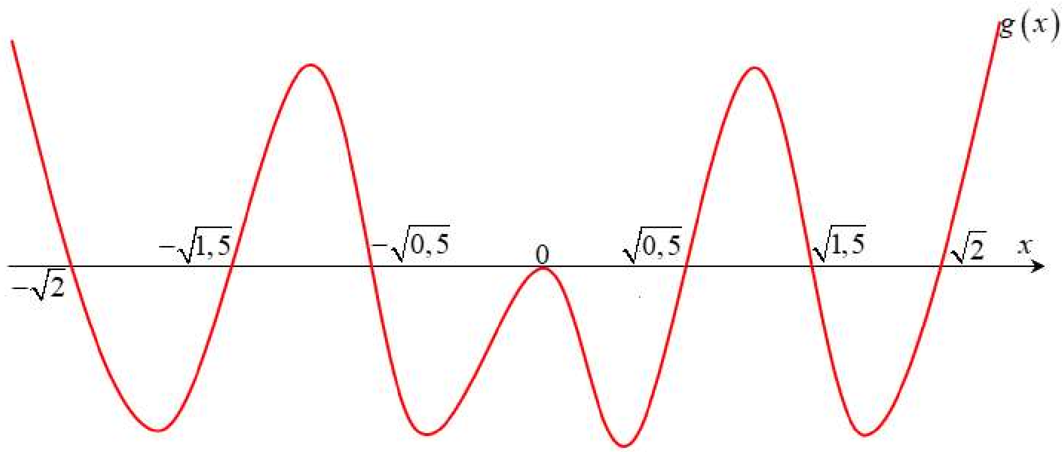
Vậy có một giá trị $m = 5$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 51: Chọn B**

Ta có: $g(x) = x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ f\left(x^2-1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 \approx -0,5 \\ x^2 - 1 \approx 0,5 \\ x^2 - 1 = 1 \end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow x \in \left\{0; \pm\sqrt{0,5}; \pm\sqrt{1,5}; \pm\sqrt{2}\right\}$.

Phác họa nhanh đồ thị:



**Câu 52: Chọn B**

Xét hàm số $y=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$, tập xác định trên $\mathbb{R}$.

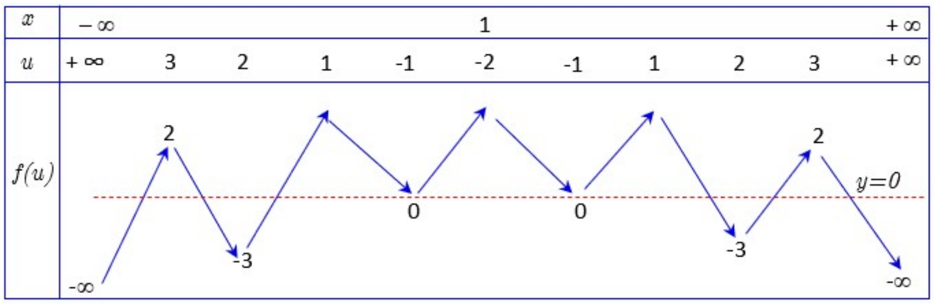
Ta có: $y=\begin{cases}2x^2-8x+4 & neu\ x\le 1 hoac\ x\ge 7\\ 8x-10 & neu\ 1<x<7\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}4x-8 & neu\ x\le 1 hoac\ x\ge 7\\ 8 & neu\ 1<x<7\end{cases}$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 7 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | - | \|\| | + | \|\| | + | |

Suy ra hàm số có một điểm cực trị $x=1$.

Đặt $u=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$. Sử dụng phương pháp ghép trục:




Suy ra hàm số $y=\left|f(u)\right|$ có 7 điểm cực đại.

# II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ PHẦN 2

## ĐỀ BÀI

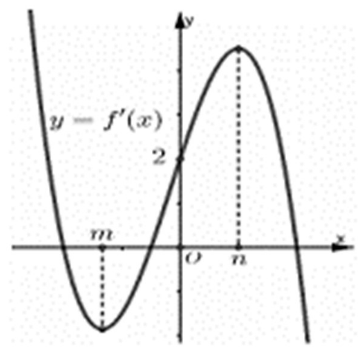
**Câu 1:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Số điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ là

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

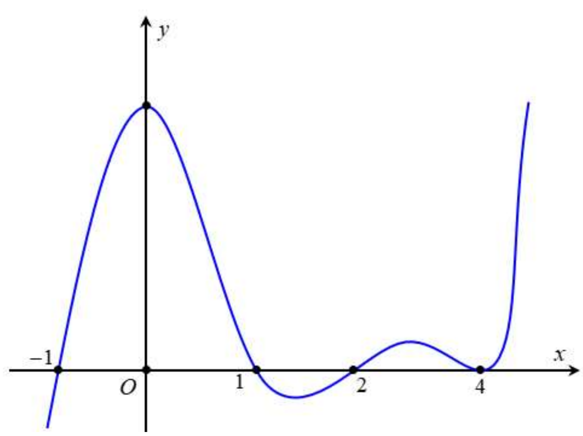
**Câu 2:** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Biết rằng $e>n$




Số điểm cực trị của hàm số $y=f'\left(f\left(x\right)-2x\right)$ là

**A.** $7$. **B.** $6$. **C.** $10$ **D.** $14$.

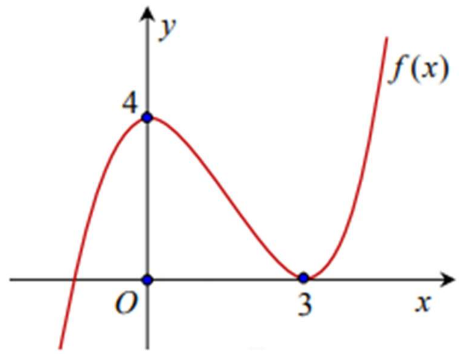
**Câu 3:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đúng $4$ điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:




Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số $y=f\left(\left|x\right|^3-3\left|x\right|+m+2021\right)$ có đúng $11$ điểm cực trị?

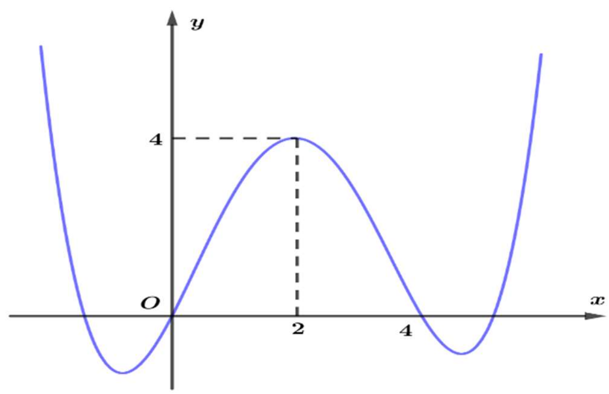
**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** 1.

**Câu 4:** Cho đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $f\left(3f\left(x\right)-m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?




**A.** $7$. **B.** $4$. **C.** $6$. **D.** $5$.

**Câu 5:** Cho hàm số bậc năm $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)-2x^3-6x^2$ là




**A.** 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 11.

**Câu 6:** Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

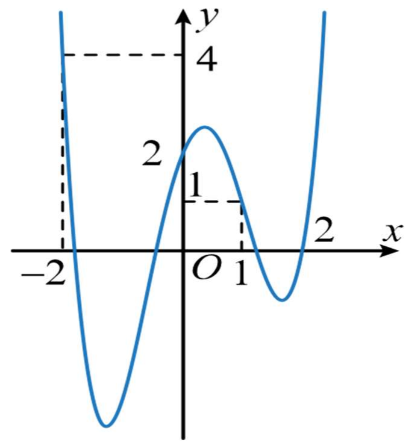
Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}\left(f\left(x\right)-6\right)^4$ là

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)^2\left(x^2-x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $f\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có $5$ điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của $S$?

**A.** $154$. **B.** $17$. **C.** $213$. **D.** $153$.

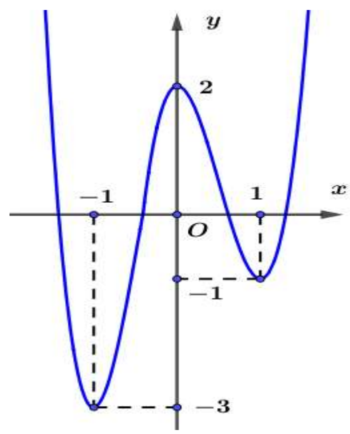
**Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.




Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4$ là

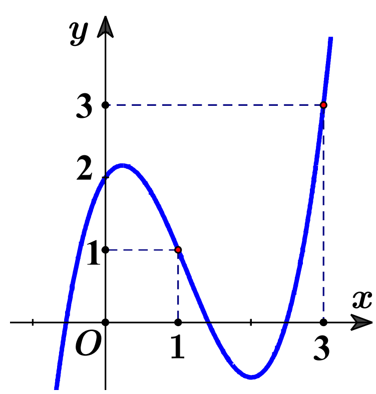
**A.** 7. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 9:** Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x) - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ là




**A.** 4. **B.** 5. **C.** 9 . **D.** 7 .

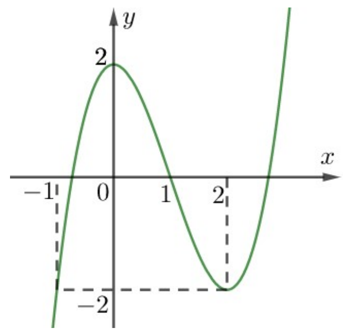
**Câu 10:** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong dưới đây.




Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f(x^4) - 6x^2\right|$ là

**A.** 3 . **B.** 6 . **C.** 5. **D.** 4 .

**Câu 11:** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.




Hàm số $g(x)=\left|5f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)+4\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên đoạn $[0;3\pi]$?

**A.** $16$. **B.** $32$. **C.** $17$. **D.** $33$.

**Câu 12:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $7$. **B.** $6$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=\left|x^4-4x^3+4x^2+m\right|$ ($m$ là tham số). Khi $m$ thay đổi thì số điểm cực trị của hàm số có thể là $a$ hoặc $b$ hoặc $c$. Tính tích $a.b.c$.

**A.** $105$. **B.** $120$. **C.** $60$. **D.** $15$.

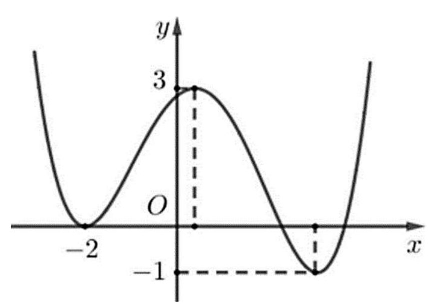
**Câu 14:** Cho $f(x)$ là hàm số bậc 4 thõa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số $g(x)=\left|f\left(-x^2\right)+3x^2-x^4\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $2$.

**Câu 15:** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(1-2x)-\left[f(1-2x)\right]^2+2\right|$ là

**A.** $7$. **B.** $9$. **C.** $11$. **D.** $15$.

**Câu 16:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+2x+1$ có ba điểm cực trị

**A.** 10. **B.** 19 **C.** 9 . **D.** 5 .

**Câu 17:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên đạo hàm như hình vẽ sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hỏi số điểm cực trị tối đa của hàm $y=\left|2\left|f\left(x^2-2x\right)\right|-2021\right|$ bằng bao nhiêu?

**A.** 29 . **B.** 23 . **C.** 15 . **D.** 31 .

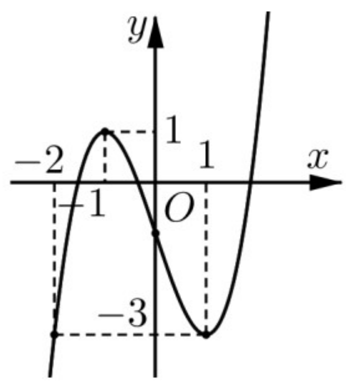
**Câu 18:** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-2)=0$ và đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $g(x)=\left|15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

**Câu 19:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



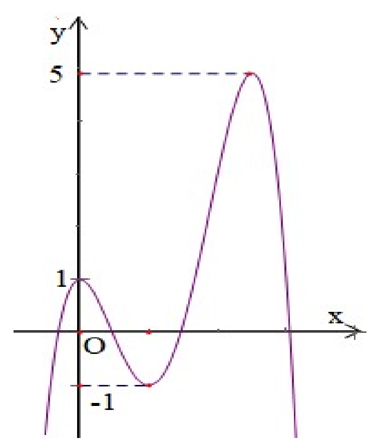

Đặt $g(x)=f^2(x-m)-2mf(x-m),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc $[-10;10]$ để $g(x)$ có đúng 2 điểm cực tiểu?

**A.** 18 . **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** 16 .

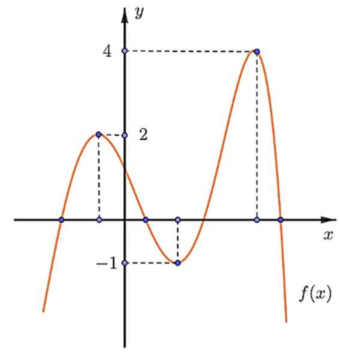
**Câu 20:** Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn [-2020 ; 2021] để hàm số $g(x)=f^2(x)-mf(x)$ có đúng hai điểm cực đại là.

**A.** 2027 . **B.** 2021 .

**C.** 2019 . **D.** 2022 .



**Câu 21:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên R và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y=2f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(3-2f\left(x\right)\right)$ có ít nhất bao nhiêu điểm cực trị?




**A.** $3$. **B.** $6$.
**C.** $5$. **D.** $7$.

**Câu 22:** Cho hai đường cong $\left(C_1\right): y=x^4-\left(m+1\right)x^2+2$ và $\left(C_2\right): y=2\left(x+1\right)^4-4x^2-8x+3m$. Biết rằng mỗi đường cong đều có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đồng thời các tam giác đồng dạng với nhau. Hỏi $m$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(2;3\right)$. **D.** $\left(3;4\right)$.

**Câu 23:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-\left(2m+1\right)x^2+\left(3-m\right)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có ba cực trị.

**A.** $m>3$. **B.** $-\dfrac{1}{2}<m$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<m\le 3$.

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-8\right)\left(x^2-9\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

**A.** $5$. **B.** $7$. **C.** $8$. **D.** $6$.

**Câu 25:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'\left(x\right)=x^3-3x^2-10x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-1\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

**Câu 26:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-7\right)\left(x^2-9\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|ax^3+bx\right|+2m+3\right)$ với $a.b>0$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

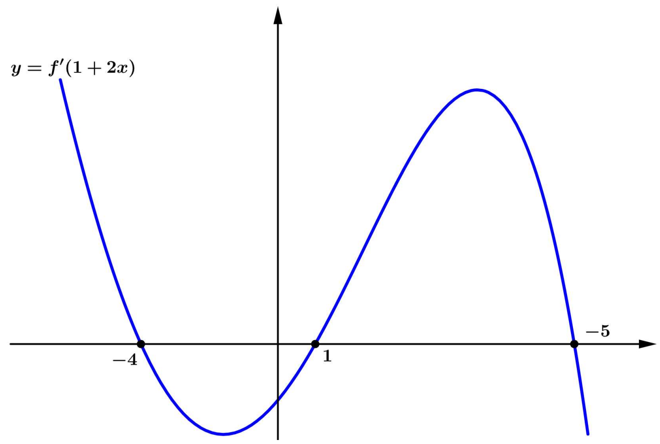
**Câu 27:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên dưới đây

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left|f\left(\left|6x-5\right|\right)+2021+m\right|$ có 3 điểm cực đại?

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Câu 28:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(1+2x\right)$ như hình vẽ:



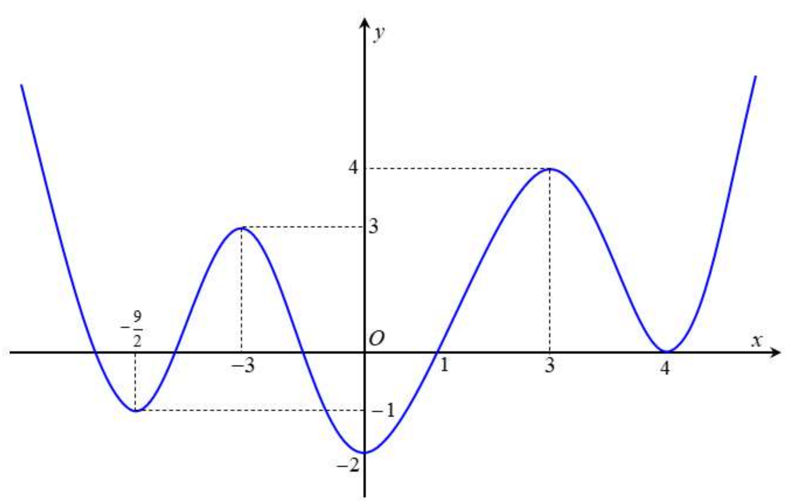

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=f\left(-\left|x\right|^2+2\left|x\right|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị?

**A.** 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

**Câu 29:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} ax+b & neu\ x<-1 \\ x^2+bx+a-9 & neu\ x\geq -1 \end{cases}$, với $a,b$ là các tham số thực xác định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số $a$ là số nguyên để hàm số $f\left(x\right)$ có đúng hai điểm cực trị?

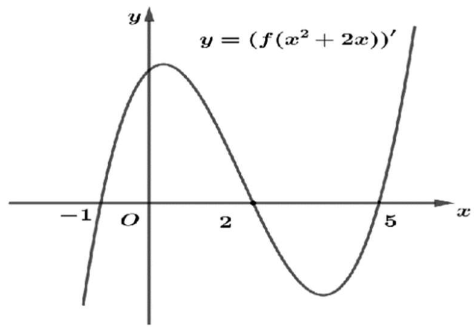
**A.** 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f\left(2021x-2\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $\left[-2022;2022\right]$ để hàm số $y=\left|\left[f\left(1-4x\right)\right]^3-3f\left(1-4x\right)-m\right|$ có đúng 17 điểm cực trị?



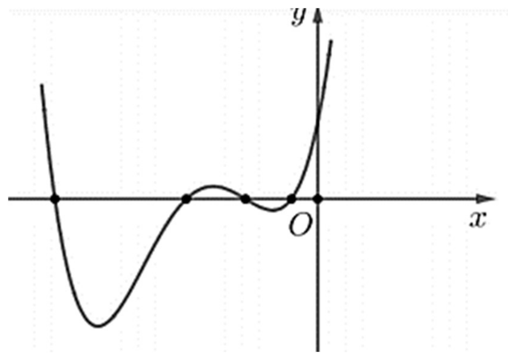

**A.** 35. **B.** 33. **C.** 34. **D.** 32.

**Câu 31:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f(x^2+2x)$ có đồ thị trên $\mathbb{R}$ của đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^4-4|x|^3+6x^2-4|x|\right)$ bằng




**A.** 9. **B.** 11. **C.** 7. **D.** 5.

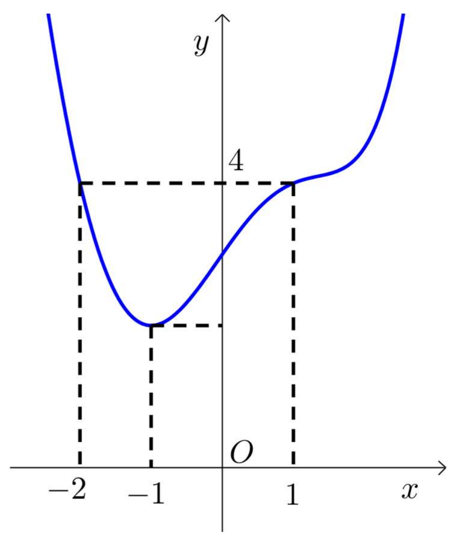
**Câu 32:** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên:




Biết rằng $f(0)=0$. Hàm số $g(x)=\left|f(x^6)-x^3\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

**Câu 33:** Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f\,(a\neq 0)$ và hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ dưới đây




Đặt $g(x)=f(3x-1)-9x^3+\dfrac{9}{2}x^2-6x+2021$. Hỏi hàm số $f=g(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

**A.** 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

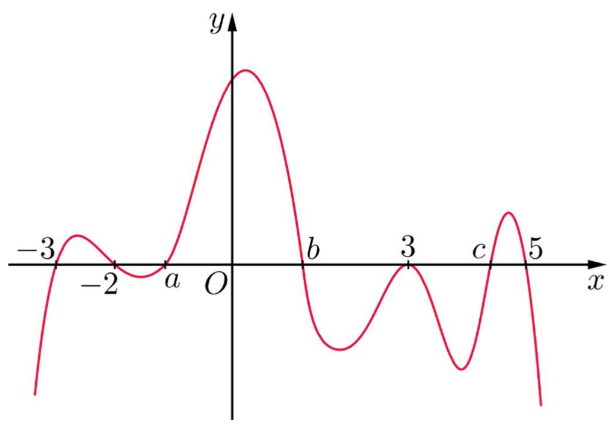
**Câu 34:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hỏi hàm số $g(x)=f(x^4)-4x$ có mấy điểm cực tiểu?

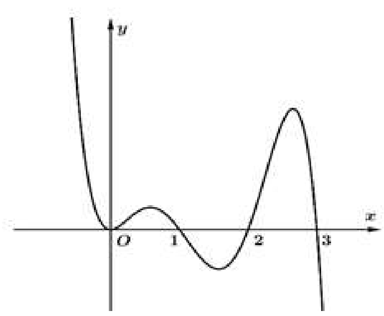
**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 35:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $-3$; $-2$; $a$; $b$; $3$; $c$; $5$ với $-\frac{4}{3}<a<-1$; $1<b<\frac{4}{3}$; $4<c<5$ (có dạng như hình vẽ bên dưới). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m$ để hàm số $y=f(2|x|+m-3)$ có $7$ điểm cực trị?




**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** Vô số.

**Câu 36:** Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



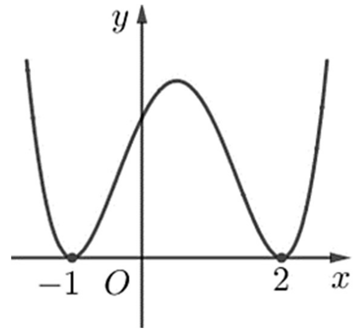

Có bao nhiêu giá trị của $m\in[0;6];2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng $9$ điểm cực trị?

**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $6$.

**Câu 37:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right),x\in\mathbb{R}$. Gói S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

**A.** $154$. **B.** $17$. **C.** $213$. **D.** $153$.

**Câu 38:** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên:




Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^{2}+\left[f'\left(x\right)\right]^{2}-2f\left(x\right).f'\left(x\right)$ là

**A.** 4 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 3

**Câu 39:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=4x^{3}+2x$ và $f\left(0\right)=1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f^{3}\left(x\right)$ là

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Câu 40:** Hàm số $f\left(x\right)=\left|\dfrac{x}{x^{2}+1}-m\right|$ (với $m$ là tham số thực) có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $4$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn B**

Ta có: $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$; $g'(x)=2f\left(2x^2+x\right).f'\left(2x^2+x\right).(4x+1)$.

Giải phương trình đạo hàm: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}\\ f\left(2x^2+x\right)=0\\ f'\left(2x^2+x\right)=0\end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta có: $f'\left(2x^2+x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2+x=-2\,(vo\ \ nghiem)\\ 2x^2+x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0>1$. Khi đó

$f\left(2x^2+x\right)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-\infty;-1)\\ x=x_2\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\end{array}\right.$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ nên ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ ta có số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ là $2$.

**Câu 2: Chọn A**

Xét $y=f'\left(f(x)-2x\right)\Rightarrow y'=\left(f'(x)-2\right).f''\left(f(x)-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(x)=2\\ f''\left(f(x)-2x\right)=0\end{array}\right.$.

Với $f'(x)=2$. Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Với $f''\left(f(x)-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}f(x)-2x=m,(m<0) & (1)\\ f(x)-2x=n,(n<e) & (2)\end{array}\right.$

Đặt $h(x)=f(x)-2x \Rightarrow h'(x)=f'(x)-2=0 \Leftrightarrow f'(x)=2$.

Bảng biến thiên của $h(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | | $0$ | | $0$ | | $0$ | | |
| $h(x)$ | | ↗ | | ↘ | $h(0)=e>n>m$ | ↗ | | ↘ | |

Vậy các phương trình $(1)$ và $(2)$ cho 4 nghiệm phân biệt.

**Câu 3: Chọn D**

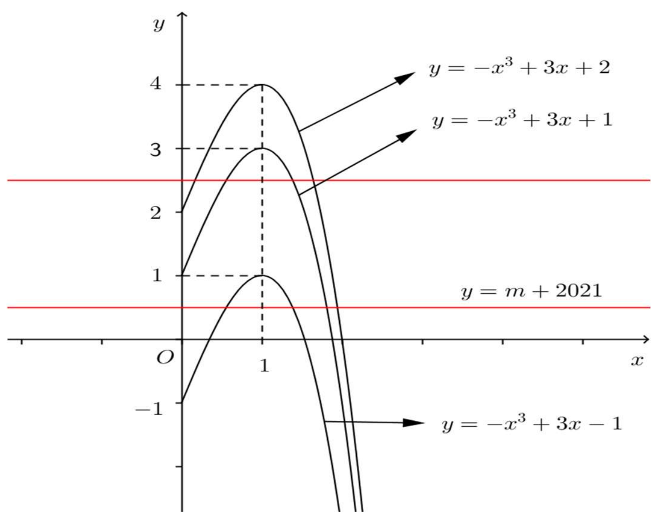
Xét $x>0$: Hàm số có dạng $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$

Khi đó ta có đạo hàm như sau: $y'=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+m+2021\right)$

Do nghiệm của phương trình $x^3-3x+m+2021=4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y'=0$ nên ta có:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\ f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \left(\text{do } x>0\right)\\ x^3-3x+m+2021=-1\\ x^3-3x+m+2021=1\\ x^3-3x+m+2021=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \left(\text{do } x>0\right)\\ m+2021=-x^3+3x-1\\ m+2021=-x^3+3x+1\\ m+2021=-x^3+3x+2\end{array}\right.$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ với $x>0$ trên cùng một hệ trục.




Hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$ có đúng $5$ điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0$ có đúng $4$ nghiệm bội lẻ dương và khác 1

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m+2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ tại $4$ điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<m+2021<1\\ 2<m+2021<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2022<m<-2020\\ -2019<m<-2018\end{array}\right.$. Do điều kiện $m$ nguyên nên $m=-2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 4: Chọn C**

Đặt $g(x)=f(3f(x)-m)$. Khi đó, đạo hàm $g'(x)=3f'(x).f'(3f(x)-m)$

Giải phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(x).f'(3f(x)-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(3f(x)-m)=0 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$ $(1)$

Do $f'(3f(x)-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3f(x)-m=0 \\ 3f(x)-m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=\dfrac{m}{3} & (2) \\ f(x)=\dfrac{m}{3}+1 & (3) \end{array}\right.$.

Từ $(1)$ và dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ điều kiện để hàm số $f(3f(x)-m)$ có đúng 6 điểm cực trị là số nghiệm của phương trình $f(x)=\dfrac{m}{3}$ và phương trình $f(x)=\dfrac{m}{3}+1$ cùng với 2 nghiệm ở $(1)$ thỏa mãn $g'(x)$ đảo dấu 6 lần. Hay nói cách khác: Để hàm số có $6$ điểm cực trị thì phương trình $(2)$ và $(3)$ phải có $4$ nghiệm phân biệt. Đến đây ta có hai hướng để tiếp cận là biện luận truyền thống và xét sự tương giao trên cùng một hệ trục tọa độ.

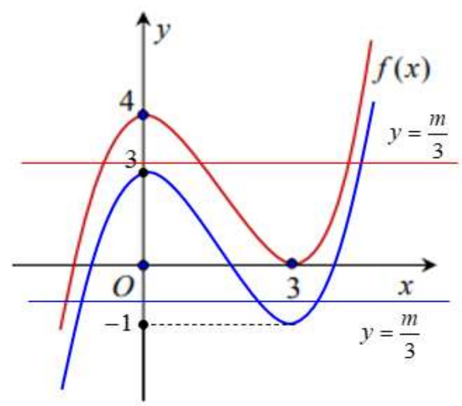
**Với cách biện luận truyền thống:** Khi đó xảy ra các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** $\begin{cases} 0<\dfrac{m}{3}<4 \\ \dfrac{m}{3}+1\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m<12 \\ m\geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9\leq m<12$. Do $m$ nguyên nên $m\in\{9;10;11\}$.

**Trường hợp 2:** $\begin{cases} \dfrac{m}{3}\leq 0 \\ 0<\dfrac{m}{3}+1<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq 0 \\ m<9 \\ m>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m\leq 0$. Do $m$ nguyên nên $m\in\{-2;-1;0\}$.

**Với cách xét tương giao**: Từ phương trình $(3)$, ta có: $f(x)=\dfrac{m}{3}+1 \Leftrightarrow f(x)-1=\dfrac{m}{3}$

Xét tương giao trên cùng một hệ trục tọa độ như sau:



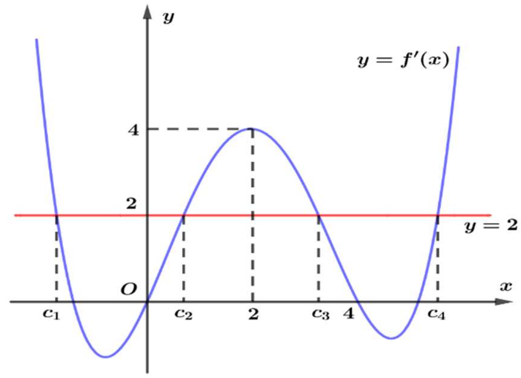

Từ đồ thị, để phương trình có $4$ nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} 3\leq\dfrac{m}{3}<4 \Leftrightarrow 9\leq m<12 \\ -1<\dfrac{m}{3}\leq 0 \Leftrightarrow -3<m\leq 0 \end{array}\right.$

Vậy có 6 giá trị của $m$.

**Câu 5: Chọn B**

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$

Ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x) f'(x^3 + 3x^2) - 6x^2 - 12x = 3x(x+2)\left[f'(x^3 + 3x^2) - 2\right]$.



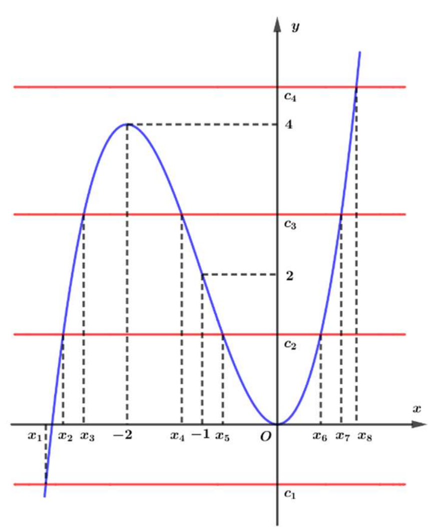

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x = -2 & \\ x^3 + 3x^2 = c_1\ (c_1 < 0) & (1) \\ x^3 + 3x^2 = c_2\ (0 < c_2 < 2) & (2) \\ x^3 + 3x^2 = c_3\ (2 < c_3 < 4) & (3) \\ x^3 + 3x^2 = c_4\ (c_4 > 4) & (4) \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = 3x^2 + 6x$.

Bảng biến thiên $h(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = h(x)$, $y = c_1$, $y = c_2$, $y = c_3$, $y = c_4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ ta được



Phương trình $(1) \Leftrightarrow x = x_1$; $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_2 \\ x = x_5 \\ x = x_6 \end{array}\right.$; $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_3 \\ x = x_4 \\ x = x_7 \end{array}\right.$; $(4) \Leftrightarrow x = x_8$

Trong đó $x_1 < x_2 < x_3 < -2 < x_4 < x_5 < 0 < x_6 < x_7 < x_8$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $x_3$ | | $-2$ | | $x_4$ | | $x_5$ | | $0$ | | $x_6$ | | $x_7$ | | $x_8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |

Từ bảng xét dấu ta kết luận được hàm số $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

**Câu 6: Chọn B**

Theo giả thiết ta có $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(x)$ đi qua $A(-2;2), B(0;6), C(2;2)$ và có ba điểm cực trị

$\Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = 2 \\ c = 6 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$. Vậy $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6$, $f'(x) = x^3 - 4x$

Ta có hàm số $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(f(x) - 6\right)^4$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đạo hàm: $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3}\left(f(x) - 6\right)^4 + \dfrac{1}{x^2}.4\left(f(x) - 6\right)^3.f'(x)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\left(f(x) - 6\right)^3}{x^3}\left(4x.f'(x) - 2f(x) + 12\right)$$

Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) - 6 = 0 & (1) \\ 4xf'(x) - 2f(x) + 12 = 0 & (2) \end{array}\right.$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$(2) \Leftrightarrow 4x.\left(x^3 - 4x\right) - 2\left(\dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 6\right) + 12 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{7}{2}x^4 - 12x^2 = 0 \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{2\sqrt{42}}{7} \end{array}\right.$.

Vì $x \neq 0$ nên có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = \pm\dfrac{2\sqrt{42}}{7} \end{array}\right.$ và các nghiệm đó đều là nghiệm bội lẻ.

Do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

**Câu 7: Chọn D**

Ta có $f'(x)=(x-2)^2(x^2-x)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=0\end{array}\right.$. Với $x=2$ là nghiệm kép, $x=1,x=0$ là nghiệm đơn. Do đó hàm số $f=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1,x=0$.

Đặt $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$

$$g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=2\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=0(1)\\\frac{1}{2}x^2-6x+m=1(2)\end{array}\right..$$

Giả sử $x_0$ là nghiệm của phương trình $(1)$ thì $\frac{1}{2}x_0^2-6x_0+m=0$ do đó $x_0$ không thể là nghiệm của phương trình $(2)$ hay nói cách khác phương trình $(1),(2)$ không có nghiệm chung. Vì vậy, để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $(1),(2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 6 hay $\left\{\begin{array}{l}\Delta_1>0\\\Delta_2>0\\\frac{1}{2}.6^2-6.6+m\neq0\\\frac{1}{2}.6^2-6.6+m\neq1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}9-\frac{m}{2}>0\\9-\left(\frac{m-1}{2}\right)>0\\m\neq18,m\neq19\end{array}\right.\Leftrightarrow m<18\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in\{1,2,...,17\}$.

Vậy tổng các giá trị của $m$ là: $1+2+...+17=153$.

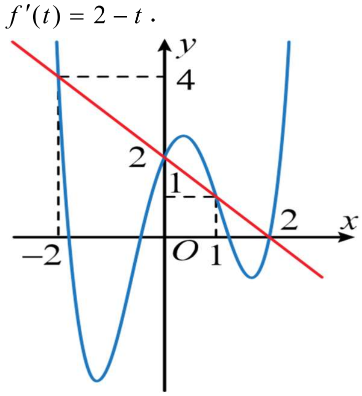
**Câu 8: Chọn B**

Ta có:

$g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x+3)-6(x-2)+2(x-2)^3=(2x-4)\left[f'(x^2-4x+3)-3+(x-2)^2\right]$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\f'(x^2-4x+3)-3+(x-2)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\f'(x^2-4x+3)=2-(x^2-4x+3)\end{array}\right.$ (*)

Đặt $x^2-4x+3=t$, ta có: $(*)\Leftrightarrow f'(t)=2-t$.



Từ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = 2 - t$ ta có:

$$f'(t) = 2 - t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = -2 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2-\sqrt{2}$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $2+\sqrt{2}$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực đại.

**Câu 9: Chọn B**

Ta có $y' = 4(2x-1)f'\left(4x^2-4x\right) - 4(2x-1)(x-1) \Rightarrow y' = 4(2x-1)\left[f'\left(4x^2-4x\right)-(x-1)\right]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow y' = 4(2x-1)\left[f'\left(4x^2-4x\right)-(x-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ f'\left(4x^2-4x\right) = x-1 \end{array}\right.$$

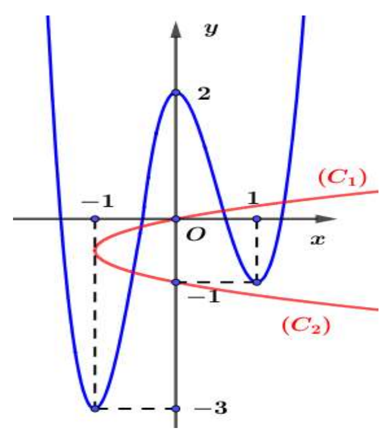
Xét phương trình: $f'\left(4x^2-4x\right) = x-1 \ (1)$

Đặt $t = 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 4x - t = 0 \quad \Delta' = 4 + 4t \ge 0 \Leftrightarrow t \ge -1$.

Khi đó: $4x^2 - 4x - t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{1+t}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{1+t}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = \frac{-1-\sqrt{1+t}}{2} \\ x-1 = \frac{-1+\sqrt{1+t}}{2} \end{array}\right.$

Phương trình $(1)$ trở thành: $\left[\begin{array}{l} f'(t) = \frac{-1-\sqrt{1+t}}{2} \\ f'(t) = \frac{-1+\sqrt{1+t}}{2} \end{array}\right.$

Vẽ đồ thị 3 hàm số $y = f'(x), y = \frac{-1-\sqrt{1+x}}{2}\left(C_1\right), y = \frac{-1+\sqrt{1+x}}{2}\left(C_2\right)$ trên cùng hệ trục tọa độ ta thấy đồ thị $\left(C_1\right)$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 3 điểm, đồ thị $\left(C_2\right)$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại 1 điểm.



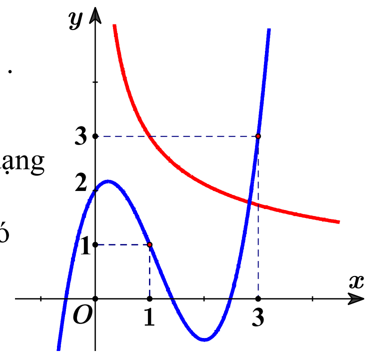
Với mỗi nhánh, mỗi giao điểm $t$ sẽ tương ứng với một giá trị duy nhất của $x$ khác $\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)-\frac{8}{3}x^3+6x^2-4x+1$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 10: Chọn C**

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-6x^2$ có $h'(x)=4x^3f'\left(x^4\right)-12x=4x\left[x^2f'\left(x^4\right)-3\right]$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow 4x\left[x^2f'\left(x^4\right)-3\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{x^2}\ (x\neq 0)\ (1)\end{array}\right..$$




Xét phương trình $(1)$: đặt $t=x^4$ thì phương trình có dạng $f'(t)=\frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t>0$ $(2)$. Dựa vào đồ thị, phương trình $(2)$ có một nghiệm duy nhất $a>0$. Khi đó ta được $x=\pm\sqrt[4]{a}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-6x^2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt[4]{a}$ | | $0$ | | $\sqrt[4]{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-6x^2\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-6x^2$ cộng với số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x)=0$.

Do đó hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

**Câu 11: Chọn D**

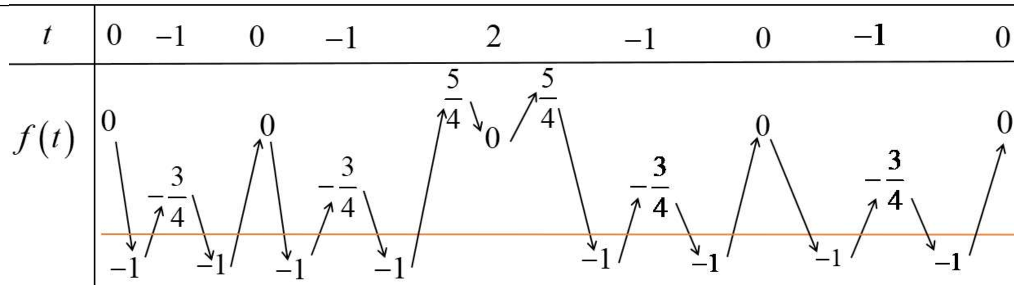
Ta có $f''(x)=ax(x-2)\Rightarrow f'(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)+c$ qua $(0;2)$, $(-1;-2)$.

Nên $\begin{cases}c=2\\a=3\end{cases}\Rightarrow f'(x)=x^3-3x^2+2\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+2x$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1-\sqrt{3}$ | $0$ | $1$ | $2$ | $1+\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-\frac{3}{4}$ | $-1$ | $0$ | $\frac{5}{4}$ | $0$ | $-1$ | $+\infty$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{13\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $\frac{17\pi}{6}$ | $3\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\sin x-1$ | $-1$ | | $1$ | | $-3$ | | $1$ | | $-1$ |
| $\lvert 2\sin x-1\rvert-1$ | $0\longrightarrow$ | $-1\longrightarrow$ | $\mathbf{0}\longrightarrow$ | $\mathbf{-1}\longrightarrow$ | $2\longrightarrow$ | $-1\longrightarrow$ | $\mathbf{0}\longrightarrow$ | $-1\longrightarrow$ | $\mathbf{0}$ |

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ với $t=|2\sin x-1|-1$




Suy ra phương trình có $f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)=-\frac{4}{5}$ có 16 nghiệm trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$ và hàm số $h(x)=5f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)+4$ có 17 điểm cực trị trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$.

Vậy hàm số $g(x)=\left|5f\left(\left|2\sin x-1\right|-1\right)+4\right|$ có $16+17=33$ điểm cực trị trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$.

**Câu 12: Chọn D**

Đặt $h\left(x\right)=2\left(x+1\right)^{6}-6\left(x+1\right)^{2}-3f\left(-x^{4}-4x^{3}-4x^{2}-2\right)$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=12\left(x+1\right)^{5}-12\left(x+1\right)-3\left(-4x^{3}-12x^{2}-8x\right).f'\left(-x^{4}-4x^{3}-4x^{2}-2\right)$

$=12\left(x+1\right)\left(x^{2}+2x\right)\left(x^{2}+2x+2\right)+12\left(x+1\right)\left(x^{2}+2x\right).f'\left(-x^{4}-4x^{3}-4x^{2}-2\right)$

$=12(x+1)\left(x^{2}+2x\right)\left[x^{2}+2x+2+f'\left(-x^{4}-4x^{3}-4x^{2}-2\right)\right]$

Mà $-x^{4}-4x^{3}-4x^{2}-2=-\left[x\left(x+2\right)\right]^{2}-2\leq -2,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ ta suy ra được $f'\left(-x^{4}-4x^{3}-4x^{2}-2\right)\geq 0$.

Khi đó: $x^{2}+2x+2+f'\left(-x^{4}-4x^{3}-4x^{2}-2\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó dấu của $h'\left(x\right)$ cùng dấu với $u\left(x\right)=12\left(x+1\right)\left(x^{2}+2x\right)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-2;x=-1;x=0$ nên hàm số $h\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h\left(-1\right)=-3f\left(-3\right)=0$ nên đồ thị hàm số $y=h\left(x\right)$ tiếp xúc $Ox$ tại $x=-1$ và cắt trục $Ox$ tại 3 điểm phân biệt.

Vậy $y=g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị.

**Câu 13: Chọn A**

Đặt $g\left(x\right)=x^{4}-4x^{3}+4x^{2}+m$ ta có $g'\left(x\right)=4x^{3}-12x^{2}+8x$ do đó $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$ như sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $m+1$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ta có đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \dfrac{g\left(x\right).g'\left(x\right)}{\left|g\left(x\right)\right|}$ do đó ta có số điểm cực trị của hàm số $y = \left|g\left(x\right)\right|$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g\left(x\right)$ với trục hoành cộng với số điểm cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$.

Ta có $y = g\left(x\right)$ có $3$ điểm cực trị với mọi giá trị $m \in \mathbb{R}$.

**Trường hợp 1:** Nếu $m \geq 0$ thì $g\left(x\right) = 0$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm trùng với hoành độ các điểm cực trị do đó trường hợp này hàm số $y = \left|g\left(x\right)\right|$ có tổng số điểm cực trị là $3$.

**Trường hợp 2:** Nếu $-1 < m < 0$ thì $g\left(x\right) = 0$ có $4$ nghiệm phân biệt và không có nghiệm nào trùng với các hoành độ các điểm cực trị do đó trường hợp này hàm số $y = \left|g\left(x\right)\right|$ có tổng số điểm cực trị là $7$.

**Trường hợp 3:** Nếu $m \leq -1$ thì $g\left(x\right) = 0$ có $2$ nghiệm hoặc có $3$ nghiệm do đó trường hợp này hàm số $y = \left|g\left(x\right)\right|$ có tổng số điểm cực trị là $5$.

Vậy tích số $a.b.c = 3.5.7 = 105$.

**Câu 14: Chọn C**

Với bài toán này, ta có thể giải theo hai cách là cách truyền thống và ghép trục

**Cách 1:**

Đặt $h\left(x\right) = f\left(-x^2\right) + 3x^2 - x^4$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $h'\left(x\right) = -2xf'\left(-x^2\right) + 6x - 4x^3 = -2x\left[f'\left(-x^2\right) - 3 + 2x^2\right]$.

Giải phương trình: $h'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(-x^2\right) = 3 - 2x^2 \quad (1) \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình $(1)$ đặt $t = -x^2 \leq 0$. Từ $(1) \Rightarrow f'\left(t\right) = 3 + 2t$.

Hàm số $g\left(t\right) = 3 + 2t$ đồng biến trên $\left(-\infty; 0\right]$ và $g\left(t\right) > 0\ \forall t \in \left[-1; 0\right]$.

Do đó phương trình $f'\left(t\right) = 3 + 2t$ có nghiệm duy nhất $t_0 < -1$.

Suy ra phương trình $(1)$ có 2 nghiệm $-x_0 < -1 < 1 < x_0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-x_0$ | | $0$ | | $-x_0$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số $g(x)=\left|f(-x^2)+3x^2-x^4\right|$ có 5 điểm cực trị

**Cách 2**

Đặt $t(x)=-x^2\le 0$. Ta có: $t'(x)=-2x=0\Leftrightarrow x=0$.

Khi đó: $h(t)=f(-x^2)+3x^2-x^4=f(t)-3t-t^2\Rightarrow h'(t)=f'(t)-3-2t=0\Leftrightarrow f'(t)=3+2t$

Vì $t\le 0$ nên phương trình $h'(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0<-1$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t(x)$ | $-\infty$ | $t_0$ | $0$ | $t_0$ | $-\infty$ |
| $h(t)$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ $\searrow$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số $g(x)=\left|f(-x^2)+3x^2-x^4\right|$ có 5 điểm cực trị

**Câu 15: Chọn C**

Xét hàm số $g(x)=f(1-2x)-\left[f(1-2x)\right]^2+2$ có

$$g'(x)=-2f'(1-2x)+4f(1-2x)f'(1-2x)=4f'(1-2x)\left(f(1-2x)-\frac{1}{2}\right)$$

**Nhận xét:** $f'(x)$ đổi dấu 3 lần và $f(x)-\frac{1}{2}$ đổi dấu 4 lần suy ra $g'(x)$ đổi dấu 7 lần.

Do đó $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Mặt khác, $g(x)=f(1-2x)-\left[f(1-2x)\right]^2+2=\underbrace{\left[1+f(1-2x)\right]}_{\ge 0}.\left[2-f(1-2x)\right]$ có 4 lần đổi dấu vì $2-f(x)$ có 4 lần đổi dấu.

Vậy hàm số $y=\left|g(x)\right|$ có tất cả $7+4=11$ điểm cực trị.

**Câu 16: Chọn C**

Xét $f(x)=x^2-2x+m$ có $\Delta'=1-m$

**Trường hợp 1:** $\Delta'\le 0\Leftrightarrow 1-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 1\Rightarrow f(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=x^2+m+1$ luôn có một cực trị

**Trường hợp 2:** $\Delta'>0\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$

Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1-\sqrt{1-m};x_2=1+\sqrt{1-m}$

Dễ thấy $x_1 < 1$ và $x_2 > 0$. Khi đó $y = \begin{cases} x^2 + m + 1, x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty) \\ -x^2 + 4x + 1 - m, x \in (x_1; x_2) \end{cases}$

Đạo hàm: $y' = \begin{cases} 2x, x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ -2x + 4, x \in (x_1; x_2) \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 2x + 1$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ll} \begin{cases} 0 \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ 2 \notin x \in (x_1; x_2) \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 0 \notin (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ 2 \in x \in (x_1; x_2) \end{cases} & (2) \end{array} \right.$

Từ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1 - \sqrt{1-m} \\ 2 > 1 + \sqrt{1-m} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Từ $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > 1 - \sqrt{1-m} \\ 2 < 1 + \sqrt{1-m} \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Vì $m \in (-10; 10) \cap \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Vậy có $9$ giá trị của tham số $m$

**Câu 17: Chọn D**

Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 2) f'(x^2 - 2x)$.

Cho: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{array} \right.$.

Ta có: $f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ll} x^2 - 2x = a < -1 & (i) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) & (ii) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 2) & (3i) \\ x^2 - 2x = d > 2 & (4i) \end{array} \right.$

Mỗi phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

Suy ra hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x)$ có $7$ điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y = |g(x)| = |f(x^2 - 2x)|$ có tối đa $15$ điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y = 2|f(x^2 - 2x)| - 2021$ cũng có tối đa $15$ điểm cực trị.

Suy ra hàm số $y = |2|f(x^2 - 2x)| - 2021|$ có tối đa $31$ điểm cực trị.

**Câu 18: Chọn C**

Hàm số $h(x) = 15 f(-x^4 + 2x^2 - 2) - 10x^6 + 30x^2$

Ta có $h'(x) = 15(-4x^3 + 4x).f'(-x^4 + 2x^2 - 2) - 60x^5 + 60x$

$\Rightarrow h'(x) = -60x(x^2-1)\left[f'(-x^4+2x^2-2)+x^2+1\right]$.

Mà $-x^4+2x^2-2 = -(x^2-1)^2 - 1 \le -1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'(-x^4+2x^2-2) \ge 0$. Suy ra $f'(-x^4+2x^2-2)+x^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x) = -60x(x^2-1)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-1; x=0; x=1$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(0) = 15f(-2) = 0$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ tiếp xúc Ox tại $O$ và cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt. Vậy $y=g(x)$ có 5 cực trị.

**Câu 19: Chọn A**

Ta có: $g'(x) = 2f(x-m)f'(x-m) - 2mf'(x-m) = 2f'(x-m)\left[f(x-m)-m\right]$

Giải phương trình đạo hàm: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x-m)=0 \\ f(x-m)=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m=-1 \\ x-m=1 \\ f(x-m)=m \end{array}\right.$.

Do $g(x)$ là hàm đa thức bậc chẵn nên $g(x)$ có đúng 2 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow g'(x)$ có đúng 3 lần đổi dấu $\Leftrightarrow f(x-m)=m$ chỉ có 1 nghiệm $x \ne m \pm 1$ hoặc $f(x-m)=m$ chỉ có 2 nghiệm trong đó có 1 nghiệm $x \ne m\pm1$ và 1 nghiệm kép $x=m-1$ hoặc $x=m+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -3 \end{array}\right.$.

Kết hợp $m \in [-10;10] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m \le 10 \\ -10 \le m \le -3 \end{array}\right.$. Vậy có 18 giá trị nguyên $m$ thỏa mãn.

**Câu 20: Chọn A**

Từ đồ thị hàm số của $y=f(x)$, ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) - mf(x)$, ta có $g'(x) = 2f(x)f'(x) - mf'(x) = f'(x)[2f(x)-m]$.

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=\dfrac{m}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a \\ x=b \\ f(x)=\dfrac{m}{2} \end{array}\right.$

Do $g(x)$ là hàm đa thức bậc chẵn, có hệ số của bậc cao nhất là số dương nên để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực đại thì $g'(x)$ phải đổi dấu đúng 5 lần thì $g(x)$ sẽ có ba điểm cực tiểu và hai điểm cực đại. Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $x=0$, $x=a$, $x=b$. Vậy để $g'(x)$ phải đổi dấu đúng 5 lần thì phương trình $f(x)=\frac{m}{2}$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $0,a,b$ hoặc phương trình $f(x)=\frac{m}{2}$ có ba nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm trùng $x=0$, $x=a$ hoặc $x=b$.

**Trường hợp 1:** Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác $0,a,b$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\left[\begin{array}{l} 1<\frac{m}{2}<5 \\ \frac{m}{2}<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<10 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

**Trường hợp 2:** Phương trình $f(x)=\frac{m}{2}$ có ba nghiệm, trong đó có đúng một nghiệm trùng $x=0$, $x=a$ hoặc $x=b$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $\left[\begin{array}{l} \frac{m}{2}=1 \\ \frac{m}{2}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $2027$ số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2021]$.

**Câu 21: Chọn D**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x=a, x=b, x=c$

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=a & (nghiem\ \ don) \\ x=b & (nghiem\ \ don) \\ x=c & (nghiem\ \ don) \end{array}\right.$

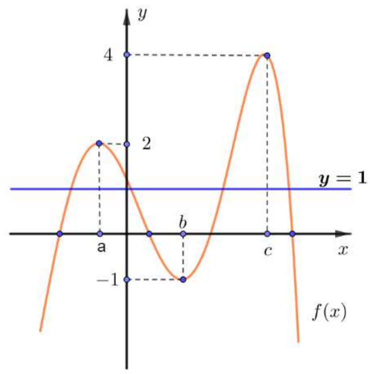
Đạo hàm: $y'=2f'(x).f'(f(x))-2f'(x).f'(3-2f(x))$

Giải phương trình đạo hàm: $y'=0 \Leftrightarrow f'(x).\left[f'(f(x))-f'(3-2f(x))\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=f'(3-2f(x)) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c \\ f(x)=3-2f(x)(*) \end{array}\right.$$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x)=1$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=1$




Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $(*)$ có 4 nghiệm đơn phân biệt khác các nghiệm $a,b,c$

Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt.

Suy ra hàm số $y=2f\left(f\left(x\right)\right)+f\left(3-2f\left(x\right)\right)$ có ít nhất 7 cực trị.

**Câu 22: Chọn C**

Xét $\left(C_2\right): y=2\left(x+1\right)^4-4x^2-8x+3m$.

Đạo hàm $y'=8\left(x+1\right)^3-8x-8=8x\left(x+1\right)\left(x+2\right)$.

Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=4+3m \\ y=2+3m \\ y=2+3m \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\left(-1;4+3m\right) \\ B\left(0;2+3m\right) \\ C\left(-2;2+3m\right) \end{array}\right.$.

Nhận thấy tam giác $ABC$ cân tại $A$.

Xét $\left(C_1\right): y=x^4-\left(m+1\right)x^2+2$, hàm số có 3 cực trị do đó $m>-1$.

Đạo hàm $y'=4x^3-2\left(m+1\right)x$

Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{\dfrac{m+1}{2}} \\ x=-\sqrt{\dfrac{m+1}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=2-\dfrac{\left(m+1\right)^2}{4} \\ y=2-\dfrac{\left(m+1\right)^2}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A'\left(0;2\right) \\ B'\left(\sqrt{\dfrac{m+1}{2}};2-\dfrac{\left(m+1\right)^2}{4}\right) \\ C'\left(-\sqrt{\dfrac{m+1}{2}};2-\dfrac{\left(m+1\right)^2}{4}\right) \end{array}\right.$.

Nhận thấy tam giác $A'B'C'$ cân tại $A'$.

Tam giác $ABC$ đồng dạng với tam giác $A'B'C' \Leftrightarrow \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

Ta có: $A'B'=\sqrt{\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{\left(m+1\right)^4}{16}}$; $B'C'=\sqrt{2\left(m+1\right)}$; $AB=\sqrt{5}; BC=2$, suy ra

$$\frac{\sqrt{\frac{m+1}{2}+\frac{(m+1)^4}{16}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2(m+1)}}{2}\Leftrightarrow\frac{\frac{m+1}{2}+\frac{(m+1)^4}{16}}{5}=\frac{2(m+1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)+\frac{(m+1)^4}{4}=10(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)\left[\frac{1}{4}(m+1)^3-8\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-1+\sqrt[3]{32}\end{array}\right.\ \Rightarrow m=-1+\sqrt[3]{32}.$$

**Câu 23: Chọn C**

Để hàm số $y=f(|x|)$ có ba cực trị thì hàm số $y=f(x)$ phải có đúng một điểm cực trị dương.

Ta có: $y'=3x^2-2(2m+1)x+3-m$. Hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị dương khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu hoặc có một nghiệm dương và một nghiệm bằng $0$.

**Trường hợp 1:** phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3.(3-m)<0\Leftrightarrow m>3$.

**Trường hợp 2:** phương trình $y'=0$ có một nghiệm dương và một nghiệm bằng không

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-m=0\\ \dfrac{2(2m+1)}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3\\ m>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=3.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\ge 3$ là giá trị cần tìm.

**Câu 24:** Đây mà một dạng toán khá hay và đã được xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia 2021 lần 1. Bài toán này có hai hướng tiếp cận chính: thứ nhất là giải theo phương pháp truyền thống và cách thứ hai là sử dụng công thức đếm nhanh số điểm cực trị.

**Cách 1:** Giải theo phương pháp truyền thống

Ta có: $g(x)=f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)\Rightarrow g'(x)=\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)'.f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$

$$=\frac{(x^3+6x).(3x^2+6)}{\left|x^3+6x\right|}.f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right).\text{ Cho } g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)=0\end{array}\right.$$

Ta có: $$f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+6x\right|+m=8\\ \left|x^3+6x\right|+m=3\\ \left|x^3+6x\right|+m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+6x\right|=8-m\\ \left|x^3+6x\right|=3-m\\ \left|x^3+6x\right|=-3-m\end{array}\right..$$

Xét hàm số $h(x)=x^3+6x$, vì $h'(x)=3x^2+6>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x)=|h(x)|=\left|x^3+6x\right|$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | |
| $k(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi phương trình $f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)=0$ có ít nhất hai nghiệm khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $8-m>0$ hay $m<8$.

Kết hợp điều kiện $m$ nguyên dương, ta được $m\in\{1;2;3...;7\}$.

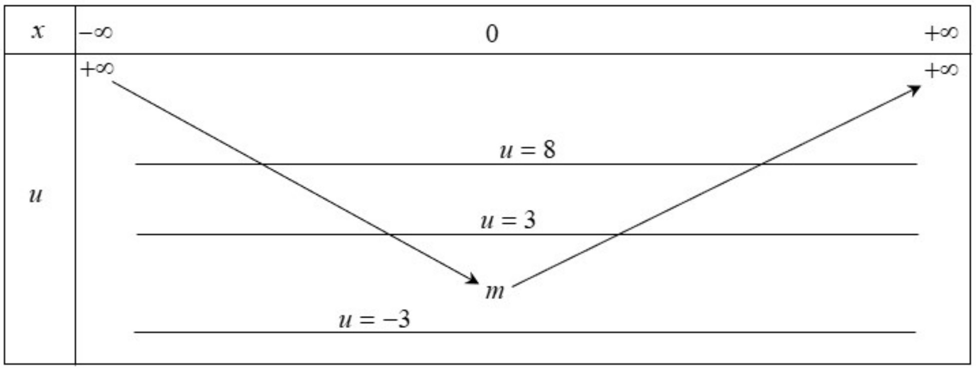
Vậy có 7 giá trị của $m$ thoả mãn.

**Cách 2:** Đếm nhanh số điểm cực trị

Số điểm cực trị của $f(u)=$ Số điểm cực trị của $u$ + Số nghiệm bội lẻ của $u=a,b,c,...$

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=8;x=\pm3$.

Đặt $u=\left|x^3+6x\right|+m$, khi đó ta có bảng biến thiên của $u$ như sau:




Từ bảng biến thiên, ta thấy số điểm cực trị của $u$ là $1$.

Để hàm số có ít nhất $3$ điểm cực trị thì các phương trình $u=8,\pm3$ cắt đồ thị nhiều hơn hoặc ít nhất là tại hai điểm. Suy ra: $m<8\xrightarrow{m\in Z+}1\le m<8$.

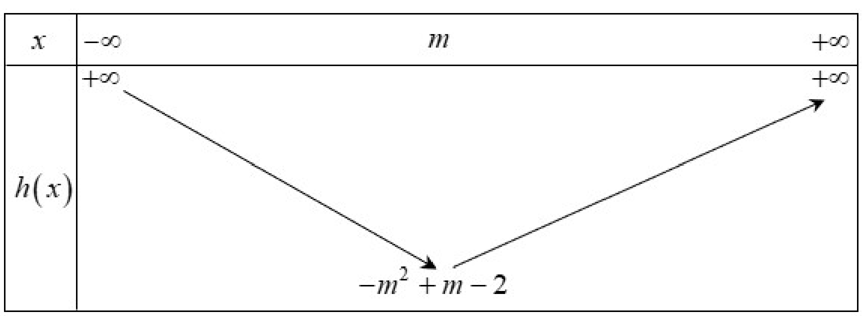
Vậy có $7$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 25: Chọn C**

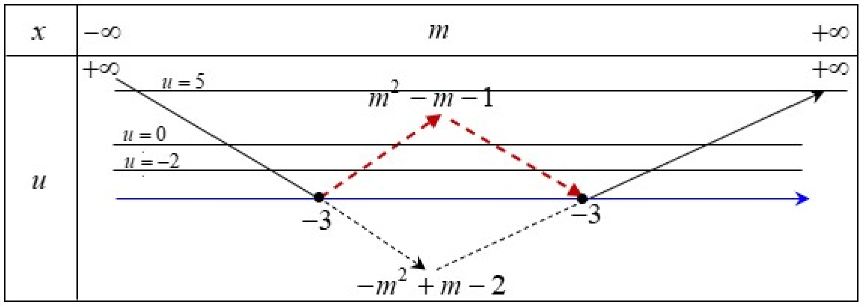
Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x=5;x=0;x=-2$.

Xét hàm số $f(u)=f\left(\left|x^2-2mx+m-1\right|-3\right)$ với $u=\left|x^2-2mx+m-1\right|-3$.

Đặt $h(x)=x^2-2mx+m-1$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:



Nhận thấy, $-m^2+m-2<0$ nên ta suy ra được bảng biến thiên của $u$ như sau:




Số điểm cực trị của $f(u)=$ Số điểm cực trị của $u$ + Số nghiệm đơn (bội lẻ) của $\left[\begin{array}{l}u=5\\u=0\\u=-2\end{array}\right.$.

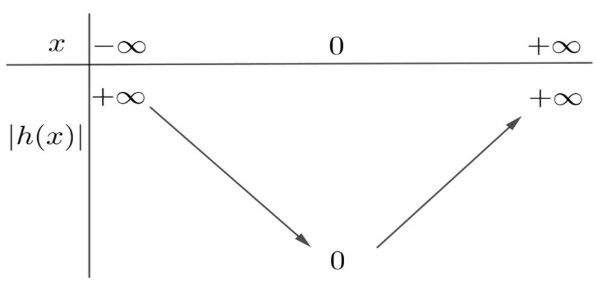
Từ bảng biến thiên ta thấy $u$ có $3$ điểm cực trị. Để hàm số $g(x)$ có $13$ cực trị thì số nghiệm đơn (bội lẻ) của $\left[\begin{array}{l}u=5\\u=0\\u=-2\end{array}\right.$ phải bằng 10.

Để có $10$ nghiệm bội lẻ thì các đường thẳng $u=-2; u=0$ phải nằm dưới $m^2-m-1$ (nếu nằm trên thì chỉ cho tối đa $6$ nghiệm) và đường thẳng $u=5$ phải nằm trên $m^2-m-1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \\ m^2-m-1\le 5 \Leftrightarrow -2\le m\le 3\end{cases} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-2;-2;2;3\}$.

**Câu 26: Chọn A**

Ta có bảng biến thiên của hàm $y=|h(x)|=|ax^3+bx|$ như sau




Ta có $g'(x)=|ax^3+bx|'.f'(|ax^3+bx|+2m+3)=\dfrac{x(3ax^2+b)(ax^2+b)}{|ax^3+bx|}.f'(|ax^3+bx|+2m+3)$.

Rõ ràng $g'(x)$ không xác định tại $x=0$ và đổi dấu khi $x$ đi qua 0 nên $x=0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(|ax^3+bx|+2m+3)$.

Ta có: $f'\left(\left|ax^3+bx\right|+2m+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|ax^3+bx\right|+2m+3=7\\ \left|ax^3+bx\right|+2m+3=3\\ \left|ax^3+bx\right|+2m+3=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|ax^3+bx\right|=4-2m\\ \left|ax^3+bx\right|=-2m\\ \left|ax^3+bx\right|=-6-2m\end{array}\right.$.

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất $3$ điểm cực trị thì phương trình $g'(x)=0$ có ít nhất $2$ nghiệm phân biệt khác $0$ và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất $2$ trong số các nghiệm đó.

Từ bảng biến thiên, ta có $4-2m>0 \Leftrightarrow m<2 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}+} m=1$.

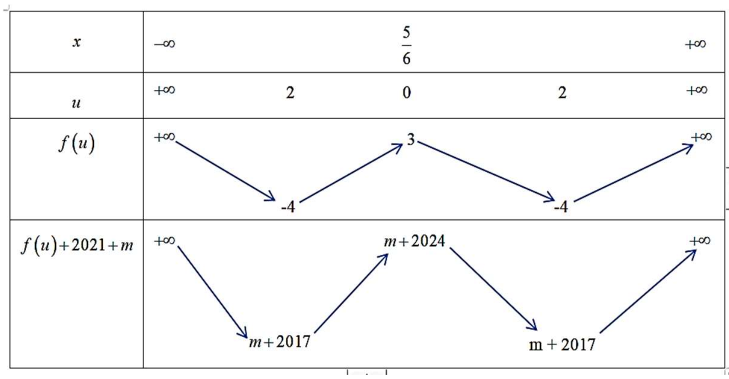
Vậy có 1 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 27: Chọn B**

Xét hàm số $y=f\left(\left|6x-5\right|\right)+2021+m$. Đặt $u=\left|6x-5\right|=\sqrt{(6x-5)^2} \Rightarrow u'=\dfrac{6(6x-5)}{\sqrt{(6x-5)^2}}$

Hàm $u$ đạt cực trị tại $x=\dfrac{5}{6}$

Bảng biến thiên kép như sau:




Suy ra hàm số $y=\left|f(u)+2021+m\right|$ có 3 điểm cực đại thì:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2017<0\\ m+2024>0\end{cases} \Leftrightarrow -2024<m<-2017$$

Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2023,-2022,-2021,-2020,-2019,-2018\}$.

**Câu 28: Chọn B**

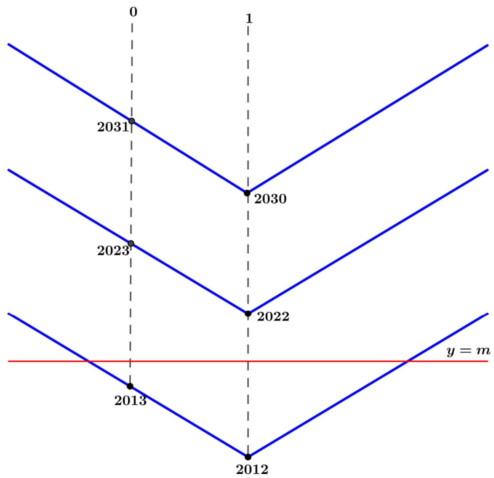
Đồ thị hàm số $y=f'(1+2x)$ cắt trục $Ox$ tại ba điểm phân biệt $x=-4; x=1; x=5$ nên ta có thể suy ra $f'(-7)=f'(3)=f'(11)=0.$

Xét hàm số $h(x)=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ có $h'(x)=(-2x+2)f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)$.

Ta có $h'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0 \quad (*)\end{array}\right.$.

Khi đó, $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x-2020+m=-7 \\ -x^2+2x-2020+m=3 \\ -x^2+2x-2020+m=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=x^2-2x+2013 \\ m=x^2-2x+2023 \\ m=x^2-2x+2031 \end{array}\right.$.

Biểu diễn trên giản đồ V như sau:




Để hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ phải có ba điểm cực trị dương.

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l} 2012<m<2013 \\ 2023\le m\le 2030 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in[2023;2030]$.

Vậy có $7$ giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn.

**Câu 29: Chọn A**

Ta có: $f'(x)=\begin{cases} a & neu\ x<-1 \\ 2x+b & neu\ x>-1 \end{cases}$. Khi đó, bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-b/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $a$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $a$ | | $u=1$ | | $u=\frac{1}{2}$ | |

Hàm số $y=f(x)$ phải liên tục và xác định tại $x=1 \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ f(-1)=-a+b=-b+a-8 \\ -\frac{b}{2}>-1 \end{cases}$.

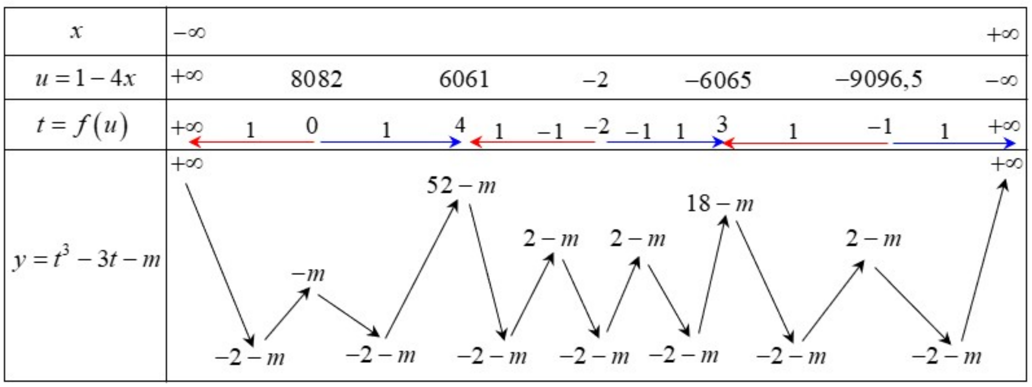
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b = a - 4 \\ -\dfrac{b}{2} = -\dfrac{a}{2} + 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 6$$. Vậy có tất cả $5$ giá trị nguyên thỏa mãn.

**Câu 30: Chọn C**

Đặt $u = 2021x - 2$. Xét phương trình $f'(u) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{9}{2}; -3; 0; 3; 4\right\}$.

Suy ra: $u \in \{-9096{,}5; -6065; -2; 6061; 8082\}$.

Khi đó ta sử dụng phương pháp ghép trục như sau:




Để hàm số đã cho có $17$ điểm cực trị thì: $18 - m \le 0 < 52 - m \Leftrightarrow 18 \le m < 52$.

Vậy có $34$ giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 31: Chọn C**

Ta có: $\left(f\left(x^2 + 2x\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow (2x + 2).f'\left(x^2 + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f'\left(x^2 + 2x\right) = 0 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $f'\left(x^2 + 2x\right) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ là $2$ và $5$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(8) = 0 \\ f'(35) = 0 \end{cases}$$

Do đó phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ là $8$ và $35$. $(1)$

Xét hàm số $y = g(x) = f\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có:

$$\left(f\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(4x^3 - 12x^2 + 12x - 4\right).f'\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 0 \\ f'\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x-1)^3 = 0 \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 8 \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x = 1 \pm \sqrt{6} \end{array}\right..$$

Cả $5$ nghiệm này đều làm bội lẻ trong đó có đúng $3$ nghiệm dương

Hay hàm số $y = g(x) = f\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x\right)$ có $5$ điểm cực trị trong đó có đúng $3$ nghiệm dương. Suy ra hàm số $y = g(|x|) = f\left(x^4 - 4|x|^3 + 6x^2 - 4|x|\right)$ có $2.3 + 1 = 7$ điểm cực trị.

**Câu 32: Chọn D**

Xét hàm số $u=f\left(x^6\right)-x^3$ có $u'=6x^5f'\left(x^6\right)-3x^2=3x^2\left[2x^3f'\left(x^6\right)-1\right]$

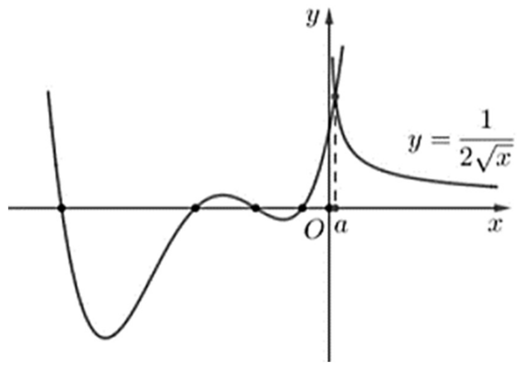
$$u'=0\Leftrightarrow 3x^2\left[2x^3f'\left(x^6\right)-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^3f'\left(x^6\right)=1\quad(1)\end{array}\right.$$

Nếu $x\le 0\Rightarrow 2x^3\le 0,x^6\ge 0\Rightarrow f'\left(x^6\right)\ge 0\Rightarrow 2x^3f'\left(x^6\right)-1\le 0-1=-1\Rightarrow g'(x)\le 0\forall x\le 0$.

Nếu $x>0$ đặt $t=x^6\ge 0\Rightarrow x^3=\sqrt{t}$

Khi đó phương trình **(1)** trở thành $2\sqrt{t}f'(t)=1\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\ (t>0)$ **(2)**

Hàm số $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ có $y'=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}<0,\ \forall x>0$ Vẽ đồ thị hàm số này cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ tại một điểm có hoành độ $x=a>0$. Khi đó, $(2)\Leftrightarrow t=a\Leftrightarrow x=\sqrt[6]{a}$.




Bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\sqrt[6]{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Trong đó, $u(0)=f(0)-0=0$. Vì vậy $u$ có 1 điểm cực trị và $u$ đổi dấu 2 lần.

Do đó, hàm số $g(x)=|u|$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 33: Chọn B**

Ta có đạo hàm: $g'(x)=3f'(3x-1)-27x^2+9x-6$. Đặt $t=3x-1\Rightarrow 3x=t+1$

Suy ra: $g'(t)=3f'(t)-3t^2-3t-6$

Giải phương trình đạo hàm: $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t^2+t+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}\\t=-1\Rightarrow x=0\\t=1\Rightarrow x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2127$ | $\nearrow$ | $\frac{4085}{2}$ | $\searrow$ | $\frac{4029}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số $g(|x|)$ có ba điểm cực trị

**Câu 34: Chọn B**

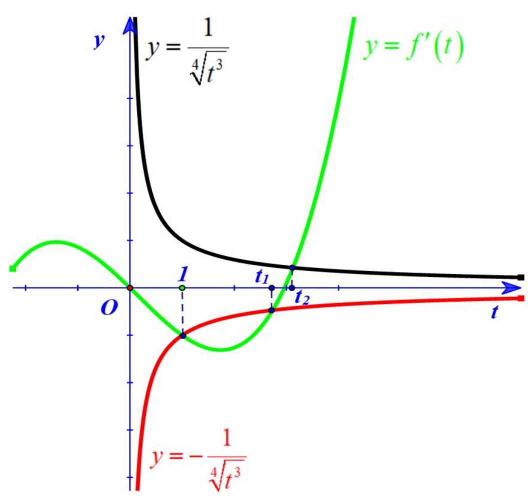
Ta có $g'(x)=4x^3f'(x^4)-4 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x^3f'(x^4)=1\ (*)$.

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên chia 2 vế cho $x^3$, ta được $f'(x^4)=\dfrac{1}{x^3}$

Đặt $t=x^4;(t>0) \Rightarrow x^3=\begin{cases}\sqrt[4]{t^3}, x>0\\ -\sqrt[4]{t^3}, x<0\end{cases}$. Khi đó ta có $\left[\begin{array}{l} f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}},\ (\text{khi } x>0)\\ f'(t)=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}},\ (\text{khi } x<0)\end{array}\right.\ (*)$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ tương ứng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và hai đồ thị hàm số $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t>0$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$, ta vẽ mô phỏng đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$ khi $t>0$ như sau:




Khi đó $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=t_1, t_1>1\\ t=t_2, t_2>t_1>1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^4=1,\ x<0\\ x^4=t_1,\ x<0\\ x^4=t_2,\ x>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=-\sqrt[4]{t_1}\\ x=\sqrt[4]{t_2}\end{array}\right.$.

Dễ thấy $x > \sqrt[4]{t_2}$ thì $g'(x) = f'(x^4) - \dfrac{1}{x^3} > 0$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt[4]{t_1}$ | | $-1$ | | $\sqrt[4]{t_2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số đã cho có $2$ điểm cực tiểu.

**Câu 35: Chọn A**

Xét hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$

Ta có: $h'(x) = 2f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow f'(2x + m - 3) = 0$

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ suy ra $f'(2x + m - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + m - 3 = k$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k + 3 - m}{2}$ với $k \in \{-3; -2; a; b; 3; c; 5\}$ ($-\dfrac{4}{3} < a < -1$; $1 < b < \dfrac{4}{3}$; $4 < c < 5$)

Hàm số $y = f(2|x| + m - 3)$ có $7$ điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có $3$ cực trị có hoành độ dương, mà $3$ là nghiệm bội chẵn của $f'(x)$ nên hàm số $h(x) = f(2x + m - 3)$ có $3$ cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow$ phương trình $h'(x) = 0$ có $3$ nghiệm dương phân biệt khác $\dfrac{6 - m}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a + 3 - m}{2} < 0 \\ \dfrac{b + 3 - m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 - m < 0 \\ b + 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > a + 3 \\ m < b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow a + 3 < m < b + 3$$

Do $-\dfrac{4}{3} < a < -1$ và $1 < b < \dfrac{4}{3}$ nên $-1 + 3 \le m \le 1 + 3$ hay $2 \le m \le 4$

Vậy có $3$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2$; $3$; $4$.

**Câu 36: Chọn C**

Ta có:

$$g'(x) = \frac{2(x-1)(|x-1| - 1)}{|x-1|} f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x^2 - 2|x-1| - 2x + m) = 0 \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số

$$f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 1 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 2 \\ x^2 - 2|x-1| - 2x + m = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2|x-1| - 2x = 1 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 2 - m \\ x^2 - 2|x-1| - 2x = 3 - m \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2|x-1| - 2x$. Ta có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Để hàm số có 9 cực trị thì

**Trường hợp 1:** $-2<2-m<-1 \Leftrightarrow 3<m<4$

**Trường hợp 2:** $1-m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vậy có $3$ giá trị của tham số $m$ thỏa mãn.

**Câu 37: Chọn D**

Ta có. Với $x=2$ là nghiệm kép, $x=0, x=1$ là nghiệm đơn. Dó đó hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị là $x=0, x=1$.

Đặt $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right) \Rightarrow g'(x)=(x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$.

Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=2 \\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=0(1) \\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=1(2) \end{array}\right.$.

Để hàm số có $5$ điểm cực trị thì $\left(1\right)\&\left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt không trùng nhau và khác $6$

Suy ra $\begin{cases} \Delta_1>0 \\ \Delta_2>0 \\ \frac{1}{2}\cdot 6^2-6.6+m\neq 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 6^2-6.6+m\neq 1 \end{cases} \begin{cases} 9-\frac{m}{2}>0 \\ 9-\left(\frac{m-1}{2}\right)>0 \\ m\neq 18, m\neq 19 \end{cases} \Leftrightarrow m<18 \Rightarrow m\in\{1,2,\ldots,17\}$.

Vậy tổng các giá trị của $m$ là $1+2+\ldots+17=153$.

**Câu 38: Chọn B**

Ta có: $g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2+\left[f'\left(x\right)\right]^2-2f\left(x\right).f'\left(x\right)=\left[f\left(x\right)-f'\left(x\right)\right]^2$.

Đa thức bậc bốn $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm $x=-1,\ x=2$ do đó $f\left(x\right)=a\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)^2$ với $a>0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$, suy ra $f'\left(x\right)=a\left[2\left(x+1\right)\left(x-2\right)^2+2\left(x-2\right)\left(x+1\right)^2\right]$.

$f\left(x\right)-f'\left(x\right)=a\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)^2-a\left[2\left(x+1\right)\left(x-2\right)^2+2\left(x-2\right)\left(x+1\right)^2\right]$

$=a\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left[\left(x+1\right)\left(x-2\right)-2\left(x-2\right)-2\left(x+1\right)\right]$

$=a\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x^2-5x\right)=a\left(x+1\right)\left(x-2\right)x\left(x-5\right)$.

Do đó $g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)-f'\left(x\right)\right]^2=a^2\left(x+1\right)^2x^2\left(x-2\right)^2\left(x-5\right)^2$ có $7$ điểm cực trị.

**Câu 39: Chọn A**

Ta có $f\left(x\right)=\int\left(4x^3+2x\right)dx=x^4+x^2+C$. Do $f\left(0\right)=1 \Rightarrow C=1$. Vậy $f\left(x\right)=x^4+x^2+1$.

Ta có $g'\left(x\right)=3f^2\left(x\right)f'\left(x\right)=3\left(x^4+x^2+1\right)^2\left(4x^3+2x\right)=3\left(x^4+x^2+1\right)^2\left(2x^2+1\right)\left(2x\right)$.

Đạo hàm: $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên của hàm $g(x)=f^3(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho chỉ có một điểm cực tiểu.

**Câu 40: Chọn D**

Xét hàm số: $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ thì có: $g'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |
| | | | | | | | $y=m$<br>$y=m$ |

Suy ra hàm số $y=g(x)-m$ có 2 điểm cực trị.

Lại thấy, đồ thị hàm số $y=g(x)-m$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 2 điểm.

Vậy hàm số $f(x)=\left|g(x)-m\right|$ có tối đa 4 cực trị, đạt được khi $\left[\begin{array}{l} 0<m<\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}<m<0 \end{array}\right.$

# III. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

## BÀI TOÁN 1: TÌM GTLN - GTNN CỦA HÀM HỢP

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm hợp $y=f\left[u(x)\right]$ hoặc $y=g\left[f(x)\right]+h(x)$ trên miền $D$ cho trước

**PHƯƠNG PHÁP:**

**Cách 1:** Đặt ẩn phụ $t=u(x)$ hoặc $t=u\left[f(x)\right]$

**Cách 2:** Tách biểu thức cần tìm thành các biểu thức đơn gian và tìm $min, max$

**Cách 3:** Sử dụng định nghĩa và ứng dụng của tích phân để tìm $min, max$.

## BÀI TOÁN 2: GTLN - GTNN CỦA HÀM SỐ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Tìm $m$ để $\underset{[\alpha;\beta]}{max}\, y=\left|f(x)+m\right|=a \quad (a>0)$

**PHƯƠNG PHÁP:**

**CÁCH 1:**

**Bước 1:** Tìm $K=\underset{[\alpha;\beta]}{max}\, f(x)$ và $k=\underset{[\alpha;\beta]}{min}\, f(x)$ (với $K>k$).

**Bước 2:** Kiểm tra xem $max\left\{|m+K|,|m+k|\right\}\ge \dfrac{|m+K|+|m+k|}{2}\ge \dfrac{|m+K-m-k|}{2}\ge \dfrac{|K-k|}{2}$.

- **Trường hợp 1:** $\dfrac{|K-k|}{2}\le a$. Để $\underset{[\alpha;\beta]}{max}\, y=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+k=-a \\ m+K=a \end{array}\right. \Rightarrow m\in\left\{-a-k;a-K\right\}$.
- **Trường hợp 2:** $\dfrac{|K-k|}{2}>a \Rightarrow m\in\varnothing$.

**CÁCH 2: Xét trường hợp**

- **Trường hợp 1:** $max=|m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K|=a \\ |m+K|\ge|m+k| \end{cases}$
- **Trường hợp 2:** $max=|m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k|=a \\ |m+k|\ge|m+K| \end{cases}$

**CÁCH 3: Sử dụng đồ thị**

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Tìm $m$ để $\underset{[\alpha;\beta]}{\min}\, y=\left|f(x)+m\right|=a \quad (a>0)$

**PHƯƠNG PHÁP:**

**Bước 1:** Tìm $K=\underset{[\alpha;\beta]}{max}\, f(x)$ và $k=\underset{[\alpha;\beta]}{min}\, f(x)$ (với $K>k$).

**Bước 2:** Để $\underset{[\alpha;\beta]}{min}\, y=a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k=a \\ m+k>0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K=-a \\ m+K<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=a-k \\ m>-k \end{cases} \vee \begin{cases} m=-a-K \\ m<-K \end{cases} \Rightarrow m\in S_1\cup S_2$.

Ngoài ra, có thể sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối để giải quyết bài toán

# ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ và hàm số $y=xf\left(x\right)$ cùng đạt cực tiểu tại $x=1$ và có tổng hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số bằng 4. Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};4\right]$ lần lượt là $\alpha$ và $2\alpha+1$. Giá trị của số thực $\alpha$ bằng

**A.** $-\frac{27}{320}$. **B.** $-\frac{16}{291}$. **C.** $-\frac{11}{108}$. **D.** $-\frac{32}{307}$.

**Câu 2:** Gọi $S$ là tập chứa tất cả các giá trị thực nguyên tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\left|x^3-3x^2-m\right|}{\sqrt{\left(x^3-3x^2-m\right)^2+25}}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ bằng $\frac{12}{13}$. Tổng bình phương giá trị của các phần tử của $S$ bằng:

**A.** $68$. **B.** $80$. **C.** $100$. **D.** $41$.

**Câu 3:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng trên đoạn $\left[-1;1\right]$, hàm số $y=f\left(x^4-6x^2-4x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=m\cos\frac{n\pi}{p}$ ($m,n,p\in\mathbb{N}$; $n\le p$; $\frac{n}{p}$ là phân số tối giản). Giá trị $m+n.p$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $47$. **D.** $65$.

**Câu 4:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

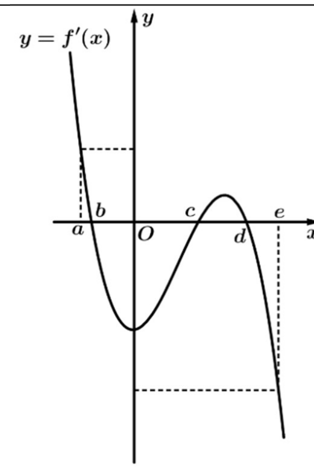
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**A.** $\frac{25}{3}$. **B.** $15$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** $12$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^{2021}-x$ với mọi số thực $x$, đồng thời $f\left(0\right)=2020$ và $z,t$ là hai số thực tùy ý thỏa mãn $z>t\ge-1$. Giá trị lớn nhất của $f\left(t\right)-f\left(z\right)$ bằng

**A.** $\frac{1010}{1011}$. **B.** $-\frac{505}{1011}$. **C.** $-\frac{1010}{1011}$. **D.** $\frac{505}{1011}$.

**Câu 6:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ lần lượt là $b,c,d$ $(a<b<c<d<e)$ như hình vẽ. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;e]$. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $M+m=f(d)+f(c)$.
**B.** $M+m=f(d)+f(a)$.
**C.** $M+m=f(b)+f(a)$.
**D.** $M+m=f(b)+f(e)$.

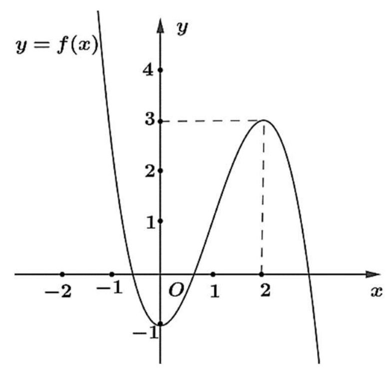
**Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Biết $f(4)=f(-4)=-14$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)+5\right|$ trên đoạn $[-4;4]$ đạt được tại điểm nào?

**A.** $x=-4$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

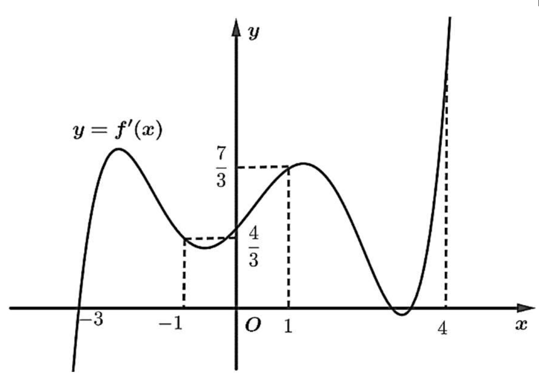
**Câu 8:** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+2\right)+2022$ trên đoạn $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$ bằng




**A.** $2025$. **B.** $f\left(\frac{21}{16}\right)+2022$.

**C.** $2024$. **D.** $f\left(\frac{3}{4}\right)+2022$.

**Câu 9:** Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(3x)-3x^2-6x$ trên đoạn $\left[-1;\frac{4}{3}\right]$ bằng




**A.** $f(4)-\frac{88}{9}$. **B.** $f(1)-\frac{19}{9}$. **C.** $f(-1)+\frac{17}{9}$. **D.** $f(-1)+\frac{5}{3}$.

**Câu 10:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

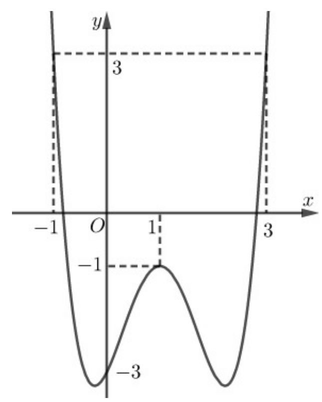
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|+1\right)-2\cos 2x+4\cos x-10$.

**A.** 2. **B.** $-5$. **C.** $-9$. **D.** $-2$.

**Câu 11:** Cho $x;y$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2-xy+3=0 \\ 2x+3y-14\le 0 \end{cases}$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^2+2x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

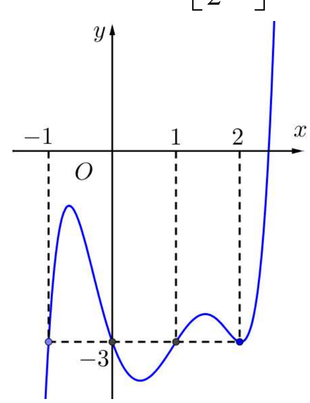
**A.** $\left(0;+\infty\right)$. **B.** $\left(-2;2\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1\right)$.

**Câu 12:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Bất phương trình $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-1;3\right)$ khi và chỉ khi




**A.** $m\ge 3f\left(-1\right)+4$. **B.** $m\ge 3f\left(3\right)$. **C.** $m>3f\left(-1\right)+4$. **D.** $m>3f\left(3\right)$.

**Câu 13:** Cho hàm số $f\left(x\right)$, đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đường cong như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x-1\right)+6x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ bằng




**A.** $f\left(1\right)+6$. **B.** $f\left(3\right)+12$. **C.** $f\left(0\right)+3$. **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 14:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trên khoảng $(-40;32)$ để $\max\limits_{x\in[1;20]}\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|\geq\dfrac{5}{4}$?

**A.** $64$. **B.** $65$. **C.** $69$. **D.** $79$.

**Câu 15:** Cho hai hàm số $u(x)=x+\log x$ và $v(x)=x^3-mx^2+(m^2+1)x-2$. Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y=v(x+u(x))$ trên đoạn $[1;10]$. Khi $M$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của $m$ bằng?

**A.** $\dfrac{21}{2}$. **B.** $5$. **C.** $21$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^3+cx$, $(a>0,b>0)$ thỏa mãn $f(3)=-\dfrac{7}{3}$; $f(9)=81$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho $\max\limits_{[-1;5]}|g(x)|+\min\limits_{[-1;5]}|g(x)|=86$ với $g(x)=f(1-2x)+2.f(x+4)+m$. Tổng của tất cả các phần tử của $S$ bằng

**A.** $11$. **B.** $-80$. **C.** $-148$. **D.** $-74$.

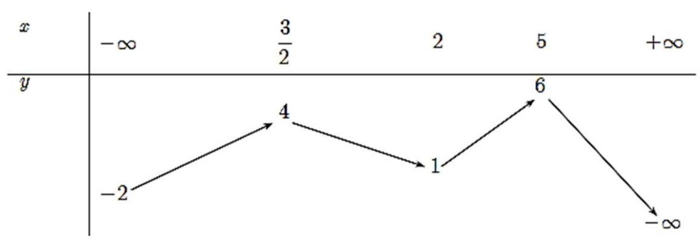
**Câu 17:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2m^2-m}{x-1}$. Gọi $S$ là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để $\max\limits_{[2;3]}y=2\max\limits_{[4;5]}y-4$. Tập $S$ tương ứng là

**A.** $\{1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;1)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

**Câu 18:** Xét hàm số $f(x)=|x^2+ax+b|$, với $a,b$ là tham số. Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi $M$ nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $-4$. **D.** $4$.

**Câu 19:** Cho hàm số $y=f(3-2x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ




Có bao nhiêu số tự nhiên $m$ để hàm số $g(x)=|2f(x^2-4x+3)-m|$ có giá trị lớn nhất?

**A.** 1. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $2$.

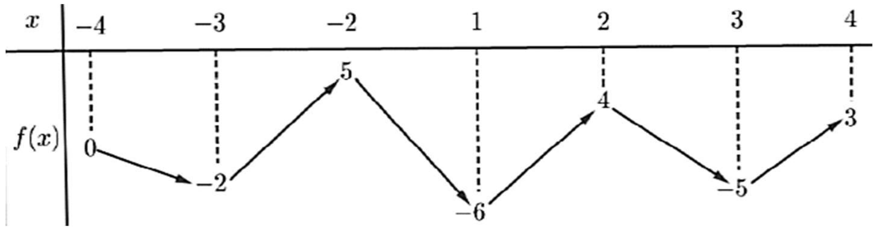
**Câu 20:** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho $\max\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|+2\min\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|\leq 200$?

**A.** $400$. **B.** $301$. **C.** $401$. **D.** $200$.

**Câu 21:** Gọi $[a;b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-3x-4\leq 0\\ x^3-3x|x|-m^2-15m\geq 0\end{cases}$ có nghiệm. Tính $a+b$.

**A.** $-17$. **B.** $15$. **C.** $17$. **D.** $-15$.

**Câu 22:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.




Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của $m \in [-4;4]$ để hàm số $g(x) = \left|f(x^3+2x)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

**A.** 11. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

**Câu 23:** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+2m}{x+2}$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ sao cho $\max\limits_{[1;3]}\left|f(x)\right| + \min\limits_{[1;3]}\left|f(x)\right| = 2$. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 24:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-40;40]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{x^2-4mx+5}{x^2+x+1}\right|$ lớn hơn 7.

**A.** 76. **B.** 73. **C.** 75. **D.** 78.

**Câu 25:** Gọi $\alpha$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^3 + (m^2+1)x^2 - 2mx - m^2 + 2m$. Khi tham số $m = m_0$ thì $\alpha$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\alpha_{max}$. Giá trị của biểu thức $T = m_0 + \alpha_{max}$ bằng

**A.** 2. **B.** 0. **C.** $-4$. **D.** 1.

**Câu 26:** Gọi $S$ là tập các giá trị thực của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Tập $S$ có bao nhiêu phần tử

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 2

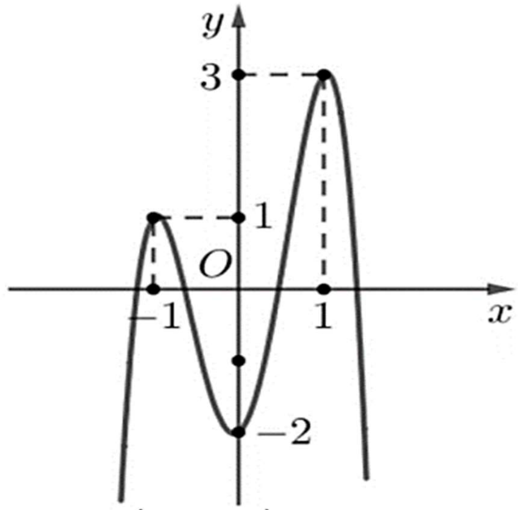
**Câu 27:** Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 2$. Gọi $S$ là tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = g(x) = \left|f^2(x) - 2f(x) + m\right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;3]$ bằng 15. Tổng $S$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(-25;-15)$. **B.** $(-14;1)$. **D.** $(1;8)$. **D.** $(8;12)$.

**Câu 28:** Cho hàm số $y = \left|x^2 - 2x - 4\sqrt{(x+1)(3-x)} + m - 3\right|$. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng 2021.

**A.** 4048. **B.** 24. **C.** 0. **D.** 12.

**Câu 29:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình vẽ bên:




Có bao nhiêu số thực $m$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)+m^2.f\left(m\right)$ có $\max\limits_{[-1;1]}\left|g\left(x\right)\right|=3$?

**A.** $7$. **B.** $4$. **C.** $6$. **D.** $8$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'\left(0\right)=3$, $f'\left(1\right)=f'\left(-2020\right)=0$ và bảng xét dấu của $f''\left(x\right)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''\left(x\right)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f(\left|x-1\right|-2020)$ đạt GTNN tại điểm $x_0$ thuộc khoảng

**A.** $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{5}\right)$. **D.** $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^2-2x-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$ bằng $8$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$

**Câu 32:** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-2x^2+m$ ($m$ là tham số thực). Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của $m$ sao cho $\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|=7$. Tổng các phần tử của $S$ là

**A.** $-7$. **B.** $14$. **C.** $7$. **D.** $-14$.

**Câu 33:** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\left|f\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)+m\right|$ có giá trị nhỏ nhất không vượt quá $5$?

**A.** $30$. **B.** $32$. **C.** $31$. **D.** $29$.

**Câu 34:** Xét hàm số $f\left(x\right)=\left|\dfrac{mx-2\sqrt{2x+7}-m}{x+2}\right|$, với $m$ là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên $m$ thỏa mãn điều kiện $0<\min\limits_{[-1;3]}f\left(x\right)<2$.

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $4$. **D.** $5$.

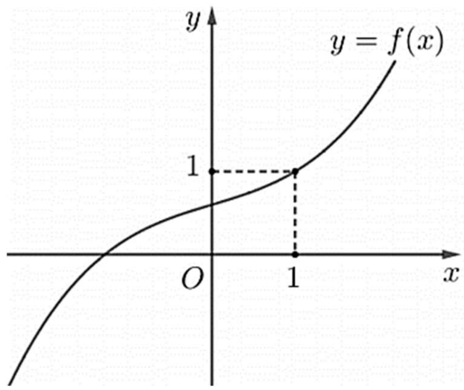
**Câu 35:** Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^3+cx;(a>0;b>0)$ thỏa mãn $f(3)=-\frac{7}{3};f(9)=81$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho $\max\limits_{[-1;5]}|g(x)|+\min\limits_{[-1;5]}|g(x)|=86$ với $g(x)=f(1-2x)+2.f(x+4)+m$. Tổng của tất cả các phần tử của $S$ bằng

**A.** $11$. **B.** $-80$. **C.** $-148$. **D.** $-74$.

**Câu 36:** Cho hàm số $f(x)=(\sin x-m)^2+(\cos x-n)^2$ ($m,n$ là các tham số nguyên). Có tất cả bao nhiêu bộ số $(m,n)$ sao cho $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)+\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=52$?

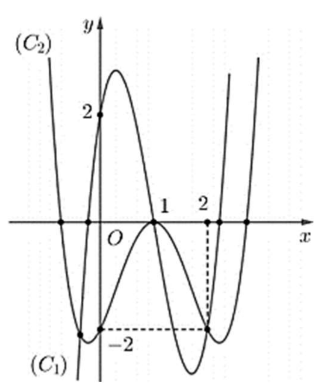
**A.** $4$. **B.** $12$. **C.** $0$. **D.** $8$

**Câu 37:** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số thực $m$ để bất phương trình $(x-1)\left(m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.




**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Câu 38:** Cho đa thức $f(x)$ có đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên. Phương trình $f(x)=me^x$ có hai nghiệm thực phân biệt trên đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi




**A.** $e^{-2}f(2)\leq m<0$. **B.** $e^{-2}f(2)<m<0$. **C.** $f(0)\leq m<0$. **D.** $f(0)\leq m\leq 0$.

**Câu 39:** Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+5x+2}{2x+1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình $2021f\left(\sqrt{3x^2-18x+28}\right)-m\sqrt{3x^2-18x+28}\geq m+4042$ nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc đoạn $[2;4]$.

**A.** $673$. **B.** $808$. **C.** $135$. **D.** $898$.

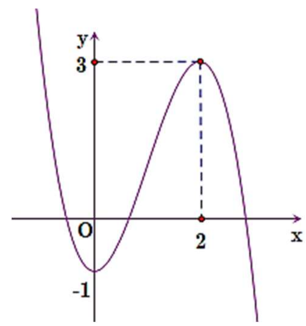
**Câu 40:** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+m}{x-3}$. Giá trị của $m$ để $\max\limits_{[-1;2]} f(x)+\min\limits_{[-1;2]} f(x)=8$ là

**A.** $m=\dfrac{4}{5}$. **B.** $m=-\dfrac{46}{5}$. **C.** $m=-12$. **D.** $m=\dfrac{18}{5}$.

**Câu 41:** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+m^2-2m$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thoả mãn $3\max\limits_{[-3;1]} f(|x|)+2\min\limits_{[-3;1]} f(|x|)\le 112$. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** $12$. **B.** $10$. **C.** $11$. **D.** $9$.

**Câu 42:** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x^2-3x+2)+2022$ trên đoạn $\left[-3;\dfrac{1}{2}\right]$ bằng




**A.** $f\left(\dfrac{21}{16}\right)+2022$. **B.** $2024$. **C.** $2025$. **D.** $f\left(\dfrac{3}{4}\right)+2022$.

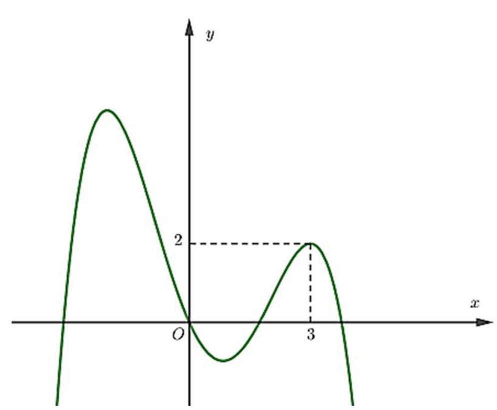
**Câu 43:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng $16$. Tổng tất cả các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-16$. **B.** $16$. **C.** $-12$. **D.** $-2$.

**Câu 44:** Cho hàm số $f(x)=(x-1)^2(x+m^2)-\dfrac{3}{2}m$ ($m$ là số thực). Gọi tổng các giá trị của $m$ sao cho $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|+\min\limits_{[1;2]}|f(x)|=\dfrac{9}{4}$ là $S=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. Giá trị $\dfrac{b}{a}$ bằng

**A.** $\dfrac{5}{18}$. **B.** $\dfrac{9}{5}$. **C.** $\dfrac{36}{5}$. **D.** $\dfrac{18}{5}$.

**Câu 45:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



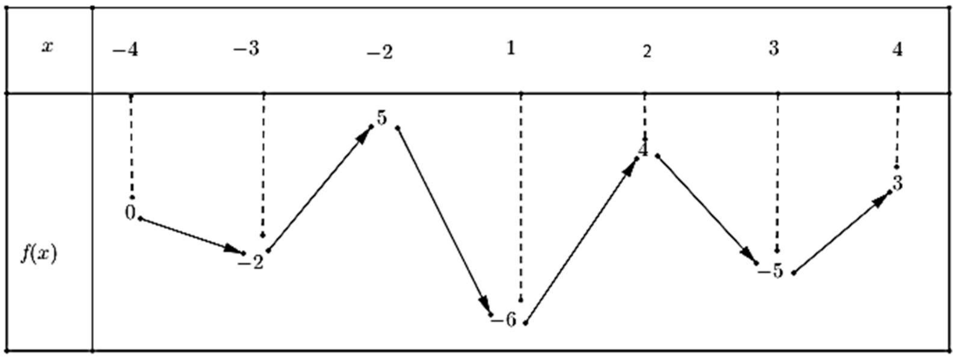
Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của $x$ sao cho hàm số $g(x)=\dfrac{2f(x)-2}{f^2(x)-2f(x)+2}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $7$.

**Câu 46:** Cho hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x+m}{x+1}\right|$. Số giá trị của $m$ thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} f(x)+\max\limits_{[1;2]} f(x)=\dfrac{16}{3}$ là

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 47:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

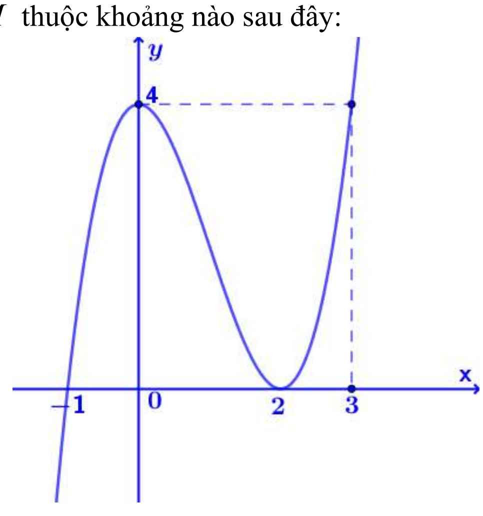



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m$ thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $8$?

**A.** $12$. **B.** $11$. **C.** $9$. **D.** $10$.

**Câu 48:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+|4x-2|+|6-4x|}{|2x-1|+|2x-3|}$.

Đặt $h(x)=f\left(g(x)\right)-f\left(3-2x+x^2\right)+f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right)$. Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của $h(x)$. Giá trị lớn nhất của $M$ thuộc khoảng nào sau đây:




**A.** $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(5;10)$.

**Câu 49:** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^4-mx-4}{x+2}$, với $m$ là tham số. Tìm tham số $m$ để $\min\limits_{[-1;1]}|f(x)|>\dfrac{3}{4}$?

**A.** $m>\dfrac{1}{4}$. **B.** $m<\dfrac{1}{5}$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{5}{4}$.

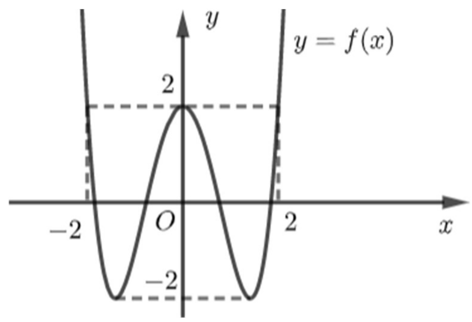
**Câu 50:** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ và $g(x)=\left|f(2-\cos x)+m\right|$ ($m$ là tham số thực) gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ sao cho $3\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=100$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-16$. **B.** $12$. **C.** $-32$. **D.** $-28$.

**Câu 51:** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left[f(x)-x\right].f(x)=x^6+3x^4+2x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Giá trị của $3M-m$ bằng

**A.** $33$. **B.** $-3$. **C.** $4$. **D.** $-28$.

**Câu 52:** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[0;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|\left|2f(x)+m+4\right|-f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 1?

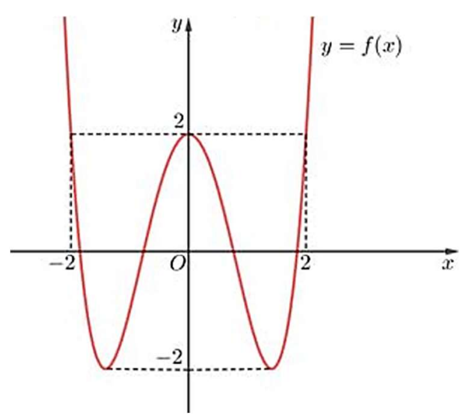



**A.** 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

**Câu 53:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là $a$ thỏa mãn $0<a<1$.

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $2$.

**Câu 54:** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[1;20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\left|2f(x)+m+4\right|+\left|f(x)+3m-2\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ không bé hơn 2. Tổng tất cả các phần tử của $S$ bằng:




**A.** $207$. **B.** $209$. **C.** $210$. **D.** $212$.

**Câu 55:** Cho hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$. Đặt $u_1=\min\limits_{[0;3]} y$, $u_2=y(2)$, $u_3=\max\limits_{[0;3]} y$. Giá trị của tham số $m$ để $u_1,u_2,u_3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân là

**A.** $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $2$. **D.** $\frac{18}{3}$.

**Câu 56:** Biết đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f(1)=-1; f'(1)=0$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình $\left|f(x)-m\right|\le 12$ nghiệm đúng $\forall x\in[0;2]$. Số phần tử của $S$ là

**A.** $10$. **B.** $11$. **C.** $16$. **D.** $0$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn D**

Xét $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ và $f''(x)=6ax+2b$

Xét $y=g(x)=xf(x)$ có $g'(x)=f(x)+x.f'(x)$ và $g''(x)=2f'(x)+x.f''(x)$

Vì cả hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đạt cực tiểu tại $x=1$ nên ta có

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f''(1)>0 \\ g'(1)=0 \\ g''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 6a+2b>0 \\ f(1)+1.f'(1)=0 \\ 2f'(1)+1.f''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 & (1) \\ a+b+c+d=0 & (2) \\ 3a+b>0 & (3) \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ $f(x)=x.f(x) \Leftrightarrow (x-1)\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=0$

Từ suy ra đa thức $ax^3+bx^2+cx+d$ có nghiệm $x=1$, khi đó

$ax^3+bx^2+cx+d=(x-1)\left[ax^2+(a+b)x+(a+b+c)\right]$

Từ đó suy ra phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ ax^2+(a+b)x+(a+b+c)=0 \quad (5) \end{array}\right.$

Từ suy ra đa thức $ax^2+(a+b)x+(a+b+c)$ có nghiệm $x=1$. Như vậy để tổng các nghiệm của phương trình bằng 4 thì phương trình phải có một nghiệm bằng 1 và một nghiệm bằng 3, nên $9a+3(a+b)+(a+b+c)=0 \Leftrightarrow 13a+4b+c=0$ (6)

Từ,, và ta được $\begin{cases} b=-5a \\ c=7a \\ d=-3a \\ a<0 \end{cases}$. Vậy $f(x)=ax^3-5ax^2+7ax-3a$ với $a<0$

$f'(x)=3ax^2-10ax+7a$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{7}{3} \end{array}\right.$

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{7}{3}$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{5a}{8}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $-\frac{32a}{27}$ | $\searrow$ | $9a$ |

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x)=-\frac{32a}{27}$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x)=9a$. Ta có $\begin{cases} -\frac{32a}{27}=\alpha \\ 9a=2\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{32}{307} \\ a=\frac{27}{307} \end{cases}$

**Câu 2: Chọn B**

Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^3-3x^2-m\right|}{\sqrt{\left(x^3-3x^2-m\right)^2+25}}=\dfrac{\sqrt{\left(x^3-3x^2-m\right)^2}}{\sqrt{\left(x^3-3x^2-m\right)^2+25}}$

Đặt $t=x^3-3x^2-m$ với $t\in\left[-4-m;16-m\right]$. Khi đó xét hàm số $g\left(t\right)=\dfrac{t^2}{t^2+25}$

Ta có $g\left(t\right)=\dfrac{t^2}{t^2+25}\leq\dfrac{144}{169}\Leftrightarrow t^2\leq 144$ với $t\in\left[-4-m;16-m\right]$

$\begin{cases}\left(m+4\right)^2\leq 12^2\\ \left(m-16\right)^2\leq 12^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\leq m\leq 28\\ -16\leq m\leq 8\end{cases}\Leftrightarrow 4\leq m\leq 8$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=8\end{array}\right.$

Thử lại

Với $m=4\Rightarrow t\in\left[-8;12\right]\Rightarrow g\left(t\right)=\dfrac{144}{169}\Leftrightarrow t=12$

Với $m=8\Rightarrow t\in\left[-12;4\right]\Rightarrow g\left(t\right)=\dfrac{144}{169}\Leftrightarrow t=-12$

Vậy $S=\left\{4;8\right\}$. Suy ra $4^2+8^2=80$

**Câu 3: Chọn C**

Ta có $y'=\left(4x^3-12x-4\right).f'\left(x^4-6x^2-4x\right)$.

Do $f'\left(x\right)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-12x-4=0\Leftrightarrow x^3-3x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=x^3-3x-1$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$:

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-3$ |

Suy ra $x^3-3x=1\Leftrightarrow x=x_0\in\left(-1;0\right)$. Đặt $x=2\cos t$, $t\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right)$, phương trình trở thành:

$8\cos^3 t-6\cos t=1\Leftrightarrow\cos 3t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3t=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vì $t\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right)$ nên $t=\dfrac{5\pi}{9}$. Do đó trên đoạn $\left[-1;1\right]$, $y'=0\Leftrightarrow x=2\cos\dfrac{5\pi}{9}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^4-6x^2-4x\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$:

| $x$ | $-1$ | | $2\cos\dfrac{5\pi}{9}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Do đó, trên đoạn $\left[-1;1\right]$, hàm số $y=f\left(x^4-6x^2-4x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2\cos\dfrac{5\pi}{9}$.

Vậy $m=2$, $n=5$, $p=9$ hay $m+n.p=47$.

**Câu 4: Chọn D**

Ta có $g'(x)=f'\left(4x-x^2\right).(4-2x)+x^2-6x+8=2(2-x)\left[f'(4x-x^2)+\dfrac{4-x}{2}\right]$

Xét thấy $\forall x\in[1;3]\Rightarrow 3\le 4x-x^2\le 4\Rightarrow f'(4x-x^2)>0$

Mặt khác $\dfrac{4-x}{2}>0\ \forall x\in[1;3]$

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

$g(1)=f(3)+\dfrac{19}{3}<f(4)+\dfrac{17}{3}=5+\dfrac{17}{3}=\dfrac{32}{3}$

$g(3)=f(3)+\dfrac{19}{3}<f(4)+\dfrac{19}{3}=5+\dfrac{19}{3}=\dfrac{34}{3}$

$g(2)=5+7=12.$

$\Rightarrow g(1)<g(2);\ g(3)<g(2)$. Vậy $\max\limits_{[1;3]} g(x)=12$ tại $x=2$.

**Câu 5: Chọn D**

Ta có $f'(x)=x^{2021}-x$ nên $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(x^{2021}-x\right)dx=\dfrac{1}{2022}x^{2022}-\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Mà $f(0)=2020\Rightarrow C=2020$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2022}x^{2022}-\dfrac{1}{2}x^2+2020$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2022}x^{2022}-\dfrac{1}{2}x^2+2020$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^{2021}-x=0\Leftrightarrow x\left(x^{2020}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(-1)$ | $\nearrow$ | $f(0)$ | $\searrow$ | $f(1)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Trên $[-1;+\infty)$ để $f(t)-f(z)$ đạt GTLN thì $f(t)$ đạt GTLN và $f(z)$ đạt GTNN.

Theo giả thiết thì $z>t\ge -1$ nên $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(z)=f(1)=\dfrac{1}{2022}-\dfrac{1}{2}+2020$.

Do $t\in[-1;z)$ và $f(z)$ đạt GTNN tại $z=1$ nên $\max\limits_{(-1;1)} f(t)=f(0)=2020$.

Vậy GTLN của $f(t)-f(z)$ bằng $2020-\left(\dfrac{1}{2022}-\dfrac{1}{2}+2020\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2022}=\dfrac{505}{1011}$.

**Câu 6: Chọn D**

Dựa vào đồ thị, ta có bảng biến thiên

| $x$ | $a$ | | $b$ | | $c$ | | $d$ | | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $f(a)$ | $\nearrow$ | $f(b)$ | $\searrow$ | $f(c)$ | $\nearrow$ | $f(d)$ | $\searrow$ | $f(e)$ |

Ta có: $S_1=\int\limits_a^b f'(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$; $S_2=\int\limits_b^c -f'(x)dx=-f(x)\Big|_b^c=f(b)-f(c)$

$S_3=\int\limits_c^d f'(x)dx=f(x)\Big|_c^d=f(d)-f(c)$; $S_4=\int\limits_d^e -f'(x)dx=-f(x)\Big|_d^e=f(d)-f(e)$

Mà $\begin{cases} S_2>S_1 \\ S_2>S_3 \\ S_4>S_3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} f(a)>f(c) \\ f(b)>f(d) \\ f(c)>f(e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a)>f(c)>f(e) \\ f(b)>f(d) \end{cases}$.

Kết hợp với bảng biến thiên ta có $M=f(b)$ và $m=f(e)$.

Vậy $M+m=f(b)+f(e)$.

**Câu 7: Chọn C**

Ta có bảng biến thiên sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $-14$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $f(2)$ | $\nearrow$ | $-14$ | $\searrow$ | |
| $\lvert f(x)+5\rvert$ | | $\searrow$ | $9$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $\lvert f(2)+5\rvert$ | $\searrow$ | $9$ | $\nearrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)+5\right|$ trên đoạn $[-4;4]$ đạt được tại điểm $x=2$.

**Câu 8: Chọn A**

Ta có: $g'(x)=(2x-3)f'(x^2-3x+2)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ x^2-3x+2=0 \\ x^2-3x+2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right] \\ x=2\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right] \\ x=1\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right] \\ x=3\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right] \\ x=0\in\left[-3;\frac{1}{2}\right] \end{array}\right.$$

Khi đó, ta có:

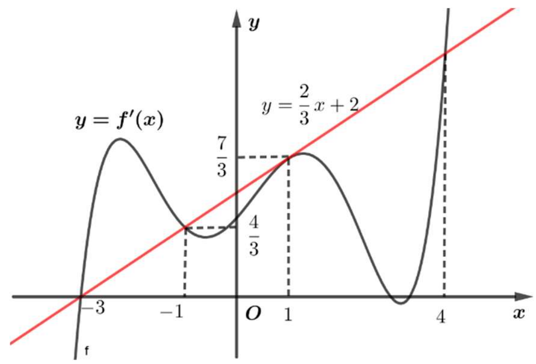
$g(0)=f(2)+2022=2025,\ g(-3)=f(20)+2022,\ g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)+2022<2025$.

Hàm số $y=g(x)$ xác định và liên tục trên $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$. Do đó, $\max\limits_{\left[-3;\frac{1}{2}\right]} g(x)=g(0)=2025$.

**Câu 9: Chọn D**

Ta có $g'(x)=3f'(3x)-2.3x-6$. Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(3x)-2.3x-6=0 \Leftrightarrow f'(3x)=\frac{2}{3}.3x+2$

Ta đi vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x+2$.




Dựa vào hai đồ thị ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=-3\\3x=-1\\3x=1\\3x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\frac{1}{3}\\x=\frac{1}{3}\\x=\frac{4}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{4}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | | $\searrow$ | | |

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{x\in\left[-1;\frac{4}{3}\right]} g(x)=f(-1)+\frac{5}{3}$.

**Câu 10: Chọn B**

Đặt $t=\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|+1=2\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+1 \Rightarrow t\in[1;3]$.

Xét hàm $y=f(t)$ với $t\in[1;3]$. Ta có bảng biến thiên sau:

| $t$ | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(t)$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ |

Do đó $y=f(t)\le 2\ \forall t\in[1;3]$. Dấu "=" xảy ra khi $t=1$.

$t=1 \Leftrightarrow 2\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+1=1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Đặt $g(x)=-2\cos 2x+4\cos x-10=-4\cos^2 x+4\cos x-8=-(2\cos x-1)^2-7$.

Khi đó $g(x)\le -7$. Dấu "=" xảy ra khi $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Từ và $\Rightarrow y=f\left(\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|+1\right)-2\cos 2x+4\cos x-10\le 2+(-7)=-5$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy giá trị lớn nhất của $y=f\left(\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|+1\right)-2\cos 2x+4\cos x-10$ là $-5$.

**Câu 11: Chọn A**

Từ đề bài ta có $x>0,y>0$. Theo giả thiết $\begin{cases} x^2-xy+3=0 & (1)\\ 2x+3y-14\le 0 & (2)\end{cases}$

Từ suy ra $y=\frac{x^2+3}{x}$ thay vào ta được $\frac{5x^2-14x+9}{x}\le 0\Rightarrow 1\le x\le\frac{9}{5}(do\,x>0)$.

Khi đó $P=3x^2y-xy^2-2x^2+2x=2x^3-2x^2+5x-\frac{9}{x}$

Có $P'=6x^2-4x+5+\frac{9}{x^2}>0,\ \forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$

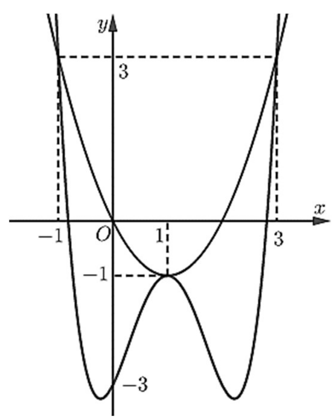
Do đó $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}P=P(1)=-4$ và $\max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}P=P\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{1148}{125}$. Vậy $\min\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}P+\max\limits_{\left[1;\frac{9}{5}\right]}P=\frac{648}{125}=5.184$

**Câu 12: Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=3f(x)-x^3+3x^2\le m$.

Bất phương trình $3f(x)\le x^3-3x^2+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[-1;3]}g(x)$.

Đạo hàm: $g'(x)=3f'(x)-3x^2+6x$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$




Ta thấy $g'(x)\le 0,\forall x\in[-1;3]$ suy ra $\max\limits_{[-1;3]}g(x)=g(-1)=3f(-1)+4$. Vậy $m\ge 3f(-1)+4$.

**Câu 13: Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=f(2x-1)+6x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Ta có $g'(x)=2f'(2x-1)+6$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x-1)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=-1 \\ 2x-1=0 \\ 2x-1=1 \\ 2x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\,(l) \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | |

Dựa trên bảng biến thiên, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} g(x)=g(1)=f(1)+6$.

**Câu 14: Chọn B**

Thấy hàm số $y=\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên đoạn $[1;20]$ nên tồn tại $\max\limits_{x\in[1;20]}\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|$.

$\max\limits_{x\in[1;20]}\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|\geq\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow$ Bất phương trình $\left|\dfrac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|\geq\dfrac{5}{4}$ có nghiệm $x\in[1;20]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} mx-2\sqrt{x+4}\geq\dfrac{5}{4}(2x+4) \\ mx-2\sqrt{x+4}\leq-\dfrac{5}{4}(2x+4) \end{array}\right.$ có nghiệm $x\in[1;20]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\geq\dfrac{2\sqrt{x+4}+\frac{5}{4}(2x+4)}{x}=f(x) \\ m\leq\dfrac{2\sqrt{x+4}-\frac{5}{4}(2x+4)}{x}=g(x) \end{array}\right.$ có nghiệm $x\in[1;20]$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\geq\min\limits_{x\in[1;20]}f(x) \\ m\leq\max\limits_{x\in[1;20]}g(x) \end{array}\right.$.

Khảo sát các hàm số $f(x),g(x)$ tìm được

$\min\limits_{x\in[1;20]}f(x)=f(20)=\dfrac{55+4\sqrt{6}}{20}\approx 3,24$ và $\max\limits_{x\in[1;20]}g(x)=g(12)=-\dfrac{9}{4}=-2,25$.

Vậy các giá trị nguyên cần tìm của $m$ là $-39,-38,\ldots,-3;4,5,\ldots,31$, do đó có tất cả 65 giá trị.

**Câu 15: Chọn A**

Ta có $y'=\left(2+\dfrac{1}{x\ln 10}\right).v'(x+u(x))$. Ta thấy: $2+\dfrac{1}{x\ln 10}>0,\forall x\in[1;10]$

Mà $v'(x)=3x^2-2mx+m^2+1=(x-m)^2+2x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow v'(x+u(x))>0,\forall x\in[1;10]$.

Từ đó : $y'>0,\forall x\in[1;10]\Rightarrow M=\max\limits_{[1;10]}y=y(10)=v(21)=21m^2-441m+9280$

$=21\left(m-\dfrac{21}{2}\right)^2+\dfrac{27859}{4}\geq\dfrac{27859}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{27859}{4}$, đạt được khi $m=\dfrac{21}{2}$.

**Câu 16: Chọn D**

Ta có: $f(x)=ax^5+bx^3+cx$, $(a>0,b>0)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=5ax^4+3bx^2+c$.

Khi đó: $g'(x)=-2f'(1-2x)+2f'(x+4)$

$=-2\left[5a(1-2x)^4+3b(1-2x)^2+c\right]+2(x+4)\left[5a(x+4)^4+3b(x+4)^2+c\right]$

$=10a\left[(x+4)^4-(1-2x)^4\right]+6b\left[(x+4)^2-(1-2x)^2\right]$

$=10a\left[\left((x+4)^2+(1-2x)^2\right)\left((x+4)^2-(1-2x)^2\right)\right]+6b\left[(x+4)^2-(1-2x)^2\right]$

$=10a\left[(x+4)^2-(1-2x)^2\right]\left[\left((x+4)^2+(1-2x)^2\right)+6b\right]$

$=30a(1+x)(5-x)\left[\left((x+4)^2+(1-2x)^2\right)+6b\right]\geq 0\ \ \forall x\in[-1;5]$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;5]$ nên ta có:

$g(-1)\leq g(x)\leq g(5)\Leftrightarrow f(3)+2f(3)+m\leq g(x)\leq f(-9)+2f(9)+m$

$\Leftrightarrow 3f(3)+m\leq g(x)\leq -f(9)+2f(9)+m$

$\Leftrightarrow 3f(3)+m\leq g(x)\leq f(9)+m \ \Leftrightarrow m-7\leq g(x)\leq m+81$

**Trường hợp 1:** Nếu $(m-7)(m+81)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>7\\m<-81\end{array}\right.$ $(*)$ thì

$\max\limits_{[-1;5]}|g(x)|+\min\limits_{[-1;5]}|g(x)|=86\Leftrightarrow|m-7|+|m+81|=86\Leftrightarrow|2m+74|=86\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\m=-80\end{array}\right.$.

**Trường hợp 2:** Nếu $(m-7)(m+81)\leq 0\Leftrightarrow -81\leq m\leq 7$ $(**)$ thì

$\begin{cases}\min\limits_{[-1;5]}g(x)=0\\ \max\limits_{[-1;5]}g(x)=\max\{7-m;m+81\}\end{cases}$.

Khi đó: $\max\limits_{[-1;5]}|g(x)|+\min\limits_{[-1;5]}|g(x)|=86\Leftrightarrow\max\{7-m;m+81\}=86$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+81=86\\7-m\leq m+81\end{cases}\\ \begin{cases}7-m=86\\m+81\leq 7-m\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-79\end{array}\right.$. Vậy tổng của tất cả các phần tử của $S$ bằng: $5+(-79)=-74$

**Câu 17: Chọn B**

Tập xác định: $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\dfrac{2m^2+m-1}{(x-1)^2}=\dfrac{(2m-1)(m+1)}{(x-1)^2}$.

**Trường hợp 1:** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow$ Hàm số đã cho trở thành $y=1$.

$\Rightarrow\max\limits_{[2;3]}y=1;\max\limits_{[4;5]}y=1\Rightarrow\max\limits_{[2;3]}y\neq 2\max\limits_{[4;5]}y-4$.

**Trường hợp 2:** $-1<m<\dfrac{1}{2}\Rightarrow y'<0\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(2;3),(4;5)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;3]} y = y(2) = \dfrac{2-2m^2-m}{1} = -2m^2-m+2 \\ \max\limits_{[4;5]} y = y(4) = \dfrac{4-2m^2-m}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max\limits_{[2;3]} y = 2\max\limits_{[4;5]} y - 4 \Leftrightarrow -2m^2-m+2 = 2\frac{4-2m^2-m}{3} - 4$$

$$\Rightarrow -6m^2-3m+6 = -4-4m^2-2m \Leftrightarrow 2m^2+m-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\,(L) \\ m=\dfrac{-5}{2}\,(L) \end{array}\right..$$

**Trường hợp 3:** $\left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1}{2} \\ m<-1 \end{array}\right. \Rightarrow y'>0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(2;3),(4;5)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;3]} y = y(3) = \dfrac{3-2m^2-m}{2} \\ \max\limits_{[4;5]} y = y(5) = \dfrac{5-2m^2-m}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max\limits_{[2;3]} y = 2\max\limits_{[4;5]} y - 4 \Leftrightarrow \frac{3-2m^2-m}{2} = \frac{5-2m^2-m}{2} - 4 \Leftrightarrow 0=-3$$

Vậy không có giá trị $m$ để $\max\limits_{[2;3]} y = 2\max\limits_{[4;5]} y - 4$.

**Câu 18: Chọn C**

Ta có $M = \max\limits_{x\in[-1;3]} f(x) \Rightarrow \begin{cases} M \ge f(-1) \\ M \ge f(3) \\ M \ge f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \ge |1-a+b| \\ M \ge |9+3a+b| \\ M \ge |1+a+b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \ge |1-a+b| \\ M \ge |9+3a+b| \\ 2M \ge |-2-2a-2b| \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối: $|x|+|y|+|z| \ge |x+y+z|$, ta được

$$4M = M+M+2M \ge |1-a+b|+|9+3a+b|+|-2-2a-2b| = |1-a+b+9+3a+b+(-2-2a-2b)| = 8$$

$\Leftrightarrow M \ge 2$.

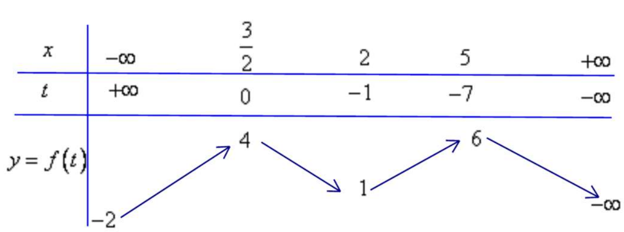
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |1-a+b|=2 \\ |9+3a+b|=2 \\ |-2-2a-2b|=2 \end{cases}$ và $1-a+b, 9+3a+b, -2-2a-2b$ cùng dấu.

Do đó $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$. Vậy $a+2b=-4$.

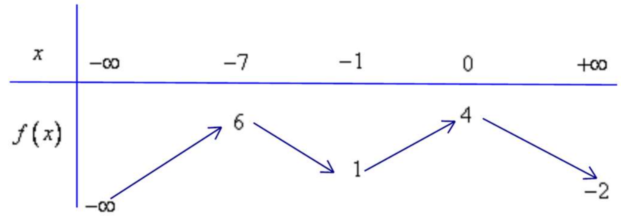
**Câu 19: Chọn B**

Đặt $t = 3-2x$, ta có:

Bảng biến thiên của hàm số $y=f(t)$ cũng là bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.



Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$.




Ta có: $u=x^2-4x+3=\left(x-2\right)^2-1\ge -1\Rightarrow u\in\left[-1;+\infty\right)$.

Từ bảng biến thiên của $f\left(x\right)\Rightarrow f\left(u\right)\in\left(-2;4\right]\Rightarrow 2f\left(u\right)\in\left(-4;8\right]$

$\Rightarrow -4-m<2f\left(u\right)-m\le 8-m$. Đặt $g\left(u\right)=\left|2f\left(u\right)-m\right|$

Để $g\left(u\right)$ có giá trị lớn nhất thì $\begin{cases}8-m>0\\ \left|m+4\right|\le 8-m\end{cases}\Leftrightarrow m\le 2$. Vì $m$ là số tự nhiên $\Rightarrow m\in\left\{0;1;2\right\}$.

**Câu 20: Chọn D**

Ta có $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và có $f'\left(x\right)=\dfrac{1-m}{\left(x+1\right)^2}$.

Trường hợp 1: $m=1\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)$ là hàm hằng $\Rightarrow \max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\min\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(0\right)\right|=1$

Thỏa điều kiện $\max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+2\min\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|\le 200$ nên nhận $m=1$.

**Trường hợp 2:** $m<1\Rightarrow f'\left(x\right)>0\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến $\left[0;1\right]$

Suy ra $\max\limits_{x\in[0;1]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=\dfrac{m+1}{2}$, $\min\limits_{x\in[0;1]}f\left(x\right)=m$.

**Trường hợp 2.1:** $m\ge 0$ thì $\max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+2\min\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|\le 200\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+2m\le 200\Leftrightarrow m\le\dfrac{399}{5}$.

Suy ra $m\in\left[0;1\right)$.

**Trường hợp 2.2:** $-1<m<0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|=0\\ \max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|\in\left\{\left|\dfrac{m+1}{2}\right|;\left|m\right|\right\}\end{cases}$, nên $\max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|\le 1$.

Do đó $\max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+2\min\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|\le 200$ luôn đúng. Nên $-1<m<0$.

**Trường hợp 3:** $m\le -1$

$\max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+2\min\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|\le 200\Leftrightarrow -m+2.\left(-\dfrac{m+1}{2}\right)\le 200\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{201}{2}$.

Suy ra $m\in\left[-\dfrac{201}{2};-1\right]$. Kết hợp 3 trường hợp của TH2, ta nhận $m\in\left[-\dfrac{201}{2};1\right)$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-100;-99;...;0\right\}$.

**Trường hợp 3:** $m>1\Rightarrow f'\left(x\right)<0\Rightarrow f\left(x\right)$ nghịch biến $\left[0;1\right]$.

Suy ra $\min\limits_{x\in[0;1]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=\dfrac{m+1}{2}>1$, $\max\limits_{x\in[0;1]}f\left(x\right)=f\left(0\right)=m$

Nên $\max\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|+2\min\limits_{x\in[0;1]}\left|f\left(x\right)\right|\le 200\Leftrightarrow m+2.\dfrac{m+1}{2}\le 200\Leftrightarrow m\le\dfrac{199}{2}$

Suy ra $m \in \left(1; \frac{199}{2}\right]$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2;3;...99\}$.

Kết hợp 3 trường hợp, ta được $m \in \{-100;-99;...;99\}$.

Vậy có $200$ giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn.

**Câu 21: Chọn D**

Xét hệ $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 & (1) \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \ge 0 & (2) \end{cases}$.

Bất phương trình: $x^2 - 3x - 4 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$. Bài toán tương đương tìm tất các các giá trị của tham số $m$ sao cho bất phương trình có nghiệm $x \in [-1;4]$.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m$. Ta có $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - m^2 - 15m, & -1 \le x \le 0 \\ x^3 - 3x^2 - m^2 - 15m, & 0 < x \le 4 \end{cases}$.

Suy ra $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x, -1 \le x \le 0 \\ 3x^2 - 6x, \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$.

Ta thấy khi $-1 < x \le 2$ thì $f'(x) \le 0$, khi $2 < x \le 4$ thì $f'(x) > 0$. Do đó

$\underset{[-1;4]}{Max}\, f(x) = Max\{f(-1), f(4)\} = f(4) = -m^2 - 15m + 16$.

Để bất phương trình $f(x) \ge 0$ có nghiệm thuộc $[-1;4]$ thì

$\underset{[-1;4]}{Max}\, f(x) = -m^2 - 15m + 16 \ge 0 \Leftrightarrow -16 \le m \le 1$. Vậy $a + b = -15$.

**Câu 22: Chọn A**

Đặt $t = x^3 + 2x$, với $x \in [-1;1]$ ta có $t'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \ \forall x \in [-1;1]$. Do đó, $t \in [-3;3]$.

Khi đó, xét hàm số $y = f(t) + 3f(m)$ trên đoạn $[-3;3]$, ta có

$$y' = f'(t);\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right..$$

Ta có: $y(-2) = f(-2) + 3f(m) = 5 + 3f(m)$;

$y(1) = f(1) + 3f(m) = -6 + 3f(m)$ và $y(2) = 4 + 3f(m)$.

Nhận xét rằng $y(1) < y(2) < y(-2)$ nên $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = |y(-2)|$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = |y(1)|$.

**Trường hợp 1:**

Nếu $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = |y(-2)|$ thì ta phải có $\begin{cases} |5 + 3f(m)| = 8 \\ |-6 + 3f(m)| \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow f(m) = 1$. Khi đó có $5$ giá trị thực của $m$ trên đoạn $[-4;4]$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Trường hợp 2:**

Nếu $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = |y(1)|$ thì ta phải có $\begin{cases} |5 + 3f(m)| \le 8 \\ |-6 + 3f(m)| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow f(m) = -\frac{2}{3}$. Khi đó có $6$ giá trị thực của $m$ trên đoạn $[-4;4]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả 11 giá trị thực của $m$ trên đoạn $[-4;4]$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 23: Chọn C**

Ta có $f'(x)=\dfrac{2-2m}{(x+2)^2}$ ; $f(1)=\dfrac{2m+1}{3}$ và $f(3)=\dfrac{2m+3}{5}$.

**Trường hợp 1:** $2-2m>0\Leftrightarrow m<1\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{2m+3}{5};\min\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{2m+1}{3}$.

Với $2m+3\le 0\Leftrightarrow m\le -\dfrac{3}{2}$. Khi đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\dfrac{-2m-1}{3};\min\limits_{[1;3]}|f(x)|=\dfrac{-2m-3}{5}$.

Suy ra $\dfrac{-2m-1}{3}+\dfrac{-2m-3}{5}=2\Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{4}$.

Với $2m+1\ge 0\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\dfrac{2m+1}{3};\min\limits_{[1;3]}|f(x)|=\dfrac{2m+3}{5}$.

Suy ra $\dfrac{2m+1}{3}+\dfrac{2m+3}{5}=2\Leftrightarrow m=1$.

Với $\begin{cases}2m+1\le 0\\2m+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}\le m\le -\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\min\limits_{[1;3]}|f(x)|=0$ và

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{2m+3}{5}>\dfrac{-2m-1}{3}\\ \max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\dfrac{2m+3}{5}\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{2m+3}{5}<\dfrac{-2m-1}{3}\\ \max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\dfrac{-2m-1}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>-\dfrac{7}{8}\\ \dfrac{2m+3}{5}=2\end{cases}\\ \begin{cases}m<-\dfrac{7}{8}\\ \dfrac{-2m-3}{5}=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>-\dfrac{7}{8}\\ m=\dfrac{7}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}m<-\dfrac{7}{8}\\ m=-\dfrac{7}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\dfrac{7}{2}.$$

So với điều kiện, loại $m=\dfrac{7}{2}$.

**Trường hợp 2:** $2-2m<0\Leftrightarrow m>1\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{2m+1}{3}>0;\max\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{2m+3}{5}>0$.

Suy ra $\dfrac{2m+1}{3}+\dfrac{2m+3}{5}=2\Leftrightarrow m=1$

**Trường hợp 3:** $2-2m=0\Leftrightarrow m=1$. Khi đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\min\limits_{[1;3]}|f(x)|=1\Rightarrow m=1$ thỏa mãn.

Vậy có $2$ giá trị $m$ thỏa đề.

**Câu 24: Chọn D**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-4mx+5}{x^2+x+1}\right|$ lớn hơn 7 $\Leftrightarrow$ bất phương trình $\left|\dfrac{x^2-4mx+5}{x^2+x+1}\right|\ge 7$ có nghiệm.

Ta có: $\left|\dfrac{x^2-4mx+5}{x^2+x+1}\right|\ge 7\Leftrightarrow |x^2-4mx+5|\ge 7(x^2+x+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4mx+5\ge 7(x^2+x+1)\\x^2-4mx+5\le -7(x^2+x+1)\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}6x^2+(7+4m)x+2\le 0 & (1)\\8x^2+(7-4m)x+12\le 0 & (2)\end{array}\right.$$

Bất phương trình $(1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_1 = (7+4m)^2 - 48 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{-7+4\sqrt{3}}{4} \\ m \le \dfrac{-7-4\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-40;40]$ nên $m \in \{-40;-39;...;-4;0;1;...;40\}$.

Bất phương trình $(2)$ có nghiệm $\Delta_2 \ge 0 \Leftrightarrow (7-4m)^2 - 384 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{7+8\sqrt{6}}{4} \\ m \le \dfrac{7-8\sqrt{6}}{4} \end{array}\right.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-40;40]$ nên $m \in \{-40;-39;...;-4;7;...;40\}$.

Để bất phương trình $\left|\dfrac{x^2-4mx+5}{x^2+x+1}\right| \ge 7$ thì $m \in \{-40;-39;...;-4;0;1;...;40\}$

Vậy có 78 số nguyên $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 25: Chọn D**

Ta thấy $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}m^2 + \dfrac{3}{4}m + \dfrac{5}{16} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m = \dfrac{1}{2}$.

Gọi $\alpha$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Khi đó $\alpha \le f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ta chứng tỏ rằng dấu bằng ở xảy ra, tức là tồn tại $m$ để $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Thật vậy, khi $m = \dfrac{1}{2}$, ta có hàm số $y = x^4 - x^3 + \dfrac{5}{4}x^2 - x + \dfrac{3}{4}$.

Khi đó $y' = 4x^3 - 3x^2 + \dfrac{5}{2}x - 1$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số này là

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Qua bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất $\alpha$ của $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất $\alpha_{max} = \dfrac{1}{2}$ khi $m = m_0 = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $T = m_0 + \alpha_{max} = 1$.

**Câu 26: Chọn D**

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \end{array}\right.$.

$f(0) = m; f(1) = m-2; f(2) = m+2$

**Trường hợp 1:** Nếu $m - 2 \ge 0 \Rightarrow m \ge 2 \Rightarrow \max|f(x)| = \max f(x) = m+2 \Rightarrow m+2 = 3 \Rightarrow m = 1$

**Trường hợp 2:** Nếu $m+2\le 0\Rightarrow m\le -2\Rightarrow \max\left|f\left(x\right)\right|=2-m\Rightarrow 2-m=3\Rightarrow m=-1$.

**Trường hợp 3:** Nếu $\left(m-2\right)\left(m+2\right)<0\Leftrightarrow -2<m<2\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\max\left|f\left(x\right)\right|=m+2\\ \max\left|f\left(x\right)\right|=2-m\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2-m=3\\ m+2=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=1\end{array}\right.$. Vậy $m\in\left\{-1;1\right\}$.

**Câu 27: Chọn A**

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=2x^2-4x-2$ có $f'\left(x\right)=4x-4; f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow f\left(1\right)=-4$

Xét hàm số $h\left(x\right)=f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)+m$ có $h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)-1\right]$ ; $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)=1\end{array}\right.$

Với $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow h\left(1\right)=m+24$

Với $f\left(x\right)=1\Leftrightarrow x=1\pm a$, với $a>0$. $\Rightarrow h\left(1\pm a\right)=m-1$

Tại $x=-1\Rightarrow h\left(-1\right)=m+8$; tại $x=3\Rightarrow h\left(3\right)=m+8$

Khi đó $B=\max\limits_{[-1;3]}h\left(x\right)=m+24;\ b=\min\limits_{[-1;3]}h\left(x\right)=m-1.$

Mà $\max\limits_{[-1;3]}g\left(x\right)=15\Leftrightarrow\dfrac{\left|B+b\right|+\left|B-b\right|}{2}=15\ \Leftrightarrow\left|2m+23\right|+25=30\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-9\\ m=-14\end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị của $m$ là $-23.\in\left(-25;-15\right)$.

**Câu 28: Chọn D**

Hàm số đã cho được viết lại như sau: $y=\left|-\left(-x^2+2x+3\right)-4\sqrt{-x^2+2x+3}+m\right|$.

Nhận xét: với $-1\le x\le 3$ thì ta có $0\le\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{4-\left(x-1\right)^2}\le 2$.

Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+3}$.

Bài toán đã cho trở thành: "Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(t\right)=\left|-t^2-4t+m\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 2021".

Xét hàm số $f\left(t\right)=-t^2-4t+m$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có: $f'\left(t\right)=-2t-4<0$, $\forall t\in\left[0;2\right]$ $\Rightarrow$ Hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Từ đó suy ra: $\max\limits_{[0;2]}f\left(t\right)=f\left(0\right)=m$; $\min\limits_{[0;2]}f\left(t\right)=f\left(2\right)=m-12$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}g\left(t\right)=\max\left\{\left|m\right|;\left|m-12\right|\right\}$.

Ta xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** Nếu $\left|m\right|\ge\left|m-12\right|\Leftrightarrow m^2\ge m^2-24m+144\Leftrightarrow m\ge 6$ thì $\max\limits_{[0;2]}g\left(t\right)=\left|m\right|$.

Theo bài ra, ta có $\max\limits_{[0;2]}g\left(t\right)=2021\Leftrightarrow\left|m\right|=2021\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2021\ (\text{lo¹i})\\ m=2021\ (\text{nhËn})\end{array}\right.$.

**Trường hợp 2:** Nếu $\left|m\right|<\left|m-12\right|\Leftrightarrow m^2<m^2-24m+144\Leftrightarrow m<6$ thì $\max\limits_{[0;2]}g\left(t\right)=\left|m-12\right|$.

Theo bài ra, ta có $\max\limits_{[0;2]}g\left(t\right)=2021\Leftrightarrow\left|m-12\right|=2021\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2009\ \left(nhan\right)\\ m=2033\ \left(loai\right)\end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2021+(-2009)=12$.

**Câu 29: Chọn A**

Đặt $a=m^2 f(m)$; Đặt $t=\dfrac{2x+1}{x+2}\Rightarrow t'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0,\forall x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Suy ra: $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=\max\limits_{[-1;1]}\{f(t)+a\}=\max\limits_{[-1;1]} f(t)+a=f(1)+a=3+a$

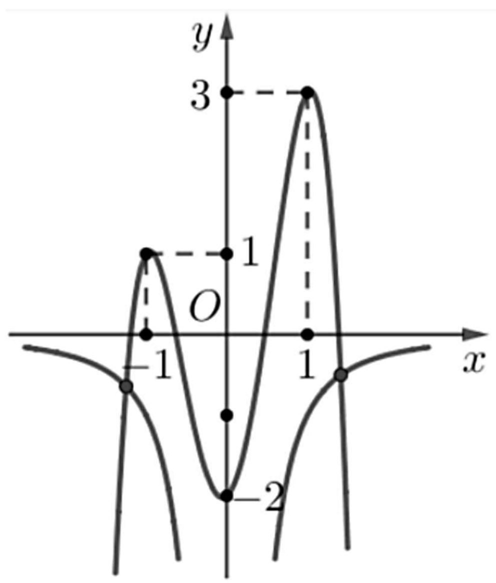
$\min\limits_{[-1;1]} g(x)=\min\limits_{[-1;1]}\{f(t)+a\}=\min\limits_{[-1;1]} f(t)+a=f(0)+a=-2+a$

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]}|g(x)|=\max\{|3+a|;|-2+a|\}=3$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|3+a|=3\\|3+a|\ge|-2+a|\end{cases}\\ \begin{cases}|-2+a|=3\\|-2+a|>|3+a|\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2.f(m)=-1\\m^2.f(m)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(m)=\dfrac{-1}{m^2}\ (1)\\ m=0\\ f(m)=0\quad(2)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm số $f(x)$, ta có phương trình $(2): f(m)=0$ có $4$ nghiệm phân biệt khác $0$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số $y=\dfrac{-1}{x^2}$. Ta thấy đồ thị $y=\dfrac{-1}{x^2}$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm nên phương trình $(1)$ có $2$ nghiệm.




Vậy có tất cả $7$ số thực $m$ thỏa mãn.

**Câu 30: Chọn D**

Ta có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như sau

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | − | 0 | | |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2020$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $f(-2020)$ | | $\nearrow$ | | |

Xét $y=g(x)=f(|x-1|-2020)$ có $g'(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}f'(|x-1|-2020)$ , với $x\neq 1$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(|x-1|-2020)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-1|-2020=-2020\\|x-1|-2020=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2022\\x=-2020\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của hàm số $y=g(x)=f(|x-1|-2020)$ như sau:

| x | $-\infty$ | | $-2020$ | | $1$ | | $2022$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | | $g(1)$ | | $\nearrow$ | | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có GTNN của $y=g(x)$ trên $\mathbb{R}$ là $g(1)$ tại $x_0=1$.

**Câu 31: Chọn D**

Xét hàm số $h(x)=f^2(x)-2f(x)+m,x\in[-1;3]$

Đạo hàm $h'(x)=2f'(x).f(x)-2f'(x)$; Cho $h'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x).f(x)-2f'(x)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=1\end{array}\right.\\x\in[-1;3]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\x^2-2x-1=1\end{array}\right.\\x\in[-1;3]\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$h(1)=f^2(1)-2f(1)+m=8+m$

$h(1+\sqrt{3})=f^2(1+\sqrt{3})-2f(1+\sqrt{3})+m=-1+m$

$h(1-\sqrt{3})=f^2(1-\sqrt{3})-2f(1-\sqrt{3})+m=-1+m$

$h(-1)=f^2(-1)-2f(-1)+m=m$

$h(3)=f^2(3)-2f(3)+m=m$

$$\Rightarrow\max_{[-1;3]}g(x)=\max\left\{\max_{[-1;3]}|h(x)|,\min_{[-1;3]}|h(x)|\right\}=\max\{|8+m|;|-1+m|\}$$

Với $|8+m|>|-1+m|\Leftrightarrow 63+18m>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{63}{18}\Rightarrow\max\limits_{[-1;3]}g(x)=|8+m|=8\Leftrightarrow m=0$

Với $|8+m|<|-1+m|\Leftrightarrow 63+18m<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{63}{18}$

$\Rightarrow\max\limits_{[-1;3]}g(x)=|-1+m|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\m=-7\end{array}\right.\Rightarrow m=-7$. Kết luận $m=0,m=-7$.

**Câu 32: Chọn A**

Ta có $f'(x)=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\end{array}\right.$. Vì $x\in[0;2]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Mặt khác: $f(0)=m;f(1)=m-1;f(2)=m+8$

**Trường hợp 1:** Nếu $m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=m+8;\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=m-1\Rightarrow m-1+m+8=7\Rightarrow m=0$.

**Trường hợp 2:** Nếu $m+8\le 0\Leftrightarrow m\le -8$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-m-8;\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=1-m\Rightarrow 1-m-m-8=7\Rightarrow m=-7$

**Trường hợp 3:** Nếu $(m+8)(m-1)<0\Leftrightarrow -8<m<1$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|m+8|,|m-1|\};\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=0$

Ta có: $|m+8|>|m-1|\Leftrightarrow m>-\dfrac{7}{2}$, từ đó suy ra: $\begin{cases}-\dfrac{7}{2}<m<1\\|m+8|=7\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$;

$\begin{cases}-8<m<-\dfrac{7}{2}\\|m-1|=7\end{cases}\Leftrightarrow m=-6$

$\Rightarrow S=\{-6;-1\}$. Tổng các phần tử của $S$ là: $-6-1=-7$.

**Câu 33: Chọn A**

Đặt $t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$, điều kiện $t\in[-2;2]$. Hàm số viết lại $y=|t^3-3t^2+1+m|$

Xét hàm số $g(t)=t^3-3t^2+1+m$ có $g'(t)=3t^2-6t$; $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Ta có $g(-2)=m-19;g(0)=m;g(2)=m-2\Rightarrow\min\limits_{[-2;2]}g(t)=m-19;\max\limits_{[-2;2]}g(t)=m$.

**Trường hợp 1:** $m-19\ge 0\Leftrightarrow m\le 19$: $\min y=\min\limits_{[-2;2]}|g(t)|=|m-19|=m-19\le 5\Leftrightarrow 19\le m\le 24$.

Mà $m\in Z\Rightarrow m\in\{19;20;21;22;23;24\}$.

**Trường hợp 2:** $m\le 0$: $\min y=\min\limits_{[-2;2]}|g(t)|=|m|=-m\le 5\Leftrightarrow -5\le m\le 0$.

Mà $m\in Z\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

**Trường hợp 3:** $m-19<0<m$: $\min y=\min\limits_{[-2;2]}|g(t)|=0\le 5\Leftrightarrow 0<m<19$.

Mà $m\in Z\Rightarrow m\in\{1;2;3;...;18\}$. Vậy có $30$ giá trị $m$.

**Câu 34: Chọn A**

Ta tìm điều kiện để $\min\limits_{[-1;3]}f(x)\ge 2$ hoặc $\min\limits_{[-1;3]}f(x)=0$.

Nếu $\min\limits_{[-1;3]}f(x)\ge 2\Leftrightarrow f(x)\ge 2,\forall x\in[-1;3]\Leftrightarrow\left|m(x-1)-2\sqrt{2x+7}\right|\ge 2(x+2),\forall x\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m(x-1)-2\sqrt{2x+7}\ge 2(x+2),\forall x\in[-1;3](1)\\m(x-1)-2\sqrt{2x+7}\le -2(x+2),\forall x\in[-1;3](2)\end{array}\right.$

Ta có $(1)$ không xảy ra do tại $x=1$ không đúng.

Do đó $\min\limits_{[-1;3]} f(x) \ge 2 \Leftrightarrow m(x-1) \le 2\sqrt{2x+7} - 2(x+2), \forall x \in [-1;3]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2x+7}-2(x+2)}{x-1} \ge m, \forall x \in (1;3] \\ \dfrac{2\sqrt{2x+7}-2(x+2)}{x-1} \le m, \forall x \in [-1;1) \end{cases} (3),.$$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{2\sqrt{2x+7}-2(x+2)}{x-1}$ trên $[-1;3]\setminus\{1\}$, ta được

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \sqrt{13} - 5 \\ m \ge 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Nếu $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = 0 \Leftrightarrow m(x-1) - 2\sqrt{2x+7} = 0$ có nghiệm trong $[-1;3]$.

$\Leftrightarrow m = \dfrac{2\sqrt{2x+7}}{x-1}$ có nghiệm trong $[-1;3]\setminus\{1\}$ $(4)$.

Xét hàm số $h(x) = \dfrac{2\sqrt{2x+7}}{x-1}$ trong $[-1;3]\setminus\{1\}$ ta được $(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{5} \\ m \ge \sqrt{13} \end{array}\right.$.

Như vậy $0 < \min\limits_{[-1;3]} f(x) < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{13}$.

Suy ra có $6$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 35: Chọn D**

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx; (a>0; b>0)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$.

Khi đó:

$$g'(x) = -2f'(1-2x) + 2.f'(x+4) = -2\left[5a(1-2x)^4 + 3b(1-2x)^2 + c\right] + 2\left[5a(x+4)^4 + 3b(x+4)^2 + c\right]$$

$$= 10a\left[(x+4)^4 - (1-2x)^4\right] + 6b\left[(x+4)^2 - (1-2x)^2\right]$$

$$= 10a\left[(x+4)^2 + (1-2x)^2\right]\left[(x+4)^2 - (1-2x)^2\right] + 6b\left[(x+4)^2 - (1-2x)^2\right]$$

$$= \left\{10a\left[(x+4)^2 + (1-2x)^2\right] + 6b\right\}.\left[(x+4)^2 - (1-2x)^2\right]$$

$$= \left\{10a\left[(x+4)^2 + (1-2x)^2\right] + 6b\right\}.3(x+1)(5-x) \ge 0,\ \forall x \in [-1;5]$$

Suy ra hàm $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[-1;5]$ nên ta có:

$g(-1) \le g(x) \le g(5) \Leftrightarrow f(3) + 2f(3) + m \le g(x) \le f(-9) + 2f(9) + m$

$\Leftrightarrow 3f(3) + m \le g(5) \le -f(9) + 2f(9) + m$

$\Leftrightarrow 3f(3) + m \le g(x) \le f(9) + m \Leftrightarrow m - 7 \le g(x) \le m + 81$.

**Trường hợp 1:** Nếu $(m-7)(m+81) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 7 \\ m < -81 \end{array}\right.$ $(*)$ thì

$\max\limits_{[-1;5]} |g(x)| + \min\limits_{[-1;5]} |g(x)| = 86 \Leftrightarrow |m-7| + |m+81| = 86 \Leftrightarrow |2m+74| = 86 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -80 \end{array}\right.$).

**Trường hợp 2:** Nếu $(m-7)(m+81) \le 0 \Leftrightarrow -81 \le m \le 7$ $(**)$ thì

$\begin{cases} \min\limits_{[-1;5]} g(x) = 0 \\ \max\limits_{[-1;5]} g(x) = \max\{7-m; m+81\} \end{cases}$.

Khi đó:

$$\max\limits_{[-1;5]} |g(x)| + \min\limits_{[-1;5]} |g(x)| = 86 \Leftrightarrow \max\{7-m; m+81\} = 86 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+81=86 \\ 7-m \le m+81 \end{cases} \\ \begin{cases} 7-m=86 \\ m+81 \le 7-m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-79 \end{array}\right. \text{(tm)}$$

Vậy tổng của tất cả các phần tử của $S$ bằng: $5+(-79)=-74$.

**Câu 36: Chọn B**

Ta có $f(x)=1+m^2+n^2-2(m\sin x+n\cos x)$ .Xét $m=n=0 \Rightarrow f(x)=1$

Xét $m^2+n^2>0$, khi đó $f(x)=1+m^2+n^2-2\sqrt{m^2+n^2}.\sin(x+\alpha)$

$\left(\sin\alpha=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}, \cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1+m^2+n^2-2\sqrt{m^2+n^2}$ ; $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1+m^2+n^2+2\sqrt{m^2+n^2}$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)+\max\limits_{x\in\mathbb{R}} = 2+2(m^2+n^2) \Leftrightarrow m^2+n^2=25$ vì $m,n$ là các tham số nguyên suy ra có 12 bộ số $(m,n)$ thỏa mãn là $(0;5),(0;-5),(3;4),(3;-4),(-3;4),(-3;-4)$ và hoán vị của nó.

**Câu 37: Chọn A**

Để $g(x)=(x-1)\left(m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1\right)\ge 0, \forall x$

thì trước tiên $m^3f(2x-1)-mf(x)+f(x)-1=0$ phải có nghiệm $x=1$.

$\Leftrightarrow m^3f(1)-mf(1)+f(1)-1=0 \Leftrightarrow m^3-m=0 \Leftrightarrow m=0; m=\pm1$.

Với $m=0 \Rightarrow g(x)=(x-1)(f(x)-1)\ge 0, \forall x$ thoả mãn.

Với $m=1 \Rightarrow g(x)=(x-1)(f(2x-1)-1)\ge 0, \forall x$ thoả mãn.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-f(2x-1)+2f(x)-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-8ax^3+2ax^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} 6ax^3=-\infty \end{cases}$

Nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)\left(-f(2x-1)+2f(x)-1\right)\right]=-\infty$

Do đó với $m=-1 \Rightarrow g(x)=(x-1)\left(-f(2x-1)+2f(x)-1\right)\ge 0, \forall x$ không thoả mãn.

Vậy $m\in\{0;1\}$.

**Câu 38: Chọn A**

Quan sát đồ thị có $(1;0)$ là điểm cực trị của $(C_2)$ và là giao điểm của $(C_1)$ với $Ox$.

Do đó $(C_2): y=f(x)$ và $(C_1): y=f'(x)$. Ta có $f(x)=me^x \Leftrightarrow m=e^{-x}f(x)$.

Ta đặt $g(x)=e^{-x}f(x)$.

Khi đó: $g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x}\left[f'(x) - f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a < 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $g(x)$ | −2 | ↗ | 0 | ↘ | $-2e^{-2}$ |

Trong đó $\begin{cases} g(1) = e^{-1} f(1) = 0 \\ g(0) = f(0) = -2 \\ f(2) = e^{-2} f(2) = -2e^{-2} \end{cases}$. Vậy phương trình $m = g(x)$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[0;2] \Leftrightarrow -2e^{-2} \le m < 0 \Leftrightarrow e^{-2} f(2) \le m < 0$.

**Câu 39: Chọn A**

Đặt $u = \sqrt{3x^2 - 18x + 28} = \sqrt{3(x-3)^2 + 1} = \sqrt{3(x-2)(x-4) + 4}$ do đó ta có với $\forall x \in [2;4]$ thì $u \in [1;2]$.

Biến đổi BPT ta được $2021 f(u) - m.u \ge m + 4042 \Leftrightarrow 2021\left[f(u) - 2\right] \ge m(u+1)$.

Ta có $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{2x+1}$ nên $f(u) - 2 = \dfrac{u^2 + 5u + 2}{2u+1} - 2 = \dfrac{u^2 + u}{2u+1}$ do vậy bất phương trình được biến đổi tiếp $\dfrac{2021(u^2+u)}{2u+1} \ge m(u+1) \Leftrightarrow m \le \dfrac{2021u}{2u+1}$.

Lúc này yêu cầu bài toán tương đương $m \le \dfrac{2021u}{2u+1}, \forall u \in [1;2] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{u\in[1;2]} g(u)$.

Xét hàm số $g(u) = \dfrac{2021u}{2u+1}, u \in [1;2]$ ta có $g'(u) = \dfrac{2021}{(2u+1)^2} > 0, \forall u \in [1;2]$ do vậy hàm số $g(u)$ tăng trên đoạn $[1;2]$. Vì vậy $\min\limits_{u\in[1;2]} g(u) = \dfrac{2021u}{2u+1} = g(1) = \dfrac{2021}{3}$.

Kết hợp với $m$ là các số nguyên dương ta được $m \in \{1;2;3;...;673\}$.

Vậy tìm được $673$ số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 40: Chọn B**

Ta có: $f'(x) = \dfrac{-6-m}{(x-3)^2}$.

Nếu $m = -6 \Rightarrow y = 2$.

Nếu $m \ne -6$ khi đó $y' < 0, \forall x \in [-1;2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [-1;2]$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại $x = 1, x = 2$.

Theo bài ra ta có:

$$\max_{[-1;2]} f(x) + \min_{[-1;2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow f(-1) + f(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{-2+m}{-4} + \frac{4+m}{-1} = 8 \Leftrightarrow m = -\frac{46}{5}$$

**Câu 41: Chọn C**

Ta có $f'(x)=3x^2-6x$, nên lập được bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $y=f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $m^2-2m$ | $\searrow$ | $m^2-2m-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | -2 | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=f(\lvert x\rvert)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m^2-2m$ | $\searrow$ | $m^2-2m-4$ | $\nearrow$ | $m^2-2m$ | $\searrow$ | $m^2-2m-2$ | $\searrow$ | $m^2-2m-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ đây ta có $3\max\limits_{[-3;1]} f(|x|)+2\min\limits_{[-3;1]} f(|x|)\le 112 \Leftrightarrow 3.(m^2-2m)+2.(m^2-2m-4)\le 112$

$\Leftrightarrow m^2-2m-24\le 0 \Leftrightarrow -4\le m\le 6$. Vậy có 11 giá trị nguyên của tham số $m$.

**Câu 42: Chọn C**

Ta có $-3\le x\le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}\le x^2-3x+2\le 2 \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right)\le f(x^2-3x+2)\le f(2)$

$\Rightarrow \underset{x\in\left[-3;\frac{1}{2}\right]}{Max} g(x)=g(2)=f(2)+2022=2025$.

**Câu 43: Chọn A**

Ta có : $|x^3-3x+m|\le 16\ \forall x\in[0;3] \Leftrightarrow -16\le x^3-3x+m\le 16\ \forall x\in[0;3]$

$\Leftrightarrow -16-m\le x^3-3x\le 16-m\ \forall x\in[0;3]$

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x$ với $x\in[0;3]$. Khi đó : $\begin{cases}\max\limits_{[0;3]} g(x)=18\\ \min\limits_{[0;3]} g(x)=-2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}18\le 16-m\\ -2\ge -16-m\end{cases} \Leftrightarrow -14\le m\le -2$.

Dấu '$=$' xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} m=-14\\ m=-2\end{array}\right.$. Tổng tất cả các phần tử của $S$ bằng $-16$.

**Câu 44: Chọn A**

Đạo hàm: $f'(x)=(x-1)(3x+2m^2-1)$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+2m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\notin(1;2)\\ x=\dfrac{1-2m^2}{3}\notin(1;2)\,\forall m\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{3}{2}m$ | $\nearrow$ | $m^2+2-\frac{3}{2}m$ |

Từ bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x) = -\dfrac{3}{2}m$ và $\max\limits_{[1;2]} f(x) = m^2 - \dfrac{3}{2}m + 2 > 0\,\forall m$.

Xét phương trình $\max\limits_{[1;2]}|f(x)| + \min\limits_{[1;2]}|f(x)| = \dfrac{9}{4}$ $(1)$.

**Trường hợp 1:** $-\dfrac{3}{2}m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

$(1) \Leftrightarrow m^2 - \dfrac{3}{2}m + 2 - \dfrac{3}{2}m = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m^2 - 3m - \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3+\sqrt{10}}{2} \\ m = \dfrac{3-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$. Do $m < 0$ nên $m = \dfrac{3-\sqrt{10}}{2}$

**Trường hợp 2:** $-\dfrac{3}{2}m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 0$. Phương trình $(1) \Leftrightarrow \max|f(x)| = \dfrac{9}{4}$

Khi $\max|f(x)| = \max\left\{\dfrac{3m}{2}; m^2 - \dfrac{3m}{2} + 2\right\}$.Khi $\max|f(x)| = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3m}{2} = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3m}{2} \ge m^2 - \dfrac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

Khi $\max|f(x)| = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \dfrac{3m}{2} + 2 = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3m}{2} \le m^2 - \dfrac{3m}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3+\sqrt{13}}{4}(ktm) \\ m = \dfrac{3-\sqrt{13}}{4}(ktm) \end{array}\right.$

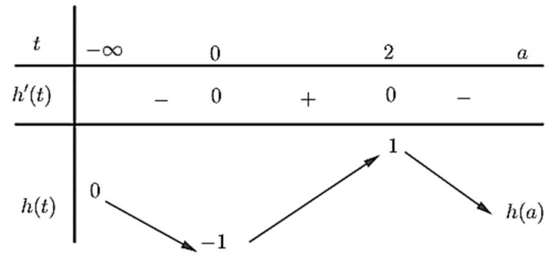
Vậy $S = \dfrac{3-\sqrt{10}}{2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{36} - \sqrt{10}\right)$ nên $a = 36, b = 10$ giá trị $\dfrac{b}{a} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

**Câu 45: Chọn D**

Đặt $f(x) = t$, $t \in (-\infty; a], a > 2$. Ta có $g(x) = \dfrac{2f(x) - 2}{f^2(x) - 2f(x) + 2} = \dfrac{2t-2}{t^2 - 2t + 2}$.

Đặt $h(t) = \dfrac{2t-2}{t^2-2t+2}$, $t \in (-\infty; a], a > 2$. Đạo hàm: $h'(t) = \dfrac{-2\left(t^2 - 2t\right)}{\left(t^2 - 2t + 2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$.




Ta có $h(a)=\dfrac{2a-2}{a^2-2a+2}>0\ \ \forall a>2$ nên từ bảng biến thiên suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\max\limits_{(-\infty;a]} h(t)=1 \Leftrightarrow t=2$ hay $f(x)=2$.

$\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\min\limits_{(-\infty;a]} h(t)=-1 \Leftrightarrow t=0$ hay $f(x)=0$.

Vậy có tất cả 7 giá trị của $x$ sao cho hàm số $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 46: Chọn D**

Ta có: $\min\limits_{[1;2]} f(x)+\max\limits_{[1;2]} f(x)=\dfrac{16}{3}$ .Đặt $h(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ có đạo hàm $h'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=1$ thì $\min\limits_{[1;2]} f(x)=\max\limits_{[1;2]} f(x)=1$

Nếu $m=1$ thì $h'(x)\neq 0, \forall x\neq 1$ . Mặt khác: $h(1)=\dfrac{m+1}{2};h(2)=\dfrac{m+2}{3}$

**Trường hợp 1:** $h(1),h(2)\geq 0$ khi đó $m\geq -1$. PT (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=5$

**Trường hợp 2:** $h(1),h(2)\leq 0$ khi đó $m\leq -2$. PT (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=-\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=\dfrac{-39}{5}$

**Trường hợp 3:** $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+1}{2}\right|\leq\left|\dfrac{m+2}{3}\right| \end{cases}$ khi đó $-\dfrac{7}{5}<m<-1$. PT (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=14$

**Trường hợp 4:** $\begin{cases} h(1).h(2)<0 \\ \left|\dfrac{m+2}{3}\right|<\left|\dfrac{m+1}{2}\right| \end{cases}$ khi đó $-2<m<\dfrac{-7}{5}$. PT (1) $\Leftrightarrow -\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{16}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{35}{3}$

Vậy $m=5, m=\dfrac{-39}{5}$ nên có 2 giá trị của $m$ thỏa mãn.

**Câu 47: Chọn B**

**Cách 1:**

Đặt $t=f\left(x^3+2x\right)$. Vì $x\in[-1;1]$ nên $t\in[-6;5]$. Khi đó, $g(x)=|t+n|$ với $n=3f(m)$.

Do đó, $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=\max\{|n+5|;|n-6|\}=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |n+5|=8 \\ |n+5|\geq|n-6| \end{cases} \Leftrightarrow n=3 \\ \begin{cases} |n-6|=8 \\ |n-6|>|n+5| \end{cases} \Leftrightarrow n=-2 \end{array}\right.$

Với $n=3 \Leftrightarrow 3.f(m)=3 \Leftrightarrow f(m)=1$. Có 5 giá trị của $m$.

Với $n=-2 \Leftrightarrow 3.f\left(m\right)=-2 \Leftrightarrow f\left(m\right)=-\dfrac{2}{3}$. Có $6$ giá trị của $m$.

Vậy có $11$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Cách 2:**

Vì $x\in\left[-1;1\right]$ nên $-3\le x^3+3x\le 3 \Rightarrow -6\le f\left(x^3+3x\right)\le 5$..

Ta có : $\left|f\left(x^3+3x\right)+3f\left(m\right)\right|\le 8, \forall x\in\left[-1;1\right] \Leftrightarrow -8\le f\left(x^3+3x\right)+3f\left(m\right)\le 8,\ \forall x\in\left[-1;1\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x^3+3x\right)\le 8-3f\left(m\right) \\ -8-3f\left(m\right)\le f\left(x^3+3x\right) \end{cases} \forall x\in\left[-1;1\right] \Rightarrow \begin{cases} 5\le 8-3f\left(m\right) \\ -8-3f\left(m\right)\le -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(m\right)\le 1 \\ f\left(m\right)\ge -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Do đó $\max\left|f\left(x^3+3x\right)+3f\left(m\right)\right|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(m\right)=1 \\ f\left(m\right)=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Với $f\left(m\right)=1$, có $5$ giá trị của $m$. Với $f\left(m\right)=\dfrac{-2}{3}$, có $6$ giá trị của $m$.

Vậy có $11$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 48: Chọn D**

Điều kiện: $x\in\left[0;2\right]$.

Ta có: $g\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\left|4x-2\right|+\left|6-4x\right|}{\left|2x-1\right|+\left|2x-3\right|}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\left|2x-1\right|+\left|2x-3\right|}+2$.

Do $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^2=2+2\sqrt{x\left(2-x\right)}\le 4$ vì $\sqrt{x\left(2-x\right)}\le 1, \forall x\in\left[0;2\right]$.

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le 2\le\left|2x-1\right|+\left|3-2x\right| \Rightarrow 2<g\left(x\right)\le 3 \Rightarrow f\left(g\left(x\right)\right)\le 4\ \ \left(1\right)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $3-2x+x^2\in\left[2;3\right], \forall x\in\left[0;2\right]\ \Rightarrow -f\left(3-2x+x^2\right)\le 0\ \ \left(2\right)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $2-\sqrt{4-m^2}\in\left[0;2\right] \Rightarrow f\left(2-\sqrt{4-m^2}\right)\le 4\ \ \left(3\right)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=0$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)\ \Rightarrow h\left(x\right)\le 4-0+4=8 \Rightarrow \max h\left(x\right)=8 \Leftrightarrow x=1; m=0$.

**Câu 49: Chọn D**

Ta có: $\min\limits_{\left[-1;1\right]}\left|f\left(x\right)\right|>\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right|>\dfrac{3}{4}, \forall x\in\left[-1;1\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)>\dfrac{3}{4}, \forall x\in\left[-1;1\right]\ \ \left(1\right) \\ f\left(x\right)<-\dfrac{3}{4}, \forall x\in\left[-1;1\right]\ \ \left(2\right) \end{array}\right.$.

**Trường hợp 1:** $f\left(x\right)>\dfrac{3}{4}, \forall x\in\left[-1;1\right]$.

Nhận thấy $f\left(0\right)=-2<\dfrac{3}{4}$. Nên trường hợp không tìm được $m$.

**Trường hợp 2:** $f\left(x\right)<-\dfrac{3}{4}, \forall x\in\left[-1;1\right]$. Ta có: $f\left(x\right)<-\dfrac{3}{4}, \forall x\in\left[-1;1\right]$.

$$\Leftrightarrow \frac{2x^4 - mx - 4}{x+2} < -\frac{3}{4}, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 8x^4 - 4mx - 16 < -3x - 6, \forall x \in [-1;1]$$

$$\Leftrightarrow 4mx > 8x^4 + 3x - 10, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -10,\ khi\ x = 0 \\ 4m > 8x^3 + 3 - \dfrac{10}{x}, \forall x \in (0;1] \quad (*) \\ 4m < 8x^3 + 3 - \dfrac{10}{x}, \forall x \in [-1;0) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^3 + 3 - \frac{10}{x}$ có $g'(x) = 24x^2 + \frac{10}{x^2} = \frac{24x^4 + 10}{x^2} > 0, \forall x \neq 0$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | $5$ | $\nearrow$ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ $\nearrow$ | $1$ |

Dựa vào bảng biến thiên:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in \mathbb{R}\ khi\ x = 0 \\ 4m > \max\limits_{(0;1]} g(x) \\ 4m < \min\limits_{[-1;0)} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 1 \\ 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{4} \\ m < \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < \frac{5}{4}.$$

**Câu 50: Chọn A**

Đặt $t = 2 - \cos x,\ t \in [1;3]$. Ta có $f(t) = t^3 - 3t$. Và đặt $g_1(t) = \left|t^3 - 3t + m\right|$

Xét hàm số $h(t) = t^3 - 3t + m$ trên đoạn $[1;3]$ có đạo hàm $h'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \quad (tm) \\ t = -1\ (l) \end{array}\right.$.

$h(1) = m - 2,\ h(3) = m + 18.$

**Trường hợp 1:** $m > 2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t) = m - 2 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t) = m + 18 \end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(m+18) + m - 2 = 100 \Leftrightarrow m = 12$ (tm)

**Trường hợp 2:** $m < -18 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t) = -m - 18 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t) = -m + 2 \end{cases}$

Từ giả thiết bài toán ta có : $3(-m+2) - m - 18 = 100 \Leftrightarrow m = -28$ (tm)

**Trường hợp 3:** $-18 \le m \le 2 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g_1(t) = 0 \\ \max\limits_{[1;3]} g_1(t) = \max\left\{|m-2|; |m+18|\right\} \end{cases}$

Nếu $|m-2| \ge |m+18| \Leftrightarrow m \le -8$.

Từ giả thiết bài toán ta có : $3|m-2| = 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{106}{3}\ (l) \\ m = \dfrac{-94}{3}\ (l) \end{array}\right.$ vì $-18 \le m \le -8$

Nếu $|m+18|\ge|m-2|\Leftrightarrow m\ge -8$.

Từ giả thiết bài toán ta có : $3|m+18|=100\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-154}{3}\ (l)\\ m=\dfrac{46}{3}\ (l)\end{array}\right.$ vì $-8\le m\le 2$

Vậy $S=\{12;-28\}\Rightarrow 12-28=-16$

**Câu 51: Chọn A**

$\left[f(x)-x\right].f(x)=x^6+3x^4+2x^2\Leftrightarrow\left[f(x)-x\right].f(x)=(x^3+2x)\left[x^3+2x-x\right],\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\left[f(x)-x^3-2x\right].\left[f(x)+x^3-x\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=x^3+2x\\ f(x)=-x^3+x\end{array}\right.$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại $f(x)=-x^3+x$.

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(1)=3=\min\limits_{[1;2]}f(x)=m;f(2)=12=\max\limits_{[1;2]}f(x)=M$

$3M-m=3.12-3=33$

**Câu 52: Chọn B**

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $f(x)\in[-2;2]$ với $x\in[-2;2]$.

Đặt $t=f(x)+2$ với $x\in[-2;2]\Rightarrow t\in[0;4]$ với $x\in[-2;2]$.

Xét $h(t)=\left||2t+m|-t-1\right|=|2t+m-t-1|=|t+m-1|$.

**Trường hợp 1:** Xét $m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1\Rightarrow \underset{[-2;2]}{Min}\,g(x)=\underset{[0;4]}{Min}\,h(t)=m-1\ge 1\Rightarrow m\ge 2$

**Trường hợp 2:** Xét $\begin{cases} m-1\le 0\\ m+3\ge 0\end{cases}\Rightarrow 0\le m\le 1\ \Rightarrow \underset{x\in[-2;2]}{Min}\,g(x)=\underset{t\in[0;4]}{Min}\,|h(t)|=0\ge 1$

**Trường hợp 3:** Xét $m+3\le 0\Rightarrow m\le -3$.

Ta có $\underset{[-2;2]}{Min}\,g(x)\ge 1\Leftrightarrow m-1\ge 1\Leftrightarrow m\ge 2$ mà $m\in\mathbb{Z},\ m\in[0;20]$ nên $m\in\{2;3;...;20\}$.

Suy ra có 19 giá trị nguyên $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 53: Chọn D**

Đặt $t=\sqrt{x+2}$ với $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ và $x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t^2}\right|$. Khi đó: $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\min\limits_{[1;\sqrt{3}]}g(t)$.

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t^2}$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$

Đạo hàm $h'(t)=\dfrac{4t^2+8mt}{t^4}>0,\forall t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ và $m>0$.

suy ra $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]}h(t)=-2m-4$ và $\max\limits_{[1;\sqrt{3}]}h(t)=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}$

**Điều kiện cần:**

Ta có: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t) = a \in (0;1) \Rightarrow h(1).h(\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow (-2m-4)\left(\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2\sqrt{3}$.

Vì $m$ nguyên dương nên $m \in \{1;2;3\}$.

**Điều kiện đủ:** $m \in \{1;2;3\}$

Khi đó: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t) = \min\left\{g(1); g(\sqrt{3})\right\} = \min\left\{|2m+4|; \left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{3}\right|\right\}$.

Với $m=1$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t) = \min\left\{6; \dfrac{4\sqrt{3}-2}{3}\right\} = \dfrac{4\sqrt{3}-2}{3} > 1$.

Với $m=2$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t) = \min\left\{8; \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}\right\} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3} \in (0;1)$.

Với $m=3$: $\min\limits_{[1;\sqrt{3}]} g(t) = \min\left\{10; \dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}\right\} = \dfrac{4\sqrt{3}-6}{3} \in (0;1)$.

Vậy $m \in \{2;3\}$ nên có 2 giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 54: Chọn C**

Với $m \in \mathbb{N}^*$, $m \le 20$, ta có $x \in [-2;2] \Rightarrow t = f(x) \in [-2;2]$.

Khi đó $h(t) = |2t+m+4| + |t+3m-2| - 2 \ge 0, \forall t \in [-2;2]$

$\Rightarrow h(t) = 2t+m+2+|t+3m-2| \ge 0, \forall t \in [-2;2]$

**Trường hợp 1:** $t \ge 2-3m \Rightarrow h(t) = 3t+4m$

$\begin{cases} 2-3m \in [-2;2] \\ \min\limits_{[-2;2]} h(t) = h(2-3m) = 6-5m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le \dfrac{6}{5} \Rightarrow m = 1$

$\begin{cases} 2-3m \le -2 \\ \min\limits_{[-2;2]} h(t) = h(-2) = 4m-6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \dfrac{3}{2} \Rightarrow m \in \{2;3;...;20\} \Rightarrow m \in \{1;2;...;20\}$

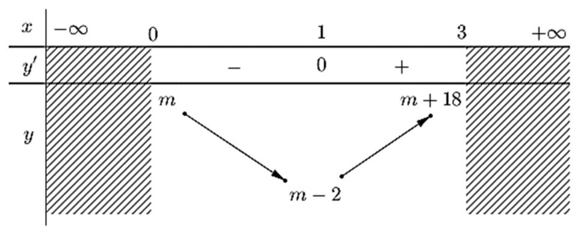
**Trường hợp 1:** $t < 2-3m$ không cần xét nữa vì đã lấy tất cả các giá trị $m$ nguyên thuộc đoạn cho trong đề bài. Vậy tổng các phần tử của $S$ là $1+2+....+20 = \dfrac{(1+20)20}{2} = 210$.

**Câu 55: Chọn A**

Ta có $u_2 = y(2) = |m+2|$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0;3]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.




Ta có BBT của hàm số $f(x)$ trên $[0;3]$ như hình vẽ bên:

**Trường hợp 1:** $m-2>0 \Leftrightarrow m>2$. Ta có

$u_1=\min\limits_{[0;3]} y=m-2$, $u_2=y(2)=|m+2|$, $u_3=\max\limits_{[0;3]} y=m+18$. Để $u_1,u_2,u_3$ lập thành một cấp số nhân thì $u_1.u_3=u_2^{\,2} \Leftrightarrow (m-2)(m+18)=(m+2)^2 \Leftrightarrow 12m=40 \Leftrightarrow m=\dfrac{10}{3}$.

**Trường hợp 2:** $m+18<0 \Leftrightarrow m<-18$. Ta có

$u_1=\min\limits_{[0;3]} y=-m-18$, $u_2=y(2)=|m+2|$, $u_3=\max\limits_{[0;3]} y=2-m$. Để $u_1,u_2,u_3$ lập thành một cấp số nhân thì $u_1.u_3=u_2^{\,2} \Leftrightarrow (2-m)(-m-18)=(m+2)^2 \Leftrightarrow m=\dfrac{10}{3}$.

**Trường hợp 3:** $(m-2)(m+18)\le 0 \Leftrightarrow -18\le m\le 2$. Ta có

$u_1=\min\limits_{[0;3]} y=0$, $u_2=y(2)=|m+2|$, $u_3=\max\limits_{[0;3]} y=\max\{|m-2|;|m+18|\}$

Do $u_1=0$ mà $u_1,u_2,u_3$ lập thành một cấp số nhân nên $u_3=0 \Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]} y=0$. Vậy $m=\dfrac{10}{3}$.

**Câu 56: Chọn B**

Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc toạ độ, suy ra $f(0)=0 \Rightarrow c=0\ (I)$. Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$.

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} (II)$.

Từ $(I)$ và $(II)$ suy ra $a=1; b=-2; c=0 \Rightarrow f(x)=x^4-2x^2$.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-m$ trên đoạn $[0;2]$.

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(0)=-m$; $y(1)=-m-1$; $y(2)=-m+8$. $\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} y=-m+8 \\ \min\limits_{[0;2]} y=-m-1 \end{cases}$.

Theo bài ra $|x^4-2x^2-m|\le 12, \forall x\in[0;2] \Leftrightarrow \max\{|-m-1|;|-m+8|\}\le 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |-m+8|\le 12 \\ |-m+8|\ge|-m-1| \end{cases} \\ \begin{cases} |-m-1|\le 12 \\ |-m-1|\ge|-m+8| \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4\le m\le 20 \\ m\le \dfrac{7}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -13\le m\le 11 \\ m\ge \dfrac{7}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le m\le \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{7}{2}\le m\le 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow -4\le m\le 11$. Suy ra S có 11 phần tử.

# IV. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## KIẾN THỨC: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

❖ **Đường tiệm cận ngang**

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** *(hay tiệm cận ngang)* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

❖ **Đường tiệm cận đứng**

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

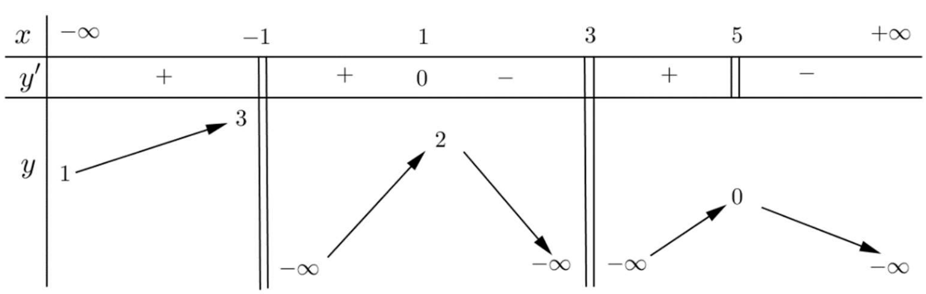
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

❖ **Lưu ý:**

- Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0;\ ad-bc \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

## ĐỀ BÀI

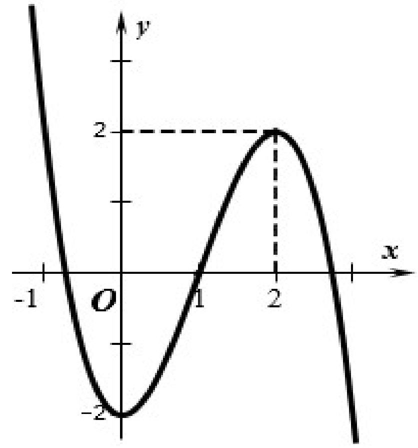
**Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ và có bảng biến thiên như sau




Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2020+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{2f(x)-f^2(x)}}$ có tổng số tất cả các đường tiện cận đứng và đường tiệm cận ngang là

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $6$. **D.** $3$.

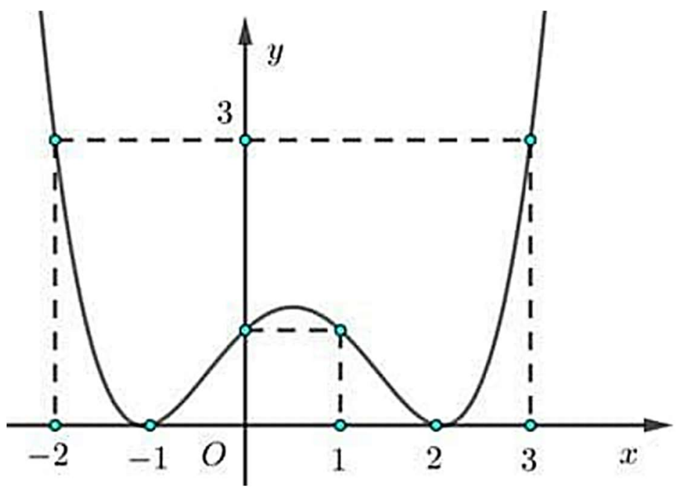
**Câu 2:** Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.




Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $\left[-100;100\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1+mx^2}}{f\left(x\right)-m}$ có đúng hai đường tiệm cận?

**A.** $100$. **B.** $99$. **C.** $2$. **D.** $196$.

**Câu 3:** Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)^4.(x-3).\left(x^3+1\right)}{f\left(f(x)-1\right)}$ là




**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 4:** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tìm tham số $a$ để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của $\left(C\right)$ cách một tiệm cận ngang một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$.

**A.** $a=2$. **B.** $a=3$. **C.** $a>0$. **D.** $a=1$.

**Câu 5:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ m>0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>-1 \end{array}\right.$. **C.** $-5\le m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m>-1 \end{array}\right.$.

**Câu 6:** Cho số thực $a>0$. Gọi $(C)$ là đồ thị của hàm số

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{\left(\sqrt{ax^2-3x}+2x\right)(x-3)} & khi\ \ x<0\\ \left(\dfrac{2x+4}{2x+1}\right)^{\frac{3x+2}{4}} & khi\ \ x\ge 0\end{cases}.$$

Biết rằng các đường tiệm cận của $(C)$ đều nằm phía trên trục Ox, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường tiệm cận của $(C)$ và đường thẳng $y=x$ có dạng $S=\frac{1}{2}e^m-n$. Tính $a\cdot m\cdot n$

**A.** $4$. **B.** $32$. **C.** $-8$. **D.** $8$.

**Câu 7:** Có hai giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+\sqrt{x^2-2x+3}}{2x-1}$ có một tiệm cận ngang là $y=1$. Tổng hai giá trị này bằng?

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 8:** Tính tổng bình phương tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng.

**A.** 35. **B.** 40. **C.** 42. **D.** 45.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị $(C)$. Tồn tại $a\in\mathbb{R}$ để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận ngang đó cách đường tiếp tuyến của $(C)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$. Giá trị của $a$ thuộc tập nào trong các đáp án sau?

**A.** $(3;5)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(0;5)$.

**Câu 10:** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

**Câu 11:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng 4 đường tiệm cận ?

**A.** $8$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** Vô số.

**Câu 12:** Gọi $(C)$ là đồ thị hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-1} & \text{khi } x>1\\ \sqrt{4x^2+2x+1}+2x+2020 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Gọi $S=\{a\in\mathbb{R}\,|\,x=a$ hoặc $y=a$ là tiệm cận của $(C)\}$. Tính tổng các phần tử của $S$.

**A.** $2022$. **B.** $2020$. **C.** $\frac{4045}{2}$. **D.** $\frac{4043}{2}$.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{2\right\}$, liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\log f\left(x\right)$ là

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 14:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

Với giá trị nào của $m$ thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f^2\left(x\right)-m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3?

**A.** $0\le m\le 1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $0<m\le 1$. **D.** $0\le m<1$.

**Câu 15:** Đồ thị hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x\left(x-2\right)^2} & neu\ \ x>2\\ \sqrt{4x^2+x+1}+2x & \text{neu}\ \ x\le 2\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 16:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng

**A.** $\left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m>0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-5\\ m>-1\end{array}\right.$. **C.** $-5\le m\le -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m>-1\end{array}\right.$.

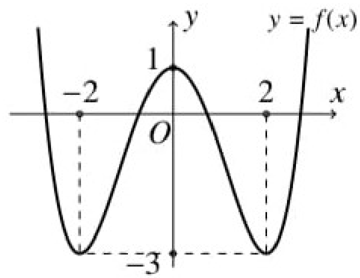
**Câu 17:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để đồ thị hàm số sau có đúng hai đường tiệm cận $y=\dfrac{6x-3}{\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)}$

**A.** $1$. **B.** Vô số **C.** $\varnothing$. **D.** $2$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m-1\right)x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-6;6\right)$ để đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 19:** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số đường tiệm cận đứng của hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-4\right).\left(x^2+2x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}$ là




**A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

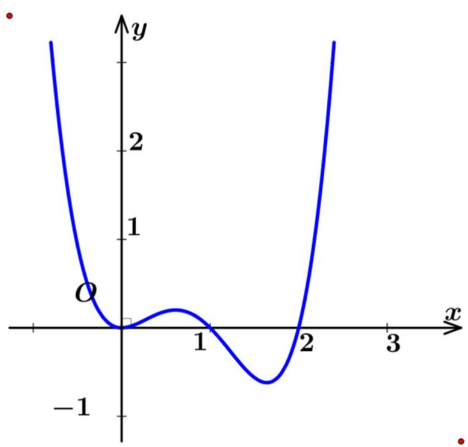
**Câu 20:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ của tham số $m$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

**A.** 8. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

**Câu 21:** Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{20+\sqrt{6x-x^2}}{\sqrt{x^2-8x+2m}}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng là

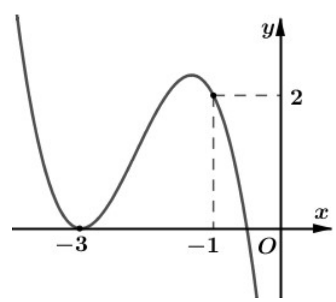
**A.** 12. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 7.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f\left(x\right)-2\right](x^2-1)(x^2-4)(2x+1)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?




**A.** 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

**Câu 23:** Cho hàm bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?




**A.** 2. **B.** 3.

**C.** 4. **D.** 6.

**Câu 24:** Cho hàm số $y=\dfrac{ax^3+bx^2-3x+c}{(x-2)^3}$ có đồ thị $(C)$. Biết rằng tồn tại $a,b,c\in\mathbb{R}$ để đồ thị hàm số $(C)$ không có tiệm cận đứng. Tính biểu thức $S=4a+2b-3c$.

**A.** $\dfrac{23}{9}$. **B.** $4$. **C.** $-4$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

**Câu 25:** Tìm $m$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx+\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+x}}$ có $2$ đường tiệm cận đứng và $2$ đường tiệm cận ngang tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng $2$.

**A.** $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

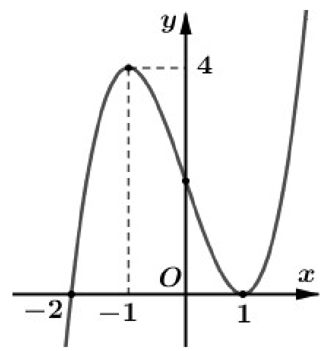
**Câu 26:** Gọi $m,n$ lần lượt là số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1}\right)}{x^2-4}$. Khi đó $m+n$ bằng

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 27:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để $m$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2019x+2020}-\sqrt{4038}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $2019$. **D.** $2020$.

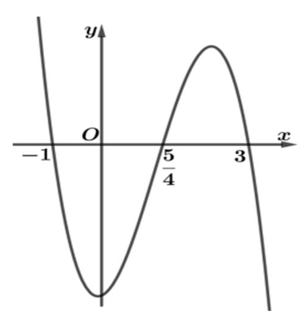
**Câu 28:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới




Tìm m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

**A.** $m\le 0$. **B.** $-2\le m\le 0$. **C.** $-3<m<-1$. **D.** $0<m<4$.

**Câu 29:** Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\ \ (m,n,p,q\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị $m$ nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ là $2$.

**A.** $11$. **B.** $10$. **C.** $9$. **D.** $20$.

**Câu 30:** Cho $f\left(x\right)$ là hàm bậc 4 và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(x\right)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f\left(x\right)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^4-2x^2}{f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)-3}$ có mấy đường tiệm cận?

.

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Câu 31:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m}\left(C\right)$.Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $\left(-10;10\right)$ của tham số $m$ để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là nhiều nhất?

**A.** $20$. **B.** $15$. **C.** $16$. **D.** $18$.

**Câu 32:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^3-3x^2+(m+2)x-m}$. Tìm điều kiện của tham số $m$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

**A.** $m\le 1$. **B.** $\begin{cases} m\le 1 \\ m\ne 0 \end{cases}$. **C.** $m<1$. **D.** $\begin{cases} m<1 \\ m\ne 0 \end{cases}$.

**Câu 33:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Gọi tập $S$ là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{f^2\left(x\right)-mf\left(x\right)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của tập $S$ là:

**A.** 9. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 8.

**Câu 34:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{2x+3}\left(m\ne-\dfrac{3}{2}\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)$ là 1 điểm bất kỳ thuộc $\left(C\right)$. Gọi $A,B$ lần lượt là khoảng cách từ $M$ tới các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của $\left(C\right)$. Biết diện tích $\Delta MAB$ bằng 1. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** $m\in\left\{\dfrac{5}{2};-\dfrac{11}{2}\right\}$. **B.** $m\in\left\{-\dfrac{5}{2};-\dfrac{11}{2}\right\}$. **C.** $m\in\left\{-\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left\{\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right\}$.

**Câu 35:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị $(C)$. Giả sử $M(x_M;y_M)$ là điểm thuộc $(C)$ thỏa mãn tổng khoảng cách từ $M$ tới trục hoành và đường tiệm cận đứng của $(C)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x_M+y_M$ bằng

**A.** 2. **B.** $-2$. **C.** 1. **D.** $-1$.

**Câu 36:** Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+3}{x-m}$ có đồ thị $(C)$ và $I$ là giao điểm của hai đường tiệm cận của $(C)$.Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho tiếp tuyến tại điểm $M$ trên đồ thị $(C)$ cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm $A,B$ và tam giác $IAB$ có diện tích bằng $64$.Tổng các phần tử của tập hợp $S$ là

**A.** $\sqrt{58}$. **B.** $2\sqrt{58}$. **C.** $-2\sqrt{58}$. **D.** $0$.

**Câu 37:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị $(C)$ và $I$ là giao điểm của hai đường tiệm cận. Giả sử $M(x_0;y_0)$ là điểm trên đồ thị $(C)$ có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến tại $M$ với $(C)$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm $A,B$ thỏa mãn $IA^2+IB^2=40$. Giá trị của biểu thức $P=x_0^2+y_0^2+x_0y_0$ bằng

**A.** $8$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $7$.

**Câu 38:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là $(C)$. Gọi $I$ là giao điểm hai đường tiệm cận và $M(x_0;y_0)$ là điểm nằm trên $(C)$ với $x_0>0$. Biết tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm $P$ và $Q$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $IPQ$ lớn nhất. Tính tổng $x_0+y_0$.

**A.** $x_0+y_0=0$. **B.** $x_0+y_0=2+2\sqrt{3}$. **C.** $x_0+y_0=2$. **D.** $x_0+y_0=2\sqrt{3}$.

**Câu 39:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị là $(C)$. Gọi $I$ là giao điểm hai đường tiệm cận và $M$ là điểm nằm trên $(C)$ có hoành độ lớn hơn 1. Tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm $A$ và $B$. Hoành độ của điểm $M$ thuộc khoảng nào sau đây để $P=IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

**A.** $(-4;1)$. **B.** $(-\infty;-4)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(1;4)$.

**Câu 40:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{3-x}$ có đồ thị $(C)$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là một điểm thuộc $(C)$ sao cho tổng khoảng cách từ $M$ đến hai đường tiệm cận của $(C)$ là nhỏ nhất. Tính $2x_0-y_0$ biết $y_0<0$.

**A.** $2x_0-y_0=4$. **B.** $2x_0-y_0=2$. **C.** $2x_0-y_0=6$. **D.** $2x_0-y_0=10$.

**Câu 41:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ có đồ thị là $(C)$. Gọi $I$ là giao điểm của hai đường tiệm cận và $M(x_0;y_0)$ là một điểm thuộc $(C)$. Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của $(C)$ lần lượt tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $IA^2+IB^2=32$. Tìm tọa độ điểm $M$ biết $y_0>0$.

**A.** $(-5;3)$. **B.** $\left(2;\frac{1}{5}\right)$. **C.** $\left(3;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-1;-1)$.

**Câu 42:** Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị $(C)$. Có bao nhiêu điểm $M$ thuộc $(C)$ sao cho tổng khoảng cách từ $M$ đến hai đường tiệm gấp 2 lần tích khoảng cách từ $M$ đến hai đường tiệm cận của $(C)$?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Câu 43:** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị $(C)$. Gọi $I$ là giao điểm hai đường tiệm cận của $(C)$. Có bao nhiêu điểm trên $(C)$ có hoành độ âm sao cho tam giác $OMI$ có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ biết $O$ là gốc tọa độ?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)=\frac{\sqrt{\left|x^2-x\right|}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+m}}$ có đồ thị $(C)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để $(C)$ có đúng $4$ đường tiệm cận?

**A.** $18$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $17$.

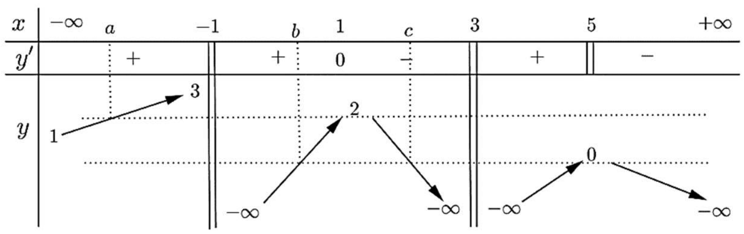
**Câu 45:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(0;2021]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{x^{2022}+\sqrt{x-2}}{x^2-(m-2)x+2}$ có đúng một tiệm cận đứng?

**A.** $2021$. **B.** $2015$. **C.** $2017$. **D.** $2016$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.B | 2.A | 3.A | 4.B | 5.B | 6.D | 7.C | 8.C | 9.C | 10.D |
| 11.B | 12.C | 13.D | 14.A | 15.B | 16.C | 17.C | 18.A | 19.B | 20.D |
| 21.C | 22.A | 23.C | 24.D | 25.B | 26.A | 27.A | 28.C | 29.A | 30.A |
| 31.B | 32.B | 33.C | 34.B | 35.D | 36.C | 37.B | 38.B | 39.B | 40.C |
| 41.D | 42.C | 43.C | 44.D | 45.D | 46.C | 47.B | 48.D | 49.A | 50.C |

**Câu 1: Chọn B**




Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq \{-1;3\} \\ f(x) > 0 \\ 2f(x) - f^2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \{-1;3\} \\ f(x) \in (0;2) \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty;a) \cup (b;c) \setminus \{1\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{f(x)\to 1^+} \dfrac{2020+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{2f(x)-f^2(x)}} = 2021 \Rightarrow y = 2021$ là TCN của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \lim\limits_{f(x)\to 2^-} \dfrac{2020+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2-f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x\to b^+} g(x) = \lim\limits_{f(x)\to 0^+} \dfrac{2020+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2-f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{f(x)\to 2^-} \dfrac{2020+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2-f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x\to c^-} g(x) = \lim\limits_{f(x)\to 0^+} \dfrac{2020+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2-f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có $5$ đường tiệm cận.

**Câu 2: Chọn B**

Với $m < 0$. Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x)-m}$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có TCN.

Khi đó để đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận thì phương trình $f(x) - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq m < 0$. Do $m$ là giá trị nguyên nên ta xét:

Với $m = -2$. Hàm số ban đầu trở thành $y = \dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{f(x)+2}$; $\sqrt{1-2x^2}$ có nghĩa khi $x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

.

Phương trình $f(x)+2=0$ có hai nghiệm $x=0\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ và $x=d>2$. Do đó đồ thị hàm số chỉ có một TCĐ là $x=0$.

Với $m=-1$. Hàm số ban đầu trở thành $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{f(x)+1}$; $\sqrt{1-x^2}$ có nghĩa khi $x\in[-1;1]$.

Phương trình $f(x)+1=0$ có ba nghiệm $x=a\in(-1;0)$; $x=b\in(0;1)$ và $x=c>2$. Do đó đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{f(x)+1}$ có 2 đường TCĐ là $x=a$ và $x=b$. Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Với $m=0$. Hàm số ban đầu trở thành $y=\frac{1}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ nên đồ thị hàm số có TCN là $y=0$.

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm nên đồ thị hàm số có ba TCĐ.

Với $m>0$. Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x)-m}=0$ nên đồ thị hàm số có TCN là $y=0$.

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi phương trình $f(x)-m=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m>2$.

Do $m$ là giá trị nguyên nên $m\in\{3,4,5,...,100\}$. Trường hợp này có $98$ giá trị của $m$ thỏa mãn.

Kết luận: Có tất cả $99$ giá trị của $m$ cần tìm.

**Câu 3: Chọn B**

Ta có: $f(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-1=-1\\f(x)-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=3\end{array}\right.$.

$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\text{ (boi 4)}\\x=2\text{ (boi 4)}\end{array}\right.$; $f(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\text{ (kep)}\\x=3\text{ (kep)}\end{array}\right.$

Ta lại có $(x^2-4)^4(x-3)(x^3+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\\x=3\\x=-1\end{array}\right.$. Trong đó $x=-2$ và $x=2$ là nghiệm bội 4.

$x=3$ và $x=-1$ là nghiệm đơn.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và $x=3$.

Bậc của $f(f(x)-1)=16\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Suy ra hàm số $y=\frac{(x^2-4)^4(x-3)(x^3+1)}{f(f(x)-1)}$ có 2 TCĐ và 1 TCN.

**Câu 4: Chọn D**

Ta có: $y'=\frac{\sqrt{ax^2+1}-(x+1).\frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1}=\frac{ax^2+1-ax^2-ax}{(ax^2+1)\sqrt{ax^2+1}}=\frac{1-ax}{(ax^2+1)\sqrt{ax^2+1}}$

Với $a \le 0$ không có TCN. Với $a > 0$ có 2 TCN: $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Tiếp tuyến song song với TCN suy ra $y' = 0$. Suy ra $x_0 = \dfrac{1}{a}$ là hoành độ tiếp điểm

Khi đó tiếp tuyến là $y = y\left(\dfrac{1}{a}\right) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{a}}$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có $\left|\sqrt{1+\dfrac{1}{a}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right| = \sqrt{2} - 1$. Thử đáp án chọn $a = 1$

**Câu 5: Chọn D**

Điều kiện xác định $x^3 + 3x^2 + m + 1 \ne 0$. Đặt $g(x) = x^3 + 3x^2 + m + 1$.

**Ttường hợp 1:** $g(1) = 0 \Leftrightarrow m = -5$.

Khi đó $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2}$

+ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{1}{9}$ suy ra đường thẳng $x = 1$ không là TCĐ.

+ $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 2$ là TCĐ. Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng $x = 2$.

**Trường hợp 2:** $g(1) \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -5$

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^3 + 3x^2 + m + 1}$ có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^3 + 3x^2 + m + 1 = 0$ có đúng một nghiệm $x \ne 1 \Leftrightarrow m = -\left(x^3 + 3x^2 + 1\right)$ có đúng một nghiệm $x \ne 1$

Xét hàm số: $f(x) = -\left(x^3 + 3x^2 + 1\right)$

Ta có $f'(x) = -\left(3x^2 + 6x\right)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\left(3x^2 + 6x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | -2 | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | -5 | ↘ | -1 | ↗ | $+\infty$ |

Để phương trình có đúng một nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -\left(x^3 + 3x^2 + 1\right)$ tại một điểm duy nhất. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số có đúng một TCĐ. Kết luận: $\left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

**Câu 6: Chọn B**

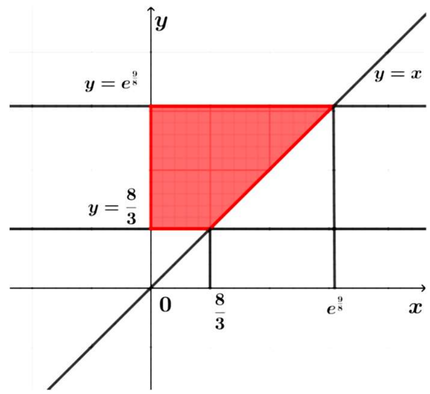
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x+1}\right)^{\frac{3x+2}{4}} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{9t+1}{8}} = e^{\frac{9}{8}}$

Nếu $a \neq 4$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0 \Rightarrow$ loại $a \neq 4$.

Nếu $a = 4$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\left(\sqrt{4x^2-3x}-2x\right)}{-3x(x-3)} = \dfrac{8}{3}$

$\lim\limits_{x\to0^-} y = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-1}{\left(\sqrt{4x^2-3x}+2x\right)(x-3)} = +\infty$.

Vậy $(C)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{8}{3}; y=e^{\frac{9}{8}}$, và có 1 tiệm cận đứng là $x=0$.




Ta có $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{3}+e^{\frac{9}{8}}\right)\left(e^{\frac{9}{8}}-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{9}{4}}-\dfrac{64}{9}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{9}{4}}-\dfrac{32}{9}$. Vậy $a.m.n = 4.\dfrac{9}{4}.\dfrac{32}{9} = 32$.

**Câu 7: Chọn A**

Khi $x \to +\infty$:

$$y=\frac{mx+|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{mx+x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{x\left(m+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{m+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{m+1}{2} = 1 \Rightarrow m = 1$.

Khi $x \to -\infty$:

$$y=\frac{mx+|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{mx-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{x\left(m-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{m-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \dfrac{m-1}{2} = 1 \Rightarrow m = 3$. Vậy tổng hai giá trị $m$ bằng 4.

**Câu 8: Chọn C**

Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$

Để đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng thì có những trường hợp sau

**Trường hợp 1:** $x^2+2mx+3m+4=0$ có nghiệm là $-1$

Khi đó: $1-2m+3m+4=0 \Leftrightarrow m=-5$

**Trường hợp 2:** $x^2+2mx+3m+4=0$ có nghiệm kép

Khi đó $\Delta'=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4 \end{array}\right.$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn và tổng bình phương là 42

**Câu 9: Chọn D**

Nhận xét:

Khi $a=0$ thì $y=x+1$: Hàm số không có tiệm cận.

Với $a<0$, hàm số có tập xác định $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{-a}};\frac{1}{\sqrt{-a}}\right)$, không tồn lại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y$, suy ra đồ thị hàm số không tồn tại tiệm cận ngang

Với $a>0$, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}$

Như vậy, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{\sqrt{a}}$ và $y=-\frac{1}{\sqrt{a}}$

$$y'=\left(\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}\right)'=\frac{1-ax}{\left(ax^2+1\right)\sqrt{ax^2+1}}$$

Tiếp tuyến song song với tiệm cận ngang nên $y'\left(x_o\right)=0$ suy ra $x_0=\frac{1}{a}; y_0=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{a};\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)$ là: $y=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

Khoảng cách giữa tiệm cận ngang và tiếp tuyến của $(C)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$ nên

**Trường hợp 1.** $\left|\sqrt{1+\frac{1}{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\ (tm) \\ a=0\ (ktm) \end{array}\right.$

**Trường hợp 2.** $\left|\sqrt{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1$. Vậy $a=1$

**Câu 10: Chọn A**

Hàm số $y=\frac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b=0$ có nghiệm kép $x=1$ (1)

Ta có $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}+a$. PT$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{3.1+1}+a+b=0 \\ \frac{3}{4}+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-\frac{5}{4} \\ a=-\frac{3}{4} \end{array}\right.$

Vậy $a-b=\frac{1}{2}$.

**Câu 11: Chọn B**

Nhận xét: Đồ thị hàm số đã cho có tối đa 2 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

Vì vậy để đồ thị hàm số có đúng 4 đường tiệm cận thì đồ thị có đủ 2 tiệm cận ngang và 2 tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang

Điều kiện xác định: $mx^2-8x+2>0$

Với $m=0$ thì $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ không có đủ 4 đường tiệm cận. Vậy $m=0$ không thỏa mãn.

Với $m<0$ thì từ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang vì không thỏa mãn điều kiện về tập xác định.

Với $m>0$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\pm\sqrt{m-\dfrac{8}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Tiệm cận đứng

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2-8x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=16-2m>0\\ f(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<8\\ m\neq 6\end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận với $m\in(0;8)\setminus\{6\}$.

**Câu 12: Chọn B**

Ta có

+)

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^4+x^3-1}{(x-1)\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\frac{1}{2}$$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+2020\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}-2x}+2020\right)=-\dfrac{1}{2}+2020$

+) $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{(x-1)\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\dfrac{3}{2}$

+) $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+2020\right)=2022+\sqrt{7}$.

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2};y=-\dfrac{1}{2}+2020$.

Vậy tổng các phần tử của $S$ là $\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}+2020\right)=2020$.

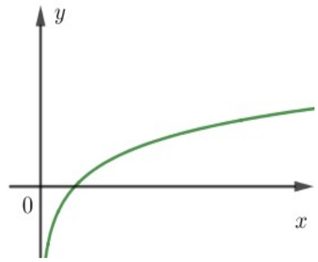
**Câu 13: Chọn B**

Xét hàm số $y=\log f(x)$. Hàm số xác định khi $f(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\ x\neq 1\end{cases}$.

Khi $x\to-\infty$ thì $f(x)\to 1$ suy ra $y=\log f(x)\to 0$

Khi $x\to 1$ thì $f(x)\to 0^+$ suy ra $y=\log f(x)\to-\infty$

Khi $x\to 2^-$ thì $f(x)\to+\infty$ suy ra $y=\log f(x)\to+\infty$




Vậy hàm số có tất cả ba đường tiệm cận trong đó có một đường tiệm cận ngang $y=0$ và hai đường tiệm cận đứng $x=1$ và $x=2$.

**Câu 14: Chọn B**

**Trường hợp 1:** $m=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{f^2(x)}$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f^2(x)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f^2(x)} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.}$$

Khi $f(x)=0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nên $m=0$ không thỏa mãn.

**Trường hợp 2:** $m\neq 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f^2(x)-m} = -\dfrac{1}{m} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f^2(x)-m} = -\dfrac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \text{ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang } y=-\dfrac{1}{m}.$$

Vậy để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f^2(x)-m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng

3

thì phương trình $f^2(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt.

$m<0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$m>0 \Rightarrow f^2(x)=m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{m} \ (1) \\ f(x)=-\sqrt{m} \ (2) \end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $(2)$ vô nghiệm, suy ra $(1)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<\sqrt{m}<1 \Leftrightarrow 0<m<1$. Vậy $0<m<1$.

**Câu 15: Chọn C**

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left( \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1-2\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2} \right) = 0$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2} = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$\lim_{x\to2^+} y = \lim_{x\to2^+}\frac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} = \lim_{x\to2^+}\frac{x^4-4x-8}{x(x-2)^2\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)} = \lim_{x\to2^+}\frac{x^3+2x^2+4x+4}{x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)}$$

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+}\left(x^3+2x^2+4x+4\right)=28 \\ \lim\limits_{x\to2^+}\left(x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)\right)=0 \text{ va } x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)>0,\ \forall x>2 \end{cases}$

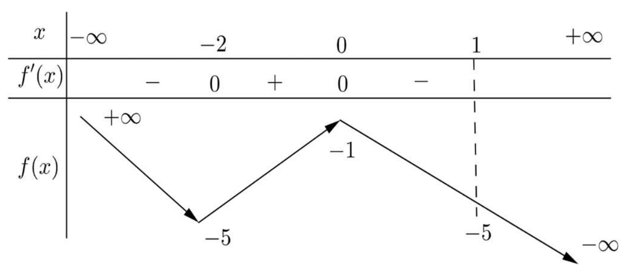
Nên $\lim\limits_{x\to2^+} y = +\infty \Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy đồ thị hàm số trên có tất cả 3 đường tiệm cận

**Câu 16: Chọn D**

Ta có $x^3+3x^2+m+1=0 \Leftrightarrow m=-x^3-3x^2-1\ (1)$.

Xét hàm số $y=f(x)=-x^3-3x^2-1$ có $y'=-3x^2-6x, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.




Đồ thị hàm số đã cho có đúng một đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có đúng một nghiệm và nghiệm đó khác $1$ hoặc có một nghiệm đơn $x=1$ và một nghiệm kép khác 1.

Dựa vào bảng biến thiên trên suy ra $\left[\begin{array}{l} m\le-5 \\ m>-1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

**Câu 17: Chọn C**

Với $m=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{9x^2+1}$ không có tiện cận đứng $\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn.

Với $m\ne0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Yêu cầu bài toán tương đương tìm $m$ để đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

Xét: $\left(mx^2-6x+3\right)\left(9x^2+6mx+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x)=mx^2-6x+3=0(1) \\ g(x)=9x^2+6mx+1=0(2) \end{array}\right.$

Ta có: $\begin{cases} \Delta_1=9-3m \\ \Delta_2=9m^2-9 \\ h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{m}{4} \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=3m+\frac{13}{4} \end{cases}$

Với $m<3$ thì $\begin{cases}\Delta_1>0\\ h\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0\end{cases}$ nên phương trình $(1)$ có $2$ nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$. Khi đó, đồ thị hàm số có ít nhất $2$ tiệm cận đứng.

Với $m\geq 3$ thì $\begin{cases}\Delta_2>0\\ g\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0\end{cases}$ nên phương trình $(2)$ có $2$ nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$. Khi đó đồ thị hàm số có ít nhất $2$ tiệm cận đứng. Vậy không tồn tại $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 18: Chọn A**

Ta dễ dàng tìm được đồ thị có một tiệm cân ngang: $y=0$

Xét

$$x^3-3mx^2+(2m-1)x+m=0\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2-(3m-1)x-m\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-(3m-1)x-m=0\,(*)\end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì đồ thị hàm số sẽ có 2 tiệm cận đứng, suy ra có nghiệm thỏa mãn một trong các trường hợp sau:

**Trường hợp 1**: có nghiệm kép $x_0\notin\{1;3\}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=9m^2-2m+1=0\\ -4m+2\neq 0\\ -10m+12\neq 0\end{cases}$

**Trường hợp 2**: có 2 nghiệm phân biệt ( $x_1=1,\ x_2\neq 3$ ) $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=9m^2-2m+1>0\\ -4m+2=0\\ -10m+12\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

**Trường hợp 3**: có 2 nghiệm phân biệt ( $x_1\neq 1,\ x_2=3$ ) $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=9m^2-2m+1>0\\ -4m+2\neq 0\\ -10m+12=0\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{6}{5}$

Do yêu cầu bài toán lấy giá trị nguyên của $m\in(-6;6)$ suy ra không tìm được $m$ thỏa mãn

Vậy không có giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 19: Chọn A**

$$y=\frac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}=\frac{x(x+2)^2(x-2)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}.$$

Xét $x(x+2)^2(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x=2\end{array}\right.$.

Ta có: $[f(x)]^2+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\ f(x)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\,(a<-2)\\ x=0\\ x=b\,(b>2)\\ x=2\\ x=-2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0;x=\pm 2$ là các nghiệm kép.

Vì $y=f(x)$ là hàm bậc bốn nên đa thức $[f(x)]^2+2f(x)-3$ có bậc là 8.

Vậy $y=\dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{k^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-a)(x-b)}$ với $k>0$.

Vậy hàm số có 4 tiệm cận đứng là $x=0;x=2;x=a;x=b$.

**Câu 20: Chọn B**

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang.

Ta có $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0 \Leftrightarrow x(x^2-3mx+2m^2)+x-m=0$

$$\Leftrightarrow x(x-m)(x-2m)+x-m=0 \Leftrightarrow (x-m)(x^2-2mx+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0 \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận thì phương trình

$g(x)=x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ phải có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Suy ra $m\neq 3$ và phương trình $h(x)=x^2-2mx+1$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $m$ và 3.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m\neq 3 \\ \Delta=m^2-1>0 \\ h(3)=9-6m+1\neq 0 \\ h(m)=-m^2+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{5}{3} \\ m\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{5}{3} \\ m\neq 3 \end{cases}.$$

Do $m$ nhận giá trị nguyên và $m$ thuộc đoạn $[-6;6]$ nên $m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;2;4;5;6\}$.

Vậy có 9 giá trị thỏa mãn.

**Câu 21: Chọn D**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 6x-x^2\geq 0 \\ x^2-8x+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 6 & (1) \\ x^2-8x+2m>0 & (2) \end{cases}$$

Từ yêu cầu bài toán suy ra phương trình $x^2-8x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;6]$, hay phương trình $2m=-x^2+8x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;6]$.

Xét hàm số $f(x)=-x^2+8x$ có BBT.

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $16$ | $\searrow$ | $12$ |

Từ bảng biến thiên $(*)\Leftrightarrow 12\leq 2m<16 \Leftrightarrow 6\leq m<8$.

Thử lại:

Khi $m=6$: phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1=2\in(0;4) \\ x_2=6 \end{array}\right.$

Khi đó, từ; suy ra TXĐ của hàm số: $D=[0;2)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_2^{\pm}} y$, do đó đường thẳng $x=x_2$ không phải là tiệm cận đứng. Vậy $m=6$ không thỏa mãn.

Khi $6<m<8$: phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2\ (x_1<x_2)$: $\begin{cases} x_1\in(0;4) \\ x_2\in(4;6) \end{cases}$

Khi đó, từ; suy ra TXĐ của hàm số: $D=[0;x_1)\cup(x_2;6]$, suy ra $\lim\limits_{x\to x_1^-} y=+\infty; \lim\limits_{x\to x_2^+} y=+\infty$ nên đồ thị có hai tiệm cận đứng. Vậy $6<m<8$ thỏa mãn, và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=7$. Kết luận: $m=7$.

**Câu 22: Chọn B**

Ta có $y=\dfrac{f(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x^2-1)(x^2-4)(2x+1)}=\dfrac{kx^2(x-1)(x-2)\sqrt{x^2+x}}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)(2x+1)}$

$=\dfrac{kx^2\sqrt{x^2+x}}{(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)(x+2)(2x+1)}$

Với $(-1<\alpha<0, 2<\beta<3)$. Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2+x}$: $\left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -1 \end{array}\right.$.

Xét phương trình $(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)(x+2)(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha (KTM) \\ x=\beta \\ x=-1 \\ x=-2 \\ x=\dfrac{-1}{2} (KTM) \end{array}\right.$.

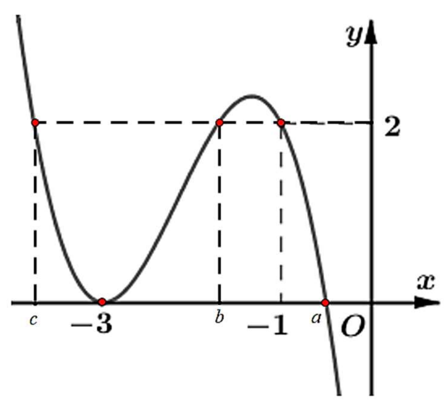
$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{kx^2\sqrt{x(x+1)}}{(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)(x+2)(2x+1)}=+\infty$. Suy ra $x=-1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{kx^2\sqrt{x(x+1)}}{(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)(x+2)(2x+1)}=+\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to \beta^+}\dfrac{kx^2\sqrt{x(x+1)}}{(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)(x+2)(2x+1)}=+\infty$ nên $x=\beta$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng.

**Câu 23: Chọn C**




$y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.k(x+3)^2(x-a).k(x-b)(x-c)(x+1)}$

$=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x.k(x+3)(x-a).k(x-b)(x-c)}$

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2+x}:\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x\le -1\end{array}\right.$. Với $f(x)=0\Rightarrow x=-3$ hoặc $x=a$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{k^2x.(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$. Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{k^2x.(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=-\infty$ nên $x=-3$ là tiệm cận đứng.

Với $f(x)=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=b(-3<b<-1)\\x=c(c<-3)\end{array}\right.$.

Ta có:

$$\lim_{x\to b^+}\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=\lim_{x\to b^+}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{k^2x.(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$$

nên $x=b$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to c^+}\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=\lim_{x\to c^+}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{k^2x.(x+3)(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$$

nên $x=c$ là tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

**Câu 24: Chọn C**

TXĐ: $D=R\,|\,\{2\}$. Đặt $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$

Để đồ thị hàm số $(C)$ không có tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)=0$ nhận $x=2$ nghiệm bội 3 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(2)=0\\f'(2)=0\\f''(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8a+4b+c=6\\12a+4b=3\\12a+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4}\\b=\dfrac{3}{2}\\c=2\end{cases}$. Vậy $S=4a+2b-3c=-4$

**Câu 25: Chọn A**

Tập xác định: $D=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m-\sqrt{1^2+\dfrac{3}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1^2+\dfrac{1}{x}}}=1-m$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{m+\sqrt{1^2+\dfrac{3}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1^2+\dfrac{1}{x}}}=m+1$$

Suy ra để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang thì $m+1\ne 1-m\Leftrightarrow m\ne 0$

$\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{mx+\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-}y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{mx+\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+x}}=\begin{cases}+\infty & khi\ m<1\\-\infty & khi\ m>1\end{cases}$

Vậy khi $m\ne 0, m\ne 1$ thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=m+1; y=1-m$ và

$2$ đường tiệm cận đứng là $x=0; x=-1$. Để $2$ đường tiệm cận đứng và $2$ đường tiệm cận ngang

tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng $2$ thì $1.2|m|=2 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Đối chiếu điều kiện $m=-1$.

**Câu 26: Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq \sqrt{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Tiệm cận ngang: $\dfrac{x\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1}\right)}{x^2-4}=\dfrac{x|x|\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}=\dfrac{x^2\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{4}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{4}{x}}=1$$

Suy ra đồ thị hàm số có $1$ tiệm cận ngang $y=1$

Tiệm cận đứng:

**Điều kiện cần**: Xét phương trình $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$

**Điều kiện đủ:** Đặt $f(x)=x(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1})$

Xét $x=2$, ta có $f(2)=0$ nên ta sẽ đi tìm bậc của $(x-2)$ của $f(x)$

$$\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1}=\frac{(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x-1}}=\frac{x^2-x-2}{g(x)}=(x-2)h(x)$$

Suy ra $y=\dfrac{(x-2)h(x)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{h(x)}{x+2}$, suy ra $x=2$ không phải là tiệm cận đứng

Xét $x=-2$, ta có $f(-2)$ không tồn tại hay $x=-2$ không phải là tiệm cận đứng.

Vậy $m=1, n=0 \Rightarrow m+n=1$.

**Câu 27: Chọn D**

$\sqrt{-x^2+2019x+2020}$ xác định khi $-x^2+2019x+2020 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2020$

Đặt $f(x)=\sqrt{-x^2+2019x+2020}-\sqrt{4038}$. Xét $x-m=0 \Leftrightarrow x=m$.

Đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x=m$, khi đó điều kiện là:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2019 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1;2019] & (1) \\ \sqrt{-m^2+2019m+2020} \neq 24\sqrt{7} & (*) \end{cases}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow -m^2+2019m-2018 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2018 \end{cases} (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow m \in [-1;2020] \setminus \{1;2019\}$

Vậy có $2022-2=2020$ số nguyên $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 28: Chọn D**

Xét hàm số $h(x)=f(x^2-3) \Rightarrow h'(x)=2x.f'(x^2-3)$

$$\Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-1 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $x^2-3$ | $+\infty$ | | $1$ | | $-1$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
| $f'(x^2-3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $f(-3)<0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ $h(x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $0<m<4$.

**Câu 29: Chọn B**

Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$ và $(m<0)$.

Suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

Suy ra $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$. Xét $h(x)-m^2-m=0 \Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-13x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{5}{4}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{35}{3}$ | $\nearrow$ | $\frac{7807}{768}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có $2$ đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)-m^2-m=0$ có $2$ nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có $2$ nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\dfrac{35}{3}<m<-1$.

Do $m$ nguyên nên $m\in\{-11;-10;...;-2\}$. Vậy có 10 số nguyên $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 30: Chọn C**

Ta có $x^4-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$, trong đó $x=0$ là nghiệm kép.

Dễ dàng chứng minh được nếu $x=x_0$ với $x_0\notin\{0;\pm\sqrt{2}\}$ là nghiệm đơn của mẫu hoặc $x=x_0$ là nghiệm kép khác 0 của mẫu thì đường thẳng $x=x_0$ là đường TCĐ của đồ thị hàm số $g(x)$.

Nếu $x=0$ là nghiệm kép bội hai của mẫu thì đường thẳng $x=0$ không là TCĐ của đồ thị hàm số $g(x)$.

Ta có $f^2(x)+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=-3\end{array}\right.$

Dựa vào BBT ta được PT $f(x)=1$ có hai nghiệm kép là $x=-\sqrt{2}$ và $x=\sqrt{2}$

và PT $f(x)=-3$ có hai nghiệm đơn là $x=a<-\sqrt{2}$ và $x=b>\sqrt{2}$ và một nghiệm kép $x=0$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCĐ là $x=a$, $x=b$, $x=\sqrt{2}$ và $x=-\sqrt{2}$.

Mặt khác, bậc của tử là bậc 4 và bậc của mẫu là bậc 8 nên dễ tính được $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0$. Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có đường TCN là $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

**Câu 31: Chọn B**

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}=0$

nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó $(C)$ có tổng số đường tiệm cận là nhiều nhất khi $(C)$ có 3 đường tiệm cận đứng nên phương trình $x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0\,(1)$ có 3 nghiệm phân biệt $x\neq3$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow(x-m)(x^2-2mx+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\g(x)=x^2-2mx+1=0\,(2)\end{array}\right.$

Suy ra $m\neq3$ và phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq3\\\Delta>0\\g(3)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq3\\m^2-1>0\\10-6m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq3\\\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.\\m\neq\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

Mà $m$ nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6-5;-4;-3;-2;2;4;5;6;7;8;9\}$.

**Câu 32: Chọn D**

Gọi $(C)$ là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^3-3x^2+(m+2)x-m}$.

Ta có $y=\dfrac{x-2}{x^3-3x^2+(m+2)x-m}=\dfrac{x-2}{(x-1)(x^2-2x+m)}$

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^3-3x^2+(m+2)x-m}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{m+2}{x^2}-\dfrac{m}{x^3}}=0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Do đó $(C)$ có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi $(C)$ có 3 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow x^2-2x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1; 2 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=1-m>0\\ 1^2-2.1+m\neq 0\\ 2^2-2.2+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq 1\\ m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ m\neq 0.\end{cases}$$

**Câu 33: Chọn B**

Xét hàm $y=g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{f^2(x)-mf(x)}$ với $x\geq 2$.

Khi đó $f^2(x)-mf(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m\\ f(x)=0\end{array}\right.$

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=a & (a<-1)\\ x=b & (-1<b<2)\\ x=c & (c>2, c\neq n)\end{array}\right.$

Với $x=a$, $x=b$ loại vì không thõa điều kiện.

Với $x=c$, $\lim\limits_{x\to c^+}g(x)=-\infty$ nên đường $x=c$ là một tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

Đồ thị $g(x)$ có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ $f(x)=m$ có một nghiệm $x\geq 2$ và $x\neq c$

Dựa vào BTT của $y=f(x)$, $f(x)=m$ có một nghiệm $x\geq 2$ và $x\neq c$ $\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq -2\\ m\neq 0\end{cases}$.

**Câu 34: Chọn A**

Với $m\neq -\dfrac{3}{2}$, đồ thị $(C)$ có đường tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{3}{2}$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{2}$.

Khoảng cách từ $M$ tới đường tiệm cận đứng: $d_1=\left|x_M+\dfrac{3}{2}\right|$.

Khoảng cách từ $M$ tới đường tiệm cận ngang: $d_2=\left|\dfrac{x_M-m}{2x_M+3}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{-2m-3}{2(2x_M+3)}\right|=\dfrac{|2m+3|}{2|2x_M+3|}$.

Từ giả thiết, $\Delta MAB$ vuông tại $M$ nên $S_{\Delta MAB}=\dfrac{1}{2}MA.MB=\dfrac{1}{2}d_1.d_2=1\Rightarrow d_1d_2=2$

Do đó $\left|x_M+\dfrac{3}{2}\right|.\dfrac{|2m+3|}{2|2x_M+3|}=2\Leftrightarrow|2m+3|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+3=8\\ 2m+3=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{5}{2}\\ m=-\dfrac{11}{2}\end{array}\right.$

**Câu 35: Chọn D**

Đồ thị $(C)$ có đường tiệm cận đứng $x=1$. Ta có $M\in(C)$ nên $y_M=\dfrac{2x_M+2}{x_M-1}$.

Khoảng cách từ $M$ tới đường tiệm cận đứng: $d_1 = |x_M - 1|$.

Khoảng cách từ $M$ tới trục hoành: $d_2 = |y_M| = \left|\dfrac{2x_M + 2}{x_M - 1}\right|$.

Tổng khoảng cách từ $M$ tới tiệm cận đứng và trục hoành: $d = d_1 + d_2 = |x_M - 1| + \left|\dfrac{2x_M + 2}{x_M - 1}\right|$

Nếu $x_M > 1$, ta có $d = |x_M - 1| + \dfrac{2|x_M + 1|}{|x_M - 1|} \geq 2\sqrt{2|x_M + 1|} > 2\sqrt{2.2} = 4$

Nếu $-1 \leq x_M < 1$, ta có

$$d = 1 - x_M + \frac{2x_M + 2}{1 - x_M} = 2 + (-1 - x_M) + \frac{2x_M + 2}{1 - x_M}$$

$$= 2 + \frac{(-1 - x_M)(1 - x_M) + 2x_M + 2}{1 - x_M} = 2 + \frac{x_M^2 - 1 + 2x_M + 2}{1 - x_M} = 2 + \frac{(x_M + 1)^2}{1 - x_M} \geq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_M = -1$.

Nếu $x_M < -1$, ta có $d = 1 - x_M + \left|\dfrac{2x_M + 2}{x_M - 1}\right| > 1 - x_M > 2$

Vậy $d \geq 2$, dấu bằng chỉ xảy ra khi $x_M = -1$, do đó $M(-1;0)$.

**Câu 36: Chọn D**

Đồ thị $(C): y = \dfrac{2mx + 3}{x - m}$ có tiệm cận đứng $x = m$ và tiệm cận ngang $y = 2m$ nên giao điểm của hai tiệm cận là $I(m;2m)$. Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{2mx_0 + 3}{x_0 - m}\right) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ với $(C)$ tại $M$ là $y = -\dfrac{2m^2 + 3}{(x_0 - m)^2}(x - x_0) + \dfrac{2mx_0 + 3}{x_0 - m}$.

Tiếp tuyến cắt TCĐ $x = m$ tại $A\left(m;\dfrac{2mx_0 + 2m^2 + 6}{x_0 - m}\right)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0 - m;2m)$

Ta có $IA = \left|\dfrac{4m^2 + 6}{x_0 - m}\right|$ và $IB = 2|x_0 - m|$. Diện tích tam giác $IAB$ là

$$S_{IAB} = 64 \Leftrightarrow \frac{1}{2}IA.IB = 64 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{4m^2 + 6}{x_0 - m}\right|.2|x_0 - m| = 64 \Leftrightarrow 4m^2 + 6 = 64 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{58}}{2}$$

Vậy $S = \dfrac{\sqrt{58}}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{58}}{2}\right) = 0$.

**Câu 37: Chọn D**

Đồ thị $(C): y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$ nên $I(-1;2)$.

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)$, $(x_0 > 0)$

Phương trình tiếp tuyến với $(C)$ tại $M$ là $y = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0-1}{x_0+1}$.

$\Rightarrow A\left(-1; \dfrac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$, $B(2x_0+1;2)$. Ta có $IA = \left|\dfrac{6}{x_0+1}\right|$ và $IB = 2|x_0+1|$.

Khi đó $IA^2 + IB^2 = 40 \Leftrightarrow \dfrac{36}{(x_0+1)^2} + 4(x_0+1)^2 = 40$, $x_0 > 0$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)^4 - 10(x_0+1)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_0+1)^2 = 1\\(x_0+1)^2 = 9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0 = 0\ (l)\\x_0 = -2\ (l)\\x_0 = 2\ (n)\\x_0 = -4\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 1.$$

Suy ra $M(2;1)$. Giá trị của biểu thức $P = 7$.

**Câu 38: Chọn A**

Đồ thị $(C)$ có đường tiệm đứng $x=-1$ và đường tiệm cận ngang $y=1$.

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(-1;1)$.

Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right) \in (C)$ với $x_0 > 0$. Ta có $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ là $y = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \dfrac{x_0-2}{x_0+1}$.

Tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ cắt tiệm cận đứng tại điểm $P\left(-1; \dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $Q(2x_0+1;1)$. Ta có $S_{\Delta IPQ} = \dfrac{1}{2} IP.IQ = \dfrac{1}{2}\dfrac{6}{|x_0+1|}.2|x_0+1| = 6$.

Mặt khác $S_{\Delta IPQ} = pr \Leftrightarrow r = \dfrac{S_{\Delta IPQ}}{p} = \dfrac{6}{p}$ nên $r$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $p$ đạt giá trị nhỏ nhất hay chu vi tam giác $IPQ$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà chu vi tam giác $IPQ$:

$$C = IP + IQ + PQ = IP + IQ + \sqrt{IP^2 + IQ^2} \geq \left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{IP.IQ} = \left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{12}$$

Nên chu vi tam giác $IPQ$ nhỏ nhất khi $IP = IQ \Leftrightarrow \dfrac{6}{|x_0+1|} = 2|x_0+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0 = -1+\sqrt{3}\\x_0 = -1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do $x_0 > 0$ nên $x_0 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow M\left(-1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right)$. Vậy $x_0 + y_0 = 0$.

**Câu 39: Chọn D**

Đồ thị $(C)$ có đường tiệm đứng $x=1$ và đường tiệm cận ngang $y=1$.

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(1;1)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}\right)\in(C)$ với $x_0>1$. Ta có $y'=-\dfrac{2}{(2x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ là $y=-\dfrac{2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}$.

Tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2x_0-1;1)$. Ta có $IA+IB=\dfrac{1}{x_0-1}+2(x_0-1)\ge 2\sqrt{2}$

Suy ra $Min(IA+IB)=2\sqrt{2}$ khi $\dfrac{1}{x_0-1}=2(x_0-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\\x_0=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$.

Do $x_0>1$ nên $x_0=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. Vậy $x_0=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 40: Chọn D**

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{3-x_0}\right)$.

Đồ thị $(C)$ có tiệm cận đứng $x=3$ và tiệm cận ngang $y=-1$.

Khoảng cách từ $M$ đến tiệm cận đứng là $d_1=|x_0-3|$.

Khoảng cách từ $M$ đến tiệm cận ngang là $d_2=\dfrac{1}{|3-x_0|}$.

Ta có $d_1+d_2=|x_0-3|+\dfrac{1}{|3-x_0|}\ge 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|x_0-3|=\dfrac{1}{|3-x_0|}$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=0\\x_0=4\Rightarrow y_0=-2\end{array}\right.$. Mà $y_0<0$ nên $y_0=-2$. Vậy $2x_0-y_0=2.4-(-2)=10$.

**Câu 41: Chọn A**

Đồ thị $(C)$ có tiệm cận đứng $x=-3$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Giao điểm của hai đường tiệm cận $I(-3;1)$.

Ta có điểm $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{x_0+3}\right)$ và $y'=\dfrac{4}{(x+3)^2}$, $\forall x\ne -3$.

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ có dạng $y=\dfrac{4}{(x_0+3)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{x_0+3}$.

Cho $y=1\Rightarrow(x_0+3)^2=4x-4x_0+(x_0-1)(x_0+3)\Leftrightarrow x=2x_0+3$.

Cho $x=-3\Rightarrow y=\dfrac{4}{(x_0+3)^2}(-3-x_0)+\dfrac{x_0-1}{x_0+3}=\dfrac{x_0-5}{x_0+3}$.

Suy ra tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ cắt tiệm cận đứng tại $A\left(-3;\dfrac{x_0-5}{x_0+3}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2x_0+3;1)$.

Ta có $IA^2+IB^2=32 \Leftrightarrow \dfrac{64}{\left(x_0+3\right)^2}+4\left(x_0+3\right)^2=32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+3=2 \\ x_0+3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-5 \end{array}\right.$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=-1$. Với $x_0=-5 \Rightarrow y_0=3$. Vậy $M\left(-5;3\right)$.

**Câu 42: Chọn C**

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x=1$ và tiệm cận ngang $d_2: y=2$.

Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}\right)\in\left(C\right)$ với $x_0\neq 1$.

Ta có: $d\left(M;d_1\right)=\left|x_0-1\right|$; $d\left(M;d_2\right)=\left|\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}-2\right|=\dfrac{1}{\left|x_0-1\right|}$

Theo đề bài: $\left|x_0-1\right|+\dfrac{1}{\left|x_0-1\right|}=2\left|x_0-1\right|.\dfrac{1}{\left|x_0-1\right|}=2 \Leftrightarrow \left|x_0-1\right|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=0 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 điểm $M$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 43: Chọn B**

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=1$. Do đó $I\left(2;1\right)$.

Suy ra $OI=\sqrt{5}$ và đường thẳng $OI$ có phương trình: $\Delta: x-2y=0$.

Giả sử $M\left(m;\dfrac{m+1}{m-2}\right)\in\left(C\right)$ với $m<0$.

Ta có: $d\left(M;\Delta\right)=\dfrac{\left|m-2.\dfrac{m+1}{m-2}\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left|m^2-4m-2\right|}{\sqrt{5}\left|m-2\right|}=h$

Theo đề bài: $S_{\Delta OMI}=\dfrac{1}{2}OI.h \Leftrightarrow h=\dfrac{2.\dfrac{1}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \dfrac{\left|m^2-4m-2\right|}{\left|m-2\right|}=1$

$\Leftrightarrow \left|m^2-4m-2\right|=\left|m-2\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-4m-2=m-2 \\ m^2-4m-2=2-m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\ (L) \\ m=5\ (L) \\ m=-1 \\ m=4\ (L) \end{array}\right.$.

Vậy có 1 điểm thỏa mãn đề bài.

**Câu 44: Chọn B**

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\left|x^2-x\right|}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+m}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{\left|1-\dfrac{1}{x}\right|}}{x.\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{m}{x^3}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\left|1-\dfrac{1}{x}\right|}}{\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{m}{x^3}}}=1$.

Suy ra: $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\left|x^2-x\right|}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+m}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{\left|1-\dfrac{1}{x}\right|}}{x.\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{m}{x^3}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{\left|1-\dfrac{1}{x}\right|}}{\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{m}{x^3}}}=-1$.

Suy ra: $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy để $(C)$ có $4$ đường tiệm cận thì $(C)$ cần có thêm đúng $2$ đường tiệm cận đứng.

Điều kiện cần: $\sqrt[3]{x^3-3x^2+m}=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra: $m=-x^3+3x^2$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt. $(*)$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+3x^2$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $(*)\Leftrightarrow 0\le m\le 4$. Mà $m\in Z\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4\}$.

Điều kiện đủ:

Với $m=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}$. Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}=+\infty$

Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng là $x=0$ và $x=3$.

Với $m=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}$ ($x_1;x_2;x_3$ khác 0 và 1)

Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận đứng $x=x_1;x=x_2$ và $x=x_3$.

Với $m=2\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{(x-x_4)(x-1)(x-x_5)}}$ ($x_4;x_5$ khác 0 và 1)

Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng là $x=x_4$ và $x=x_5$.

Với $m=3\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+3}}=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)}}$ ($x_6;x_7;x_8$ khác 0 và 1)

Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận đứng $x=x_6;x=x_7$ và $x=x_8$.

Với $m=4\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}}=\dfrac{\sqrt{|x|}.\sqrt{|x-1|}}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}}$

Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng $x=-1$ và $x=2$.

Vậy $m\in\{0;2;4\}$ thì thỏa yêu cầu đề bài. Có $3$ giá trị của $m$.

**Câu 45: Chọn C**

Với $x \geq 2$ thì $x^{2022} + \sqrt{x-2} > 0$.

Xét phương trình $x^2 - (m-2)x + 2 = 0\,(1), \forall x \geq 2$. Ta có $(1) \Leftrightarrow m = x + 2 + \dfrac{2}{x}\,(2)$

$YCBT \Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ có đúng 1 nghiệm thuộc $[2;+\infty) \Leftrightarrow$ Đường thẳng $(d): y = m$ cắt đồ thị $y = g(x) = x + 2 + \dfrac{2}{x}$ tại duy nhất 1 điểm trên $[2;+\infty)$. Ta có : $g'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$

Bảng biến thiên của $g(x)$

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | |
| $g$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$(*) \Leftrightarrow m \geq 5$ mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0;2021] \end{cases}$. Suy ra $m \in \{5;6;...;2021\}$. Suy ra có $2017$ số cần tìm.

# V. TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## BÀI TOÁN : XÉT SỰ TƯƠNG GIAO VÀ BIỆN LUẬN NGHIỆM

**DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM:** Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$. Tìm số giao điểm hoặc số nghiệm của phương trình $y=f\left[u(x)\right]$ hoặc biện luận theo tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán đưa ra.

**PHƯƠNG PHÁP:**

Đây là dạng toán hay và khó được các SGD và các trường Chuyên trên cả nước khai thác một cách triệt để. Để giải quyết các bài toán này, chúng ta có thể sử dụng phương pháp biện luận truyền thống hoặc tối ưu hơn là phương pháp ghép trục (hoặc ghép bảng biến thiên). Đi vào từng ví dụ minh họa và bài tập vận dụng, chúng ta sẽ hình dung và hiểu sâu hơn về dạng toán này.

## ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $7$. **D.** $9$.

**Câu 2:** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Tìm $m$ để phương trình $f\left(3m+\dfrac{1}{4}\sin x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=1$ $(1)$ có đúng $8$ nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;3\pi\right]$.

**A.** $\left(-\dfrac{1}{192};0\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{64};0\right]$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{64};0\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{192};0\right]$.

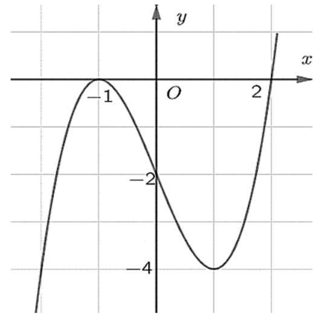
**Câu 3:** Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số $m$ để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4\left|x-m\right|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

**A.** $14$. **B.** $13$. **C.** $10$. **D.** $5$.

**Câu 4:** Biết tập tất cả các giá trị thực của $m$ để $4\left|x+m\right|\left(x^2+2mx+m^2-3\right)+9x+1=0$ có $4$ nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Hỏi giá trị của $(b-a)$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ




Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2\left(x\right)-\left(m+7\right)\left|f\left(x\right)\right|+4m+12=0$ có 7 nghiệm phân biệt là

**A.** $-6$. **B.** $3$. **C.** $-3$. **D.** $6$.

**Câu 6:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là $(C)$. Tìm các giá trị của $m$ để đường thẳng $d_m: y=-x+m$ cắt đồ thị $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A,B$ sao cho tam giác $ABM$ là tam giác đều với $M\left(2;5\right)$.

**A.** $m=-1$, $m=5$. **B.** $m=1$, $m=-5$. **C.** $m=0$, $m=-2$. **D.** $m=0$, $m=-1$.

**Câu 7:** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để đồ thị hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Câu 8:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

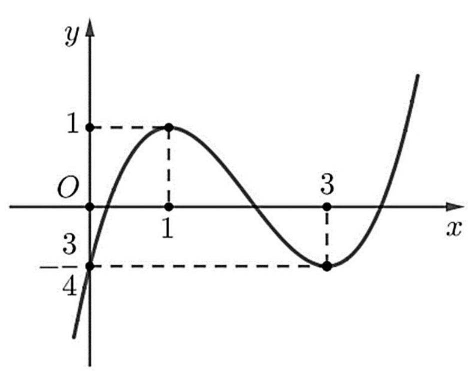
Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để phương trình $3f\left(\sin x\right)+m=0$ có lẻ nghiệm trên đoạn $\left[-\pi;2\pi\right]$?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 9:** Tập các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^4-2x^2-3m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt là

**A.** $\left(1;+\infty\right)\cup\left\{0\right\}$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)\cup\left\{0\right\}$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

**Câu 10:** Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau:



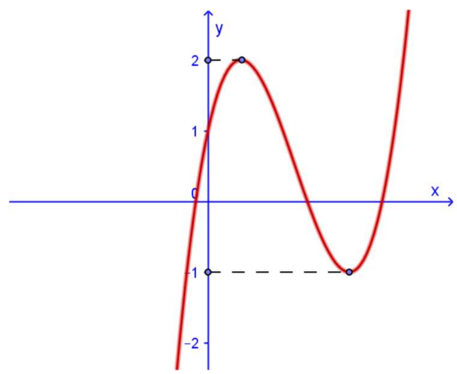
Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ thoả mãn $a+b\le 16$ để phương trình $f\left(ax^2-1\right)=\dfrac{1}{bx}$ có 7 nghiệm thực phân biệt?

**A.** $101$. **B.** $96$. **C.** $89$. **D.** $99$.

**Câu 11:** Gọi $S$ là tập các hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $d$ sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt đường thẳng $d$: $y=m^2(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1,x_2,x_3$ thỏa mãn: $x_1^3+x_2^3+x_3^3\le 2057$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** $19$. **B.** $36$. **C.** $18$. **D.** $37$.

**Câu 12:** Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\left|f(|x|)\right|=\dfrac{2}{9}m^2-\dfrac{1}{81}m^4$ có 8 nghiệm phân biệt?




**A.** $9$. **B.** $8$. **C.** $6$. **D.** $3$.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+|2x|)$ và $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là $(C_1)$ và $(C_2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trên đoạn $[-2020;2020]$ để $(C_1)$ cắt $(C_2)$ tại $3$ điểm phân biệt.

**A.** $2020$. **B.** $4040$. **C.** $2021$. **D.** $4041$.

**Câu 14:** Cho hai hàm số $y=x(x-2)(x-3)(m-|x|)$, $y=x^4-6x^3+5x^2+11x-6$ có đồ thị lần lượt là $(C_1)$, $(C_2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để $(C_1)$ cắt $(C_2)$ tại 4 điểm phân biệt?

**A.** $2021$. **B.** $2019$. **C.** $4041$. **D.** $2020$.

**Câu 15:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $\left|f\left(x^3+1\right)+3m\right|=1$ có đúng 6 nghiệm phân biệt là $(a;b)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

**A.** $b-a=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $b-a=2$. **C.** $b-a=\dfrac{4}{3}$. **D.** $b-a=\dfrac{2}{3}$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2$. Số giá trị nguyên của $m$ để phương trình $f\left(x^4-4x^2+2\right)=m\ (1)$ có đúng 4 nghiệm phân biệt là

**A.** $14$. **B.** $16$. **C.** $17$. **D.** $15$.

**Câu 17:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $27^x-3^{2x+1}-\ln\left(-m+\sqrt{m^2+1}\right)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?

**A.** $27$. **B.** $29$. **C.** $28$. **D.** $30$

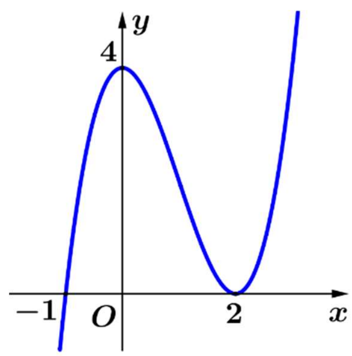
**Câu 18:** Gọi $S$ là tập hợp giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $x^3+2-m=\sqrt[3]{3x^2+4x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tích tất cả phần tử của tập hợp $S$ bằng.

**A.** $\dfrac{23}{27}$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{4}{27}$.

**Câu 19:** Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1)$ và $(C_2)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để $(C_1)$ và $(C_2)$ cắt nhau tại $2$ điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp $S$ bằng

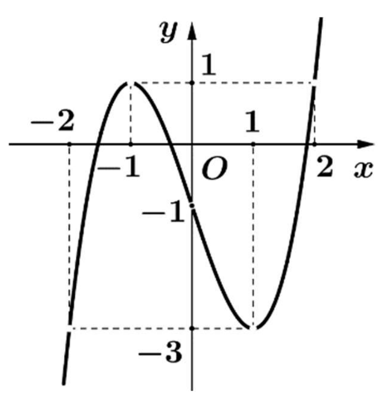
**A.** $2009$. **B.** $2008$. **C.** $2006$. **D.** $2007$.

**Câu 20:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ có bao nhiêu nghiệm?



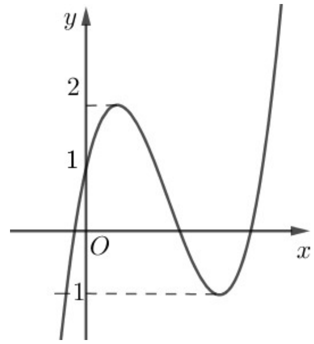

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 21:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f\left(f(x)+m\right)+1=f(x)+m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $[-1;1]$




**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 22:** Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\left|f(|x|)\right| = \frac{2}{9}m^2 - \frac{1}{81}m^4$ có 8 nghiệm phân biệt?

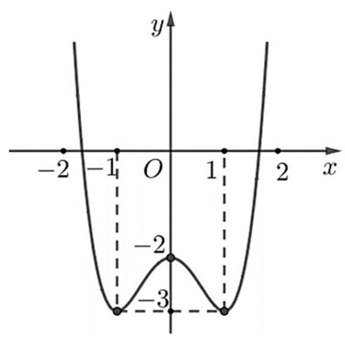
**A.** 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 3.

**Câu 23:** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khi đó tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ là

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $y$ | $-\infty$ ↗ | | 1 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

**A.** $\frac{1}{2} < m < 1$. **B.** $\frac{1}{2} \le m < 1$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $0 < m \le 1$.

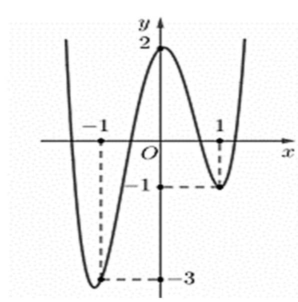
**Câu 24:** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Số nghiệm của phương trình $5f\left(x - 1 - \sqrt{2x - 1}\right) + 12 = 0$ là

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

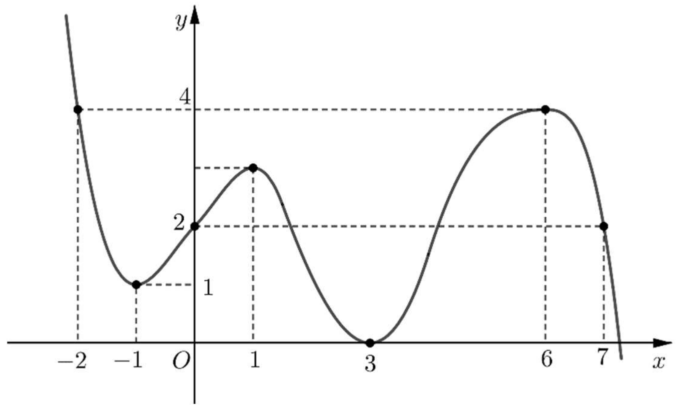
**Câu 25:** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Số nghiệm của phương trình $f\left(4x^2-4x\right)=x-1$ là

**A.** $6$. **B.** $4$. **C.** $8$. **D.** $5$

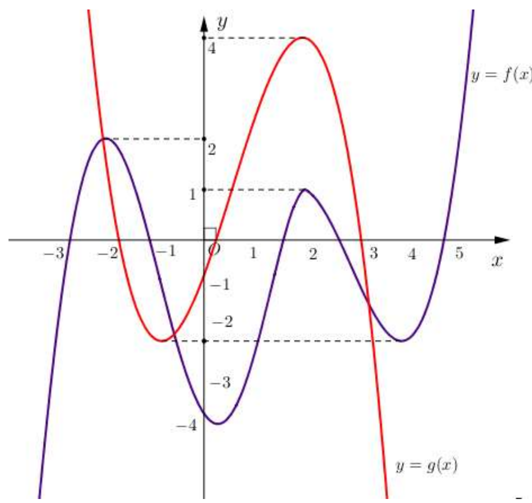
**Câu 26:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây:




Số nghiệm của phương trình $f\left(3\sin x\right)=3\left|\cos x\right|$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{9\pi}{2}\right)$ là

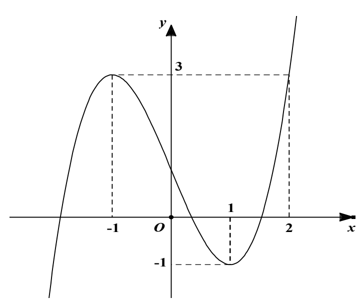
**A.** $16$. **B.** $17$. **C.** $15$. **D.** $18$.

**Câu 27:** Cho hai hàm $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f\left(g\left(x\right)\right)=0$ và $g\left(f\left(x\right)\right)=0$ là




**A.** $25$. **B.** $22$. **C.** $21$. **D.** $26$.

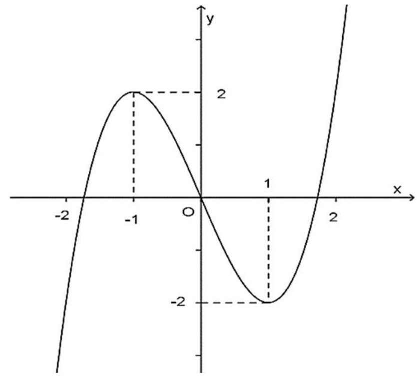
**Câu 28:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ:




Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f\left(4\left|\sin x\right|+m\right)-3=0$ có đúng $12$ nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $\left(0;4\pi\right]$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-3$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $-1$.

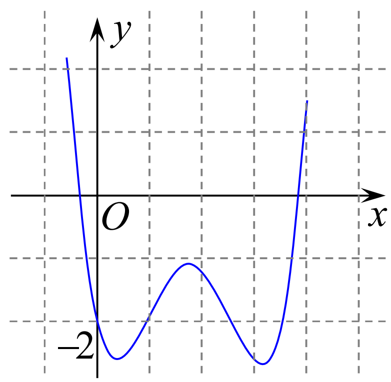
**Câu 29:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba, có đồ thị như sau:




Phương trình $f^{2}\left(\sin x+\cos x\right)+1=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)f\left(\sin x+\cos x\right)-\sin 2x$ có mấy nghiệm thực thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$:

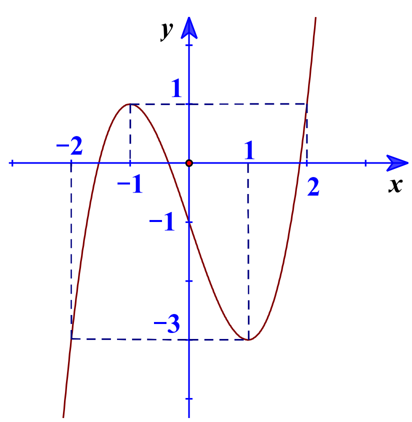
**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $6$.

**Câu 30:** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)f\left(x\right)\right)+2=0$ là




**A.** $8$. **B.** $12$. **C.** $6$. **D.** $9$.

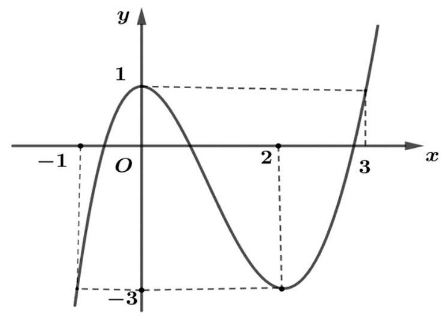
**Câu 31:** Cho hàm đa thức bậc ba $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ




Phương trình $f\left(f\left(x\right)+1\right)=f\left(x\right)$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $7$. **D.** $5$.

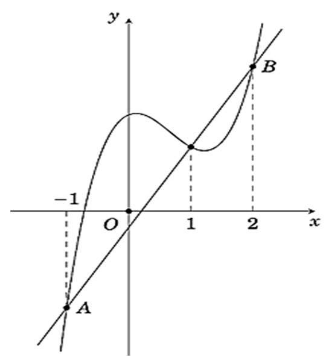
**Câu 32:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ.




Số nghiệm thực của phương trình $\sqrt{f\left(f\left(x\right)+1\right)+1}=f\left(x\right)+2$ là

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $7$. **D.** $5$.

**Câu 33:** Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+\frac{1}{3}x+c$ và đường thẳng $g\left(x\right)$ có đồ thị như trong hình vẽ bên dưới và $AB=5$. Biết phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)+x^2+2$ có nghiệm dương có dạng $\frac{m+\sqrt{n}}{p}$.



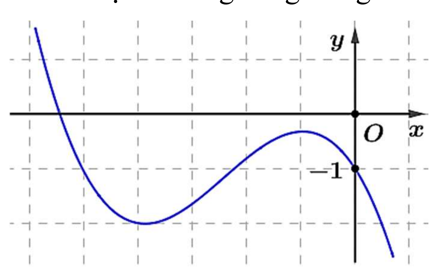

Khi đó giá trị $m+n+p$ bằng

**A.** 10. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 18.

**Câu 34:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng phương trình $f\left(x\right)=0$ có $8$ nghiệm dương phân biệt không nguyên, phương trình $f\left(2x^3-3x^2+1\right)=0$ có $20$ nghiệm phân biệt, phương trình $f\left(x^4-2x^2+2\right)=0$ có $8$ nghiệm phân biệt. Hỏi phương trình $f\left(x\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(2;+\infty\right)$?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $4$.

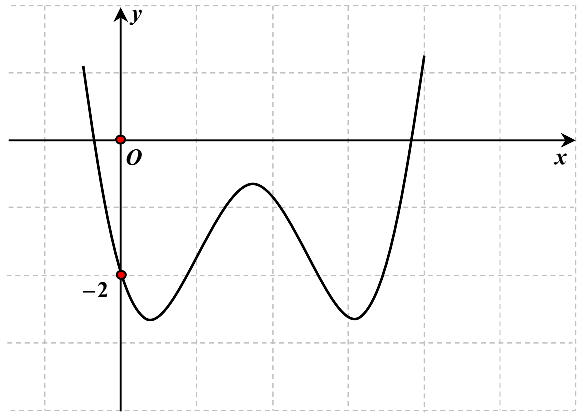
**Câu 35:** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.




Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f\left(x\right)\right)+1=0$ là

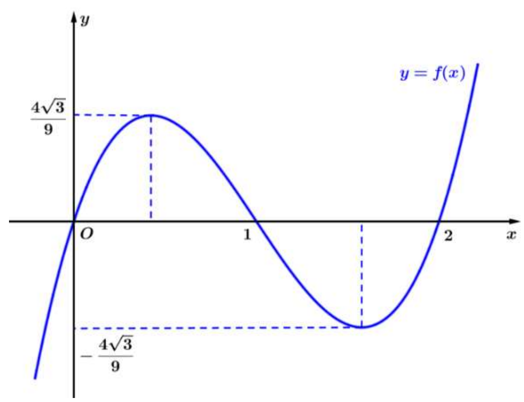
**A.** $6$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $8$.

**Câu 36:** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$ là



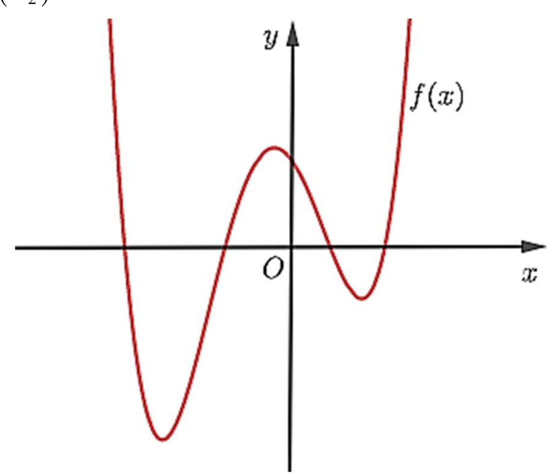

**A.** 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

**Câu 37:** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - \left|x^2-1\right|\right|\right) = \dfrac{1}{2021}$ là



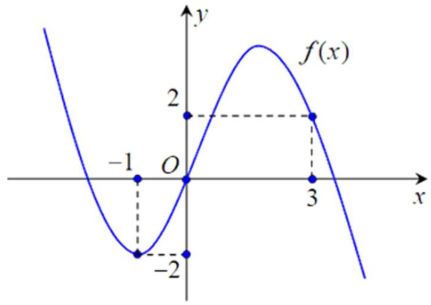

**A.** $14$. **B.** $10$. **C.** $24$. **D.** $12$.

**Câu 38:** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi $(C_1)$ và $(C_2)$ lần lượt là đồ thị của hàm số $y = f''(x).f(x) - \left[f'(x)\right]^2$ và $y = 2021^x$. Số giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$ là?




**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 39:** Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ dưới. Hỏi phương trình $\frac{\left|x^2-3x\right|}{x^2-3x}f\left(x^2-2x\right)=-2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?




**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $4$.

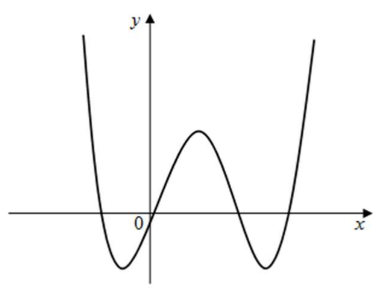
**Câu 40:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ là

**A.** $9$. **B.** $7$. **C.** $T=8$. **D.** $6$.

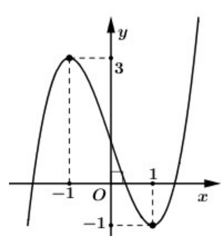
**Câu 41:** Biết rằng đồ thị hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên.




Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $\left[f'\left(x\right)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)=0$ bằng

**A.** 4. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

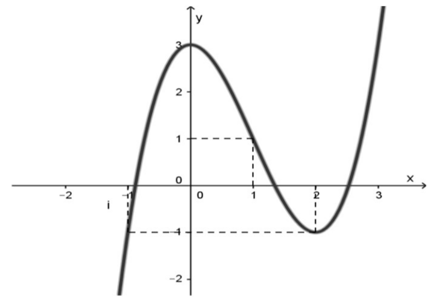
**Câu 42:** Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.




Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g\left(x\right).\left[2g\left(x\right)-1\right]=0$ là

**A.** 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

**Câu 43:** Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ.




Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên $m$ thuộc $[-10;10]$ sao cho phương trình $\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2-(2m+1)f\left(x^2+1\right)+m(m+1)=0$ có nghiệm và số nghiệm thực phân biệt là số chẵn. Số phần tử của $S$ là

**A.** 19. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng $6$ nghiệm phân biệt?

**A.** $9$. **B.** $8$. **C.** $7$. **D.** $6$.

**Câu 45:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m$ để phương trình $f(1-2\sin x)=f(|m|)$ có nghiệm thực?

**A.** $7$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Câu 46:** Cho hai hàm số $y=(x-1)(x-2)(x-3)(m-|x|)$; $y=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18$ có đồ thị lần lượt là $(C_1)$; $(C_2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc đoạn $[-2021;2021]$ để $(C_1)$ cắt $(C_2)$ tại $4$ điểm phân biệt?

**A.** $4042$. **B.** $2022$. **C.** $2019$. **D.** $2021$.

**Câu 47:** Cho đồ thị hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$

và $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\log\dfrac{f(x)}{mx^2}+x\left[f(x)-mx\right]=mx^3-f(x)$ có 2 nghiệm dương phân biệt?

**A.** 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

**Câu 48:** Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f\left(2f(x)-1\right)=m$ có đúng 3 nghiệm thực $x$?

**A.** 484. **B.** 486. **C.** 485. **D.** 3.

**Câu 49:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ đê phương trình $\left|x^4-8x^2\right|-mx+2m-16=0$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 50:** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+8x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

**A.** 21. **B.** 5. **C.** 19. **D.** 3.

**Câu 51:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $x^3-15x-|3x-m|=0$ có đúng 3 nghiệm thực?

**A.** 43. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 41.

**Câu 52:** Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$. Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng các phần tử của $S$.

**A.** 3. **B.** 22. **C.** 30. **D.** 18.

**Câu 53:** Cho hàm số $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}mx+m-8, x\in\mathbb{R}$ với $m$ là một hằng số khác 0.Biết rằng phương trình $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $k$ thỏa mãn phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt ?

**A.** 3. **B.** 34. **C.** 6. **D.** 34.

**Câu 54:** Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị $m$ để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(7;\dfrac{23}{2}\right)$. **B.** $(-2;5)$. **C.** $\left(\dfrac{43}{3};\dfrac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{37}{3};\dfrac{65}{4}\right)$.

**Câu 55:** Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ ($m$ là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1)$ và $(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để $(C_1)$ và $(C_2)$ cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

**A.** $[-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty:-2)$. **C.** $(-2:+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

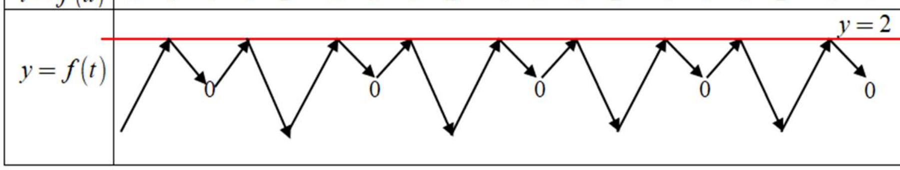
# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn D**

**Cách 1: Phương pháp ghép trục**

Đặt $u=\cos x\in[-1;1]$. Vì $x\in\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ nên $u'=-\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pi\\x=2\pi\\x=3\pi\\x=4\pi\end{array}\right.$

| $x$ | $0$ $\quad$ $\pi$ $\quad$ $2\pi$ $\quad$ $3\pi$ $\quad$ $4\pi$ $\quad$ $\frac{9\pi}{2}$ |
|---|---|
| $u=\cos x$ | $1$ $\quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0$ |
| $t=f(u)$ | $2\quad 1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 1\quad 0$ |




Từ bảng biến thiên suy ra tổng số nghiệm phương trình đã cho là 9.

**Cách 2: Tự luận truyền thống**

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)=-1\\f\left(\cos x\right)=1\end{array}\right.$

**Trường hợp 1:** $f\left(\cos x\right)=-1$. Đặt $t=\cos x, t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f\left(\cos x\right)=-1$ trở thành $f(t)=-1$, với $t\in[-1;1]$.

Đây là phương trình có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a<-1\\t=b>1\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

**Trường hợp 2:** $f\left(\cos x\right)=1$. Đặt $t=\cos x$, $t\in[-1;1]$; $f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\in(-\infty;-1)\quad(loai)\\t=n\in(-1;0)\\t=p\in(0;1)\\t=q\in(1;+\infty)\quad(loai)\end{array}\right.$

Với $t=n\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\cos x=t$ có $4$ nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Với $t=p\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình $\cos x=t$ có $5$ nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Hiển nhiên, $9$ nghiệm trong những trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có $9$ nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

**Câu 2: Chọn D**

Ta có:

$$f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{\frac{9}{9^x}}{\frac{9}{9^x}+3}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{9}{9+3.9^x}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{3+9^x}=1\ ,\ \forall x$$

Do đó:

$(1)\Leftrightarrow 3m+\frac{1}{4}\sin x+\cos^2 x=1\Leftrightarrow 3m+\frac{1}{4}\sin x+1-\sin^2 x=1\Leftrightarrow 3m=\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin x=g(\sin x)$

Xét: $g(x)=x^2-\frac{1}{4}x$ có $g'(x)=2x-\frac{1}{4}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$. Bảng biến thiên:

| $x$ | $-1$ | | $\frac{1}{8}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\frac{5}{4}$ | ↘ | $-\frac{1}{64}$ | ↗ | $\frac{3}{4}$ |

Xét phương trình $3m=g(\sin x)$. Đặt $t=\sin x$, do $x\in[0;3\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Ta có: $t'=\cos x$; $t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}\\x=\frac{3\pi}{2}\\x=\frac{5\pi}{2}\end{array}\right.$. Ghép trụcnhư sau:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\frac{5\pi}{2}$ | | $3\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t=\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $1$ | $\frac{1}{8}$ | $-1$ | $\frac{1}{8}$ | $1$ | $\frac{1}{8}$ | $0$ |
| $y=g(t)$ | $0$ | $-\frac{1}{64}$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{64}$ | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{1}{64}$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{64}$ | $0$; $y=3m$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt khi

$-\frac{1}{64}<3m\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{192}<m\le 0$.

**Câu 3: Chọn A**

Ta có $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+3^x.\ln 3+\frac{1}{x^2}.3^{\frac{1}{x}}.\ln 3>0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ $(1)$.

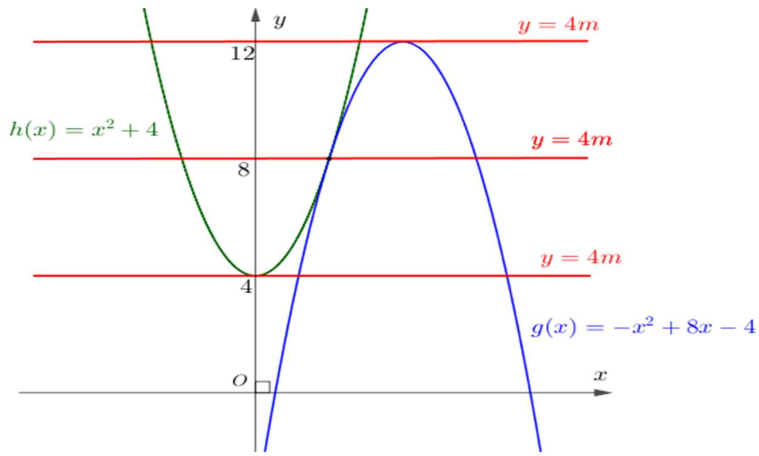
Mặt khác $f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_3\frac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}-3^x=-\left(\log_3 x-3^{\frac{1}{x}}+3^x\right)=-f(x)$, khi đó

$$f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0\Leftrightarrow -f\left(4|x-m|+3\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$

$\Leftrightarrow f\left(4\left|x-m\right|+3\right)=f\left(x^2-4x+7\right)\ (2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow 4\left|x-m\right|+3=x^2-4x+7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m=-x^2+8x-4\\4m=x^2+4\end{array}\right.$.

Ta có đồ thị sau:




Theo yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l}4m=4\\4m=8\\4m=12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\\m=3\end{array}\right.$. Vậy $1^2+2^2+3^2=14$.

**Câu 4: Chọn B**

Ta có: $4\left|x+m\right|\left(x^2+2mx+m^2-3\right)+9x+1=0\Leftrightarrow 4\left|x+m\right|\left[\left(x+m\right)^2-3\right]+9\left(x+m\right)+1-9m=0$

$\Leftrightarrow 4\left|x+m\right|^3-12\left|x+m\right|+9\left(x+m\right)+1=9m$. Đặt $t=x+m$.

Phương trình trở thành: $4\left|t\right|^3-12\left|t\right|+9t+1=9m$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=4\left|t\right|^3-12\left|t\right|+9t+1,\ t\in\mathbb{R}$.

$f\left(t\right)=\begin{cases}4t^3-3t+1, & t\ge 0\\-4t^3+21t+1, & t<0\end{cases}\Rightarrow f'\left(t\right)=\begin{cases}12t^2-3, & t>0\\-12t^2+21, & t<0\end{cases}$.

$f'\left(0^+\right)\ne f'\left(0^-\right)\Rightarrow\nexists f'\left(0\right)$; $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\t=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ | | $0$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1-7\sqrt{7}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Phương trình có $4$ nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình có $4$ nghiệm phân biệt

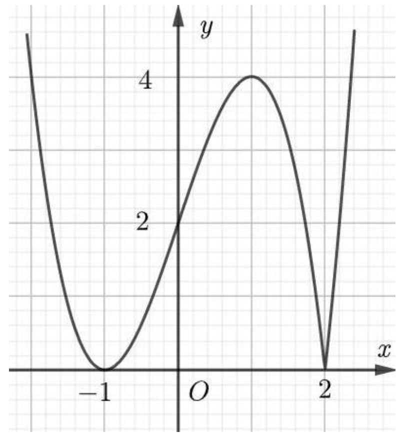
$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ cắt đường thẳng $y=9m$ tại $4$ điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 9m \in (0;1) \Leftrightarrow m \in \left(0;\frac{1}{9}\right)$. Vậy $a=0; b=\frac{1}{9} \Rightarrow b-a=\frac{1}{9} \in \left(0;\frac{1}{3}\right)$.

**Câu 5: Chọn C**

Phương trình đã cho tương đương với $\left|f(x)\right|^2-(m+7)\left|f(x)\right|+4m+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|f(x)\right|=4\\ \left|f(x)\right|=m+3\end{array}\right.$.

Do cách lấy đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ nên ta thấy phương trình $\left|f(x)\right|=4$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2=1, x_3$.




Vậy để thỏa mãn bài toán thì ta phải có phương trình $\left|f(x)\right|=m+3$ có bốn nghiệm phân biệt và các nghiệm này khác với ba nghiệm $x_1,\ x_2=1, x_3$ ở trên. Khi đó ta phải có

$$0<m+3<4 \Leftrightarrow -3<m<1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=-2,\ m=-1, m=0$. Do đó có tổng là $-2+(-1)+0=-3$.

**Câu 6: Chọn B**

Điều kiện: $x \neq -1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x-1}{x+1}=-x+m \Leftrightarrow x^2+(3-m)x-m-1=0$.

Ta có $\Delta=(m-1)^2+12>0$, $\forall m$. Gọi $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$, khi đó $x_A,x_B$ là nghiệm của phương trình. Theo Vi-et, ta có $\begin{cases}x_A+x_B=m-3\\ x_A.x_B=-m-1\end{cases}$.

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $M$ lên đường thẳng $d_m$, khi đó đường thẳng $MH: y=x+3$

Suy ra tọa độ $H\left(\frac{m-3}{2};\frac{m+3}{2}\right)$, mà $x_A+x_B=m-3=2x_H$ nên $H$ luôn là trung điểm của $AB$.

Để tam giác $MAB$ đều, ta cần thêm điều kiện $MH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

Ta có $\Leftrightarrow d(M,d_m)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2-5+m|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(x_A-x_B)^2+\left((-x_A+m)-(-x_B+m)\right)^2} \Leftrightarrow |7-m|=\sqrt{3}\,|x_A-x_B|$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2=3\left[(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B\right] \Leftrightarrow m^2-14m+49=3\left(m^2-2m+13\right)$$

$\Leftrightarrow m^2+4m-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$

Vậy với $m=1$ hoặc $m=-5$ thì tam giác $ABM$ là tam giác đều.

**Câu 7: Chọn D**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có: $f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $f(|x|)$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\vert x\vert)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(\vert x\vert)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)+m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(|x|)+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

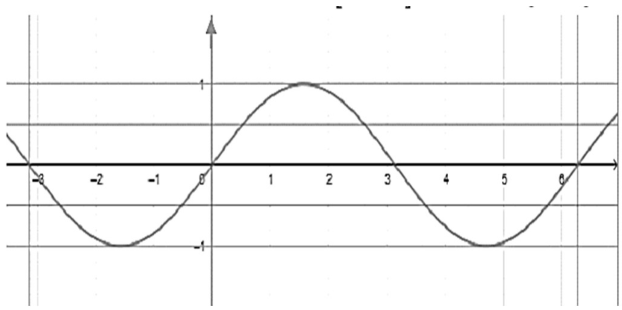
Từ bảng biến thiên ta có $f(|x|)+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-4<-m<0 \Leftrightarrow 0<m<4.$$

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{3;2;1\}$. Vậy có 3 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 8: Chọn C**

Đặt $t=\sin x, -1\le t\le 1$. Xét đồ thị $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;2\pi]$




Phương trình trở thành $f(t)=-\dfrac{m}{3}(*)$ dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta thấy chỉ có $-\dfrac{m}{3}=-2$ phương trình có nghiệm $t=\pm 1$ suy ra phương trình đã cho có $3$ nghiệm.

Các trường hợp còn lại phương trình có chẵn nghiệm hoặc vô nghiệm.

Vậy $m=6$ là giá trị cần tìm.

**Câu 9: Chọn B**

Ta có: $x^4-2x^2-3m+1=0 \Leftrightarrow 3m=x^4-2x^2+1$. Xét hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2+1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, $y'=4x^3-4x$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

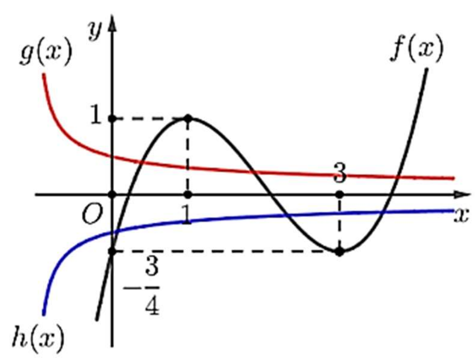
Yêu cầu bài toán tương đương đường thẳng $(d): y=3m$ cắt đường cong $(C): y=f(x)$ tại hai điểm phân biệt.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} 3m=0 \\ 3m>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m>\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

**Câu 10: Chọn D**

Đặt $t=ax^2-1,(t>-1) \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{a}(t+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t+1},(x>0) \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t+1},(x<0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=\dfrac{\sqrt{a}}{b\sqrt{t+1}} \\ f(t)=-\dfrac{\sqrt{a}}{b\sqrt{t+1}} \end{array}\right.$

Vẽ thêm đồ thị của hai hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{a}}{b\sqrt{x+1}}; h(x)=-\dfrac{\sqrt{a}}{b\sqrt{x+1}}$




Phương trình đã cho có 7 nghiệm khi $\begin{cases} g(1)<1 \\ h(3)>-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}b}<1 \\ -\dfrac{\sqrt{a}}{2b}>-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{2}b \Leftrightarrow a<2b^2$

Nếu $2b^2>15 \Rightarrow b\in\{3,\ldots,15\} \Rightarrow a\in\{1,\ldots,16-b\} \Rightarrow \sum\limits_{b=3}^{15}(16-b)=91 \Rightarrow$ có 91 cặp.

Nếu $2b^2\le 15 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \Rightarrow a<2 \Rightarrow a=1 \\ b=2 \Rightarrow a<8 \Rightarrow a\in\{1,\ldots 7\} \end{cases} \Rightarrow$ có 8 cặp. Vậy có 99 cặp số $(a;b)$ thoả đề.

**Câu 11: Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+2=m^2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2-m^2)=0$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $d$ tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $x^2-2x-2-m^2=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Rightarrow \begin{cases}\Delta>0\\-3-m^2\neq 1\end{cases}$. Giả sử nghiệm $x_3=1$ và $x_1,\ x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $x^2-2x-2-m^2=0$. Theo định lí Vi – ét: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=-2-m^2\end{cases}$

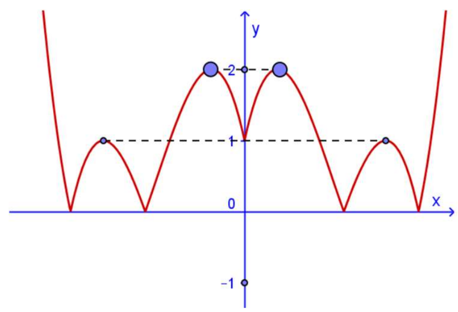
Ta có: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=8+6(2+m^2)$.

Nên: $x_1^3+x_2^3+x_3^3\le 2057 \Leftrightarrow 1+8+6(m^2+2)\le 2057 \Leftrightarrow m^2\le\dfrac{1018}{3}\Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{1018}{3}}\le m\le\sqrt{\dfrac{1018}{3}}$

Do $m$ nguyên nên: $-18\le m\le 18\ (m\in\mathbb{Z})$. Vậy có 37 giá trị nguyên.

**Câu 12: Chọn C**

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$.




Điều kiện:.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f(|x|)\right|$, suy ra phương trình $\left|f(|x|)\right|=\dfrac{2}{9}m^2-\dfrac{1}{81}m^4$ có 8 nghiệm phân biệt khi $0<\dfrac{2}{9}m^2-\dfrac{1}{81}m^4<1 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{9}m^2-\dfrac{1}{81}m^4>0\\m^4+18m^2-81>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<m^2<18\\m^2>9\sqrt{2}-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|m|<3\sqrt{2}\\|m|>3\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}3\sqrt{\sqrt{2}-1}<m<3\sqrt{2}\\-3\sqrt{2}<m<-3\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{array}\right. \Rightarrow m\in\{-4;-3;-2;2;3;4\}$.

**Câu 13: Chọn C**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1)$ và $(C_2)$

$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3\ (1)$

Để $(C_1)$ cắt $(C_2)$ tại 3 điểm phân biệt thì $(1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vì $\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$ không phải là nghiệm phương trình $(1)$ nên

$(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{-12x^4-22x^3-x^2+10x+3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}-2|x|=-2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-2|x|$

$\Leftrightarrow m=-2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-2|x|\ (2)$

$(2)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=m$ và $y=-2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-2|x|$.

Số nghiệm của phương trình $(2)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-2|x|$ và đường thẳng $y=m$.

Xét $y=-2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-2|x|$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$.

$y'=-2-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2}-2\dfrac{x}{|x|}<0,\quad \forall x\neq 0;-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Phương trình $(2)$ có $3$ nghiệm khi $m\geq 0$.

Kết hợp với đề bài, ta có $m\in\{0;1;2;...;2020\}$. Vậy có $2021$ số thỏa điều kiện bài toán.

**Câu 14: Chọn A**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x(x-2)(x-3)(m-|x|)=x^4-6x^3+5x^2+11x-6\quad(*)$.

Vì $x=0,\ x=2,\ x=3$ không phải là nghiệm của phương trình $(*)$ nên

$$(*)\Leftrightarrow m-|x|=\frac{x^4-6x^3+5x^2+11x-6}{x(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow m-|x|=x-1-\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x}\Leftrightarrow m=x-1-\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x}+|x|.$$

Xét hàm số $f(x)=x-1-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{1}{x}+|x|=\begin{cases}2x-1-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{1}{x} & khi\ x\geq 0\\ -1-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{1}{x} & khi\ x<0\end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases}2+\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{(x-3)^2}+\dfrac{1}{x^2} & khi\ x\geq 0\\ \dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{(x-3)^2}+\dfrac{1}{x^2} & khi\ x<0\end{cases}$. Khi $f'(x)>0,\forall x\notin\{0;2;3\}$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $m>-1$.

Vì $m$ nguyên và thuộc đoạn $[-2020;2020]$ suy ra $m \in \{0;1;2;\ldots;2020\}$ nên có 2021 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 15: Chọn D**

Phương trình $\left|f\left(x^3+1\right)+3m\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^3+1\right)+3m=1 \\ f\left(x^3+1\right)+3m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^3+1\right)=1-3m \ \ (1) \\ f\left(x^3+1\right)=-1-3m \ \ (2) \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3+1\right) \Rightarrow g'(x)=3x^2.f'\left(x^3+1\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ f'\left(x^3+1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^3+1=-1 \\ x^3+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x=\sqrt[3]{-2} \\ x=1 \end{array}\right.$

$g\left(\sqrt[3]{-2}\right)=f(-1)=-3,\ g(1)=f(2)=1$.

Ta có BBT của hàm số $g(x)=f\left(x^3+1\right)$

Ta thấy PT có nhiều nhất 3 nghiệm khi và chỉ khi $-3<1-3m<1 \Leftrightarrow 0<m<\dfrac{4}{3}$ .

Tương tự: PT có nhiều nhất 3 nghiệm khi và chỉ khi $-3<-1-3m<1 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{2}{3}$ .

Vậy PT $\left|f\left(x^3+1\right)+3m\right|=1$ có đúng 6 nghiệm khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} 0<m<\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<m<\dfrac{2}{3}$

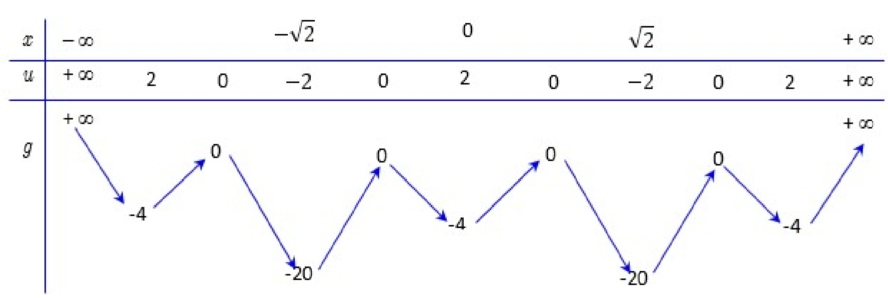
Vậy $0<m<\dfrac{2}{3}$ nên $a=0; b=\dfrac{2}{3} \Rightarrow b-a=\dfrac{2}{3}$.

**Câu 16: Chọn D**

Ta có $f(x)=x^3-3x^2; f'(x)=3x^2-6x; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Đặt $u(x)=x^4-4x^2+2; u'(x)=4x^3-8x; u'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$g(x)=f(u(x))=f\left(x^4-4x^2+2\right)$.



Phương trình có đúng 4 nghiệm khi $-20 < m < -4 \overset{m\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} m \in \{-19;-18;...;-5\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của $m$ để phương trình $f\left(x^4-4x^2+2\right)=m\ (1)$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

**Câu 17: Chọn A**

Ta có $27^x - 3^{2x+1} - \ln\left(-m+\sqrt{m^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(-m+\sqrt{m^2+1}\right) = 3^{3x} - 3.3^{2x}$

Đặt $t = 3^x > 0$. Ứng với mỗi giá trị $t > 0$ cho ta 1 giá trị của $x$.

Phương trình trở thành $\ln\left(-m+\sqrt{m^2+1}\right) = t^3 - 3t^2$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2$, $f'(t) = 3t^2 - 6t$. Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của $f(t) = t^3 - 3t^2$, $t > 0$

| $t$ | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(t)$ | 0 | ↘ | -4 | ↗ | $+\infty$ |

Suy ra phương trình $27^x - 3^{2x+1} - \ln\left(-m+\sqrt{m^2+1}\right) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \ln\left(-m+\sqrt{m^2+1}\right) > -4 \\ \ln\left(-m+\sqrt{m^2+1}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+\sqrt{m^2+1} > \dfrac{1}{e^4} \\ -m+\sqrt{m^2+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2+1} > \dfrac{1}{e^4} + m \\ \sqrt{m^2+1} < 1 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{e^8-1}{2e^4} \\ m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{e^8-1}{2e^4} \approx 27,2$. Vậy có 27 giá trị thỏa mãn.

**Câu 18: Chọn A**

Đặt $t = \sqrt[3]{3x^2+4x+m} \Rightarrow t^3 = 3x^2+4x+m \Leftrightarrow m = t^3 - 3x^2 - 4x \quad (1)$

Từ phương trình ban đầu ta có $x^3 + 2 - m = t \Leftrightarrow m = x^3 + 2 - t \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow x^3 + 2 - t = t^3 - 3x^2 - 4x \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = t^3 + t \ (*)$

Xét hàm số $f(u) = u^3 + u$ có $f'(u) = 3u^2 + 1 \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(t) \Leftrightarrow x + 1 = t$

Thế vào phương trình $(2)$ ta được $x^3 - x + 1 = m \ (**)$

Ta xét hàm số $g(x) = x^3 - x + 1$ có $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | $0$ | | $0$ | | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{9+2\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | $\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để phương trình có đúng hai nghiệm thực thì $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{9+2\sqrt{3}}{3} \\ m=\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{\dfrac{9+2\sqrt{3}}{3};\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3}\right\}$

Suy ra $\dfrac{9+2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{23}{27}$.

**Câu 19: Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^6+6x^4+6x^2+1=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ (*)

$(*)\Leftrightarrow x^3+6x+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^3}=\sqrt{m-15x}(m+3-15x)\Leftrightarrow (x+\dfrac{1}{x})[(x+\dfrac{1}{x})^2+3]=\sqrt{m-15x}[(m-15x)+3]$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{m-15x}\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ m=x^2+\dfrac{1}{x^2}+15x+2 \end{cases}$

Xét hàm $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}+15x+2,\ x>0$. Có BBT như sau:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{55}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>\dfrac{55}{4}$

Do $m\in Z$ và $m\in[-2021;2021]$ nên $m\in\{14;15;...;2021\}$. Có $2008$ giá trị.

**Câu 20: Chọn A**

Xét phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$, đặt $t=x+1-\sqrt{6x+3},x\ge-\dfrac{1}{2}$

Có $t'=1-\dfrac{3}{\sqrt{6x+3}};t'=0\Leftrightarrow x=1$. Bảng biến thiên

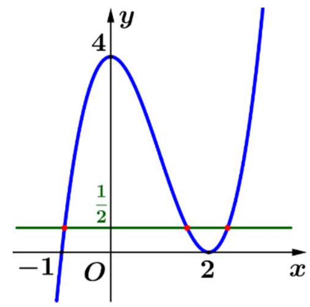
Dựa vào bảng biến thiên, ta có

Với $t<-1$: phương trình $t=0$ vô nghiệm.

Với $t>\frac{1}{2}, t=-1$: phương trình $t=0$ có 1 nghiệm.

Với $-1<t<\frac{1}{2}$: phương trình $t=0$ có 2 nghiệm.

Khi đó phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ trở thành $f(t)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm




Khi $t_1 \in (-1;0) \Rightarrow$ phương trình đã cho có 2 nghiệm

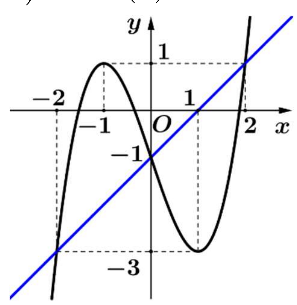
Khi $t_2 \in (1;2) \Rightarrow$ phương trình đã cho có 1 nghiệm

Khi $t_3 \in (2;+\infty) \Rightarrow$ phương trình đã cho có 1 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

**Câu 21: Chọn A**

Đặt $u=f(x)+m$ thì pt $f\left(f(x)+m\right)+1=f(x)+m$ trở thành $f(u)=u-1$




Vẽ đường thẳng $d: y=u-1$ lên cùng hệ trục với ta thấy $d$ cắt đồ thị $f(u)$ tại 3 điểm phân biệt $u=\pm 2; u=0$

$$\left[\begin{array}{l} f(x)+m=-2 \\ f(x)+m=0 \\ f(x)+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=-2-m & (1) \\ f(x)=-m & (2) \\ f(x)=2-m & (3) \end{array}\right.$$

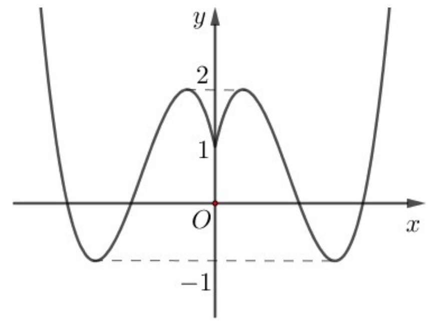
Mà trên đoạn $[-1;1]$, hàm số luôn nghịch biến nên để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $[-1;1]$ thì các phương trình, và phải có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \le 1 \\ -2-m \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

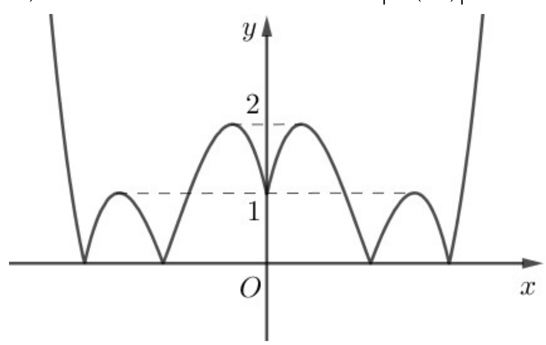
Vậy có 1 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 22: Chọn C**

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ như sau




Từ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(|x|)|$ như sau




Phương trình $|f(|x|)|=\frac{2}{9}m^2-\frac{1}{81}m^4$ có 8 nghiệm phân biệt khi chỉ khi

$0<\frac{2}{9}m^2-\frac{1}{81}m^4<1 \Leftrightarrow 0<18m^2-m^4<81$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^4-18m^2+81>0 \\ m^4-18m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-9)^2>0 \\ m^2(m^2-18)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \pm 3 \\ m\neq 0 \\ -3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2} \end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$.

**Câu 23: Chọn A**

Vì hàm số đã cho là hàm bậc ba nên suy ra điểm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là điểm uốn của đồ thị.

Ta có BBT của hàm số $y=|f(x)|$ như hình vẽ dưới đây:

| $x$ | $-\infty$ | | $p$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Phương trình $|f(x)|=m$ có 4 nghiệm phân biệt $x_1<x_2<x_3<\frac{1}{2}<x_4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<1$.

**Câu 24: Chọn B**

Ta dễ dàng xác định được hàm số đã cho là: $f(x)=x^4-2x^2-2$.

Đặt $t = x-1-\sqrt{2x-1} \Rightarrow 5f(t)+12=0 \Leftrightarrow 5\left(t^4-2t^2-2\right)+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx -1,33 (1) \\ t\approx -0,47\ (2) \\ t\approx 0,46\ (3) \\ t\approx 1,33\ (4) \end{array}\right.$.

Có $t' = 1-\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên:

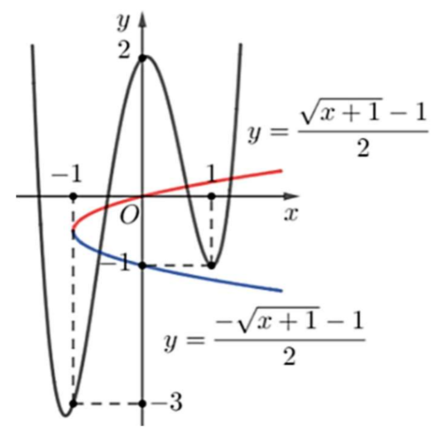
| $x$ | $0,5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $t(x)$ | $-0,5$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có: vô nghiệm, có 1 nghiệm, có 1 nghiệm, có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm.

**Câu 25: Chọn B**

Đặt $t = 4x^2-4x = (2x-1)^2-1 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = t+1 \Leftrightarrow 2x-1 = \pm\sqrt{t+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{t+1}}{2}, x>\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{t+1}}{2}, x<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$




Nếu $x>\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1+\sqrt{t+1}}{2}-1 \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{\sqrt{t+1}-1}{2}$ có 3 nghiệm

Nếu $x<\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1-\sqrt{t+1}}{2}-1 \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{-\sqrt{t+1}-1}{2}$ có 1 nghiệm

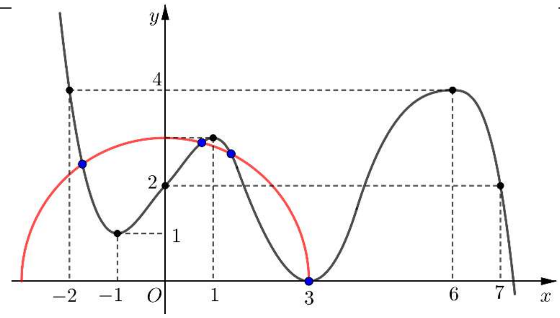
Vậy phương trình có tất cả 4 nghiệm.

**Câu 26: Chọn A**

Ta có $Pt \Leftrightarrow f(3\sin x) = 3\sqrt{1-\sin^2 x} \Leftrightarrow f(3\sin x) = \sqrt{9-9\sin^2 x}\ (1)$.

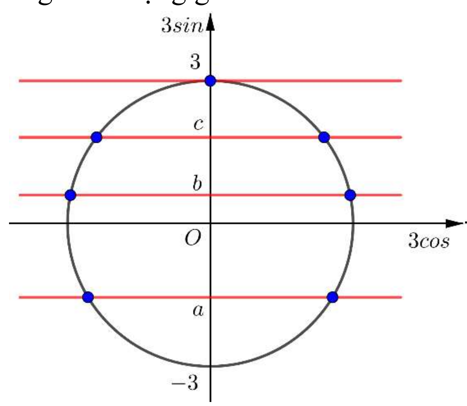
Đặt $t = 3\sin x\ \left(t\in[-3;3]\right)$. Phương trình $(1)$ trở thành $f(t)=\sqrt{9-t^2}\ (2)$.

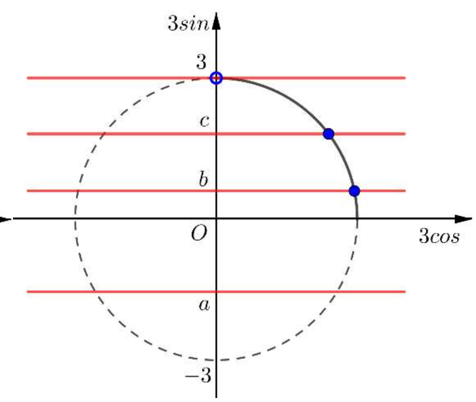
Gọi $(C)$ là đồ thị hàm số $y=\sqrt{9-t^2}$ suy ra $(C)$ là nửa trên của đường tròn tâm $O$, bán kính $R=3$.




Dựa vào đồ thị, ta có $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \in (-2;-1) \\ t = b \in (0;1) \\ t = c \in (1;3) \\ t = 3 \end{array}\right.$. Ta có $\left(0;\dfrac{9\pi}{2}\right) = \underbrace{(0;4\pi]}_{2\ vong} \cup \left(4\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right)$.

Ta xét đường tròn lượng giác như sau:




Dựa vào đường tròn lượng giác, ta thấy phương trình có $2.7+2=16$ nghiệm.

**Câu 27: Chọn C**

Ta có $g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -2 \quad (1) \\ f(x) = \alpha, (\alpha \in (0;1)) \ (2) \\ f(x) = 3 \quad (3) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình $(1)$ có 4 nghiệm; phương trình $(2)$ có 5 nghiệm và phương trình $(3)$ có 1 nghiệm. Vậy phương trình $g(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm.

Ta có $f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = -3 \quad (4) \\ g(x) = -1 \quad (5) \\ g(x) = 1 \quad (6) \\ g(x) = a, (a \in (1;2)) \ (7) \\ g(x) = b, (b \in (4;5)) \quad (8) \end{array}\right.$.

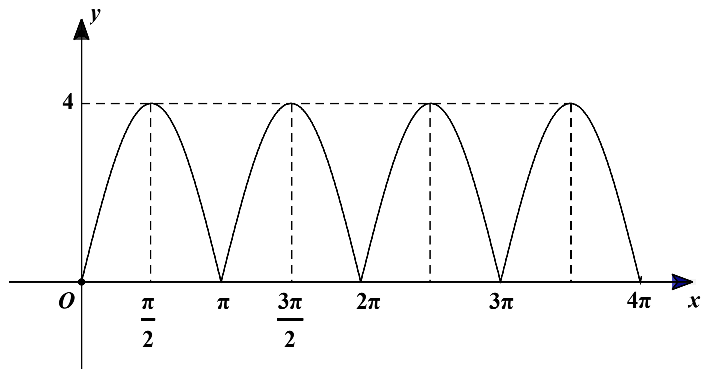
Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình $(4)$ có 1 nghiệm; phương trình $(5);(6);(7)$ mỗi phương trình có 3 nghiệm và phương trình $(8)$ có 1 nghiệm. suy ra phương trình $f(g(x)) = 0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là 21.

**Câu 28: Chọn A**

Phương trình $f\left(4\left|\sin x\right|+m\right)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\left|\sin x\right|+m=-1\ \ (1)\\ 4\left|\sin x\right|+m=2\ \ (2)\end{array}\right.$.

Ta có đồ thị hàm số $y=4\left|\sin x\right|$ trên nửa khoảng $\left(0;4\pi\right]$ như hình vẽ dưới đây




Vậy để phương trình có $12$ nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m-1=0\\ 0<2-m<4\end{cases}\\ \begin{cases}2-m=4\\ 0<-m-1<4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-2\end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của $S$ bằng $-3$.

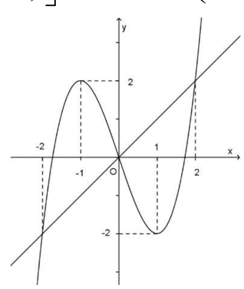
**Câu 29: Chọn B**

Ta có: $f^2\left(\sin x+\cos x\right)+1=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)f\left(\sin x+\cos x\right)-\sin 2x$

$$\Leftrightarrow f^2\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)f\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)+1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f^2\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)f\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)+2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[f\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ (1)$$




Nghiệm của phương trình $f\left(t\right)=t$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ và đường thẳng $y=t$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\ \ (vo\ nghiem)\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\ \ \ (vo\,nghiem)\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Do $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$ nên $-\dfrac{5\pi}{4}\le-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\le\dfrac{5\pi}{4}\Leftrightarrow -1\le k\le\dfrac{3}{2}$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\left\{-1;0;1\right\}$. Vậy phương trình đã cho có $3$ nghiệm.

**Câu 30: Chọn A**

Từ đồ thị ta có $f\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)f\left(x\right)\right)+2=0\Leftrightarrow f\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)f\left(x\right)\right)=-2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)f\left(x\right)=0\ \ (1)\\ \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)f\left(x\right)=1\ \ \ (2)\\ \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)f\left(x\right)=2,5\ \ (3)\\ \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)f\left(x\right)=3,5\ \ \ (4)\end{array}\right.$$

Từ suy ra $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm.

Từ ta có $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{x^2+1}-x$

Đặt $g\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}-x$. Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow g'\left(x\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

Khi đó $g\left(x\right)>0\Rightarrow f\left(x\right)>0$ dựa vào đồ thị suy ra phương trình có 2 nghiệm.

Từ suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{2,5}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{5}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)>0$ nên phương trình có 2 nghiệm.

Từ suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{3,5}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{7}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)>0$ nên phương trình có 2 nghiệm.

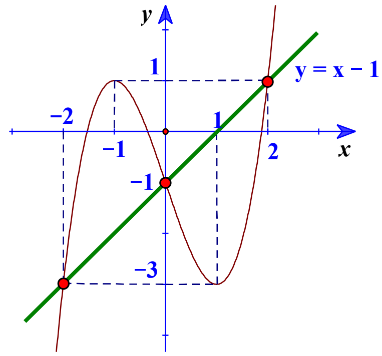
Ta thấy $g\left(x\right)\ne\dfrac{5}{2}g\left(x\right)\ne\dfrac{7}{2}g\left(x\right)\ne0$. Nên nghiệm của,,, không trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm thực.

**Câu 31: Chọn C**

Ta có $f\left(f\left(x\right)+1\right)=f\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)+1\right)+1=f\left(x\right)+1$.

Đặt $t=f\left(x\right)+1\Rightarrow f\left(t\right)+1=t\Leftrightarrow f\left(t\right)=t-1$.




Dựa vào đồ thị, phương trình $f(t)=t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-3 \\ f(x)=-1 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

Với $f(x)=-3 \Rightarrow$ có $2$ nghiệm.

Với $f(x)=-1$ có $3$ nghiệm.

Với $f(x)=1$ có $2$ nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có $7$ nghiệm.

**Câu 32: Chọn C**

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ là đồ thị hàm số như hình vẽ.

Đồ thị hàm số cắt trụ $Oy$ tại $(0;1)$ nên $d=1 \Rightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow c=0$

Đồ thị hàm số qua điểm $(-1;-3),(2;-3)$

$\Rightarrow \begin{cases} f(-1)=-3 \\ f(2)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+1=-3 \\ 8a+4b+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=-4 \\ 8a+4b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+1$.

Đặt $t=f(x)+1$, từ phương trình tương đương $\sqrt{f(t)+1}=t+1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} t+1\ge 0 \\ f(t)+1=(t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ t^3-3t^2+1+1=t^2+2t+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1 \\ t^3-4t^2-2t+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 4,4 \\ t\approx 0,3 \\ t\approx -0,7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\approx 3,4 \\ f(x)\approx -0,7 \\ f(x)\approx -1,7 \end{array}\right.$

Phương trình $f(x)\approx 3,4$ có 1 nghiệm, $f(x)\approx -0,7$ có 3 nghiệm, $f(x)\approx -1,7$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1}=f(x)+2$ có 7 nghiệm.

**Câu 33: Chọn D**

Gọi $g(x)=dx+e$, từ đồ thị có $g(x)$ làm hàm số đồng biến nên $d>0$. Do $A$, $B$ thuộc đường thẳng $g(x)$, suy ra $A(-1;-d+e)$, $B(2;2d+e)$.

Theo đề ra, ta có $AB=5 \Leftrightarrow \sqrt{9+9d^2}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\frac{4}{3}(tm) \\ d=-\frac{4}{3}(ktm) \end{array}\right. \Rightarrow g(x)=\frac{4}{3}x+e$.

Từ đồ thị, ta có $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2-x+c-e=0$ nhận $x=-1$, $x=1$, $x=2$ là nghiệm. Ta được:

$$\begin{cases} -a+b+1+c-e=0 \\ a+b-1+c-e=0 \\ 8a+4b+c-e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c-e=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)-g(x)=x^3-2x^2-x+2.$$

Vậy $f(x)=g(x)+x^2+2 \Leftrightarrow f(x)-g(x)-x^2-2=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2-x=0$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right..$$

Phương trình $f(x)=g(x)+x^2+2$ có nghiệm dương là $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ nên $m=3$, $n=13$, $p=2$

Khi đó giá trị $m+n+p=3+13+2=18$.

**Câu 35: Chọn A**

Bước 1:

$f\left(x^4-2x^2+2\right)=0$ có $8$ nghiệm

$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2+1=a \Leftrightarrow x^2-1=\pm\sqrt{a-1} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{a-1}}$

ĐK bắt buộc: $\begin{cases} 1-\sqrt{a-1}>0 \\ a-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1<1 \\ a\geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1\leq a<2$

$\Rightarrow$ Để $f\left(x^4-2x^2+2\right)=0$ có $8$ nghiệm phân biệt thì $f(x)=0$ có $2$ nghiệm thuộc khoảng $[1;2)$. Mà $f(x)=0$ có $8$ nghiệm dương nên suy ra:

$f(x)=0$ có $8$ nghiệm $\begin{cases} 2n_o \in [1;2) \\ 6n_o \in (0;1)\cup[2;+\infty) \end{cases}$

Bước 2:

$f\left(2x^3-3x^2+1\right)=0$ có $20$ nghiệm phân biệt

Xét hàm số $y=2x^3-3x^2+1$, ta có:

$(1):\begin{cases} 2x^3-3x^2+1=1\ (2n_o) \\ 2x^3-3x^2+1=0\ (2n_o) \end{cases}$ và các nghiệm $(1)$ nằm trong khoảng $(0;1)\cup[2;+\infty)$

Nếu như tồn tại $6$ điểm $x_1,x_2,...,x_6\in(0;1)$ sao cho $2x^3-3x^2+1=x_1,x_2,...,x_6$, mà mỗi phương trình có 3 nghiệm thì tổng cộng đã có 18 nghiệm cộng với $2n_o\in[1;2)$

$$\Rightarrow f(x)=0 \text{ có } \begin{cases} 2\,n_o \in [1;2) \\ 6\,n_o \in (0;1) \\ 0\,n_o \in (2;+\infty) \end{cases}.$$

**Câu 36: Chọn A**

Ta có $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x)=a & (-3<a<-1)\ (1) \\ x^3 f(x)=b & (-6<b<-3)(2) \\ x^3 f(x)=0 & (3) \end{array}\right.$.

Với $m<0$, xét phương trình $x^3 f(x)=m \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{m}{x^3}$, $g'(x)=\dfrac{-3m}{x^4}>0, \forall x \neq 0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | \|\| | $+$ |
| $g(x)$ | $0 \nearrow +\infty$ | \|\| | $-\infty \nearrow 0$ |

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.

Suy ra mỗi phương trình $(1)$ và $(2)$ có $2$ nghiệm và các nghiệm đều khác nhau.

Xét phương trình $(3): x^3 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với $c$ khác các nghiệm của $(1)$ và $(2)$.

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng $6$ nghiệm.

**Câu 37: Chọn D**

**Cách 1**:

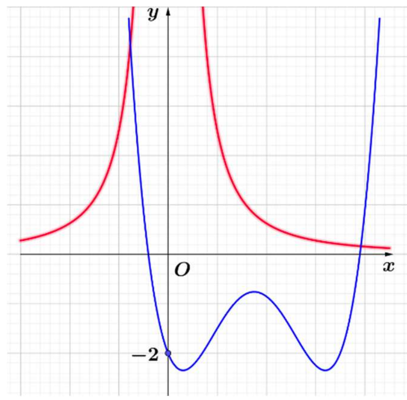
$$\text{Ta có } f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) \\ x^2 f(x)=b\in(2;3) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ f(x)=0 & (1) \\ f(x)=\dfrac{a}{x^2},\ a\in(0;1) & (2) \\ f(x)=\dfrac{b}{x^2},\ b\in(2;3) & (3) \\ f(x)=\dfrac{c}{x^2},\ c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{k}{x^2}(k>0)$, Ta có $g'(x)=-\dfrac{2k}{x^3}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | \|\| | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ | \|\| | $+\infty$ $\searrow$ | $0$ |

Đồ thị của $f(x)$ và $g(x)$ được mô tả như sau:




Do đó ta có:,, và mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 9 nghiệm.

**Cách 2**:

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) \\ x^2 f(x)=b\in\left(2;3\right) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ f(x)=0 & (1) \\ f(x)-\dfrac{a}{x^2}=0,\ a\in(0;1) & (2) \\ f(x)-\dfrac{b}{x^2}=0,\ b\in\left(2;3\right) & (3) \\ f(x)-\dfrac{c}{x^2}=0,\ c\in(3;4) & (4)\end{array}\right.$

có 2 nghiệm phân biệt là $x=\alpha<0, x=\beta>3$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{x^2}(k>0)$ có $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2k}{x^3}$. Ta có:

Khi $x\in\left[\alpha;\beta\right]$ thì $g(x)<0$ nên các phương trình, và không có nghiệm $x\in\left[\alpha;\beta\right]$.

+) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\alpha^-} g(x)=-\dfrac{k}{\alpha^2}<0 \\ g'(x)<0,\forall x\in(-\infty;\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow$ Mỗi phương trình, và chỉ có đúng một nghiệm $x\in\left(-\infty;\alpha\right)$

+) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\beta^+} g(x)=-\dfrac{k}{\beta^2}<0 \\ g'(x)>0,\forall x\in(\beta;+\infty),\beta>3\end{array}\right\}\Rightarrow$ Mỗi phương trình, và đều chỉ có đúng một nghiệm $x\in\left(\beta;+\infty\right)$

Suy ra mỗi phương trình,, và có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm.

**Cách 3**:

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 f(x)=0 & (1) \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) & (2) \\ x^2 f(x)=b\in\left(2;3\right) & (3) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$

Ta có có ba nghiệm phận biệt là $x=0, x=\alpha<0, x=\beta>3$.

Xét $g(x)=x^2 f(x)$ có $g'(x)=2xf(x)+x^2 f'(x)$

- Với $x\in\left[\alpha;\beta\right]$ thì $g(x)=x^2 f(x)\le 0$ nên,, không có nghiệm $x\in\left[\alpha;\beta\right]$.
- Với $x\in\left(-\infty;\alpha\right)$ ta có: $g'(x)<0$. Và với $x\in\left(\beta;+\infty\right)$, $\beta>3$, thì $g'(x)>0$ nên ta có bảng biến thiên của $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do đó các phương trình,, đều có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

**Câu 38: Chọn B**

$y=g(x)=f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)$ với $g(x)=\dfrac{1}{2021}$

Ta đặt: $t=\sqrt{4-x^2}, \forall x\in\left[-2;2\right]$ thì suy ra $y=g(t)=f\left(\left|t-\left|t^2-3\right|\right|\right), \forall t\in\left[0;2\right]$

Suy ra: $h(t)=t-\left|t^2-3\right|=\begin{cases} t^2+t-3, t\in\left[0;\sqrt{3}\right] \\ -t^2+t+3, t\in\left[\sqrt{3};2\right] \end{cases}$.

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:

| $t$ | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(t)$ | $-3$ | $\nearrow$ | $\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $1$ |

Đặt $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ thì ta cũng có BBT của $u$ như sau:

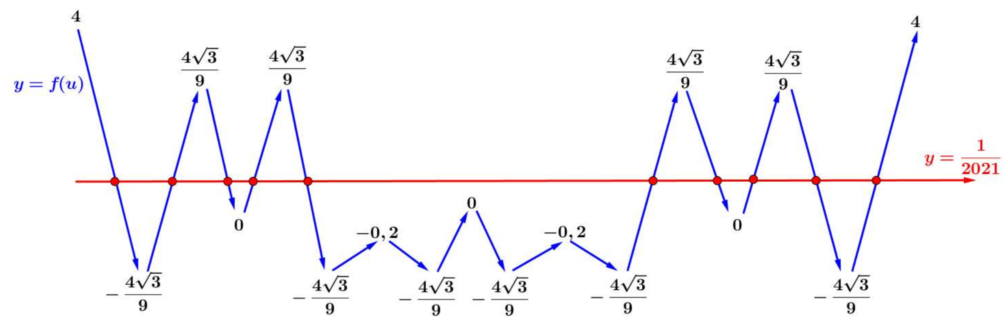
| x | −2 | | | | 0 | | | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 0 | | | | 2 | | | | 0 |
| t − \|t²− 3\| | −3 | | $\sqrt{3}$ | | 1 | | $\sqrt{3}$ | | −3 |
| \|t − \|t² − 3\|\| | 3 | 0 | $\sqrt{3}$ | | 1 | | $\sqrt{3}$ | 0 | 3 |

Nhìn vào đồ thị $y=f(x)$ trên ta có được $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+cx, a\neq 0 \\ f(1)=f(2)=0, f''(1)=0 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{2}{3}>0$

Như vậy ta suy ra $f(x)=\dfrac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x=x_0$ nên suy ra $f(x_0)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}\Rightarrow x_0=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Như vậy: $f(3)=4, f\left(\sqrt{3}\right)=-0,2, f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}$

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y=f(u)$ với $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ như sau:




Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x)=\dfrac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

**Câu 39: Chọn B**

Do hàm $y=f(x)$ là hàm bậc bốn, cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1<x_2<x_3<x_4$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$ nên đồ thị hàm $y=f(x)$ có dạng: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

Ta có:

$f'(x)=a\left[(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\right]$

Khi đó: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}$.

Suy ra:

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\frac{1}{(x-x_4)^2}<0$$

$\forall x\neq x_i, i=1,\ldots,4$

$\Rightarrow y=f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2<0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $y=2021^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2=2021^x$ vô nghiệm.

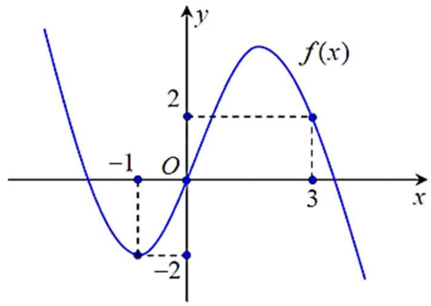
**Câu 40: Chọn B**

Ta có: $\dfrac{\left|x^2-3x\right|}{x^2-3x}f\left(x^2-2x\right)=-2\quad (1)$.

**Trường hợp 1:** $x^2-3x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

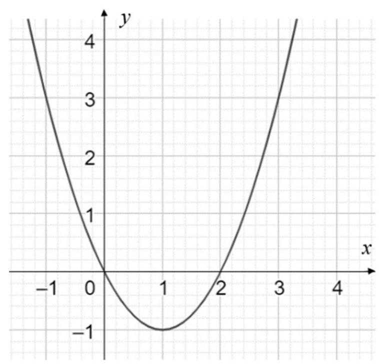
$(1)\Leftrightarrow f\left(x^2-2x\right)=-2\quad (2)$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $d_1: y=-2$ và đồ thị $(C): y=f(x)$. Dựa vào hình vẽ:




$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=a,\ \ a>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=a,\ \ a>3 \end{array}\right.$. $(x=1 \notin (-\infty;0)\cup(3;+\infty))$

Xét đồ thị hàm số $y=x^2-2x$:




Dựa vào đồ thị trên suy ra phương trình $x^2-2x=a,\ \ a>3$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<-1$ và $x_2>3$

Vậy phương trình $(1)$ có 2 nghiệm thõa mãn bài toán.

**Trường hợp 2:** $x^2-3x<0 \Leftrightarrow x\in(0;3)$.

$(1) \Leftrightarrow f\left(x^2-2x\right)=2 \quad (3)$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $d_2: y=2$ và đồ thị $(C): y=f(x)$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ đã cho, suy ra:

$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=3 \\ x^2-2x=b, b<-1 \\ x^2-2x=c,\ \ 0<c<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x^2-2x=b, b<-1 \\ x^2-2x=c, 0<c<3 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ suy ra:

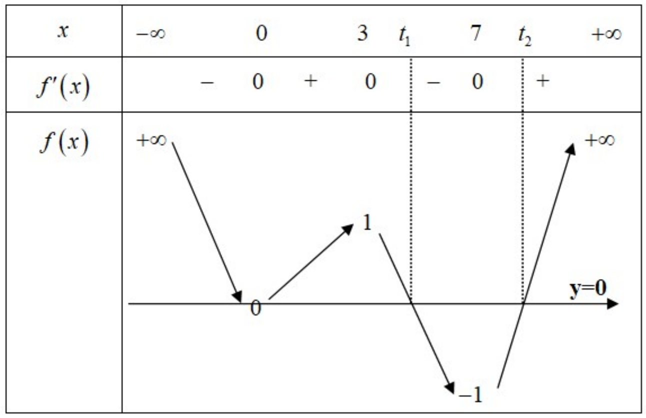
Khi $x^2-2x=b,\ \ b<-1$ vô nghiệm.

Khi $x^2-2x=c, 0<c<3$ có hai nghiệm phân biệt, chỉ có một nghiệm thõa mãn $x\in(0;3)$.

Vậy phương trình $(1)$ có 1 nghiệm thõa mãn bài toán.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm thực.

**Câu 41: Chọn B**

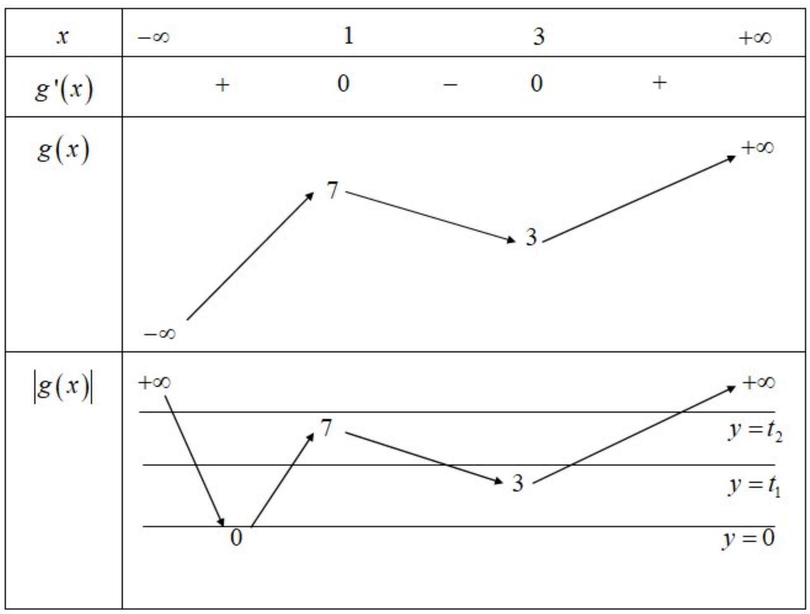



$$f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left|x^3-6x^2+9x+3\right|=0\\ \left|x^3-6x^2+9x+3\right|=t_1\in(3;7)\\ \left|x^3-6x^2+9x+3\right|=t_2\in(7;+\infty)\end{array}\right.$$

Đặt $g(x)=x^3-6x^2+9x+3$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$g'(x)=3x^2-12x+9$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên




Vậy phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ có 7 nghiệm.

**Câu 42: Chọn B**

Ta có $\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)=0\Leftrightarrow f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2=0$ $(*)$

Giả sử $x_0$ là một nghiệm của $(*)$. Nếu $f(x_0)=0$ thì từ $(*)$ suy ra $f'(x_0)=0$. Điều này vô lý vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ không tiếp xúc với trục hoành. Do đó $f(x_0)\neq 0$.

Vì vậy, $(*)\Leftrightarrow \dfrac{f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left(f(x)\right)^2}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'=0$.

Từ hình vẽ ta thấy, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3, x_4$.

Ta có $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4), (a>0)$.

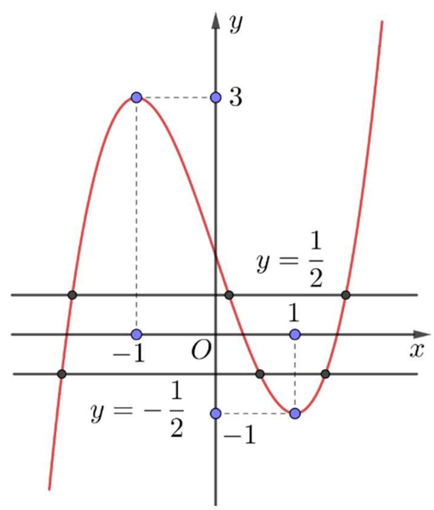
Dễ thấy $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}$ nên

$(*) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x-x_1)^2}-\dfrac{1}{(x-x_2)^2}-\dfrac{1}{(x-x_3)^2}-\dfrac{1}{(x-x_4)^2}=0$.

**Câu 43: Chọn D**

Ta có $g(x).[2g(x)-1]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ g(x)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|f(x^2)\right|=0 \\ \left|f(x^2)\right|=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x^2)=0 & (1) \\ f(x^2)=\dfrac{1}{2} & (2) \\ f(x^2)=-\dfrac{1}{2} & (3) \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra




$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=a<-1 \\ x^2=b\in(0;1) \\ x^2=c>1 \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=d<-1,(d\neq a) \\ x^2=e\in(0;1),(e\neq b) \\ x^2=f>1,(f\neq c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=m<-1,(m\neq d,a) \\ x^2=n\in(0;1),(n\neq e,b) \\ x^2=p>1,(p\neq f,c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình và 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

Vậy phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ có tất cả 12 nghiệm.

**Câu 44: Chọn C**

Ta có: $\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2-(2m+1)f\left(x^2+1\right)+m(m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^2+1\right)=m \\ f\left(x^2+1\right)=m+1 \end{array}\right.$

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow t\ge 1 \Rightarrow f(t)\in[-1;+\infty)$

Phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{ll} f(t)=m & (1) \\ f(t)=m+1 & (2) \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi $(1)$ hoặc $(2)$ có nghiệm $t\ge 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge -1 \\ m+1\ge -1 \end{array}\right. \Rightarrow m\ge -2$.

Phương trình đã cho có số nghiệm thực phân biệt là số chẵn trong các trường hợp sau:

**Trường hợp 1**: Cả hai phương trình $(1)$ và $(2)$ đều có nghiệm $t>1 \Rightarrow \begin{cases} m\ge -1 \\ m+1\ge -1 \\ m\ne 1 \\ m+1\ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ge -1 \\ m\ne 1 \\ m\ne 0 \end{cases}$.

**Trường hợp 2:** Phương trình $(2)$ và phương trình $(1)$ vô nghiệm

$\Rightarrow \begin{cases} m<-1 \\ m+1\ge -1 \Rightarrow -2\le m<-1 \Rightarrow m\in[-2;10]\setminus\{0;1\} \\ m+1\ne 1 \end{cases}$.

Số phần tử của $S$ là 11.

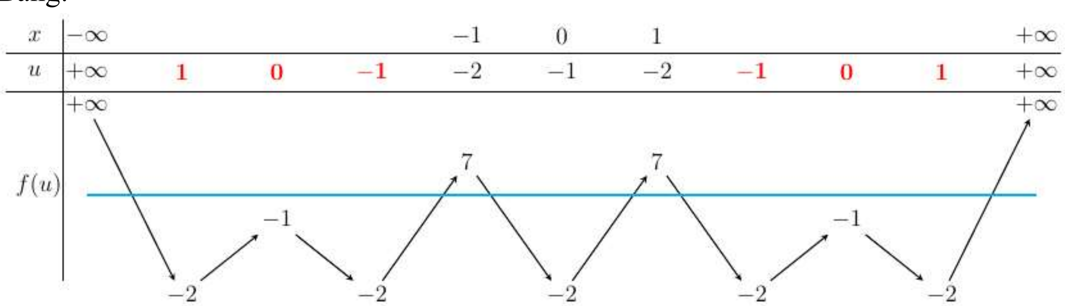
**Câu 45: Chọn C**

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=0$ hoặc $x=1$.

Đặt $u=\left|x^2-1\right|-2$. Ta có $u'=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$.

Đạo hàm: $u'=0 \Leftrightarrow x=0$; $u'$ không xác định khi $x=\pm 1$.

Bảng:

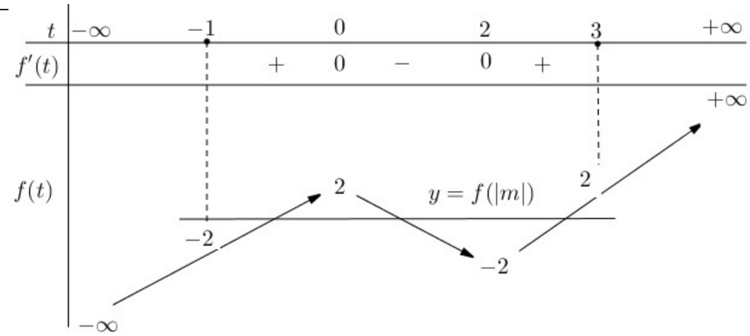



Để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thì $-1<m<7$.

Với $m\in\mathbb{Z}$ thì $m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Vậy có 7 giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 46: Chọn A**

Đặt $t=1-2\sin x$ từ $-1\le \sin x\le 1$ suy ra $t\in[-1;3]$ do đó ta có bảng biến thiên của $y=f(t)$




Từ bảng biến thiên, phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=f\left(|m|\right)$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

$-2 \le f\left(|m|\right) \le 2 \Leftrightarrow -1 \le |m| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le m \le 3$.

Vậy có tất cả là $7$ số nguyên thỏa mãn bài toán.

**Câu 47: Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ là

$\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(m-|x|\right)=-x^4+6x^3-5x^2-16x+18 \ (1)$

Ta thấy $x=1,\ x=2,\ x=3$ không là nghiệm của $(1)$ nên

$$(1)\Leftrightarrow m=|x|+\frac{-x^4+6x^3-5x^2-16x+18}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)} \quad (2)$$

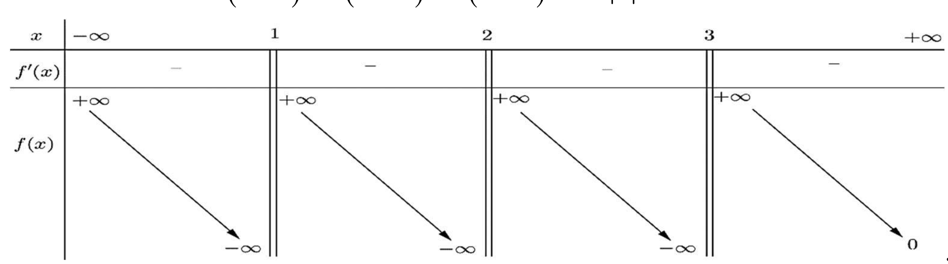
Biến đổi $\dfrac{-x^4+6x^3-5x^2-16x+18}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=-x+a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{d}{x-3}$

Đồng nhất thức hai vế ta xác định được $a=0;\ b=1;\ c=2;\ d=3$ nên

$(2)\Leftrightarrow m=|x|-x+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=|x|-x+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$.

Ta có $f'\left(x\right)=-\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}-\dfrac{2}{\left(x-2\right)^2}-\dfrac{3}{\left(x-3\right)^2}+\dfrac{x-|x|}{|x|}<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3\}$




Bảng biến thiên của hàm $f\left(x\right)$

Từ bảng biến thiên, để phương trình $(1)$ có $4$ nghiệm phân biệt thì $m>0$

Vì $m$ nguyên thuộc đoạn $\left[-2021;2021\right]$ nên $m\in\{1;2;3;...;2021\}$. Vậy có $2021$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 48: Chọn A**

Theo đề bài ta chỉ xét $x>0$. Điều kiện của phương trình đã cho: $\begin{cases} m>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Theo hình vẽ ta dễ dàng tìm được hàm số $f\left(x\right)=x^4-2x^2+1$

Ta có: $\log\frac{f(x)}{mx^2}+x\left[f(x)-mx\right]=mx^3-f(x)$

$\Leftrightarrow \log f(x)-\log mx^2+xf(x)-mx^2=mx^3-f(x)$

$\Leftrightarrow \log f(x)+xf(x)+f(x)=\log mx^2+mx^3+mx^2$

$\Leftrightarrow \log f(x)+(x+1)f(x)=\log mx^2+(x+1)mx^2$

$\Leftrightarrow \log\left[f(x).(x+1)\right]+(x+1)f(x)=\log\left[mx^2(x+1)\right]+(x+1)mx^2,(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log t+t,(t>0)\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t\ln 10}+1>0,\forall t>0$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Từ $(1)$ suy ra.

$f(x).(x+1)=(x+1)mx^2\Leftrightarrow f(x)=mx^2\Leftrightarrow m=\frac{f(x)}{x^2}$

$\Leftrightarrow m=\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}=x^2-2+\frac{1}{x^2}$

Đặt: $g(x)=x^2-2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow g'(x)=2x-\frac{2}{x^3};g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Dễ thấy TCĐ $x=0$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | \|\| | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Như vậy YCBT $\Leftrightarrow m>0$. Kết hợp điều kiện ta có $m\in\{1,2,3,...,2021\}$

Vậy có $2021$ giá trị $m$.

**Câu 49: Chọn C**

Ta có: $f\left(2f(x)-1\right)=m\Leftrightarrow f\left(2x^3-6x^2-1\right)=m$

Dưới đây là bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+5$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Đặt $u=2x^3-6x^2+9$; $u'=6x^2-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

| $x$ | $-\infty$ | | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $9$ | $2$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f(u)$ | $-\infty$ | $5$ | $1$ | $491$ | $1$ | $3$ | $1$ | $+\infty$ |

Để phương trình $f\left(2x^3-6x^2-1\right)=m$ có đúng 3 nghiệm thực $x$ thì $5<m<491$.

Suy ra có 485 số nguyên $m$ thỏa mãn.

**Câu 50: Chọn A**

$$\left|x^4-8x^2\right|-mx+2m-16=0 \Leftrightarrow \left|x^4-8x^2\right|-16=m(x-2) \quad (1).$$

Ta có phương trình có một nghiệm $x=2$.

Xét $x\neq 2$ ta có $\left|x^4-8x^2\right|-16=m(x-2)\Leftrightarrow m=\dfrac{\left|x^4-8x^2\right|-16}{x-2}$ $(2)$.

Để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình có 5 nghiệm phân biệt khác 2.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\left|x^4-8x^2\right|-16}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{x^4-8x^2-16}{x-2}\ ,\ x\le -2\sqrt{2}\vee x\ge 2\sqrt{2}\\ -x^3-2x^2+4x+8\ ,-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}\end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+4x-4+\dfrac{32}{(x-2)^2},\ x<-2\sqrt{2},\ x>2\sqrt{2}\\ -3x^2-4x+4\ ,\ -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}\end{cases}.$$

Với $x<-2\sqrt{2},\ x>2\sqrt{2}$ ta có $f'(x)=3x^2+4x-4+\dfrac{32}{(x-2)^2}$.

Vì $3x^2+4x-4>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

$\Rightarrow 3x^2+4x-4>0,\forall x\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Suy ra $f'(x)=3x^2+4x-4+\dfrac{32}{(x-2)^2}>0,\forall x\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$

Với $-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$ ta có $f'(x)=-3x^2-4x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{2}$ | | $-2$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $8\left(\sqrt{2}-1\right)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{256}{27}$ | $\searrow$ | $-8\left(\sqrt{2}+1\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Phương trình có 6 nghiệm khi $0<m<8\left(\sqrt{2}-1\right),m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$.

Suy ra có 3 giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn.

**Câu 51: Chọn A**

Đặt $u=\sqrt[3]{f(x)+m}\Leftrightarrow m=u^3-f(x)$ $(1)$, thay vào phương trình ban đầu, ta được: $f(u)=x^3-m\Leftrightarrow m=x^3-f(u)$ $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra: $m=x^3-f(u)=u^3-f(x)\Leftrightarrow x^3+f(x)=u^3+f(u)$.

Xét hàm số $g(t)=f(t)+t^3=\dfrac{4}{3}t^3+8t \Rightarrow g'(t)=4t^2+8>0$ nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra: $m=f(x)+x^3=f(u)+u^3 \Leftrightarrow x=u \Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}x^3-8x.$

Xét hàm số: $h(x)=\dfrac{2}{3}x^3-8x \Rightarrow h'(x)=2x^2-8=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $32/3$ | $\searrow$ | $-32/3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$y=m$

Để phương trình luôn có 3 nghiệm phân biệt thì $-\dfrac{32}{3}<m<\dfrac{32}{3}$.

Kết hợp với điều kiện $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow -10\le m\le 10$, nên có tất cả 21 giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 52: Chọn C**

Ta có: $x^3-15x-|3x-m|=0 \Leftrightarrow x^3-15x=|3x-m|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-15x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3-15x=3x-m \\ x^3-15x=-3x+m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge\sqrt{15} \\ -\sqrt{15}\le x\le 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=-x^3+18x \\ m=x^3-12x \end{array}\right. \end{cases}.$$

Xét hàm $f(x)=-x^3+18x$ với $x\in\left[-\sqrt{15};0\right]\cup\left[\sqrt{15};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=-3x^2+18$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$.

Xét hàm $g(x)=x^3-12x$ với $x\in\left[-\sqrt{15};0\right]\cup\left[\sqrt{15};+\infty\right)$.

Ta có: $g'(x)=3x^2-12$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

| $x$ | | $-\sqrt{15}$ | | $-\sqrt{6}$ | | $0$ | | $\sqrt{6}$ | | $\sqrt{15}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | | | | | | $-$ | |
| $f(x)$ | | $-3\sqrt{15}$ | $\searrow$ | $-12\sqrt{6}$ | $\nearrow$ | $0$ | | | | $3\sqrt{15}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

| $x$ | | $-\sqrt{15}$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $\sqrt{15}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $+$ | $0$ | $-$ | | | | | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-3\sqrt{15}$ | $\nearrow$ | $16$ | $\searrow$ | $0$ | | | | $3\sqrt{15}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

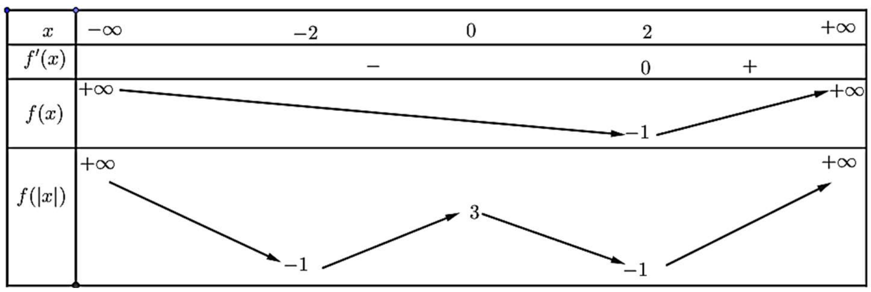
Theo bảng biến thiên của hàm $f(x), g(x)$ số nghiệm của phương trình $x^3-15x-|3x-m|=0$ là tổng số giao điểm của đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm $y=f(x); y=g(x)$. Suy ra phương trình $x^3-15x-|3x-m|=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-12\sqrt{6}<m<16$. Vậy có 45 giá trị nguyên của $m$ để phương trình có 3 nghiệm.

**Câu 53: Chọn D**

Xét hàm $y=f(x)=x^2-4x+3$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=2x-4$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ và hàm số $y=f(|x|)$




Ta có $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|)=-1 \\ f(|x|)=m-5 \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta có

Phương trình $f(|x|)=-1$ có hai nghiệm phân biệt $x=\pm 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(|x|)=m-5$ có bốn nghiệm thực phân biệt khác $\pm 2$ $\Leftrightarrow -1<m-5<3$ $\Leftrightarrow 4<m<8$. Vậy tập $S=\{5;6;7\}$. Tổng các phần tử của tập $S$ là $5+6+7=18$.

**Câu 54: Chọn D**

Ta có: hệ số $a=1>0$ và $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và 1 điểm thuộc trục hoành.

$f'(x)=3x^2-\frac{m}{2}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{m}{6}}\ (m>0)$.

**Trường hợp 1:** $\left(\sqrt{\frac{m}{6}}\right)^3-\frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{6}}+m-8=0 \Leftrightarrow m=24$.

$m=24: f(x)=x^3-12x+16$.

Phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k\in(0;32)$.

Có 31 giá trị nguyên của $k$ thỏa mãn.

**Trường hợp 2:** $-\left(\sqrt{\frac{m}{6}}\right)^3+\frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{6}}+m-8=0 \Leftrightarrow m=6$.

$m=6: f(x)=x^3-3x-2$.

$f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k\in(-4;0)$.

Có 3 giá trị nguyên của $k$ thỏa mãn. Vậy có 34 giá trị nguyên của $k$ thỏa mãn.

**Câu 55: Chọn D**

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Ta có: $\dfrac{2\sin x+1}{2} = \sin x + \dfrac{1}{2} \in \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right) \in [0;1]$ nên $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right) \in [0;1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \le f(m) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \ge 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{3}{2}$. Vậy $4a^2 + 8b = 4.\dfrac{1}{4} + 8.\dfrac{3}{2} = 13$.

**Câu 56: Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3;-2;-1;0\}$

Với điều kiện trên, phương trình trở thành

$4 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} = |x+2| - x - m \quad (*)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} - 4 + |x+2| - x = m$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3} - 4 + |x+2| - x$ với tập xác định $D$. Ta có

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{x+2}{|x+2|} - 1 < 0, \forall x \in D$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | \|\| | $-$ | \|\| | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $-2$ |

Để $(C_1)$ và $(C_2)$ cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt. Từ bảng biến thiên suy ra tất cả các giá trị $m$ cần tìm là $m \le -2$.

# VI. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là $(C)$ và $I(-1;1)$. Tiếp tuyến $\Delta$ của $(C)$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $(C)$ lần lượt tại $A;B$ sao cho chu vi tam giác $IAB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó chu vi nhỏ nhất của tam giác $IAB$ là

**A.** $2\sqrt{3}+4\sqrt{6}$ . **B.** $4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

**Câu 2 :** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là $(C)$. Có bao nhiêu điểm thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường tiệm cận của $(C)$ một tam giác nhận gốc toạ độ làm tâm đường tròn nội tiếp.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 3:** Cho hàm số $y=\dfrac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}$ trong đó $m$ là tham số khác $0$. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị thực của $m$ để tại giao điểm của đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến sẽ vuông góc với đường thẳng $x+y-2020=0$. Khi đó tổng giá trị các phần tử thuộc $S$ bằng

**A.** $-\dfrac{6}{5}$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** $-1$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

**Câu 4:** Cho hàm số $y=2x^3+3ax^2+b$ có đồ thị $(C)$. Gọi $A,B$ lần lượt là hai điểm phân biệt thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $A,B$ có cùng hệ số góc bằng $6$. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến đường thẳng $AB$ bằng $1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2a^2+(a+b)^2$ bằng

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $6$. **D.** $7$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x-1)+\dfrac{f(x-1)}{x}=3x+2$ và $f(1)=6$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng $3$ là.

**A.** $y=-9x+7$. **B.** $y=9x-7$. **C.** $y=9x+7$. **D.** $y=-9x-7$.

**Câu 6:** Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, đồng thời thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2+3f(x)=x+3$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

**A.** $y=5x+4$. **B.** $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$ . **C.** $y=-5x+9$. **D.** $y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{6}{5}$.

**Câu 7:** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ sao cho parabol $(P): y=4x^2+(m-2)x-3m$ cắt đồ thị $(C): y=2x^3-3x^2+3$ tại ba điểm phân biệt $A$, $B$, $C(3;30)$ mà tiếp tuyến với $(C)$ tại $A$ và tại $B$ vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của $S$.

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $5$.

**Câu 8:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị $(C)$. Điểm $M(a;b)$ với $a>0$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ là lớn nhất. Khi đó $a+b$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị $(C)$. Có bao nhiêu điểm $M$ thuộc trục $Oy$, có tung độ là số nguyên âm và thỏa mãn từ điểm $M$ kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị $(C)$ sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm cùng một phía của trục $Ox$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 10:** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3mx^2-2mx+16m-7$ có đồ thị là $(C_m)$. Gọi $M$ là điểm cố định có tung độ nguyên của $(C_m)$ và $\Delta$ là tiếp tuyến của $(C_m)$ tại điểm $M$. Gọi $S$ là tập các giá trị của tham số $m$ để $\Delta$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tính tổng các phần tử của $S$.

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $\dfrac{12}{7}$. **D.** $\dfrac{11}{7}$.

**Câu 11:** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị $(C)$. Gọi $M$ là điểm nằm trên đồ thị $(C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên đường thẳng $\Delta: 3x-y=0$. Tính độ dài đoạn thẳng $OM$, biết điểm $M$ có tung độ dương.

**A.** $OM=\sqrt{34}$. **B.** $OM=\sqrt{5}$. **C.** $OM=7$. **D.** $OM=5$.

**Câu 12:** Tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-1}{x+3}$ cùng với hai tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng

**A.** 35. **B.** 39. **C.** 32. **D.** 33.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left[f(8x+1)\right]^2+\left[f(1-x)\right]^5=x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

**A.** $y=\dfrac{1}{21}x-\dfrac{20}{21}$. **B.** $y=-\dfrac{1}{21}x-\dfrac{20}{21}$. **C.** $y=\dfrac{1}{21}x-\dfrac{15}{21}$. **D.** $y=-\dfrac{1}{21}x+\dfrac{20}{21}$.

**Câu 14:** Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+3)=g(x)+x^2-10x+5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(4)=f'(4)=5$. Tiếp tuyến của hàm số $y=g(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

**A.** $y=13x-4$. **B.** $y=-13x+4$. **C.** $y=-13x-4$. **D.** $y=13x+4$.

**Câu 15:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình $f^2(2-x)=x-1-f^3(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Gọi $(d): y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ của hàm số $y=f(x)$ tại $x=1$. Khi đó $a+b$ bằng

**A.** $-5$. **B.** $5$. **C.** $1$. **D.** $-1$.

**Câu 16:** Cho đường cong $(C): y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$. Có bao nhiêu đường thẳng $d$ tiếp xúc $(C)$ tại ít nhất hai điểm?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 17:** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2+(m^2+3)x-1$ có đồ thị là. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị $m$ sao cho tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của song song với đường thẳng $y=-5x-\sqrt{3}$. Tổng các phần tử của S là

**A.** 1. **B.** $-2$. **C.** $\frac{-7}{3}$. **D.** $\frac{-4}{3}$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+1}$ có đồ thị $(C)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho tiếp tuyến với $(C)$. tại $A$ và $B$ lần lượt có hệ số góc là $k_1$, $k_2$ thỏa mãn $201(k_1+k_2)+\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=2020k_1^{2020}.k_2^{2020}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử của $S$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-10;0)$. **B.** $(1;10)$. **C.** $(11;20)$. **D.** $(21;30)$.

**Câu 19:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $(C)$. Biết $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ tại $x=2$ là

**A.** $y=-x+1$. **B.** $y=2x-2$. **C.** $y=-2x+2$. **D.** $y=4x+4$.

**Câu 20:** Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x}$. Giả sử $M$ có hoành độ $m, m>0$ thuộc đồ thị $(C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt trục tung và hoành lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $S_{\Delta IAB}=12$ trong đó $I$ là giao điểm của 2 đường tiệm cận. Khi đó giá trị $m$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(8;25)$. **B.** $(-23;2)$. **C.** $(-6;9)$. **D.** $(15;27)$.

**Câu 21:** Cho hàm số đa thức $f(x)$ là hàm số chẵn. Gọi $\Delta$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hệ số góc nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\Delta$ vuông góc với trục tung.
**B.** $\Delta$ qua $O$.
**C.** $\Delta$ song song với đường thẳng $y=x$.
**D.** $\Delta$ song song với đường thẳng $y=-x$.

**Câu 22:** Cho đồ thị $(C_m)$ hàm số $y=\frac{x+m}{x+2}$. Gọi $A$, $B$ lần lượt là giao điểm của đồ thị $(C_m)$ với trục $Ox$ và $Oy$. Gọi $k_1$, $k_2$ lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của $(C_m)$ tại $A$ và $B$. Giá trị nhỏ nhất của $|k_1+k_2|$ là

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $2$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

**Câu 23:** Hàm số $y=\dfrac{x+7}{x-2}$ có đồ thị, gọi I là tâm đối xứng của. Đường thẳng $d: y=ax+b$ là tiếp tuyến của, biết d cắt 2 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của lần lượt tại M và N sao cho $\Delta IMN$ cân tại I. Khi đó $b$ có giá trị bằng

**A.** $b=9$. **B.** $b=13$. **C.** $\left[\begin{array}{l}b=9\\b=-3\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}b=13\\b=-7\end{array}\right.$.

**Câu 24:** Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng là một parabol thỏa mãn điều kiện $y'=2\sqrt{y}$ và $f(1)=0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có tung độ bằng $4$ là

**A.** $y=-4x,\ \ y=-4x-8$. **B.** $y=4x,\ \ y=4x-8$.

**C.** $y=-4x,\ y=4x-8$. **D.** $y=4x,\ \ y=-4x-8$.

**Câu 25:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết $f'(x)>-1; f(1)=3$ và $\left[f'(x)+1\right]^2=9x^2+9x.f(x)$. Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng $4$ của đồ thị $(C)$ hàm số: $g(x)=f(x)+x$ là

**A.** $k=9$. **B.** $81$. **C.** $k=54$. **D.** $27$.

**Câu 26:** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2+9x+m$ có đồ thị $(C_m)$. Biết đồ thị $(C_m)$ cắt trục hoành tại ba điểm $A,B,C$ có hoành độ lần lượt là $x_1,x_2,x_3$ $(x_1<x_2<x_3)$, đồng thời tiếp tuyến tại $A$ và $C$ song song với nhau. Viết phương trình tiếp tuyến tại $B$.

**A.** $y=3x-6$. **B.** $y=3x-30$. **C.** $y=-3x+6$. **D.** $y=-3x+30$.

**Câu 27:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ $(C)$, gọi $I$ là tâm đối xứng của đồ thị $(C)$ và $M(a;b)$ là một điểm thuộc đồ thị $(C)$. Tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ tại điểm $M$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị $(C)$ lần lượt tại hai điểm $A$ và $B$. Để tam giác $IAB$ có chu vi nhỏ nhất thì tổng $|2a+b|$ gần nhất với số nào sau đây.

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $-3$.

**Câu 28:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị $(H)$. Gọi $M$, $N$ là 2 điểm thuộc $(H)$ sao cho khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến tiếp tuyến tại $M$, $N$ bằng 2. Khi đó $x_M+x_N$ bằng

**A.** 2. **B.** $-2$. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 29:** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x)=f(f(x))$ tại điểm $x=3$.

**A.** $y=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{9}{8}$. **B.** $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{12}{5}$. **C.** $y=\dfrac{1}{16}x+\dfrac{21}{16}$. **D.** $y=\dfrac{1}{25}x+\dfrac{27}{25}$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là. Giả sử tiếp tuyến của tại điểm có hoành độ $x=0$ là đường thẳng $y=x+1$. Khi đó: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{f(x)-3f(3x)+2f(2x)}$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{-1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{-1}{3}$.

**Câu 31:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=2$. Gọi $d_1,d_2$ lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)=xf\left(4x-6\right)$ tại $x=2$. Mệnh đề nào sau đây là điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng $d_1,d_2$ có tích hệ số góc bằng $-2$?

**A.** $\left|f\left(2\right)\right|\ge 4\sqrt{2}$. **B.** $-8\le f\left(2\right)\le 8$. **C.** $f\left(2\right)\ge 8$. **D.** $\left|f\left(2\right)\right|\ge 8$.

**Câu 32:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(3x\right)+3f\left(1-3x\right)=9x^2+3x$. Gọi $\left(d\right): y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 0. Khi đó $a+3b$ bằng

**A.** $1$. **B.** $-1$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 33:** Cho hàm số $y=x^3-6x^2+28$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho từ $M\left(m;-4\right)$ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới $\left(C\right)$. Số các phần tử của tập $S$ là

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $d_1$, $d_2$ lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2f\left(2x-1\right)$ và $y=xf\left(2x-1\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ có hệ số góc lần lượt là $2020$ và $2021$. Giá trị của $f\left(1\right)$ bằng:

**A.** $2020$. **B.** $2021$. **C.** $1$. **D.** $-1$.

**Câu 35:** Cho hàm số $y=x^3-\sqrt{3}x$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm $x=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ và hai tiếp tuyến khác tại điểm $A$ và $B$ tạo thành tam giác đều. Biết tung độ tại $3$ tiếp điểm đó đều không âm, khi đó tổng hoành độ của $A$ và $B$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

**Câu 36:** Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Trên đồ thị $\left(C\right)$ có bao nhiêu cặp điểm mà tiếp tuyến tại hai điểm đó song song với nhau đồng thời khoảng cách giữa cặp điểm đó bằng $4\sqrt{2}$?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 37:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Trên đồ thị có bao nhiêu điểm $M$ mà khoảng cách từ $A\left(6;-4\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm $M$ gấp hai lần khoảng cách từ điểm $B\left(5;1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm $M$?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 38:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{-8}{3}$ | $\searrow$ | $\frac{-40}{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

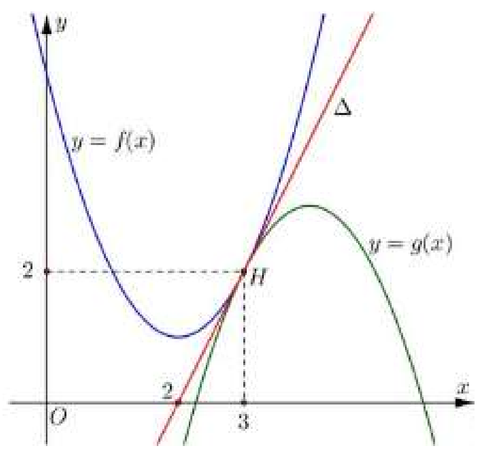
Gọi $(C)$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M$ thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại $A$ và $B$ thỏa mãn tam giác $OAB$ vuông cân?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 39:** Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 5$ có đồ thị $(S)$. Gọi $A, B, C$ là các điểm phân biệt trên $(S)$ có tiếp tuyến với $(S)$ tại các điểm đó song song với nhau. Biết $A, B, C$ cùng nằm trên một parabol $(P)$ có đỉnh $I(-1; y_0)$. Tìm $y_0$.

**A.** 4. **B.** $-4$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

**Câu 40:** Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ sau. Biết đường thẳng $\Delta$ là tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tại điểm $H(2;3)$.




Đạo hàm của hàm số $h(x) = \sin(\pi f(x) g(x)) + \cos\left(\dfrac{\pi g(x)}{f(x)}\right)$ tại điểm $x_0 = 3$ bằng

**A.** $8\pi$. **B.** $0$. **C.** $4\pi$. **D.** $-8\pi$.

**Câu 41:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(-\infty; a)$.

Đặt $g(x) = \begin{cases} (x-a).f'(x) & \text{khi } x \le a \\ mx & \text{khi } x > a \end{cases}$, với $m \ne 0$.

Biết rằng hàm số $y = g(x)$ có đạo hàm tại $x = a \in (-2;2)$ và tiếp tuyến với đồ thị $(C)$ của hàm số $y = f\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)$ tại giao điểm của $(C)$ và $Oy$ có hệ số góc là $\sqrt{2}$. Khi đó $m$ là giá trị nào sau đây

**A.** $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $2$.

**Câu 42:** Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị là $(C)$. Giả sử điểm $M(a;b)$ thuộc $(C)$ mà từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến $(C)$. Tính $a^2+b^2$

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $-1$.

**Câu 43:** Có bao nhiều điểm $M$ trên trục $Ox$ mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $(C)$: $y=-x^3+3x+2$ sao cho có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\left[f(1+x)\right]^3+2f(1+2x)-21x-3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$

**A.** $y=3x+1$. **B.** $y=3x+2$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x-1$.

**Câu 45:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^2(-x)=\left(x^2+2x+4\right)f(x+2)$ và $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

**A.** $y=-2x+4$. **B.** $y=2x+4$. **C.** $y=2x$. **D.** $y=4x+4$.

**Câu 46:** Cho $(P): y=\frac{x^2}{m^2}$ và $(H): y=\frac{m}{x}$ $(m\neq 0)$. Có bao nhiêu giá trị $m$ để tiếp tuyến của $(P)$ và $(H)$ tại giao điểm của chúng tạo với nhau 1 góc $60^0$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 47:** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị $(C)$. Biết rằng từ điểm $A\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$ kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị $(C)$. Gọi $k_1;k_2$ lần lượt là hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x_1;x_2(\neq 3)$ trong các tiếp tuyến trên. Gọi $E(x_1;k_1), F(x_2;k_2)$. Khi đó $d(O;EF)$ là

**A.** $\frac{9}{5}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

**Câu 48:** Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị $(C)$. Trên $(C)$ có những cặp điểm $A, B$ phân biệt sao cho tiếp tuyến tại các điểm đó có cùng hệ số góc $k$ và đường thẳng $AB$ luôn có điểm chung với đường tròn $(T): (x-1)^2+y^2=2$. Gọi $K$ là tập hợp các giá trị $k$ nguyên thuộc đoạn $[-2021; 2021]$. Số phần tử của tập $K$ là:

**A.** 2024. **B.** $2025$. **C.** $2019$. **D.** $4037$.

**Câu 49:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\left|2x^3-3x\right|$ vuông góc với trục tung?

**A.** $1$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 50:** Cho hàm số $f(x)=x^3-12x+9$ có đồ là thị là $(C_1)$, hàm số $g(x)=m\sqrt{4-x^2}$ có đồ thị là $(C_2)$ Số giá trị của tham số $m$ để đồ thị $(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc với nhau là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 51:** Cho $(C)$: $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và $(P)$: $y=ax^2+bx-8$ $(a\neq 0)$. Từ điểm $A(4;1)$ kẻ được 2 tiếp tuyến tới $(C)$. Gọi $k_1$, $k_2$ là hệ số góc của 2 tiếp tuyến đó. $(P)$ có đỉnh $I$ và cắt $Ox$ tại 2 điểm $M(k_1;0)$ và $N(k_2;0)$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $IMN$.

**A.** $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{25}{13}$. **C.** $\dfrac{161}{36}$. **D.** $\dfrac{19}{4}$.

**Câu 52:** Cho hàm số $y=x^3+\dfrac{3}{2}ax^2+b$ có đồ thị $(C)$. Gọi $M,N$ lần lượt là hai điểm phân biệt thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $M,N$ có cùng hệ số góc bằng $3$. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến đường thẳng $MN$ bằng 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a^2+(a+2b)^2$ bằng

**A.** $8$. **B.** $7$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 53:** Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+4m-m^2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để hàm số $g(x)=f(f(x))$ tiếp xúc với trục $Ox$.

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 54:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng $2$ là

**A.** $y=16x-44$. **B.** $y=16x+44$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=16x-20$.

**Câu 55:** Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

**A.** $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

**Câu 56:** Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị $(C)$. Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ $(x_A\neq x_B)$ là 2 điểm trên $(C)$ mà tiếp tuyến tại $A$, $B$ song song với nhau và $AB=2\sqrt{2}$. Tích $x_Ax_B$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $2$.

**Câu 57:** Cho hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M$, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm $M$ luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

**A.** $1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Câu 58:** Trên đường thẳng $d: y = 2x+1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C): y = \dfrac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** Vô số.

**Câu 59:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 tạo với hai trục $Ox$, $Oy$ một tam giác có diện tích $S$ bằng

**A.** 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $2$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

**Câu 60:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ mà tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

**A.** 1. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 61:** Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1$ có đồ thị $(C_m)$, biết rằng đồ thị $(C_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định $A, B$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m$ thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để $(C_m)$ có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $AB$?

**A.** $4041$. **B.** $2021$. **C.** $2019$. **D.** $2020$.

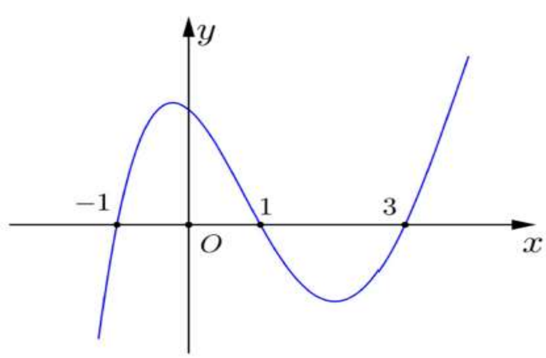
**Câu 62:** Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục trung tại điểm $A(0;1)$, tiếp tuyến tại $A$ có hệ số góc bằng $-3$. Khi đó giá trị $a, b$ thỏa mãn điều kiện sau:

**A.** $a+b=3$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a+b=0$.

**Câu 63:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị $(C)$ và điểm $A(1;m)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để qua $A$ có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị $(C)$. Số phần tử của $S$ là

**A.** $9$. **B.** $5$. **C.** $7$. **D.** $3$.

**Câu 64:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong $(C)$, biết đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ




Tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đồ thị $(C)$ tại hai điểm $A$, $B$ phân biệt lần lượt có hoành độ $a$, $b$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

**A.** $a,\ b < 3$. **B.** $a^2 + b^2 > 10$. **C.** $4 \ge a - b \ge -4$. **D.** $a,\ b \ge 0$.

**Câu 65:** Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ có đồ thị $(C)$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của $(C)$ đi qua điểm $B(0;b)$?

**A.** $9$. **B.** $2$. **C.** $17$. **D.** $16$.

**Câu 66:** Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị là $(C)$ và điểm $A(1;m)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để qua $A$ có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến với đồ thị $(C)$. Số phần tử của $S$ là

**A.** $9$. **B.** $5$. **C.** $7$. **D.** $3$.

**Câu 67:** Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị $(C)$. Gọi $S$ là tập hợp tất cả giá trị thực của $k$ để đường thẳng $d: y=k(x+1)+2$ cắt đồ thị $(C)$ tại ba điểm phân biệt $M, N, P$ sao cho các tiếp tuyến của $(C)$ tại $N$ và $P$ vuông góc với nhau. Biết $M(-1;2)$, tính tích tất cả các phần tử của tập $S$.

**A.** $\frac{1}{9}$. **B.** $-\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-1$.

**Câu 68:** Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị $(C)$ và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $a$ trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ $A$ kẻ được hai tiếp tuyến đến $(C)$ sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành.

**A.** $2019$. **B.** $2020$. **C.** $2017$. **D.** $2018$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1.** TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

TCĐ: $x=-1$; TCN: $y=1$.

Suy ra $I(-1;1)$ là giao của 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

$M\in(C)\Rightarrow M(a;\dfrac{a-2}{a+1})$.

PTTT $\Delta$ của $(C)$ tại $M$ là: $y=\dfrac{3}{(a+1)^2}(x-a)+\dfrac{a-2}{a+1}$.

$\Delta$ giao với TCĐ tại điểm $A\left(-1;\dfrac{a-5}{a+1}\right)$, $\Delta$ giao với TCN tại điểm $B(2a+1;1)$.

Ta có: $IA=\sqrt{(-1+1)^2+\left(\dfrac{a-5}{a+1}-1\right)^2}=\left|\dfrac{a-5}{a+1}-1\right|=\left|\dfrac{-6}{a+1}\right|$.

$IB=\sqrt{(2a+1+1)^2+(1-1)^2}=2|a+1|$.

Do tam giác $IAB$ vuông tại $I$ nên $AB=\sqrt{IA^2+IB^2}$

Ta có chu vi tam giác $IAB$ là

$IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\ge 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}\ge 2\sqrt{12}+\sqrt{24}=4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

**Câu 2 :** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là $(C)$. Có bao nhiêu điểm thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai đường tiệm cận của $(C)$ một tam giác nhận gốc toạ độ làm tâm đường tròn nội tiếp.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Đồ thị hàm số $(C)$ có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a-2}{a+1}\right)\in(C),(a\ne -1)$

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ là:

$$y=y'(a)(x-a)+\frac{a-2}{a+1}=\frac{3x}{(a+1)^2}+\frac{a^2-4a-2}{(a+1)^2}\quad(\Delta)$$

Gọi $A,B$ lần lượt là giao điểm của $(\Delta)$ với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của $(C)$, $I$ là giao điểm của hai đường tiệm cận. Khi đó $A\left(-1;\dfrac{a-5}{a+1}\right),B(2a+1;1),I(-1;1)$.

Phương trình đường thẳng $IA: x=-1\Leftrightarrow x+1=0\Rightarrow d(O,IA)=1$.

Phương trình đường thẳng $IB: y=1\Leftrightarrow y-1=0\Rightarrow d(O,IB)=1$.

Vì $d(O;IA)=d(O;IB)=1$ nên $O$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $IAB$ khi $O$ nằm trong tam giác $IAB$ và $d(O;AB)=1$.

Ta có: $d\left(O;AB\right)=1\Leftrightarrow d\left(O,\Delta\right)=1\Leftrightarrow \dfrac{\left|a^2-4a-2\right|}{\sqrt{9+\left(a+1\right)^4}}=1\Leftrightarrow \left|a^2-4a-2\right|=\sqrt{9+\left(a+1\right)^4}$

$\Leftrightarrow \left(a^2-4a-2\right)^2=9+\left(a+1\right)^4\Leftrightarrow 12a^3-6a^2-12a+6=0$

$\Leftrightarrow 6\left(a^2-1\right)\left(2a-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\\ a=-1\left(l\right).\\ a=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $a=1\Rightarrow M\left(1;-\dfrac{1}{2}\right),A\left(-1;-2\right),B\left(3;1\right)\Rightarrow O$ nằm trong tam giác $IAB\Rightarrow O$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta IAB$.

Với $a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};-1\right),A\left(-1;-3\right),B\left(2;1\right)\Rightarrow O$ nằm trong tam giác $IAB\Rightarrow$ $O$ là tâmđường tròn nội tiếp $\Delta IAB$. Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 3.** Điều kiện xác định: $x\ne -m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$\frac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}=0\Leftrightarrow \begin{cases}(3m+1)x-m^2+m=0\\ x+m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m^2-m}{3m+1}\\ x\ne -m\end{cases}\quad (3m+1\ne 0)$$

Ta có: $x=\dfrac{m^2-m}{3m+1}\ne -m\Leftrightarrow m\ne 0$. Nên điều kiện $x\ne -m$ luôn thỏa mãn.

Vậy hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $x=\dfrac{m^2-m}{3m+1}$ $(3m+1\ne 0)$.

Ta có $y'=\dfrac{(3m+1)m-(-m^2+m)}{(x+m)^2}=\dfrac{4m^2}{(x+m)^2}$.

Vì tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của đồ thị với trục hoành vuông góc với đường thẳng $x+y-2020=0$ nên ta có

$$y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right).\left(-1\right)=-1\Leftrightarrow \frac{4m^2}{\left(\dfrac{m^2-m}{3m+1}+m\right)^2}=1\Leftrightarrow \frac{4m^2(3m+1)^2}{16m^4}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3m+1)^2}{4m^2}=1\Leftrightarrow (3m+1)^2=4m^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3m+1=2m\\ 3m+1=-2m\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{6}{5}$.

**Câu 4.** Ta có $y'=6x^2+6ax.$

Do tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại $A,B$ có cùng hệ số góc là $6$ nên $x_A,\,x_B$ là nghiệm phương trình $y'=6\Leftrightarrow 6x^2+6ax=6\Leftrightarrow x^2+ax-1=0$.

Ta lại có $y=\left(x^2+ax-1\right)(2x+a)+\left(2-a^2\right)x+a+b$. Khi đó, phương trình đường thẳng $AB$ là $\left(2-a^2\right)x-y+a+b=0$.

Theo giả thiết $d(O;AB)=1 \Leftrightarrow \dfrac{|a+b|}{\sqrt{\left(2-a^2\right)^2+1}}=1 \Leftrightarrow (a+b)^2=\left(2-a^2\right)^2+1$

$\Leftrightarrow 2ab+b^2=a^4-5a^2+5$.

Từ ta có $P=2a^2+(a+b)^2=3a^2+2ab+b^2=a^4-2a^2+5=\left(a^2-1\right)^2+4\geq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=\pm 1$. Vậy GTNN cần tìm là 4.

**Câu 5.** Ta có $f'(x-1)+\dfrac{f(x-1)}{x}=3x+2 \Leftrightarrow f(x-1)+xf'(x-1)=3x^2+2x$.

$\Leftrightarrow \left(xf(x-1)\right)'=3x^2+2x \Leftrightarrow xf(x-1)=\int\left(3x^2+2x\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow xf(x-1)=x^3+x^2+C\ (*)$.

Thay $x=2$ vào $(*)$ ta được: $2f(1)=12+C \Leftrightarrow 2.6=12+C \Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $xf(x-1)=x^3+x^2 \Rightarrow f(x-1)=x^2+x=(x-1)^2+3(x-1)+2$.

$\Rightarrow f(x)=x^2+3x+2 \Rightarrow f'(x)=2x+3 \Rightarrow f'(3)=9$ và $f(3)=20$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=3$ là $y=9(x-3)+20 \Leftrightarrow y=9x-7$.

**Câu 6.** Thay $x=1$ vào đẳng thức $\left[f(x)\right]^2+3f(x)=x+3\ (1)$ ta được:

$\left[f(1)\right]^2+3f(1)=4 \Leftrightarrow f(1)=1; f(1)=-4$.

Đạo hàm hai vế của $(1)$ ta được: $2f'(x).f(x)+3f'(x)=1\ (2)$.

Thay $x=1$ vào $(2)$: $2f'(1)f(1)+3f'(1)=1$.

Với $f(1)=1$ ta có: $2f'(1)+3f'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)=\dfrac{1}{5}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $(1;1)$ có hệ số góc $k=f'(1)=\dfrac{1}{5}$ là $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$.

**Câu 7.** Phương trình hoành độ giao điểm là: $2x^3-3x^2+3=4x^2+(m-2)x-3m$

$\Leftrightarrow 2x^3-7x^2+2x-mx+3+3m=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(2x^2-x-1\right)-m(x-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(2x^2-x-1-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=30 \\ g(x)=2x^2-x-1-m=0 \end{array}\right.$

Để $d$ cắt $(C)$ tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g(x)=0$ có 2 nghiệm khác 3

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=1+8(1+m)>0 \\ g(3)=14-m\neq 0 \end{cases}$

Gọi $A\left(x_1;2x_1^3-3x_1^2+3\right)$ và $B\left(x_2;2x_2^3-3x_2^2+3\right)$ theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{-1-m}{2} \end{cases}$

Để tiếp tuyến tại $A$ và $B$ của $(C)$ vuông góc với nhau thì $y'(x_1).y'(x_2)=-1$

$\Leftrightarrow \left(6x_1^2-6x_1\right)\left(6x_2^2-6x_2\right)=-1 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1-1)(x_2-1)=-\dfrac{1}{36}$

$\Leftrightarrow x_1x_2(x_1x_2-x_1-x_2+1)=-\dfrac{1}{36} \Leftrightarrow \dfrac{-1-m}{2}\left(\dfrac{-1-m}{2}-\dfrac{1}{2}+1\right)=-\dfrac{1}{36}$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2+2m+1}{4}-\dfrac{1+m}{4}=-\dfrac{1}{36} \Leftrightarrow m^2+m+\dfrac{1}{9}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{6}\left(t/m(*)\right)$

Suy ra tổng các phần tử của $S$ bằng $-1$.

**Câu 8.** Gọi $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$. Khi đó tiếp tuyến tại M có phương trình:

$\Delta: y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+2-\dfrac{3}{x_0+1} \Leftrightarrow 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$.

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến $\Delta$ là:

$d=\dfrac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}.(x_0+1)^2}=6$. Khi đó $d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{3} \\ x_0=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Do điểm M có hoành độ dương nên $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$. Khi đó $a+b=1$.

**Câu 9.** $y=\dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow y=1+\dfrac{3}{x-1}$. Gọi $M(0;m)\in Oy,(m<0)$.

Gọi tiếp tuyến của $(C)$ đi qua $M$ là đường thẳng $d: y=kx+m$.

Yêu cầu của đề bài, điều kiện là hệ phương trình $\begin{cases} kx+m=1+\dfrac{3}{x-1} & (1) \\ k=\dfrac{-3}{(x-1)^2} & (2) \end{cases}$.

có 2 nghiệm $x_1,\ x_2\ne1$ và thỏa mãn $\begin{cases} y(x_1)<0 \\ y(x_2)<0 \end{cases}$.

Xét điều kiện $\begin{cases} y(x_1)<0 \\ y(x_2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{3}{x_1-1}<0 \\ 1+\dfrac{3}{x_2-1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x_1-1}<-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x_2-1}<-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Từ và suy ra $\dfrac{-3x}{(x-1)^2}+m=1+\dfrac{3}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{6}{x-1}+1-m=0$.

Đặt $\dfrac{1}{x-1}=t \ (t\neq 0)$, phương trình trở thành $3t^2+6t+1-m=0$

Bài toán trở thành tìm $m$ để phương trình có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn: $t_1<t_2<-\dfrac{1}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ a.f\left(-\dfrac{1}{3}\right)>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 3.f\left(-\dfrac{1}{3}\right)>0 \\ -1<-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3(1-m)>0 \\ m<-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m<-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<-\dfrac{2}{3}.$$

Do $m$ nguyên âm nên $m=-1$.

**Câu 10.** Ta thấy điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của $(C_m)$ $\Leftrightarrow$ $y_0=f(x_0)$ với mọi $m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\ y_0=x_0^3-3mx_0^2-2mx_0+16m-7,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\ m\left(-3x_0^2-2x_0+16\right)+x_0^3-y_0-7=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0^2-2x_0+16=0 \\ x_0^3-y_0-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=\dfrac{-8}{3} \end{array}\right. \\ y_0=x_0^3-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \end{cases}.$$

Lại có $y'=f'(x)=3x^2-6mx-2m \ \Rightarrow\ f'(2)=12-14m$.

Ta có phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của $(C_m)$ tại điểm $M(2;1)$ là $y=f'(2)(x-2)+1$

Hay $y=(12-14m)x+28m-23\ \ (\Delta)$.

$\Delta$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân thì $\Delta$ sẽ song song với đường thẳng $y=x$ hoặc

$$y=-x \ \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 12-14m=1 \\ 12-14m=-1 \end{array}\right. \\ 28m-23\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{11}{14} \\ m=\dfrac{13}{14} \end{array}\right..$$

Suy ra tập $S=\left\{\dfrac{11}{14};\dfrac{13}{14}\right\}$ và tổng các phần tử của $S$ là $\dfrac{12}{7}$.

**Câu 11.** Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+1}{x_0-2}\right)$ là điểm thuộc đồ thị $(C)$.

Vì $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$ nên tiếp tuyến $d$ tại $M$ có hệ số góc là $k=f'(x_0)=\dfrac{-3}{(x_0-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến $d$ là $y=\dfrac{-3}{\left(x_0-2\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+1}{x_0-2}$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-3x}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{3x_0}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{\left(x_0-2\right)\left(x_0+1\right)}{\left(x_0-2\right)^2}\Leftrightarrow y=\dfrac{-3x}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{\left(x_0-2\right)^2}$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{3};0\right)$; $d\cap Oy=B\left(0;\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{\left(x_0-2\right)^2}\right)$.

$I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB$ khi và chỉ khi $I$ là trung điểm $AB$ hay $I\left(\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{6};\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2\left(x_0-2\right)^2}\right)$.

Vì $I\in\Delta$ nên $\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2}-\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2\left(x_0-2\right)^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2\left(x_0-2\right)^2}.\left[\left(x_0-2\right)^2-1\right]=0$.

Vì các điểm $d$ không đi qua $O$ nên $x_0^2+2x_0-2\neq 0$. Suy ra $\left(x_0-2\right)^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=1\end{array}\right.$.

Kết hợp $M$ có tung độ dương ta được $M\left(3;4\right)$. Vậy $OM=\sqrt{9+16}=5$.

**Câu 12.** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-1}{x+3}$ $\left(C\right)$ có hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x=-3, y=5,$ giao điểm của hai đường tiệp cận là $I\left(-3;5\right)$.

Lấy $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}\left(x_0\neq-3\right)$

Phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm $M$ là $y=\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(x-x_0\right)+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}$ $\left(d\right)$

Cho $x=-3\Rightarrow y=\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(-3-x_0\right)+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}=\dfrac{-16}{x_0+3}+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}=\dfrac{5x_0-17}{x_0+3}$

Suy ra giao điểm của $\left(d\right)$ và TCĐ của $\left(C\right)$ là $A\left(-3;\dfrac{5x_0-17}{x_0+3}\right)\Rightarrow IA=\left|\dfrac{5x_0-17}{x_0+3}-5\right|=\left|\dfrac{32}{x_0+3}\right|$

Cho $y=5\Rightarrow 5=\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(x-x_0\right)+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}\Leftrightarrow\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(x-x_0\right)=\dfrac{16}{x_0+3}$

$\Rightarrow x-x_0=x_0+3\Leftrightarrow x=2x_0+3$

Suy ra giao điểm của $\left(d\right)$ và TCN của $\left(C\right)$ là $B\left(2x_0+3;5\right)\Rightarrow IB=\left|2x_0+3+3\right|=\left|2x_0+6\right|$

Diện tích tam giác cần tìm là $S=\dfrac{1}{2}.IA.IB=\dfrac{1}{2}.\left|2x_0+6\right|.\left|\dfrac{32}{x_0+3}\right|=32$.

**Câu 13.** Từ $\left[f\left(8x+1\right)\right]^2+\left[f\left(1-x\right)\right]^5=x$, cho $x=0$ ta có $\left[f\left(1\right)\right]^2+\left[f\left(1\right)\right]^5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(1\right)=0\\f\left(1\right)=-1\end{array}\right.$

Đạo hàm hai vế của ta được $2.8.f\left(8x+1\right).f'\left(8x+1\right)-5\left[f\left(1-x\right)\right]^4.f'\left(1-x\right)=1$.

Cho $x=0$ ta được $16f\left(1\right).f'\left(1\right)-5.\left[f\left(1\right)\right]^4.f'\left(1\right)=1\Leftrightarrow f\left(1\right).f'\left(1\right).\left[16-5\left(f\left(1\right)\right)^3\right]=1$.

Nếu $f(1)=0$ thì vô lý, do đó $f(1)=-1$, khi đó trở thành

$-f'(1).[16+5]=1 \Leftrightarrow f'(1)=-\dfrac{1}{21}$. Vậy tọa độ tiếp điểm là $A(1;-1)$ và hệ số góc $k=-\dfrac{1}{21}$

Phương trình tiếp tuyến $y=-\dfrac{1}{21}(x-1)-1 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{21}x-\dfrac{20}{21}$.

**Câu 14.** Ta có $f(x+3)=g(x)+x^2-10x+5 \Rightarrow f'(x+3)=g'(x)+2x-10$.

ta chọn $x=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(4)=g'(1)+2.1-10 \\ f(4)=g(1)+1^2-10.1+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(1)=f'(4)+8=5+8=13 \\ g(1)=f(4)+10-5-1=9 \end{cases}.$$

Từ đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại $x=1$ là $y=g'(1).(x-1)+g(1)=13(x-1)+9=13x-4$

**Câu 15.** Gọi $M(1;f(1))\in(C)$ khi đó hoành độ của $M$ thỏa mãn phương trình

$f^2(2-x)=x-1-f^3(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Thay hoành độ $M$ vào ta được $f^2(1)=-f^3(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=-1 \end{array}\right.$.

Đạo hàm hai vế của ta được $-2f(2-x)f'(2-x)=1-3f^2(x).f'(x)$.

Thay $x=1$ ta được $-2f(1)f'(1)=1-3f^2(1).f'(1)$.

Nhận thấy $f(1)=0$ không thỏa mãn suy ra $f(1)=-1$. Thay $f(1)=-1$ vào ta được

$2f'(1)=1-3.f'(1) \Leftrightarrow 5f'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)=\dfrac{1}{5}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y=\dfrac{1}{5}(x-1)-1$ hay $y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{6}{5}$.

Suy ra $a+b=-1$.

**Câu 16.** Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3$ có đạo hàm $y'=x^3+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Do đường thẳng $d$ tiếp xúc với $(C)$ tại 2 điểm có hoành độ $a,b$, ở đó $a\neq b$, nên có hệ số góc

là $k$ và thỏa mãn $\begin{cases} \dfrac{y(a)-y(b)}{a-b}=y'(a)(1) \\ \dfrac{y(a)-y(b)}{a-b}=y'(b)(2) \end{cases}$

Lấy - và rút gọn cả 2 vế cho $a-b$ ta được

$a^2+b^2+ab+a+b=0$ hay $(a+b)^2+(a+b)=ab$

Lấy + ta được $\dfrac{1}{2}\left(a^3+b^3+a^2b+ab^2\right)+\dfrac{2}{3}\left(a^2+b^2-ab\right)=a^3+b^3+a^2+b^2$

Hay $\dfrac{(a+b)^3}{2}-2ab(a+b)+\dfrac{1}{3}(a+b)^2-\dfrac{4}{3}ab=0$

Thế vào được $-\dfrac{3}{2}(a+b)^3--\dfrac{4}{3}(a+b)=0$

Từ suy ra $a+b=0$ hoặc $a+b=-\frac{2}{3}$ hoặc $a+b=-\frac{4}{3}$.

Với $a+b=0$, kết hợp với suy ra $a=b=0$.

Với $a+b=-\frac{2}{3}$, kết hợp với suy ra mâu thuẫn.

Với $a+b=-\frac{4}{3}$, kết hợp với suy ra $a=b=-\frac{2}{3}$.

Vậy không tồn tại tiếp tuyến $d$ tiếp xúc $(C)$ tại ít nhất 2 điểm.

**Câu 17.** Ta có $y'=x^2-2(2m+1)x+m^2+3$

$=x^2-2(2m+1)x+(2m+1)^2-(2m+1)^2+m^2+3$

$=(x-2m-1)^2-3m^2-4m+2\geq -3m^2-4m+2$

Vì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của song song với đường thẳng $y=-5x-\sqrt{3}$

nên ta có $-3m^2-4m+2=-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-7}{3} \end{array}\right.$. Vậy tổng phần tử của S là $\frac{-4}{3}$.

**Câu 18.** TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Có $y'=\frac{1}{(x+1)^2}$.

Gọi hoành độ của $A$ và $B$ lần lượt là $x_1$, $x_2$. Khi đó $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình:

$\frac{3x+2}{x+1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(m-2)x+m-2=0(*) \\ x\neq -1 \end{cases}$.

Để đường thẳng $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (-1)^2+(m-2)(-1)+m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2-4(m-2)>0 \\ 1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2>4 \\ m-2<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<2 \end{array}\right.$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2-m \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$. Có $k_1=\frac{1}{(x_1+1)^2}$, $k_2=\frac{1}{(x_2+1)^2}$ nên:

$$k_1k_2=\frac{1}{(x_1+1)^2}.\frac{1}{(x_2+1)^2}=\frac{1}{(x_1x_2+x_1+x_2+1)^2}=\frac{1}{(m-2+2-m+1)^2}=1$$

và $k_1+k_2=\frac{1}{(x_1+1)^2}+\frac{1}{(x_2+1)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2(x_1+x_2)+2}{(x_1x_2+x_1+x_2+1)^2}$

$=(2-m)^2-2(m-2)+2(2-m)+2=m^2-8m+14$.

Có $201(k_1+k_2)+\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=2020k_1^{2020}.k_2^{2020} \Leftrightarrow 201(k_1+k_2)+\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}=2020(k_1k_2)^{2020}$

$\Leftrightarrow 201(k_1+k_2)+k_1+k_2=2020 \Leftrightarrow 202(k_1+k_2)=2020 \Leftrightarrow k_1+k_2=10$

$\Leftrightarrow m^2-8m+14=10 \Leftrightarrow m^2-8m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4+2\sqrt{3}\,(tm) \\ m=4-2\sqrt{3}\,(tm) \end{array}\right.$. Vậy $S=\{4+2\sqrt{3};4-2\sqrt{3}\}$.

**Câu 19.** Đặt $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow x=\dfrac{t}{t-1}$

Khi đó: $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ trở thành:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f\left(\frac{t-1}{t}\right)=1-\frac{2(t-1)}{t}+\frac{3(t-1)^2}{t^2}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)+2f\left(\frac{t-1}{t}\right)=2-\frac{4}{t}+\frac{3}{t^2}$$

Ta có hệ: $\begin{cases} f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2} \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2} \end{cases}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f(x)=x^2$

Thử lại ta thấy $f(x)=x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa đề.

Vậy $f'(x)=2x$. Khi đó: $f(2)=4,\ f'(2)=4$, nên phương trình tiếp tuyến tại $x=2$ là $y=4x+4$

**Câu 20.** Giả sử điểm $M$ có hoành độ là $m>0$, vì $M\in(C)$ nên $M\left(m;\dfrac{m+1}{m}\right)$.

Ta có: $f'(m)=\dfrac{-1}{m^2}$.

Từ đó ta có phương trình tiếp tuyến tại điểm $M$ có dạng:

$y=f'(m)(x-m)+f(m)\Rightarrow y=\dfrac{-1}{m^2}(x-m)+1+\dfrac{1}{m}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M$ cắt trục tung tại điểm $B\left(0;1+\dfrac{2}{m}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M$ cắt trục hoành tại điểm $A\left(m^2+2m;\,0\right)$.

Mặt khác ta có giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(0;1)$.

Theo đề ta có $S_{\Delta IAB}=12$. Suy ra $\dfrac{1}{2}d(I,AB).AB=12\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}d(I,AB).\left|\overrightarrow{AB}\right|=12\quad(1)$.

Trong đó $d(I,AB)=\dfrac{\left|-1+\dfrac{m}{m^2}+\dfrac{m+1}{m}\right|}{\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{-1}{m^2}\right)^2}}=\dfrac{2|m|}{\sqrt{m^4+1}}$.

Và $\overrightarrow{AB}=\left(-\left(m^2+2m\right);\dfrac{m+2}{m}\right)$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left[-\left(m^2+2m\right)\right]^2+\left(\frac{m+2}{m}\right)^2}=\sqrt{\frac{m^4(m+2)^2+(m+2)^2}{m^2}}=\sqrt{m^4+1}.\left|\frac{m+2}{m}\right|$$

Thay vào $(1)$ ta được $\dfrac{1}{2}.\sqrt{m^4+1}.\left|\dfrac{m+2}{m}\right|.\dfrac{2|m|}{\sqrt{m^4+1}}=12\Leftrightarrow|m+2|=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=10\\m=-14\end{array}\right.$.

Vì $m>0$ nên $m=10$.

**Câu 21.** Theo giả thiết ta có $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^{2i}+a$, trong đó $a,a_i$ là các hệ số thực.

Khi đó $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}2ia_ix^{2i-1}, f''(x)=\sum_{i=2}^{n}2i(2i-1)a_ix^{2i-2}+2a_1$.

Xét hàm số $g(x)=f'(x)$ có đồ thị là $(C)$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của $\Delta$ và $(C)$.

Khi đó $\Delta$ có hệ số góc là $f''(x_0)=\sum_{i=2}^{n}2i(2i-1)a_ix_0^{2i-2}+2a_1\ge 2a_1, \forall x_0\in\mathbb{R}$.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Do đó $\Delta$ tiếp xúc với $(C)$ tại điểm $M(0;f'(0))$, với $f'(0)=0$. Hay $\Delta$ qua $O$.

**Câu 22.** Ta có $y'=\dfrac{2-m}{(x+2)^2}, \forall x\ne -2$.

Do $A$ là giao điểm của $(C_m)$ và trục $Ox$ nên tọa độ điểm $A(-m;0)$.

Hệ số góc tiếp tuyến của $(C_m)$ tại $A$ là $k_1=y'(-m)=\dfrac{2-m}{(-m+2)^2}=\dfrac{1}{2-m}, (m\ne 2)$.

Hệ số góc tiếp tuyến của $(C_m)$ tại $B$ là $k_2=y'(0)=\dfrac{2-m}{(0+2)^2}=\dfrac{2-m}{4}$.

Khi đó, $|k_1+k_2|=\left|\dfrac{1}{2-m}+\dfrac{2-m}{4}\right|=\left|\dfrac{1}{2-m}\right|+\left|\dfrac{2-m}{4}\right|\ge 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\left|\dfrac{1}{2-m}\right|=\left|\dfrac{2-m}{4}\right|\Leftrightarrow (2-m)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=4\end{array}\right.$.

Vậy $|k_1+k_2|_{\min}=1$.

**Câu 23.** TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có: $y'=-\dfrac{9}{(x-2)^2}<0;\forall\in D$. Gọi $M_o(x_o;y_o)$ là tiếp điểm, suy ra $a=-\dfrac{9}{(x_o-2)^2}<0$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} a\ne 0\\ 2a+b\ne 1\end{cases}$. TCĐ của: $x=2\Rightarrow M(2;2a+b)$

TCN của: $y=1\Rightarrow N\left(\dfrac{1-b}{a};1\right)$. Tâm đối xứng của: $I(2;1)$

Vì $\Delta IMN$ cân tại I nên ta có: $IM=IN\Leftrightarrow |2a+b-1|=\left|2-\dfrac{1-b}{a}\right|\Leftrightarrow \left|a\left(2+\dfrac{b-1}{a}\right)\right|=\left|2+\dfrac{b-1}{a}\right|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\left(2+\dfrac{b-1}{a}\right)=2+\dfrac{b-1}{a}\\ a\left(2+\dfrac{b-1}{a}\right)=-\left(2+\dfrac{b-1}{a}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\\ a=-1\end{array}\right.\Rightarrow a=-1$$

Với $a=-1\Rightarrow -\dfrac{9}{(x_o-2)^2}=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=5\\ x_o=-1\end{array}\right.$

Với $x_o=5\Rightarrow y_o=4\Rightarrow d: y=-x+9\Rightarrow b=9$

Với $x_o=-1\Rightarrow y_o=-2\Rightarrow d: y=-x-3\Rightarrow b=-3$. Vậy $\left[\begin{array}{l} b=9\\ b=-3\end{array}\right.$.

**Câu 24.** Nhận thấy $y=0$ là một nghiệm của phương trình $y'=2\sqrt{y}\Rightarrow$ loại vì đồ thị có dạng là một parabol.

$$y'=2\sqrt{y}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{y}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}=\mathrm{d}x\Rightarrow\sqrt{y}=x+C\Rightarrow y=\left(x+C\right)^2$$

Thử lại ta được nghiệm $y=\left(x+C\right)^2$.

Mà $f\left(1\right)=0$ nên $C=-1$.

Ta có $y=f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$, $y'=2\left(x-1\right)$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

Theo đề bài, ta có $\left(x_0-1\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0-1=2\\x_0-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.$

Khi $x_0=3$ phương trình tiếp tuyến là $y=4\left(x-3\right)+4=4x-8$.

Khi $x_0=-1$ phương trình tiếp tuyến là $y=-4\left(x+1\right)+4=-4x$.

**Câu 25.** Ta có: $g\left(x\right)=f\left(x\right)+x\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+1$ và $g\left(1\right)=f\left(1\right)+1=4$.

Khi đó: $\left[f'\left(x\right)+1\right]^2=9x^2+9x.f\left(x\right)\Leftrightarrow\left[g'\left(x\right)\right]^2=9x.g\left(x\right)\quad(1)$

Do $f'\left(x\right)>-1$ nên $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+1>0$.

Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow g'\left(x\right)=3\sqrt{x}.\sqrt{g\left(x\right)}\Leftrightarrow\dfrac{g'\left(x\right)}{\sqrt{g\left(x\right)}}=3\sqrt{x}\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{g'\left(x\right)}{\sqrt{g\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int3\sqrt{x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow2\sqrt{g\left(x\right)}=2x^{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}\quad(2)$

Với $x=1$: $(2)\Leftrightarrow2\sqrt{g\left(1\right)}=2+\mathrm{C}\Leftrightarrow4=2+\mathrm{C}\Leftrightarrow\mathrm{C}=2$.

Khi đó: $2\sqrt{g\left(x\right)}=2x^{\frac{3}{2}}+2\Leftrightarrow\sqrt{g\left(x\right)}=x^{\frac{3}{2}}+1\Leftrightarrow g\left(x\right)=\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)^2$.

Vậy, hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ bằng $4$: $k=g'\left(4\right)=54$.

**Câu 26.** Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^2-12x+9; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3.\end{array}\right.$

Đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi

$$y_{C§}.y_{CT}<0\Leftrightarrow f(1).f(3)<0\Leftrightarrow(m+4).m<0\Leftrightarrow-4<m<0$$

Vì tiếp tuyến tại $A$ và $C$ song song với nhau nên

$f'(x_1)=f'(x_3)\Leftrightarrow3x_1^2-12x_1+9=3x_3^2-12x_3+9\Leftrightarrow(x_1-x_3)(x_1+x_3-4)=0\Leftrightarrow x_1+x_3=4$.

Vì $x_1+x_2+x_3=6$ nên $x_2=2$.

Vì $f(2)=0$ nên $2+m=0$ hay $m=-2$ ).

Vì $f'(2)=-3$ nên phương trình tiếp tuyến tại $B(2;0)$ là $y=-3(x-2)$ hay $y=-3x+6$.

**Câu 27.** Vì $I$ là tâm đối xứng của đồ thị $\left(C\right)$ nên $I\left(-1;2\right)$.

Ta có $y'_{(x)}=\dfrac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y'_{(a)}=\dfrac{1}{(a+1)^2}$.

Vì $M\left(a;b\right)\in\left(C\right)\Rightarrow M\left(a;\dfrac{2a+1}{a+1}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M$ là đường thẳng $\Delta: y=\dfrac{1}{\left(a+1\right)^2}.\left(x-a\right)+\dfrac{2a+1}{a+1}$.

Đường thẳng $\Delta$ cắt tiệm cận đứng tại $A\left(-1;\dfrac{2a}{a+1}\right)$.

Đường thẳng $\Delta$ cắt tiệm cận ngang tại $B\left(2a+1;2\right)$.

Suy ra $IA=\dfrac{2}{\left|a+1\right|};IB=2\left|a+1\right|$ và chu vi tam giác $IAB$ là $C_{\Delta IAB}=IA+IB+AB.$

Ta có $C_{\Delta IAB}=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\geq 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=2\sqrt{4}+\sqrt{2.4}=4+2\sqrt{2}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $IA=IB\Leftrightarrow 1=\left(a+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(0;1\right)\\M\left(-2;3\right)\end{array}\right.$.

Vậy $\left|2a+b\right|=1$.

**Câu 28.** Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc $(H)$. $y'(x_0)=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}$; $y(x_0)=\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$.

Phương trình tiếp tuyến của $(H)$ tại $M$ là $y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{2}{(x_0+1)^2}x-y+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{(x_0+1)^2}=0$.

Khoảng cách từ $I$ đến tiếp tuyến bằng 2, tức là

$$\frac{\left|\dfrac{-2}{(x_0+1)^2}-1+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{(x_0+1)^2}\right|}{\sqrt{\dfrac{4}{(x_0+1)^4}+1}}=2\ \Leftrightarrow\ |4(x_0+1)|=2\sqrt{4+(x_0+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow\ 4(x_0+1)^4-16(x_0+1)^2+16=0\ \Leftrightarrow\ (x_0+1)^2=2\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\sqrt{2}-1\\x_0=-\sqrt{2}-1\end{array}\right..$$

Vậy $x_M=\sqrt{2}-1;\ x_N=-\sqrt{2}-1\ \Rightarrow x_M+x_N=-2$.

**Câu 29.** Có $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{\left(x+1\right)^2}$; $g\left(3\right)=f\left(f\left(3\right)\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{6}{5}$.

$g'\left(x\right)=f'\left(f\left(x\right)\right).f'\left(x\right)\Rightarrow g'\left(3\right)=f'\left(f\left(3\right)\right).f'\left(3\right)=f'\left(\dfrac{3}{2}\right).f'\left(3\right)=\dfrac{8}{25}.\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{25}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ tại điểm $x=3$ là

$y=\dfrac{1}{25}\left(x-3\right)+\dfrac{6}{5}$ hay $y=\dfrac{1}{25}x+\dfrac{27}{25}$.

**Câu 30.** Ta có được $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1$. Khi đó:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f\left(x\right)-f\left(0\right)-3f\left(3x\right)+3f\left(0\right)+2f\left(2x\right)-f\left(0\right)}=$$

$$=\frac{2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-9.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)}{3x}+4.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}}=\frac{2}{1-9+4}=\frac{-1}{2}$$

**Câu 31.** Ta có $g'(x)=f(4x-6)+4xf'(4x-6)$.

Hệ số góc của $d_1$ là $k_1=f'(2)$; của $d_2$ là $k_2=f(2)+8f'(2)$

Theo yêu cầu bài toán ta có

$k_1k_2=-2\Leftrightarrow f'(2)\left[f(2)+8f'(2)\right]=-2\Leftrightarrow 8\left[f'(2)\right]^2+f(2).f'(2)+2=0$

Để tồn tại $f'(2)$ thì $\left[f(2)\right]^2-64\ge 0\Leftrightarrow |f(2)|\ge 8$

**Câu 32.** Từ đẳng thức $f(3x)+3f(1-3x)=9x^2+3x$, với $x=0$ và $x=\frac{1}{3}$ ta có $\begin{cases}f(0)+3f(1)=0\\f(1)+3f(0)=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=\frac{3}{4}\\f(1)=-\frac{1}{4}\end{cases}$.

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức ta được $3f'(3x)-9f'(1-3x)=18x+3(*)$.

Thay $x=0$ và $x=\frac{1}{3}$ vào ta được $\begin{cases}3f'(0)-9f'(1)=3\\3f'(1)-9f'(0)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(0)-3f'(1)=1\\3f'(0)-f'(1)=-3\end{cases}\begin{cases}f'(0)=-\frac{5}{4}\\f'(1)=-\frac{3}{4}\end{cases}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 0 là

$y=f'(0)(x-0)+f(0)\Leftrightarrow y=-\frac{5}{4}(x-0)+\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$. Khi đó $a+3b=-\frac{5}{4}+3.\frac{3}{4}=1$.

**Câu 33.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(m;-4)$ và có hệ số góc $k$ có phương trình là: $y=k(x-m)-4$

Từ $M$ kẻ được đúng một tiếp tuyến với đồ thị $(C)$ khi hệ phương trình $\begin{cases}x^3-6x^2+28=k(x-m)-4 & (1)\\3x^2-12x=k & (2)\end{cases}$ có đúng 1 nghiệm.

Thế vào ta được:

$x^3-6x^2+28=(3x^2-12x)(x-m)-4\Leftrightarrow x^3-6x^2+32=(3x^2-12x)(x-m)$

Hệ phương trình có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi phương trình có đúng 1 nghiệm.

Ta có $\Leftrightarrow(x-4)(x^2-2x-8)=3x(x-4)(x-m)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4 & \\2x^2+(2-3m)x+8=0 & (4)\end{array}\right.$.

Ta xét 2 trường hợp:

**Trường hợp 1:** Phương trình có đúng 1 nghiệm $x=4$. Khi đó

$\begin{cases}2.4^2+(2-3m).4+8=0\\\Delta=(2-3m)^2-4.2.8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-3m=-10\\\left[\begin{array}{l}2-3m=8\\2-3m=-8\end{array}\right.\end{cases}$.

**Trường hợp 2:** Phương trình vô nghiệm hay $\Delta<0\Leftrightarrow(2-3m)^2-4.2.8<0\Leftrightarrow -2<m<\frac{10}{3}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1;0;1;2;3\}$.

**Câu 34.** Ta có: $\left[x^2 f(2x-1)\right]' = 2xf(2x-1) + 2x^2 f'(2x-1)$

$d_1$ có hệ số góc là $2020$ nên $2f(1) + 2f'(1) = 2020$ $(1)$

Mặt khác: $\left[xf(2x-1)\right]' = f(2x-1) + 2xf'(2x-1)$

$d_2$ có hệ số góc là $2021$ nên $f(1) + 2f'(1) = 2021$ $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta được $f(1) = -1$.

**Câu 35.** Ta có: $y' = 3x^2 - \sqrt{3}$ và $y'' = 6x$.

Vì $y'\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 0$ và $y''\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt[4]{3}} < 0$ nên $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ là điểm cực đại của hàm số đã cho.

Khi đó tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ là đường thẳng song song với trục hoành.

Vì ba tiếp tuyến đó tạo thành tam giác đều và tiếp tuyến tại điểm $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ song song với trục hoành nên hai tiếp tuyến còn lại tạo với tia $Ox$ theo chiều dương các góc lần lượt là $60^\circ$ và $120^\circ$. Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến đó lần lượt là $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ và $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

Giả sử tiếp tuyến tại $A$ có hệ số góc là $-\sqrt{3}$, khi đó

$y'(x_A) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 3{x_A}^2 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x_A = 0$.

Giả sử tiếp tuyến tại $B$ có hệ số góc là $\sqrt{3}$, khi đó

$$y'(x_B) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3{x_B}^2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \\ x_B = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \end{array}\right.$$

Vì tung độ các tiếp điểm đều không âm nên $x_B = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$. Vậy $x_A + x_B = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \in (-2;-1)$.

**Câu 36.** Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. $y' = \frac{4}{(x+3)^2}$.

Gọi $A$ và $B$ là cặp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do tiếp tuyến tại $A$ và $B$ song song với nhau nên

$$y'(x_A) = y'(x_B) \Rightarrow \frac{4}{(x_A+3)^2} = \frac{4}{(x_B+3)^2} \Leftrightarrow (x_A+3)^2 = (x_B+3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = x_B \\ x_A + x_B = -6 \end{array}\right..$$

+) $x_A = x_B$ thì $A \equiv B$

+) $x_A + x_B = -6$.

Gọi $A\left(x_A; \frac{x_A - 1}{x_A + 3}\right); B\left(x_B; \frac{x_B - 1}{x_B + 3}\right)$.

Ta có $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + \left(\frac{x_B - 1}{x_B + 3} - \frac{x_A - 1}{x_A + 3}\right)^2 = (x_B - x_A)^2 + \left[\frac{4(x_B - x_A)}{x_A x_B + 3(x_A + x_B) + 9}\right]^2$

$$=\left(-2x_A-6\right)^2+\left[\frac{4\left(-2x_A-6\right)}{x_A.\left(-x_A-6\right)-9}\right]^2=4\left(x_A+3\right)^2+\left[\frac{-8\left(x_A+3\right)}{-\left(x_A+3\right)^2}\right]^2=4\left(x_A+3\right)^2+\frac{64}{\left(x_A+3\right)^2}$$

Đặt $t=\left(x_A+3\right)^2$. Do $AB=4\sqrt{2}$ nên $4t+\frac{64}{t}=32\Leftrightarrow t^2-8t+16=0\Leftrightarrow t=4$

$$\Rightarrow\left(x_A+3\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A+3=-2\\x_A+3=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=-5\\x_A=-1\end{array}\right.$$

Với $x_A=-5\Rightarrow y_A=3\Rightarrow A\left(-5;3\right),B\left(-1;-1\right)$.

Với $x_A=-1\Rightarrow y_A=-1\Rightarrow A\left(-1;-1\right),B\left(-5;3\right)$.

Vậy tồn tại một cặp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 37.** Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có $y'=\frac{1}{\left(x+2\right)^2}$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M$ : $y=\frac{1}{\left(x_0+2\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{2x_0+3}{x_0+2}$

$\Leftrightarrow x-\left(x_0+2\right)^2y+2x_0^2+6x_0+6=0$ $(\Delta)$. Theo giả thiết ta có: $d\left(A,\Delta\right)=2d\left(B,\Delta\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|6+4\left(x_0+2\right)^2+2x_0^2+6x_0+6\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}}=\frac{2\left|5-\left(x_0+2\right)^2+2x_0^2+6x_0+6\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|6x_0^2+22x_0+28\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}}=2\frac{\left|x_0^2+2x_0+7\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}}\Leftrightarrow\left|6x_0^2+22x_0+28\right|=2\left|x_0^2+2x_0+7\right|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x_0^2+22x_0+28=2x_0^2+4x_0+14\\6x_0^2+22x_0+28=-2x_0^2-4x_0-14\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2+9x_0+7=0\\4x_0^2+13x_0+21=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=-\frac{7}{2}\end{array}\right.$$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1$. Với $x_0=-\frac{7}{2}\Rightarrow y_0=\frac{8}{3}$.

Vậy tồn tại hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 38.** Ta có $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hệ

$$\begin{cases}f'(1)=0\\f'(5)=0\\f(1)=\frac{-8}{3}\\f(5)=\frac{-40}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b+c=0\\75a+10b+c=0\\a+b+c+d=\frac{-8}{3}\\125a+25b+5c+d=\frac{-40}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=-3\\c=5\\d=-5\end{cases}$$

Khi đó $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x-5$. Ta có $y'=x^2-6x+5$.

Vì tiếp tuyến cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B thỏa mãn tam giác OAB vuông cân nên tiếp tuyến phải có hệ số góc là 1 hoặc -1.

Vì vậy $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=1 \\ x^2-6x+5=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\pm\sqrt{5} \Rightarrow y=\dfrac{-24\mp 7\sqrt{5}}{3} \\ x=3\pm\sqrt{3} \Rightarrow y=-8\pm 3\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta thấy trong 4 điểm tìm được không có điểm nào nằm trên đường thẳng $y=x$ hoặc $y=-x$ nên ta nhận cả 4 điểm trên.

Vậy có 4 điểm M.

**Câu 39.** $y=x^4+2x^2+5 \Rightarrow y'=4x^3+4x$.

Giả sử các tiếp tuyến tại $A,B,C$ có cùng hệ số góc $k \Rightarrow 4x^3+4x=k \quad (1)$.

Ta có: $x^4+2x^2+5=\dfrac{1}{4}x(4x^3+4x)+x^2+5=x^2+\dfrac{1}{4}kx+5$.

Do đó ba điểm $A,B,C$ thuộc đồ thị hàm số $y=x^2+\dfrac{1}{4}kx+5 \quad (P)$.

Theo giả thiết thì $(P)$ có đỉnh $I(-1;y_0)$ nên $-\dfrac{1}{8}k=-1 \Leftrightarrow k=8$.

Khi đó $(P): y=x^2+2x+5$. Vậy $y_0=y(-1)=4$.

**Câu 40.** Ta có: $f(3)=2; g(3)=2$

Tiếp tuyến tại $A(3;2)$ của đồ thị hàm số $y=g(x)$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cùng là đường thẳng $\Delta$. Vậy nên $f'(3)=g'(3)=2$

Ta có: $h(x)=\sin(\pi.f(x).g(x))+\cos\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right)$

$$\Rightarrow h'(x)=\cos(\pi.f(x).g(x))(\pi.f(x).g(x))'-\sin\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right).\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right)'$$

$$=\pi\cos(\pi f(x)g(x))[f'(x)g(x)+g'(x)f(x)]-\pi.\sin\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right)\left(\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x).f(x)}{f^2(x)}\right)$$

$$\Rightarrow h(3)=\pi.\cos(4\pi)[2.2+2.2]-\pi\sin\left(\dfrac{\pi.2}{2}\right).\left(\dfrac{2.2-2.2}{2^2}\right)=8\pi.$$

**Câu 41.** Hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm tại $x=a$ suy ra hàm số liên tục tại $x=a$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x) \Leftrightarrow (a-a)f'(a)=m.a \Leftrightarrow m.a=0 \Leftrightarrow a=0$.

Suy ra $g(x)=\begin{cases} xf'(x) & \text{khi } x\le 0 \\ mx & \text{khi } x>0 \end{cases}$, với $m\ne 0$. Hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Ta có $g'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{xf'(x)}{x}=f'(0)$;

$g'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{mx}{x}=m$.

Hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ suy ra $m=f'(0)$.

Tiếp tuyến tiếp xúc với $(C)$ tại $A(0;f(0))$.

Xét hàm số $y = h(x) = f\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)$, ta có

$$h'(x) = \left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)'.f'\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2+x}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}\right).f'\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right).$$

Theo đề, hệ số góc của tiếp tuyến là $\sqrt{2}$, suy ra $h'(0) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.f'(0) = \sqrt{2} \Leftrightarrow f'(0) = 2$.

Ta và ta được $m = 2$.

**Câu 42.** Ta có $y' = -3x^2 + 3$

Điểm $M \in (C) \Rightarrow M\left(a; -a^3 + 3a + 2\right)$

Gọi đường thẳng $d$ đi qua $M$ hệ số góc $k$ có dạng: $y = k(x-a) - a^3 + 3a + 2$

Khi đó $d$ tiếp xúc với $(C)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} -x^3 + 3x + 2 = k(x-a) - a^3 + 3a + 2 \\ -3x^2 + 3 = k \end{cases}$ có nghiệm

Suy ra $-x^3 + 3x = \left(-3x^2 + 3\right)(x-a) - a^3 + 3a + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2(2x+a) = 0 \ \ (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -\frac{a}{2} \end{array}\right.$$

Để từ $M$ kẻ được đúng 1 tiếp tiếp đến $(C)$ thì $(1)$ có nghiệm duy nhất $a = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 0$ suy ra điểm $M(0;2)$. Suy ra $a^2 + b^2 = 4$

**Câu 43.** Gọi điểm $M(a;0) \in Ox$. Khi đó tiếp tuyến $(d)$ đi qua $M(a;0)$ là $y = k(x-a)$.

Điều kiện tiếp xúc của $(d)$ và $(C)$ là

$$\begin{cases} -x^3 + 3x + 2 = k(x-a) \\ f'(x) = -3x^2 + 3 = k \end{cases} \Rightarrow -x^3 + 3x + 2 = \left(-3x^2 + 3\right)(x-a) \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = \left(3x^2 - 3\right)(x-a)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - x - 2\right) - 3(x-1)(x+1)(x-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - x - 2\right) - 3(x+1)\left[x^2 - (a+1)x + a\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left\{x^2 - x - 2 - 3\left[x^2 - (a+1)x + a\right]\right\} = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[-2x^2 + (3a+2)x - (3a+2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ -2x^2 + (3a+2)x - (3a+2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 2x^2 - (3a+2)x + (3a+2) = 0 \ (1) \end{array}\right..$$

Để $(C)$ có $3$ tiếp tuyến thì $(1)$ phải có $2$ nghiệm phân biệt và $x \neq -1$.

Do đó $\begin{cases} \Delta = (3a+2)^2 - 8(3a+2) > 0 \\ 2.(-1)^2 - (3a+2).(-1) + (3a+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3a+2)(3a-6) > 0 \\ 6a + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 2 \\ a < \frac{-2}{3} \end{array}\right. \\ a \neq -1 \end{cases}.$

Vì $f'(-1) = 0$ nên để có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau thì $f'(x_1).f'(x_2) = -1$, với $x_1$, $x_2$ là nghiệm của $(1)$.

Ta có $-1=f'(x_1).f'(x_2)=\left(-3x_1^2+3\right)\left(-3x_2^2+3\right)=9(x_1x_2)^2-9\left(x_1^2+x_2^2\right)+9$

$\Leftrightarrow -1=9(x_1x_2)^2-9\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+9 \Leftrightarrow -1=9(x_1x_2)^2-9(x_1+x_2)^2+18x_1x_2+9\ (2)$.

Từ phương trình $(1)$ áp dụng định lý vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3a+2}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{3a+2}{2} \end{cases}$.Thay vào $(2)$ ta được

$-1=9.\left(\dfrac{3a+2}{2}\right)^2-9\left(\dfrac{3a+2}{2}\right)^2+18.\dfrac{3a+2}{2}+9 \Leftrightarrow 27a+28=0 \Leftrightarrow a=-\dfrac{28}{27}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

**Câu 44.** Xét phương trình $\left[f(1+x)\right]^3+2f(1+2x)-21x-3=0$.

Với $x=0 \Rightarrow f^3(1)+2f(1)-3=0 \Leftrightarrow f(1)=1$.

Mặt khác $\left[f(1+x)\right]^3+2f(1+2x)-21x-3=0$

$\Rightarrow 3\left[f(1+x)\right]^2 f'(1+x)+4f'(1+2x)-21=0$

$\Rightarrow 3\left[f(1)\right]^2 f'(1)+4f'(1)=21 \Rightarrow 7f'(1)=21 \Rightarrow f'(1)=3$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x_0=1$ là

$y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=3(x-1)+1 \Leftrightarrow y=3x-2$.

**Câu 45.** Lấy đạo hàm hai vế phương trình $f^2(-x)=\left(x^2+2x+4\right)f(x+2)\ (1)$ ta được:

$-2f(-x).f'(-x)=(2x+2)f(x+2)+\left(x^2+2x+4\right)f'(x+2)\ (2)$

Thay $x=0$, $x=-2$ vào $(1)$ ta được: $\begin{cases} f^2(0)=4f(2) \\ f^2(2)=4f(0) \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta được: $f^2(0)-f^2(2)=4f(2)-4f(0)$

$\Leftrightarrow \left[f(0)-f(2)\right]\left[f(0)+f(2)\right]+4\left[f(0)-f(2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[f(0)-f(2)\right]\left[f(0)+f(2)+4\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=f(2) \\ f(0)+f(2)+4=0 \end{array}\right.$

Với $f(0)=f(2)$ suy ra: $f^2(2)=4f(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2)=0 \\ f(2)=4 \end{array}\right.$. Vậy nhận $f(0)=f(2)=4$.

Với $f(0)+f(2)+4=0$ suy ra: $\left[-4-f(2)\right]^2=4f(2) \Leftrightarrow f^2(2)+4f(2)+16=0$

Thay $x=0$, $x=-2$ vào $(2)$ ta được:

$\begin{cases} -2f(0).f'(0)=2f(2)+4f'(2) \\ -2f(2).f'(2)=-2f(0)+4f'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8f'(0)=8+4f'(2) \\ -8f'(2)=-8+4f'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8f'(0)-4f'(2)=8 \\ -4f'(0)-8f'(2)=-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=-2 \\ f'(2)=2 \end{cases}$

PTTT tại $\left(2;f\left(2\right)\right)$: $y=2\left(x-2\right)+4\Leftrightarrow y=2x$.

**Câu 46.** Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x^2}{m^2}=\dfrac{m}{x}\Leftrightarrow x=m\Rightarrow$ tọa độ giao điểm $A\left(m;1\right)$.

Xét $\left(P\right):y_1=\dfrac{x^2}{m^2}\Rightarrow y_1'=\dfrac{2x}{m^2}$ và $\left(H\right):y_2=\dfrac{m}{x}\Rightarrow y_2'=-\dfrac{m}{x^2}$

Do đó ta có hệ số góc của 2 tiếp tuyến tại $A$ là $k_1=\dfrac{2}{m};k_2=-\dfrac{1}{m}$.

Vì góc giữa hai tiếp tuyến bằng $60^0$ nên

$$\tan 60^0=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|\Leftrightarrow\sqrt{3}=\left|\frac{\frac{2}{m}+\frac{1}{m}}{1-\frac{2}{m}.\frac{1}{m}}\right|=\sqrt{3}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{8}{7\pm\sqrt{33}}}.$$

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn bài ra.

**Câu 47.** Ta có $y'=3x^2-6x$.

Gọi $M\left(a;a^3-3a^2+2\right)$ thuộc đồ thị $\left(C\right)$.

Phương trình tiếp tuyến $d$ của đồ thị hàm số tại $M$ là $y=\left(3a^2-6a\right)\left(x-a\right)+a^3-3a^2+2$.

$$\text{Do } A\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)\in d\Leftrightarrow\left(3a^2-6a\right)\left(\frac{5}{2}-a\right)+a^3-3a^2+2=-\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(3a^2-6a\right)\left(\frac{5}{2}-a\right)+a^3-3a^2+\frac{9}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4a^3-21a^2+30a-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\4a^2-9a+3=0\ (1)\end{array}\right..$$

Do $x_1;x_2\left(\neq 3\right)$ nên $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $\left(1\right)$.

$$\text{Ta có }\begin{cases}4{x_1}^2-9x_1+3=0\\k_1=3{x_1}^2-6x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}{x_1}^2=\dfrac{9x_1-3}{4}\\k_1=3.\dfrac{9x_1-3}{4}-6x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}{x_1}^2=\dfrac{9x_1-3}{4}\\k_1=\dfrac{3x_1-9}{4}\end{cases}.$$

Tương tự $k_2=\dfrac{3x_2-9}{4}$ nên $E\left(x_1;k_1\right)$, $F\left(x_2;k_2\right)$ thuộc đường thẳng có phương trình $y=\dfrac{3x-9}{4}\Leftrightarrow 3x-4y-9=0$. Khi đó $d\left(O;EF\right)=\dfrac{\left|-9\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}=\dfrac{9}{5}$.

**Câu 48.** Đường tròn $\left(T\right):\left(x-1\right)^2+y^2=2$ có tâm $I\left(1;0\right)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Ta có $\left(C\right)$: $y=x^3-3x^2+4\Rightarrow y'=3x^2-6x\Rightarrow y''=6x-6$. Điểm uốn $M\left(1;2\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại A và B có cùng hệ số góc $k\Leftrightarrow A,B$ đối xứng qua $M\left(1;2\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB$ qua $M$ có dạng: $y=a(x-1)+2$.

Đường thẳng $AB$ có điểm chung với đường tròn $\left(T\right)\Leftrightarrow d\left(I;AB\right)\le R$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|a\right|\ge 1.$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x^2+4=a(x-1)+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-a-2=0(*) \end{array}\right.$

Để tồn tại hai điểm $A, B$ thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1, hay:

$\begin{cases} \Delta'=3+a>0 \\ -3-a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a>-3$.

Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của $(*)$, suy ra: $k=y'(x_1)=y'(x_2)=3a+6$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{k}{3}-2\right|\geq 1 \\ \dfrac{k}{3}-2>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k\geq 9 \\ k\leq 3 \end{array}\right. \\ k>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k\geq 9 \\ -3<k\leq 3 \end{array}\right..$$

Với $k\geq 9$, ta có 2013 giá trị $k$ nguyên thuộc đoạn $[-2021; 2021]$.

Với $-3<k\leq 3$, ta có 6 giá trị $k$ nguyên thuộc đoạn $[-2021; 2021]$.

Vậy tập $K$ gồm 2019 phần tử.

**Câu 49.** Đặt $f(x)=2x^3-3x \Rightarrow f'(x)=6x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | + | | 0 | | − | | 0 | | + | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | ↗ | | $\sqrt{2}$ | | ↘ | | $-\sqrt{2}$ | | ↗ | | $+\infty$ |
| $\lvert f(x)\rvert$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | 0 | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=0$ không phải là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ do đó đồ thị hàm số có một tiếp tuyến vuông góc với trục $Oy$ là tiếp tuyến đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right)$.

**Câu 50.**

Hai đồ thị $(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc nhau khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-12x+9=m\sqrt{4-x^2}\,(1) \\ 3x^2-12=\dfrac{-mx}{\sqrt{4-x^2}}\,(2) \end{cases}, (x\in(-2;2)).$$

Từ ta có $m=\dfrac{x^3-12x+9}{\sqrt{4-x^2}}$.

Thay vào ta được: $3x^2-12=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}.\dfrac{x^3-12x+9}{\sqrt{4-x^2}}$

$\Leftrightarrow\left(3x^2-12\right)\left(4-x^2\right)=-x^4+12x^2-9x$

$\Leftrightarrow 2x^4-12x^2-9x+48=0$.

Ta có $2x^4-12x^2-9x+48=2\left(x^2-3\right)^2+9\left(2-x\right)+12>0,\forall x\in\left(-2;2\right)$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của tham số $m$ để đồ thị $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ tiếp xúc với nhau.

**Câu 51.** Ta có: $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}=x-2+\dfrac{2}{x-1}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y'=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến của $(C)$ đi qua điểm $A(4;1)$ là $d: y=k(x-4)+1$.

Hoành độ tiếp điểm của $d$ và $(C)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2+\dfrac{2}{x-1}=k(x-4)+1 \\ k=1-\dfrac{2}{(x-1)^2} \end{cases} \quad (1)$$

Ta có: $x-2+\dfrac{2}{x-1}=k(x-4)+1\Leftrightarrow x-2+\dfrac{2}{x-1}=k(x-1)-3k+1$

$\Leftrightarrow x-2+\dfrac{2}{x-1}=\left[1-\dfrac{2}{(x-1)^2}\right](x-1)-3k+1\Leftrightarrow x-2+\dfrac{2}{x-1}=x-1-\dfrac{2}{x-1}-3k+1$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2-3k}{4}$ thay vào, ta có:

$k=1-2\left(\dfrac{2-3k}{4}\right)^2\Leftrightarrow 8-\left(4-12k+9k^2\right)=8k\Leftrightarrow 9k^2-4k-4=0\Leftrightarrow k=\dfrac{2\pm2\sqrt{10}}{9}$.

Suy ra $M\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$, $N\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right)$.

Vì $M,N$ thuộc $(P): y=ax^2+bx-8$ nên ta có phương trình $(P): y=18x^2-8x-8$.

$I$ là đỉnh của $(P)$ nên $I\left(\dfrac{2}{9};-\dfrac{80}{9}\right)$; $MN=\dfrac{4\sqrt{10}}{9}$.

Ta có $\Delta IMN$ cân tại $I$. Gọi $H$ là chân đường cao của $\Delta IMN$ hạ từ đỉnh $I$. Ta có $IH=d(I,MN)=d(I,Ox)=\dfrac{80}{9}$.

Gọi $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta IMN$.

Ta có: $\sin\widehat{NIM}=2\sin\widehat{HIM}\cos\widehat{HIM}=2.\dfrac{HM}{IM}.\dfrac{IH}{IM}=\dfrac{MN.IH}{IM^2}$.

$$2R=\frac{MN}{\sin\widehat{NIM}}=\frac{IM^2}{IH}=\frac{IH^2+HM^2}{IH}=\frac{\left(\frac{80}{9}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{10}}{9}\right)^2}{\frac{80}{9}}=\frac{161}{18}.$$ Vậy $R=\frac{161}{36}$.

**Câu 52.** Ta có: $y'=3x^2+3ax$.

Do tiếp tuyến của $(C)$ tại $M,N$ có cùng hệ số góc là 3 nên hoành độ $M,N$ là nghiệm phương trình $y'=3\Leftrightarrow 3x^2+3ax=3\Leftrightarrow x^2+ax-1=0$.

Chia đa thức $y$ cho đa thức $x^2+ax-1$ được phần dư là $g(x)=\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)x+\frac{1}{2}a+b$.

Hay $y=\left(x^2+ax-1\right)\left(x+\frac{1}{2}a\right)+\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)x+\frac{1}{2}a+b$.

Tọa độ $M$ và $N$ đều thỏa mãn hàm số đề cho, nên ta có: $\begin{cases} y_M=x_M^3+\frac{3}{2}ax_M^2+b \\ y_N=x_N^3+\frac{3}{2}ax_N^2+b \end{cases}$.

Hay $\begin{cases} y_M=\left(x_M^2+ax_M-1\right)\left(x_M+\frac{1}{2}a\right)+\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)x_M+\frac{1}{2}a+b=\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)x_M+\frac{1}{2}a+b \\ y_N=\left(x_N^2+ax_N-1\right)\left(x_N+\frac{1}{2}a\right)+\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)x_N+\frac{1}{2}a+b=\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)x_N+\frac{1}{2}a+b \end{cases}$.

Khi đó phương trình đường thẳng $MN$ là $MN:\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)x-y+\frac{1}{2}a+b=0$.

Theo giả thiết $d(O;MN)=1\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}a+b\right|}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)^2+1}}=1\Leftrightarrow ab+b^2=\frac{1}{4}a^4-\frac{5}{4}a^2+2.\ (*)$.

Từ $(*)$ ta có $P=2a^2+(a+2b)^2=3a^2+4\left(ab+b^2\right)=a^4-2a^2+8=\left(a^2-1\right)^2+7\geq 7$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=\pm1$. Vậy GTNN cần tìm là 7.

**Câu 53.** **Cách 1**

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow (x-m)(x+m-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=4-m \end{array}\right.\Rightarrow g(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=m & (1) \\ f(x)=4-m & (2) \end{array}\right.$

TH1: $m=4-m\Leftrightarrow m=2$

$f(x)=x^2-4x+4\Rightarrow g(x)=f^2(x)-4f(x)+4=\left[f(x)-2\right]^2=\left(x^2-4x+2\right)^2$ tiếp xúc với trục $Ox$.

TH2: $m\neq 4-m\Leftrightarrow m\neq 2$ thì $(1),(2)$ không có nghiệm chung

Nên $g(x)$ tiếp xúc với $Ox$ khi phương trình $(1)$ có nghiệm kép hoặc phương trình $(2)$ có nghiệm kép

$(1)$ có nghiệm kép $\Rightarrow x^2-4x+3m-m^2=0$ có nghiệm kép mà $\Delta'=m^2-3m+4>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên không thỏa mãn

$(2)$ có nghiệm kép $\Rightarrow x^2-4x+5m-m^2-4=0$ có nghiệm kép, mà ta có:

$\Delta'=m^2-5m+8>0,\forall m\in\mathbb{R}$ nên không thỏa mãn

Vậy $m=2$ thỏa mãn yêu cầu

**Cách 2**

$f(x)=x^2-4x+4m-m^2$ nên $f'(x)=2(x-2)$ và $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=4-m\end{array}\right.$.

$g(x)$ tiếp xúc với trục $Ox\Leftrightarrow\begin{cases}f(f(x))=0\\f'(x).f'(f(x))=0\end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)=m\\f(x)=4-m\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=2\\f(x)=2\end{array}\right.\end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m=2 & (f(x)=2)\\f(2)=-m^2+4m-4=m & (VN)\\f(2)=-m^2+4m-4=4-m & (VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2.$$

Vậy $m=2$ thỏa mãn

**Câu 54.** Ta có: $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2\Leftrightarrow(xf(x))'=4x^3+3x^2$.

Suy ra: $xf(x)=\int(4x^3+3x^2)dx=x^4+x^3+C$.

Do $f(1)=2$ nên với $x=1\Rightarrow 1.f(1)=1+1+C\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra: $xf(x)=x^4+x^3\Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng $2$ có phương trình là:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)\Leftrightarrow y=16(x-2)+12\Leftrightarrow y=16x-20$.

**Câu 55.** Ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$ $(1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2,\forall x\in\mathbb{R}$ $(2)$.

Từ và ta có: $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)$.

Suy ra: $f(1)=\dfrac{2}{3};f'(1)=\dfrac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$y=\dfrac{4}{3}(x-1)+\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0;-\dfrac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác $OAB$ là: $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\left|-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{1}{6}$.

**Câu 56.** Hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Gọi $x_A = m$; $x_B = n$ ($m \neq n$ và $m$; $n \neq 1$) $\Rightarrow y_A = \dfrac{m}{m-1}$; $y_B = \dfrac{n}{n-1}$

Tiếp tuyến tại $A$ song song với tiếp tuyến tại $B \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(m-1)^2} = -\dfrac{1}{(n-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 = (n-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 = n-1 \\ m-1 = -n+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = n \text{ (lo¹i)} \\ m+n = 2 \end{array}\right.$$

$$AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow (m-n)^2 + \left(\frac{m}{m-1} - \frac{n}{n-1}\right)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (m-n)^2 + \frac{(m-n)^2}{\left[mn-(m+n)+1\right]^2} = 8 \Leftrightarrow (m+n)^2 - 4mn + \frac{(m+n)^2 - 4mn}{\left[mn-(m+n)+1\right]^2} = 8 \quad (1)$$

Thay $m+n=2$ vào $(1)$ ta được: $4 - 4mn + \dfrac{4-4mn}{(mn-1)^2} = 8 \Leftrightarrow 4 - 4mn + \dfrac{-4(mn-1)}{(mn-1)^2} = 8$

$$\Leftrightarrow 1 - mn - \frac{1}{mn-1} = 2 \Leftrightarrow -(mn-1)^2 - 1 = 2(mn-1) \Leftrightarrow -\left[(mn)^2 - 2mn + 1\right] - 1 = 2mn - 2$$

$$\Leftrightarrow -(mn)^2 + 2mn - 1 - 1 = 2mn - 2 \Leftrightarrow -(mn)^2 = 0 \Leftrightarrow mn = 0 \Rightarrow x_A x_B = 0$$

Vậy tích $x_A x_B = 0$.

**Câu 57.**

Xét đường thẳng $(\Delta): y = k(x-a) + b$ đi qua $M$, do vậy nếu $(\Delta)$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = k(x-a) + b \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} = k \end{cases}, (x \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = kx - ak + b \\ x - \dfrac{1}{x} = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = x - \dfrac{1}{x} - ak + b \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{-ak+b}{2} \\ 1 - \dfrac{(b-ak)^2}{4} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{-ak+b}{2} \\ a^2k^2 - 2(ab-2)k + b^2 - 4 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Qua $M$ có đúng hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến vuông góc với nhau khi và chỉ khi $(1)$ có hai nghiệm phân biệt $k_1, k_2$ thoả mãn $k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow \dfrac{b^2-4}{a^2} = -1, (a \neq 0) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$.

Khi đó $M$ thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ và có bán kính bằng $2$.

**Câu 58.** Gọi $M \in d \Rightarrow M(a; 2a+1)$.

Gọi $A(x_0; y_0), x_0 \neq 1$ là tiếp điểm của tiếp tuyến $d_1$ kẻ từ $M$ với $(C)$.

Phương trình tiếp tuyến $d_1: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

Vì $M \in d_1$ nên $2a + 1 = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(a - x_0) + \dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

$$\Rightarrow (2a+1)(x_0-1)^2 = -4(a - x_0) + (x_0+3)(x_0-1), \ (x_0 \neq 1).$$

$\Leftrightarrow a.x_0^2-2(a+2)x_0+3a+2=0\quad(1)$

Từ $M$ kẻ đến $(C)$ đúng 1 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ $(1)$ có đúng 1 nghiệm $x_0\neq 1$.

**Trường hợp 1:** $a=0$

$(1)\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $a=0$ thỏa mãn.

**Trường hợp 2:** $a\neq 0$, PT có nghiệm kép $x_0\neq 1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(a+2)^2-a(3a+2)=0\\ \dfrac{2(a+2)}{2a}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=2\end{array}\right.\\ \dfrac{a+2}{a}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=2\end{array}\right.\text{ thỏa mãn.}$$

**Trường hợp 3:** $a\neq 0$, PT có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=-2a^2+2a+4>0\\ a.1^2-2(a+2).1+3a+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<a<2\\ a=1\end{cases}\Leftrightarrow a=1\text{ thỏa mãn.}$$

Kết hợp 3 trường hợp suy ra có 4 điểm $M$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 59.** Phương trình tiếp tuyến $(d)$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 có dạng $y=f'(1).(x-1)+f(1)$.

Ta cần tìm $f(1)$ và $f'(1)$. Xét phương trình: $2f(2x)+f(1-2x)=12x^2\quad\forall x\in\mathbb{R}$. $(*)$

Ta tìm $f(1)$:

Thay $x=0$ vào $(*)$, ta được: $2f(0)+f(1)=0$. $(1)$

Thay $x=\dfrac{1}{2}$ vào $(*)$, ta được: $2f(1)+f(0)=3$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $f(1)=2$.

Ta tìm $f'(1)$:

Đạo hàm hai vế của $(*)$, ta được: $4f'(2x)-2f'(1-2x)=24x\quad\forall x\in\mathbb{R}$. $(**)$

Thay $x=0$ vào $(**)$, ta được: $4f'(0)-2f'(1)=0$. $(3)$

Thay $x=\dfrac{1}{2}$ vào $(**)$, ta được: $4f'(1)-2f'(0)=12$. $(4)$

Từ $(3)$ và $(4)$ suy ra $f'(1)=4$.

Như vậy, tiếp tuyến $(d)$ có phương trình là: $y=4(x-1)+2\Leftrightarrow y=4x-2$.

Gọi $A$, $B$ lần lượt là giao điểm của $(d)$ với $Ox$ và $Oy$, ta được $A\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ và $B(0;-2)$.

$\Rightarrow OA=\dfrac{1}{2}$, $OB=2$. Vậy $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 60.** Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của $(C)$: $y=\dfrac{x}{x+1}$ tại điểm $M(x_0\,;y_0)\in(C)$ ( $x_0\neq -1$ ) có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Do tiếp tuyến cắt $Ox, Oy$ lần lượt tại hai điểm $A, B$ và tam giác $OAB$ cân nên tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$ Suy ra $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \\ \dfrac{1}{(x_0+1)^2} = -1 (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến là $y = x$ loại vì A trùng O

Với $x_0 = -2$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 4$

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn ycbt.

**Câu 61.** Hàm số được viết lại thành $(x^2 - 3x + 2)m + x^3 - x^2 + 1 - y = 0$.

Một điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số thì phương trình $({x_0}^2 - 3x_0 + 2)m + {x_0}^3 - {x_0}^2 + 1 - y_0 = 0$ phải nghiệm đúng với mọi $m$, xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} {x_0}^2 - 3x_0 + 2 = 0 \\ {x_0}^3 - {x_0}^2 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1; y_0 = 1 \\ x_0 = 2; y_0 = 5 \end{array}\right.$.

Giả sử $A(1;1), B(2;5) \Rightarrow \overline{AB} = (1;4)$ khi đó hệ số góc của đường thẳng $AB$ là $k = 4$.

Đặt $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1$.

Để trên đồ thị hàm số có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $AB$ thì hệ số góc tại tiếp điểm phải bằng $k' = -\dfrac{1}{4}$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = -\dfrac{1}{4}$ có nghiệm.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2(m-1)x - 3m$.

Phương trình $f'(x) = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 3x^2 + 2(m-1)x - 3m + \dfrac{1}{4} = 0 (1)$.

Phương trình $(1)$ có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \dfrac{-7-4\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-7+4\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

Với $\dfrac{-7+4\sqrt{3}}{2} \approx -0.03$ nên các số nguyên dương $m \in [-2020; 2020]$ là $\{1; 2; 3; ...; 2020\}$.

Vậy có $2020$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 62.** TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có: $y' = \dfrac{-a-b}{(x-1)^2}$.

Điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ nên $1 = \dfrac{b}{-1} \Leftrightarrow b = -1$.

Tiếp tuyến tại $A(0;1)$ có hệ số góc bằng $-3$ nên

$y'(0) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-a+1}{1} = -3 \Leftrightarrow a = 4$. Vậy $a + b = 3$.

**Câu 63.** Đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(1; m)$ hệ số góc $k$ có phương trình là $y = k(x-1) + m$.

Đường thẳng $d$ là tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ khi và chỉ khi hệ phương trình

$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 1 = k(x-1) + m & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm $x$.

Thay vào ta có: $x^3+3x^2+1=\left(3x^2+6x\right)(x-1)+m \Leftrightarrow 2x^3-6x-1=-m$.

Qua điểm $A(1;m)$ kẻ được đúng 3 tiếp tuyến tới đồ thị $(C)$ $\Leftrightarrow$ phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ hai đồ thị hàm số $y=f(x)=2x^3-6x-1$ và $y=-m$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=2x^3-6x-1$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ $y=-m$ | $-5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của tham số $m$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 64.** Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f'(1)=0$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

$y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=f(1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến và đồ thị $(C)$ là: $f(x)=f(1)$.

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f'(-1)=f'(3)=0$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $f(-1)$ | $\nearrow$ | $f(1)$ | $\searrow$ | $f(3)$ | $\nearrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=f(1)$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $a$, 1, $b$ với $a<-1$ và $b>3$. Suy ra $b^2>9$ và $a^2>1$. Vậy $a^2+b^2>10$.

**Câu 65.** Ta có $y'=3x^2-6x$.

Gọi $d$ là tiếp tuyến với $(C)$ và $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

$d: y-y_0=y'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow d: y-\left(x_0^3-3x_0^2\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)(x-x_0)$.

$B(0;b)\in d \Leftrightarrow b-x_0^3+3x_0^2=-x_0\left(3x_0^2-6x_0\right) \Leftrightarrow 2x_0^3-3x_0^2+b=0 \Leftrightarrow b=-2x_0^3+3x_0^2 .(1)$

Đặt $f(x)=-2x^3+3x^2$. Ta có $f'(x)=-6x^2+6x$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Yêu câu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có duy nhất nghiệm $x_0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>1 \\ b<0 \end{array}\right.$.

Vậy có $17$ số nguyên $b \in (-10;10)$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 66.**

Phương trình đường thẳng $\Delta$ đi qua $A(1;m)$ có hệ số góc bằng $k$ có dạng $y=k(x-1)+m$.

$\Delta$ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3x^2+1=k(x-1)+m \\ 3x^2+6x=k \end{cases} \Rightarrow -2x^3+6x+1=m\ (*).$$

Để có 3 tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x)=-2x^3+6x+1$.

$g'(x)=-6x^2+6=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Yêu cầu đề bài khi và chỉ khi $-3<m<5$.

Suy ra $S=\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của $m$.

**Câu 67.** Ta có $y'=3x^2-3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C)$ và đường thẳng $(d)$:

$x^3-3x=k(x+1)+2 \Leftrightarrow x^3-3x-2=k(x+1)$

$\Leftrightarrow (x+1).(x^2-x-2)=k(x+1) \Leftrightarrow (x+1).(x^2-x-2-k)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2-x-2-k=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2-x-2-k=0(*) \end{array}\right.$

Để đường thẳng $(d)$ cắt đồ thị $(C)$ tại ba điểm phân biệt $M,N,P$ thì phương trình phải có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \neq -1$ hay $\begin{cases} \Delta=9+4k>0 \\ 1+1-2-k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>-\dfrac{9}{4} \\ k \neq 0 \end{cases}$

Khi đó theo định lý Viet thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = -2-k \end{cases}$

Hệ số góc tiếp tuyến tại các điểm $N, P$ là $y'(x_1) = 3(x_1^2 - 1); y'(x_2) = 3(x_2^2 - 1).$

Để tiếp tuyến của $(C)$ tại $N, P$ vuông góc với nhau thì $y'(x_1).y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow 3(x_1^2 - 1).3(x_2^2 - 1) = -1 \Leftrightarrow (x_1x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow (2+k)^2 - [1 - 2(-2-k)] + 1 = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow k^2 + 2k + \frac{1}{9} = 0$$

$\Leftrightarrow k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ thoả mãn $\Rightarrow k_1.k_2 = \dfrac{1}{9}$. Vậy tích các giá trị của $k$ là $\dfrac{1}{9}$.

**Câu 68.** Ta có $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với đồ thị $(C)$ qua $A(0;a)$ là $(\Delta): y = kx + a$.

$(\Delta)$ tiếp xúc với $(C)$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx + a \\ -\dfrac{3}{(x-1)^2} = k \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Từ hệ $(*)$ ta có $\dfrac{x+2}{x-1} = -\dfrac{3x}{(x-1)^2} + a \Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(2+a)x + 2 + a = 0 \; (**)$.

Yêu cầu bài toán là tìm $a$ để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa $\dfrac{x_1+2}{x_1-1}.\dfrac{x_2+2}{x_2-1} < 0$. Ta có $\begin{cases} P = x_1.x_2 = \dfrac{2+a}{a-1} \\ S = x_1 + x_2 = \dfrac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ \dfrac{P + 2S + 4}{P - S + 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a + 6 > 0 \\ \dfrac{9a+6}{-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \\ a > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Do $a$ nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ nên $a \in \{0; 2; 3; 4; \ldots; 2018\}$.

Vậy có $2018$ giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

# CHƯƠNG 2: CÁC BÀI TOÁN VDC MŨ VÀ LOGARIT CHỌN LỌC

## I. ĐỀ VẬN DỤNG CAO MŨ VÀ LOGARIT SỐ 01

### ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho hai số thực dương $x,y$ thỏa mãn $\log_3(x+y+2)=1+\log_3\left(\frac{x-1}{y}+\frac{y-1}{x}\right)$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính hiệu $a-b$.

**A.** $2$. **B.** $9$. **C.** $7$. **D.** $13$.

**Câu 2:** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx-x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ với $a,b,c$ là các số thực dương, biết $f(1)=-3, f(5)=2$. Xét hàm số $g(t)=\left|3f(3-2t)+2f(3t-2)+m\right|$, gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của $m$ sao cho $\max\limits_{[-1;1]} g(t)=10$. Số phần tử của $S$ là

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 3:** Cho $x$, $y$ là hai số thực dương thỏa mãn $2x\cdot\log_2\frac{x}{y+1}=y-4x+1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2-y^2$ là

**A.** $\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

**Câu 4:** Có bao nhiêu số nguyên $y\in(-20;20)$ thoả mãn $2+\log_{\sqrt{3}}(3x^2+1)\le\log_{\sqrt{3}}(yx^2-6x+2y)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

**A.** $9$. **B.** $11$. **C.** $10$. **D.** $8$.

**Câu 5:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong đó $x,y$ là các số nguyên thoả mãn điều kiện $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m)\ge 1$, với $m$ là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập $S$ có không quá $5$ phần tử?

**A.** 1. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2019.

**Câu 6:** Cho bất phương trình $\log_2^2(2x)-(m+1)\log_2 x+m-3\le 0$ ($m$ là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc đoạn $\left[4;4\sqrt{2}\right]$ là

**A.** $m\le\frac{7}{2}$. **B.** $m\ge\frac{9}{2}$. **C.** $m\in R$. **D.** $m\ge\frac{7}{4}$.

**Câu 7:** Cho bất phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4\ge 0$ ($m$ là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{5}{2},4\right]$ là

**A.** $[-3;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-3;\frac{7}{3}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right]$.

**Câu 8:** Cho $a$, $b$ là hai số thực thay đổi thỏa $1<a\le b\le 2$, biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\cdot\log_a\left(b^2+4b-4\right)+\log_{\frac{b}{2}}^2 a$ là $m+3\sqrt[3]{n}$ với $m$, $n$ là số nguyên dương. Tính $S=m+n$.

**A.** $S=9$. **B.** $S=18$. **C.** $S=54$. **D.** $S=15$.

**Câu 9:** Có bao nhiêu số nguyên a $(a\ge 2)$ sao cho tồn tại số thực $x$ thỏa mãn:

$$\ln\left(a^{\log x^4}+4a^{\log x^2}+4\right)=\frac{\ln(x-2)}{\log a}$$

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Câu 10:** Có bao nhiêu số nguyên $m\le 2021$ để có nhiều hơn một cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m)\ge 1$ và $4x-3y+1=0$?

**A.** 2017. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

**Câu 11:** Gọi $S$ là tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $mx^2+\log_2\left(mx^2\right)>2^{\log_2^2 x}+\log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để tập hợp $S$ có đúng 8 phần tử.

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 11.

**Câu 12:** Có bao nhiêu số nguyên $y\in[-2022;\,2022]$ để tồn tại $x$ thỏa mãn: $4x\sqrt{x}.\sqrt[4]{e^{x+y}}\ge e^{x+y}+3x^2$?

**A.** 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2022.

**Câu 13:** Có bao nhiêu số nguyên $y\in(0;2021)$ thỏa mãn: $1+\log_3\left(3x^2+1\right)\le\log_3\left(yx^2-12x-y-1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

**A.** 2021. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 0.

**Câu 14:** Trên khoảng $(-20;20)$, có tất cả bao nhiêu số nguyên $a$ để có đúng hai số thực $x$ thỏa mãn

$$\log_{\sqrt{2}}\left(4^x+(a+2).2^x+4\right)-\log_{\sqrt{2}}(a-1)-\log_2\left(4^{x-1}+1\right)=x+2\ ?$$

**A.** 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 11.

**Câu 15:** Cho các số thực $a,b,c>1$ và các số thực dương thay đổi $x,y,z$ thỏa mãn $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{16}{x}+\frac{16}{y}-z^2$

**A.** 24. **B.** $24-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **C.** 20. **D.** $20-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)>1+f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2021$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)<2020e^x+1$ là

**A.** $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Câu 17:** Cho hai số thực dương $x,y$ thỏa mãn: $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+5y$ là

**A.** $P_{\min}=125$. **B.** $P_{\min}=57$. **C.** $P_{\min}=43$. **D.** $P_{\min}=25$.

**Câu 18:** Gọi $E$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương $y$ sao cho ứng với mỗi số $y$ có không quá 4031 số nguyên $x$ thỏa mãn $\log_2^2 x - 3y\log_2 x + 2y^2 < 0$. Tập $E$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** $8$. **D.** $5$.

**Câu 19:** Cho hai số thực $x, y$ thỏa mãn $\ln(x-y) + \ln(x+y) = 2^{\frac{x^2-y^2+1}{x+y}} - 4^{x-y}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của $P = 8x^3 + 4x^2y - 6x - y$ đạt được tại cặp $(x_0; y_0)$. Đặt $x_0 + y_0 = \frac{m}{\sqrt[n]{p}}$ trong đó $m, n, p$ là số tự nhiên và $p$ nhỏ hơn 25. Giá trị của $3m + 2n - p$ là

**A.** $12$. **B.** $16$. **C.** $25$. **D.** $29$.

**Câu 20:** Cho bất phương trình $\log_{m^2+1}\left(2 - \sqrt{x^2+1}\right) \ge (m-1)^2$, $m$ là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị của $m$ để bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất ?

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 21:** Cho phương trình $9^x + 3^{x+1} + 2m = \left(3^{x+1} + 1\right)\sqrt{3^x + m}$. Có bao nhiêu giá trị tham số thực $m \in [-20; 20]$ để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt biết rằng $4m \in \mathbb{Z}$?

**A.** $79$. **B.** $82$. **C.** $81$. **D.** $80$.

**Câu 22:** Tìm các số nguyên $x$ sao cho với mỗi số nguyên $x$ tồn tại đúng 5 số nguyên $y$ thỏa mãn $3^{y^2 - |x-2y|} \le \log_{y^2+3}\left(|x-2y| + 3\right)$

**A.** $10$. **B.** $11$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Câu 23:** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right) = 1 + 2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ là

**A.** $420$. **B.** $360$. **C.** $400$. **D.** $320$.

**Câu 24:** Cho $a, b > 1$ và $a^{2x} = b^{2y} = \sqrt{ab}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 6x + y^2$.

**A.** 6. **B.** 9. **C.** 4. **D.** $\frac{45}{16}$.

**Câu 25:** Cho ba số thực $a, b, c$ thỏa mãn $c > b > a > 1$ và $6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1$. Giá trị của biểu thức $T = \log_b c - 2\log_a b$ là

**A.** 1. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $-1$.

**Câu 26:** Cho $a, b$ là các số thực dương thỏa mãn $a > b + 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right) + \frac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a\right)^2$

**A.** $\min P = 2$. **B.** $\min P = \frac{9}{4}$. **C.** $\min P = 4$. **D.** $\min P = \frac{5}{2}$.

**Câu 27:** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2-4y^2=5 \\ \log_m(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1 \end{cases}$ với $m$ là tham số thực. Hệ phương trình có nghiệm là các bộ $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $3x+2y\le 5$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số $m$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Câu 28:** Có bao nhiêu cặp số $(x,y)$ thỏa mãn $x,y\in\mathbb{Z};2\le x,y\le 2021$ và $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$

**A.** $4036$. **B.** $2020$. **C.** $2019$. **D.** $2018$.

**Câu 29:** Cho $y=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ và $y=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+8m-2021$. Gọi $S$ là tập các giá trị của $m$ để đồ thị 2 hàm số có đúng 1 điểm chung. Số phần tử của $S$ là?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $2021$. **D.** $2020$.

**Câu 30:** Cho $x,y$ là hai số thực, với $y\ge 0$, thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Gọi $m,M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P=2^x+2^y$. Khi đó tổng $m+M$ có dạng $\dfrac{b}{a}+2^{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}$, với $a,b$ nguyên dương, nguyên tố cùng nhau. Tính $a+2b$.

**A.** $9$. **B.** $8$. **C.** $6$. **D.** $10$.

**Câu 31:** Cho hai số thực $x,y$ thỏa mãn $\left(\dfrac{1}{4^x}+\dfrac{1}{9^x}\right)\left(2^x+3^y\right)=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2^x}{1+3^y}+\dfrac{3^x}{1+2^y}+\dfrac{1}{1+2^x.3^y}$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(\sqrt{3};4\right)$. **B.** $\left(0;\sqrt{3}\right)$. **C.** $(5;2020)$. **D.** $(4;5)$.

**Câu 32:** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 33:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0\le x\le 2020$ và $2\left(x+\ln(x+1)\right)+x^2+1=y+e^y$?

**A.** $0$. **B.** $7$. **C.** $1$. **D.** $8$.

**Câu 34:** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn xác định trên $\mathbb{R}$, sao cho $f(0)\ne 0$ và phương trình $4^x-4^{-x}=f(x)$ có đúng 10 nghiệm thực phân biệt. Số nghiệm thực của phương trình $4^x+4^{-x}=f^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+2$ là

**A.** 10 **B.** $20$. **C.** 5. **D.** 15.

**Câu 35:** Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2020;2021]$ để phương trình $\dfrac{1}{\ln(x+5)}+\dfrac{1}{3^x-3}=\dfrac{x^2-(m+2)x+2m-1}{x-2}$ có ba nghiệm phân biệt?

**A.** $4042$. **B.** $2027$. **C.** $0$. **D.** $2016$.

**Câu 36:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\le 16$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** $13$. **B.** $15$. **C.** $14$. **D.** $16$.

**Câu 37:** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $9$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Câu 38:** Cho các số thực $x, y\ge 1$ thỏa mãn điều kiện $xy\le 8$. Biểu thức $P=\log_{4x}(8x)-\log_{2y^2}\left(\dfrac{y^2}{2}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=x_0; y=y_0$. Đặt $T={x_0}^4+{y_0}^4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $T=519$. **B.** $T=520$. **C.** $T=521$. **D.** $T=518$.

**Câu 39:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc khoảng $(-20;20)$ để với mọi cặp hai số $(x;y)$ có tổng lớn hơn 1 đều đồng thời thỏa mãn $e^{3x+y}-e^{2x-2y+1}=1-x-3y$ và $\log_3^2(2x+4y-1)+2(m-1)\log_3(1-2y)+m^2-9>0$?

**A.** $15$. **B.** $17$. **C.** $14$. **D.** $16$.

**Câu 40:** Cho $x, y$ thỏa mãn $x\ge 1, y\ge 1$ và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{4xy}\right)=4xy-3(x+y)-1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ thuộc tập nào dưới đây?

**A.** $[5;9)$. **B.** $[-5;0)$. **C.** $[0;5)$. **D.** $[9;+\infty)$.

**Câu 41:** Cho $x$, $y$ là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y}=\dfrac{8-8xy}{x+y}$. Khi $P=2xy^2+xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 42:** Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)-\log_2 y=2x+2y+xy-5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+xy$ là bao nhiêu?

**A.** $30-20\sqrt{2}$. **B.** $33-22\sqrt{2}$. **C.** $24-16\sqrt{2}$. **D.** $36-24\sqrt{2}$.

**Câu 43:** Trong hệ tọa độ $Oxy$ cho điểm $M(x;y)$ với $x, y\in\mathbb{Z}, -6<x<6, y\ne 0$ và thỏa mãn phương trình $3^{9y^2}-\dfrac{3^{36}}{3^{x^2}}+2=\log_3\left(\dfrac{36-x^2}{y^2}\right)$. Hỏi có bao nhiêu điểm $M$ thỏa yêu cầu nêu trên?

**A.** Bốn điểm. **B.** Ba điểm. **C.** Một điểm. **D.** Hai điểm.

**Câu 44:** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $-5$. **B.** $-3$. **C.** $-2$. **D.** $-4$.

**Câu 45:** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \dfrac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1)-4(xy+1)$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{5x+3y-2}{2x+y+1}$ bằng

**A.** $3$. **B.** 1. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 46:** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right) \geq \log_3\left(x+y\right)$?

**A.** $116$. **B.** $115$. **C.** $59$. **D.** $58$.

**Câu 47:** Cho hàm số $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Các số thực $a, b$ thoả mãn $a+b>0$ và $f\left(a^2+b^2+ab+2\right)+f\left(-9a-9b\right)=0$. Khi biểu thức $P = \dfrac{4a+3b+1}{a+b+10}$ đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị của $a^3+b^2$.

**A.** $91$. **B.** $89$. **C.** $521$. **D.** $745$.

**Câu 48:** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \leq \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

**A.** 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Câu 49:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m, n)$ sao cho $m+n \leq 14$ và ứng với mỗi cặp số $(m, n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2.a^m = n.\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** $11$. **B.** $12$. **C.** $13$. **D.** $14$.

**Câu 50:** Cho các số thực dương $x$ và $y$ thỏa mãn $5+9.3^{x^2-2y} = \left(5+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+2y+11}{x}$?

**A.** $P=6$. **B.** $P=9$. **C.** $P=7$. **D.** $P=8$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn D**

Ta có: $\log_3(x+y+2)=1+\log_3\left(\frac{x-1}{y}+\frac{y-1}{x}\right)\Leftrightarrow \log_3(x+y+2)=\log_3\left[3\left(\frac{x-1}{y}+\frac{y-1}{x}\right)\right]$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=(x+y)+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2\ge 2\sqrt{(x+y).3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+2$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 2\sqrt{3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6}+2\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge\frac{10}{3}\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2}{xy}\ge\frac{10}{3}$. Do đó $a+b=13$.

**Câu 2: Chọn A**

$f(x)=ax^3+bx-c\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ( $f(x)$ là hàm số lẻ).

$f'(x)=3ax^2+b-\frac{c}{\sqrt{1+x^2}}$; $f''(x)=6ax+\frac{cx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=x\left(6a+\frac{c}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

$g(t)=\left|3f(3-2t)+2f(3t-2)+m\right|$

Xét $y=3f(3-2t)+2f(3t-2)$ có đạo hàm: $y'=-6f'(3-2t)+6f'(3t-2)$

Cho: $y'=0\Leftrightarrow f'(3-2t)=f'(3t-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2t=-(3t-2)\\3-2t=3t-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

$y(-1)=3f(5)+2f(-5)+m=f(5)+m=m+2$.

$y(1)=3f(1)+2f(1)+m=5f(1)+m=m-15$.

$\max\limits_{[-1;1]}g(t)=\frac{|2m-13|+17}{2}=10\Leftrightarrow|2m-13|=3\left[\begin{array}{l}2m-13=3\\2m-13=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=8\\m=5\end{array}\right.$.

**Câu 3: Chọn D**

Ta có $\log_2\frac{x}{y+1}=\frac{y+1}{2x}-2\Rightarrow\log_2 2.\frac{2x}{y+1}=\frac{y+1}{2x}$ $(1)$.

Nếu $\frac{y+1}{2x}>1$ thì vế trái $(1)<1$, vế phải $(1)>1$, khi đó $(1)$ vô lí.

Nếu $\frac{y+1}{2x}<1$ thì vế trái $(1)>1$, vế phải $(1)<1$, khi đó $(1)$ vô lí.

Suy ra $y+1=2x\Rightarrow y=2x-1$. Nên $P=x^2-y^2=-3x^2+4x-1\le\frac{1}{3}$.

**Câu 4: Chọn C**

Giả sử tồn tại số nguyên $y \in (-20;20)$ sao cho: $2+\log_{\sqrt{3}}(3x^2+1) \le \log_{\sqrt{3}}(yx^2-6x+2y), \forall x$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2+1) \le \log_{\sqrt{3}}(yx^2-6x+2y)$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3.(3x^2+1) \le \log_{\sqrt{3}}(yx^2-6x+2y) \Leftrightarrow yx^2-6x+2y \ge 3(3x^2+1)$

$\Leftrightarrow y(x^2+2) \ge 9x^2+6x+3 \Leftrightarrow y \ge \dfrac{9x^2+6x+3}{x^2+2} = f(x)$

$\Leftrightarrow y \ge \max f(x), \forall x \Leftrightarrow y \ge 9,55, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \ge 10, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow n(y) = 20-10 = 10$

**Câu 5: Chọn C**

$\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \ge 1 \Leftrightarrow 2x+2y+m \ge x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \le m+1$ Để bất phương trình có 5 phần tử thì $\sqrt{m+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow m < 1$

Vậy có 2021 số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập $S$ có không quá 5 phần tử.

**Câu 6: Chọn B**

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_2^2(2x)-(m+1)\log_2 x+m-3 \le 0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-(m+1)\log_2 x+m-3 \le 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x+(1-m)\log_2 x+m-2 \le 0$

Với $x \in \left[4;4\sqrt{2}\right] \Rightarrow t \in \left[1;\dfrac{5}{2}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2+(1-m)t+m-2 \le 0$.

Bài toán trở thành tìm $m$ để bất phương trình: $t^2+(1-m)t+m-2 \le 0$, $\forall t \in \left[2;\dfrac{5}{2}\right]$.

$t^2+(1-m)t+m-2 \le 0, \forall t \in \left[2;\dfrac{5}{2}\right] \Leftrightarrow (t-1)(t+2-m) \le 0, \forall t \in \left[2;\dfrac{5}{2}\right] (*)$

Vì $t-1 > 0, \forall t \in \left[2;\dfrac{5}{2}\right]$, nên $(*) \Leftrightarrow t+2-m \le 0, \forall t \in \left[2;\dfrac{5}{2}\right] \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}+2-m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{9}{2}$.

**Câu 7: Chọn A**

Điều kiện: $x > 2$.

Ta có: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4 \ge 0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2)+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4 \ge 0$

Đặt $t = \log_2(x-2)$, ta có phương trình trở thành: $(m-1)t^2+(m-5)t+m-1 \ge 0$ $(*)$

Với $x \in \left[\dfrac{5}{2};4\right]$, ta có: $t \in [-1;1]$ thì $(*) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$, $t \in [-1;1]$.

Để bất phương trình có nghiệm $t \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $m \ge \min\limits_{[-1;1]}\left(\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}\right)$.

Xét hàm: $f(t) = \dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{-4t^2+4}{(t^2+t+1)^2} \ge 0, \forall t \in [-1;1]$.

Suy ra: $f(-1) \le f(t) \le f(1), \forall t \in [-1;1]$ hay $-3 \le f(t) \le \dfrac{7}{3}, \forall t \in [-1;1]$. Vậy $m \ge -3$.

**Câu 8: Chọn D**

Ta có: $1 < a \le b \le 2$ nên

$$\begin{cases} b-1>0 \\ b-2\le 0 \end{cases} \Rightarrow (b-1)(b^2-4)\le 0 \Leftrightarrow b^3-4b-b^2+4\le 0 \Leftrightarrow b^3 \le b^2+4b-4$$

Do đó cơ số $a>1$ nên $\log_a(b^2+4b-4)\ge \log_a b^3$.

Khi đó: $P = 2\cdot\log_a(b^2+4b-4)+\log^2_{\frac{b}{a}} a \ge 2\log_a b^3+\log^2_{\frac{b}{a}} a = 6\log_a b+\dfrac{1}{(\log_a b-1)^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số:

$P \ge 3(\log_a b-1)+3(\log_a b-1)+\dfrac{1}{(\log_a b-1)^2}+6 \ge 3\sqrt[3]{9}+6$.

Dấu bằng xảy ra khi $3(\log_a b-1)=\dfrac{1}{(\log_a b-1)^2} \Leftrightarrow (\log_a b-1)^3=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \log_a b = 1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Cuối cùng $m=6$; $n=9$ nên $S=15$.

**Câu 9: Chọn B**

Điều kiện của phương trình: $x>2$

Giả sử có nguyên a sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$\ln\left(a^{\log x^4}+4a^{\log x^2}+4\right)=\dfrac{\ln(x-2)}{\log a} \Leftrightarrow \ln\left(a^{\log x^4}+4a^{\log x^2}+4\right)=\dfrac{\ln(x-2)}{\log e.\ln a}$

$\Leftrightarrow \log e.\ln\left(a^{\log x^4}+4a^{\log x^2}+4\right)=\log_a e.\ln(x-2) \Leftrightarrow \log\left(a^{\log x^4}+4a^{\log x^2}+4\right)=\log_a(x-2)$

$\Leftrightarrow \log\left(a^{4\log x}+4a^{2\log x}+4\right)=\log_a(x-2) \Leftrightarrow \log\left(a^{2\log x}+2\right)=\log_a\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \log\left(x^{2\log a}+2\right)=\log_a\sqrt{x-2}$ **(** $a^{2\log x}=a^{2\log a.\log_a x}=x^{2\log a}$ **)**

Đặt $t=x^{2\log a}+2 \Rightarrow \begin{cases} x^{2\log a}=t-2 \\ t^{2\log a}=x-2 \end{cases} \Rightarrow x=t$. Suy ra $x^{2\log a}-x+2=0, x>2$

Đặt $u=2\log a\,(u>0) \Rightarrow f(x)=x^u-x+2$

Khi $u\ge 1 \Rightarrow x^u\ge x \Rightarrow f(x)=0$ vô nghiệm.

Khi $u<1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty<0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2^u>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ pt luôn có nghiệm thuộc $(2,+\infty)$

Từ đó: $2\log a<1 \Leftrightarrow -\sqrt{10}<a<\sqrt{10}$ kết hợp điều kiện đề bài ta có $2\le a<\sqrt{10}, a\in Z \Rightarrow a\in\{2;3\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn.

**Câu 10: Chọn A**

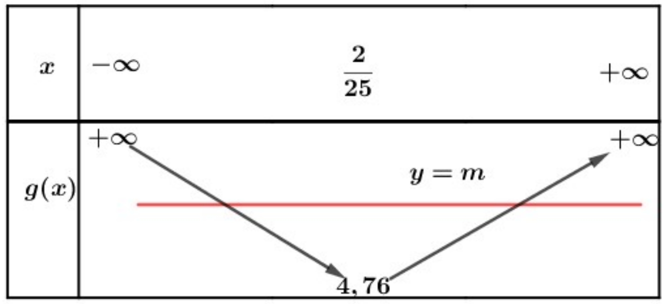
Từ giả thiết, suy ra $y=\dfrac{4x+1}{3}$. Ta có $\log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m)\ge 1 \Leftrightarrow 4x-2y+m\ge x^2+y^2+4$

$\Leftrightarrow m\ge x^2+y^2+4-4x+2y \Leftrightarrow m\ge x^2+\left(\dfrac{4x+1}{3}\right)^2+4-4^x+2\left(4\dfrac{x+1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 9m\ge 9x^2+16x^2+8x+1+36-36x+24x+6 \Leftrightarrow 9m\ge 25x^2-4x+43$

$\Leftrightarrow m\ge \dfrac{25}{9}x^2-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{43}{9}$ $(*)$. Đặt $g(x)=\dfrac{25}{9}x^2-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{43}{9}$.

Bảng xét dấu




Để có nhiều hơn một cặp số $(x;y)$ thì bất phương trình $(*)$ phải có nhiều hơn một nghiệm $x$ nên $m>4,76 \Rightarrow m\in\{5;6;...;2021\}$. Vậy có 2017 số nguyên $m$ cần tìm.

## Câu 11: Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ m>0 \end{cases}$.

Đặt $t=\log_2\left(mx^2\right) \Rightarrow mx^2=2^t$ .Bất phương trình trở thành $2^t+t>2^{\log_2^2 x}+\log_2^2 x$

Xét hàm số $f(u)=2^u+u$ có $f'(u)=2^u\ln 2+1>0, \forall u\in\mathbb{R}$

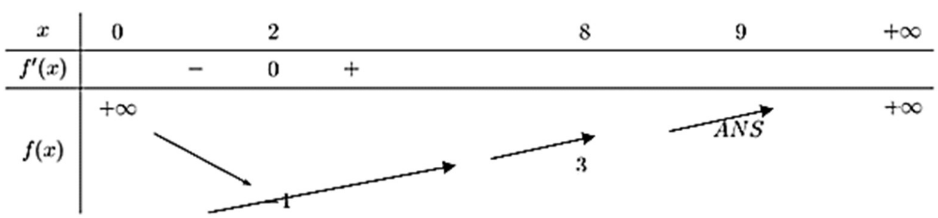
Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên bất phương trình trở thành $t>\log_2^2 x$

$\Leftrightarrow \log_2\left(mx^2\right)>\log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 m>\log_2^2 x-2\log_2 x$ .Đặt $g(x)=\log_2^2 x-2\log_2 x$, với mọi $x>0$

Ta có: $g'(x)=2\log_2 x\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{2}{x\ln 2}=\dfrac{2}{x\ln 2}(\log_2 x-1)$

Cho $g'(x)=0$, ta có: $\log_2 x=1 \Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên:




Để bất phương trình có đúng 8 nghiệm nguyên thì $3<\log_2 m\le ANS$

$\Leftrightarrow 8<m\le 13,07$. Suy ra $m\in\{9,10,11,12,13\}$ nên có 5 giá trị nguyên của tham số $m$ thoả ycbt.

## Câu 12: Chọn D

Điều kiện: $x\ge 0$. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[4]{e^{x+y}} \\ b=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b\ge 0 \end{cases}$

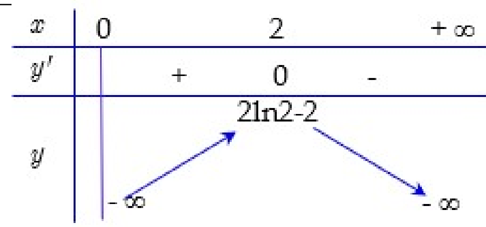
Khi đó: $4x\sqrt{x}.\sqrt[4]{e^{x+y}}\ge e^{x+y}+3x^2$

$\Rightarrow 4b^3a\ge a^4+3b^4 \Leftrightarrow a^4-4b^3a+3b^4\le 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2+2ab+3b^2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow a-b=0\ (do: a>0, b\ge 0) \Rightarrow a=b \Rightarrow e^{x+y}=x^2 \Rightarrow y=2\ln x-x,\ x>0$

Xét hàm số: $y=2\ln x-x,\ x>0$ có $y'=\dfrac{2}{x}-1=0 \Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên




Để tồn tại $x$ thì $y \in [-2022;\, 2\ln 2 - 2]$ mà $y$ nguyên, nên có $2022$ số.

**Câu 13: Chọn D**

Ta có: $1+\log_3\left(3x^2+1\right) \le \log_3\left(yx^2-12x-y-1\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \log_3\left(9x^2+3\right) \le \log_3\left(yx^2-12x-y-1\right) \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 9x^2+3 \le yx^2-12x-y-1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (9-y)x^2+12x+y+4 \le 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

**Trường hợp 1**: $y=9$

Bất phương trình $(1)$ trở thành $12x+13 \le 0 \Leftrightarrow x \le -\dfrac{13}{12}$ nên $y=9$.

**Trường hợp 2**: $y \ne 9$

Bất phương trình $(1)$ thỏa mãn với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} 9-y<0 \\ \Delta' = y^2-5y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>9 \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy không có số nguyên $y$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 14: Chọn A**

Điều kiện : $\begin{cases} 4^x+(a+2).2^x+4>0 \\ a>1 \\ 4^{x-1}+1 \\ a \in (-20;20) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow 1<a<20$.

$$\log_{\sqrt{2}}\left(4^x+(a+2).2^x+4\right)-\log_{\sqrt{2}}(a-1)-\log_2\left(4^{x-1}+1\right)=x+2$$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} \dfrac{4^x+(a+2).2^x+4}{(a-1)\sqrt{4^{x-1}+1}} = x+2 \Leftrightarrow \dfrac{4^x+(a+2).2^x+4}{(a-1)\sqrt{4^{x-1}+1}} = \left(\sqrt{2}\right)^{x+2}$

$\Leftrightarrow 4^x+(a+2).2^x+4=(a-1).\sqrt{4^x+4}.\left(\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow \dfrac{4^x+4}{2^x}+a+2=(a-1)\sqrt{\dfrac{4^x+4}{2^x}}$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{4^x+4}{2^x}}=\sqrt{2^x+\dfrac{4}{2^x}} \ge 2$. Phương trình đã cho trở thành

$t^2+a+2=(a-1)t \Leftrightarrow t^2+t+2=a(t-1) \Leftrightarrow a=\dfrac{t^2+t+2}{t-1}$

Xét $f(t)=\dfrac{t^2+t+2}{t-1}, t \ge 2$. $f'(t)=\dfrac{t^2-2t-3}{(t-1)^2}$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \ (l) \\ t=3 \quad (n) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $8$ | $\searrow$ | $7$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Nhận xét:** Với $t=2$ thì pt $t=\sqrt{\dfrac{4^x+4}{2^x}}$ có một nghiệm duy nhất $x=1$.

Với $t>2$ thì pt $t=\sqrt{\dfrac{4^x+4}{2^x}} \Leftrightarrow 4^x-t^2.2^x+4=0 \Leftrightarrow k^2-t^2k+4=0\ \left(k=2^x\right)\ (2)$

Theo định lý Vi-ét thì $\begin{cases} S=t^2>0 \\ P=4>0 \end{cases}$, tức là $(2)$ luôn có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Rightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Quay lại bài toán, ta thấy

Khi $a=7$ hoặc $a>8$ thì phương trình có một nghiệm $t>2$ dẫn tới phương trình ban đầu có đúng 2 nghiệm $x$.

Khi $a=8$ thì phương trình $(*)$ có một nghiệm $t=2$, một nghiệm $t>2$ nên phương trình ban đầu có 3 nghiệm $x$.

Khi $7<a<8$ thì phương trình có hai nghiệm $t>2$, dẫn tới phương trình ban đầu có 4 nghiệm $x$.

Kết hợp với điều kiện, ta được tập các giá trị của $a$ thỏa là $\{7;9;10;11;...;20\}$

Vậy có 12 giá trị nguyên của $a$ thỏa đề.

**Câu 15: Chọn C**

Từ giả thiết $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc} \Rightarrow x\ln a=y\ln b=z\ln c=\dfrac{1}{2}\left(\ln a+\ln b+\ln c\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln a}{\ln a+\ln b+\ln c};\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{2\ln b}{\ln a+\ln b+\ln c};$ z$=\dfrac{\ln a+\ln b+\ln c}{2\ln c}$

Đặt $t=\dfrac{\ln c}{\ln a+\ln b+\ln c}$. Do $a,b,c>1 \Rightarrow t>0$

khi đó ta có $\Rightarrow \dfrac{16}{x}+\dfrac{16}{y}=\dfrac{32\left(\ln a+\ln b\right)}{\ln a+\ln b+\ln c}=32-\dfrac{32\ln c}{\ln a+\ln b+\ln c}=32-32t$

Vậy

$$P=\frac{16}{x}+\frac{16}{y}-z^2=32-\left(32t+\frac{1}{4t^2}\right)=32-\left(16t+16t+\frac{1}{4t^2}\right)\le 32-3.\sqrt[3]{16.16.\frac{1}{4}}=32-12=20$$

**Câu 16: Chọn C**

Xét hàm số : $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{e^x}$ trên $\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-e^x\left(f(x)-1\right)}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left[f'(x)-f(x)+1\right]}{e^{2x}}<0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(x)<2020e^x+1 \Leftrightarrow e^xg(x)+1<2020e^x+1 \Leftrightarrow g(x)<2020=g(0) \Leftrightarrow x<0$.

**Câu 17: Chọn C**

$$\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)\Leftrightarrow \log_5(x+2)(y+1)=\frac{125}{y+1}-(x+2)+3$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+\log_5(y+1)=\frac{125}{y+1}-(x+2)+3$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=-\log_5(y+1)+\frac{125}{y+1}+3\Leftrightarrow \log_5(x+2)+(x+2)=\log_5\left(\frac{125}{y+1}\right)+\frac{125}{y+1},$$

dễ thấy $f(t)=\log_5 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra $x+2=\dfrac{125}{y+1}$

$$\Rightarrow P=x+5y=5y+\frac{125}{y+1}-2=5(y+1)+\frac{125}{y+1}-7\geq 2\sqrt{5.125}-7=43$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(y+1)^2=25\\ x+2=\dfrac{125}{y+1}\\ x,y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=23\\ y=4\end{cases}$.

**Câu 18: Chọn B**

Ta có $\log_2^2 x-3y\log_2 x+2y^2<0$

$\Leftrightarrow(\log_2 x-y)(\log_2 x-2y)<0\Leftrightarrow y<\log_2 x<2y\Leftrightarrow 2^y<x<2^{2y}$

$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left\{2^y+1;...;2^{2y}-1\right\}$ số phần tử của $x$: $2^{2y}-2^y-1\leq 4031\Leftrightarrow 2^{2y}-2^y-4032\leq 0$

$\Leftrightarrow 2\leq 2^y\leq 64=2^6\ \Rightarrow y\in\{1,2,3,4,5,6\}$

**Câu 19: Chọn A**

Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases}x-y>0\\ x+y>0\end{cases}$

Ta có giả thiết $\Leftrightarrow \ln(x-y)-\ln\dfrac{1}{x+y}=2^{x-y}\left(2^{\frac{1}{x+y}}-2^{x-y}\right)$ (1)

Nếu $x-y>\dfrac{1}{x+y}$ thì $\begin{cases}VT=\ln(x-y)-\ln\dfrac{1}{x+y}>0\\ VP=2^{x-y}\left(2^{\frac{1}{x+y}}-2^{x-y}\right)<0\end{cases}$ $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Tương tự, nếu $x-y<\dfrac{1}{x+y}$ thì $\begin{cases}VT<0\\ VP>0\end{cases}\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Do đó $x-y=\dfrac{1}{x+y}\Leftrightarrow x^2-y^2=1$. Khi đó, đặt $\begin{cases}u=x+y>0\\ v=x-y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$ và $u.v=1$.

Ta có $P=8\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^3+4\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2.\dfrac{u-v}{2}-6.\dfrac{u+v}{2}-\dfrac{u-v}{2}=\dfrac{3}{2}u^3+\dfrac{1}{2}v^3\geq 2\sqrt{\dfrac{3(uv)^3}{4}}=\sqrt{3}$.

Do đó $P_{\min}=\sqrt{3}$ khi $\begin{cases}\frac{3}{2}u^3=\frac{1}{2}v^3\\ uv=1\end{cases}\Rightarrow u=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$ hay $\Rightarrow u=x_0+y_0=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$.

Vậy $m=1,n=6,p=3\Rightarrow 3m+2n-p=12$.

**Câu 20: Chọn D**

Từ bất phương trình đã cho ta suy ra nếu $x=x_0$ là nghiệm của bất phương trình thì $-x_0$ cũng là nghiệm của bất phương trình.

Suy ra để bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=0$.

Khi $x=0\Rightarrow \log_{m^2+1}\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)\ge(m-1)^2\Leftrightarrow(m-1)^2\le 0\Leftrightarrow m=1$.

Vậy có 1 giá trị của $m$ để bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

**Câu 21: Chọn D**

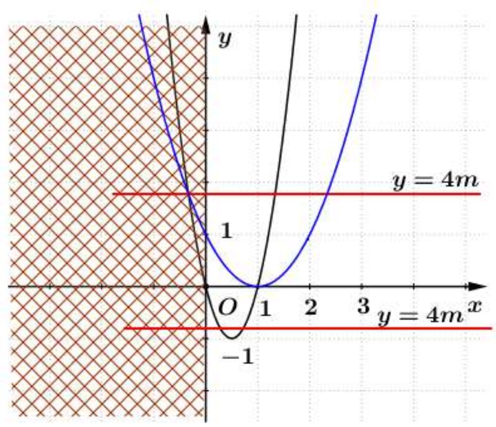
Đặt $3^x=t>0$, phương trình đã cho trở thành: $t^2+3t+2m=(3t+1)\sqrt{t+m}$

Đặt $\sqrt{t+m}=y$. Khi đó trở thành: $2y^2-(3t+1)y+\left(t^2+t\right)=0$.

Ta có $\Delta=(t-1)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{3t+1+t-1}{4}\\ y=\dfrac{3t+1-(t-1)}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{t+m}\\ t+1=2\sqrt{t+m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2=t+m\\ (t+1)^2=4(t+m)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}4m=4t^2-4t=f(t) & (t>0)\\ 4m=t^2-2t+1=g(t) & (t>0)\end{array}\right.$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ trên miền $x>0$ ta được đồ thị như hình bên dưới




Từ đây ta suy ra để có 2 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là $\left[\begin{array}{l}4m\ge 1\\ -1<4m<0\end{array}\right.\Rightarrow 1\le 4m\le 80$

**Câu 22: Chọn B**

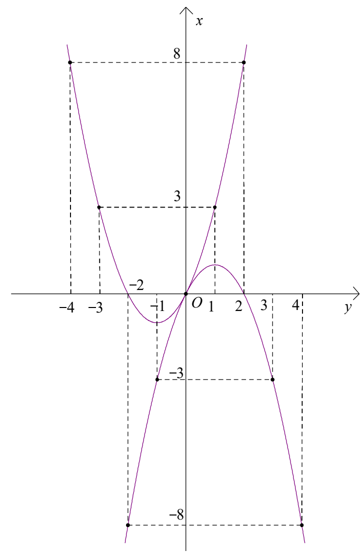
$3^{y^2-|x-2y|}\le\log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)\Leftrightarrow\dfrac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}}\le\dfrac{\ln\left(|x-2y|+3\right)}{\ln\left(y^2+3\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{y^2+3}.\ln\left(y^2+3\right)=3^{|x-2y|+3}.\ln\left(|x-2y|+3\right)$.

Với $t\ge 3$, dễ thấy $f(t)=3^t.\ln t$ là hàm số đồng biến.

Vậy $y^2+3\le |x-2y|+3 \Leftrightarrow y^2 \le |x-2y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x\ge y^2+2y & (1) \\ x\le -y^2+2y & (2)\end{array}\right.$

Đặt $g(y)=y^2+2y$ và $h(y)=-y^2+2y$. Ta có đồ thị




Nếu $x\ge 8$ thì có nhiều hơn 5 giá trị nguyên của $y$ thỏa.

Nếu $3\le x<8$ thì có đúng 5 giá trị nguyên của $y$ thỏa $(1)$ và không có giá trị nguyên của $y$ thỏa.

Nếu $0<x<3$ thì có đúng 3 giá trị nguyên của $y$ thỏa $(1)$ và có 1 giá trị nguyên của $y$ thỏa.

Nếu $x=0$ thì cả và đều có đúng 3 giá trị nguyên của $y$ thỏa trong đó $y=0$ thỏa cả và. Do đó có tất cả 5 giá trị nguyên của $y$ thỏa.

Nếu $-3<x<0$ thì có đúng 1 giá trị nguyên của $y$ thỏa $(1)$ và có 3 giá trị nguyên của $y$ thỏa.

Nếu $-8<x\le -3$ thì có đúng 5 giá trị nguyên của $y$ thỏa và không có giá trị nguyên của $y$ thỏa.

Nếu $x\le -8$ thì có nhiều hơn 5 giá trị nguyên của $y$ thỏa.

Vậy $\left[\begin{array}{l} 3\le x<8 \\ x=0 \\ -8<x\le -3\end{array}\right.$ thì sẽ có đúng 5 giá trị nguyên của $y$ ứng với mỗi giá trị của $x$.

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên của $x$.

**Câu 23: Chọn D**

Ta có: $\dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}\right)=1+2xy \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{10}+\log(x+y)-1=\log(2xy)+2xy$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{10}+\log\left(\frac{x+y}{10}\right)=\log(2xy)+2xy \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log t+t,(t>0)\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+1>0,\forall t>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ $(1) \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{10}\right) = f(2xy) \Leftrightarrow \frac{x+y}{10} = 2xy \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 20$

Ta có: $400 = \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{x}+1.\frac{1}{y}\right)^2 \le \left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \Rightarrow \frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2} \ge 320$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{4}{x} = \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{16} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P$ là $320$.

**Câu 24: Chọn D**

Ta có: $a^{2x} = b^{2y} = \sqrt{ab} = t \Rightarrow \begin{cases} a = t^{\frac{1}{2x}} \\ ab = t^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2x}+\frac{1}{2y} = 2$

Suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 4 \Rightarrow \frac{y}{4y-1} = x \left(y > \frac{1}{4}\right)$

$P = \frac{6y}{4y-1}+y^2 \Rightarrow P' = \frac{-6}{(4y-1)^2}+2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$ suy ra $\min P = P\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{45}{16}$

**Câu 25: Chọn A**

Ta có: $6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a c - \log_a b - 2\log_b c + 2 - 1 \quad (1)$

Đặt $\begin{cases} p = \log_a b \\ q = \log_b c \end{cases} \Rightarrow pq = \log_a c$. Do $c > b > a > 1$ nên $p > 1, q > 1$.

Khi đó trở thành $6p^2 - q^2 = p.q - p - 2q + 1$

$\Leftrightarrow 6p^2 - p.(q-1) - q^2 + 2q - 1 = 0$

Do $\Delta = (q-1)^2 + 4.6.(q-1)^2 = 25(q-1)^2 \ge 0$ nên ta có $\left[\begin{array}{l} p = \frac{q-1+5(q-1)}{12} = \frac{q-1}{2} \\ p = \frac{q-1-5(q-1)}{12} = \frac{1-q}{3} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $p > 1, q > 1 \Rightarrow p = \frac{q-1}{2}$ hay $q - 2p = 1$.

**Câu 26: Chọn B**

Từ giả thiết suy ra $a > 1$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$4b = 2.2.b \le \left(\frac{b+2+2}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{a^3}{4b} \ge \left(\frac{3a}{b+4}\right)^3 \Rightarrow \log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right) \ge \log_a\left(\frac{3a}{b+4}\right)^3 = 3\log_a\left(\frac{3a}{b+4}\right)$$

Suy ra $P = \log_a\left(\frac{a^3}{4b}\right) + \frac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a\right)^2 \ge 3\log_a\left(\frac{3a}{b+4}\right) + \frac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a\right)^2$.

Từ giả thiết suy ra $a > 1, \frac{3a}{4+b} > 1, \log_a \frac{3a}{4+b} > 0, \log_{\frac{3a}{4+b}} a > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P \geq 3\log_a\left(\frac{3a}{b+4}\right)+\frac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a\right)^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}.\frac{3}{2}\left[\log_a\left(\frac{3a}{b+4}\right)\right]^2\frac{3}{16}\left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a\right)^2}=\frac{9}{4}.$$

Vậy $\min P=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=4 \end{cases}$.

**Câu 27: Chọn D**

Điều kiện $\begin{cases} 3x+2y>0 \\ 3x-2y>0 \end{cases}$

Ta có: $9x^2-4y^2=5 \Leftrightarrow (3x-2y)(3x+2y)=5 \Leftrightarrow 3x-2y=\frac{5}{3x+2y}$

Xét phương trình: $\log_m(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1 \Leftrightarrow \log_m(3x+2y)=\log_3\left(\frac{5}{3x+2y}\right)+1$

$\Leftrightarrow \log_m(3x+2y)=\log_3\left(\frac{15}{3x+2y}\right) \Leftrightarrow \log_m 3.\log_3(3x+2y)=\log_3\left(\frac{15}{3x+2y}\right)$

$\Leftrightarrow \log_m 3=\frac{\log_3\left(\frac{15}{3x+2y}\right)}{\log_3(3x+2y)} \Leftrightarrow \log_m 3=\log_{(3x+2y)}\left(\frac{15}{3x+2y}\right)$

$\Leftrightarrow \log_m 3=\log_{(3x+2y)}15-1$ với $3x+2y>0,\ 3x+2y\neq 1$

Theo giả thiết ta có: $3x+2y\leq 5$ và $3x+2y>0,\ 3x+2y\neq 1$

**TH1**: Nếu $0<3x+2y<1 \Rightarrow \log_m 3=\log_{(3x+2y)}15-1<0$.

**TH2**: Nếu $1<3x+2y\leq 5 \Rightarrow \log_m 3=\log_{(3x+2y)}15-1\geq \log_5 15-1=\log_5 3$.

$\Rightarrow \log_m 3\geq \log_5 3 \Leftrightarrow 1<m\leq 5$. Vậy giá trị lớn nhất của $m$ là $5$.

**Câu 28: Chọn D**

Ta có $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\leq(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$

$\Leftrightarrow (x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\leq(y-2)(3-x)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$.

Với $\begin{cases} 2\leq x\leq 2021 \\ 2\leq y\leq 2021 \end{cases}$, ta có: $2y\geq y+2 \Rightarrow \log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\geq 0 \Rightarrow VT(*)\geq 0$

Ta có: $2x+1>x-3 \Rightarrow \log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)>0;\ 3-x<0 \Rightarrow VP(*)\leq 0$

Mà theo giả thiết ta có: $VT(*)\leq VP(*)$. Do đó ta suy ra $VT(*)=VP(*)$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y=2 \\ x>3 \end{cases}$. Do đó có $2018$ cặp $(x,y)$ thỏa mãn.

**Câu 29: Chọn B**

Xét $8m=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}+2021=f(x)$

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{(x-1)^2}$; $f'(x)=\frac{4x^2+8x}{(x+1)^2(x-1)^2}$

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $y$ | $2021$ | $\nearrow$ | $2021+\ln 3$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $2025$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $2021$ |

Vậy để có 1 nghiệm duy nhất thì $\left[\begin{array}{l} m=2025 \\ m=2021+\ln 3 \\ m=2021 \end{array}\right.$

**Câu 30: Chọn B**

Ta có: $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Vì $y\ge 0$ nên $y=\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $P=2^x+2^y=2^x+2^{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow P'=2^x\ln 2-\dfrac{x.2^{\sqrt{1-x^2}}\ln 2}{\sqrt{1-x^2}}$. Cho $P'=0 \Leftrightarrow 2^x=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.2^{\sqrt{1-x^2}}$

**Trường hợp 1:** Nếu $x=0$ thì $\begin{cases} VT=1 \\ VP=0 \end{cases}$ nên phương trình vô nghiệm.

**Trường hợp 2:** Nếu $x\ne 0: \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{x}=\dfrac{2^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$

Xét $g(t)=\dfrac{2^t}{t} \Rightarrow g'(t)=\dfrac{t.2^t\ln 2-2^t}{t^2}=\dfrac{2^t(t.\ln 2-1)}{t^2}<0$

$(2) \Leftrightarrow g(x)=g\left(\sqrt{1-x^2}\right) \Leftrightarrow x=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $P(1)=3$, $P(-1)=\dfrac{3}{2}$, $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Khi đó $M=2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ và $m=\dfrac{3}{2}$. Suy ra $m+M=\dfrac{3}{2}+2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Vậy $a=2, b=3 \Rightarrow a+2b=8$.

**Câu 31: Chọn B**

Đặt $a=2^x, b=3^y$, khi đó $a,b>0$ thỏa mãn $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)(a+b)=4$. Và $P=\dfrac{a}{1+b}+\dfrac{b}{1+a}+\dfrac{1}{1+ab}$

Từ điều kiện ta có $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{4}{a+b}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \Rightarrow (a+b)ab\ge a^2+b^2\ge 2ab \Rightarrow a+b\ge 2$.

Ta có $P=\left(\dfrac{a}{1+b}+1\right)+\left(\dfrac{b}{1+a}+1\right)-2+\dfrac{1}{1+ab}=(a+b+1)\left(\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+a}\right)-2+\dfrac{1}{1+ab}$.

$$\ge (a+b+1)\left(\frac{4}{2+a+b}\right)-2+\frac{1}{1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\frac{2(a+b)}{2+a+b}+\frac{4}{4+(a+b)^2}.$$

Đặt $t=a+b$, ta có $t\ge 2$ và $P\ge \frac{2t}{t+2}+\frac{4}{t^2+4}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{2t}{t+2}+\frac{4}{t^2+4}$

Ta có $f'(t)=\frac{4}{(t+2)^2}-\frac{8t}{(t^2+4)^2}=\frac{4(t-2)^2(t^2+2t+4)}{(t+2)^2(t^2+4)^2}\ge 0, \forall t\ge 2$

Hơn nữa hàm số $f(t)$ liên tục trên $[2;+\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$

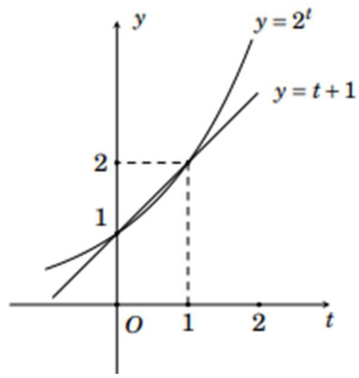
$\Rightarrow \min\limits_{[2;+\infty)} f(t)=f(2)=\frac{3}{2}$. Do đó $P\ge \frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$ hay $x=y=0$.

Vậy $\min P=\frac{3}{2}\in(0;\sqrt{3})$.

**Câu 32: Chọn A**

Ta có $2^{x^2+y^2+1}\le (x^2+y^2-2x+2)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x}\le x^2+y^2-2x+2.$ $(1)$

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$. Khi đó $(1)$ trở thành $2^t\le t+1$.




Từ đồ thị ta thấy $2^t\le t+1\Rightarrow 0\le t\le 1\Leftrightarrow 0\le x^2+y^2-2x+1\le 1\Leftrightarrow 0\le (x-1)^2+y^2\le 1$.

Gọi $(C)$ là hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

$P=\frac{4y}{2x+y+1}\Rightarrow \Delta: 2Px+(P-4)y+P=0.$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow \Delta$ và $(C)$ có điểm chung, tức là $d(I,\Delta)\le R$

$$\Rightarrow \frac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}}\le 1\Rightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le \sqrt{5}-1\Rightarrow P_{\max}=\sqrt{5}-1\approx 1{,}23.$$

**Câu 33: Chọn C**

Ta có: $2(x+\ln(x+1))+x^2+1=y+e^y\Leftrightarrow 2\ln(x+1)+e^{2\ln(x+1)}=y+e^y$ $(1)$.

Xét hàm số: $f(t)=t+e^t$, ta có: $f'(t)=1+e^t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(2\ln(x+1))=f(y)\Leftrightarrow y=2\ln(x+1)$.

Do $0\le x\le 2020$ nên $1\le x+1\le 2021\Leftrightarrow 0\le y\le 2\ln 2021\approx 15{,}22$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1;2;...;14;15\}$.

Có $y=2\ln(x+1)\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{y}{2}}-1$.

Với $y\in\{0;1;2;...;14;15\}$ thì chỉ có $y=0$ để $x\in\mathbb{Z}$.

Vậy có duy nhất $1$ cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đề bài.

**Câu 34: Chọn B**

Nhận xét:

Từ giả thiết $f(0)\neq 0$ ta suy ra $x=0$ không phải là nghiệm của hai phương trình

$4^x-4^{-x}=f(x)$ và $4^x+4^{-x}=f^2\left(\frac{x}{2}\right)+2$. Ta có $4^x+4^{-x}=f^2\left(\frac{x}{2}\right)+2$

$$\Leftrightarrow\left(2^x-2^{-x}\right)^2=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x-2^{-x}=f\left(\frac{x}{2}\right)\quad(1)\\2^x-2^{-x}=-f\left(\frac{x}{2}\right)\quad(2)\end{array}\right.$$

$(2)\Leftrightarrow 2^{-x}-2^x=f\left(-\frac{x}{2}\right)\quad(3)$

Xét phương trình đặt $t=\frac{x}{2}$. Khi đó ta có: $4^t-4^{-t}=f(t)\quad(4)$

Theo giả thiết phương trình $4^x-4^{-x}=f(x)$ có 10 nghiệm phân biệt nên phương trình có 10 nghiệm $t$. Suy ra phương trình có 10 nghiệm $x$ phân biệt. Giả sử 10 nghiệm đó là $x_1;x_2;...;x_{10}$.

Chứng minh tương tự ta có phương trình có 10 nghiệm phân biệt là $-x_1;-x_2;...;-x_{10}$

Dễ thấy số nghiệm của phương trình bằng tổng số nghiệm phương trình $(1)$ và $(3)$

Suy ra phương trình có 20 nghiệm.

**Câu 35: Chọn D**

Tập xác định: $D=(-5;+\infty)\setminus\{-4;1;2\}$.

Ta có $\frac{1}{\ln(x+5)}+\frac{1}{3^x-3}=\frac{x^2-(m+2)x+2m-1}{x-2}\Leftrightarrow m=x-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\ln(x+5)}-\frac{1}{3^x-3}$.

Đặt $g(x)=x-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{\ln(x+5)}-\frac{1}{3^x-3}$.

$$g'(x)=1+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+5)\ln^2(x+5)}+\frac{3^x\ln 3}{\left(3^x-3\right)^2}>0,\ \forall x\in D.$$

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$.

| $x$ | $-5$ | | $-4$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | \|\| | $+$ | \|\| | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $y$ | $A$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

$$A=\lim_{x\to-5^+}g(x)=-5+\frac{1}{7}-\frac{1}{3^{-5}-3}=-\frac{3293}{728}.$$

Phương trình $(1)$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \le -\dfrac{3293}{728} = -4,523(351648)$.

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2020;2021] \end{cases}$ nên $m \in \{-2020;-2019;...;-5\}$.

Vậy có 2016 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 36: Chọn A**

Ta có $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{2}{n}a^m - \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) = 0 \qquad (1)$.

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{2}{n}a^m - \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$ với $a \in (-1;1)$.

Có $f'(a) = \dfrac{2m}{n}a^{m-1} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ suy ra $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2m}{n}a^{m-1} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} \qquad (2)$

Theo đề bài $(1)$ có ba nghiệm phân biệt nên $(2)$ có ít nhất hai nghiệm.

Xét hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \forall a \in (-1;1)$.

Ta có $y' = -\dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{a^2+1} = -\dfrac{a}{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow a = 0\ (tm)$.

Ta có BBT sau

| $a$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ |

Xét hàm số $y = \dfrac{2m}{n}a^{m-1}, \forall a \in (-1;1)$.

Nếu $m$ chẵn thì $m-1 \ge 1$ và $m-1$ lẻ do đó hàm số $y = \dfrac{2m}{n}a^{m-1}, \forall a \in (-1;1)$ là hàm số đồng biến nên hàm số có BBT như sau

| $a$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\dfrac{2m}{n}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{2m}{n}$ |

Từ hai BBT trên ta có $(2)$ có nhiều nhất 1 nghiệm nên $m$ chẵn không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $m$ là số nguyên dương lẻ.

Nếu $m=1$ khi đó $f'(a)=\frac{2}{n}-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ suy ra $f'(a)=0\Leftrightarrow \frac{2}{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ $\quad(3)$.

Theo đề bài $(1)$ có ba nghiệm phân biệt nên $(3)$ có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2}{n}<1\Leftrightarrow 2<n<2\sqrt{2}\Rightarrow n\in\phi$. Vậy $m$ là số nguyên dương lẻ và lớn hơn $1$.

Khi $m$ là số nguyên dương lẻ và lớn hơn $1$ ta có

$y=\frac{2m}{n}a^{m-1},\forall a\in(-1;1)\Rightarrow y'=\frac{2m(m-1)}{n}a^{m-2},\forall a\in(-1;1)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow a=0\ (tm)$.

Ta có BBT sau

| $a$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $\frac{2m}{n}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2m}{n}$ |

Vậy $(2)$ có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow$ đồ thị hai hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\forall a\in(-1;1)$ và $y=\frac{2m}{n}a^{m-1},\forall a\in(-1;1)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{2m}{n}>\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m>\frac{\sqrt{2}}{4}n$ $\quad(*)$

Với điều kiện $(*)$ thì $(2)$ có hai nghiệm $a_1<0, a_2>0$.

Mặt khác ta thấy $0$ là một nghiệm của phương trình $f(a)=0$.

Khi đó ta có BBT của hàm số $f(a)$ như sau

| $a$ | $-1$ | | $a_1$ | | $0$ | | $a_2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $f(-1)$ | $\nearrow$ | $f(a_1)$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f(a_2)$ | $\nearrow$ | $f(1)$ |

Để $(1)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \\ \frac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow n\le 2\Rightarrow n\in\{1;2\}$.

Với $n=1\Rightarrow \begin{cases} m\le 15 \\ m>1 \end{cases}$ và $m$ lẻ, nên có $7$ cặp

Với $n=2 \Rightarrow \begin{cases} m \le 14 \\ m > 1 \end{cases}$ và $m$ lẻ, nên có $6$ cặp

Vậy có tổng cộng $13$ cặp $(m,n)$ thỏa yêu cầu đề bài.

**Câu 37: Chọn C**

$2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2+y^2-2x+2 \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2} - \left[(x-1)^2+y^2\right] - 1 \le 0$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2 \Rightarrow 2^t - t - 1 \le 0 \Leftrightarrow 2^t \le t+1 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1.$

Do đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn $(C)$ tâm $I(1;0), R=1$.

$P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Rightarrow (2P-8).x - P.y + (P-4) = 0 \ (d)$

Do $d$ và $(C)$ có điểm chung $\Leftrightarrow d\left(I,(d)\right) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|3P-12|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}} \le 1$

$\Leftrightarrow |3P-12| \le \sqrt{(2P-8)^2+P^2} \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}.$

**Câu 38: Chọn B**

$P=\log_{4x}(8x) - \log_{2y^2}\left(\dfrac{y^2}{2}\right) = \dfrac{\log_2(8x)}{\log_2(4x)} - \dfrac{\log_2 \dfrac{y^2}{2}}{\log_2\left(2y^2\right)} = \dfrac{3+\log_2 x}{2+\log_2 x} - \dfrac{2\log_2 y - 1}{2\log_2 y + 1}.$

Ta có $xy \le 8 \Rightarrow \log_2(xy) \le 3 \Leftrightarrow u+v \le 3$, với $u=\log_2 x; v=\log_2 y$.

Hơn nữa $x,y \ge 1$ nên $u,v \ge 0$. Hay $0 \le u \le 3$.

Khi đó $P=\dfrac{3+u}{2+u} - \dfrac{2v-1}{2v+1} = \dfrac{3+u}{2+u} - 1 + \dfrac{2}{2v+1}$.

Ta có $\begin{cases} u+v \le 3 \\ v,u \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le v \le 3-u \Rightarrow \dfrac{2}{2v+1} \ge \dfrac{2}{7-2u} \Rightarrow P \ge \dfrac{2}{7-2u} - 1 + \dfrac{3+u}{2+u}$.

Đặt $f(u)=\dfrac{2}{7-2u} - 1 + \dfrac{3+u}{2+u}$, ta tìm min, max của $f(u)$ với $0 \le u \le 3$.

$f'(u)=\dfrac{4}{(7-2u)^2} - \dfrac{1}{(2+u)^2}$; $f'(u)=0 \Leftrightarrow u=\dfrac{3}{4} \in [0;3]$.

Ta có $f(0)=\dfrac{11}{14}; f(3)=\dfrac{11}{5}; f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{8}{11} \Rightarrow f\left(\dfrac{3}{4}\right) \le f(u) \le f(3)$.

Suy ra $P \ge f(u) \ge f\left(\dfrac{3}{4}\right)$. Nên $P$ min khi $u=\dfrac{3}{4} \Rightarrow v=3-\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$.

$\begin{cases} u=\dfrac{3}{4} \\ v=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \dfrac{3}{4} \\ \log_2 y = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2^{\frac{3}{4}} \\ y=2^{\frac{9}{4}} \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} x_0=2^{\frac{3}{4}} \\ y_0=2^{\frac{9}{4}} \end{cases} \Rightarrow T=2^3+2^9=520.$

**Câu 39: Chọn B**

Ta có $e^{3x+y} - e^{2x-2y+1} = 1-x-3y \Leftrightarrow e^{3x+y} + 3x + y = e^{2x-2y+1} + 2x - 2y + 1$ (*)

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ có $f'(t)=e^t+1>0, \forall t$. Do đó:

(*) $\Leftrightarrow f(3x+y)=f(2x-2y+1) \Leftrightarrow 3x+y=2x-2y+1 \Leftrightarrow x+y=1-2y>1$.

Khi đó ta có

$\log_3^2(2x+4y-1)+2(m-1)\log_3(1-2y)+m^2-9>0$

$\Leftrightarrow \log_3^2(1-2y)+2(m-1)\log_3(1-2y)+m^2-9>0$.

Đặt $u=\log_3(1-2y), u>0$ , yêu cầu bài toán trở thành tìm $m$ để bất phương trình $u^2+2(m-1)u+m^2-9>0, \forall u>0$

Khi đó ta xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $\Delta'<0 \Leftrightarrow 10-2m<0 \Leftrightarrow m>5$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}\Delta'=0\\ -\dfrac{b}{2a}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10-2m=0\\ 1-m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=5\\ m\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow m=5$.

Trường hợp 3: $\begin{cases}\Delta'>0\\ P\ge 0\\ S<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m+10>0\\ m^2-9\ge 0\\ -2(m-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow 3\le m<5$.

Kết hợp các trường hợp ta được $m\ge 3$. Kết hợp điều kiện ta được $m\in\{3;\,4;...;\,19\}$.

Có $17$ giá trị $m$ thỏa mãn.

**Câu 40: Chọn A**

Ta có $\log_3\left(\dfrac{x+y}{4xy}\right)=4xy-3(x+y)-1 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{3(x+y)}{4xy}=4xy-3(x+y)$

$\Leftrightarrow 3(x+y)+\log_3 3(x+y)=4xy+\log_3(4xy)\ (1)$. Do $x\ge 1, y\ge 1$ nên $\begin{cases}3(x+y)\ge 6\\ 4xy\ge 4\end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 3}>0, \forall t>0$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Nên $(1)\Leftrightarrow f(3(x+y))=f(4xy)\Leftrightarrow 3(x+y)=4xy$

Ta lại có $P=x^2+y^2-3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=(x+y)^2-2xy-\dfrac{3(x+y)}{xy}$

$=\dfrac{16}{9}(xy)^2-2xy-4=\dfrac{16}{9}a^2-2a-4=g(a)$

Với $a=xy=\dfrac{3}{4}(x+y)\ge\dfrac{3}{4}2\sqrt{xy}=\dfrac{3}{2}\sqrt{a}\Leftrightarrow\sqrt{a}\ge\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a\ge\dfrac{9}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{3}{2}$

Mặt khác $x\ge 1, y\ge 1\Leftrightarrow (x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy-(x+y)+1\ge 0\Leftrightarrow xy-\dfrac{4}{3}xy+1\ge 0\Leftrightarrow xy\le 3$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$

Do đó $a\in\left[\dfrac{9}{4};3\right]$

Khi đó ta có $g'(a)=\frac{32}{9}a-2=0 \Leftrightarrow a=\frac{9}{16}\notin\left[\frac{9}{4};3\right]$

Và $g\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{2}, g(3)=6$. Vậy $P_{max}=6$ khi $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

**Câu 41: Chọn C**

Ta có $\begin{cases}2^{2xy+x+y}>0\\x+y>0\end{cases}\Rightarrow 8-8xy>0\Leftrightarrow xy<1$.

Ta có $2^{2xy+x+y}=\frac{8-8xy}{x+y}\Leftrightarrow \log_2\left(2^{2xy+x+y}\right)=\log_2\left(\frac{8-8xy}{x+y}\right)$

$\Leftrightarrow 2xy+x+y=\log_2\left[4(2-2xy)\right]-\log_2(x+y)$

$\Leftrightarrow \log_2(x+y)+(x+y)=(2-2xy)+\log_2(2-2xy) \quad (*)$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log_2 t+t$, $\forall t>0$ có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0$, $\forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0,+\infty)$ nên ta có

$(*)\Leftrightarrow f(x+y)=f(2-2xy)\Leftrightarrow x+y=2-2xy\Rightarrow x=\frac{2-y}{1+2y}$.

Thay vào $P$ ta được $P=\frac{2-y}{1+2y}(1+2y)y=-y^2+2y\Rightarrow \max P=1$ khi $y=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$.

Vậy $3x+2y=3$.

**Câu 42: Chọn D**

Điều kiện $x\in(-2;2)$, $y>0$. Ta có $\log_2\left(\frac{2-x}{2+x}\right)-\log_2 y=2x+2y+xy-5$

$\Leftrightarrow \log_2(4-2x)+(4-2x)=\log_2(2y+xy)+(2y+xy)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0,\ \forall t>0$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow f(4-2x)=f(2y+xy)\Leftrightarrow 4-2x=2y+xy\Leftrightarrow 4=2x+2y+xy$.

Ta có $(x+y)^2\geq 4xy=16-8(x+y)$ suy ra điều kiện tồn tại $x,y$ là $\left[\begin{array}{l}x+y\geq -4+4\sqrt{2}\\x+y\leq -4-4\sqrt{2}\ (L)\end{array}\right.$.

$P=(x+y)^2-xy=(x+y)^2+2(x+y)-4\overset{t=x+y}{=}t^2+2t-4=h(t)$.

| $t$ | $-\infty$ | $-4+4\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $h(t)$ | | $36-24\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | |

Vậy $P\min=36-24\sqrt{2}\Leftrightarrow x=y=-2+2\sqrt{2}$.

**Cách 2.**

$(*)\Leftrightarrow xy+2x+2y=4\Leftrightarrow (x+2)(y+2)=8$.

Ta có $x+2>0, y+2>0$; $x+2+y+2\geq 2\sqrt{(x+2)(y+2)}=4\sqrt{2}\Rightarrow x+y\geq 4\sqrt{2}-4$.

Xét $P = x^2 + y^2 + xy$; $P + xy + 2x + 2y + 1 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y = (x + y + 1)^2$.

$\Rightarrow P \ge \left(4\sqrt{2} - 3\right)^2 - 5 = 36 - 24\sqrt{2}$

Vậy $\text{Min } P = 36 - 24\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x + y = 4\sqrt{2} - 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2\sqrt{2} - 2$

**Câu 43: Chọn D**

Ta có: $3^{9y^2} - \dfrac{3^{36}}{3^{x^2}} + 2 = \log_3\left(\dfrac{36 - x^2}{y^2}\right)$

$\Leftrightarrow 3^{9y^2} - 3^{36-x^2} + \log_3 9 = \log_3\left(36 - x^2\right) - \log_3\left(y^2\right) \Leftrightarrow 3^{9y^2} - 3^{36-x^2} = \log_3\left(36 - x^2\right) - \log_3\left(9y^2\right)$

$\Leftrightarrow 3^{9y^2} + \log_3\left(9y^2\right) = 3^{36-x^2} + \log_3\left(36 - x^2\right)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t + \log_3 t$ với $t > 0$. Đạo hàm $f'(t) = 3^t \ln 3 + \dfrac{1}{t.\ln 3} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó, từ $(*)$ ta có $f\left(9y^2\right) = f\left(36 - x^2\right) \Leftrightarrow 9y^2 = 36 - x^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $y \ne 0$ nên $y \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

Với $\left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$: thỏa mãn.

Với $\left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3\sqrt{3} \\ x = 3\sqrt{3} \end{array}\right.$: loại.

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $(0; -2)$ và $(0; 2)$.

**Câu 44: Chọn B**

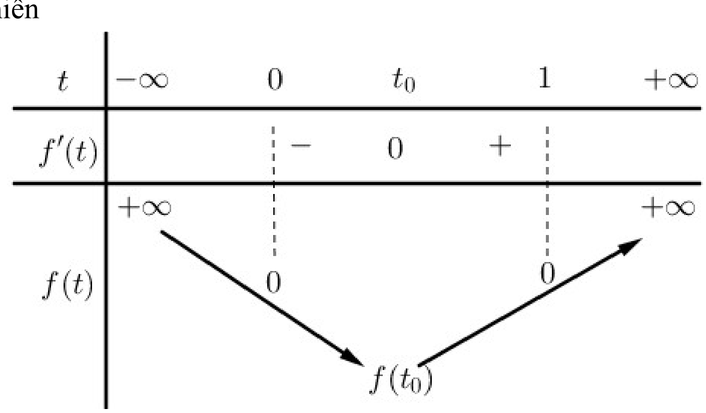
Ta có $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right)4^x \leftrightarrow 2^{(x-1)^2 + y^2} \le (x - 1)^2 + y^2 + 1$

Đặt $t = (x - 1)^2 + y^2 \ge 0$. Khi đó $2^t \le t + 1, t \ge 0$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t - t - 1,\ t \ge 0$. Có $f'(t) = 2^t \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \log_2 \dfrac{1}{\ln 2} = t_0 \approx 0,5287$.

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > t_0$ và $f(0) = f(1) = 0$.

Ta có bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \le 0 \Leftrightarrow t \in [0; 1]$.

Ta có $t\in[0;1]\Rightarrow 0\le (x-1)^2+y^2\le 1$

$$P=\frac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+Py+P=4y\Leftrightarrow 2P(x-1)+(P-4)y=-3P$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$9P^2=\left[2P(x-1)+(P-4)y\right]^2\le\left[4P^2+(P-4)^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]\le 5P^2-8P+16$$

Do đó $4P^2+8P-16\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$

Vậy $P_{\min}=-1-\sqrt{5}\approx -3,2$.

**Câu 45: Chọn C**

$$\log_2\frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=(x+y-1)(2x+2y-1)-4(xy+1).$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x+3y+4)-\log_2\left(x^2+y^2\right)=2\left(x^2+y^2\right)-(3x+3y+4)+1.$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x+3y+4)-\left[\log_2\left(x^2+y^2\right)+1\right]=2\left(x^2+y^2\right)-(3x+3y+4).$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x+3y+4)-\log_2 2\left(x^2+y^2\right)=2\left(x^2+y^2\right)-(3x+3y+4).$$

$$\Leftrightarrow (3x+3y+4)+\log_2(3x+3y+4)=2\left(x^2+y^2\right)+\log_2 2\left(x^2+y^2\right)\ (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên

$$(*)\Leftrightarrow (3x+3y+4)=2\left(x^2+y^2\right)$$

Ta có $(x+y)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow (x+y)^2\le(3x+3y+4)\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4\le 0$

$\Leftrightarrow -1\le x+y\le 4$. Do $x,y$ là các số thực dương nên $0<x+y\le 4\Rightarrow x+y-4\le 0$.

Ta có $\begin{cases}x+y-4\le 0\\ 2x+y+1>0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{x+y-4}{2x+y+1}\le 0$

Suy ra $P=\dfrac{5x+3y-2}{2x+y+1}=\dfrac{2(2x+y+1)+(x+y-4)}{2x+y+1}=2+\dfrac{x+y-4}{2x+y+1}\le 2$.

Vậy $P_{\max}=2$ xảy ra khi $x=y=2$.

**Câu 46: Chọn A**

Điều kiện : $\begin{cases}x+y>0\\ x^2+y>0\end{cases}$.

Với mọi $x\in\mathbb{Z}$ ta có $x^2\ge x$. Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathrm{D}=(-x;+\infty)$. $f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\ge 0,\ \forall x\in D$

$\Rightarrow f$ tăng trên D.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\le 0$.

Có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $f(y)\le 0$

$$\Leftrightarrow f(-x+729)>0\Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0\Leftrightarrow x^2-x-3367<0\Leftrightarrow -57,5\le x\le 58,5$$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-57,-56,...,58\}$. Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên $x$ thỏa.

**Câu 47: Chọn C**

Xét hàm số $f(x)=2020^x-2020^{-x}$. Tập xác định $\mathbb{R}$.

Khi đó $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}-x\in\mathbb{R}\\ f(-x)=2020^{-x}-2020^x=-f(x)\end{cases}$

Vậy hàm số trên là hàm số lẻ.

Mặt khác $f'(x)=2020^x.\ln 2020+2020^{-x}.\ln 2020>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(a^2+b^2+ab+2\right)+f(-9a-9b)=0\Leftrightarrow f\left(a^2+b^2+ab+2\right)-f(9a+9b)=0$

$\Leftrightarrow f\left(a^2+b^2+ab+2\right)=f(9a+9b)\Leftrightarrow a^2+b^2+ab+2=9a+9b$.

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4ab+8-36a-36b=0\Leftrightarrow(2a+b)^2-18(2a+b)-19=-3(b-3)^2$

$\Rightarrow(2a+b)^2-18(2a+b)-19\le 0\Leftrightarrow -1\le 2a+b\le 19$.

Do đó $P=\dfrac{4a+3b+1}{a+b+10}=\dfrac{2(a+b+10)+2a+b-19}{a+b+10}=2+\dfrac{2a+b-19}{a+b+10}$.

Vì $\begin{cases}a+b>0\\2a+b\le 19\end{cases}\Rightarrow P\le 2$ và $P=2\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=19\\b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}$.

Vậy $\max P=2\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}\Rightarrow a^3+b^2=521$.

**Câu 48:** Ta có

$2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}-\left(x^2+y^2-2x+1\right)-1\le 0$. Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Xét hàm số $f(t)=2^t-t-1$

$f'(t)=2^t.\ln 2-1$ $f'(t)=0\Leftrightarrow 2^t.\ln 2-1=0\Leftrightarrow t=\log_2\dfrac{1}{\ln 2}\approx 0,53$

Bảng biến thiên

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | $0$ | | | | $0$ | $\nearrow$ | |

Dựa bảng biến thiên ta có $0\le t\le 1$, suy ra $0\le x^2+y^2-2x+1\le 1\Leftrightarrow 0\le(x-1)^2+y^2\le 1$.

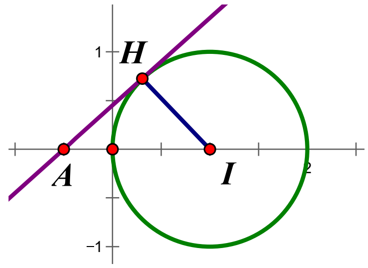
Ta có $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow(2P-8)x-Py+(P-4)=0\ (\Delta)$

Vì các số $x,y$ thỏa mãn nằm trong hình tròn tâm $I(1;0)$ bán kính bằng 1 nên ta suy ra

$d(I,\Delta)\le 1\Leftrightarrow\dfrac{|(2P-8)+(P-4)|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}}\le 1\Leftrightarrow|3P-12|\le\sqrt{(2P-8)^2+P^2}$

$\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}$.

Khi $P=5+\sqrt{5}$ thì đường thẳng $(\Delta)$ có hệ số góc dương và tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2+y^2=1$.




Vì $(\Delta)$ luôn đi qua $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$ nên với $H(x_H;y_H)$ là tiếp điểm ta có

$$\frac{1}{y_H^2}=\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{AI^2-IH^2}+\frac{1}{HI^2}=\frac{9}{5}\Rightarrow y_H=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Mặt khác $H$ thuộc $(\Delta)$ nên $x_H=\frac{Py_H-(P-4)}{2P-8}=\frac{(5+\sqrt{5})\frac{\sqrt{5}}{3}-\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\sqrt{5}+2}=\frac{1}{3}$

Vậy $\max P=5+\sqrt{5}$ đạt tại $x=\frac{1}{3}$ và $y=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

**Câu 49:**

Vì $(m,n)$ là các số nguyên dương nên phương trình

$2.a^m=n.\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Leftrightarrow\frac{2}{n}a^m=\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$

Xét hàm số $f(x)=\frac{2}{n}x^m-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên khoảng $(-1;1)$, ta có

$f'(x)=\frac{2m}{n}x^{m-1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2m}{n}x^{m-1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Xét hai hàm số $g(x)=\frac{2m}{n}x^{m-1},h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ta có BBT của hàm số $h(x)$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm điều kiện cần là phương trình $f'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm

$\Leftrightarrow\frac{2m}{n}x^{m-1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất 2 nghiệm

$\Leftrightarrow$ hai đồ thị hàm số $g(x)=\frac{2m}{n}x^{m-1},h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ cắt nhau tại ít nhất 2 điểm.

$\Leftrightarrow$ hai đồ thị hàm số $g(x)=x^{m-1},h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ cắt nhau tại ít nhất 2 điểm.

Từ BBT của $h(x)$ suy ra hai đồ thị hàm số $g(x), h(x)$ cắt nhau tại nhiều nhất hai điểm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1) \vdots 2 \\ \text{m}-1>0 \\ m,n \in \mathbb{N}^*; m+n \leq 14 \end{cases} \Rightarrow m \in \{3,5,7,9,11,13\}$$

Khi đó phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn $-1<x_1<0<x_2<1$.

Ta có BBT của hàm số $f(x)$

| $x$ | $-1$ | | $x_1$ | | $0$ | | $x_2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $f(-1)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $y=0$ | $\nearrow$ | $f(1)$ |

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm $\in(-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)>0 \\ f(-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \\ -\dfrac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow n \leq 2$

Vì $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in \{1,2\}$

Với $m \in \{3,5,7,9,11\}, n \in \{1,2\}, m+n \leq 14$ có 10 cặp $(m,n)$.

Với $m=13, n \in \{1,2\}, m+n \leq 14$ có 1 cặp $(m,n)$.

Vậy tìm được 11 cặp số $(m,n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 50: Chọn C**

Từ giả thiết $\Leftrightarrow 5+9.3^{x^2-2y}=\left(5+9^{x^2-2y}\right).\dfrac{49}{7^{x^2-2y}}$

Đặt $t=x^2-2y$. Từ đó suy ra $5+9.3^t=\left(5+9^t\right).\dfrac{49}{7^t} \Leftrightarrow 5.7^t+9.3^t.7^t=49.5+49.9^t$

Nhận thấy $t=2$ thỏa mãn.

Thật vậy với $t>2$ thì $5.7^t>5.7^2=5.49$ và $9.3^t.7^t>49.9^t$ vì $\left(\dfrac{7}{3}\right)^t>\left(\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{49}{9}$

Suy ra $VT>VP$. Chứng minh tương tự với $t<2$ thì $VT<VP$

Khi đó $x^2-2y=2 \Leftrightarrow 2y=x^2-2$. Vì $y>0 \Rightarrow x^2-2>0 \Rightarrow x>\sqrt{2}$

Suy ra $P=\dfrac{x+x^2-2+11}{x}=\dfrac{x^2+x+9}{x}=x+\dfrac{9}{x}+1$

Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{9}{x}+1$ trên khoảng $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

$f'(x)=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$. Ta có bảng biến thiên hàm $f(x)$

| $x$ | $\sqrt{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $7$ | $\nearrow$ | |

Dựa vào BBT ta có $\min P=7$ *khi* $x=3, y=\dfrac{7}{2}$

## II. ĐỀ VẬN DỤNG CAO MŨ VÀ LOGARIT SỐ 02

### ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho phương trình $\ln\left(x^2-11x-5m\right)=\ln\left(x-m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực?

**A.** Vô số. **B.** $26$. **C.** $25$. **D.** $24$.

**Câu 2:** Gọi $M$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $g\left(a;b\right)=a^2+b^2$ với $a;b$ thỏa mãn $\begin{cases} a-2b+8\ge 0 \\ a+b+2\ge 0 \\ 2a-b+4\le 0 \end{cases}$. Khi $m\in\left[0;M\right]$ thì tổng các nghiệm của phương trình $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2+\left|1-m\right|\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$ thuộc khoảng

**A.** $\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}};2\right)$. **B.** $\left(1;2+\sqrt{3}\right)$.

**C.** $\left(2+\sqrt{3};2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$. **D.** $\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}};+\infty\right)$.

**Câu 3:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để tồn tại hai số thực $x,y$ thỏa mãn $\log_x y=\log_y x$ và $\log_x\left[m\left(x+y\right)\right]=\log_y\left(x-y\right)+2$.

**A.** $\left(0;+\infty\right)$. **B.** $\left[1;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

**Câu 4:** Cho tham số thực $m$, biết rằng phương trình $4^x-\left(m+4\right)2^x+2=0$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$ thỏa mãn $\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)=4$. Giá trị của $m$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(3;5\right)$. **B.** $\left(5;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

**Câu 5:** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0\left(*\right)$ có hai nghiệm thực $x_1;x_2$ thỏa mãn $\left(x_1+3\right)\left(x_2+3\right)=72$.

**A.** $m=\dfrac{9}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m=\dfrac{61}{2}$.

**Câu 6:** Cho phương trình $9^x-2m.3^x+3m-2=0\left(*\right)$ ($m$ là tham số thực). Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của $m$ sao cho phương trình có hai nghiệm trái dấu là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $3a+4b$.

**A.** $6$. **B.** $8$. **C.** $11$. **D.** $5$.

**Câu 7:** Có bao nhiêu bộ số thực $\left(x;y\right)$ với $x+y$ là số nguyên dương thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2}\right)=\log_3\left(x+y\right)$

**A.** $8$. **B.** $12$. **C.** $6$. **D.** $10$.

**Câu 8:** Cho $x, y$ là hai số thực dương thỏa mãn $5x + y = 4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_3 \dfrac{x^2 + 2y + m}{x + y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$ có nghiệm là

**A.** 10. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 2.

**Câu 9:** Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm.

**A.** 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 21.

**Câu 10:** Cho hai số thực $x; y$ thỏa mãn:

$\log_{\sqrt{3}}(y^2 + 8y + 16) + \log_2[(5 - x)(1 + x)] = 2\log_3 \dfrac{5 + 4x - x^2}{3} + \log_2(2y + 8)^2$.

Gọi $S$ là tập các giá trị nguyên của tham số $m$ để giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|\sqrt{x^2 + y^2} - m\right|$ không vượt quá 10. Hỏi $S$ có bao nhiêu tập con khác rỗng.

**A.** 16385. **B.** 2047. **C.** 32. **D.** 16383.

**Câu 11:** Cho phương trình $m\ln^2(x + 1) - (x + 2 - m)\ln(x + 1) - x - 2 = 0$ $(1)$. Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó $a$ thuộc khoảng

**A.** $(3,7; 3,8)$. **B.** $(3,6; 3,7)$. **C.** $(3,8; 3,9)$. **D.** $(3,5; 3,6)$.

**Câu 12:** Có bao nhiêu bộ hai số nguyên $(x; y)$ thỏa $1 \le x^2 + x \le 2020$ và

$\log x + \log(x + 1) + x^2 + x = y + 10^y$

**A.** 8. **B.** 4. **C.** 2 **D.** 0.

**Câu 13:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $2[x + \ln(x + 1)] + x^2 + 1 = y + e^y$?

**A.** 0. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 8.

**Câu 14:** Tập tất cả giá trị của $m$ để phương trình $2^{(x-1)^2}.\log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|}.\log_2(2|x - m| + 2)$ có đúng một nghiệm là

**A.** $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **B.** $[1; +\infty)$.

**C.** $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\varnothing$.

**Câu 15:** Có bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $7^{|x^2 - 4x - 5| - \log_7 5} = 5^{-(y+2)}$ và $2|y - 2| - |y| + y^2 - y \le 7$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

**Câu 16:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ sao cho bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

$\log_3(x^2 + 2mx + 2m^2 - 1) \le 1 + \log_2(x^2 + 2x + 3).\log_3(x^2 + 3)$.

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

**Câu 17:** Biết rằng trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2\left(x+y-1\right)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x;y)$ thỏa mãn $3x+4y-m=0$. Khi đó hãy tính tổng tất cả các giá trị $m$ tìm được?

**A.** $20$. **B.** $14$. **C.** $46$. **D.** $28$.

**Câu 18:** Xét các số thực dương $x,y$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+3y$.

**A.** $P_{\min}=\dfrac{17}{2}$. **B.** $P_{\min}=8$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{25\sqrt{2}}{4}$.

**Câu 19:** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** $36$. **B.** $35$. **C.** $34$. **D.** vô số.

**Câu 20:** Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với $x,y$ nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $\left(xy+2x+4y+8\right)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)\le\left(2x+3y-xy-6\right)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

**A.** $2017$. **B.** $4034$. **C.** $2$. **D.** $2017.2020$.

**Câu 21:** Cho $a,b,c$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $a>1,b>0,c>0$ và bất phương trình $a^{x^2}.(b+4c)^{2x+3}\ge 1$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức $P=\dfrac{16a}{3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=m,b=n,c=p$. Khi đó, tổng $m+n+p$ bằng

**A.** $\dfrac{81}{16}$. **B.** $\dfrac{57}{20}$. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** $\dfrac{51}{16}$.

**Câu 22:** Cho bất phương trình

$\log_{3a}11+\left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\right).\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right)\ge 0$. Giá trị thực của tham số $a$ để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;0)$.

**Câu 23:** Trong tất cả các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}\left(2x+2y+5\right)\ge 1$, có bao nhiêu giá trị thực của $m$ để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0$?

**A.** 1. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** 0

**Câu 24:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases}2020^2\left(2020^{x^2+y^2}-2020^{2x-6y-6}\right)+\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2\le 4\\ e^{(x+1)^2+(y-3)^2}\le\left(x^2+y^2+2x-6y+11-m\right).e^m\end{cases}$$

Tổng của tất cả các phần tử thuộc tập hợp S là

**A.** $88$. **B.** $2\sqrt{10}-2$. **C.** $2\sqrt{10}+2$. **D.** $44$.

**Câu 25:** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

**A.** $55$. **B.** $28$. **C.** $29$. **D.** $56$.

**Câu 26:** Cho biểu thức $P=3^{y-2x+1}\left(1+4^{2x-y-1}\right)-2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q=\log_{y+3-2x}3y$. Giá trị nhỏ nhất của $y$ để tồn tại $x$ thỏa mãn đồng thời $P\ge1$ và $Q\ge1$ là số $y_0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $4y_0+1$ là số hữu tỷ. **B.** $y_0$ là số vô tỷ.

**C.** $y_0$ là số nguyên dương. **D.** $3y_0+1$ là số tự nhiên chẵn.

**Câu 27:** Cho bất phương trình $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le0$. Bất phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên $x\in\left[-2019;2019\right]$?

**A.** $1$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **D.** $2$.

**Câu 28:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2+4\right)-\log_2\left(x+2y\right)\le1$ và $2x-y\ge0$ ?

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{4}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $2.6^{f(x)}+\left(f^2(x)-1\right).9^{f(x)}-3.4^{f(x)}.m\ge\left(2m^2+2m\right).2^{2f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

**Câu 30:** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le2020 & (1)\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm

**A.** $m\ge-3$. **B.** $-2\le m\le1$. **C.** $-1\le m\le2$. **D.** $m\ge-2$.

**Câu 31:** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

**A.** $116$. **B.** $115$. **C.** $59$. **D.** $58$.

**Câu 32:** Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0\le x\le3456$ và $\log_5\left(5x+10\right)-y=\frac{5^y-x}{2}$ ?

**A.** 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 33:** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

**A.** 28. **B.** 29. **C.** 55. **D.** 56.

**Câu 34:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x,y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-4\right)\ge 1$ và $x^2+y^2+4x-2y-m=0$. Tính tổng tất cả các phần tử thuộc $S$

**A.** 28. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 27.

**Câu 35:** Xét các số thực $x$, $y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 36:** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

**A.** 58. **B.** 116. **C.** 115. **D.** 59.

**Câu 37:** Có bao nhiêu số nguyên $y$ sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=\left(1+xy\right)27^{12x}$?

**A.** 14. **B.** 27. **C.** 12. **D.** 15.

**Câu 38:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2\le x\le 2021$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$?

**A.** 2020. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 2019.

**Câu 39:** Có bao nhiêu số nguyên $y$ sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{2};5\right)$ thỏa mãn $8^{2x^2+xy}=\left(1+xy\right).8^{4x}$?

**A.** 7. **B.** **C.** 6. **D.** 5.

**Câu 40:** Có bao nhiêu số nguyên $y>5$ để tồn tại số thực $x$ thỏa mãn $\log_{15}\left(4x+3y+1\right)=\log_6\left(x^2-2x+y^2\right)$?

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 41:** Có bao nhiêu số nguyên $y$ để phương trình $2^{x^2+y^2+1}=\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$ có nghiệm thực $x$?

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

**Câu 42:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ với $|m|\le 10$ để phương trình $3^{\log_2\left(x^2\right)}-2\left(m+6\right)\cdot 3^{\log_2 x}+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1x_2>2$?

**A.** 16. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

**Câu 43:** Cho phương trình $3^{1+\frac{3}{x}}-3.3^{\frac{2}{x}-2\sqrt{x}+1}+\left(m+2\right).3^{1+\frac{1}{x}-4\sqrt{x}}-m.3^{1-6\sqrt{x}}=0$. Có nhiều giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $\left[-2020;2021\right]$ để phương trình có nghiệm?

**A.** 1345. **B.** 2126. **C.** 1420. **D.** 1944.

**Câu 44:** Cho phương trình $\left(x^2-2mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm thực x?

**A.** 4. **B.** $5$. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 45:** Xét các số nguyên dương $a,b$ sao cho phương trình $a.4^x-b.2^x+50=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ và phương trình $9^x-b.3^x+50a=0$ có hai nghiệm $x_3,x_4$ thỏa mãn điều kiện $x_3+x_4>x_1+x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=3a+4b$.

**A.** $109$. **B.** $51$. **C.** $49$. **D.** $87$.

**Câu 46:** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+5y$ là

**A.** $P_{\min}=125$. **B.** $P_{\min}=57$. **C.** $P_{\min}=43$. **D.** $P_{\min}=25$.

**Câu 47:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$(4xy+7y)(2x-1)\left(e^{2xy}=e^{4x+y+7}\right)=\left[2x(2-y)+y+y\right]e^y.$$

**A.** $6$. **B.** $5$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Câu 48:** Gọi $S$ là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình mũ: $4^{x^2-2x+2}-\left(\dfrac{m}{21}-3\right)2^{x^2-2x+3}+\dfrac{m}{21}+3=0$ có đúng $3$ nghiệm phân biệt thuộc $(0;3]$ Số phần tử của $S$ là

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** Vô số.

**Câu 49:** Có bao nhiêu cặp $(x;y)$ thỏa mãn $10^{\frac{10}{x+y}}=\left(x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)10^{\frac{1}{xy}}$ và $x\in\mathbb{N}^*$, $y>0$.

**A.** $14$. **B.** $7$. **C.** $21$. **D.** $10$.

**Câu 50:** Cho phương trình $3^{(x+1)^2}.\log_3\left(x^2+2x+3\right)-9^{|x-m|}.\log_3\left(2|x-m|+2\right)=0$. Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị $m$ để phương trình có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Khi đó tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-3$. **B.** $-2$. **C.** 0. **D.** 3.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn C**

Ta có $\ln\left(x^2-11x-5m\right)=\ln\left(x-m\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x-5m>0 \\ x-m>0 \\ x^2-11x-5m=x-m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-m>0 \\ x^2-12x=4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>m \\ x^2-12x=4m\ (*) \end{cases}$

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-12x$ trên khoảng $(m;+\infty)$, ta thấy

$f'\left(x\right)=2x-12$; $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=6$.

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=4m$.

**Trường hợp 1:** $m\le 6$:

| $x$ | $m$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $m^2-12m$ | $\searrow$ | $-36$ | $\nearrow$ | $+\infty$ <br> $y=4m$ |

Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực khi $4m\ge -36 \Leftrightarrow m\ge -9$.
Kết hợp điều kiện $m\le 6$, ta được $-9\le m\le 6$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-9;-8....5;6\right\}$ có 16 giá trị nguyên.

**Trường hợp 2:** $m>6$:

| $x$ | $6$ | | $m$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $0$ | | $m^2-12m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ <br> $y=4m$ |

Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực khi $4m>m^2-12m$

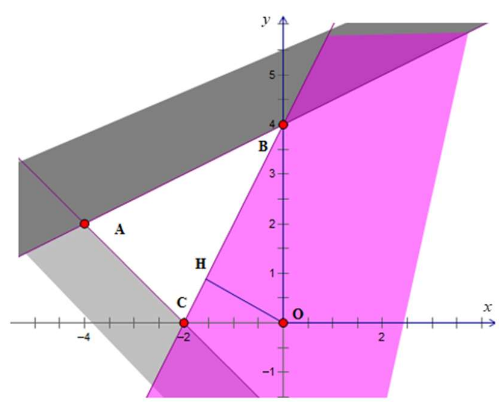
$\Leftrightarrow m^2-16m<0 \Leftrightarrow 0<m<16$. Kết hợp điều kiện $m>6$, ta được $6<m<16$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{7;8;\ ....;15\right\}$ có 9 giá trị nguyên.

Vậy có 25 giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 2: Chọn B**

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y+8\ge 0 \\ x+y+2\ge 0 \\ 2x-y+4\le 0 \end{cases}$



Với $\Delta_1: x-2y+8=0$; $\Delta_2: x+y+2=0$; $\Delta_3: 2x-y+4=0; A(-4;2); B(0;4); C(-2;0)$

Miền nghiệm của hệ phương trình là phần giới hạn bởi $\Delta ABC$

$\Rightarrow g(a;b)=a^2+b^2=OM^2, M(a;b)\in \Delta ABC$ ; $OM_{\min}=OH=d(O;BC)=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\Rightarrow m\in\left[0;\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right]$

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2+|1-m|\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-2+|1-m|=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t\\x^2-2x-3=\left(2+\sqrt{3}\right)^t\end{cases}$$

$$\Rightarrow |1-m|=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$$

Xét $f(t)=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$ có $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\left[\dfrac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\ln\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}\right]=t_0$

Bảng biến thiên

| $t$ | $-\infty$ | | $t_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | $\searrow$ | $f(t_0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\Rightarrow |1-m|=f(t)$ luôn có nghiệm duy nhất $t_1\Rightarrow x^2-2x-3-\left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1}=0; \Delta'=4+\left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1}>0$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm $x_1,x_2$ và $x_1+x_2=2\in\left(1;2+\sqrt{3}\right)$.

**Câu 3: Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases}0<x,y\neq 1\\x>y\\m>0\end{cases}$.

Ta có $\log_x y=\log_y x\Leftrightarrow \log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_x y=1\\\log_x y=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\ \text{(loai)}\\y=x^{-1}\ \text{(nhan)}\end{array}\right.$.

Với $y=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x>\dfrac{1}{x}\Rightarrow x>1$ (do $x>0$).

Khi đó $\log_x\left[m(x+y)\right]=\log_y(x-y)+2\Leftrightarrow \log_x\left[m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\log_{\frac{1}{x}}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2$

$$\Leftrightarrow \log_x\left[m\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]+\log_x\left(x-\frac{1}{x}\right)=2\Leftrightarrow \log_x\left[m\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\right]=2$$

$$\Leftrightarrow m\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=x^2\Leftrightarrow m=\frac{x^4}{x^4-1}\Leftrightarrow \frac{1}{m}=1-\frac{1}{x^4}\ (*).$$

Để tồn tại hai số $x,y$ thì phương trình (*) có nghiệm $x>1$.

Với mọi $x>1$ thì $0<1-\dfrac{1}{x^4}<1$, do đó để thỏa mãn bài ra thì $0<\dfrac{1}{m}<1\Leftrightarrow m>1$. Vậy $m>1$.

**Câu 4: Chọn D**

Xét phương trình: $4^x-(m+4)2^x+2=0 \qquad (1)$

Đặt $t=2^x\,(t>0)$. Khi đó $(1)$ trở thành: $t^2-(m+4)t+2=0 \qquad (2)$

Ta có: $(1)$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2 \Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương $t_1,t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m+4)^2-8\ge 0\\ m+4>0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge -4+2\sqrt{2} \qquad (*).$$

Theo Viet ta có $\begin{cases}t_1+t_2=m+4\\ t_1.t_2=2\end{cases}$.

Giả sử $\begin{cases}t_1=2^{x_1}\\ t_2=2^{x_2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\log_2 t_1\\ x_2=\log_2 t_2\end{cases}$. Khi đó từ $t_1.t_2=2 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2 \Leftrightarrow x_1+x_2=1$.

Do đó $(x_1+2)(x_2+2)=4 \Leftrightarrow x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=4 \Leftrightarrow x_1x_2=-2$

$$\Rightarrow \log_2 t_1.\log_2 t_2=-2 \Leftrightarrow \log_2 t_1.\log_2\frac{2}{t_1}=-2 \Leftrightarrow \log_2 t_1.(1-\log_2 t_1)=-2$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 t_1)^2-\log_2 t_1-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 t_1=-1\\ \log_2 t_1=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_1=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t_2=4\\ t_1=4\Rightarrow t_2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow t_1+t_2=\frac{9}{2}$$

$\Rightarrow m+4=\dfrac{9}{2}\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}\quad (\text{tm}(*))$. Vậy $m=\dfrac{1}{2}\in(-\infty;1)$

**Câu 5: Chọn A**

Đặt $\log_3 x=t$. Phương trình $(*)$ trở thành $t^2-3t+2m-7=0$.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta=3^2-4(2m-7)>0 \Leftrightarrow 37-8m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{37}{8}$

Theo vi-ét ta có $t_1+t_2=3 \Leftrightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=3 \Leftrightarrow x_1.x_2=27$.

$(x_1+3)(x_2+3)=72 \Rightarrow 3(x_1+x_2)+x_1.x_2+9=72$

$\Rightarrow x_1+x_2=12$. Kết hợp với $x_1x_2=27\Rightarrow \begin{cases}x_1=3\\ x_2=9\end{cases}$ (giả sử $x_1<x_2$)

Khi đó $t_1=1;t_2=2\Rightarrow t_1.t_2=2m-7=2\Rightarrow m=\dfrac{9}{2}$.

Thử lại, thấy $m=\dfrac{9}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 6: Chọn A**

Đặt $3^x=t\Rightarrow t>0$. Phương trình $(*)$ trở thành $t^2-2mt+3m-2=0$.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_1>0>x_2\,(x_1>x_2)$

$\Leftrightarrow 3^{x_1}>1>3^{x_2} \Leftrightarrow t_1>1>t_2>0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (3m-2) > 0 \\ t_1 + t_2 > 1 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 2m > 1 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \\ 3m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m > \dfrac{1}{2} \\ 3m - 2 - 2m + 1 < 0 \\ m > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m < 1 \\ m > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m < 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow 3a + 4b = 6.$$

**Câu 7: Chọn B**

Đặt $t = \log_2\left(\dfrac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2}\right) = \log_3(x+y)$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2} = 2^t \\ x+y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|x+y\right|\left|x^2-xy+y^2\right|}{x^2+y^2} = 2^t \\ x+y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2} = 2^t \\ x+y = 3^t \quad (1) \end{cases} \quad (I)$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow 1 - \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t \quad (2)$

Ta có: $x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} \Leftrightarrow \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} \leq \dfrac{xy}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Do đó $\dfrac{1}{2} \leq 1 - \dfrac{xy}{x^2+y^2} \leq \dfrac{3}{2}$. Từ (2) suy ra $\dfrac{1}{2} \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^t \leq \dfrac{3}{2}$ hay $-1 \leq t \leq \dfrac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$

Mặt khác $x+y = 3^t$ (là số nguyên dương nên $x+y \in \{1;2;3;4;5;6\}$

Từ (2) ta có $xy = \dfrac{\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\right)3^{2t}}{3-2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^t}$. Do $\left(3^t\right)^2 > \dfrac{4.\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\right)3^{2t}}{3-2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^t} \quad \forall t \quad -1 \leq t \leq \dfrac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$

Nên luôn tồn tại $x, y \ (x \neq y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán với $x+y \in \{1;2;3;4;5;6\}$ .Có 12 cặp.

**Câu 8: Chọn B**

$\log_3 \dfrac{x^2+2y+m}{x+y} + x^2 - 3x - y + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+2y+m\right) + x^2 + 2y + m = \log_3 3(x+y) + 3(x+y) \qquad (1)$

Vì $x, y > 0$ nên $x+y > 0$. Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2y + m = 3x + 3y \Leftrightarrow x^2 - 3x - y + m = 0 \qquad (*)$

Kết hợp với điều kiện $5x+y=4\Rightarrow y=4-5x$. Vì $x,y>0\Rightarrow 0<x<\dfrac{4}{5}$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow x^2+2x+m-4=0\Leftrightarrow m=-x^2-2x+4,\forall x\in\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$.

Hàm số $y=-x^2-2x+4$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$ (do $-1<0$) nên $\dfrac{44}{25}<-x^2-2x+4<4$.

Do vậy $m\in\{2;3\}$ là các giá trị cần tìm. Vậy tổng tất cả các giá trị $m$ thỏa ycbt là 5.

**Câu 9: Chọn B**

Đặt $\log_5(x-m)=y\Rightarrow x-m=5^y\Leftrightarrow 5^y+m=x$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $5^x+m=y$. Do đó, ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases}5^x+m=y\\5^y+m=x\end{cases}\Rightarrow 5^x-5^y=y-x\Leftrightarrow 5^x+x=5^y+y\ (*)$$

Xét hàm số $f(t)=5^t+t$ trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=5^t.\ln 5+1>0\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow x=\log_5(x-m)\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-5^x$ trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=1-5^x\ln 5$; $g'(x)=0\Leftrightarrow 5^x=\dfrac{1}{\ln 5}\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)=x_0$

$$\Rightarrow g\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right)=\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)-\frac{1}{\ln 5}\simeq -0,917=y_0$$

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $y_0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\le\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)-\dfrac{1}{\ln 5}\simeq -0,917$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\cap(-20;20)$ nên suy ra $m\in\{-1;-2;...;-19\}\Rightarrow$ có $-1-(-19)+1=19$ số nguyên.

**Câu 10: Chọn D**

Điều kiện xác định: $\begin{cases}-1<x<5\\y\ne -4\end{cases}$.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}\left(y^2+8y+16\right)+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\log_3\dfrac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2$

$\Leftrightarrow \log_{3^{\frac{1}{2}}}(y+4)^2+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\left\{\log_3\left[(5-x)(1+x)\right]-\log_3 3\right\}+\left[\log_2 4+\log_2(y+4)^2\right]$

$\Leftrightarrow 2\log_3(y+4)^2+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\log_3\left[(5-x)(1+x)\right]+\log_2(y+4)^2$

$\Leftrightarrow 2\log_3(y+4)^2-\log_2(y+4)^2=2\log_3\left[(5-x)(1+x)\right]-\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]\ (*)$

Xét hàm số: $f(t)=2\log_3 t-\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{2}{t.\ln 3}-\dfrac{1}{t.\ln 2}=\dfrac{2\ln 2-\ln 3}{t.\ln 2.\ln 3}>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow f\left((y+4)^2\right)=f\left((5-x)(1+x)\right)\Leftrightarrow (y+4)^2=(5-x)(1+x)\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=9$

Đặt: $\begin{cases} x=2+3\cos t \\ y=-4+3\sin t\end{cases}$

$P=\left|\sqrt{x^2+y^2}-m\right|=\left|\sqrt{(2+3\cos t)^2+(-4+3\sin t)^2}-m\right|=\left|\sqrt{29+12\cos t-24\sin t}-m\right|$

Ta có: $29-12\sqrt{5}\le 29+12\cos t-24\sin t\le 29+12\sqrt{5}$

$\Rightarrow -3+2\sqrt{5}\le\sqrt{29+12\cos t-24\sin t}\le 3+2\sqrt{5}$

$\Rightarrow -3+2\sqrt{5}-m\le\sqrt{29+12\cos t-24\sin t}-m\le 3+2\sqrt{5}-m\Rightarrow\left[\begin{array}{l} P_{\max}=\left|-3+2\sqrt{5}-m\right| \\ P_{\max}=\left|3+2\sqrt{5}-m\right|\end{array}\right.$

$P_{\max}\le 10\Rightarrow\begin{cases}\left|-3+2\sqrt{5}-m\right|\le 10 \\ \left|3+2\sqrt{5}-m\right|\le 10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-10\le -3+2\sqrt{5}-m\le 10 \\ -10\le 3+2\sqrt{5}-m\le 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-13+2\sqrt{5}\le m\le 7+2\sqrt{5} \\ -7+2\sqrt{5}\le m\le 13+2\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow -7+2\sqrt{5}\le m\le 7+2\sqrt{5}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;...10;11\}$. Do đó số phần tử của $S$ là: 14

$\Rightarrow$ Số tập con khác rỗng của $S$ là $2^{14}-1=16383$.

**Câu 11: Chọn A**

Theo đề ra ta chọn điều kiện của $x$ là $x>0\Rightarrow\ln(x+1)>0$.

**Trường hợp 1:** $m=0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\ln(x+1)=-1\ (L)$

**Trường hợp 2:** $m\ne 0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln(x+1)=-1\ (L) \\ \ln(x+1)=\dfrac{x+2}{m}\end{array}\right.\Leftrightarrow\dfrac{\ln(x+1)}{x+2}=\dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ với $x>0$. Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x+2}{x+1}-\ln(x+1)=0$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x+2}{x+1}-\ln(x+1)$ có $g'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}<0\ \ \forall x>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow g(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;+\infty)$ $\quad(2)$

Mặt khác: $g(2)g(3)=\left(\dfrac{4}{3}-\ln 3\right)\left(\dfrac{5}{4}-\ln 4\right)<0$ và hàm số $y=g(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$

Suy ra $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in(2;3)\quad(3)$.

Từ $(2);(3)$ suy ra $g(x)=0$ có một nghiệm duy nhất $x_0\in(2;3)$

$\Rightarrow f'(x)=0$ có một nghiệm duy nhất $x_0\in(2;3)$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $x_0$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\ln 3}{4}$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $\frac{\ln 5}{6}$ | $\searrow$ | $0$ |

Để $(1)$ có 2 nghiệm thỏa mãn $0<x_1<2<4<x_2$ thì $0<\dfrac{1}{m}<\dfrac{\ln 5}{6} \Leftrightarrow m>\dfrac{6}{\ln 5}$

$\Rightarrow a=\dfrac{6}{\ln 5}\approx 3,728$

**Câu 12: Chọn D**

Điều kiện: $x>0$. Ta có: $\log x+\log(x+1)+x^2+x=y+10^y$

$\Leftrightarrow \log[x(x+1)]+x^2+x=y+10^y \Leftrightarrow \log(x^2+x)+x^2+x=\log(10^y)+10^y$

Xét hàm số: $f(t)=\log t+t$ với $t>0$ $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+1>0$, $\forall t>0$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)\Rightarrow x^2+x=10^y$

Vì $1\le x^2+x\le 2020$ nên $1\le 10^y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \log 2020\approx 3,305$

Mà $y$ chỉ nhận giá trị nguyên nên $y\in\{0;1;2;3\}$.

Với $y=0\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (loại) Với $y=1\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$ (loại).

Với $y=2\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{401}}{2}$ (loại). Với $y=3\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{4001}}{2}$ (loại).

Vậy không có bộ hai số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 13: Chọn C**

Ta có $2\left[x+\ln(x+1)\right]+x^2+1=y+e^y \Leftrightarrow \ln(x+1)^2+(x+1)^2=\ln e^y+e^y$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0$ với mọi $t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)=\ln t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow (x+1)^2=e^y \Leftrightarrow y=\ln(x+1)^2$.

Vì $x$ nguyên nên $e^y$ nguyên mà $e^y$ nguyên khi và chỉ khi $y=0$.

Thử lại ta thấy $y=0$ thì $x=0$.

Vậy có duy nhất một cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 14: Chọn D**

Có: $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.\log_2\left((x-1)^2+2\right)=2^{2|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$, $(1)$

Xét hàm số $g(t)=2^t.\log_2(t+2), t\ge 0$. Có $g'(t)=2^t\ln 2.\log_2(t+2)+\dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2}$.

Dễ thấy, $g'(t)>0\ \forall t\ge 0$ nên hàm số $g(t)=2^t.\log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$, $(2)$

Từ $(1)$, $(2)$ ta có: $(x-1)^2=2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=2(x-m),\ x\ge m\\(x-1)^2=-2(x-m),\ x<m\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+2m+1=0,\ x\ge m\quad (3)\\x^2=2m-1,\ x<m\quad (4)\end{array}\right.$

**Trường hợp 1:** $(3)$ có nghiệm kép và $(4)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m=0\\2m-1<0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

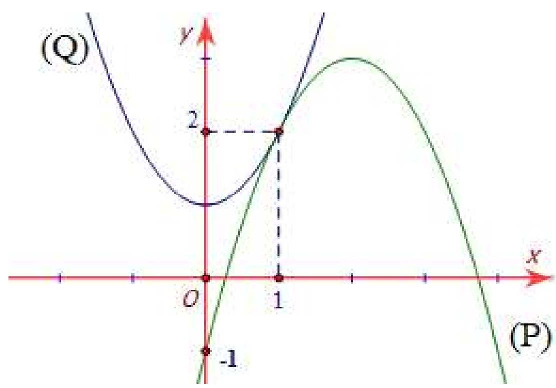
**Trường hợp 2:** $(3)$ vô nghiệm và $(4)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m<0\\2m-1=0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

**Trường hợp 3:** $(3)$ và $(4)$ có nghiệm kép trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m=0\\2m-1=0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy không có $m$ thỏa yêu cầu của đề bài.

**Cách khác:** Ta có: $\left[\begin{array}{l}2m=-x^2+4x-1,\ x\ge m\quad (P)\\2m=x^2+1,\ x<m\quad (Q)\end{array}\right.$

Đồ thị (P) và (Q) là hai parabol như hình vẽ.




Theo đồ thị thì đường thẳng $y=2m$ luôn có nhiều hơn một điểm chung với (P) và (Q) nên không có giá trị $m$ thỏa yêu cầu của đề bài.

**Câu 15: Chọn B**

Giải bất phương trình $2|y-2|-|y|+y^2-y\le 7$ (1).

Bảng xét dấu

| $y$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y-2$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |

**Trường hợp 1:** $y<0$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -2(y-2)+y+y^2-y\le 7 \Leftrightarrow y^2-2y-3\le 0 \Leftrightarrow -1\le y\le 3$

Kết hợp điều kiện $y<0$ suy ra $-1\le y<0$ (*)

**Trường hợp 2:** $0\le y<2$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -2(y-2)-y+y^2-y\le 7 \Leftrightarrow y^2-4y-3\le 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{7}\le y\le 2+\sqrt{7}$

Kết hợp với điều kiện $0\le y<2$ suy ra $0\le y<2$ (**)

**Trường hợp 3:** $y\ge 2$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(y-2)-y+y^2-y\le 7 \Leftrightarrow y^2-11\le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{11}\le y\le \sqrt{11}$

Kết hợp với điều kiện $y\ge 2$ suy ra $2\le y<\sqrt{11}$ (***)

Từ (*), (**), (***) suy ra tập nghiệm của bất phương trình (1) là $-1\le y\le \sqrt{11}$.

Ta có $7^{\left|x^2-4x-5\right|-\log_7 5}=\dfrac{7^{\left|x^2-4x-5\right|}}{7^{\log_7 5}}=\dfrac{7^{\left|x^2-4x-5\right|}}{5}\ge \dfrac{1}{5}$

Lại có $-1\le y\le \sqrt{11} \Leftrightarrow 1\le y+2\le \sqrt{11}+2 \Leftrightarrow -\sqrt{11}-2\le -(y+2)\le -1 \Rightarrow 5^{-(y+2)}\le 5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

Nên $7^{\left|x^2-4x-5\right|-\log_7 5}=5^{-(y+2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{\left|x^2-4x-5\right|-\log_7 5}=\dfrac{1}{5} \\ 5^{-(y+2)}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^2-4x-5\right|-\log_7 5=\log_7 \dfrac{1}{5} \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^2-4x-5\right|=0 \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right. \\ y=-1 \end{cases}$.

Vậy có $2$ cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đề bài là $(-1;-1)$ và $(5;-1)$.

**Câu 16: Chọn A**

$\log_3\left(x^2+2mx+2m^2-1\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right)$ $(*)$.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+2mx+2m^2-1>0 \\ x^2+2x+3>0 \\ x^2+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1>0$.

Để bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì trước hết $x^2+2mx+2m^2-1>0$ phải có nghiệm với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$\begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m^2-\left(2m^2-1\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-m^2<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. (1)$.

Với $x=-1$ thì $(*)$ trở thành

$\log_3\left(2m^2-2m\right)\le 1+\log_2(2).\log_3(4)=\log_3 12$

$\Leftrightarrow 2m^2-2m\le 12 \Leftrightarrow m^2-m-6\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 3\ (2)$

Từ $(1)$, $(2)$ và do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;2;3\}$.

Thử lại

Với $m=3$ thì $(*)$ trở thành $\log_3\left(x^2+6x+17\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right)$. Tuy nhiên bất phương trình trên không thoả với $x=-\dfrac{1}{2}$ nên chúng ta loại trường hợp này.

Với $m=\pm 2$ thì $(*)$ trở thành $\log_3\left(x^2\pm 4x+7\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right)$.

Bất phương trình trên có nghiệm với mọi $x\in\mathbb{R}$ vì

$\log_3\left(x^2\pm 4x+7\right)\le \log_3\left(3x^2+9\right)=1+\log_3\left(x^2+3\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

Tóm lại $m\in\{-2;2\}$.

**Câu 17: Chọn D**

Điều kiện xác định $x+y-1>0$.

Xét phương trình $\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2\left(x+y-1\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le \log_2 4+\log_2\left(x+y-1\right)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2\le 4\left(x+y-1\right)$ (Khi đó điều kiện xác định $x+y-1>0$ luôn đúng)

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+6\le 0$ $(1)$

Cặp $(x,y)$ thỏa mãn BPT $(1)$ thuộc hình tròn có tâm $I(2;2);R=\sqrt{2}$

Cặp $(x,y)$ thỏa mãn PT $3x+4y-m=0$ thuộcđường thẳng $d$.

Vì trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2\left(x+y-1\right)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x;y)$ thỏa mãn $3x+4y-m=0$ nên hệ $\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2\left(x+y-1\right)\\ 3x+4y-m=0\end{cases}$ phải có nghiệm duy nhất.

Khi đó đường thẳng $d$ tiếp xúc với hình tròn có tâm $I(2;2);R=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow d\left(I,d\right)=R\Leftrightarrow \dfrac{\left|3.2+4.2-m\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{\left|14-m\right|}{5}=\sqrt{2}\Leftrightarrow m-14=\pm 5\sqrt{2}\Leftrightarrow m=14\pm 5\sqrt{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị $m$ tìm được là $14+5\sqrt{2}+14-5\sqrt{2}=28$.

**Câu 18: Chọn C**

Ta có

$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(xy\right)\le \log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow xy\ge x+y^2\Leftrightarrow y^2-xy+x\le 0.$

$\Leftrightarrow y^2\le\left(y-1\right)x\Rightarrow y>1.$ Suy ra $x\ge\dfrac{y^2}{y-1}\Rightarrow P=x+3y\ge\dfrac{4y^2-3y}{y-1}=f\left(y\right)$, trên miền $(1;+\infty)$.

Ta có $f'\left(y\right)=\dfrac{4y^2-8y+3}{\left(y-1\right)^2},\mathrm{f}'\left(y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}(l)\\ y=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$. Do đó $P_{\min}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=9.$

**Câu 19: Chọn A**

Bất phương trình đã cho tương đương $\log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}7\left(x^2+2x+2\right)>x^2+6x+5+m\\ x^2+6x+5+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+8x+9>m\\ x^2+6x+5>-m\end{cases}$ có nghiệm $\forall x\in(1;3)$. (1)

Xét $\begin{cases}f\left(x\right)=6x^2+8x+9\\ g\left(x\right)=x^2+6x+5\end{cases},\forall x\in(1;3)$, ta có $\begin{cases}f'\left(x\right)=12x+8>0\\ g'\left(x\right)=2x+6>0\end{cases},\forall x\in(1;3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \ge m \\ g(1) \ge -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23 \ge m \\ 12 \ge -m \end{cases} \Leftrightarrow -12 \le m \le 23$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-12,-11,-10,...21,22,23\}$. Vậy có 36 giá trị $m$ cần tìm.

**Câu 20: Chọn B**

Từ giả thiết kết hợp ĐKXĐ của bất phương trình ta có: $1 \le y \le 2020; 4 \le x \le 2020; x, y \in Z$ ,(1).

Ta có: $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \le (2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$

$\Leftrightarrow (x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)+(x-3)(y-2)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right) \le 0$ (*).

Xét $f(x)=\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)=\log_2\left(2+\dfrac{7}{x-3}\right)>0, \forall x \in [4;2020]$ (2).

Với $y=1$ thay vào (*) ta được:

$3(x+4)\log_3\left(\dfrac{2}{3}\right)-(x-3)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right) \le 0$ ( luôn đúng $\forall x \in [4;2020]$ do (1) và (2) ).

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$. Với $y=2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x \in [4;2020]$.

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$. Với $3 \le y \le 2020 \Rightarrow y-2>0$.

Xét $g(y)=\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)=\log_3\left(\dfrac{y+y}{y+2}\right)>\log_3\left(\dfrac{y+2}{y+2}\right)=0, \forall y \ge 3$ (3).

Suy ra (*) vô nghiệm ( Do (2) và (3) ). Vậy có 4034 bộ $(x;y)$.

**Câu 21: Chọn D**

Ta có

$a^{x^2}.(b+4c)^{2x+3} \ge 1 \Leftrightarrow x^2+(2x+3)\log_a(b+4c) \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+2\log_a(b+4c).x+3\log_a(b+4c) \ge 0 (*)$

$(*)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\log_a^2(b+4c)-3\log_a(b+4c) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \log_a(b+4c) \le 3 \Leftrightarrow 1 \le b+4c \le a^3$.

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel cho các số thực $a, b$ và các số thực dương $x, y$, ta có $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ với dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$;

và bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương, ta có

$$P=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{4}{4c} \ge \frac{16a}{3}+\frac{9}{b+4c} \ge \frac{16a}{3}+\frac{9}{a^3}$$
$$\ge \frac{16a}{9}+\frac{16a}{9}+\frac{16a}{9}+\frac{9}{a^3} \ge 4\sqrt[4]{\frac{16a}{9}.\frac{16a}{9}.\frac{16a}{9}.\frac{9}{a^3}}=\frac{32}{3}$$
. Suy ra $\min P=\dfrac{32}{3}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{16a}{9}=\dfrac{9}{a^3} \\ b+4c=a^3 \\ b=2c \\ a>1, b>0, c>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{9}{8} \\ c=\dfrac{9}{16} \end{cases}$.

Khi đó $m=\frac{3}{2},n=\frac{9}{8},p=\frac{9}{16}$ và $m+n+p=\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{9}{16}=\frac{51}{16}$.

**Câu 22: Chọn B**

$$\log_{3a}11+\left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\right).\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right)\ge 0 \quad (1)$$

Điều kiện $\begin{cases} x^2+3ax+10\ge 0 \\ 0<a\ne\frac{1}{3} \end{cases}$. Đặt $t=\sqrt{x^2+3ax+10}$, $t\ge 0$.

$(1)\Leftrightarrow \log_{3a}11-\left[\log_7(t+4)\right].\log_{3a}\left(t^2+2\right)\ge 0 \quad (2)$.

$(1)$ có nghiệm duy nhất suy ra $(2)$ có nghiệm duy nhất.

Vế trái của $(2)$ là một hàm số liên tục theo biến $t$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Điều kiện cần để $(2)$ có nghiệm duy nhất là phương trình

$\log_{3a}11-\left[\log_7(t+4)\right].\log_{3a}\left(t^2+2\right)=0 \quad (3)$ có nghiệm duy nhất.

Ta có $(3)\Leftrightarrow 1-\log_7(t+4).\log_{11}\left(t^2+2\right)=0\Leftrightarrow \log_7(t+4).\log_{11}\left(t^2+2\right)=1$.

Đặt $f(t)=\log_7(t+4).\log_{11}\left(t^2+2\right)$, $t\ge 0$.

Dễ thấy hàm $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ và $f(3)=1$.

Suy ra phương trình $(3)$ có nghiệm duy nhất $t=3$.

Ta có $t=3\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3ax+10}=3\Leftrightarrow x^2+3ax+1=0 \quad (4)$.

Phương trình $(4)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\Delta=0\Leftrightarrow 9a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm\frac{2}{3}$.

So với điều kiện ta nhận $a=\frac{2}{3}$. Thử lại với $a=\frac{2}{3}$ bất phương trình $(1)$ trở thành

$\log_2 11-\log_7\left(\sqrt{x^2+2x+10}+4\right).\log_2\left(x^2+2x+12\right)\ge 0 \quad (5)$. Đặt $u=\sqrt{x^2+2x+10}$, $u\ge 3$.

Khi đó $(3)\Leftrightarrow \log_7(u+4).\log_2\left(u^2+2\right)\le \log_2 11 \quad (6)$.

Vì hàm $h(u)=\log_7(u+4).\log_2\left(u^2+2\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $[3;+\infty)$ và $h(3)=\log_2 11$

nên $(6)\Leftrightarrow h(u)\le h(3)\Leftrightarrow u\le 3$.

Kết hợp với $u\ge 3$ suy ra $u=3\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+10}=3\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy giá trị $a$ thỏa mãn bài toán là $a=\frac{2}{3}\in(0;1)$.

**Câu 23: Chọn B**

Ta có: $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5)\ge 1\Leftrightarrow 2x+2y+5\ge x^2+y^2+3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-2\le 0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\le 4 \quad (1)$.

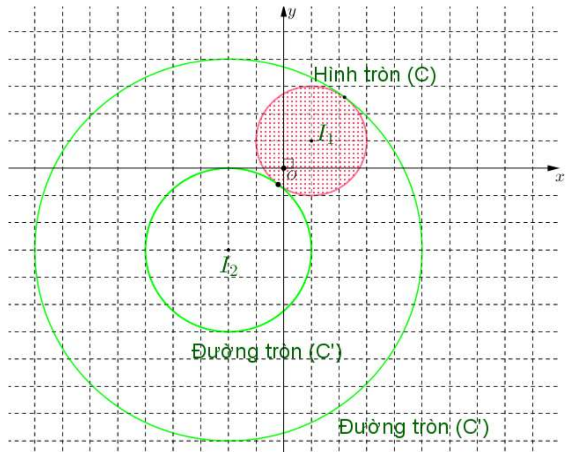
$(1)$ là hình tròn $(C)$ tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=2$.

Mặt khác $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=m(2)$.

Với $m=0$, $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$. Ta thấy $(x;y)=(-2;-3)$ không thỏa mãn bất phương trình $(1)$.

Với $m<0$, không tồn tại cặp $(x;y)$ thỏa mãn $(2)$.

Với $m>0$ thì phương trình $(2)$ là phương trình đường tròn $(C')$ tâm $I_2(-2;-3)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$.




Tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hệ $(1)$ và $(2)$ khi và chỉ khi $(C)$ và $(C')$ có một điểm chung duy nhất $\Leftrightarrow$ hình tròn $(C)$ và đường tròn $(C')$ tiếp xúc ngoài với nhau, hoặc hình tròn $(C)$ nằm trong $(C')$ và tiếp xúc trong với nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I_1I_2=R_1+R_2 \\ I_1I_2=R_2-R_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5=\sqrt{m}+2 \\ 5=\sqrt{m}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9 \\ m=49 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 24: Chọn A**

Từ phương trình $2020^2\left(2020^{x^2+y^2}-2020^{2x-6y-6}\right)+(x-1)^2+(y+3)^2\le 4$ ta có

$2020^{x^2+y^2+2}-2020^{2x-6y-6+2}+x^2+y^2-2x+6y+6\le 0$

$\Leftrightarrow 2020^{x^2+y^2+2}+x^2+y^2+2\le 2020^{2x-6y-4}+2x-6y-4$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2020^t+t, \forall t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=2020^t.\ln 2020+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ do đó $f$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bất phương trình (1) trở thành $f\left(x^2+y^2+2\right)\le f(2x-6y-4)\Leftrightarrow x^2+y^2+2\le 2x-6y-4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2\le 4$. (*)

Ta thấy miền nghiệm của bất phương trình (*) là hình tròn tâm $I_1(1;-3)$ và bán kính $R_1=2$.

Từ phương trình $e^{(x+1)^2+(y-3)^2}\le\left(x^2+y^2+2x-6y+11-m\right).e^m$ ta có

$e^{(x+1)^2+(y-3)^2-m}\le (x+1)^2+(y-3)^2-m+1$ (2)

Xét hàm số $g(t)=e^t-t-1, \forall t\in\mathbb{R}$ có $g'(t)=e^t-1$ do đó ta có bảng biến thiên là

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

Suy ra bất phương trình $g(t)\le 0\Leftrightarrow t=0$, do đó bất phương trình (2) trở thành

$(x+1)^2+(y-3)^2-m=0$ (**)

Để hệ phương trình có nghiệm thì phương trình (**) có nghiệm, hay $m \geq 0$.

Nếu $m=0$, phương trình (**) có nghiệm $(-1;3)$ không thỏa mãn (*)

Nếu $m>0$, khi đó tập hợp điểm $M(x,y)$ biểu diễn nghiệm của phương trình nằm trên đường tròn tâm $I_2(-1;3)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$.

Do đó để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì hai đường tròn này phải tiếp nhau hay

$$\left[\begin{array}{l} I_1I_2=R_1+R_2 \\ I_1I_2=|R_1-R_2| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{10}=2+\sqrt{m} \\ 2\sqrt{10}=|2-\sqrt{m}| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=44-8\sqrt{10} \\ m=44+8\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Do đó tổng các phần tử của m là 88.

**Câu 25: Chọn D**

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \\ x,y\in\mathbb{Z} \end{cases}$. Khi đó

$$\log_4(x^2+y)\geq \log_3(x+y) \Leftrightarrow x^2+y\geq 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow x^2+y\geq (x+y)^{\log_3 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x>(x+y)^{\log_3 4}-(x+y)\ \ (1)$$

Đặt $t=x+y \Rightarrow t\geq 1$ thì $(1)$ được viết lại là $x^2-x>t^{\log_3 4}-t\ \ (2)$

Với mỗi $x$ nguyên cho trước có không quá $242$ số nguyên $y$ thỏa mãn bất phương trình $(1)$

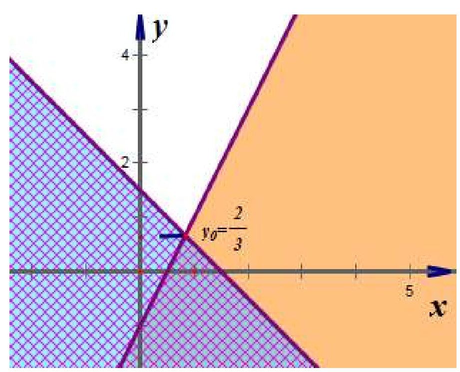
Tương đương với bất phương trình $(2)$ có không quá 242 nghiệm $t$.

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>243^{\log_3 4}-243=781$ thì sẽ có ít nhất $243$ nghiệm nguyên $t\geq 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\leq 781 \Leftrightarrow -27,4\leq x\leq 28,4$.

Mà $x$ nguyên nên $x\in\{-27,-26,...,27,28\}$.

Vậy có tất cả $28+28=56$ số nguyên $x$ thỏa yêu cầu bài toán.




**Câu 26: Chọn A**

Ta có: $P=3^{y-2x+1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{y-2x+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{y-2x+1}\geq 1$

Nhận xét: Nếu $y-2x+1<0$ thì $3^{y-2x+1}<1$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^{y-2x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{y-2x+1}$ vậy nên $P<1$.

Nếu $y-2x+1\geq 0$ thì $3^{y-2x+1}\geq 1$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^{y-2x+1}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{y-2x+1}$ vậy nên $P\geq 1$

Do vậy: $y-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow P\geq 1\quad (1)$.

Từ $(1)$ ta có $Q\geq 1 \Rightarrow 3y\geq y+3-2x \Leftrightarrow 2x+2y-3\geq 0\quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ ta được $\begin{cases} y-2x+1\geq 0 \\ 2x+2y-3\geq 0 \end{cases}$. Vậy $y=\frac{2}{3}$. chọn đáp án A

**Câu 27: Chọn A**

Điều kiện xác định phương trình: $\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0 \\ \dfrac{x}{5}>0 \\ 8x-2x^2-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \\ x>0 \\ 1\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Với $x=1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \log_5\dfrac{1}{5}+1\le 0 \Leftrightarrow 0\le 0 \Rightarrow x=1$ là nghiệm bất phương trình.

Với $x=3$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \log_5\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\le 0$ ( không xảy ra).

$\Rightarrow x=3$ không là nghiệm của bất phương trình.

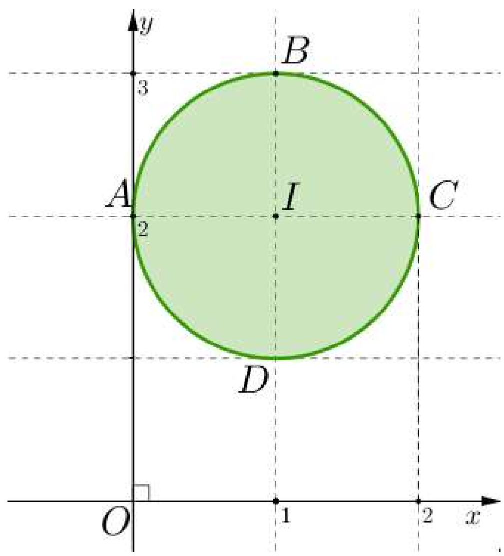
Vậy bất phương trình có một nghiệm nguyên $x\in[-2019;2019]$.

**Câu 28: Chọn C**

Ta có: $\log_2(x^2+y^2+4)-\log_2(x+2y)\le 1\ (1) \Leftrightarrow \log_2(x^2+y^2+4)\le \log_2(x+2y)+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+y^2+4)\le \log_2(2x+4y) \Leftrightarrow x^2+y^2+4\le 2x+4y \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2\le 1$

Tập hợp những điểm $M(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $(1)$ là hình tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R=1$




Từ đó suy ra có $5$ cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $(1)$ là: $(1;1)$, $(2;2)$, $(0;2)$, $(1;2)$ và $(1;3)$.

Trong $5$ cặp số $(x;y)$ trên thì có $3$ cặp số thỏa mãn điều kiện $2x-y\ge 0$ là $(1;1)$, $(1;2)$ và $(2;2)$

**Câu 29: Chọn B**

Theo bảng biến thiên ta có $f(x)\ge 1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét bất phương trình $2.6^{f(x)}+(f^2(x)-1).9^{f(x)}-3.4^{f(x)}.m\ge(2m^2+2m).2^{2f(x)}$

$\Leftrightarrow 2.6^{f(x)}+(f^2(x)-1).9^{f(x)}-3.4^{f(x)}.m\ge(2m^2+2m).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow 2.6^{f(x)}+(f^2(x)-1).9^{f(x)}\ge(2m^2+5m).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}+(f^2(x)-1).\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}\ge 2m^2+5m$.

Đặt $f(x)=t \Rightarrow t \geq 1$.

Bất phương trình trở thành $2.\left(\frac{3}{2}\right)^{t}+\left(t^2-1\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \geq 2m^2+5m$. (*)

Xét $g(t)=2.\left(\frac{3}{2}\right)^{t}+\left(t^2-1\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}$, $t \geq 1$.

$g'(t)=2.\ln\frac{3}{2}.\left(\frac{3}{2}\right)^{t}+2t.\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(t^2-1\right).2\ln\frac{3}{2}.\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}>0 \ \forall t \geq 1$.

Suy ra $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ $\Rightarrow g(t) \geq g(1)=3$.

Để bất phương trình $(*)$ có nghiệm đúng với mọi $t \geq 1$ thì $\min\limits_{t\in[1;+\infty)} g(t) \geq 2m^2+5m$.

Khi đó $3 \geq 2m^2+5m \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{1}{2}$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3;-2;-1;0\}$.

**Câu 30: Chọn D**

Điều kiện: $x \geq -1$, với ĐK này ta có $(1) \Leftrightarrow 7^{\sqrt{x+1}}(7^{2x}-7^2)+2020(x-1) \leq 0 \quad (*)$.

Xét $x>1$, khi đó ta có $\begin{cases} x-1>0 \\ 7^{2x}-7^2>0 \end{cases}$ do đó $7^{\sqrt{x+1}}(7^{2x}-7^2)+2020(x-1)>0$ nên (*) vô nghiệm, do vậy hệ bất phương trình đã cho không thỏa khi $x>1$.

Xét $-1 \leq x \leq 1$, khi đó $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ 7^{2x}-7^2 \leq 0 \end{cases}$ do đó $7^{\sqrt{x+1}}(7^{2x}-7^2)+2020(x-1) \leq 0$ nên (*) nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1]$. Do vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $x^2-(m+2)x+2m+3 \geq 0$ có nghiệm $x \in [-1;1]$.

Ta có $x^2-(m+2)x+2m+3 \geq 0 \Leftrightarrow m(x-2) \leq x^2-2x+3$, khi xét với $\forall x \in [-1;1]$ ta được $m(x-2) \leq x^2-2x+3 \Leftrightarrow m \geq \frac{x^2-2x+3}{x-2}$ (*).

Đặt hàm số $g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2}$ ta có $g'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{3} \\ x=2+\sqrt{3} \end{array}\right.$

từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;1]$ như sau

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $g(x)$ | | $-2$ | ↗ | $2-2\sqrt{3}$ | ↘ | $-2$ | |

Từ bảng biến thiên ta có (*) có nghiệm với $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $m \geq -2$.

Vậy tất cả các giá trị $m$ thỏa mãn bài toán là $m \geq -2$.

**Câu 31: Chọn A**

Điều kiện : $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \end{cases}$.

Với mọi $x\in\mathbb{Z}$ ta có $x^2\ge x$. Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathrm{D}=(-x;+\infty)$ (do $y>-x\Rightarrow y>-x^2$).

$f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\ge 0,\ \forall x\in D$ (do $x^2+y\ge x+y>0$, $\ln 4>\ln 3$)

$\Rightarrow f$ tăng trên $\mathrm{D}$.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\le 0$.

Có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $f\left(y\right)\le 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0\Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0\Leftrightarrow x^2-x-3367<0\Leftrightarrow -57{,}5\le x\le 58{,}5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\left\{-57,-56,...,58\right\}$. Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên $x$ thỏa.

**Câu 32: Chọn C**

Ta có: $\log_5\left(5x+10\right)-y=\dfrac{5^y-x}{2}\Leftrightarrow 2\left[\log_5\left(x+2\right)+1\right]-2y=5^y-x$

$\Leftrightarrow x+2+2\log_5\left(x+2\right)=5^y+2y\Leftrightarrow 5^{\log_5(x+2)}+2\log\left(x+2\right)=5^y+2y \quad (1)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=5^t+2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=5^t\ln 5+2>0\quad \forall t\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f\left(t\right)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $\left(1\right)$ ta có: $f\left(\log_5\left(x+2\right)\right)=f\left(y\right)$, suy ra $\log_5\left(x+2\right)=y$.

Vì $0\le x\le 3456$ nên $\log_5 2\le \log_5\left(x+2\right)\le \log_5 3458$ suy ra: $\log_5 2\le y\le \log_5 3458$.

(tức là $0{,}43\le y\le 5{,}063$)

Do $y$ là số nguyên nên $y\in\left\{1;2;3;4;5\right\}$. Ứng với mỗi giá trị nguyên $y$, ta có một giá trị nguyên của $x$ thuộc đoạn $\left[0;3456\right]$.

Vậy có 5 cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

**Câu 33: Chọn D**

Do $\begin{cases} x+y>0 \\ x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z} \end{cases}$ nên $x+y\ge 1$. Đặt $t=x+y$, $\begin{cases} t\ge 1 \\ t\in\mathbb{N} \end{cases}$.

Ta có $\log_4\left(t+x^2-x\right)\ge \log_3 t\Leftrightarrow \log_4\left(t+x^2-x\right)-\log_3 t\ge 0\quad (1)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_4\left(t+x^2-x\right)-\log_3 t$, $t\in\left[1;+\infty\right)$

$f'\left(t\right)=\dfrac{1}{\left(t+x^2-x\right)\ln 4}-\dfrac{1}{t\ln 3}<0,\ \forall t\in\left(1;+\infty\right)$

(Do $t+x^2-x\ge t\ge 1, \forall x\in\mathbb{Z}$ nên $0<\dfrac{1}{\left(t+x^2-x\right)}\le\dfrac{1}{t},\ \forall t\in\left(1;+\infty\right)$)

Hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến và liên tục trên $\left(1;+\infty\right)$.

NX: Với mỗi $x\in\mathbb{Z}$ có không quá 242 giá trị $y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $(1)\Leftrightarrow$có không quá 242 giá trị $t\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $f(t)\ge 0$.

Suy ra $f(243)<0\Leftrightarrow \log_4\left(243+x^2-x\right)<\log_3 243=5\Leftrightarrow x^2-x-781<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-25\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{1+25\sqrt{5}}{2}$. Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-27;-26;...;26;27;28\}$.

Vậy có 56 giá trị $x$ thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 34: Chọn A**

Điều kiện xác định $4x+4y-4>0\Leftrightarrow x+y>1$

Ta có: $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1\Leftrightarrow x^2+y^2+2\le 4x+4y-4\left(do\, x^2+y^2+2>1\right)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+6\le 0\Leftrightarrow x+y\ge\dfrac{x^2+y^2}{4}+\dfrac{3}{2}>1$

Vậy nghiệm của $x^2+y^2-4x-4y+6\le 0$ luôn thỏa điều kiện xác định

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-4x-4y+6\le 0\\x^2+y^2+4x-2y-m=0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Ta có $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-4x-4y+6\le 0\\x^2+y^2+4x-2y-m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2\le 2\\(x+2)^2+(y-1)^2=m+5\end{cases}$

Ta có: $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ có nghiệm khi và chỉ khi $m+5\ge 0\Leftrightarrow m\ge -5$

**Trường hợp 1:** $m=-5$ ta có

$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2\le 2\\(x+2)^2+(y-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16+1\le 2\\x=-2;y=1\end{cases}$ (vô lý)

Loại $m=-5$

**Trường hợp 2:** $m>-5$

Ta có số nghiệm của $\begin{cases}x^2+y^2-4x-4y+6\le 0\\x^2+y^2+4x-2y-m=0\end{cases}$ là số điểm chung của hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2\le 2$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2\le 2$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ chỉ có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow$ hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2\le 2$ tâm $I(2;2);R=\sqrt{2}$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ tâm $J(-2;1);R'=\sqrt{m+5}$ tiếp xúc ngoài với nhau hoặc tiếp xúc trong và $R'>R$.

**Trường hợp 1:** hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2\le 2$ tâm $I(2;2);R=\sqrt{2}$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ tâm $J(-2;1);R'=\sqrt{m+5}$ tiếp xúc ngoài với nhau

$\Leftrightarrow IJ=R+R'\Leftrightarrow\sqrt{17}=\sqrt{2}+\sqrt{m+5}\Leftrightarrow\sqrt{m+5}=\sqrt{17}-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow m+5=19-2\sqrt{34}\Leftrightarrow m=14-2\sqrt{34}$

Trường hợp 2: hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2\le 2$ tâm $I(2;2);R=\sqrt{2}$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ tâm $J(-2;1);R'=\sqrt{m+5}$ tiếp xúc trong với nhau và $R'>R$

$\Leftrightarrow R' = IJ + R \Leftrightarrow \sqrt{m+5} = \sqrt{17} + \sqrt{2} \Leftrightarrow m + 5 = 19 + 2\sqrt{34} \Leftrightarrow m = 14 + 2\sqrt{34}$

Vậy $S = \left\{14 + 2\sqrt{34}; 14 - 2\sqrt{34}\right\}$

**Câu 35: Chọn D**

Ta có: $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} - \left(x^2 + y^2 - 2x + 1\right) \le 1\ (*)$.

Đặt $t = x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + y^2 \ge 0$.

Xét hàm số $y = f(t) = 2^t - t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 - 1 > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(t) \le f(1) \Leftrightarrow t \le 1$ hay $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ là hình tròn có tâm $I(1;0)$; $R = 1$.

Mặt khác $P = \dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow (2P-8)x - Py + P - 4 = 0$.

Bài toán trở thành $\dfrac{|3P-12|}{\sqrt{(2P-8)^2 + P^2}} \le 1 \Leftrightarrow 4P^2 - 40P + 80 \le 0 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \le P \le 5 + \sqrt{5}$.

Suy ra $\min P = 5 - \sqrt{5}$.

**Câu 36: Chọn B**

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$

Đặt $t = \log_3(x+y)$. Khi đó $\begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + y \ge 4^t \end{cases}$

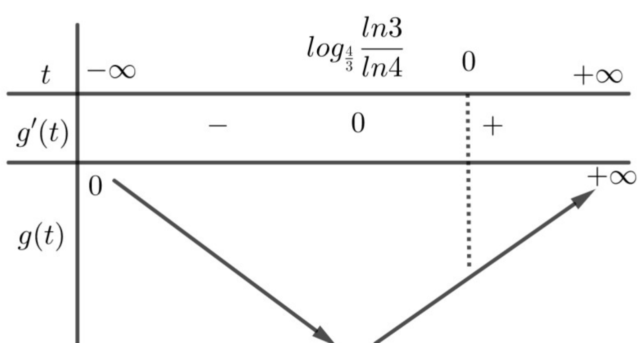
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^t - x \\ x^2 + 3^t - x \ge 4^t \end{cases} \Rightarrow x^2 - x \ge 4^t - 3^t\ (*)$.

Xét hàm số $g(t) = 4^t - 3^t$.

$g'(t) = 4^t \ln 4 - 3^t \ln 3$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 4^t \ln 4 - 3^t \ln 3 = 0 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{4}{3}} \dfrac{\ln 3}{\ln 4} < 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(t)$:




Với mỗi số nguyên $x$ gọi $a$ là số không âm thỏa mãn $x^2 - x \ge 4^a - 3^a$, trong đó $x^2 - x \ge 0\ \forall x \in \mathbb{Z}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = g(t)$, ta có $4^a - 3^a \ge 4^t - 3^t \Leftrightarrow a \ge t$.

Mặt khác $y = 3^t - x \Rightarrow -x < y = 3^t - x \le 3^a - x$.

Theo yêu cầu bài toán ứng với mỗi $x$ nguyên có không quá 728 số nguyên $y$.

Do đó: $3^a \le 728 \Leftrightarrow a \le \log_3 728$

Khi đó: $x^2 - x \ge 4^a - 3^a \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{1+4(4^a-3^a)}}{2} \le x \le \dfrac{1-\sqrt{1+4(4^a-3^a)}}{2}$

$\Rightarrow x \in (-57,4755;\ 58,4755) \Rightarrow x \in [-57;58]$.

Vậy có 116 số nguyên $x$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 37: Chọn A**

**Cách 1:**

Ta có $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} = 1+xy$ $(1)$. Suy ra $1+xy>0 \Rightarrow y > \dfrac{-1}{x}$.

Mà $x \in \left(\dfrac{1}{3};4\right) \Rightarrow \dfrac{1}{3} < x < 4 \Rightarrow -3 < \dfrac{-1}{x} < \dfrac{-1}{4}$ nên $y > -3 \Rightarrow y \in \{-2;-1;0;1;2;3...\}$.

$(1) \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy = 0$. Đặt $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy$.

Đạo hàm: $f'(x) = (6x+y-12)27^{3x^2+xy-12x}\ln 27 - y$

$\Rightarrow f''(x) = 6.\ln 27.27^{3x^2+xy-12x} + (6x+y-12)^2 27^{3x^2+xy-12x}\ln^2 27 > 0, \forall x,y \in \mathbb{R}$

Suy ra đồ thị hàm số $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy$ là lõm trên $\mathbb{R}$, hay phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của $f(x)=0$.

Mà yêu cầu bài toán là có nghiệm $x \in \left(\dfrac{1}{3};4\right)$, nên nghiệm còn lại phải thuộc $\left(\dfrac{1}{3};4\right)$. Hơn nữa $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(\dfrac{1}{3}\right).f(4) < 0$. Ta có $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}} - 1 - \dfrac{y}{3}$; $f(4) = 27^{4y} - 1 - 4y$

Suy ra $f\left(\dfrac{1}{3}\right).f(4) = \left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}} - 1 - \dfrac{y}{3}\right)\left(27^{4y} - 1 - 4y\right) = g(y)$.

Dùng chức năng table của máy tính để tính các giá trị $g(y)$ với $y \in \{-2;-1;0;1;2;3...\}$

(nhập hàm $\left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{X}{3}} - 1 - \dfrac{X}{3}\right)\left(27^{4X} - 1 - 4X\right)$ và chọn start $X=-2$, end $X=15$, step là 1)

Ta nhận thấy $g(-2); g(-1); g(1); g(2);...; g(12)$ đều nhận giá trị âm, tức là $f\left(\dfrac{1}{3}\right).f(4) < 0$.

Nên $y \in \{-2;-1;1;2;3;...;12\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y \in \{-2;-1;1;2;3;...;12\}$, hay có 14 giá trị $y$

**Cách 2: CASIO**

Ta có: $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} = 1+xy$ $(1)$. Suy ra $1+xy>0 \Rightarrow y > \dfrac{-1}{x}$.

Mà $x \in \left(\dfrac{1}{3};4\right) \Rightarrow \dfrac{1}{3} < x < 4 \Rightarrow -3 < \dfrac{-1}{x} < \dfrac{-1}{4}$, nên $y > -3 \Rightarrow y \in \{-2;-1;0;1;2;3...\}$.

$(1) \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy = 0$. Đặt $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy$.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}} - 1 - \dfrac{y}{3}$; $f(4) = 27^{4y} - 1 - 4y$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4)=\left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}}-1-\frac{y}{3}\right)\left(27^{4y}-1-4y\right)=g(y)$.

Dùng chức năng table của máy tính để tính các giá trị $g(y)$ với $y\in\{-2;-1;0;1;2;3...\}$

(nhập hàm $\left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{X}{3}}-1-\frac{X}{3}\right)\left(27^{4X}-1-4X\right)$ và chọn start $X=-2$, end $X=15$, step là 1)

Ta nhận thấy $g(0)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right).f(4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\frac{1}{3}\right)=0\\ f(4)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\ x=4\end{array}\right.$, nên $y=0$ loại vì $x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$.

Ta nhận thấy $g(-2);g(-1);g(1);g(2);...;g(12)$ đều nhận giá trị âm, tức là $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4)<0$.

Mà $f(x)$ liên tục trên $\left(\frac{1}{3};4\right)$ nên $f(x)=0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$. Tức là $y\in\{-2;-1;1;2;3;...;12\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ta nhận thấy $g(y)>0$ với $y\geq 13$.

Khi $y\geq 13$ thì $f(x)=27^{3x^2+xy-12x}-1-xy>0$, $\forall x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$ nên loại $y\geq 13$.

Vậy $y\in\{-2;-1;1;2;3;...;12\}$, hay có 14 giá trị *y*.

**Câu 38: Chọn B**

Đặt $\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=t\Rightarrow x+2^{y-1}=2^t\Leftrightarrow x=2^t-2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y-t=2\left(2^t-2^{y-1}\right)-y\Leftrightarrow 2.2^y+y=2.2^t+t$

Xét hàm số $f(x)=2.2^x+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow y=t$.

Suy ra phương trình $\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=y\Leftrightarrow x+2^{y-1}=2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}$.

$2\leq x\leq 2021\Rightarrow 2\leq 2^{y-1}\leq 2021\Leftrightarrow 1\leq y-1\leq\log_2 2021\Leftrightarrow 2\leq y\leq\log_2 2021+1$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{2;3;4;...;11\}$ có 10 giá trị nguyên của $y$.

Mà $x=2^{y-1}$ nên với mỗi số nguyên $y\in\{2;3;4;...;11\}$ xác định duy nhất một giá trị nguyên $x$.

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 39: Chọn C**

Ta có: $8^{2x^2+xy}=(1+xy).8^{4x}\Leftrightarrow 8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)=0$. Xét hàm số $f(x)=8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)$

Áp dụng bất đẳng thức $a^x>x(a-1)+1$ ta có

$f(x)=8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)>7\left(2x^2+xy-4x\right)+1-(1+xy)=14x^2+2x(3y-14)>0$, $\forall\ y\geq 5$

Do đó $y\leq 4$

Với $y\leq -2\Rightarrow xy<-1\Rightarrow f(x)>0$ (loại)

Với $y=-1\Rightarrow f(x)=8^{2x^2-5x}+x-1$

Ta có $f(5)>0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x\in\left(\frac{1}{2};5\right) \Rightarrow y=1$ thỏa mãn

Với $y=0 \Rightarrow 8^{2x^2}=8^{4x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\ (\text{TM}) \end{array}\right. \Rightarrow y=0$ thỏa mãn

Với $y>0$ có $f(5)=8^{5y+30}-(1+5y)>0, \forall y>0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=8^{\frac{y}{2}-\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{y}{2}\right)<0, \forall y=\{1;2;3;4\} \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x\in\left(\frac{1}{2};5\right)$

Vậy $y=\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2;\ 3;4\}$.

**Câu 40: Chọn B**

Đặt $\log_{15}(4x+3y+1)=\log_6\left(x^2-2x+y^2\right)=t \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+1-15^t=0 \\ (x-1)^2+y^2=6^t+1 \end{cases}$ (*).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta: 4x+3y+1-15^t=0$ và đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=6^t+1$ có điểm chung, với tâm $I(1;0)$

$\Leftrightarrow d(I,\Delta)\le R \Leftrightarrow \frac{\left|5-15^t\right|}{5}\le\sqrt{6^t+1} \Leftrightarrow 225^t-10.15^t-25.6^t\le 0 \Leftrightarrow 15^t-6.\left(\frac{2}{5}\right)^t-10\le 0$

Xét hàm số $f(t)=15^t-6.\left(\frac{2}{5}\right)^t-10$. Đạo hàm $f'(t)=15^t.\ln 15-6.\left(\frac{2}{5}\right)^t\ln\frac{2}{5}>0, \forall t$

Do vậy: hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó $f(t)\le 0 \Leftrightarrow t\le 0,9341$

Do $(x-1)^2+y^2=6^t+1$ nên $|y|\le\sqrt{6^t+1}$, dẫn đến $|y|\le 6$. Kết hợp giả thiết ta suy ra $y=6$.

Thử lại:

Với $y=6$, hệ (*) trở thành

$\begin{cases} 4x+19-15^t=0 \\ (x-1)^2=6^t-35 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{15^t-23}{4}\right)^2=6^t-35 \Leftrightarrow 225^t+1089=46.15^t+16.6^t$ (**)

Nếu $t<0$ thì $15^t<1, 6^t<1 \Rightarrow 225^t+1089>46.15^t+16.6^t$.

Nếu $t\ge 1 \Rightarrow 15^t>6^t$, ta sẽ chứng minh $225^t+1089>62.15^t$.

Thật vậy, ta có $225^t+1089-62.15^t=\left(15^t-31\right)^2+128>0$

Dẫn đến $225^t+1089>62.15^t>46.15^t+16.6^t$.

Nếu $0\le t\le 1$ thì $15^t\le 15, 6^t\le 6 \Rightarrow 225^t+1089>46.15^t+16.6^t$

Vậy (**) vô nghiệm.

**Câu 41: Chọn B**

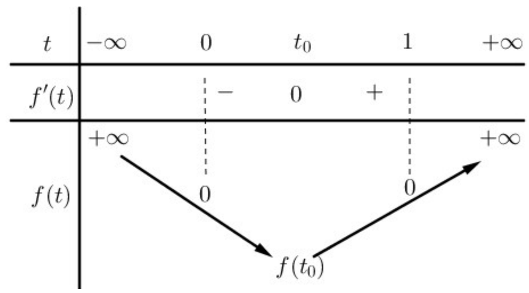
Ta có $2^{x^2+y^2+1}=\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2}=(x-1)^2+y^2+1$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2\ge 0$, khi đó $2^t=t+1, t\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=2^t-t-1, t\ge 0$. Có $f'(t)=2^t\ln 2-1=0 \Leftrightarrow t=\log_2\frac{1}{\ln 2}=t_0\approx 0,5287$.

$f'(t)>0 \Leftrightarrow t>t_0$ và $f(0)=f(1)=0$.

Ta có bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\end{array}\right.$.

Với $t=0\Rightarrow(x-1)^2+y^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

Với $t=1\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow y^2\le1\Rightarrow-1\le y\le1$

Mà $y$ nguyên nên $y$ nhận giá trị $-1$ hoặc $0$ hoặc $1$

Với mỗi giá trị $y=-1$ hoặc $y=0$ hoặc $y=1$ luôn có giá trị $x$ thỏa mãn.

Vậy có ba giá trị của $y$ thỏa mãn.

**Câu 42: Chọn D**

Điều kiện xác định: $x>0$.

Đặt $t=3^{\log_2 x}$ với $t>0$. Ta có $3^{\log_2(x^2)}=3^{2\log_2 x}=\left(3^{\log_2 x}\right)^2=t^2$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2(m+6)t+m^2-1=0$.

Nhận thấy mỗi giá trị $t>0$ có một và chỉ một giá trị $x>0$.

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt hay $\begin{cases}(m+6)^2-(m^2-1)>0\\2(m+6)>0\\m^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{37}{12};-1\right)\cup(1;+\infty)$.

Ta có $x_1x_2>2\Leftrightarrow\log_2(x_1x_2)>1\Leftrightarrow3^{\log_2(x_1x_2)}>3\Leftrightarrow3^{\log_2x_1+\log_2x_2}>3\Leftrightarrow3^{\log_2(x_1)}.3^{\log_2(x_2)}>3$

$\Leftrightarrow t_1t_2>3$ hay $m^2-1>3\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Kết hợp lại, ta được $m>2$ hoặc $-\frac{37}{12}<m<-2$.

Vì $m$ nguyên, $|m|\le10$ nên $m\in\{-3;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Do đó có 9 giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 43: Chọn A**

Điều kiện $x>0$.

Ta có: $3^{1+\frac{3}{x}}-3.3^{\frac{2}{x}-2\sqrt{x}+1}+(m+2).3^{1+\frac{1}{x}-4\sqrt{x}}-m.3^{1-6\sqrt{x}}=0$

$\Leftrightarrow3^{3\left(\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\right)}-3.3^{2\left(\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\right)}+(m+2).3^{\frac{1}{x}+2\sqrt{x}}-m=0\ (*)$.

Đặt $t=3^{\frac{1}{x}+2\sqrt{x}}=3^{\frac{1}{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}}\ge3^{3\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}}=3^3=27$.

Khi đó phương trình có dạng: $\Leftrightarrow t^3-3.t^2+(m+2)t-m=0\ (**)$.

Ta tìm $m \in [-2020;2021]$ để phương trình $(**)$ có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 27.

Ta có: $(**) \Leftrightarrow (t-1)(t^2-2t+m)=0 \Leftrightarrow t^2-2t+m=0 \ (t \ge 27)$

$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 1-m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \ge 0 \\ t = 1 \pm \sqrt{1-m} \end{cases}.$

Vậy để phương trình $(**)$ có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 27.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \ge 0 \\ 1+\sqrt{1-m} \ge 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ 1-m \ge 676 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -675.$

Vì $m \in [-2020;2021]$ nên có: $2020-675+1=1346$ giá trị $m$.

**Câu 44: Chọn A**

$\left(x^2-2mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$

Nhân 2 vế với 2:

$\left(2x^2-4mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$

Đặt: $a=2x^2-4mx$, $b=x^2-4x+m-1 \Rightarrow a\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+b\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0 \quad (*)$

Nếu $a \ne 0, b \ne 0$ thì $\dfrac{2^{b+1}-2}{b}=\dfrac{2-2^{a+1}}{a}$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. (tm) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2mx=0 \\ x^2-4x+m-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \\ x^2-4x+m-1=0 \ (1) \end{array}\right.$

Để có 3 nghiệm thực phân biệt thì có nghiệm:

$x=0 \Rightarrow m=1$; $x=2m \Rightarrow m=\dfrac{7\pm\sqrt{65}}{8}$; nghiệm kép $\Rightarrow m=5$

**Câu 45: Chọn A**

Đặt $u=2^x>0$ thì phương trình trở thành $a.u^2-b.u+50=0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ tương đương phương trình có hai nghiệm phân biệt dương $u_1, u_2$, nghĩa là $\begin{cases} b^2-200a>0 \\ \dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{50}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2>200a.$

Đặt $v=3^x>0$ thì phương trình trở thành $v^2-b.v+50a=0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_3, x_4$ tương đương với phương trình có hai nghiệm phân biệt dương $v_3, v_4$, nghĩa là $\begin{cases} b^2-200a>0 \\ b>0 \\ 50a>0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2>200a.$

Ta có $x_3+x_4>x_1+x_2 \Leftrightarrow \log_3 v_3+\log_3 v_4>\log_2 u_1+\log_2 u_2 \Leftrightarrow \log_3(v_3v_4)>\log_2(u_1u_2)$

$\Leftrightarrow \log_3(50a) > \log_2\left(\frac{50}{a}\right) \Leftrightarrow \log_3 a + \log_2 a > \log_2 50 - \log_3 50 \approx 2,08$.

Mặt khác hàm số $f(a) = \log_3 a + \log_2 a\ (a > 0)$ là hàm số tăng, $f(2) \approx 1,63$ và $f(3) \approx 2,58$ nên $a \geq 3$. Từ đó ta có $b^2 > 200a \geq 600 \Rightarrow b \geq 25$. Vậy $\min S = 3.3 + 4.25 = 109$.

**Câu 46: Chọn C**

$\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1} = 125 - (x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\log_5\left[(x+2)(y+1)\right] = 125 - \left[(x+2)-3\right](y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+2)(y+1)\right] = \frac{125}{y+1} - \left[(x+2)-3\right] \Leftrightarrow \log_5(x+2) + \log_5(y+1) = \frac{125}{y+1} - (x+2) + 3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \frac{125}{y+1} - \log_5(y+1) + \log_5 5^3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \frac{125}{y+1} + \log_5(y+1)^{-1} + \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \frac{125}{y+1} + \log_5\left(\frac{1}{y+1}\right) + \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \log_5\left(\frac{125}{y+1}\right) + \frac{125}{y+1} \qquad (*)$.

Đặt $f(t) = \log_5 t + t$. Tập xác định: $D = (0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t\ln 5} + 1 > 0, \forall t \in D$.

Suy ra $f(t) = \log_5 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow f(x+2) = f\left(\frac{125}{y+1}\right) \Leftrightarrow x + 2 = \frac{125}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{125}{y+1} - 2$.

Ta có: $x > 0 \Leftrightarrow \frac{125}{y+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{125}{y+1} > 2 \Leftrightarrow 125 > 2(y+1) \Leftrightarrow y < \frac{123}{2}$.

Kết hợp với $y > 0$ ta có $y \in \left(0; \frac{123}{2}\right)$. Ta có đánh giá:

$$P = x + 5y = \frac{125}{y+1} - 2 + 5y = \frac{125}{y+1} + 5(y+1) - 7 \geq 2\sqrt{\frac{125}{y+1}\cdot 5(y+1)} - 7 = 43, \forall y \in \left(0; \frac{123}{2}\right).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{125}{y+1} = 5(y+1) \Leftrightarrow y = 4 \in \left(0; \frac{123}{2}\right) \Rightarrow x = 23$

Vậy $P_{\min} = 43$ khi $(x; y) = (23; 4)$.

**Câu 47: Chọn A**

Phương trình $\Leftrightarrow (4x+7)(2xy-y)\left(e^{2xy-y} - e^{4x+7}\right) = (4x+7) - (2xy-y)$

Dễ thấy $x, y \in \mathbb{Z}$ và $y = 0$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình thành

$e^{2xy-y} - e^{4x+7} = \frac{1}{(2xy-y)} - \frac{1}{(4x+7)}$. Đặt $a = 2xy - y,\ b = (4x+7)$ ta được $e^a - \frac{1}{a} = e^b - \frac{1}{b}$,

Hàm số $f(t) = e^t - \frac{1}{t}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0), (0; +\infty)$ nên ta xcets 2 trường hợp sau :

Nếu $a.b>0$ phương trình $e^a-\frac{1}{a}=e^b-\frac{1}{b}\Leftrightarrow a=b$ thay lại ta được $y=\frac{4x+7}{2x-1}=2+\frac{9}{2x-1}$ do $x,y\in\mathbb{Z}$

Nên suy ra $9\,\vdots\,(2x-1)$ do đó $2x-1\in\{\pm1;\pm3;\pm9\}$ giả và thử lại ta được 6 cặp $(x;y)$.

Nếu $a.b\le 0\Rightarrow\begin{cases}a\ge1\\b\le-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a\le-1\\b\ge1\end{cases}$.

**Trường hợp** $\begin{cases}a\ge1\\b\le-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^a-e^b\ge e-\frac{1}{e}>2\\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}\le1+1=2\end{cases}$ do đó phương trình không xảy ra.

Tương tự trường hợp $\begin{cases}a\le-1\\b\ge1\end{cases}$ cũng không xảy ra do đó có 6 cặp $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 48: Chọn C**

Ta có: $4^{x^2-2x+2}-\left(\frac{m}{21}-3\right)2^{x^2-2x+3}+\frac{m}{21}+3=0\Leftrightarrow 4^{x^2-2x+2}-2\left(\frac{m}{21}-3\right)2^{x^2-2x+2}+\frac{m}{21}+3=0$

Đặt $t=2^{x^2-2x+2}$ $(t\ge2)$

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 4 | ↘ | 2 | ↗ | 32 |

Phương trình trở thành: $t^2-2\left(\frac{m}{21}-3\right)t+\frac{m}{21}+3=0\ (*)$

Để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $(0;3]$ thì có thể xảy ra các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}4\le t_1\le32\\2<t_2<4\end{array}\right.$

Ta có: $t^2-2\left(\frac{m}{21}-3\right)t+\frac{m}{21}+3=0\Leftrightarrow\frac{m}{21}=\frac{t^2+6t+3}{2t-1}=f(t)$

Khảo sát hàm trên đoạn $[2;32]$ ta có BBT:

| $t$ | 2 | | 3 | | 4 | | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | | | | | |
| $f(t)$ | 19/3 | ↘ | 6 | ↗ | 43/7 | ↗ | 1219/63 |

Từ bảng biến thiên ta có điều kiện cần tìm là: $\frac{43}{7} \le \frac{m}{21} < \frac{19}{3} \Leftrightarrow 129 \le m < 133$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{129;130;131;132\}$. Vậy có $4$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Trường hợp 2:** Phương trình $(*)$ có hai nghiệm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ 2 < t_2 < 4 \end{array}\right.$.

Thay $t_1 = 2$ vào phương trình $(*)$ ta được $m = 133$ khi đó có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = \frac{14}{3} > 4 \end{array}\right.$.

Vậy có tất cả $4$ giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Câu 49: Chọn A**

$$10^{\frac{10}{x+y}} = \left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow 10^{\frac{10}{x+y}} = \frac{(x+y)(xy+1)}{xy}.10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow \frac{10}{x+y}.10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1 + \frac{1}{xy}\right).10^{\frac{1}{xy}+1}$$

Xét hàm số $f(t) = t.10^t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$f'(t) = 10^t + t.10^t \ln 10 > 0, \quad \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = t.10^t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Do đó: $\frac{10}{x+y}.10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1 + \frac{1}{xy}\right).10^{\frac{1}{xy}+1} \Leftrightarrow \frac{10}{x+y} = 1 + \frac{1}{xy}$

$\Leftrightarrow 10 = (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) \Leftrightarrow 10 - \left(y + \frac{1}{y}\right) = x + \frac{1}{x}$.

Vì $y + \frac{1}{y} \ge 2,\ \forall y > 0$ nên $x + \frac{1}{x} \le 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 \le 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15} \le x \le 4 + \sqrt{15}$, $x \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x \in A = \{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Với mỗi số $a > 0$ phương trình $y + \frac{1}{y} = a \Leftrightarrow y^2 - ay + 1 = 0$ $(*)$ có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = a > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm $y > 0$. Vậy có $14$ cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 50: Chọn A**

Ta có: $\Leftrightarrow 3^{(x+1)^2}.\log_3\left[(x+1)^2 + 2\right] = 3^{2|x-m|}.\log_3\left(2|x-m| + 2\right)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t.\log_3(t+2)$ với $t \in [0;+\infty)$

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3.\log_3(t+2) + \frac{3^t}{(t+2)\ln 3} > 0\ \forall t \in [0;+\infty)$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

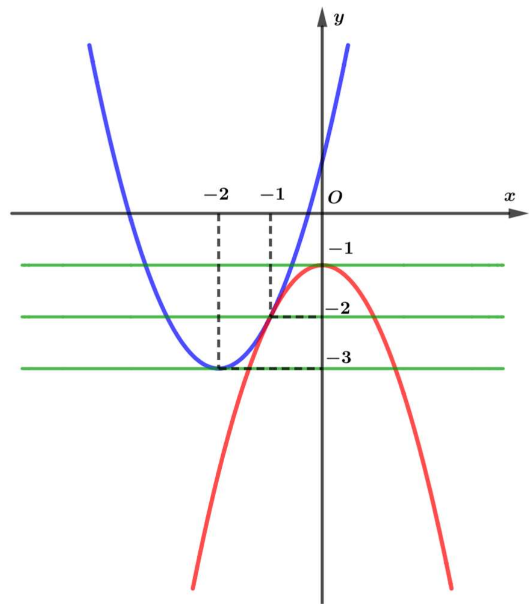
Do đó $\Leftrightarrow f\left((x+1)^2\right) = f\left(2|x-m|\right) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2|x-m|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2m = x^2 + 2x + 1 \\ 2x - 2m = -x^2 - 2x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m = -x^2 - 1 \\ 2m = x^2 + 4x + 1 \end{array}\right.$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(P_1): y=-x^2-1$ và đồ thị $(P_2): y=x^2+4x+1$

$-x^2-1=x^2+4x+1 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-2$.

Vẽ hai đồ thị $(P_1)$ và $(P_2)$ trên cùng một hệ trục tọa độ $Oxy$ ta được:




Từ đồ thị hàm số ta được $\left[\begin{array}{l}2m=-1\\2m=-2\\2m=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{2}\\m=-1\\m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

Tổng các phần tử của $S$ là $-\dfrac{1}{2}-1-\dfrac{3}{2}=-3$.

# III. ĐỀ VẬN DỤNG CAO MŨ VÀ LOGARIT SỐ 03

## ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho các số thực không âm $a,b,c$ thoả mãn $2^a+4^b+8^c=4$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $4^M+\log_M m$ bằng

**A.** $\dfrac{2809}{500}$. **B.** $\dfrac{4096}{729}$. **C.** $\dfrac{281}{50}$. **D.** $\dfrac{14}{25}$.

**Câu 2:** Biết rằng $x,y$ là các số thực dương sao cho 3 số $u_1=8^{x+\log_2 y}$, $u_2=2^{x-\log_2 y}$, $u_3=5y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và một cấp số nhân. Khi đó, tích $2^x.y^2$ có giá trị bằng:

**A.** 10. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 1.

**Câu 3:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $0$ |

Bất phương trình $f\left(e^x\right)<m(3e^x+2019)$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

**A.** $m>-\dfrac{4}{1011}$ **B.** $m\geq-\dfrac{2}{1011}$. **C.** $m\geq\dfrac{f(e)}{3e+2019}$. **D.** $m>\dfrac{f(e)}{3e+2019}$.

**Câu 4:** Cho $a,b$ là hai số thực thay đổi thỏa mãn $1<a<b\leq 2$, biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2.\log_a\left(b^2+4b-4\right)+\log^2_{\frac{b}{a}}a$ là $m+3\sqrt[3]{n}$ với $m,n$ là số nguyên dương. Tính $S=m+n$.

**A.** $S=9$. **B.** $S=18$. **C.** $S=54$. **D.** $S=15$.

**Câu 5:** Có bao nhiêu số nguyên $y\in(-20;20)$ thỏa mãn $2+\log_{\sqrt{3}}\left(3x^2+1\right)\leq\log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

**A.** 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

**Câu 6:** Cho hình vuông $ABCD$ có các đỉnh $A,B,C$ tương ứng nằm trên các đồ thị của các hàm số $y=\log_a x, y=2\log_a x, y=3\log_a x$. Biết rằng diện tích hình vuông bằng 36, cạnh $AB$ song song với trục hoành. Khi đó $a$ bằng

**A.** $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt[6]{3}$. **C.** $\sqrt[3]{6}$. **D.** $\sqrt{3}$.

**Câu 7:** Cho phương trình $\left(\log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^3}{4}\right)\sqrt{e^x-m}=0$. Gọi $S$ là tập hợp giá trị $m$ nguyên với $m\in[-10;10]$ để phương trình có đúng hai nghiệm. Tổng giá trị các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-28$. **B.** $-3$. **C.** $-27$. **D.** $-12$.

**Câu 8:** Số giá trị $m$ nguyên, $m\in[-20;20]$, sao cho $\min\limits_{x\in[0,3;1]}\left|\dfrac{\log_{0,3}x^m+16}{\log_{0,3}x+m}\right|=16$ là

**A.** 5. **B.** 1. **C.** 20. **D.** 40.

**Câu 9:** Cho phương trình $\ln(x+m)-e^x+m=0$, với $m$ là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-2021;2021]$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** $2022$. **B.** $4042$. **C.** $2019$. **D.** $2021$.

**Câu 10:** Cho các số thực $x$, $y$ thỏa mãn $5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T=M+m$.

**A.** $T=15$. **B.** $T=\dfrac{19}{2}$. **C.** $T=\dfrac{21}{2}$. **D.** $T=10$.

**Câu 11:** $\Leftrightarrow(4x+7)(2xy-y)\left(e^{2xy-y}-e^{4x+7}\right)=2x(2-y)+y+7$ Cho $a$, $b$, $c$ là ba số thực dương đôi một phân biệt. Có bao nhiêu bộ $(a;b;c)$ thỏa mãn: $a^{b+2}\le b^{a+2}$; $b^{c+2}\le c^{b+2}$; $c^{a+2}\le a^{c+2}$

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $0$.

**Câu 12:** Xét tất cả các số thực dương $x,y$ thỏa mãn $\dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}\right)=1+2xy$. Khi biểu thức $\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tích $xy$ bằng

**A.** $\dfrac{9}{200}$. **B.** $\dfrac{1}{64}$. **C.** $\dfrac{9}{100}$. **D.** $\dfrac{1}{32}$.

**Câu 13:** Cho phương trình $\log^2_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(m^2-2\right)\log_{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-1=0$ với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $\dfrac{\sqrt{x_1^2+1}-x_1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2}=7+4\sqrt{3}$. Tích các phần tử của $S$ bằng

**A.** $-4$. **B.** $4$. **C.** $0$. **D.** $2$.

**Câu 14:** Xét các số nguyên dương $a,b$ sao cho phương trình $a.4^x-b.2^x+50=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ và phương trình $9^x-b.3^x+50a=0$ có hai nghiệm $x_3,x_4$ thỏa mãn điều kiện $x_3+x_4>x_1+x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=3a+4b$.

**A.** $109$. **B.** $51$. **C.** $49$. **D.** $87$.

**Câu 15:** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

**A.** $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{25}{7}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

**Câu 16:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ thỏa mãn $\dfrac{\ln x}{x+1}+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{m}{x}$, $\forall x>0$, $x\ne 1$?

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** Vô số. **D.** $0$.

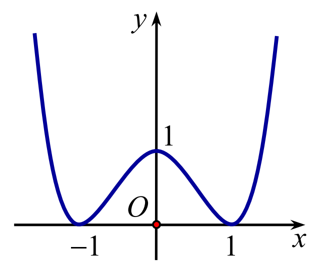
**Câu 17:** Có bao nhiêu số nguyên $y$ nằm trong khoảng $(-2021;+\infty)$ sao cho với mỗi giá trị của $y$ tồn tại nhiều hơn hai số thực $x$ thỏa mãn $x^2+y+\left(x^2-x\right).2020^{x+y}=\left(2x^2-x+y\right).2020^{x-x^2}$?

**A.** $2020$. **B.** $2019$. **C.** $2021$. **D.** $2022$.

**Câu 18:** Cho phương trình $2\log_3 \dfrac{6x}{\sqrt{2x+1}-1}+2\left(\sqrt{2x+1}-|y|\right)-3^{2|y|}+2x=0$. Với các cặp số $(x;y)$ thoả mãn phương trình trên, giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4)+2x+\dfrac{7}{3}-2.3^{2|y|}$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(-4;-2)$. **B.** $(-11;-9,5)$. **C.** $(-6;-4)$. **D.** $(-9,5;-8)$.

**Câu 19:** Cho hàm số bậc 4 có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ và $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\log\dfrac{f(x)}{mx^2}+x\left[f(x)-mx\right]=mx^3-f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?




**A.** 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

**Câu 20:** Biết điều kiện cần và đủ của tham số $m$ để phương trình $\log_{\frac{1}{2}}^2(x+2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x+2}-8m+4=0$ có nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{3}{2};6\right]$ là $m\in(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b$.

**A.** $T=-\dfrac{8}{3}$. **B.** $T=-\dfrac{22}{3}$. **C.** $T=\dfrac{8}{3}$. **D.** $T=\dfrac{22}{3}$.

**Câu 21:** Cho hai số thực dương $a,b$ thỏa mãn $\dfrac{1}{2}\log_2 a=\log_2\dfrac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4a^3+b^3-4\log_2\left(4a^3+b^3\right)$ được viết dưới dạng $x-y\log_2 z$, với $x,y,z>2$ là các số nguyên, $z$ là số lẻ. Tổng $x+y+z$ bằng

**A.** 11. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

**Câu 22:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $\log_3\dfrac{x^2-4x+m}{x^2+x+2}\le 2x^2+7x+7-m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;5]$?

**A.** 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

**Câu 23:** Xét các số thực $x$, $y$ thỏa mãn $5^{(x+y)^2}+25^{xy}\left(x^2+y^2-1-xy\right)-5^{3xy+1}=0$. Gọi $m$, $M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^4+y^4-x^2y^2$. Khi đó $3m+2M$ bằng

**A.** $3m+2M=1$. **B.** $3m+2M=\dfrac{7}{3}$. **C.** $3m+2M=\dfrac{10}{3}$. **D.** $3m+2M=-1$.

**Câu 24:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)-1$

**A.** $m\in[-12;13]$. **B.** $m\in[-13;12]$. **C.** $m\in[-13;-12]$. **D.** $m\in[12;13]$.

**Câu 25:** Có bao nhiêu số nguyên $x\in[-2021;2021]$ để ứng với mỗi $x$ có tối thiểu 64 số nguyên $y$ thoả mãn $\log_3\sqrt{x^4+y}\ge\log_2(x+y)$?

**A.** 3990. **B.** 3992. **C.** 3988. **D.** 3989.

**Câu 26:** Gọi $S$ là các cặp số thực $(x,y)$ sao cho $\ln(x-y)^x-2020x=\ln(x-y)^y-2020y+e^{2021}$ và $x\in[-1;1]$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P=e^{2021x}(y+1)-2021x^2$ với $(x,y)\in S$ đạt được tại $(x_0;y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $x_0\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. **B.** $x_0\in\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$. **C.** $x_0\in[-1;0)$. **D.** $x_0\in\left[0;\frac{1}{4}\right)$.

**Câu 27:** Có bao nhiêu cặp số $x,y$ là các số nguyên không âm thỏa mãn:

$$2\left(1+\sqrt{x+2y}\right)^2+\log_2(x+2y)=2\log_2\left(x^2+y^2+2xy+x\right)+2(x+y)^2+4x+4y$$

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 28:** Có bao nhiêu số nguyên $m\le2021$ để có nhiều hơn một cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m)\ge1$ và $4x-3y+1=0$?

**A.** $2017$. **B.** $2020$. **C.** $2019$. **D.** $2022$.

**Câu 29:** Cho các số thực $x,y,z$ thỏa mãn $\log_3\left(2x^2+y^2\right)=\log_7\left(x^3+2y^3\right)=\log z$. Có bao giá trị nguyên của $z$ để có đúng hai cặp $(x,y)$ thỏa mãn đẳng thức trên.

**A.** $2$. **B.** $211$. **C.** $99$. **D.** $4$.

**Câu 30:** Có bao nhiêu số nguyên dương $y$ sao cho ứng với mỗi $y$ luôn có ít hơn 2021 số nguyên $x$ thoả mãn $\left[\log_2(x+3)-1\right].(\log_2x-y)<0$

**A.** $20$. **B.** $9$. **C.** $10$. **D.** $11$.

**Câu 31:** Có bao nhiêu số tự nhiên $a$ sao cho tồn tại số thực $x$ thoả $2021^{x^3-a^{3\log(x+1)}}\left(x^3+2020\right)=a^{3\log(x+1)}+2020$

**A.** 9. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 12

**Câu 32:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $y\le2021$ thỏa mãn

$$\log\frac{x+1}{2y+1}\le4y^4+4y^3-x^2y^2-2y^2x.$$

**A.** $2021(2021-1)$. **B.** $2021(2022-1)$. **C.** $2022(2022-1)$. **D.** $2022(2022+1)$.

**Câu 33:** Cho các số thực $x,y,z$ thỏa mãn $\log_3\left(2x^2+y^2\right)=\log_7\left(x^3+2y^3\right)=\log z$. Có bao giá trị nguyên của $z$ để có đúng hai cặp $(x,y)$ thỏa mãn đẳng thức trên.

**A.** $2$. **B.** $211$. **C.** $99$. **D.** $4$.

**Câu 34:** Số giá trị nguyên dương của $m$ để bất phương trình $\left(2^{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-m\right)<0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên là:

**A.** $62$. **B.** $33$. **C.** $32$. **D.** $31$.

**Câu 35:** Cho phương trình $m.2^{x^2-4x-1}+m^2.2^{2x^2-8x-1}=7\log_2\left(x^2-4x+\log_2m\right)+3$, ($m$ là tham số). Có bao nhiêu số nguyên dương $m$ sao cho phương trình đã cho có nghiệm thực.

**A.** $31$. **B.** $63$. **C.** $32$. **D.** $64$.

**Câu 36:** Hỏi có bao nhiêu số nguyên âm $a$ để phương trình $\frac{1}{9^x-3}+\frac{1}{3^x-9}=x+|x-4|+a$ có hai nghiệm thực phân biệt?

**A.** Vô số. **B.** $5$. **C.** $7$. **D.** $4$.

**Câu 37:** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm là

**A.** $(-\infty;\ln 2)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

**Câu 38:** Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2021;2021]$ sao cho tồn tại số thực $x$ thỏa mãn:

$$3.|x|^{\log_2 3}-3^{\left(\frac{1}{\ln 2}|x|+m\right)}-\frac{1}{\ln 2}|x|+1=-\log_2|x|+m$$

**A.** $2021$. **B.** $4041$. **C.** $2020$. **D.** $4040$.

**Câu 39:** Gọi $S$ là tập các số nguyên $m\in[-2020;2020]$ để phương trình $\log_2^2 x-\log_{\sqrt{2}} x=m-\sqrt{m+\log_2 x}$ có đúng hai nghiệm. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** 1. **B.** $2020$. **C.** $2021$. **D.** $0$.

**Câu 40:** Cho phương trình $\log^4 x+\log^3 x-2\log^2 x-3m\log x-m^2=0$ (1),. Biết tập tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình có $4$ nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[\frac{1}{100};100\right]$ là $(a;b)\cup(b;c)$. Xét $T=a+b+c$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.** $T\in(2;3)$. **B.** $T\in\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $T\in(0;1)$. **D.** $T\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 41:** Có bao nhiêu số nguyên dương $m$ nhỏ hơn $20$ thỏa mãn phương trình $\log\left(mx+\log m^m\right)=10^x$ có đúng hai nghiệm thực $x$ phân biệt.

**A.** $13$. **B.** $12$. **C.** $10$. **D.** $11$.

**Câu 42:** Có bao nhiêu số thực $m$ để phương trình sau có $3$ nghiệm thực phân biệt:

$$4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-m|+2\right)=0.$$

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** Vô số.

**Câu 43:** Xét các số thực dương $x$, $y$ thay đổi thỏa mãn $\frac{x+y}{10}+\log\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)=1+2xy$. Khi biểu thức $\frac{20}{x^2}+\frac{5}{y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tích $xy$ bằng

**A.** $\frac{1}{32}$. **B.** $\frac{9}{100}$. **C.** $\frac{9}{200}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

**Câu 44:** Gọi $M$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $g(a;b)=a^2+b^2$ với $a,b$ thỏa mãn $\begin{cases} a-2b+8\ge 0 \\ a+b+2\ge 0 \\ 2a-b+4\le 0 \end{cases}$. Khi $m\in[0;M]$ thì tổng các nghiệm của phương trình $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2+|1-m|\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$ thuộc khoảng?

**A.** $\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}};+\infty\right)$. **B.** $\left(1;2+\sqrt{3}\right)$.

**C.** $\left(2+\sqrt{3};2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}};2\right)$.

**Câu 45:** Gọi $S$ là tập hợp các số nguyên $m$ sao cho phương trình $\log_3\left(3^x+2m\right)=\log_5\left(3^x-m^2\right)$ có nghiệm. Tổng các phần tử của $S$ là

**A.** $-4$. **B.** $-2$. **C.** $-3$. **D.** $-5$.

**Câu 46:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc $[-2020;2021]$ sao cho tồn tại $x$ thỏa mãn $\ln^3(x+m)+m^3+e^x\ln(x+m)^{3m}=e^{3x}$?

**A.** $4042$. **B.** $2019$. **C.** $2023$. **D.** $2021$.

**Câu 47:** Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x;\,y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $2^{x^2+y^2}+\log_3\left(x^2+y^2+5\right)-18=0$ và $\log_{|x|+y^2+2}\left(6+y^2-2|y|\right)=1$?

**A.** $6$. **B.** $4$. **C.** $8$. **D.** $9$.

**Câu 48:** Cho hai số thực $x,y$ thỏa mãn hệ thức $2^{2|y|-x^2}=\log_{2|y|+1}x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-40;40]$ để tồn tại duy nhất một số thực $x$ thỏa mãn hệ thức $4y^2-10x^2-mx-1=0$?

**A.** $51$. **B.** $52$. **C.** $53$. **D.** $31$.

**Câu 49:** Cho các số thực $x\ne 0,\ y>0$ thỏa mãn đẳng thức $\log_2\dfrac{y}{2x^2}+y^2=x^4-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để có nhiều hơn 2 cặp $(x,y)$ thỏa mãn phương trình $m\left(2^{y-2x}+2^{-y+4x}\right)=m^2+2^{2x}$ ?

**A.** $6$. **B.** $15$. **C.** $5$. **D.** $16$.

**Câu 50:** Cho phương trình $2\log_3\dfrac{6x}{\sqrt{2x+1}-1}+2\left(\sqrt{2x+1}-|y|\right)-3^{2|y|}+2x=0$. Với các cặp số $(x;y)$ thoả mãn phương trình trên, giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4)+2x+\dfrac{7}{3}-2.3^{2|y|}$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(-4;-2)$. **B.** $(-11;-9,5)$. **C.** $(-6;-4)$. **D.** $(-9,5;-8)$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn B**

Đặt $a=\log_2 x, 2b=\log_2 y, 3c=\log_2 z$.

Ta có $S=a+2b+3c=\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=\log_2(xyz)$.

Mà $2^a+4^b+8^c=4 \Leftrightarrow x+y+z=4$.

Suy ra $4=x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz\le\left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow S=\log_2(xyz)\le\log_2\left(\frac{4}{3}\right)^3=3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$.

Do đó $M=\max S=3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$ khi $x=y=z=\frac{4}{3}$.

Mặt khác, ta có $(x-1)(y-1)\ge 0 \Rightarrow xy\ge x+y+1=3-z \Rightarrow xyz\ge z(3-z)\ge 2$.

Suy ra $S\ge 1$, do đó $m=\min S=1$ khi $x=z=1, y=2$.

Vậy $4^M+\log_M m=4^{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)}+\log_{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)}1=\left(2^{\log_2\left(\frac{4}{3}\right)}\right)^6=\left(\frac{4}{3}\right)^6=\frac{4096}{729}$.

**Câu 2: Chọn D**

Điều kiện: $y>0$. Theo đề bài, ta có: $\begin{cases}2.2^{(x-\log_2 y)}=8^{x+\log_2 y}+5y\,(1)\\ 2^{2(x-\log_2 y)}=8^{x+\log_2 y}.5y\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\left(8^{x+\log_2 y}+5y\right)^2}{4}=8^{x+\log_2 y}.5y \Leftrightarrow \left(8^{x+\log_2 y}-5y\right)^2=0 \Leftrightarrow 8^{x+\log_2 y}=5y$$

$$\Rightarrow \log_2\left(8^{x+\log_2 y}\right)=\log_2 5y \Leftrightarrow (x+\log_2 y).\log_2 8=\log_2 5+\log_2 y$$

$$\Leftrightarrow 3x+3\log_2 y=\log_2 5+\log_2 y \Leftrightarrow 3x+2\log_2 y=\log_2 5 \Leftrightarrow 3x=\log_2\frac{5}{y^2}\ (3)$$

Thay $(2)$ vào $(1)$ ta được:

$2.2^{(x-\log_2 y)}=5y+5y \Leftrightarrow 2^{(x-\log_2 y)}=5y \Leftrightarrow x-\log_2 y=\log_2 5y \Leftrightarrow x=\log_2 5y^2\ (4)$

Từ $(3)$ và $(4)$ $\Rightarrow \log_2\frac{5}{y^2}=3.\log_2 5y^2 \Rightarrow \frac{5}{y^2}=(5y^2)^3 \Leftrightarrow y^8=\frac{1}{25} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

$$\Rightarrow x=\log_2 5.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2=\log_2\sqrt{5} \Rightarrow 2^x.y^2=2^{\log_2\sqrt{5}}.\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2=\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}=1$$

**Câu 3: Chọn C**

Đầu tiên, ta nhận thấy hàm số $y=e^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ cho nên hàm số $f(x)$ và hàm số $f(e^x)$ có tính chất giống nhau nên từ bảng biến thiên đã cho ta có thể suy ra tính chất của hàm số $f(e^x)$.

Xét bất phương trình $f\left(e^x\right)<m(3e^x+2019)$. Đặt $t=e^x>0$, với $x\in(0;1)\Rightarrow t\in(1;e)$.

Ta được bất phương trình mới $f(t)<m(3t+2019) \Leftrightarrow m>\frac{f(t)}{(3t+2019)}$ (1)

Xét hàm số $g(t)=\frac{f(t)}{(3t+2019)}$ trên $t\in(1;e)$, ta có $g'(x)=\frac{f'(t)(3t+2019)-3f(t)}{(3t+2019)^2}$.

Do hàm số $f(x)$ và hàm số $f(e^x)$ có tính chất giống nhau nên trên khoảng đang được xét thì

$f(t)<0$ và $f'(t)>0$ với mọi $t\in(1;e)\Rightarrow g'(t)>0$ với mọi $t\in(1;e)$.

Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)=\dfrac{f(t)}{(3t+2019)}$ với $t\in(1;e)$ như sau:

| $t$ | $1$ | | $e$ |
|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | |
| $g(t)$ | $\dfrac{-2}{1011}$ | $\nearrow$ | $g(e)$ |

Suy ra, Bất phương trình $f\left(e^x\right)<m(3e^x+2019)$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

đúng với mọi $t\in(1;e)\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[1;e]}g(t)\Leftrightarrow m\ge g(e)\Rightarrow m\ge\dfrac{f(e)}{3e+2019}$.

**Câu 4: Chọn D**

Ta có $b^2+4b-4\ge b^3\Leftrightarrow(b-1)\left(b^2-4\right)\le 0$.

Nên $P\ge 2.\log_a b^3+\left(\dfrac{1}{\log_a b-1}\right)^2=6\log_a b+\left(\dfrac{1}{\log_a b-1}\right)^2$.

Đặt $t=\log_a b$. Với $1<a<b\le 2$ thì $t>1$. Đặt $f(t)=6t+\left(\dfrac{1}{t-1}\right)^2$ với $t>1$ thì $P\ge f(t), t>1$.

Ta có $f'(t)=6+2\left(\dfrac{1}{t-1}\right)\left(-\dfrac{1}{(t-1)^2}\right)=6-\dfrac{2}{(t-1)^3}=2.\dfrac{3(t-1)^3-1}{(t-1)^3}$.

$f'(t)=0\Rightarrow t=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

| $t$ | $1$ | | $1+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ta có $f\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=6+\dfrac{6}{\sqrt[3]{3}}+\left(\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}\right)^2=6+3\sqrt[3]{9}$. Vậy $m=6, n=9\Rightarrow m+n=15$.

**Câu 5: Chọn C**

Ta có: $2+\log_{\sqrt{3}}\left(3x^2+1\right)\le\log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)$ $(1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

ĐKXĐ: $yx^2-6x+2y>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}y>0\\ \Delta'=9-2y^2<0\end{cases}\Leftrightarrow y>\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$(1)\Leftrightarrow\log_{\sqrt{3}}\left(3\left(3x^2+1\right)\right)\le\log_{\sqrt{3}}\left(yx^2-6x+2y\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(3x^2+1\right)\le yx^2-6x+2y\Leftrightarrow(y-9)x^2-6x+2y-3\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ bx+c\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=9\\ -6x+15\ge 0\ \forall x\in(\text{Loai})\end{cases}\\ \begin{cases}y>9\\ 9-(y-9)(2y-3)\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}y>9\\ -2y^2+21y-18\le 0\end{cases} \Leftrightarrow y\ge \frac{21+3\sqrt{33}}{4}$$

Do $\begin{cases}y\in(-20;20)\\ y\in\mathbb{Z}\\ y>\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y\ge\dfrac{21+3\sqrt{33}}{4}\end{cases} \Rightarrow y\in\{10;11;...;18;19\}$. Vậy có 10 số nguyên $y$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 6: Chọn B**

Từ giả thiết đã cho, ta có các đỉnh $A,B,C$ của hình vuông $ABCD$ lần lượt nằm trên các đồ thị $y=\log_a x, y=2\log_a x, y=3\log_a x$.

Do $AB//Ox, AB\perp BC$ nên suy ra $CB//Oy$

Giả sử $A(a^{x_1};x_1),B(a^{x_2};2x_2),C(a^{x_3};3x_3)$ ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(a^{x_2}-a^{x_1};2x_2-x_1\right)\\ \overrightarrow{BC}=\left(a^{x_3}-a^{x_2};3x_3-2x_2\right)\end{cases}$

Do $\begin{cases}CB//Oy\\ AB//Ox\end{cases}$ nên $\begin{cases}2x_2-x_1=0\\ a^{x_3}-a^{x_2}=0\end{cases}\Rightarrow 2x_2=x_1=2x_3=2k>0$

Khi đó $A(a^{2k};2k),B(a^k;2k),C(a^k;3k)\Rightarrow\begin{cases}AB^2=(a^k-a^{2k})^2\\ BC^2=k^2\end{cases}$

Mà diện tích của hình vuông $ABCD$ bằng 36 nên

$$S_{ABCD}=AB^2=BC^2=36\Rightarrow\begin{cases}AB^2=(a^k-a^{2k})^2=36\\ BC^2=k^2=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^k-a^{2k}=-6\\ a^k-a^{2k}=6\end{array}\right.\\ k=\mp 6, k>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^k-a^{2k}=-6\\ a^k-a^{2k}=6\end{array}\right.\\ k=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^6-a^{12}=-6\\ a^6-a^{12}=6\end{array}\right.\\ k=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^6=3\\ a^6=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow a=\sqrt[6]{3}$$

**Câu 7: Chọn A**

Ta có: $\left(\log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^3}{4}\right)\sqrt{e^x-m}=0$

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}x>0\\ m<e^x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2^2 x-\log_2\dfrac{x^3}{4}=0\\ \sqrt{e^x-m}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0\\ e^x=m\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=2\\ e^x=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\\ e^x=m\end{array}\right.$$

**Trường hợp 1**: $m\le 0$. Khi đó phương trình $e^x=m$ vô nghiệm.

**Trường hợp 2:** $m>0$. Khi $\left(\log_2^2 x-\log_2\frac{x^3}{4}\right)\sqrt{e^x-m}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\\x=\ln m\end{array}\right.\\x\ge \ln m\end{cases}$

Để phương trình chỉ có hai nghiệm phân biệt thì: $\left[\begin{array}{l}2\le \ln(m)<4\\ \ln m\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow e^2\le m<e^4$

Ngoài ra khi $m=1$ thì $e^x=1\Leftrightarrow x=0(l)$. Nên $m=1,8;9;10$.

Vậy $m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;8;9;10\}\Rightarrow \sum m=-28$.

**Câu 8: Chọn B**

Đặt $t=\log_{0,3}x$. Đặt $f(x)=\dfrac{m\log_{0,3}x+16}{\log_{0,3}x+m}\ (x>0)$.

Khi đó: Xét $f(t)=\dfrac{mt+16}{t+m}$ trên đoạn $[0;1]$. Từ đó $f'(t)=\dfrac{m^2-16}{(t+m)^2}$.,

$f(0)=\dfrac{16}{m}$, $f(1)=\dfrac{m+16}{m+1}$

**Trường hợp 1:** $m\in[-20;-4]\Rightarrow f'(t)=\dfrac{m^2-16}{(t+m)^2}>0,\forall t\in[0;1]$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Suy ra, $f(0)\le f(t)\le f(1)<0$ nên $|f(0)|\ge|f(t)|\ge|f(1)|>0$, $\forall t\in[0;1]$.

Nên $\max\limits_{t\in[0;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{m+16}{m+1}<0\Rightarrow \min\limits_{t\in[0;1]}|f(t)|=|f(1)|=\left|\dfrac{m+16}{m+1}\right|(m\ne -1)$.

Mà $\left|\dfrac{m+16}{m+1}\right|=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\ (l)\\ m=\dfrac{-32}{17}\ (l)\end{array}\right.$.

**Trường hợp 2:** $m\in[-4;0]\Rightarrow f'(t)=\dfrac{m^2-16}{(t+m)^2}<0,\forall t\in[0;1]$.

Nên hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.

Suy ra, $0>f(0)\ge f(t)\ge f(1)$ nên $|f(1)|\ge|f(t)|\ge|f(0)|>0$, $\forall t\in[0;1]$.

Nên $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f(0)\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|=|f(0)|=\left|\dfrac{16}{m}\right|(m\ne 0)$.

Mà $\left|\dfrac{16}{m}\right|=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1(l)\\ m=-1(l)\end{array}\right.$.

**Trường hợp 3:** $m\in[0;4]\Rightarrow f'(t)=\dfrac{m^2-16}{(t+m)^2}<0,\forall t\in[0;1]$.

Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Suy ra, $f(0)\ge f(t)\ge f(1)>0$ nên $|f(1)|\ge|f(t)|\ge|f(0)|>0$, $\forall t\in[0;1]$.

Nên $\min\limits_{x\in[0;1]} f(t) = f(1) \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;1]} |f(t)| = |f(1)| = \left|\dfrac{m+16}{m+1}\right| \ (m \ne -1)$.

Mà $\left|\dfrac{m+16}{m+1}\right| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\ (n) \\ m=\dfrac{-32}{17}\ (l) \end{array}\right.$.

**Trường hợp 4:** $m\in[4;20] \Rightarrow f'(t) = \dfrac{m^2-16}{(t+m)^2} > 0, \forall t\in[0;1]$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Suy ra, $0 < f(0) \le f(t) \le f(1)$ nên $0 < |f(0)| \le |f(t)| \le |f(1)|$, $\forall t\in[0;1]$.

Nên $\min\limits_{x\in[0;1]} f(t) = f(0) \Rightarrow \min\limits_{x\in[0;1]} |f(t)| = |f(0)| = \left|\dfrac{16}{m}\right| \ (m\ne 0)$.

Mà $\left|\dfrac{16}{m}\right| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1(l) \\ m=-1(l) \end{array}\right.$. Vậy tổng hợp các trường hợp: $m=1$ .

**Câu 9: Chọn D**

Điều kiện: $x+m>0$.

Đặt $t=\ln(x+m) \Leftrightarrow x+m=e^t$, ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+m=e^t \\ t+m=e^x \end{cases}$.

Suy ra $x-t=e^t-e^x \Leftrightarrow e^x+x=e^t+t \quad (*)$.

Xét hàm số $f(x)=e^x+x$, có $f'(x)=e^x+1>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Ta thấy $(*)$ có dạng $f(x)=f(t) \Leftrightarrow x=t$.

Khi đó ta có phương trình $x+m=e^x \Leftrightarrow m=e^x-x$

Xét hàm số $g(x)=e^x-x$, có $g'(x)=e^x-1$; $\quad g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm khi $m\ge 1$.

Mà $\begin{cases} m\in[-2021;2021] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có $m\in\{1;2;...;2020;2021\}$. Tức là có 2021 số nguyên $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 10: Chọn B**

$5+16.4^{x^2-2y} = \left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \quad (1)$

Đặt $t=x^2-2y$, khi đó phương trình $(1)$ trở thành: $5+16.4^t = \left(5+16^t\right).7^{2-t}$

$\Leftrightarrow 5.7^t + 16.28^t = 49\left(5 + 16^t\right)$ $\Leftrightarrow 5\left(7^t - 49\right) + 16.28^t - 49.16^t = 0$

$$\Leftrightarrow 5\left(7^t - 7^2\right) + 4^{2t+2}\left[\left(\frac{7}{4}\right)^t - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right] = 0 \Rightarrow t = 2$$

Khi đó: $x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2$, thế vào biểu thức $P$ ta được:

$$P = \frac{10x + 3\left(x^2 - 2\right) + 26}{2x + x^2 - 2 + 5} = \frac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3} = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 22x - 10}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 22x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $\frac{5}{2}$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $3$ |

Dựa vào BBT ta có: $M = 7; \mathrm{m} = \frac{5}{2}$. Vậy $T = M + m = 7 + \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$

**Câu 11: Chọn D**

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x + 2}$,

Ta có: $a^{b+2} \le b^{a+2} \Leftrightarrow (b+2)\ln a \le (a+2)\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a+2} \le \frac{\ln b}{b+2} \Leftrightarrow f(a) \le f(b)\ (1)$

$b^{c+2} \le c^{b+2} \Leftrightarrow (c+2)\ln b \le (b+2)\ln c \Leftrightarrow \frac{\ln b}{b+2} \le \frac{\ln c}{c+2} \Leftrightarrow f(b) \le f(c)\ (2)$

$c^{a+2} \le a^{c+2} \Leftrightarrow (a+2)\ln c \le (c+2)\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln c}{c+2} \le \frac{\ln a}{a+2} \Leftrightarrow f(c) \le f(a)\ (3)$

Từ $(1)$, $(2)$ và $(3)$ suy ra: $f(a) = f(b) = f(c)$

Mà $a, b, c$ dương phân biệt nên để tồn tại bộ ba số $(a;b;c)$ thì phải tồn tại số thực $m$ sao cho đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$ tại ba điểm phân biệt hay phương trình $\frac{\ln x}{x+2} = m\ (*)$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{2}{x} - \ln x}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}\left(1 + \frac{2}{x} - \ln x\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = \ln x\ (**)$

Mặt khác trên $(0;+\infty)$ hàm số $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ là hàm nghịch biến, $h(x) = \ln x$ đồng biến nên phương trình $(**)$ có không quá một nghiệm, suy ra hàm số $f(x)$ có không quá một cực trị suy ra với mọi giá trị của $m$, đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ không quá hai điểm suy ra phương trình $(*)$ có không quá hai nghiệm, hay không tồn tại bộ ba số $(a;b;c)$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 12: Chọn B**

Ta có: $\dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}\right)=1+2xy$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{x+y}{2xy}\right)=1+2xy$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{10}+\log(x+y)-1=2xy+\log(2xy)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{x+y}{10}\right)=2xy+\log(2xy) \quad (1)$

Xét hàm số: $f(t)=t+\log t \quad (t>0)$

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t.\ln 10}>0, \forall t>0$ nên hàm số $f$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Vậy $(1): f\left(\dfrac{x+y}{10}\right)=f(2xy) \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{10}=2xy \Leftrightarrow y=\dfrac{x}{20x-1}$.

Ta có: $\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{(20x-1)^2}{x^2}=\dfrac{400x^2-40x+5}{x^2}=400-\dfrac{40}{x}+\dfrac{5}{x^2}=5\left(\dfrac{1}{x}-4\right)^2+320\geq 320$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}; y=\dfrac{1}{16} \Rightarrow xy=\dfrac{1}{64}$.

**Câu 13: Chọn B**

Ta có: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$ và $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

$\log^2_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(m^2-2\right)\log_{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-1=0$

$\Leftrightarrow \log^2_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-\left(m^2-2\right)\log_{2+\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow \log^2_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(m^2-2\right)\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-1=0 \quad (*)$

Đặt $t=\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=\left(2+\sqrt{3}\right)^t$, ta có

$t'=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)=\dfrac{1}{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{x^2+1}}>0; \forall x$.

Khi đó phương trình $(*)$ đã cho trở thành: $t^2+\left(m^2-2\right)t-1=0$.

Yêu cầu bài toán tương đương: Phương trình $t^2+\left(m^2-2\right)t-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1;t_2$ thỏa mãn $\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1}\left(2+\sqrt{3}\right)^{t_2}}=7+4\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{-(t_1+t_2)}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow t_1+t_2=-2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2-m^2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m^2-2\right)^2+4>0 \\ m=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Vậy $S=\{-2;2\}$. Tích các phần tử của $S$ là: $-4$.

**Câu 14: Chọn A**

Đặt $u=2^x>0$ thì phương trình trở thành $a.u^2-b.u+50=0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ tương đương phương trình có hai nghiệm phân biệt dương $u_1,u_2$, nghĩa là

$$\begin{cases} b^2-200a>0 \\ \dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{50}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2>200a.$$

Đặt $v=3^x>0$ thì phương trình trở thành $v^2-b.v+50a=0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_3,x_4$ tương đương với phương trình có hai nghiệm phân biệt dương $v_3,v_4$, nghĩa là

$$\begin{cases} b^2-200a>0 \\ b>0 \\ 50a>0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2>200a.$$

Ta có $x_3+x_4>x_1+x_2 \Leftrightarrow \log_3 v_3+\log_3 v_4>\log_2 u_1+\log_2 u_2 \Leftrightarrow \log_3\left(v_3v_4\right)>\log_2\left(u_1u_2\right)$

$\Leftrightarrow \log_3(50a)>\log_2\left(\dfrac{50}{a}\right) \Leftrightarrow \log_3 a+\log_2 a>\log_2 50-\log_3 50\approx 2,08$.

Mặt khác hàm số $f(a)=\log_3 a+\log_2 a$ $(a>0)$ là hàm số tăng, $f(2)\approx 1,63$ và $f(3)\approx 2,58$ nên $a\ge 3$. Từ đó ta có $b^2>200a\ge 600 \Rightarrow b\ge 25$. Vậy $\min S=3.3+4.25=109$.

**Câu 15: Chọn D**

Với $x$, $y>0$ ta có:

$\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1) \Leftrightarrow (y+1)\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]=9-(x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+\log_3(y+1)=\dfrac{9}{y+1}-x+1 \Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)=2-\log_3(y+1)+\dfrac{9}{y+1}$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)=\log_3\dfrac{9}{y+1}+\dfrac{9}{y+1}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0$, $\forall t>0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f\left(\dfrac{9}{y+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\dfrac{9}{y+1}$.

Từ đó suy ra $P=x+2y=x+1+2y-1=\dfrac{9}{y+1}+2(y+1)-3\ge 2\sqrt{\dfrac{9}{y+1}.2(y+1)}-3=-3+6\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{9}{y+1}=2(y+1)\Leftrightarrow (y+1)^2=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1 \Rightarrow x=\dfrac{-25+27\sqrt{2}}{7}$.

Vậy $P_{\min} = -3+6\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{-25+27\sqrt{2}}{7}$; $y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$.

**Câu 16: Chọn C**

Với $x>0$, $x\neq 1$ ta có:

$$\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{m}{x}\Leftrightarrow \frac{m}{x}<\ln x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{x}\Leftrightarrow m<-2\frac{x\ln x}{x^2-1}+1=f\left(x\right)$$

* Xét hàm số: $f\left(x\right)=-2\dfrac{x\ln x}{x^2-1}+1$ với $x>0$, $x\neq 0$.

Ta có: $f'\left(x\right)=2.\dfrac{x^2\ln x+\ln x+1-x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$.

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2\ln x+\ln x+1-x^2=0\ \ (1)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^2\ln x+\ln x+1-x^2$ với $x>0$

Đạo hàm $g'\left(x\right)=2x\ln x+\dfrac{1}{x}-x$

$g''\left(x\right)=2\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}$.

$g'''\left(x\right)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}>0$, $\forall x>0$ $\Rightarrow$ Hàm số $g''\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Từ đó suy ra phương trình $g''\left(x\right)=0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Lại có $g''\left(1\right)=0$. Suy ra phương trình $g''\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g'\left(x\right)$:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g'\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $0$ | ↗ | |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Giới hạn:

$$\lim_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\left(1-2.\frac{\ln x}{x-1}.\frac{x}{x+1}\right)=1-2\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}.\frac{x}{x+1}\right)=1-1=0.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ $0$ | $\|\|$ | $0$ $\nearrow$ | |

Bất phương trình $m < f(x)$ nghiệm đúng $\forall x > 0$, $x \neq 1 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Vậy có vô số các giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 17: Chọn A**

Ta có: $x^2 + y + (x^2 - x).2020^{x+y} = (2x^2 - x + y).2020^{x-x^2}$

$\Leftrightarrow (x^2 + y).2020^{x^2-x} + (x^2 - x).2020^{x^2+y} = 2x^2 - x + y$

$\Leftrightarrow (x^2 + y).\left(2020^{x^2-x} - 1\right) + (x^2 - x).\left(2020^{x^2+y} - 1\right) = 0 \ (1)$

Nếu $(x^2 + y)(x^2 - x) \neq 0$ thì $(1) \Leftrightarrow \dfrac{2020^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} + \dfrac{2020^{x^2+y} - 1}{x^2 + y} = 0 \ (2)$

Dễ thấy vế trái của $(2)$ luôn dương nên suy ra $(1)$ không xảy ra.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 = -y \end{array}\right.$

Với $y = -1$ thì có ba giá trị $x$ thỏa mãn đề bài.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -y > 0 \Leftrightarrow y < 0$

Do $y$ nguyên nằm trong khoảng $(-2021; +\infty)$ nên $y \in \{-2020; -2019; ...; -1\}$.

Vậy có $2020$ số nguyên $y$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 18: Chọn B**

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $2\log_3 \dfrac{6x}{\sqrt{2x+1} - 1} + 2\left(\sqrt{2x+1} - |y|\right) - 3^{2|y|} + 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(3\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)\right) + 2\sqrt{2x+1} - 2|y| - 3^{2|y|} + 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2\log_3\left(\sqrt{2x+1} + 1\right) + 2\sqrt{2x+1} - 2|y| - 3^{2|y|} + 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2 + 2x + 2 + 2\sqrt{2x+1} = 2|y| + 3^{2|y|}$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2 = \log_3 3^{2|y|} + 3^{2|y|}$

Xét hàm số $y = f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ $(1) \Leftrightarrow f\left(\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2\right) = f\left(3^{2|y|}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2 = 3^{2|y|}$.

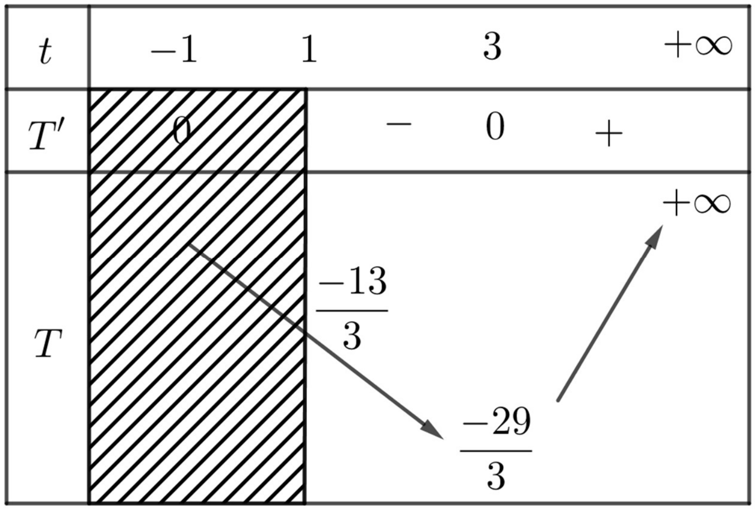
Do đó $T = \dfrac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \dfrac{7}{3} - 2.3^{2|y|} = \dfrac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \dfrac{7}{3} - 2.\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2$.

Đặt $t=\sqrt{2x+1}>1\Rightarrow 2x=t^2-1$.

Suy ra $T=\frac{1}{3}t\left(t^2-1+4\right)+t^2-1+\frac{7}{3}-2\left(t+1\right)^2=\frac{1}{3}t^3-t^2-3t-\frac{2}{3}$.

Có $T'=t^2-2t-3\Rightarrow T'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên suy ra $\min T=-\frac{29}{3}\approx -9,67\in\left(-11;-9,5\right)$.

**Câu 19: Chọn D**

Điều kiện: $\frac{f\left(x\right)}{mx^2}>0\Rightarrow\begin{cases}f\left(x\right)>0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\notin\left\{-1;0;1\right\}$.

Xét: $\log\frac{f\left(x\right)}{mx^2}+x\left[f\left(x\right)-mx\right]=mx^3-f\left(x\right)$

$\Leftrightarrow\log f\left(x\right)+\log\left(x+1\right)+xf\left(x\right)+f\left(x\right)=\log mx^2+\log\left(x+1\right)+mx^3+mx^2$

$\Leftrightarrow\log\left[\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]+\left(x+1\right)f\left(x\right)=\log\left[mx^2\left(x+1\right)\right]+mx^2\left(x+1\right)$.

Điều kiện bổ sung: $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=\log t+t$ trên $\left(0;+\infty\right)$, khi đó: $g'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 10}+1>0,\forall t\in\left(0;+\infty\right)$.

Suy ra: $g$ là hàm tăng trên $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó: $\left(x+1\right)f\left(x\right)=mx^2\left(x+1\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=mx^2$.

Dựa vào đồ thị, để hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=mx^2$ cắt nhau có 2 điểm có hoành độ dương thì $m>0$.

Kết hợp với đề bài: $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in\left[-2021;2021\right]$, ta được 2021 giá trị của $m$ thỏa yêu cầu đề bài.

**Câu 20:** Điều kiện: $x+2>0\Leftrightarrow x>-2$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}^2\left(x+2\right)^2+4\left(m-5\right)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x+2}-8m+4=0$

$\Leftrightarrow 4\log_{\frac{1}{2}}^2\left(x+2\right)-4\left(m-5\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(x+2\right)-8m+4=0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2(x+2)-(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-2m+1=0 \quad (1)$.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};6\right]\Rightarrow t\in[-3;1]$.

Phương trình trở thành $t^2-(m-5)t-2m+1=0$

$\Leftrightarrow t^2-mt+5t-2m+1=0 \Leftrightarrow m(t+2)=t^2+5t+1$

Nhận thấy $t=-2$ không là nghiệm nên $\dfrac{t^2+5t+1}{t+2}=m \quad (2)$.

Xét hàm số $y(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t+2}$ trên $[-3;1]$.

Ta có $y'(t)=\dfrac{t^2+4t+9}{(t+2)^2}>0, \forall t\in[-3;1]\setminus\{-2\}$.

Bảng biến thiên :

| $t$ | $-3$ | | $-2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(t)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $y(t)$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{3}$ |

Để phương trình ban đầu có nghiệm thuộc $\left[-\frac{3}{2};6\right]\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-3;1]$.

Suy ra $m\in\left(-\infty;\frac{7}{3}\right]\cup[5;+\infty)$.

**Câu 21: Chọn A**

Do $a, b$ là các số thực dương và $\frac{1}{2}\log_2 a=\log_2\frac{2}{b}\Leftrightarrow \log_2\sqrt{a}=\log_2\frac{2}{b}\Leftrightarrow ab^2=4$.

Đặt $t=4a^3+b^3=4a^3+\frac{b^3}{2}+\frac{b^3}{2}\geq 3\sqrt[3]{a^3b^6}=3ab^2=12$.

Khi đó $P=4a^3+b^3-4\log_2\left(4a^3+b^3\right)=t-4\log_2 t=f(t)$.

Ta có $f'(t)=1-\dfrac{4}{t\ln 2}>0, \forall t\geq 12$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ là $f(12)=12-4\log_2 12=12-4(2+\log_2 3)=4-4\log_2 3$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4a^3+b^3-4\log_2\left(4a^3+b^3\right)$ là $4-4\log_2 3$.

Từ đó ta có $x=y=4,\ x=3$. Tổng $x+y+z$ bằng 11.

**Câu 22: Chọn A**

Điều kiện: $x^2-4x+m>0\Leftrightarrow (x-2)^2>4-m$. $(1)$

Với mọi $x\in[1;5]$, suy ra: $1\leq x\leq 5\Leftrightarrow -1\leq x-2\leq 3\Rightarrow 0\leq (x-2)^2\leq 9 \quad (2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra: $4-m<0\Leftrightarrow m>4 \quad (*)$.

Ta có $\log_3\dfrac{x^2-4x+m}{x^2+x+2}\leq 2x^2+7x+7-m$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-4x+m\right)-\log_3\left(x^2+x+2\right)\le 2x^2+7x+7-m$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-4x+m\right)+x^2-4x+m\le \log_3 3\left(x^2+x+2\right)+3\left(x^2+x+2\right)$. $(**)$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ trên $(0;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln t}>0\ \forall t\in(0;+\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $(**)\Leftrightarrow f\left(x^2-4x+m\right)\le f\left(3x^2+3x+6\right)$

$\Leftrightarrow x^2-4x+m\le 3x^2+3x+6$

$\Leftrightarrow 2x^2+7x+6\ge m\ \ (3)$.

Ta tìm điều kiện để bất phương trình $(3)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;5]$.

Xét hàm số $g(x)=2x^2+7x+6$ là hàm số bậc hai đồng biến trên $\left(-\dfrac{7}{4};+\infty\right)$ nên đồng biến trên đoạn $x\in[1;5]$, suy ra: $g(x)\ge g(1)=15$.

Suy ra $(3)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[1;5]$ $\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[1;5]} g(x)=g(1)=15$.

Kết hợp điều kiện $(*)$, suy ra $m\in\{5;6;...;14;15\}$. Có 11 giá trị nguyên của $m$.

**Câu 23: Chọn C**

Ta có: $5^{(x+y)^2}+25^{xy}\left(x^2+y^2-1-xy\right)-5^{3xy+1}=0\Leftrightarrow 5^{(x+y)^2-2xy}-5^{xy+1}=-\left(x^2+y^2\right)+(xy+1)$

$\Leftrightarrow 5^{x^2+y^2}+x^2+y^2=5^{xy+1}+(xy+1)\ \ (1)$.

Xét hàm số $y=5^t+t$ trên $[0;+\infty)$ có $y'=5^t.\ln 5+1>0,\forall t\in[0;+\infty)$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow x^2+y^2=xy+1\Rightarrow 2xy\le xy+1=(x+y)^2-2xy\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le xy\le 1$.

Ta có: $P=\left(x^2+y^2\right)^2-3x^2y^2=(xy+1)^2-3x^2y^2=-2(xy)^2+2xy+1$.

Xét hàm số $y=-2t^2+2t+1$ trên $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$ có $y'=-4t+2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\in\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$.

Ta có: $y\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$, $y(1)=1$ suy ra $m=\dfrac{1}{9}$ và $M=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $3m+2M=3.\dfrac{1}{9}+2.\dfrac{3}{2}=\dfrac{10}{3}$.

**Câu 24: Chọn A**

$\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)-1$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2+1\right)+1>\log_5\left(x^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(5x^2+5\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+5>x^2+4x+m\\ x^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-4x+5-m>0\\ x^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<4x^2-4x+5\\ m>-x^2-4x\end{cases}(*)$

Vì khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình nên $(*)$ trở thành

$\begin{cases}m<4x^2-4x+5, & \forall x\in(2;3) & (1)\\ m>-x^2-4x, & \forall x\in(2;3) & (2)\end{cases}$

Đặt $f\left(x\right)=4x^2-4x+5\Rightarrow f'\left(x\right)=8x-4, f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

| $x$ | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | |
| $f(x)$ | 13 | $\nearrow$ | 29 |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left(1\right)\Leftrightarrow m\ge 13$

Đặt $g\left(x\right)=-x^2-4x\Rightarrow g'\left(x\right)=-2x-4, f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-2$

| $x$ | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $-12$ | $\searrow$ | $-21$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left(2\right)\Leftrightarrow m\ge -12$. Vậy $\left(*\right)\Leftrightarrow -12\le m\le 13$.

**Câu 25: Chọn A**

Xét bất phương trình $\log_3\sqrt{x^4+y}\ge \log_2\left(x+y\right)$

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^4+y>0\\x+y>0\\x,y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y\ge 1\\x,y\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Đặt $t=x+y$ ta được $t\ge 1$. Bất phương trình trở thành $\log_3\sqrt{x^4+t-x}\ge \log_2 t$

Với mỗi $\left(x\in\mathbb{Z}\right)$ có tối thiểu 64 $\left(y\in\mathbb{Z}\right)$ thoả nên có tối thiểu 64 số nguyên $t\left(t\ge 1\right)$ thoả.

Xét hàm số $y=f\left(t\right)=\log_3\sqrt{x^4+t-x}-\log_2 t=\dfrac{1}{2}\log_3\left(x^4+t-x\right)-\log_2 t$,

vì $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{2\left(x^4+t-x\right)\ln 3}-\dfrac{1}{t\ln 2}<0,\forall x,\forall t\ge 1$ nên $f\left(t\right)$ nghịch biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Ta nhận thấy $x^4-x+1=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+1\ge 1$, do đó $\log_3\left(x^4-x+1\right)\ge \log_3 1=0$.

Do đó phương trình luôn nhận nghiệm $t=1,\forall x\in\mathbb{Z}$.

Suy ra để mỗi $\left(x\in\mathbb{Z}\right)$ có tối thiểu 64 $\left(y\in\mathbb{Z}\right)$ thì

$$f\left(64\right)\ge 0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(x^4-x+64\right)-\log_2 64\ge 0\Leftrightarrow x^4-x+64\ge 3^{12}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 27\\x\le -27\end{array}\right..$$

Kết hợp $x\in\left[-2021;2021\right]$ ta được $x\in\left[-2021;-27\right]\cup\left[27;2021\right]$.

Vậy có 3990 số nguyên $x\in\left[-2021;2022\right]$ thoả mãn.

**Câu 26: Chọn A**

Điều kiện $x-y>0$

Ta có: $\ln(x-y)^x-2020x=\ln(x-y)^y-2020y+e^{2021}$

$\Leftrightarrow (x-y)\ln(x-y)-2020(x-y)=e^{2021} \Leftrightarrow \ln(x-y)-2020-\dfrac{e^{2021}}{x-y}=0(*)$

Xét hàm $f(t)=\ln t-2020-\dfrac{e^{2021}}{t}$, có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{e^{2021}}{t}>0,\forall t>0$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow f(x-y)=0=f\left(e^{2021}\right)\Leftrightarrow x-y=e^{2021}\Leftrightarrow y=x-e^{2021}$

Khi đó $P=e^{2021x}\left(1+x-e^{2021}\right)-2021x^2=g(x)$

$g'(x)=e^{2021x}\left(2022+2021x-2021e^{2021}\right)-4042x$

$g''(x)=e^{2021x}\left(2021.2022+2021^2x-2021^2e^{2021}\right)-4042$

$\le e^{2021x}\left(2021.2022+2021^2x-2021^2e^{2021}\right)-4042<0,\ \forall x\in[-1;1]$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$

Mà $g'(-1)=e^{-2021}+2021>0, g'(0)=2022-2021e^{2021}<0$ nên tồn tại $x_0\in(-1;0)$ sao cho $g(x_0)=0$ và khi đó $\underset{[-1;1]}{Max}\, g(x)=g(x_0)$. Vậy $P$ lớn nhất tại $x_0\in(-1;0)$.

**Câu 27: Chọn B**

Ta có $2\left(1+\sqrt{x+2y}\right)^2+\log_2(x+2y)=2\log_2\left(x^2+y^2+2xy+x\right)+2(x+y)^2+4x+4y$

$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{x+2y}+x+2y+\dfrac{1}{2}\log_2(x+2y)=\log_2\left[(x+y)^2+x\right]+(x+y)^2+2x+2y$

$\Leftrightarrow 1+\log_2\sqrt{x+2y}+2\sqrt{x+2y}=\log_2\left[(x+y)^2+x\right]+(x+y)^2+x$

$\Leftrightarrow \log_2 2\sqrt{x+2y}+2\sqrt{x+2y}=\log_2\left[(x+y)^2+x\right]+\left[(x+y)^2+x\right]$

Xét hàm số $g(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$, có $g'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số $y=g(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ $(1)\Leftrightarrow g\left(2\sqrt{x+2y}\right)=g\left((x+y)^2+x\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2y}=(x+y)^2+x$

$\Leftrightarrow x+2y+2\sqrt{x+2y}=(x+y)^2+2(x+y)$

Xét hàm số $h(u)=u^2+u$ với $u>0$, có $h'(u)=2u+1>0,\forall u>0$.

Suy ra hàm số $y=h(u)=u^2+u$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ $(2)\Leftrightarrow h\left(\sqrt{x+2y}\right)=h(x+y)\Leftrightarrow \sqrt{x+2y}=x+y\Leftrightarrow x+2y=(x+y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x+2y\Leftrightarrow y^2+2(x-1)y+x^2-x=0$

Ta coi phương trình là phương trình bậc hai ẩn $y$, khi đó: Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_y'\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2-\left(x^2-x\right)\ge 0\Leftrightarrow -x+1\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$.

Do $x$ là số nguyên không âm nên $x=0$ hoặc $x=1$.

Với $x=0$, suy ra $(3)\Leftrightarrow y^2-2y=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$.

Với $x=1$, suy ra $(3)\Leftrightarrow y^2=0\Leftrightarrow y=0$.

Vậy có 3 cặp $(x;y)$ thoả mãn là $(0;0),(0;2),(1;0)$.

**Câu 28: Chọn A**

Ta có: $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m)\ge 1 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y+m\ge x^2+y^2+4 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases}$

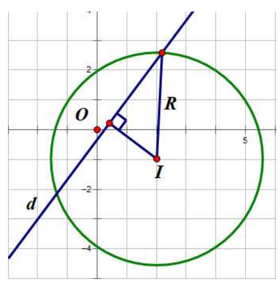
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y+1)^2\le m+1 & (1) \\ 4x-3y+1=0 & (2) \end{cases} \quad (*)$

Xét $(1):(x-2)^2+(y+1)^2\le m+1$.

Khi $m+1<0\Rightarrow(1)$ vô nghiệm nên $m<-1$ loại.

Khi $m=-1\Rightarrow(1)\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2\le 0\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2=0 \\ (y+1)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ thay vào $(2)$ không thỏa mãn nên $m=-1$ loại.

Khi $m>-1$ thì nghiệm của bất phương trình $(1)$ là miền trong của đường tròn $(C)$ có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{m+1}$.




Xét $d:4x-3y+1=0$.

Khoảng cách từ tâm $I$ đến đường thẳng $d$ là: $d(I,d)=\dfrac{|4.2-3.(-1)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{12}{5}$.

Hệ $(*)$ có nhiều hơn một cặp số $(x;y)\Leftrightarrow d$ cắt đường tròn $(C)$ tại 2 điểm phân biệt

$d(I,d)<R\Leftrightarrow \dfrac{12}{5}<\sqrt{m+1}\Leftrightarrow m>\dfrac{119}{25}$.

Mà $m$ nguyên và $m\le 2021\Rightarrow m\in\{5;6;...;2021\}$.

Vậy có $2017$ số nguyên $m$ thảo mãn.

**Câu 29: Chọn B**

Ta có $\log_3(2x^2+y^2)=\log_7(x^3+2y^3)=\log z=t\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y^2=3^t & (1) \\ x^3+2y^3=7^t & (2) \\ z=10^t & (3) \end{cases}$.

Nếu $y=0$ $(2)\Rightarrow x=7^{\frac{t}{3}}$ thay vào $(1)$ ta được $2.7^{\frac{2t}{3}}=3^t \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}}2$ do đó $z=10^{\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}}2}$.

Nếu $y\neq 0$

Từ $(1)\&(2)$ suy ra $\begin{cases}\left(2x^2+y^2\right)^3=27^t\\ \left(x^3+2y^3\right)^2=49^t\end{cases}\Rightarrow \dfrac{\left(x^3+2y^3\right)^2}{\left(2x^2+y^2\right)^3}=\left(\dfrac{49}{27}\right)^t \Leftrightarrow \dfrac{\left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+2\right)^2}{\left(2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1^2\right)^3}=\left(\dfrac{49}{27}\right)^t,(*)$.

Đặt $\dfrac{x}{y}=u, u\neq -\sqrt[3]{2}$. Xét $f(u)=\dfrac{\left(u^3+2\right)^2}{\left(2u^2+1\right)^3}\Rightarrow f'(u)=\dfrac{6u\left(u^3+2\right)(u-4)}{\left(2u^2+1\right)^4}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=0\\ u=-\sqrt[3]{2}\\ u=4\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

| $u$ | $-\infty$ | | $-\sqrt[3]{2}$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(u)$ | $\frac{1}{8}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $\frac{4}{33}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{8}$ |

Nhận xét với mỗi giá trị $u$ tương ứng với duy nhất 1 cặp $(x,y)$ thỏa mãn bài toán do đó

Yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{8}\leq\left(\dfrac{49}{27}\right)^t<4\\ 0<\left(\dfrac{49}{27}\right)^t<\dfrac{4}{33}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{1}{8}\right)}\leq z<10^{\log_{\frac{49}{27}}4}\\ 0<z<10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{4}{33}\right)}\end{array}\right.$.

Vì $z$ là số nguyên nên có $211$ giá trị thỏa mãn.

**Câu 30: Chọn C**

Điều kiện: $x>0$

Với điều kiện trên: $\left[\log_2(x+3)-1\right].\left(\log_2 x-y\right)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2(x+3)-1<0\\ \log_2 x-y>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2(x+3)-1>0\\ \log_2 x-y<0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2(x+3)<1\\ \log_2 x>y\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2(x+3)>1\\ \log_2 x<y\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3<2\\ x>2^y\end{cases}\\ \begin{cases}x+3>2\\ x<2^y\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ x>2^y\end{cases}\\ \begin{cases}x>-1\\ x<2^y\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^y<x<-1\ (sai)\\ -1<x<2^y\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<x<2^y$$

So điều kiện ta được: $0<x<2^y$

Ứng với mỗi $y$ luôn có ít hơn $2021$ số nguyên $x \Leftrightarrow 2^y\leq 2021\Leftrightarrow y\leq\log_2 2021$

Vì $y$ là số nguyên dương nên $y\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

**Câu 31: Chọn A**

Xét phương trình: $2021^{x^3-a^{3\log(x+1)}}=\dfrac{a^{3\log(x+1)}+2020}{x^3+2020}$, điều kiện: $x>-1$,

$\Leftrightarrow x^3-a^{3\log(x+1)}=\log_{2021}\left(a^{3\log(x+1)}+2020\right)-\log_{2021}\left(x^3+2020\right)$

$\Leftrightarrow x^3+\log_{2021}\left(x^3+2020\right)=a^{3\log(x+1)}+\log_{2021}\left(a^{3\log(x+1)}+2020\right)\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+\log_{2021}\left(t^3+2020\right)$, trên $(0;+\infty)$

$f'(t)=3t^2+\dfrac{3t^2}{\left(t^3+2020\right)\ln 2021}>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó $(*)$ trở thành: $x=a^{\log(x+1)}\Leftrightarrow x=(x+1)^{\log a}\Leftrightarrow \log x=\log a.\log(x+1)$

$\Leftrightarrow \log a=\dfrac{\log x}{\log(x+1)}<1,\forall x>-1$ nên $a<10\Rightarrow a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

**Câu 32: Chọn C**

Ta có:
$\log\dfrac{x+1}{2y+1}\le 4y^4+4y^3-x^2y^2-2y^2x\Leftrightarrow \log\dfrac{xy+y}{2y^2+y}\le\left(4y^4+4y^3+y^2\right)-\left(x^2y^2+2y^2x+y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log(xy+y)-\log\left(2y^2+y\right)\le\left(2y^2+y\right)^2-(xy+y)^2\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log t+t^2$ với $t\in(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 10}+2t>0;\forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $t\in(0;+\infty)$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow f(xy+y)\le f\left(2y^2+y\right)\Leftrightarrow xy+y\le 2y^2+y\Leftrightarrow x\le 2y$.

Vì $y\in\mathbb{Z}^+$ và $y\le 2021$ nên ta xét các trường hợp sau.

$y=1\Rightarrow x\in\{1;2\}$.

$y=2\Rightarrow x\in\{1;2;3;4\}$.

……………………………….

$y=2021\Rightarrow x\in\{1;2;3;.....;4042\}$.

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán là: $2+4+6+...+4042=2022.2021$

**Câu 33: Chọn B**

Ta có $\log_3\left(2x^2+y^2\right)=\log_7\left(x^3+2y^3\right)=\log z=t\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+y^2=3^t & (1)\\ x^3+2y^3=7^t & (2)\\ z=10^t & (3)\end{cases}$.

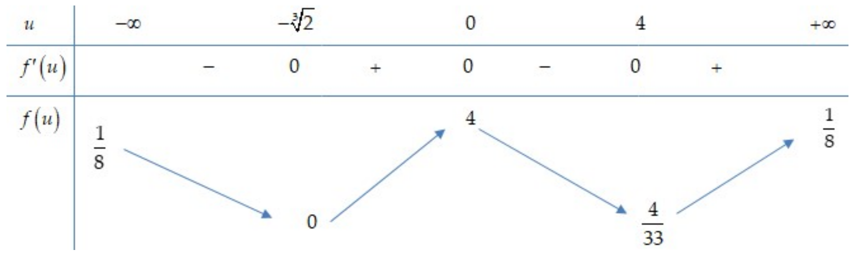
Nếu $y=0$ $(2)\Rightarrow x=7^{\frac{t}{3}}$ thay vào $(1)$ ta được $2.7^{\frac{2t}{3}}=3^t\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}}2$ do đó $z=10^{\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}}2}$.

Nếu $y\neq 0$

Từ $(1)\&(2)$ suy ra $\begin{cases}\left(2x^2+y^2\right)^3=27^t\\ \left(x^3+2y^3\right)^2=49^t\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\left(x^3+2y^3\right)^2}{\left(2x^2+y^2\right)^3}=\left(\dfrac{49}{27}\right)^t\Leftrightarrow\dfrac{\left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+2\right)^2}{\left(2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1^2\right)^3}=\left(\dfrac{49}{27}\right)^t,(*)$.

Đặt $\dfrac{x}{y}=u,u\neq-\sqrt[3]{2}$. Xét $f(u)=\dfrac{\left(u^3+2\right)^2}{\left(2u^2+1\right)^3}\Rightarrow f'(u)=\dfrac{6u\left(u^3+2\right)(u-4)}{\left(2u^2+1\right)^4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=-\sqrt[3]{2}\\u=4\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên




Nhận xét với mỗi giá trị $u$ tương ứng với duy nhất 1 cặp $(x,y)$ thỏa mãn bài toán do đó

Yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{8}\leq\left(\dfrac{49}{27}\right)^t<4\\ 0<\left(\dfrac{49}{27}\right)^t<\dfrac{4}{33}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{1}{8}\right)}\leq z<10^{\log_{\frac{49}{27}}4}\\ 0<z<10^{\log_{\frac{49}{27}}\left(\frac{4}{33}\right)}\end{array}\right.$.

Vì $z$ là số nguyên nên có $211$ giá trị thỏa mãn.

**Câu 34: Chọn C**

Ta có: bất phương trình $\left(2^{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-m\right)<0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x+2}-\sqrt{2}>0\\2^x-m<0\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x+2}-\sqrt{2}<0\\2^x-m>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x+2}>\sqrt{2}\\2^x<m\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x+2}<\sqrt{2}\\2^x>m\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2>\dfrac{1}{2}\\x<\log_2 m\end{cases}\\ \begin{cases}x+2<\dfrac{1}{2}\\x>\log_2 m\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\x<\log_2 m\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\dfrac{3}{2}\\x>\log_2 m\end{cases}\ (*)\end{array}\right.\Leftrightarrow-\dfrac{3}{2}<x<\log_2 m.$$

vô nghiệm).

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên

$\Leftrightarrow\log_2 m\leq5\Leftrightarrow m\leq2^5\Leftrightarrow m\leq32$

Mà $m$ nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;....32\}$.

Vậy có 32 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 35: Chọn D**

Điều kiện: $x^2-4x+\log_2 m>0$

$m.2^{x^2-4x-1}+m^2.2^{2x^2-8x-1}=7\log_2\left(x^2-4x+\log_2 m\right)+3$

$\Leftrightarrow2^{x^2-4x+\log_2 m}+4^{x^2-4x+\log_2 m}=14\log_2\left(x^2-4x+\log_2 m\right)+6$

Đặt $x^2-4x+\log_2 m=t,(t>0)$. Phương trình trở thành $2^t+4^t=14\log_2 t+6\,(*)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+4^t-14\log_2 t-6$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $f'(t)=2^t\ln 2+4^t\ln 4-\dfrac{14}{t\ln 2}$

$f''(t)=2^t\ln^2 2+4^t\ln^2 4+\dfrac{14}{t^2\ln 2}>0,\forall t\in(0;+\infty)$

Suy ra hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó phương trình $f(t)=0$ hay phương trình $(*)$ có nhiều nhất 2 nghiệm

Ta thấy $t=1,t=2$ thỏa mãn $(*)$. Do đó phương trình $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow x^2-4x+\log_2 m=1\Leftrightarrow x^2-4x-1+\log_2 m=0\ (1)$

$t=1\Rightarrow x^2-4x+\log_2 m=2\Leftrightarrow x^2-4x-2+\log_2 m=0\ (2)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hoặc có nghiệm

$(1)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 4-(\log_2 m-1)\ge 0\Leftrightarrow \log_2 m\le 5\Leftrightarrow m\le 32$.

$(2)$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 4-(\log_2 m-2)\ge 0\Leftrightarrow \log_2 m\le 6\Leftrightarrow m\le 64$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\le 64$. kết hợp $m$ nguyên dương. Vậy có 64 số

**Câu 36: Chọn D**

Ta có $a=\dfrac{1}{9^x-3}+\dfrac{1}{3^x-9}-x-|x-4|$.

Xét hàm số $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{9^x-3}+\dfrac{1}{3^x-9}-x-|x-4|\\ g(x)=a\end{cases}$.

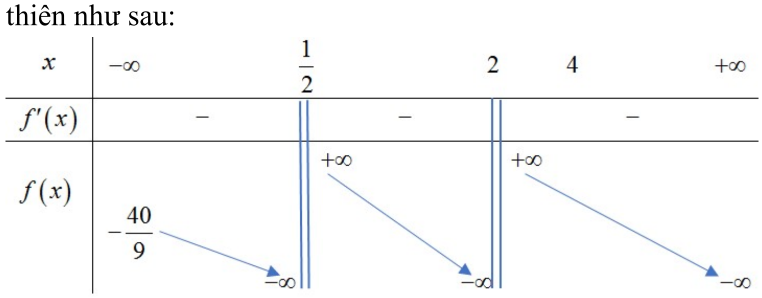
Nếu $x\ge 4$ thì $f(x)=\dfrac{1}{9^x-3}+\dfrac{1}{3^x-9}-x-x+4=\dfrac{1}{9^x-3}+\dfrac{1}{3^x-9}-2x+4$.

Suy ra $f'(x)=\dfrac{-9^x\ln 9}{(9^x-3)^2}-\dfrac{3^x\ln 3}{(3^x-9)^2}-2<0$, $\forall x>4$.

Nếu $x<4$ thì $f(x)=\dfrac{1}{9^x-3}+\dfrac{1}{3^x-9}-x+x-4=\dfrac{1}{9^x-3}+\dfrac{1}{3^x-9}-4$.

Suy ra $f'(x)=\dfrac{-9^x\ln 9}{(9^x-3)^2}-\dfrac{3^x\ln 3}{(3^x-9)^2}<0,\forall x<4,x\ne\dfrac{1}{2},x\ne 2$.

Ta có bảng biến thiên như sau:




Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt khi $a\ge\dfrac{-40}{9}$.

Do $\begin{cases}a<0\\a\in\mathbb{Z}\end{cases}$ nên $a\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

**Câu 37: Chọn B**

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t = x + \sqrt{1-x^2}$ ta có $t^2 = x^2 + 1 - x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-1}{2}$.

Xét $t(x) = x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1;1]$; ta có $t'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Và $t(-1) = -1$, $t(1) = 1$, $t\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$. Suy ra $t \in \left[-1;\sqrt{2}\right]$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $\mathrm{e}^m + \mathrm{e}^{3m} = 2t\left(1 + \dfrac{t^2-1}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^m + \mathrm{e}^{3m} = t^3 + t$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, $\forall t \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

Từ $(*)$, ta có $f\left(\mathrm{e}^m\right) = f(t) \Leftrightarrow \mathrm{e}^m = t \Leftrightarrow m = \ln t \Rightarrow m \in \left(-\infty;\ln\sqrt{2}\right)$. Hay $m \in \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.

**Câu 38: Chọn A**

Điều kiện: $x \ne 0$. Phương trình $3.|x|^{\log_2 3} - 3^{\left(\frac{1}{\ln 2}|x|+m\right)} - \dfrac{1}{\ln 2}|x| + 1 = -\log_2|x| + m$

$\Leftrightarrow 3^{\log_2|x|+1} + (\log_2|x|+1) = 3^{\frac{1}{\ln 2}|x|+m} + \left(\dfrac{1}{\ln 2}|x| + m\right)$. Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$

Ta có: $f'(t) = 3^t.\ln 3 + 1 > 0, \forall t$

Suy ra phương trình $\Leftrightarrow \log_2|x| + 1 = \dfrac{1}{\ln 2}|x| + m \Leftrightarrow \log_2|x| - \dfrac{1}{\ln 2}|x| = m - 1$

Đặt $g(x) = \log_2|x| - \dfrac{1}{\ln 2}|x|, \forall x \ne 0$; $g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x.\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 2} & khi\, x > 0 \\ \dfrac{1}{x.\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 2} & khi\, x < 0 \end{cases}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên cho hàm $y = g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | | | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $-\dfrac{1}{ln2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\dfrac{1}{ln2}$ | $\searrow$ | |

Từ bảng biến thiên phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m - 1 \le -\dfrac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow m \le 1 - \dfrac{1}{\ln 2}$

mà $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2021;2021] \Rightarrow m \in [-2021;-1]$

Vậy có tất cả $2021$ giá trị $m$ thỏa mãn điều kiện bài.

**Câu 39: Chọn B**

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ m+\log_2 x \ge 0 \end{cases}$.

Ta có $\log_2^2 x-\log_{\sqrt{2}} x=m-\sqrt{m+\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x=m-\sqrt{m+\log_2 x}$

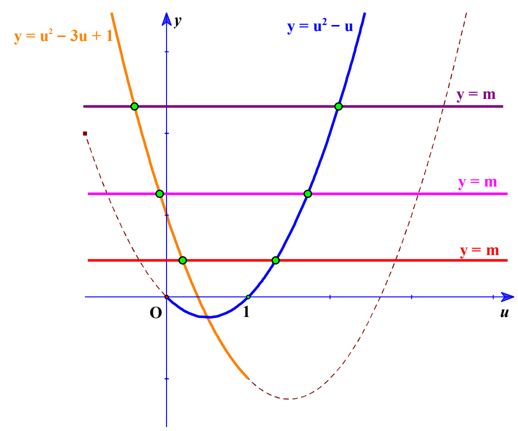
$\Leftrightarrow \log_2^2 x-\log_2 x=m+\log_2 x-\sqrt{m+\log_2 x}$.

Đặt $u=\log_2 x$ và $v=\sqrt{m+\log_2 x}$. Khi đó

Phương trình $\Leftrightarrow u^2-u=v^2-v \Leftrightarrow \left(u^2-v^2\right)-\left(u-v\right)=0 \Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(u+v+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=0 \\ u+v=1 \end{array}\right.$.

Xét $u=v \Leftrightarrow \sqrt{m+\log_2 x}=\log_2 x \Leftrightarrow \sqrt{m+u}=u \Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 0 \\ u^2-u=m \end{cases}$.

Xét $u+v=1 \Leftrightarrow \sqrt{m+\log_2 x}=1-\log_2 x \Leftrightarrow \sqrt{m+u}=1-u \Leftrightarrow \begin{cases} u\le 1 \\ u^2-3u+1=m \end{cases}$.




Dựa vào đồ thị, ta có $m>0$ thì phương trình đã cho có đúng $2$ nghiệm.

Lại có $m$ nguyên và $m\in\left[-2020;2020\right] \Rightarrow m\in\left\{1;2;3;...;2020\right\}$.

Vậy có $2020$ giá trị nguyên của $m$ thỏa đề.

**Câu 40: Chọn B**

Điều kiện xác định: $x>0$.

Đặt $t=\log x$, với $x\in\left[\frac{1}{100};100\right] \Rightarrow t\in\left[-2;2\right]$.

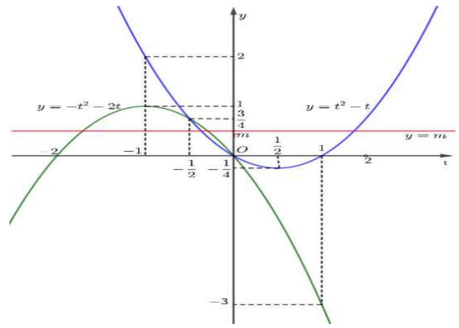
Phương trình đã cho có dạng: $t^4+t^3-2t^2-3mt-m^2=0$ $(*)$, $t\in\left[-2;2\right]$.

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x\in\left[\frac{1}{100};100\right]$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt $t$ thỏa mãn $t\in\left[-2;2\right]$.

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc 2 theo ẩn $m$.

Ta có: $m^2+3mt-t^4-t^3+2t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=-t^2-2t & (2) \\ m=t^2-t & (3) \end{array}\right.$, $t\in\left[-2;2\right]$.

Xét đồ thị của hai hàm số $f(t)=-t^2-2t$ và $g(t)=t^2-t$. Giao điểm của hai đồ thị $f(t)$ và $g(t)$ là $(0;0)$ và $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.




Yêu cầu bài toán tương đương với mỗi phương trình $(2)$ và $(3)$ có $2$ nghiệm phân biệt $t\in[-2;2]$ và $4$ nghiệm này đôi một khác nhau. Khi đó, đường thẳng $y=m$ cắt cả hai đồ thị $f(t)$ và $g(t)$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $t$ thuộc $[-2;2]$. Dựa vào đồ thị ta có: $\left[\begin{array}{l}0<m<\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}<m<1\end{array}\right.$

Suy ra $a=0;\ b=\frac{3}{4};\ c=1\Rightarrow T=a+b+c=\frac{7}{4}$. Vậy $T\in\left(\frac{3}{2};2\right)$.

**Câu 41: Chọn A**

Điều kiện $\begin{cases}m^m>0\\ mx+\log m^m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ x+\log m>0\end{cases}$. Đặt $t=10^x, t>0\rightarrow x=\log t$.

Khi đó phương trình đã cho viết lại $\log\left(mx+\log m^m\right)=10^x\Leftrightarrow\log\left(mx+m\log m\right)=t\Leftrightarrow m\log t+m\log m=10^t$

$\Leftrightarrow\log t+\log m=10^{t-\log m}\Leftrightarrow10^{\log t}+\log t=10^{t-\log m}+\left(t-\log m\right)\ (*)$.

Xét hàm số $g(t)=10^t+t$ có $g'(t)=10^t\ln10+1>0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ $(*)$ ta được $\log t=t-\log m\Leftrightarrow x=10^x-\log m\Leftrightarrow\log m=10^x-x$.

Xét hàm số $h(x)=10^x-x$, $h'(x)=10^x\ln10-1$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x=-\log(\ln10)$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\log(\ln 10)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm khi $\log m>g\left(-\log(\ln10)\right)\Rightarrow m>10^{g(-\log(\ln10))}\approx6,3$.

Vì $0<m<20$ và $m$ nguyên nên $m\in\{7;8;...;19\}$, có $13$ giá trị thỏa mãn.

**Câu 42: Chọn A**

Ta có $4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3}\log_3\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-m|+2}\log_3\left(2|x-m|+2\right)$.

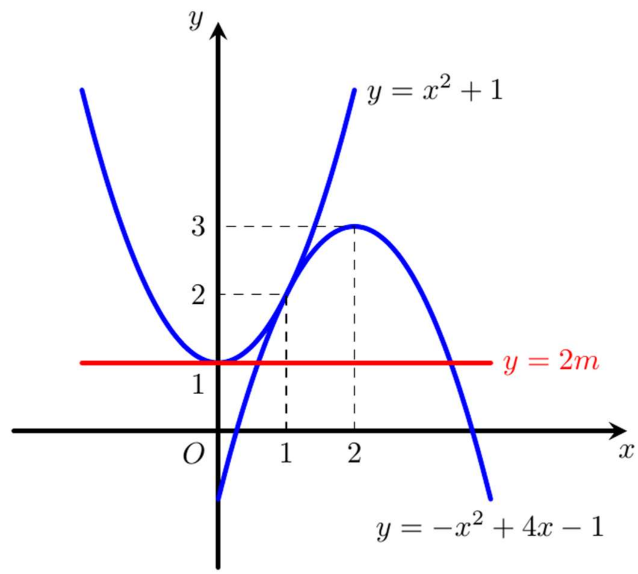
Xét hàm số $f(t)=2^t\log_3 t$ với $t\ge 2$.

$f'(x)=2^t.\dfrac{1}{t\ln 3}+2^t\ln 2.\log_3 t>0,\ \forall t\ge 2$. Hàm $f(t)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Mà $f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-m|+2\right)$ suy ra $x^2-2x+3=2|x-m|+2$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=2(x-m)\\ x^2-2x+1=2(m-x)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m=-x^2+4x-1\\ 2m=x^2+1\end{array}\right.$.

Để phương trình ban đầu có $3$ nghiệm phân biệt thì đồ thị hàm số $y=2m$ giao với đồ thị hàm số $y=x^2+1$ và $y=-x^2+4x-1$ tại $3$ điểm.




Dựa vào đồ thị ta thấy với $2m\in\{1;2;3\}$ thì đồ thị hàm số $y=2m$ giao với đồ thị hàm số $y=x^2+1$ và $y=-x^2+4x-1$ tại $3$ điểm.

Vậy $m\in\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$ hay có $3$ giá trị thực của $m$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 43: Chọn D**

Ta có: $\dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}\right)=1+2xy\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{x+y}{2xy}\right)=1+2xy$

$\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{10}-2xy+\log\left(\dfrac{x+y}{10}.\dfrac{10}{2xy}\right)-\log 10=0\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{10}+\log\left(\dfrac{x+y}{10}\right)=2xy+\log(2xy)\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\log t$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\ln 10}>0\ \forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến với $t>0$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f\left(\dfrac{x+y}{10}\right)=f(2xy)\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{10}=2xy\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=20$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

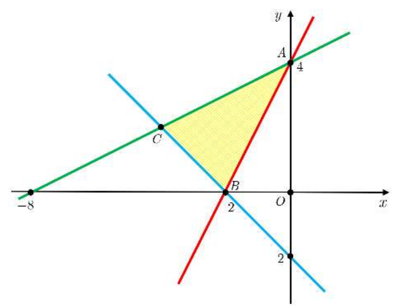
$\left(\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)\ge\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=400\Leftrightarrow\left(\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{5}{4}\ge 400\Leftrightarrow\frac{20}{x^2}+\frac{5}{y^2}\ge 1600$.

Vậy $\min\left(\frac{20}{x^2}+\frac{5}{y^2}\right)=1600\Leftrightarrow\begin{cases}x=4y\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{1}{16}\end{cases}$.

Khi $\frac{20}{x^2}+\frac{5}{y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $xy=\frac{1}{64}$.

**Câu 44: Chọn B**

Miền giá trị của $a,b$ thỏa mãn $\begin{cases}a-2b+8\ge 0\\ a+b+2\ge 0\\ 2a-b+4\le 0\end{cases}$ là $\Delta ABC$ như hình vẽ




Gọi $M(a;b)$ là điểm nằm trong và trên các cạnh của $\Delta ABC$, ta có $OM^2=a^2+b^2$.

$OM^2$ nhỏ nhất khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $O$ lên $AB$, hay $OM\perp AB$

Khi đó $OM^2=\frac{OA^2.OB^2}{OA^2+OB^2}=\frac{16}{5}$ suy ra $M=\frac{16}{5}$.

Điều kiện xác định $\begin{cases}x^2-2x-2+|1-m|>0\\ x^2-2x-3>0\end{cases}$

Đặt $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2+|1-m|\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)=t$, ta có hệ

$$\begin{cases}x^2-2x-2+|1-m|=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t & (1)\\ x^2-2x-3=\left(2+\sqrt{3}\right)^t & (2)\end{cases}$$

Lấy $(1)$ trừ $(2)$ ta được $|1-m|=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$ $(3)$

Số nghiệm của phương trình $(3)$ là số giao điểm giữa đường thẳng $y=|1-m|$ và đồ thị hàm số $y=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$

Ta có $m\in\left[0;\frac{16}{5}\right]\Rightarrow 0\le m\le\frac{16}{5}\Leftrightarrow 1\ge 1-m\ge-\frac{11}{5}\Rightarrow 0\le|1-m|\le\frac{11}{5}$

Xét $f(t)=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$

$f'(t)=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t\ln\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)^t\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t\approx -0,7495$

Bảng biến thiên

| $t$ | $-\infty$ | | $-0,795$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-1,0096$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy đường thẳng $y=\left|1-m\right|$ luôn cắt đồ thị hàm số tại nhất một điểm $y=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$ có hoành độ $t_1$ hay phương trình $(3)$ luôn có nghiệm $t_1$

Thay vào $(2)$ ta được: $x^2-2x-3-\left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1}=0$ , theo hệ thức Viet ta có: $x_1+x_2=2$.

**Câu 45: Chọn C**

Điều kiện $\begin{cases}3^x\ge -2m\\ 3^x\ge m^2\end{cases}$.

Đặt $\log_3\left(3^x+2m\right)=\log_5\left(3^x-m^2\right)=t \Leftrightarrow \begin{cases}3^t=3^x+2m\\ 5^t=3^x-m^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^t-2m=3^x\\ 5^t+m^2=3^x\end{cases}$.

$\Rightarrow 2m+m^2+1=3^t-5^t+1$. Xét hàm số $f(t)=3^t-5^t+1$.

$f'(t)=3^t\ln 3-5^t\ln 5=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t=\frac{\ln 5}{\ln 3} \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{\ln 5}{\ln 3}\right)$. Khi đó $f\left(\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{\ln 5}{\ln 3}\right)\right)\approx 1,1396.$

Mà $m^2+2m+1\ge 0$ nên để phương trình có nghiệm thì từ bảng biến thiên của $f(t)$ ta phải có $0\le m^2+2m+1\le f\left(\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{\ln 5}{\ln 3}\right)\right)$ do $m\in\mathbb{Z}$ nên:

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2+2m=0\\ m^2+2m=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-2\\ m=-1\end{array}\right.$. Vậy tổng các giá trị nguyên của m là $-3$.

**Câu 46: Chọn D**

Điều kiện: $x+m>0$.

Do $e^{3x}>0$ nên ta có phương trình $\Leftrightarrow \left[\frac{\ln(x+m)}{e^x}\right]^3+\left(\frac{m}{e^x}\right)^3+3\frac{m}{e^x}.\frac{\ln(x+m)}{e^x}=1$.

Đặt $a=\frac{\ln(x+m)}{e^x}$ và $b=\frac{m}{e^x}$ thì phương trình thành $a^3+b^3+3ab-1=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+3ab-1=0 \Leftrightarrow \left[(a+b)^3-1^3\right]-3ab(a+b-1)=0$.

$\Leftrightarrow (a+b-1)\left[(a+b)^2+a+b+1\right]-3ab(a+b-1)=0$.

$\Leftrightarrow (a+b-1)\left[a^2+b^2+a+b+1-ab\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}a+b=1 & (1)\\ a^2+(1-b)a+b^2+b+1=0 & (2)\end{array}\right.$

**Trường hợp 1:** $a+b=1 \Leftrightarrow \ln(x+m)+m=e^x$. Đặt $u=\ln(x+m)\Rightarrow x+m=e^u$

Ta có có hệ phương trình $\begin{cases} u+m=e^x \\ x+m=e^u \end{cases} \Rightarrow u-x=e^x-e^u \Leftrightarrow u+e^u=x+e^x \Leftrightarrow f(u)=f(x)\ (*)$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=e^t+t, \forall t\in\mathbb{R}$ là hàm đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Do đó từ $(*) \Leftrightarrow u=x \Leftrightarrow \ln(x+m)=x \Leftrightarrow x+m=e^x \Leftrightarrow m=\underbrace{e^x-x}_{g(x)}$.

Ta có: $g'(x)=e^x-1$, cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Lập bảng biến thiên ta có:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge 1$.

**Trường hợp 2:** với phương trình $(2)$ xét $\Delta=(1-b)^2-4(b^2+b+1)=-3b^2-6b-3=-3(b+1)^2$

Với $b\ne -1 \Rightarrow \Delta<0$ nên phương trình $(2)$ vô nghiệm.

Với $b=-1 \Rightarrow \Delta=0$ nên phương trình $(2)$ thành $a^2+2a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$.

Khi đó ta có $\ln(x+m)=m=-e^x \Rightarrow \begin{cases} x+m=e^m \\ m=-e^x \end{cases} \Rightarrow x-e^x=e^m\ (3)$.

Nhận xét: $e^x-x\ge 1 \Rightarrow x-e^x\le -1<0$ nên phương trình $(3)$ vô nghiệm.

Tóm lại, từ hai trường hợp, ta nhận $m\ge 1$.

Lại có $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-2021;2021] \end{cases} \Rightarrow m\in\{1;2;...;2021\}$ nên có 2021 giá trị thỏa mãn.

**Câu 47: Chọn A**

Xét phương trình $2^{x^2+y^2}+\log_3(x^2+y^2+5)-18=0$.

Đặt $t=x^2+y^2$, $(t\ge 0)$. Phương trình trở thành: $2^t+\log_3(t+5)-18=0$.

Xét hàm $f(t)=2^t+\log_3(t+5)-18$ với $t\ge 0$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2+\dfrac{1}{(t+5)\ln 3}>0, \forall t>0$. Dễ có $f(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$, suy ra hàm $f(t)$ đồng biến $[0;+\infty)$.

Mặt khác $f(4)=0$ nên phương trình $f(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t=4$. Khi đó ta được $x^2+y^2=4$.

Ta có $\log_{|x|+y^2+2}(6+y^2-2|y|)=1 \Leftrightarrow 6+y^2-2|y|=|x|+y^2+2 \Leftrightarrow |x|=4-2|y|$.

Thay vào ta được: $(4-2|y|)^2+y^2=4 \Leftrightarrow 5y^2-16|y|+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |y|=2 \\ |y|=\dfrac{6}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=2 \\ y=-\dfrac{6}{5} \\ y=\dfrac{6}{5} \end{array}\right.$.

Với $y=-2$ thì $x=0$. Với $y=2$ thì $x=0$.

Với $y=-\frac{6}{5}$ thì $|x|=\frac{8}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{8}{5}\\x=\frac{8}{5}\end{array}\right.$. Với $y=\frac{6}{5}$ thì $|x|=\frac{8}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{8}{5}\\x=\frac{8}{5}\end{array}\right.$.

Vậy có 6 cặp số thực $(x;\ y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 48: Chọn B**

Vì $2^{2|y|-x^2}>0,\forall x;y$ nên với $y\neq 0$ thì $\log_{2|y|+1}x>0\Leftrightarrow x>1$.

Do đó điều kiện của bài toán là $\begin{cases}x>1\\y\neq 0\end{cases}$.

Khi đó $2^{2|y|-x^2}=\log_{2|y|+1}x\Leftrightarrow 2.2^{2|y|-x^2}=2\log_{2|y|+1}x\Leftrightarrow 2^{2|y|+1-x^2}=\log_{2|y|+1}x^2$

$\Leftrightarrow\frac{2^{2|y|+1}}{2^{x^2}}=\frac{\log_2 x^2}{\log_2(2|y|+1)}\Leftrightarrow 2^{2|y|+1}\log_2(2|y|+1)=2^{x^2}\log_2 x^2$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2^t.\log_2 t$ trên $(1;+\infty)$, ta có $f'(t)=2^t.\ln 2.\log_2 t+\frac{2^t}{t\ln 2}>0,\forall t>1$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

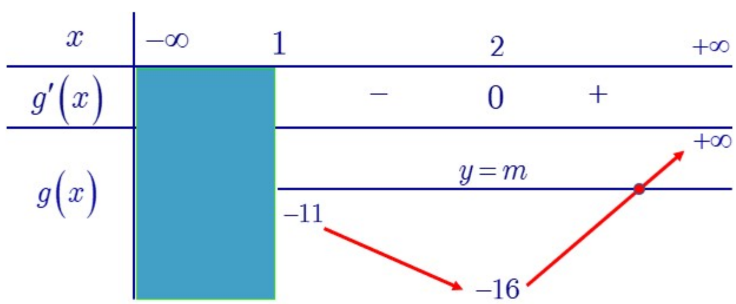
Khi đó, $f(2|y|+1)=f(x^2)\Leftrightarrow 2|y|+1=x^2\Leftrightarrow 4y^2=(x^2-1)^2$.

Ta có $4y^2-10x^2-mx-1=0\Leftrightarrow(x^2-1)^2-10x^2-mx-1=0$

$\Leftrightarrow x^4-12x^2-mx=0\Leftrightarrow x^3-12x=m$.

Xét hàm $g(x)=x^3-12x\Rightarrow g'(x)=3x^2-12$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên:




Từ bảng biến thiên của hàm $g(x)$ suy ra phương trình $4y^2-10x^2-mx-1=0$ có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi $m\in[-11;40]$, do đó có tất cả 52 giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 49: Chọn B**

Ta có: $\log_2\frac{y}{2x^2}+y^2=x^4-1\Leftrightarrow\log_2 y+y^2=\log_2(x^2)+x^4\quad(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 2}+2t>0;\ \forall t\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $(1)\Leftrightarrow y=x^2$.

Thay $y=x^2$ vào phương trình ta được:

$m\left(2^{y-2x}+2^{-y+4x}\right)=m^2+2^{2x}\Leftrightarrow m\left(2^{x^2-2x}+2^{-x^2+4x}\right)=m^2+2^{x^2-2x}.2^{-x^2+4x}$

$$\Leftrightarrow \left(m-2^{x^2-2x}\right).\left(m-2^{-x^2+4x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=2^{x^2-2x} \Leftrightarrow x^2-2x-\log_2 m=0 & (2) \\ m=2^{-x^2+4x} \Leftrightarrow -x^2+4x-\log_2 m=0 & (3) \end{array}\right.$$

Để có nhiều hơn 2 cặp $(x,y)$ thỏa mãn phương trình đã cho điều kiện là hệ $(2)-(3)$ có ít nhất 3 nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0,\ m\neq 1 \\ \Delta_1'=1+\log_2 m\geq 0 \\ \Delta_2'=4-\log_2 m\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\leq m\leq 16 \\ m\neq 1 \end{cases}$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=2;3;....;16 \Rightarrow$ Có tất cả 15 giá trị của $m$.

**Câu 50: Chọn B**

Điều kiện $x>0$.

Ta có $2\log_3\dfrac{6x}{\sqrt{2x+1}-1}+2\left(\sqrt{2x+1}-|y|\right)-3^{2|y|}+2x=0$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(3\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\right)+2\sqrt{2x+1}-2|y|-3^{2|y|}+2x=0$

$\Leftrightarrow 2+2\log_3\left(\sqrt{2x+1}+1\right)+2\sqrt{2x+1}-2|y|-3^{2|y|}+2x=0$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2+2x+2+2\sqrt{2x+1}=2|y|+3^{2|y|}$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2=\log_3 3^{2|y|}+3^{2|y|}$

Xét hàm số $y=f(t)=\log_3 t+t \Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ $(1)\Leftrightarrow f\left(\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2\right)=f\left(3^{2|y|}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2=3^{2|y|}$.

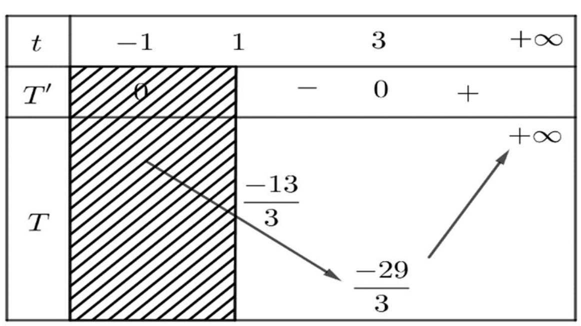
Do đó $T=\dfrac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4)+2x+\dfrac{7}{3}-2.3^{2|y|}=\dfrac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4)+2x+\dfrac{7}{3}-2.\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2$.

Đặt $t=\sqrt{2x+1}>1\Rightarrow 2x=t^2-1$.

Suy ra $T=\dfrac{1}{3}t\left(t^2-1+4\right)+t^2-1+\dfrac{7}{3}-2(t+1)^2=\dfrac{1}{3}t^3-t^2-3t-\dfrac{2}{3}$.

Có $T'=t^2-2t-3\Rightarrow T'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên suy ra $\min T=-\dfrac{29}{3}\approx -9,67\in(-11;-9,5)$.

# IV. ĐỀ VẬN DỤNG CAO MŨ VÀ LOGARIT SỐ 04

## ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Có bao nhiêu số nguyên dương $y$ sao cho ứng với mỗi $y$ có không quá 5 số nguyên $x$ thỏa mãn $\left(2^{x+2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(5^{x}-y\right)<0$?

**A.** $125$. **B.** $625$. **C.** $25$. **D.** $4$.

**Câu 2:** Số giá trị nguyên dương của $m$ để bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^{x}-m\right)<0$ có tập nghiệm chứa không quá $6$ số nguyên là

**A.** $32$. **B.** $31$. **C.** $243$. **D.** $244$.

**Câu 3:** Cho hàm số $f(x)=e^{x}-e^{-x}+2020x$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m$ sao cho ứng với mỗi $m$ có đúng 10 số nguyên dương $x$ thỏa mãn bất phương trình $f(mx+1)+f(2x-2021)<0$?

**A.** $19$. **B.** $2019$. **C.** $18$. **D.** $2018$.

**Câu 4:** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2020x-2020\le 0\\ x^2-(m+2)x-m^2+3\ge 0\end{cases}$ ($m$ là tham số). Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm. Tính tổng các phần tử của $S$.

**A.** $10$. **B.** $15$. **C.** $6$. **D.** $3$.

**Câu 5:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình sau có đúng 5 nghiệm nguyên: $\log m-\log_2\left|x^2-6x+5\right|\ge 0$?

**A.** $210$. **B.** $3635$. **C.** $3636$. **D.** $20$.

**Câu 6:** Cho hai số thực $x,y$ thỏa mãn $\log_{3x+y}\left(x^2+2y\right)\le 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=3x+y+2$ tương ứng bằng:

**A.** $11$. **B.** $13$. **C.** $6+4\sqrt{2}$. **D.** $9\sqrt{3}$.

**Câu 7:** Có bao nhiêu số nguyên $a\in[-2021;2021]$, để bất phương trình $\log_{a+x}\left(x(a-x)\right)<\log_{a+x}x$ có nghiệm thực $x$?

**A.** $2022$. **B.** $2021$. **C.** $2020$. **D.** $2019$.

**Câu 8:** Cho bất phương trình $\frac{1}{2}+\log_5\sqrt{x^2+1}\ge\log_5\sqrt{mx^2+4x+m}$. Tập tất cả các giá trị của $m$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi số thực $x$ có dạng $(a;b]$. Tích $a.b$ bằng

**A.** $4$. **B.** $0$. **C.** $8$. **D.** $6$.

**Câu 9:** Cho $x,y$ là các số thực thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+6y-7)\ge 1$. Gọi $M=x^2+y^2-20x+8y$. Hỏi $M$ có thể nhận tối đa bao nhiêu giá trị nguyên?

**A.** $86$. **B.** $5$. **C.** $85$. **D.** $25$.

**Câu 10:** Gọi $S$ là tập chứa tất cả các giá trị thức của tham số $m$ để tồn tại duy nhất bộ ba số thực $(x;y;z)$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^2\left(2x^2+y^2+z^2\right)-2m\log_2(4x+2y+2z)\le 0$. Tích tất cả các phần tử của tập $S$ tương ứng bằng:

**A.** $0$. **B.** $-16$. **C.** $6$. **D.** $12$.

**Câu 11:** Cho hai số thực $x, y$ thỏa mãn đồng thời $x^2+y^2 \geq 16$, $\log_{x^2+2y^2+1}\left(y^2+8x+1\right) \geq 1$. Biết rằng tồn tại ít nhất một cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $mx+3y+3m-12=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn bài toán?

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $11$. **D.** $10$.

**Câu 12:** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right) \geq \log_3(x+y)$?

**A.** $55$. **B.** $28$. **C.** $29$. **D.** $56$.

**Câu 13:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ sao cho với mỗi giá trị $m$, bất phương trình $\log_2\sqrt{x^2-2x+m}+3\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)} \leq 10$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in [0;3]$?

**A.** 12 **B.** 13 **C.** 252 **D.** 253

**Câu 14:** Cho các số thực $a, b$ thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+20}(6a+8b-4)=1$ và các số thực $c, d$ thỏa mãn $\ln\left(2c+\sqrt{1+4c^2}\right)+\ln\left(d+\sqrt{1+d^2}\right) \leq 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(a-2c)^2+(b-d)^2$ là

**A.** $\dfrac{51-14\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2\sqrt{5}-1$. **C.** $\dfrac{7}{\sqrt{2}}-1$. **D.** $21-4\sqrt{5}$.

**Câu 15:** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi số nguyên $x$ có đúng 5 số nguyên $y$ thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|} \leq \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right)$?

**A.** $10$. **B.** $12$. **C.** $9$. **D.** $11$.

**Câu 16:** Có bao nhiêu cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $\log_2(x+2y) \leq \log_3(2x+4y+1)$ và $\log_3(x+y) \geq y-2$.

**A.** $7$. **B.** $6$. **C.** $10$. **D.** $8$.

**Câu 17:** Có bao nhiêu số nguyên $a$, $(2 \leq a \leq 2021)$ để có ít nhất 5 số nguyên $5x$ thỏa mãn

$$a^{-x}+\frac{1}{2} \leq 2^{-x}+\frac{1}{a}$$

**A.** $1892$. **B.** $125$. **C.** $127$. **D.** $1893$.

**Câu 18:** Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)+\dfrac{4^x-1}{2^x}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)+f(m+1) \geq 0$ có nghiệm.

**A.** $m \leq \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \leq \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $m \leq \dfrac{1}{2}$.

**Câu 19:** Có bao nhiêu số nguyên dương $y$ sao cho tồn tại số thực $x \in (1;5)$ thỏa mãn:

$$4(x-1)e^x = y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$$

**A.** $14$. **B.** $11$. **C.** $12$. **D.** $10$.

**Câu 20:** Cho các số thực $x, y \geq -1$ thỏa mãn $x.3^{2x+y}=(y+1).3^{2y-x}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy-x^2$ bằng

**A.** $-\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1:** **Chọn B**

Ta có $\left(2^{x+2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(5^x-y\right)<0 \Leftrightarrow \left(2^{x+2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^x-5^{\log_5 y}\right)<0 \Leftrightarrow \left(x+2-\frac{1}{3}\right)\left(x-\log_5 y\right)<0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{3}<x<\log_5 y$.

Khi đó để với mỗi $y$ có không quá $5$ số nguyên $x$ thì $\log_5 y\le 4 \Leftrightarrow y\le 625$.

Vậy có $625$ số nguyên dương $y$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 2:** **Chọn C**

**Trường hợp 1:** $\begin{cases}\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)>0\\ \left(3^x-m\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^{x+2}>3^{\frac{1}{2}}\\ 3^x<m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\frac{3}{2}\\ x<\log_3 m\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<\log_3 m$.

Do yêu cầu bài toán bất phương trình có 6 nghiệm nguyên nên $\begin{cases}\log_3 m\le 5\\ m>0\end{cases} \Rightarrow m\le 243$.

**Trường hợp 2:** $\begin{cases}\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)<0\\ \left(3^x-m\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^{x+2}<3^{\frac{1}{2}}\\ 3^x>m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-\frac{3}{2}\\ x>\log_3 m\end{cases} \Leftrightarrow \log_3 m<x<-\frac{3}{2}$.

Do yêu cầu bài toán $m$ nguyên dương nên không tồn tại giá trị $m$ thoản mãn TH2.

Vậy có tất cả $243$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 3:** **Chọn C**

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $f(-x)=e^{-x}-e^x-2020x=-\left(e^x-e^{-x}+2020x\right)=-f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$

$f(mx+1)+f(2x-2021)<0 \Leftrightarrow f(mx+1)<-f(2x-2021)=f(2021-2x)$ $(1)$.

Mặt khác: $f'(x)=e^x+e^{-x}+2020>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow mx+1<2021-2x \Leftrightarrow x<\frac{2020}{m+2}$

Để có đúng 10 số nguyên $x$ thỏa mãn phương trình thì $10<\frac{2020}{m+2}\le 11$

$\Leftrightarrow \frac{2020}{11}\le m+2<202 \Leftrightarrow \frac{1998}{11}\le m<200$

Mà $m$ nguyên dương nên $m\in\{182\,;183\,;...\,;199\}$ nên có 18 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 4:** **Chọn D**

Điều kiện xác định: $x\ge -1$.

Ta có: $3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2020x-2020\le 0 \Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}}+2020x\le 3^{2+\sqrt{x+1}}+2020$

$\Leftrightarrow 3^{2x+\sqrt{x+1}}+1010\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le 3^{2+\sqrt{x+1}}+1010\left(2+\sqrt{x+1}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+1010t$ trên $\mathbb{R}$.

Dễ dàng nhận thấy $f'(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(t)=3^t+1010t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le f\left(2+\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x+\sqrt{x+1}}-3^{2+\sqrt{x+1}}+2020x-2020\le 0$ là $\left[-1;1\right]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $x^2-\left(m+2\right)x-m^2+3\ge 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;1\right]$. Gọi $g\left(x,m\right)=x^2-\left(m+2\right)x-m^2+3$.

**Trường hợp 1:** $\Delta=\left(m+2\right)^2+4m^2-12\le 0\Leftrightarrow 5m^2+4m-8\le 0\Leftrightarrow \dfrac{-2-2\sqrt{11}}{5}\le m\le \dfrac{-2+2\sqrt{11}}{5}$

Khi đó $g\left(x,m\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

**Trường hợp 2:** $\Delta=\left(m+2\right)^2+4m^2-12>0\left[\begin{array}{l} m>\dfrac{-2+2\sqrt{11}}{5} \\ m<\dfrac{-2-2\sqrt{11}}{5}\end{array}\right.$, khi đó $g\left(x,m\right)=0$ có hai nghiệm $x_1<x_2$.

Để $g\left(x,m\right)\ge 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;1\right]$ khi $\left[\begin{array}{l} x_1<x_2\le 1 \\ -1\le x_1<x_2\end{array}\right.$.

KN1: Xét $x_1<x_2\le 1$, tức là $\begin{cases} g\left(1,m\right)\ge 0 \\ \dfrac{m+2}{2}<1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -m^2-m+2\ge 0 \\ m<0\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\le m<0$.

KN2: Xét $-1\le x_1<x_2$, tức là $\begin{cases} g\left(-1,m\right)\ge 0 \\ \dfrac{m+2}{2}>-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -m^2+m+6\ge 0 \\ m>-4\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\le m\le 3$.

Từ các trường hợp và vậy ta có $m\in\left[-2;3\right]$ thì hệ bất phương trình trên có nghiệm.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên tập hợp $S=\left\{-2;-1;0;1;2;3\right\}$. Vậy tổng các phần tử trong tập hợp $S$ bằng $3$.

**Câu 5: Chọn C**

Điều kiện $\begin{cases} x\ne 1 \\ x\ne 5 \\ m>0\end{cases}$.

Ta có $\log m-\log_2\left|x^2-6x+5\right|\ge 0\Leftrightarrow \log_2\left|x^2-6x+5\right|\le \log m\Leftrightarrow\left|x^2-6x+5\right|\le 2^{\log m}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^2-6x+5,\ f'\left(x\right)=2x-6,\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=3, f\left(3\right)=-4$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | | | | | $-4$ | | | | | $+\infty$ |
| $\lvert f(x)\rvert$ | $+\infty$ | $12$ | $5$ | $0$ | $3$ | $4$ | $3$ | $0$ | $5$ | $12$ | $+\infty$ |

Để bất phương trình sau có đúng 5 nghiệm nguyên thì điều kiện cần tìm của $m$ là:

$5 \le 2^{\log m} < 12 \Leftrightarrow \log_2 5 \le \log m < \log_2 12 \Leftrightarrow 10^{\log_2 5} \le m < 10^{\log_2 12} \Leftrightarrow 209.8 \le m < 3845.5$.

Do $m$ nguyên suy ra $m \in \{210; 211; \dots; 3845\}$ nên có 3636 số thỏa mãn.

**Câu 6: Chọn A**

Điều kiện: $x^2 + 2y > 0$.

Với $0 < 3x + y < 1$ thì $T = 3x + y + 2 < 3$.

Với $3x + y > 1$. Ta có: $\log_{3x+y}\left(x^2 + 2y\right) \le 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y \le 3x + y \Leftrightarrow x^2 - 3x + y \le 0.$ $(*)$

Từ biểu thức $T = 3x + y + 2 \Rightarrow y = T - 3x - 2$, thay vào $(*)$, ta được:

$x^2 - 3x + (T - 3x - 2) \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + T - 2 \le 0.$ $(**)$

Để $(**)$ có nghiệm thì: $\Delta' = 9 - (T - 2) \ge 0 \Leftrightarrow T \le 11 \Rightarrow T_{max} = 11$.

Khi đó: $x^2 - 6x + 9 \le 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = T - 3x - 2 = 11 - 3.3 - 2 = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $T_{max} = 11$ đạt được khi $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

**Câu 7: Chọn B**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 0 < x < a \\ x > -a \\ x \ne 1 - a \end{cases}$. Nếu $a \le 0$ thì $D = \varnothing$.

Bây giờ ta chỉ xét trường hợp $a > 0$, khi đó $D = (0; a) \setminus \{1 - a\}$.

Ta có: $\log_{a+x}\left(x(a - x)\right) < \log_{a+x} x$

$\Leftrightarrow \log_{a+x} x + \log_{a+x}(a - x) < \log_{a+x} x \Leftrightarrow \log_{a+x}(a - x) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - x < 1 < a + x \\ a + x < 1 < a - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 - a \\ x > a - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < a - 1 \\ x < 1 - a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > |a - 1| \\ x < -|a - 1| \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định thì bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $|a - 1| < a$.

$$|a - 1| < a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 1 \\ a - 1 < a \end{cases} \\ \begin{cases} a < 1 \\ 1 - a < a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge 1 \\ \dfrac{1}{2} < a < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}.$$

Số số nguyên $a \in [-2021; 2021]$ và $a > \dfrac{1}{2}$ là: $2021$ số.

**Câu 8: Chọn D**

Điều kiện: $mx^2 + 4x + m > 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_5 5^{\frac{1}{2}} + \log_5 \sqrt{x^2 + 1} \ge \log_5 \sqrt{mx^2 + 4x + m}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}\sqrt{x^2 + 1} \ge \sqrt{mx^2 + 4x + m} \Leftrightarrow 5x^2 + 5 \ge mx^2 + 4x + m \Leftrightarrow (m - 5)x^2 + 4x + m - 5 \le 0$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi số thực $x \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0, \forall x \in \mathbb{R} \\ (m-5)x^2+4x+m-5 \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} (I)$

**Trường hợp 1:** $m=0$ hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x>0, \forall x \in \mathbb{R} \\ -5x^2+4x-5 \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

$\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn

**Trường hợp 2:** $m=5$ hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 5x^2+4x+5>0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

$\Rightarrow m=5$ không thỏa mãn

Trường hợp 3: $m \ne 0$ và $m \ne 5$

$$\text{Hệ } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta_1' < 0 \\ m-5<0 \\ \Delta_2' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 4-m^2<0 \\ m-5<0 \\ 4-(m-5)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 7 \\ m \le 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\le 3 \Rightarrow a.b=6$$

**Câu 9: Chọn C**

Điều kiện: $4x+6y-7>0$. Từ giả thiết ta có:

$\log_{x^2+y^2+2}(4x+6y-7) \ge 1 \Leftrightarrow x^2+y^2+2 \le 4x+6y-7 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 \le 4 \quad (1)$

$(1)$ là miền hình tròn $(C_1)$ có tâm $I_1(2;3)$ và bán kính $R_1=2$.

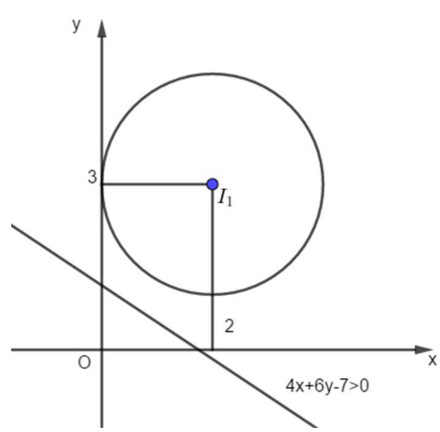
Ta lại có: $M=x^2+y^2-20x+8y \Leftrightarrow (x-10)^2+(y+4)^2=M+116 \ (2)$

**TH1:** Nếu $M+116<0$ thì $(2)$ vô nghiệm.

**TH2:** Nếu $M+116=0$ thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=-4 \end{cases}$ thay vào $(1)$ ta được $113 \le 4$.

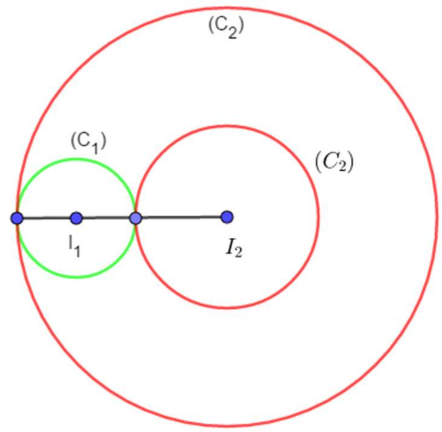
**TH3:** Nếu $M+116>0 \Leftrightarrow M>-116$ thì $(2)$ là đường tròn $(C_2)$ có tâm $I_2(10;-4)$ và bán kính $R_2=\sqrt{M+116}$.

Ta có: $I_1I_2=\sqrt{(10-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{113}>R_1$ nên điểm $I_2$ nằm ngoài hình tròn $(C_1)$.




Từ hình vẽ ta thấy nửa mặt phẳng $4x+6y-7>0$ chứa cả hai hình tròn.

Để tồn tại các số thực $x, y$ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hình tròn $(C_1)$ và $(C_2)$ phải cắt nhau như hình vẽ:




Khi đó: $I_1I_2 - R_1 \le R_2 \le I_1I_2 - R_1 \Leftrightarrow \sqrt{113} - 2 \le \sqrt{M + 116} \le \sqrt{113} + 2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{113} - 2\right)^2 \le M + 116 \le \left(\sqrt{113} + 2\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{113} - 2\right)^2 - 116 \le M \le \left(\sqrt{113} + 2\right)^2 - 116$

$\Leftrightarrow -41{,}52058325 \le M \le 43{,}52058325$

Mà $M$ nguyên nên $M \in \{-41; -40; ...; 42; 43\}$. Vậy có $85$ giá trị nguyên của $M$.

**Câu 10: Chọn A**

Điều kiện $2x + y + z > 0$.

Ta có $2x + y + z = \sqrt{2}\sqrt{2}x + y + z \le 2\sqrt{2x^2 + y^2 + z^2}$ hay $4x + 2y + 2z \le 4\sqrt{2x^2 + y^2 + z^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Khi đó $4x + 2y + 2z \le 4\sqrt{2x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \log_2(4x + 2y + 2z) \le 2 + \frac{1}{2}\log_2(2x^2 + y^2 + z^2)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 + y^2 + z^2) \ge 2\left[\log_2(4x + 2y + 2z) - 2\right]$.

$\log_2^2(2x^2 + y^2 + z^2) - 2m\log_2(4x + 2y + 2z) \le 0$

$2m\log_2(4x + 2y + 2z) \ge \log_2^2(2x^2 + y^2 + z^2) \ge 4\left[\log_2(4x + 2y + 2z) - 2\right]^2$.

Đặt $t = \log_2(4x + 2y + 2z)$ ta được $4(t - 2)^2 \le 2mt \Leftrightarrow 2t^2 - (m + 8)t + 8 \le 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $2t^2 - (m + 8)t + 8 \le 0$ có đúng một giá trị $t$ $\Leftrightarrow (m + 8)^2 - 64 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -16 \end{array}\right.$.

Khi $m = 0$ thì $t = 2 \Leftrightarrow \log_2(4x + 2y + 2z) = 2 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2$.

Mặt khác dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ nên $x = y = z = \frac{1}{2}$.

$m = -16$ tương tự $x = y = z = \frac{1}{32}$. Vậy $S = \{0; -16\}$.

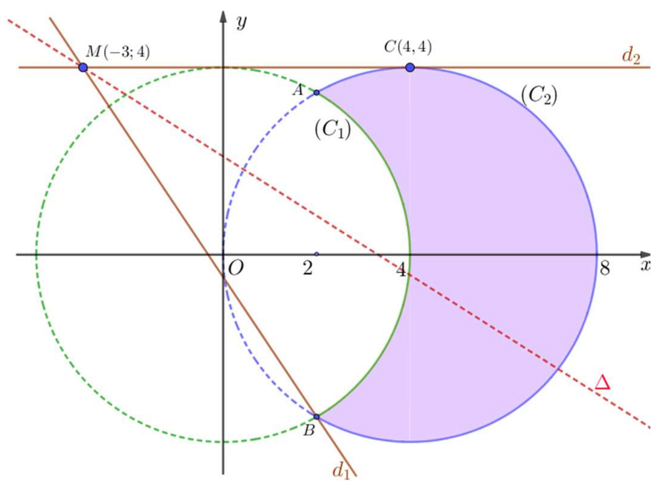
**Câu 11: Chọn A**

Ta có: $x^2 + y^2 \ge 16$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ nằm trên hay phía ngoài đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 16$.

Do $(x;y)=(0;0)$ không thỏa mãn điều kiện đề bài nên $x^2+2y^2+1>1$.

Khi đó $\log_{x^2+2y^2+1}\left(y^2+8x+1\right)\ge 1 \Leftrightarrow x^2+2y^2+1\le y^2+8x+1 \Leftrightarrow x^2+y^2-8x\le 0$ suy ra tập hợp các điểm có tọa độ $(x;y)$ nằm trong hoặc trên đường tròn $(C_2): x^2+y^2-8x=0$.

Vậy tập hợp bộ số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài là các điểm nằm trong miền tô đậm.




Nhận xét:

Đường tròn $(C_1)$ cắt đường tròn $(C_2)$ tại hai điểm phân biệt $A\left(2;2\sqrt{3}\right), B\left(2;-2\sqrt{3}\right)$;

Đường thẳng $\Delta: mx+3y+3m-12=0$ luôn đi qua điểm cố định $M(-3;4)$ và có hệ số góc $k_\Delta=-\dfrac{m}{3}$.

Gọi $d_1$ là đường thẳng đi qua điểm $M$ và $B$ suy ra $\overrightarrow{MB}=\left(5;-2\sqrt{3}-4\right)$ nên hệ số góc của đường thẳng $d_1$: $k_{d_1}=\dfrac{-2\sqrt{3}-4}{5}$; $d_2$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C_2)$đi qua $M(-3;4)$ và tiếp xúc với $(C_2)$ tại điểm $C(4;4)$ nên hệ số góc của đường thẳng $d_2$: $k_{d_2}=0$.

Để tồn tại ít nhất một cặp $(x;y)$ thì $k_{d_1}\le k_\Delta\le k_{d_2} \Leftrightarrow \dfrac{-2\sqrt{3}-4}{5}\le\dfrac{-m}{3}\le 0$

$\Leftrightarrow 0\le m\le\dfrac{12+6\sqrt{3}}{5}$. Do $m$ là số nguyên nên $m\in\{0;1;2;3;4\}$.

**Câu 12: Chọn D**

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \\ x,y\in\mathbb{Z}\end{cases}$. Khi đó

$\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y) \Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow x^2+y\ge(x+y)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2-x>(x+y)^{\log_3 4}-(x+y)\ \ (1)$

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\ge 1$ thì $(1)$ được viết lại là $x^2-x>t^{\log_3 4}-t\ \ (2)$

Với mỗi $x$ nguyên cho trước có không quá $242$ số nguyên $y$ thỏa mãn bất phương trình $(1)$

Tương đương với bất phương trình $(2)$ có không quá 242 nghiệm $t$.

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>243^{\log_3 4}-243=781$ thì sẽ có ít nhất $243$ nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\le 781 \Leftrightarrow -27,4\le x\le 28,4$.

Mà $x$ nguyên nên $x\in\{-27,-26,...,27,28\}$.

Vậy có tất cả $28+28=56$ số nguyên $x$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 13: Chọn C**

Điều kiện $\log_4\left(x^2-2x+m\right)\ge 0 \Leftrightarrow x^2-2x+m\ge 1$.

$\log_2\sqrt{x^2-2x+m}=\frac{1}{2}\log_2\left(x^2-2x+m\right)=\log_4\left(x^2-2x+m\right)$

Đặt $t=\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}$. Điều kiện $t\ge 0$.

Bất phương trình trở thành:

$t^2+3t-10\le 0 \Leftrightarrow -5\le t\le 2$

Kết hợp với điều kiện ta được $0\le t\le 2$

$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+m\ge 1\\ x^2-2x+m\le 256\end{cases} \Leftrightarrow 1-m\le x^2-2x\le 256-m$

Đúng với mọi $x\in[0;3]$ nếu giá trị nhỏ nhất của $\min\limits_{[0;3]}\left(x^2-2x\right)\ge 1-m$ và $\max\limits_{[0;3]}\left(x^2-2x\right)\le 256-m$ trên đoạn $[0;3]$. Với $\min\limits_{[0;3]}\left(x^2-2x\right)=-1$; $\max\limits_{[0;3]}\left(x^2-2x\right)=3$

Do đó $\begin{cases}-1\ge 1-m\\ 3\le 256-m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 2\\ m\le 253\end{cases}$. Vậy có $252$ số $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 14: Chọn A**

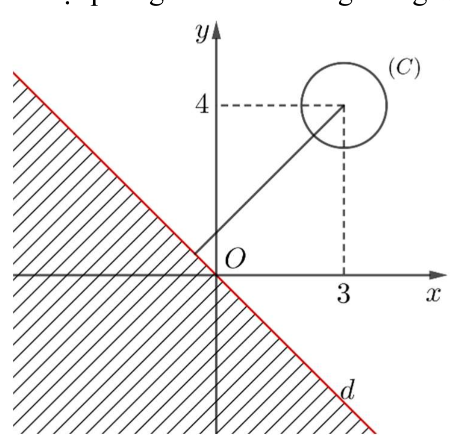
Ta có $\log_{a^2+b^2+20}(6a+8b-4)=1 \Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$

Gọi $M(a;b)$ thì $M\in(C)$ là đường tròn tâm $I(3;4), R=1$.

$\ln\left(2c+\sqrt{1+4c^2}\right)\le -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+d^2}-d}\right) \Leftrightarrow \ln\left(2c+\sqrt{1+4c^2}\right)\le \ln\left(\sqrt{1+d^2}-d\right)$

$\Leftrightarrow 2c+\sqrt{1+(2c)^2}\le\sqrt{1+(-d)^2}+(-d) \Leftrightarrow 2c\le -d$

Gọi $N(2c;d)$ thì $N$ thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d: x+y=0$.



Khi đó: $T = MN^2 \geq \left[d(I;d) - R\right]^2 = \left(\dfrac{7}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = \dfrac{51 - 14\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 15: Chọn D**

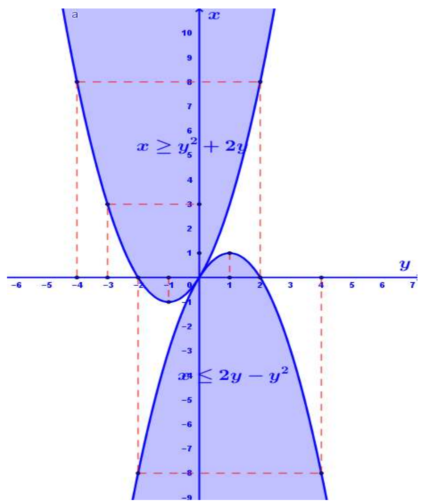
$3^{y^2 - |x-2y|} \leq \log_{y^2+3}\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow \dfrac{3^{y^2+3}}{3^{|x-2y|+3}} \leq \dfrac{\ln\left(|x-2y|+3\right)}{\ln\left(y^2+3\right)}$

$\Leftrightarrow 3^{y^2+3}\ln\left(y^2+3\right) \leq 3^{|x-2y|+3}\ln\left(|x-2y|+3\right)$. Xét hàm số $f(t) = 3^t \ln t$ với $t \geq 3$.

$f'(t) = 3^t \ln t.\ln t + \dfrac{3^t}{t} > 0, \forall t \geq 3 \Rightarrow$ hàm số đồng trên $\left[3;+\infty\right)$.

Ta có: $f\left(y^2+3\right) \leq f\left(|x-2y|+3\right) \Leftrightarrow y^2 + 3 \leq |x-2y| + 3 \Leftrightarrow y^2 \leq |x-2y|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq y^2 + 2y = g_1(y) \\ x \leq 2y - y^2 = g_2(y) \end{array}\right.$

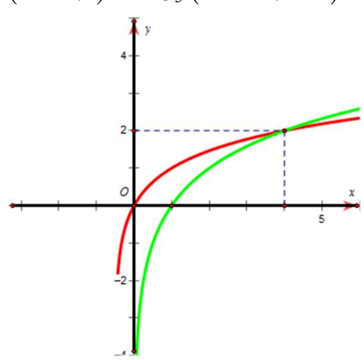



Ta thấy $\left[\begin{array}{l} 3 \leq x < 8 \\ x = 0 \\ -8 < x \leq -3 \end{array}\right.$ thì sẽ có đúng 5 giá trị nguyên của $y$ với mỗi giá trị nguyên của $x$.

Vậy có tất cả 11 giá trị.

**Câu 16: Chọn B**

Đặt $t = x + 2y, t > 0$, khi đó $\log_2(x+2y) \leq \log_3(2x+4y+1)$ trở thành $\log_2 t \leq \log_3(2t+1)$.




Dựa vào đồ thị ta thấy $\log_2 t \leq \log_3(2t+1) \Leftrightarrow 0 < t \leq 4 \Leftrightarrow 0 < 2x + y \leq 4$.

Kết hợp với điều kiện $\log_3(x+y) \ge y-2$ ta có các cặp số tự nhiên $(x;y)=\{(0;1),(0;2),(0;3),(1;0),(1;1),(1;2)\}$.

**Câu 17: Chọn D**

Nếu $a=2$ bất phương trình đúng với mọi $x$. Suy ra $a=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $a\ge 3$ bất phương trình tương đương với $g(x)=a^{-x}-2^{-x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\le 0$. Ta có $g(1)=0$ và

$$g'(x)=-a^{-x}\ln a+2^{-x}\ln 2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{-x}=\frac{\ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow x=x_0=-\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{\ln 2}{\ln a}\right)$$

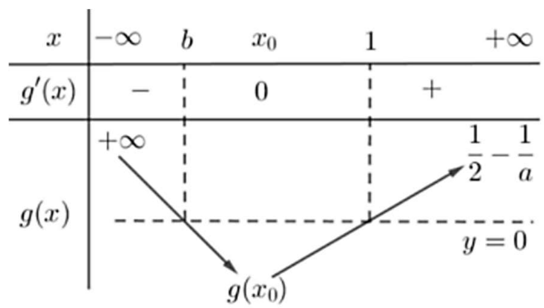
$g'(x)>0 \Leftrightarrow x>x_0$; $g'(x)<0 \Leftrightarrow x<x_0$

Và $a=3 \Rightarrow x_0>1$; $a=4 \Rightarrow x_0=1$; $a>4 \Rightarrow x_0<1$

Nếu $a=4 \Rightarrow x_0=1 \Rightarrow g(x)\le 0 \Leftrightarrow x=1$ chứa đúng một số nguyên $5x$ là số $5$. Suy ra $a=4$ không thỏa mãn.

Nếu $a=3 \Rightarrow x_0>1 \Rightarrow g(x)\le 0 \Leftrightarrow S_x=[1;1,28378] \Leftrightarrow S_{5x}=[5;6,17]$ chứa đúng hai số nguyên $5x$ là các số $5$ và $6$. Suy ra $a=3$ không thỏa mãn.

Nếu $a>4 \Rightarrow x_0<1$




Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $S_x=[b;1] \Rightarrow S_{5x}=[5b;5]$ chứa tối thiểu 5 số nguyên $5x$ là các số $1$, $2$, $3$, $4$, $5$ $\Leftrightarrow 5b\le 1 \Leftrightarrow b\le \frac{1}{5} \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{5}\right)\le 0 \Leftrightarrow a^{-\frac{1}{5}}-2^{-\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\le 0$

$\Rightarrow a\in\{130;...;2021\}$. Vậy $1+[(2021-130)+1]=1893$ số nguyên $a$ thỏa mãn.

**Câu 18: Chọn A**

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)+\frac{4^x-1}{2^x}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$f(-x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)+\frac{4^{-x}-1}{2^{-x}}=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)+\frac{1-4^x}{2^x}$$

$$=\ln\left(\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)^{-1}\right)-\frac{4^x-1}{2^x}=-\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)-\frac{4^x-1}{2^x}=-f(x)$$

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ.

Ta lại có $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}+2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình $f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)+f\left(m+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)\geq -f\left(m+1\right)$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)\geq f\left(-m-1\right)\Leftrightarrow \sqrt{x-4}-m(x-1)\geq -m-1$

$\Leftrightarrow m\left(2-x\right)\geq -1-\sqrt{x-4}\Leftrightarrow m\leq \dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x-2}$.

**Cách 1:**

Xét $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x-2}$. Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{6-x-2\sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4}.\left(x-2\right)^2}$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 6-x-2\sqrt{x-4}=0\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=8+2\sqrt{3} \\ x=8-2\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=8-2\sqrt{3}.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $4$ | | $8-2\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |

Từ BBT, bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\leq \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

**Cách 2:** Đặt $t=\sqrt{x-4}, t\geq 0$, khi đó trở thành $m\leq \dfrac{t+1}{t^2+2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $g\left(t\right)=\dfrac{t+1}{t^2+2}$ trên khoảng $\left[0;+\infty\right)$ ta được $\max\limits_{[0;+\infty)} g\left(t\right)=g\left(\sqrt{3}-1\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$, từ đó suy ra bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\leq \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

**Cách 3:** Sử dụng máy tính để tìm giá trị gần đúng của $\max\limits_{[4;+\infty)} \dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x-2}$, so sánh với các đáp án để suy ra bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\leq \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

**Câu 19: Chọn C**

Đặt $f\left(x\right)=4\left(x-1\right)e^x-y\left(e^x+xy-2x^2-3\right)$.

Suy ra $f'\left(x\right)=4xe^x-y\left(e^x+y-4x\right)=\left(e^x+y\right)\left(4x-y\right)$

Với mọi số nguyên dương $y$, ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow y=4x\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{4}$ do $e^x+y>0$.

Với $x\in\left(1;5\right)\Leftrightarrow 4x\in\left(4;\,20\right)$ và $f\left(1\right)=-y\left(e+y-5\right)=a$ ; $f\left(5\right)=16e^5-y\left(e^5+5y-53\right)=b$

Ta đi xét các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** Với $1 < x < 5 \Leftrightarrow 1 < \dfrac{y}{4} < 5 \Leftrightarrow 4 < y < 20 \quad (*)$, ta có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $1$ | | $\frac{y}{4}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $a$ | ↘ | $f\left(\frac{y}{4}\right)$ | ↗ | $b$ |

Do $a < 0 \ \forall y \in (4;20)$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x \in (1;5)$ thì $b \ge 0$.

$\Leftrightarrow -33,33 \le y \le 14,24 \xrightarrow{ket\ hop\ dieu\ kien\ (*)} 4 < y \le 14$.

Trường hợp này có $10$ giá trị của $y$ thỏa mãn.

**Trường hợp 2:** Với $x \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{4} \le 1 \Leftrightarrow 1 \le y \le 4 \quad (**)$, ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $a$ | ↗ | $b$ |

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $x \in (1;5)$ thì $\begin{cases} b \ge 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -33,33 \le y \le 14,24 \\ y > 5 - e \end{cases}$.

$\Leftrightarrow 5 - e < y \le 14,24 \xrightarrow{ket\ hop\ dieu\ kien\ (**)} 5 - e < y \le 4.$

Trường hợp này có $2$ giá trị của $y$ thỏa mãn.

**Trường hợp 3:** Với $x \ge 5 \Leftrightarrow \dfrac{y}{4} \ge 5 \Leftrightarrow y \ge 20$, ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $a$ | ↘ | $b$ |

Do $a < 0 \ \forall y \ge 20$ nên phương trình đã cho vô nghiệm với mọi $x \in (1;5)$.

Vậy có tất cả $12$ giá trị $y$ nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 20: Chọn A**

Do $y \ge -1$ nên $y + 1 \ge 0$. Khi đó $x.3^{2x+y} = (y+1).3^{2y-x} \Rightarrow x \ge 0$. Ta có: $x.3^{2x+y} = (y+1).3^{2y-x}$

$\Leftrightarrow x.3^{3x} = (y+1).3^{y} \Leftrightarrow 3x.3^{3x} = (y+1).3^{y+1} \Leftrightarrow f(3x) = f(y+1)$ (voi $f(t) = t.3^t, t \ge 0$)

$\Leftrightarrow 3x = y + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 1$

Khi đó $P = xy - x^2 = x(3x-1) - x^2 = 2x^2 - x = 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8} \ge -\dfrac{1}{8}$.

# CHƯƠNG 3: CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỌN LỌC

## I. CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỌN LỌC SỐ 01

### ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=-1$ và $xf(1-x^3)+f'(x)=x^7+x-2, x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{-5}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{-2}{3}$.

**Câu 2:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(x)-f(x)=e^x\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$, tính $f(2)$.

**A.** $\frac{e^2}{2}$. **B.** $3e^2$. **C.** $e^2$. **D.** $2e^2$.

**Câu 3:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+4x+3)=x+2$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{112}{3}$. **B.** $\frac{56}{3}$. **C.** $\frac{14}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

**Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=5$ và $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{11}{4}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x$, $\forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ bằng

**A.** $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{15}{6}$.

**Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(x^3+x)f(x^3)+(x^2+1)f(1-x^2)=4x^4-3x^3+4x^2-3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $-3$. **C.** $3$. **D.** $-1$.

**Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+4x)=-2x^2-7x+1, \forall x\in[0;+\infty)$. Biết $f(5)=-8$, tính $I=\int_0^5 x.f'(x)dx$.

**A.** $I=-\frac{68}{3}$. **B.** $I=-\frac{35}{3}$. **C.** $I=-\frac{52}{3}$. **D.** $I=-\frac{62}{3}$.

**Câu 8:** Cho $f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=16$, $\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $30$. **B.** $28$. **C.** $36$. **D.** $16$.

**Câu 9:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=2x+1$ và $f\left(1\right)=-3$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 10:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$. Biết $\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)\ln x$ và $f\left(2\right)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính $I=\int\limits_1^2 \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-\frac{7}{4}$. **B.** $I=\frac{7}{4}$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=-\frac{1}{2}$.

**Câu 11:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn các điều kiện: $\int\limits_1^4 \frac{e^x}{\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2$; $\int\limits_1^2 xf\left(x\right)e^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$; $f\left(2\right)=0$. Giá trị $f\left(1\right)$ bằng

**A.** $-\frac{8}{3\mathrm{e}}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}}{6}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{2}{\mathrm{e}}$.

**Câu 12:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên tập số thực thỏa mãn $xf'(x)-f(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Hãy tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{5}{6}$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $\frac{-5}{6}$.

**Câu 13:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x^2f'(x)+(3x-\frac{1}{x})f(x)=f'(x)+16x^2-8,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(2)=8$. Khi đó giá trị $f(3)$ bằng

**A.** $\frac{20}{3}$. **B.** $12$. **C.** $288$. **D.** $\frac{10}{3}$.

**Câu 14:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 15:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1$; $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

**A.** $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 x\cdot f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=8$ và $f(3)=\ln 3$. Tính $I=\int_0^3 e^{f(x)}dx$.

**A.** $I=1$. **B.** $I=11$. **C.** $I=8-\ln 3$. **D.** $I=8+\ln 3$.

**Câu 17:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

**A.** $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+x^2f(x)=f(3-x)+x^2f(3-x)$. Biết $\int_{-1}^{4} x.f(x)dx=2$. Tính tích phân $\int_{-1}^{4} f(x)dx$.

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Câu 19:** Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính $I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx$.

**A.** $I=-4$. **B.** $I=e-2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=2-e$.

**Câu 20:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm và dương trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)-3xf^3(x)=4xf'(x)$, $f(1)=1$. Khi đó $f(4)$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $2$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $4$.

**Câu 21:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{x^2+4}$, $\forall x\in[-2;2]$. Tính $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

**A.** $I=\frac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\frac{\pi}{10}$. **C.** $I=-\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{20}$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$, $f(x)\neq -1,\forall x\in[1;2]$. Biết $f'(x)\left[f(x)+2\right]^2=\left[f(x)+1\right]^4(x-1)^2$ và $f(1)=-2$. Tính $I=\int_1^2 xf(x)dx$.

**A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{5}{2}$.

**Câu 23:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=0$ và $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2,\forall x\in[1;4]$. Đặt $I=\int_1^4 f(x)dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $1<I<4$. **B.** $4<I<8$. **C.** $8<I<12$. **D.** $12<I<16$.

**Câu 24:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$ và $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x),\forall x\in[1;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\ln\frac{4}{3}$. **B.** $\ln\frac{3}{4}$. **C.** $\ln 3$. **D.** 0.

**Câu 25:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\sin x.f(\cos x)+\cos x.f(\sin x)=\sin x-\sin^3 x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $4f(1)=g(1)$ và: $\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2020x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2021x^2\end{cases}$ $\forall x\in\mathbb{R}\big|\{-1;\,0\}$. Tính $I=\int\limits_1^2\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x$

.

**A.** $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

**Câu 27:** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(x).f(3-x)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\dfrac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

**A.** $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=3$.

**Câu 28:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_1^{16}\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\dfrac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$, biết $a,b\in\mathbb{Z}$ và $(a,b)=1$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

**A.** $P=8$. **B.** $P=7$. **C.** $P=3$. **D.** $P=9$.

**Câu 29:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $I=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{e-1}{e}$. **B.** $I=\dfrac{1-e}{e}$. **C.** $I=\dfrac{e}{1-e}$. **D.** $I=\dfrac{e}{e-1}$.

**Câu 30:** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;2021]$. Giả sử rằng với mọi $x\in[0;2021]$, ta có $f(x)>0$ và $f(x)f(2021-x)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{2021}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

**A.** $\frac{2021}{2}$. **B.** $\frac{2021}{3}$. **C.** $2021$. **D.** $4042$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}, f(x)>0, \forall x\in R$ và $\int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\int(2x+1)dx$. Tính tích phân $\int_1^2 f^2(x)dx$.

**A.** $\frac{1411}{30}$. **B.** $\frac{114}{30}$. **C.** $\frac{141}{30}$. **D.** $-\frac{1411}{30}$.

**Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(4;+\infty)$ và thỏa mãn đẳng thức $f(x)+(x^2-7x+12)f'(x)=\frac{(x^3-6x^2+9x)}{\sqrt{x^2+9}}$ với mọi $x\in(4;+\infty)$. Giá trị $f(5)$ của bằng

**A.** $f(5)=\sqrt{34}-5$.

**B.** $f(5)=2\sqrt{34}+10$.

**C.** $f(5)=2\sqrt{34}-10$.

**D.** $f(5)=\sqrt{34}+5$.

**Câu 33:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=6x^2+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

**A.** 1. **B.** $\pm\sqrt{3}$. **C.** $\pm1$. **D.** $3$.

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=2021x^{2020}+3x^2-4, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

**A.** $2^{2021}$. **B.** $0$. **C.** $2^{2020}$. **D.** $2^{2022}$.

**Câu 35:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f(0)=1$, $f(x)>0, \forall x\in[0;+\infty)$ và $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{2f'(x)+1}=1, \forall x\in[0;+\infty)$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$

**A.** $I=\frac{3}{5}$. **B.** $I=\frac{5}{3}$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{2}{5}$.

**Câu 36:** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$.

**A.** $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

**Câu 37:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=e^2$ và $2\sin 2x\left[f(x)+e^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right]+f'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ thuộc khoảng

**A.** $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

**Câu 38:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thoả mãn $f(x^3+2x-1)=2x-3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

**A.** $I=-\dfrac{11}{2}$. **B.** $I=\dfrac{11}{2}$. **C.** $I=\dfrac{7}{3}$. **D.** $I=-\dfrac{7}{3}$.

**Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $6x.f(x^2)+5f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$

Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$

**A.** $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi}{32}$. **D.** $\dfrac{\pi}{16}$.

**Câu 40:** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và đạt cực trị tại điểm $x=-2$. Tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung là đường thẳng $d$ có phương trình $3x+y-2021=0$. Tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 3}\left[x-1+f''\left(e^x-3\right)\right].e^x dx$ bằng

**A.** $-1+3\ln 3$. **B.** $-7+3\ln 3$. **C.** $7-3\ln 3$. **D.** $-3+3\ln 3$.

**Câu 41:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

**A.** $-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 42:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f(2x)-xf(x^2)=5x-2x^3-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 xf'(x)dx$.

**A.** $I=3$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=5$.

**Câu 43:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn: $2f(4-x)-3f(x)=-x^2-6x+16\ \forall x\in[0;4]$. Tính $I=\int\limits_0^4 x.f(x)dx$.

**A.** $\dfrac{64}{3}$. **B.** $128$. **C.** $\dfrac{128}{3}$. **D.** $\dfrac{320}{3}$.

**Câu 44:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thoả mãn $f(1)=3$ và $x(6-f'(x))=f(x)+2$ với $x>0$. Giá trị tích phân $\int\limits_1^2 f(x)dx$ bằng

**A.** $\dfrac{3}{2}+\ln 2$. **B.** $3-2\ln 2$. **C.** $\dfrac{5}{2}+2\ln 2$. **D.** $\dfrac{3}{2}-2\ln 2$.

**Câu 45:** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=-1$ và $f'(x)=x\left(6+12x+e^{-x}\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng.

**A.** $3e$. **B.** $3e^{-1}$. **C.** $4-3e^{-1}$. **D.** $-3e^{-1}$.

**Câu 46:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(2\sin x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{-10}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

**Câu 47:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Biết $f\left(1\right)=1$ và $f(x)=xf'(x)+\ln x$ $;\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ giá trị của $f\left(e\right)$ bằng:

**A.** $2$. **B.** $e$. **C.** $\frac{1}{e}$. **D.** 1.

**Câu 48:** Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Khi đó, giá trị $\int\limits_{-3}^3 \frac{f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $10$. **B.** $12$. **C.** $9$. **D.** $13$.

**Câu 49:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2=4\left[2x^2+1-f\left(x\right)\right]$ với mọi $x$ thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(1\right)=2$. Tính $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right).\mathrm{d}x$

**A.** $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

**Câu 50:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn: $f'\left(x\right)=f'\left(2-x\right)$ với $\forall x\in\left[0;2\right]$. Biết rằng $f\left(0\right)=2003, f\left(2\right)=2021$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f\left(2\cos x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $-2012$. **B.** $4024$. **C.** $-4024$ **D.** $2012$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1.** **Cách 1: Phương pháp tự luận:**

Từ $xf\left(1-x^3\right)+f'\left(x\right)=x^7+x-2, x\in\mathbb{R}$ suy ra $x^2f\left(1-x^3\right)+xf'\left(x\right)=x^8+x^2-2x, x\in\mathbb{R}$

Do đó $\int\limits_0^1 x^2f\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^8+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1-x^3$ ta có $\mathrm{d}t=-3x^2\mathrm{d}x$ do đó ta được

$\int\limits_0^1 x^2f\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\limits_1^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy ta có $\int\limits_0^1 x^2f\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^8+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-5}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\left(xf\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)=\frac{-5}{9}$

$\Leftrightarrow\frac{-2}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{9}-\left[f\left(1\right)-0.f\left(0\right)\right]=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-2}{3}$. Vậy $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$.

**Cách 2: PP chọn hàm đại diện**

Từ đẳng thức $xf\left(1-x^3\right)+f'\left(x\right)=x^7+x-2, x\in\mathbb{R}$ suy ra chọn đặt hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số bậc 2 dạng $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Ta có $xf\left(1-x^3\right)+f'(x)=x^7+x-2$.

Do đó $x\left[a\left(1-x^3\right)^2+b\left(1-x^3\right)+c\right]+2ax+b=x^7+x-2$

$\Leftrightarrow x\left[ax^6-\left(2a+b\right)x^3+\left(a+b+c\right)\right]+2ax+b=x^7+x-2$

$\Leftrightarrow ax^7-\left(2a+b\right)x^4+\left(3a+b+c\right)x+b=x^7+x-2\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\3a+b+c=1\\b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=0\end{cases}$.

Do vậy $f(x)=x^2-2x$ thỏa mãn $f(1)=-1$, từ đó ta có $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{-2}{3}$.

**Câu 2.** Từ giả thiết ta có

$e^xf'\left(x\right)-f\left(x\right)\left(e^x\right)'=e^{2x}\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)e^x-\left(e^x\right)'f\left(x\right)}{e^{2x}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(x\right)}{e^x}\right)'=1\Rightarrow\frac{f\left(x\right)}{e^x}=x+C..$

Từ $f\left(0\right)=0$, thay vào ta có $C=0$. Vậy $f\left(x\right)=xe^x$. Vậy $f\left(2\right)=2e^2$.

**Câu 3.** Ta có: $f\left(x^2+4x+3\right)=x+2=\sqrt{\left(x+2\right)^2}=\sqrt{\left(x^2+4x+3\right)+1}$.

Suy ra $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}$. Do đó $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{x+1}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$.

**Câu 4.** Ta có $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\Rightarrow 3=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2)=\left(x^2f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x^2\mathrm{d}(f(x))=4-\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x-10\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x+25\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=5-10.1+25.\frac{1}{5}=0$$

$$\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)-5x^2\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\left(f'(x)\right)^2-10x^2f'(x)+25x^4\right)\mathrm{d}x=0$$

$\Rightarrow f'(x)=5x^2\Rightarrow f(x)=\frac{5x^3}{3}+C$ mà $f(1)=4\Rightarrow C=\frac{7}{3}$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{5x^3}{3}+\frac{7}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{4}$

**Câu 5.** Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x$, vì $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng này.

Chia cả hai vế cho $2\sqrt{x}$, ta được $\sqrt{x}\cdot f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\sqrt{x}.f(x)\right]'=\sqrt{x}$

Lấy tích phân từ 1 tới 4 cả hai vế ta được $\int_1^4\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)\Big|_1^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4\Rightarrow 2f(4)-f(1)=\frac{14}{3}\Rightarrow f(4)=\frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}+1\right)=\frac{17}{6}$ (vì $f(1)=1$).

Vậy $f(4)=\frac{17}{6}$.

**Câu 6.** Ta có: $\left(x^3+x\right)f\left(x^3\right)+\left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right)=4x^4-3x^3+4x^2-3x$

$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)x.f\left(x^3\right)+\left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\left(4x^2-3x\right)$

$\Leftrightarrow x.f\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=4x^2-3x\Leftrightarrow x^2.f\left(x^3\right)+x.f\left(1-x^2\right)=4x^3-3x^2$.

$\Rightarrow\int_{-1}^0 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x=-2$. (1)

Xét $\int_{-1}^0 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-1}^0 f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-1}^0 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-1}^0 f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-2$ $(2)$.

Ta lại có $\int_0^1 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_0^1 f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)-\frac{1}{2}\int_1^0 f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ $(3)$. Từ $(2)$ và $(3)$ suy ra $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=-6$.

**Câu 7:** Ta có $f\left(x^2+4x\right)=-2x^2-7x+1\Leftrightarrow(2x+4)f\left(x^2+4x\right)=\left(-2x^2-7x+1\right)(2x+4)$.

Lấy tích phân cận chạy từ $0\to1$ hai vế ta được:

$\int_0^1 (2x+4) f\left(x^2+4x\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-2x^2-7x+1\right)(2x+4) \mathrm{d}x = -\frac{52}{3}$.

Xét $\int_0^1 (2x+4) f\left(x^2+4x\right) \mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} t = x^2+4x \Rightarrow \mathrm{d}t = (2x+4)\mathrm{d}x \\ x = 0 \to t = 0, x = 1 \to t = 5 \end{cases}$.

Khi đó ta có $\int_0^1 (2x+4) f\left(x^2+4x\right) \mathrm{d}x = \int_0^5 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{52}{3}$.

Xét $I = \int_0^5 x.f'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -40 - \left(-\frac{52}{3}\right) = -\frac{68}{3}$.

**Câu 8.** Ta có $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x) = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Xét $I = \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ .Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(2) - 4 = 32 - 4 = 28$. Vậy $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = 28$.

**Câu 9.** Ta có $2f(x) + xf'(x) = 2x+1 \Leftrightarrow f(x) + f(x) + xf'(x) = 2x+1$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left[f(x) + xf'(x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+1)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left[x.f(x)\right]'\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 - xf(x)\Big|_0^1 = 2-(-3) = 5$.

**Câu 10.** Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \ln x \end{cases}$.

Khi đó, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \left(f(x)\ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)\ln x\mathrm{d}x = \left(f(x)\ln x\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{x^2}\Big|_1^2$.

Mà $f(2) = \frac{1}{\ln 2}$ và $\ln 1 = 0$ nên $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \left(f(2)\ln 2 - f(1)\ln 1\right) - \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)$.

Vậy $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{7}{4}$.

**Câu 11.** Ta có

$1 = \int_1^4 \frac{e^x}{2\sqrt{x}} f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^4 e^x \mathrm{d}\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right) = e^x f\left(\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 - \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right).e^x\mathrm{d}x = e^4 f(2) - ef(1) - \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right).e^x\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 1 = -ef(1) - \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right).e^x\mathrm{d}x \;\; (1)$

Mặt khác: $1 = \int_1^2 2xf(x)e^{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 f\left(\sqrt{x^2}\right)e^{x^2}\mathrm{d}\left(x^2\right) = \int_1^4 f\left(\sqrt{t}\right)e^t\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)e^x\mathrm{d}x = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $1=-ef\left(1\right)-1\Rightarrow f\left(1\right)=-\frac{2}{e}$.

**Câu 12.** Theo giả thiết: $xf'(x)-f(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=1$

$\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=x+c$.

hay $f(x)=x^2+cx$, mà $f(1)=2$ nên $c=1$.

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x^2+x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{5}{6}$.

**Câu 13.** Từ đề bài ta có

$x^2f'(x)+(3x-\frac{1}{x})f(x)=f'(x)+16x^2-8\Leftrightarrow(x^2-1)f'(x)+(3x-\frac{1}{x})f(x)=16x^2-8$

$\Leftrightarrow(x^3-x)f'(x)+(3x^2-1)f(x)=16x^3-8x\Leftrightarrow\left[(x^3-x)f(x)\right]'=16x^3-8x$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $(x^3-x)f(x)=4x^4-4x^2+c$.

$\Rightarrow 6f(2)=48+c\Leftrightarrow c=0$. Vậy $f(3)=12$.

**Câu 14.** Ta có

$\int\limits_0^2 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(xf\left(x\right)\right)'\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=xf\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2.f\left(2\right)-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết $\int\limits_0^2 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow 6-\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1$; $x=4\Rightarrow t=2$.

Theo giả thiết $2=\int\limits_1^4\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\limits_1^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t\Leftrightarrow\int\limits_1^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=1\Rightarrow\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Ta có $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3-1=2$.

**Câu 15.** Xét $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1$, đặt $t=\cos^2 x$. Khi đó $x=0\Rightarrow t=1, x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$;

$\tan x\mathrm{d}x=\frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}.\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Do vậy $I_1=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f\left(t\right)}{t}$. Suy ra $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f\left(t\right)}{t}=2I_1=2$.

Xét $I_2=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x$, đặt $t=\ln^2 x$. Khi đó $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1; x=\mathrm{e}^2\Rightarrow t=4$;

$\frac{\mathrm{d}x}{x.\ln x}=\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Do vậy $I_2=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t$. Suy ra $\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2I_2=2$.

Xét $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$, đặt $t=2x$. Khi đó $x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}, x=2\Rightarrow t=4$; $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Do vậy

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{1}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=2+2=4.$$

**Câu 16.** Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^{f(x)}\end{cases}$ khi đó $\int_0^3 x\cdot f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x=x\cdot\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^3-\int_0^3\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow 8=3\cdot\mathrm{e}^{f(3)}-\int_0^3\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^3\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x=3.\mathrm{e}^{\ln 3}-8=9-8=1.$$

**Câu 17 .** Ta có: $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ nên $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$. Suy ra: $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

Mặt khác, ta có:

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$. Vậy $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

**Câu 18.** Ta có $f(x)+x^2f(x)=f(3-x)+x^2f(3-x)$

$$\Leftrightarrow f(x)+x^2f(x)-f(3-x)-x^2f(3-x)=0$$

$$\Leftrightarrow(1+x^2)f(x)-(1+x^2)f(3-x)=0\Leftrightarrow(1+x^2)\left(f(x)-f(3-x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+1=0\quad(vn)\\ f(x)-f(3-x)=0\end{array}\right.\Rightarrow f(3-x)=f(x).$$

**Cách 1:** Sử dụng công thức giải nhanh:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=f(a+b-x),\forall x\in[a;b]$.

Thì ta có: $\int\limits_a^b x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Do đó: $\int\limits_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2.2}{-1+4}=\frac{4}{3}$.

**Cách 2:** Đổi biến trực tiếp

Đặt $t=3-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ và $x=-1\Rightarrow t=4;\ x=4\Rightarrow t=-1$.

Khi đó: $2=\int\limits_{-1}^{4}x.f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4}(3-t).f(3-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{4}(3-x).f(3-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4}(3-x).f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $4=\int\limits_{-1}^{4}x.f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{4}(3-x).f(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

**Câu 19:** Đặt $h(x)=g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$.

Ta có $h(0)=g(0).f'(0)=0$ mà $f'(0)\neq 0$ nên $g(0)=0$.

Tương tự $h(2)=g(2).f'(2)=0$ mà $f'(2)\neq 0$ nên $g(2)=0$.

Ta có $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}(g(x))=f(x).g(x)\Big|_0^2-\int_0^2 g(x)\mathrm{d}(f(x))$

$=f(2).g(2)-f(0).g(0)-\int_0^2 g(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^2 x(x-2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đặt $u=x(x-2)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ ta có $\mathrm{d}u=(2x-2)\mathrm{d}x$, chọn $v=\mathrm{e}^x$.

Khi đó

$\int_0^2 x(x-2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x(x-2)\mathrm{e}^x\Big|_0^2-\int_0^2(2x-2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\int_0^2(2x-2)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$=-(2x-2)\mathrm{e}^x\Big|_0^2+\int_0^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}(2x-2)=-2\mathrm{e}^2-2+2\int_0^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^2-2+2\mathrm{e}^x\Big|_0^2=-4$.

Suy ra $I=-\int_0^2 x(x-2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=4$.

**Câu 20.** Ta có $f(x)-3xf^3(x)=4xf'(x)\Leftrightarrow f^2(x)-4xf'(x)f(x)=3xf^4(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}f^2(x)-2\sqrt{x}f'(x)f(x)}{f^4(x)}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{x}}{f^2(x)}\right)'=\dfrac{3}{2}\int\sqrt{x}\,dx\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{f^2(x)}=x\sqrt{x}+C$ (*)

Thay $x=1$ vào (*), ta có $\dfrac{1}{f^2(1)}=1+C\Rightarrow C=0$

(*) $\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{f^2(x)}=x\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(4)=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 21.** Ta có $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{x^2+4}$, $\forall x\in[-2;2]$, suy ra $2\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x+3\int_{-2}^2 f(-x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^2\dfrac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$ (1).

Xét $3\int_{-2}^2 f(-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$. Ta có $3\int_{-2}^2 f(-x)\mathrm{d}x=3\int_2^{-2}f(t)(-\mathrm{d}t)=3\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x$ (2).

Thay (2) vào (1), ta được $5\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^2\dfrac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\int_{-2}^2\dfrac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=2\tan t\Rightarrow\mathrm{d}x=2(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}\\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{5}.\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{4\tan^2 t+4}2(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{10}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{20}$.

**Câu 22.** Ta có: $f'(x)\left[f(x)+2\right]^2=\left[f(x)+1\right]^4(x-1)^2 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\left[f(x)+2\right]^2}{\left[f(x)+1\right]^4}=(x-1)^2$.

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)\left[f(x)+2\right]^2}{\left[f(x)+1\right]^4}dx=\int (x-1)^2\,dx \ (1)$$

Xét $I=\displaystyle\int \frac{f'(x)\left[f(x)+2\right]^2}{\left[f(x)+1\right]^4}dx$: đặt $t=f(x)+1$ khi đó :

$$I=\int \frac{(t+1)^2}{t^4}dt \Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3t^3}+C\ .$$

Thay vào (1) ta được: $-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{3t^3}+C=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$

Hay $-\dfrac{1}{f(x)+1}-\dfrac{1}{\left[f(x)+1\right]^2}-\dfrac{1}{3\left[f(x)+1\right]^3}+C=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$

Vì $f(1)=-2$ nên $C=0$ , suy ra $-\dfrac{1}{f(x)+1}-\dfrac{1}{\left[f(x)+1\right]^2}-\dfrac{1}{3\left[f(x)+1\right]^3}=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$.

Đồng nhất hai vế, suy ra: $-\dfrac{1}{f(x)+1}=x \Leftrightarrow f(x)=-1-\dfrac{1}{x}$ .

Khi đó: $I=\displaystyle\int_1^2 x\left(-1-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2(-x-1)\,dx=-\frac{5}{2}$ .

**Câu 23.** Ta có :

$$x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow x\left[1+2f(x)\right]=\left[f'(x)\right]^2$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x\left[1+2f(x)\right]}=f'(x)$ ( vì $f(x)$ đồng biến ) $\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$ , $\forall x\in[1;4]$

Nguyên hàm hai vế, ta được: $\sqrt{1+2f(x)}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+c$

Với $f(1)=0\Rightarrow c=\dfrac{1}{3}$. Suy ra $\sqrt{1+2f(x)}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\Rightarrow f(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\right)^2-1}{2}$

Vậy $I=\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4\frac{\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)^2-1}{2}=\frac{1403}{90}=15,5(8)$.

**Câu 24.** Từ giả thiết, ta có $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x)\Rightarrow \dfrac{f(x)+xf'(x)}{[xf(x)]^2}=2x+1$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{xf(x)}\right]'=-2x-1\Rightarrow\frac{1}{xf(x)}=\int(-2x-1)dx\Rightarrow\frac{1}{xf(x)}=-x^2-x+C.$$

$$f(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow xf(x)=-\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 xf(x)dx = \int_1^2 \frac{-1}{x(x+1)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)dx = \ln\frac{x+1}{x}\Big|_1^2 = \ln\frac{3}{4}.$$

**Câu 25.** Ta có $\sin x - \sin^3 x = \sin x\left(1-\sin^2 x\right) = \sin x.\cos^2 x$.

Do đó, từ giả thiết ta được

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}(\cos x) \Leftrightarrow 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\int_1^0 t^2\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow 2I = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow I = \frac{1}{6}.$$

**Câu 26:** $\begin{cases} \dfrac{x}{(x+1)^2}g(x) + 2020x = (x+1)f'(x) \\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x) + f(x) = 2021x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2}g(x) - \dfrac{x+1}{x}f'(x) = -2020 \\ \dfrac{x}{x+1}g'(x) + \dfrac{1}{x^2}f(x) = 2021 \end{cases}$

Lấy vế cộng vế hai phương trình trên ta được:

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}g(x) + \frac{x}{x+1}g'(x)\right) - \left(\frac{x+1}{x}f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}g(x)\right)' - \left(\frac{x+1}{x}f(x)\right)' = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x)\right)' = 1.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) = x + C.$$

Do $4f(1) = g(1)$ nên ta có $C+1=0 \Leftrightarrow C=-1$. Suy ra $\dfrac{x}{x+1}g(x) - \dfrac{x+1}{x}f(x) = x-1$.

Do đó: $I = \displaystyle\int_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x = \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$.

**Câu 27.** Đặt $t = 3-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t = \int_0^3 \frac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $0 = \displaystyle\int_0^3 \left[\frac{f(3-x)-f(x)}{\left(1+f(x)\right)\left(1+f(3-x)\right)}\right]\mathrm{d}x$, do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;3]$. Suy ra $f(3-x) = f(x)$, trên đoạn $[0;3]$.

Mà $f(x).f(3-x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$. Vậy $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

**Câu 28.** Đặt $I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=\sin^2 x\ \Rightarrow \mathrm{d}t=2\sin x.\cos x\mathrm{d}x\ =2\sin^2 x.\cot x\mathrm{d}x\ =2t.\cot x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$\Rightarrow I_1=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(t).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t\ =\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\ =\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=2I_1=2\ .$$

Đặt $I_2=\int\limits_{1}^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=3$, Đặt $t=\sqrt{x}\ \Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1;x=16\Rightarrow t=4$.

$$I_2=\int\limits_{1}^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x\ =\int\limits_{1}^{4}\frac{f(t)}{t^2}2t\mathrm{d}t\ =2\int\limits_{1}^{4}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\ =2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x)\ =2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x\,.$$

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I_2=\frac{3}{2}$ .

Khi đó, ta có: $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow a=7,b=2$.

Vậy $P=a+b=9$.

**Câu 29.** Ta có $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}\Leftrightarrow f'(x).e^{\frac{x^2}{2}}+xf(x).e^{\frac{x^2}{2}}=2xe^{-x^2}.e^{\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\left(f(x).e^{\frac{x^2}{2}}\right)'=2x.e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow f(x).e^{\frac{x^2}{2}}=\int 2x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-2\int e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C.$$

Khi đó ta có $f(x).e^{\frac{x^2}{2}}=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C$.

Với $x=0$ ta được $f(0).e^0=-2e^0+C\Leftrightarrow f(0)=-2+C$ mà $f(0)=-2\Rightarrow C=0$.

Suy ra $f(x).e^{\frac{x^2}{2}}=-2e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}\Leftrightarrow f(x)=-2e^{-x^2}$.

Khi đó ta có: $I=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=-2\int\limits_0^1 x.e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}\left(-x^2\right)=e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}$.

**Câu 30.** Ta có: $I=\int\limits_0^{2021}\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{f(2021-x)}}=\int\limits_0^{2021}\frac{f(2021-x)}{f(2021-x)+1}\mathrm{d}x$.

Đặt: $2021-x=t$ thì $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0$ thì $t=2021$, khi $x=2021$ thì $t=0$.

Ta được: $I=-\int\limits_{2021}^{0}\frac{f(t)}{f(t)+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{2021}\frac{f(x)}{f(x)+1}\mathrm{d}x$.

Do đó: $2I=\int\limits_{0}^{2021}\frac{1}{f(x)+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2021}\frac{f(x)}{f(x)+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2021}\mathrm{d}x=2021$. Vậy: $I=\frac{2021}{2}$.

**Câu 31.** Tính $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x$ ta đặt $\sqrt{1+f^2(x)}=t\Rightarrow 1+f^2(x)=t^2\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow f(x)f'(x)\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$

Thay vào ta được $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int\frac{t\mathrm{d}t}{t}=\int\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{1+f^2(x)}+C$.

Do đó $\sqrt{1+f^2(x)}+C=x^2+x$ ; $f(0)=2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}+C=0\Leftrightarrow C=-3$.

Ta có $\sqrt{1+f^2(x)}-3=x^2+x\Rightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+3\Leftrightarrow f^2(x)=\left(x^2+x+3\right)^2-1$.

Suy ra $\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2[\left(x^2+x+3\right)^2-1]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x^4+x^2+9+2x^3+6x^2+6x-1\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_1^2\left(x^4+2x^3+7x^2+6x+8\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{7x^3}{3}+3x^2+8x\right)\right|_1^2=\frac{1411}{30}$.

Vậy $\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1411}{30}$.

**Câu 32.** Ta có

$$f(x)+(x^2-7x+12)f'(x)=\frac{\left(x^3-6x^2+9x\right)}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+(x-3)(x-4)f'(x)=\frac{x(x-3)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(x-3)^2}.f(x)+\frac{x-4}{x-3}.f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x-4}{x-3}.f(x)\right]'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\Rightarrow\frac{x-4}{x-3}.f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+9}+C\quad(*)$$

Vì hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục với mọi $x\in(4;+\infty)$ và thỏa mãn $(*)$ vớ i $x\in(4;+\infty)$

nên ta thay $x=4$ vào $(*)$ ta được $C=-5$.

Suy ra $\frac{x-4}{x-3}.f(x)=\sqrt{x^2+9}-5\ \Rightarrow\frac{1}{2}f(5)=\sqrt{34}-5\Rightarrow f(5)=2\sqrt{34}-10$.

**Câu 33.** Ta có: $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=6x^2+2$

$\Rightarrow \left[f(x).f'(x)\right]' = 6x^2 + 2$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x) = \int (6x^2+2)\,\mathrm{d}x = 2x^3 + 2x + C$

Mà $f(0)=0$ nên thay $x=0$ ta được: $C=0$. Suy ra $f(x).f'(x) = 2x^3+2x$.

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\int_0^1 f(x).f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^3+2x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow f^2(1) = 3 \Rightarrow f(1) = \pm\sqrt{3}$.

**Câu 34.** Từ giải thiết $f(x)+f(-x) = 2021x^{2020} + 3x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lấy tích phân hai vế từ $-2$ đến $2$ ta được:

$\int_{-2}^{2}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\left(2021x^{2020}+3x^2-4\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x = \left.\left(x^{2021}+x^3-4x\right)\right|_{-2}^{2} \Leftrightarrow I + \int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2^{2022}$.

Xét $J = \int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x$ ta có $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=-2 \Rightarrow t=2$; $x=2 \Rightarrow t=-2$.

Do đó $J = \int_{2}^{-2} -f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

Vậy $2I = 2^{2022} \Rightarrow I = 2^{2021}$.

**Câu 35.** Ta có: $\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{2f'(x)+1} = 1 \Leftrightarrow 2f'(x)+1+f(x) = 2f(x)f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow 2f'(x)+1 = 2f(x)f'(x) \Rightarrow 2f(x)+x = f^2(x)+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $C=1$. Do đó $2f(x)+x = f^2(x)+1 \Leftrightarrow \left[f(x)-1\right]^2 = x$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x}+1$ vì $f(x)>0, \forall x \in [0;+\infty)$.

Vậy $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{5}{3}$.

**Câu 36.** **Cách 1:**

Từ giả thiết $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, cho $x=2$, ta có $f(2)=1$. Ta có $I = \int_0^2 \dfrac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}dx$

Đặt $\begin{cases} u = x^3-3x^2 \\ \mathrm{d}v = \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x \\ v = \ln f(x) \end{cases}$ (do $f(x)>0, \forall x \in [0;2]$).

Khi đó, ta có

$I = \left.\left(x^3-3x^2\right)\ln f(x)\right|_0^2 - \int_0^2 \left(3x^2-6x\right)\ln f(x)\,\mathrm{d}x = -3\int_0^2 \left(x^2-2x\right)\ln f(x)\,\mathrm{d}x = -3J$.

$J=\int_0^2 (x^2-2x)\ln f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=2-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ ; đổi cận: $x=2\Rightarrow t=0; x=0\Rightarrow t=2$

$$J=\int_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln f(2-t)\mathrm{d}(2-t)$$

$$=\int_2^0\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]\ln f(2-x)\mathrm{d}(2-x)=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(2-x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $2J=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(2-x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)f(2-x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln e^{2x^2-4x}\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-2x)(2x^2-4x)\mathrm{d}x=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}$. Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}$.

**Cách 2:** Từ giả thiết ta có $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}=e^{x^2-2x}.e^{(2-x)^2-2(2-x)}$ nên ta có thể chọn $f(x)=e^{x^2-2x}$.

$$I=\int_0^2\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{(x^3-3x^2).(2x-2)e^{x^2-2x}}{e^{x^2-2x}}\mathrm{d}x=\int_0^2(x^3-3x^2).(2x-2)\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}.$$

**Câu 37.**

$$2\sin 2x\left[f(x)+\mathrm{e}^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right]+f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sin 2x.f(x)+2\sin 2x.\mathrm{e}^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}+f'(x)=0\ (1)$$

Do hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ nên chia hai vế phương trình $(1)$ cho $2\sqrt{f(x)}$ ta được $\sin 2x.\sqrt{f(x)}+\sin 2x.\mathrm{e}^{\cos 2x}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=0\ (2)$.

Nhân hai vế của phương trình $(2)$ với $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}$ ta được:

$$\sin 2x.\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}=-\sin 2x.\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right)'=-\sin 2x.\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=\int\left(-\sin 2x.\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}+C\ (3).$$

Trong đẳng thức $(3)$ cho $x=0$ ta được $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{f(0)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+C\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\mathrm{e}^2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+C\Leftrightarrow C=0$.

$$(3)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cos 2x}\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\mathrm{e}^{\cos 2x}\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{2\cos 2x}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{e}^{2\cos\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\simeq 0.367\in(0;1).$$

**Câu 38.** Đặt $x=t^3+2t-1$, ta có $\mathrm{d}x=(3t^2+2)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-1\Leftrightarrow t^3+2t-1=-1\Leftrightarrow t^3+2t=0\Leftrightarrow t=0$.

$x=2\Leftrightarrow t^3+2t-1=2\Leftrightarrow t^3+2t-3=0\Leftrightarrow t=1$.

Lúc đó ta có $I=\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1} f\left(t^3+2t-1\right).\left(3t^2+2\right)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}(2t-3).\left(3t^2+2\right)\mathrm{d}t$

$=\int_{0}^{1}\left(6t^3-9t^2+4t-6\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{3t^4}{2}-3t^3+2t^2-6t\right)\right|_0^1=-\frac{11}{2}$.

**Câu 39.** Ta có $6x.f\left(x^2\right)+5f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow 3.\int_0^1 2x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x+5\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 3A+5B=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\,(*)$. $A=\int_0^1 2x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$; $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=1$.

$A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

$B=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x; x=0\Rightarrow t=1, x=1\Rightarrow t=0$.

$B=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\Leftrightarrow 8.\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=cost\mathrm{d}t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\left.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{32}$.

**Câu 40.** Ta có $I=\int_0^{\ln 3}\left[x-1+f''\left(\mathrm{e}^x-3\right)\right].\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_0^{\ln 3}(x-1).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^{\ln 3}f''\left(\mathrm{e}^x-3\right).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$I_1=\int_0^{\ln 3}(x-1).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\left.(x-1).\mathrm{e}^x\right|_0^{\ln 3}-\int_0^{\ln 3}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=3(-1+\ln 3)+1-\left.\mathrm{e}^x\right|_0^{\ln 3}=-4+3\ln 3$.

Xét $I_2=\int_0^{\ln 3}f''\left(\mathrm{e}^x-3\right).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Đặt $\mathrm{t}=\mathrm{e}^x-3\Rightarrow \mathrm{dt}=\mathrm{e}^x.\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow \mathrm{t}=-2$.

$x=\ln 3\Rightarrow \mathrm{t}=0$. Suy ra $I_2=\int_{-2}^{0}f''(\mathrm{t}).\mathrm{dt}=\left.f'(\mathrm{t})\right|_{-2}^{0}=f'(0)-f'(-2)$.

Vì $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và đạt cực trị tại điểm $x=-2$ nên $f'(-2)=0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung có hoành độ $x=0$.

Phương trình của đường thẳng $d$ có dạng $3x+y-2021=0\Leftrightarrow y=-3x+2021$.

$d$ là tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung $\Rightarrow f'(0)=-3$.

$\Rightarrow I_2=-3-0=-3$. Vậy $I=I_1+I_2=-7+3\ln 3$.

**Câu 41.** Theo giả thiết: $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x$ nên $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Mặt khác: $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ (Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$).

nên $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Vậy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$

**Câu 42.** Lấy tích phân hai vế với cận dưới bằng $0$, cận trên bằng $1$ của đẳng thức

$f(2x)-xf\left(x^2\right)=5x-2x^3-1$ ta được: $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x=1$. $(1)$

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$;

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=2\Rightarrow \int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$; đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=1$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào $(1)$ ta được $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\Rightarrow \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Đồng thời thay $x=1$ vào biểu thức $f(2x)-xf\left(x^2\right)=5x-2x^3-1$ ta có $f(2)=3$.

Xét $I=\int\limits_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}\Rightarrow I=xf(x)\big|_1^2-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$.

**Câu 43.** **Cách 1**: Từ giả thiết $2f(4-x)-3f(x)=-x^2-6x+16\ \forall x\in[0;4]$ ta tính được

$f(0)=0; f(2)=0; f(4)=8$ (*).

Xét hàm số $f(x)$ là bậc hai, $f(x)=ax^2+bx+c$, từ (*) tìm được $f(x)=x^2-2x$.

Suy ra $I=\int\limits_0^4\left(x^3-2x^2\right)dx=\frac{64}{3}$.

**Cách 2**:

+) Ta có: $2\int_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x - 3\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 (-x^2-6x+16)\mathrm{d}x = -\frac{16}{3}$.

Đặt $t=4-x$, có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=0\Rightarrow t=4$; $x=4\Rightarrow t=0$.

Khi đó $2\int_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x = -2\int_4^0 f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2\int_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x - 3\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{16}{3}$. Từ đó $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$.

+) Từ giả thiết ta có $2x.f(4-x) - 3x.f(x) = -x^3-6x^2+16x\ \forall x\in[0;4]$

Suy ra $2\int_0^4 x.f(4-x)\mathrm{d}x - 3\int_0^4 x.f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 (-x^3-6x^2+16x)\mathrm{d}x = -64$ (1).

Đặt $t=4-x$, có $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=0\Rightarrow t=4$; $x=4\Rightarrow t=0$.

Khi đó $2\int_0^4 x.f(4-x)\mathrm{d}x = -2\int_4^0 (4-t).f(t)\mathrm{d}t = 8\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^4 t.f(t)\mathrm{d}t = \frac{128}{3} - 2I$.

Thế vào (1) ta có: $\frac{128}{3} - 5I = -64 \Rightarrow I = \frac{64}{3}$.

**Câu 44.** Ta có $x(6-f'(x)) = f(x)+2 \Leftrightarrow f(x)+x.f'(x) = 6x-2 \Leftrightarrow (x.f(x))' = 6x-2$.

Suy ra $x.f(x) = \int(6x-2)\mathrm{d}x = 3x^2-2x+C$.

Thay $x=1$ vào ta được: $1.f(1) = 1+C \Rightarrow 3 = 1+C \Rightarrow C=2$.

Do đó: $x.f(x) = 3x^2-2x+2 \Rightarrow f(x) = 3x-2+\frac{2}{x}$.

$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2\left(3x-2+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{3x^2}{2}-2x+2\ln x\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{2}+2\ln 2$.

**Câu 45.** Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=x-1 \end{cases}$

Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = f(0) - \int_0^1 x(x-1)(6+12x+e^{-x})\mathrm{d}x = 3e^{-1}$.

**Câu 46.** Thay $x=0$ ta được $f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Ta có: $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$

Từ hệ thức đề ra: $\int_0^2 [f(x)+f(2-x)]\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2-2x+2)\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Ta có :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(2\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 t.f'(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t.f(t)\big|_0^2 - \int_0^2 f(t)\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[2.(-1)-\frac{4}{3}\right] = -\frac{5}{3}$$

**Câu 47:** Ta có : $f(x) = xf'(x)+\ln x$.

$\Leftrightarrow -\ln x = f'(x).x - f(x).(x)' \Leftrightarrow \dfrac{-\ln x}{x^2} = \dfrac{f'(x).x - f(x).(x)'}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{-\ln x}{x^2}$. Lấy tích phân cận từ 1 đến $e$ cả 2 vế ta được :

$\int_1^e \dfrac{-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^e \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'\mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{2}{e} - 1 = \dfrac{f(x)}{x}\Big|_1^e = \dfrac{f(e)}{e} - \dfrac{f(1)}{1} \Rightarrow f(e) = 2.$

**Câu 48.** Ta có: $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $I = \int_{-3}^{0} \dfrac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, đổi cận $x = -3 \Rightarrow t = 3$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$.

$\Rightarrow I = -\int_3^0 \dfrac{f(-t)}{2^{-t}+1}\mathrm{d}t = \int_0^3 \dfrac{f(t)}{\dfrac{1}{2^t}+1}\mathrm{d}t = \int_0^3 \dfrac{2^t f(t)}{2^t+1}\mathrm{d}t = \int_0^3 \dfrac{2^x f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_{-3}^{3} \dfrac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} \dfrac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x + \int_0^3 \dfrac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^3 \dfrac{2^x f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x + \int_0^3 \dfrac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3 + 9 = 12$.

**Câu 49.** Theo giả thiết ta có $\left[f'(x)\right]^2 = 4\left[2x^2+1-f(x)\right] \Rightarrow \left[f'(x)\right]^2 + 4f(x) = 8x^2+4 \quad (*)$.

Lấy tích phân hai vế của biểu thức $(*)$ ta được

$\int_0^1 \left(\left[f'(x)\right]^2 + 4f(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(8x^2+4\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + 4\left(xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x.f'(x).\mathrm{d}x\right) = \dfrac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x - 4\int_0^1 x.f'(x).\mathrm{d}x + \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x - 4\int_0^1 x.f'(x).\mathrm{d}x + \int_0^1 4x^2\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - 2x\right]^2\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C.$

Vì $f(1) = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2+1$. Vậy $\int_0^1 x.f(x).\mathrm{d}x = \int_0^1 x.\left(x^2+1\right).\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$.

**Câu 50.** Ta có $f'(x) = f'(2-x) \Rightarrow f(x) = -f(2-x) + C \Rightarrow C = f(0) + f(2) = 4024$.

Do đó $f(x) + f(2-x) = 4042$.

Ta có $\begin{cases} \int_0^2 \left[f(x) + f(2-x)\right]\mathrm{d}x = \int_0^2 4042\mathrm{d}x = 8084 \\ f'(x) = f'(2-x) \Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4024$.

Khi đó $I = -\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\cos x)\mathrm{d}(2\cos x) = -\dfrac{1}{2}\int_2^0 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 2012$.

# II. CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỌN LỌC SỐ 02

## ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'\left(x\right)+\left(x+1\right)f\left(x\right)=e^{-x}$ với mọi $x$. Tính $f'\left(0\right)$.

**A.** $1$. **B.** $-1$. **C.** $e$. **D.** $\frac{1}{e}$.

**Câu 2:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $R$ thỏa mãn: $f'(x)=f(x)+e^{x}.\cos 2021x$ và $f(0)=0$ Đồ thi hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-1;1\right]$?

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 1287 **D.** 4043

**Câu 3:** Giả sử $f\left(x\right)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $\left(0;\pi\right)$ và $f'\left(x\right)\sin x=x+f\left(x\right)\cos x,\forall x\in\left(0;\pi\right)$. Biết $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{12}\left(a+b\ln 2+c\pi\sqrt{3}\right)$, với $a,b,c$ là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

**A.** $-1$. **B.** $1$. **C.** $11$. **D.** $-11$.

**Câu 4:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8;\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$. Giá trị của $\int_{-1}^1 f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-1$.. **B.** $1$.. **C.** $9$.. **D.** $-9$.

**Câu 5:** Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{2021}}{\sqrt{x^2+1}}$ và $F\left(0\right)=1$. Giá trị của $F\left(1\right)$ bằng

**A.** $\frac{\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^{2022}-2022}{2022}$. **B.** $\frac{\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^{2022}+2022}{2022}$.

**C.** $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2022}-2022}{2022}$. **D.** $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2022}+2022}{2022}$.

**Câu 6:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\le 2\\ x^2-1 & \text{khi } x>2\end{cases}$. Giá trị của tích phân $\int_1^e \frac{f\left(1+2\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{31}{6}$. **B.** $\frac{47}{12}$. **C.** $\frac{47}{6}$. **D.** $\frac{79}{12}$.

**Câu 7:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\ge 2\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin x+1\right)\cos x\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

**Câu 8:** Biết $\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3$ với $a,b$ là các số hữu tỉ. Tính $a-b$

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $0$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

**Câu 9:** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=\frac{1}{3}$ và $f'(x)=\sqrt{\ln^2 x+1}.\frac{\ln x}{x}$ với $x>0$. Khi đó $\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $\frac{\ln 2(\ln^3 2+1)}{3}$. **B.** $\frac{\ln 2(\ln 2+1)}{3}$. **C.** $\frac{\ln 2(\ln^2 2+3)}{9}$. **D.** $\frac{\ln 2(\ln 2-3)}{9}$.

**Câu 10:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)=f(5-x), \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_2^3 f(x)dx=2$. Tính $I=\int\limits_2^3 xf(x)dx$

**A.** $I=20$. **B.** $I=10$. **C.** $I=15$. **D.** $I=5$.

**Câu 11:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}$ với $a$ là số thực dương. Biết $F(0)=\sqrt{2}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

**A.** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}-3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{5}}{3}$.

**Câu 12:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4)=\frac{4}{3}$ và $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\right), \forall x>0$. Khi đó $\int\limits_1^4 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{1283}{30}$. **B.** $-\frac{157}{30}$. **C.** $\frac{157}{30}$. **D.** $-\frac{1283}{30}$.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(1)=3$ và $\frac{2f^2(x)}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{x^3}\right)f(x)+\frac{8}{x^4}=f'(x), \forall x>0$. Tính $\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** 6 – 2ln2. **B.** 6 + 4ln2. **C.** 6 + 2ln2. **D.** 8 + 4ln2.

**Câu 14:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ vọi mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $-\frac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-1-\frac{\ln 2}{2}$. **C.** $-\frac{3}{2}-\ln 2$. **D.** $-\frac{3}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

**Câu 15:** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1$ và $\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = 2$. Khi đó $\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(x)}{x}dx$ bằng

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $6$. **D.** $3$.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}dx$.

**A.** $I=-\frac{32}{5}$. **B.** $I=-\frac{16}{3}$. **C.** $I=-\frac{16}{5}$. **D.** $I=-\frac{14}{3}$.

**Câu 17:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $-\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $-\frac{10}{3}$.

**Câu 18:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x$ với mọi $x>0$

Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$.

**A.** $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Câu 19:** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=\left(x^2+3\right).f(x+1)$.Biết rằng $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2 (2x-1)f''(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $-4$. **B.** $8$. **C.** $0$. **D.** $4$.

**Câu 20:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = a\ln 3+b$, $a;b\in\mathbb{Z}$. Tính tổng $S=a+b^2$:

**A.** $S=4$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-1$.

**Câu 21:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x}$, $\forall x\neq 0, x\neq 1$. Khi đó $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

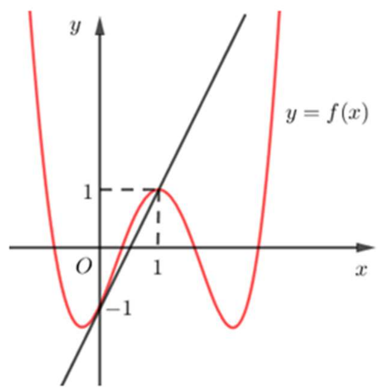
**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn: $x^2.f'(x)+f(x)=2x^3+x^2$, $\forall x>0$. Biết rằng $f(1)=0$. Tính giá trị của $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**A.** $I=\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}+\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{4}$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}-\mathrm{e}$.

**Câu 23:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=25\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$ và $f'(0)=5; f(0)=1$. Giá trị của $f\left(-\sqrt{3}\right)+f\left(\sqrt{3}\right)$ bằng

**A.** $3126$. **B.** $724$.. **C.** $1$.. **D.** $194$.

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x\left[f(x^3)-2\right]+f''(x^2)=x^3-3x^2-1$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ và tiếp tuyến $d$ tại điểm có hoành độ $x=0$ có đồ thị như hình vẽ.




Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $-\dfrac{17}{30}$. **B.** $-\dfrac{27}{10}$. **C.** $\dfrac{37}{20}$. **D.** $\dfrac{47}{15}$.

**Câu 25:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.\mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

**A.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{-2018}$. **B.** $f(1)=2017.\mathrm{e}^{2018}$. **C.** $f(1)=2019\mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1)=2018.\mathrm{e}^{2018}$.

**Câu 26:** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+3}$ thỏa $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 4$. Tập nghiệm $S$ của phương trình $3F(x)+\ln\left(\mathrm{e}^x+3\right)=2$ là

**A.** $S=\{1;2\}$. **B.** $S=\{-2;1\}$. **C.** $S=\{-2;2\}$. **D.** $S=\{2\}$.

**Câu 27:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{1}{2018.2021}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2019.2020}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2019.2021}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2018.2019}$.

**Câu 28:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $e^4f(4)-f(0)=\dfrac{26}{3}$. **B.** $e^4f(4)-f(0)=3e$.

**C.** $e^4f(4)-f(0)=e^4-1$. **D.** $e^4f(4)-f(0)=3$.

**Câu 29:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $3\int\limits_0^1\left[f'(x)\left[f(x)\right]^2+\dfrac{1}{9}\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính $I=\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=\dfrac{5}{4}$. **C.** $I=\dfrac{5}{6}$. **D.** $I=\dfrac{7}{6}$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)-f(0)=1$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\left[\left[f(x)\right]^2+1\right]\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Giá trị của $\left|\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x\right|$ bằng

**A.** $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{33}-27}{18}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{33}}{18}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{33}+54}{18}$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int\limits_1^2(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $-\dfrac{7}{20}$. **B.** $\dfrac{7}{20}$. **C.** $-\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{5}$.

**Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1,\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{9}{5}$ và $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

**A.** $I=\dfrac{1}{5}$. **B.** $I=\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{3}{5}$. **D.** $I=\dfrac{3}{4}$.

**Câu 33:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(0)+f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\dfrac{1}{\pi}$. **B.** $I=\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $I=\pi$. **D.** $I=\dfrac{3\pi}{2}$.

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ thoả mãn $\int_0^{\pi} f'\left(x\right)\sin x\mathrm{d}x=-1$ và $\int_0^{\pi}\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$. Tính $I=\int_0^{\pi} xf\left(x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=-\frac{6}{\pi}$. **B.** $I=-\frac{4}{\pi}$. **C.** $I=\frac{2}{\pi}$. **D.** $I=\frac{4}{\pi}$.

**Câu 35:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=3\pi$ và $\int_0^{\pi}\left(\sin x-x\right)f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=6\pi$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f''\left(x\right)\right]^3\mathrm{d}x$

**A.** $\frac{2}{\pi}$. **B.** $0$. **C.** $3\pi$. **D.** $9\pi$.

**Câu 36:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thoả mãn $f\left(1\right)=0$ và $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x+1\right)\mathrm{e}^x f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $I=\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $I=\mathrm{e}-2$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}$.

**Câu 37:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(0\right)=0$, $f\left(1\right)=1$ và $\int_0^1\frac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{e^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{e-1}$. Tích phân $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{e-2}{e-1}$. **B.** $\frac{e-1}{e-2}$. **C.** $\frac{1}{(e-1)(e-2)}$. **D.** $1$.

**Câu 38:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f\left(0\right)=0, f\left(1\right)=1$ và $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$. Tích phân $\int_0^1\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

**C.** $\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(\sqrt{2}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

**Câu 39:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[-1;1\right]$, thoả mãn $f\left(-1\right)=0$, $\int_{-1}^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=112$ và $\int_{-1}^1 x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

**A.** $I=\frac{84}{5}$. **B.** $I=\frac{35}{2}$. **C.** $I=\frac{35}{4}$. **D.** $I=\frac{168}{5}$.

**Câu 40:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 2$ và $\int_1^2 f(x).f'(x) dx = 1$. Tích phân $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

**A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $2$ **D.** $2\sqrt{2}$

**Câu 41:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 .f^2(x).dx = \frac{3}{4}$. Giá trị của $f^2(\sqrt{2})$ bằng

**A.** $-\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{3(1-\sqrt{2})}{2}$ **D.** $-\frac{3(1-\sqrt{2})}{2}$

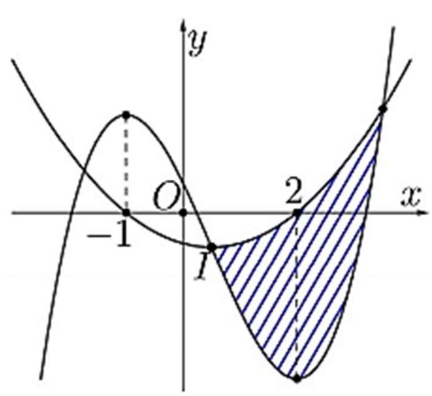
**Câu 42:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=1, \int_0^2 x^2.f(x) dx = \frac{8}{15}$ và $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{32}{5}$. Giá trị của tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

**A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

**Câu 43:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

**A.** $\frac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{1-2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3-2\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{3-4\ln 2}{2}$.

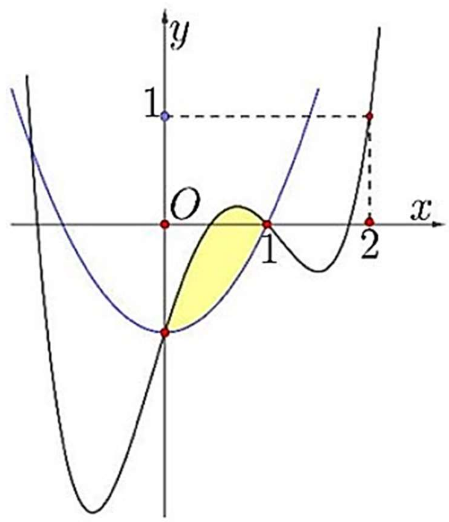
**Câu 44:** Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và hàm số bậc hai $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Biết rằng điểm $I$ có tung độ bằng $-\frac{7}{12}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3$ thoả mãn $18x_1x_2x_3 = -55$. Diện tích miền tô đậm nằm trong khoảng nào sau đây?

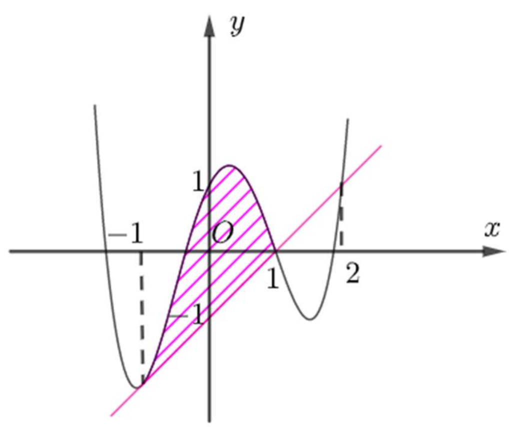
**A.** $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(7;8)$.

**Câu 45:** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ và $g(x)=x^2-1\ (C)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1<x_2<x_3<x_4$ thỏa mãn $x_1x_4=-3,\ x_1+x_4=x_3$ và diện tích miền tô đậm như hình vẽ bằng $\frac{8}{15}$. Giá trị của $f(3)$ bằng bao nhiêu?




**A.** $24$. **B.** $26$. **C.** $27$. **D.** $25$.

**Câu 46:** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ và hàm số bậc nhất $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Biết rằng đồ thị của hàm số $f(x)$ và đồ thị của hàm số $g(x)$ có 3 điểm chung. Hỏi miền tô đậm như hình vẽ có diện tích bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{11}{5}$. **C.** $\frac{13}{5}$. **D.** $\frac{14}{5}$.

**Câu 47:** Cho hàm số $f(x)$ liên trên $\mathbb{R}$ thỏa $f'(x)-2x=(2x+1)e^{x^2-f(x)},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị $f(1)$ là

**A.** $\ln(3e)$. **B.** $e+1$. **C.** $2\ln 3$. **D.** $\ln 3$.

**Câu 48:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(2x-f'(x)\right).e^{x^2}=e^{x+f(x)},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(2)$?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 49:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thoả $f(1)=0,\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{8}$ và $\int\limits_0^1\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{\pi}$. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $\pi$.

**Câu 50:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thoả mãn $\int\limits_0^1 f'(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\pi$ và $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\dfrac{-6}{\pi}$. **B.** $-\dfrac{4}{\pi}$. **C.** $\dfrac{4}{\pi}$. **D.** $\dfrac{6}{\pi}$.

**Câu 51:** Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,b,c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là $-3$ và $6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

**A.** $2\ln 2$. **B.** $2\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $\ln 3$.

**Câu 52:** Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị $(C)$, đường thẳng $y=mx+n$ là tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ và cắt $(C)$ tại điểm có hoành độ bằng $2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left(x^2-1\right)2^{f(x)-mx-n}$ và trục hoành bằng

**A.** $\dfrac{15}{16.\ln 2}$. **B.** $\dfrac{15}{16}$. **C.** $\dfrac{5}{16}\ln 2$. **D.** $\dfrac{5}{16.\ln 2}$.

**Câu 53:** Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g(x)=f(x).\mathrm{e}^{-x}$ có hai giá trị cực trị là $5$ và $-3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x)$ và $h(x)=(2ax+b).\mathrm{e}^{-x}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $8$. **C.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^{-3}$. **D.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^3$.

**Câu 54:** Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)$ có ba giá trị cực trị là $-14$; 4; 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+24}$ và $y=1$ bằng

**A.** $2\ln 3$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 3$. **D.** $\ln 5$.

**Câu 55:** Cho hàm số $f(x)=3x^3+bx^2+cx+d$ với $b,c,d\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là $-12;\ 6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+18}$ và $y=1$ bằng

**A.** $2\ln 3$. **B.** $\ln 6$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\ln 5$.

**Câu 56:** Cho hai hàm số $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$ và $g(x)=cx^2+dx+3$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-2$; 1. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

**A.** $\dfrac{45}{5}$. **B.** $2$. **C.** $\dfrac{99}{10}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1: Chọn B**

Ta có: $xf'(x)+(x+1)f(x)=e^{-x} \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)+xf(x)=e^{-x}$

$\Leftrightarrow xe^x f'(x)+(x+1)e^x f(x)=1 \Leftrightarrow xe^x f'(x)+(xe^x)' f(x)=1$

$\Leftrightarrow (xe^x f(x))' =1 \Leftrightarrow xe^x f(x)=\int dx = x+C \quad (*)$

Với $x=0$

Thay vào biểu thức ban đầu ta có: $0.f'(0)+(0+1)f(0)=e^{-0}=1 \Leftrightarrow f(0)=1$.

Thay vào $(*)$, ta có: $C=0$.

Khi đó: $xe^x f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$

Suy ra: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{-x}=-1$.

**Câu 2: Chọn C**

Ta có phương trình trên tương đương với

$\Rightarrow f'(x)=f(x)+e^x.\cos 2021x \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^x.\cos 2021x$

$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)+\left(-e^{-x}\right)f(x)=\cos 2021x$

Đến đây ta nguyên hàm hai vế thu được:

$\Rightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)' = \cos 2021x \Leftrightarrow e^{-x}f(x)=\int \cos 2021x dx=\dfrac{\sin 2021x}{2021}+C$

Mà $f(0)=0$ nên $C=0$ suy ra $e^{-x}f(x)=\dfrac{\sin 2021x}{2021} \Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x.\sin 2021x}{2021}$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x.\sin 2021x}{2021}=0 \Leftrightarrow \sin 2021x=0 \Leftrightarrow 2021x=k\pi, k\in Z \Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2021}, (k\in Z)$

Vì $x\in[-1;1]$ nên $-1\le \dfrac{k\pi}{2021}\le 1 \Rightarrow \dfrac{-2021}{\pi}\le k\le \dfrac{2021}{\pi}$

Mà do $k\in Z$ nên suy ra $k\in\{-643;-642;...;643\}$ như vậy ta kết luận đồ thi hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 1287 điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1;1]$

**Câu 3: Chọn A**

Từ giả thiết:

$\forall x\in(0;\pi), f'(x)\sin x = x+f(x)\cos x \Leftrightarrow f'(x)\sin x - f(x)\cos x = x$.

$\Leftrightarrow f'(x)\sin x - f(x)(\sin x)' = x \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)\sin x - f(x)(\sin x)'}{\sin^2 x}=\dfrac{x}{\sin^2 x}$.

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]' = \dfrac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\sin x}=\int \dfrac{x}{\sin^2 x}dx$.

Xét $I=\int \dfrac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\cot x \end{cases}$.

$\Rightarrow I=-x\cot x+\int \cot xdx=-x\cot x+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=-x\cot x+\int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x}=-x\cot x+\ln\left|\sin x\right|+C$.

Suy ra $\frac{f\left(x\right)}{\sin x}=-x\cot x+\ln\left|\sin x\right|+C\xrightarrow{f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1}C=1\Rightarrow f\left(x\right)=\sin x\left(-x\cot x+\ln\left|\sin x\right|+1\right)$.

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\left(-\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}+\ln\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\pi\sqrt{3}}{6}+\ln\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{12}\left(6-6\ln 2-\pi\sqrt{3}\right)$.

Như vậy $a=6,b=-6,c=-1\Rightarrow a+b+c=-1$.

**Câu 4:** **Chọn C**

Đặt $t=2x-1\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f\left(\left|2x-1\right|\right)dx=\int\limits_{-3}^{1} f\left(\left|t\right|\right).\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} f\left(\left|t\right|\right)dt=\frac{1}{2}\left(\int_{-3}^{0} f\left(-t\right)dt+\int\limits_{0}^{1} f\left(t\right)dt\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{0}^{3} f\left(t\right)dt+\int\limits_{0}^{1} f\left(t\right)dt\right)=\frac{1}{2}\left(10+8\right)=9$.

**Câu 5:** **Chọn B**

$$F\left(1\right)-F\left(0\right)=\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)dx\Leftrightarrow F\left(1\right)=F\left(0\right)+\int\limits_{0}^{1} f\left(x\right)dx\Rightarrow F\left(1\right)=1+\int\limits_{0}^{1}\frac{\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{2021}}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Đặt $t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow dt=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\end{cases}$.

Do đó:

$$F\left(1\right)=1+\int\limits_{0}^{1}\frac{\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{2021}}{\sqrt{x^2+1}}dx=1+\int\limits_{0}^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} t^{2021}dt=1+\left.\frac{t^{2022}}{2022}\right|_{0}^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^{2022}+2022}{2022}$$

**Câu 6:** **Chọn B**

Đặt $t=1+2\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{2}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$, $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\frac{f\left(1+2\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{1}^{2}\left(x+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{47}{12}$.

**Câu 7:** **Chọn B**

Xét $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin x+1\right)\cos x\mathrm{d}x$. Đặt $2\sin x+1=t\Rightarrow 2\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow \cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Với $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=3$

$\Rightarrow I=\int\limits_{1}^{3} f\left(t\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}\left(t^2-2t+3\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{3}\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t\right)\right|_{1}^{2}+\frac{1}{2}\left.\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\right|_{2}^{3}=\frac{23}{6}$.

**Câu 8:** **Chọn C**

Ta có $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}$. Đặt $t=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4 \Rightarrow t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \Rightarrow t=4 \\ x=\sqrt{5} \Rightarrow t=3 \end{cases}$.

Do đó $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int_3^4 \frac{t\mathrm{d}t}{\left(t^2-4\right)t} = \int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)} = \frac{1}{4}\int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t$

$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)\Bigg|_3^4 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{2}{6} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\ln 5 - \frac{1}{4}\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=\frac{1}{2}$.

**Câu 9: Chọn C**

Từ giả thiết, ta có: $f(x) = \int \sqrt{\ln^2 x+1}.\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

Đặt: $\sqrt{\ln^2 x+1} = t \to \ln^2 x+1 = t^2$; $\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$

$\leftrightarrow f(t) = \int t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + C \to f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\ln^2 x+1\right)^3} + C$

$f(1) = \frac{1}{3} \leftrightarrow C=0$; Suy ra: $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\ln^2 x+1\right)^3}$

Khi đó: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\frac{1}{3}\sqrt{\left(\ln^2 x+1\right)^3}}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.\int_1^2 \frac{\ln^2 x+1}{x}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}.\int_1^2 \ln^2 x.\mathrm{d}(\ln x) + \frac{1}{3}.\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{9}.\ln^3 x\Big|_1^2 + \frac{1}{3}.\ln x\Big|_1^2 = \frac{1}{9}.\ln^3 2 + \frac{1}{3}.\ln 2 = \frac{\ln 2.\left(\ln^2 2+3\right)}{9}$.

**Câu 10: Chọn D**

Đặt $t=5-x \Rightarrow \begin{cases} dt=-dx \\ x=5-t \end{cases}$. Khi đó :

$I = \int_2^3 xf(x)dx = -\int_3^2 (5-t)f(5-t)dt = \int_2^3 (5-t)f(5-t)dt$

$= \int_2^3 5f(5-t)dt - \int_2^3 tf(5-t)dt = 5\int_2^3 f(t)dt - \int_2^3 tf(t)dt$.

Khi đó $I = 5.2 - I \Leftrightarrow 2I = 10 \Leftrightarrow I = 5$.

**Câu 11: Chọn B**

Ta có $F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan^2 x+a}}\mathrm{d}x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\left(\tan^2 x+1+a\right)}{2\sqrt{1+\tan^2 x+a}} = \sqrt{\tan^2 x+1+a}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2+a} - \sqrt{a+1}$

$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} \Leftrightarrow a=1$.

Khi đó $F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+a\cos^2 x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan^2 x+a}}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\left(\tan^2 x+1+a\right)}{2\sqrt{1+\tan^2 x+a}}=\sqrt{\tan^2 x+1+a}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{4+a}-\sqrt{a+\frac{4}{3}}=\sqrt{5}-\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{21}}{3}.$

**Câu 12: Chọn B**

Ta có $\frac{1}{x}f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-f'(x)\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}.$

$\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=x+\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=x+\sqrt{x}\Rightarrow xf(x)=\int\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

Do $f(4)=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 4.\frac{4}{3}=\frac{1}{2}4^2+\frac{2}{3}\sqrt{4^3}+C\Leftrightarrow C=-8\Rightarrow xf(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-8.$

Vì vậy $\int\limits_1^4 xf(x)\mathrm{d}x==\int\limits_1^4\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-8\right)\mathrm{d}x=-\frac{157}{30}.$

**Câu 13: Chọn C**

Giả thiết: $\frac{2f^2(x)}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{x^3}\right)f(x)+\frac{8}{x^4}=f'(x),\forall x>0$

$\Leftrightarrow 2x^2f^2(x)-x^3f(x)-8xf(x)+8=x^4f'(x)$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2f^2(x)-4xf(x)+4\right)=x^3\left[xf'(x)+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow 2\left[xf(x)-2\right]^2=x^3\left[xf(x)\right]'\Leftrightarrow\frac{2}{x^3}=\frac{\left[xf(x)-2\right]'}{\left[xf(x)-2\right]^2}$

Do đó $\int\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x=\int\frac{\left[xf(x)-2\right]'}{\left[xf(x)-2\right]^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}+C=-\frac{1}{xf(x)-2}$

Thay $x=1$ vào hệ thức, ta được: $-1+C=-\frac{1}{f(3)-2}\Leftrightarrow C=0.$

$\Rightarrow-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{xf(x)-2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{x}.$

Vậy $\int\limits_2^4 f(x)dx=\int\limits_2^4\frac{x^2+2}{x}dx=\left(\frac{x^2}{2}+2\ln|x|\right)\Big|_2^4=6+2\ln 2.$

**Câu 14: Chọn B**

Ta có $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1\Leftrightarrow x^2f^2(x)+2xf(x)+1=f(x)+xf'(x)$

$\Leftrightarrow\left(xf(x)+1\right)^2=f(x)+xf'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)+xf'(x)}{\left(xf(x)+1\right)^2}=1$

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)+xf'(x)}{(xf(x)+1)^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(xf(x)+1)}{(xf(x)+1)^2} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{xf(x)+1} = x + C.$$

Do $f(1)=-2 \Rightarrow -\dfrac{1}{1.f(1)+1} = 1+C \Rightarrow C=0$. Vậy $-\dfrac{1}{xf(x)+1} = x \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$.

Do đó $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(-\ln x+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2}-\ln 2$.

**Câu 15: Chọn B**

Xét tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 1$

Đặt $t=\cos^2 x \Rightarrow dt = -2\sin x\cos x dx$. Đổi cận: $x=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$; $x=0 \Rightarrow t=1$

Khi đó $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{-2t}dt = 1 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}dt = 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x}dx = 2 \quad (1)$

Xét tích phân $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = 2$

Đặt $t=\ln^2 x \Rightarrow dt = 2.\dfrac{\ln x}{x}dx$. Đổi cận: $x=e^2 \Rightarrow t=4$; $x=e \Rightarrow t=1$

Khi đó $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{2t}dt = 2 \Leftrightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x}dx = 4 \quad (2)$

Cuối cùng lấy $(1)+(2)$ ta được $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(x)}{x}dx = 2+4 = 6.$

**Câu 16: Chọn C**

Theo giả thiết, ta có $f(x).f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên $\ln\left[f(x).f(2-x)\right] = \ln e^{2x^2-4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2-4x$.

Mặt khác, với $x=0$, ta có: $f(0).f(2)=1$ và $f(0)=1$ nên $f(2)=1$

Xét $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{\left(x^2-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, ta có $I=\displaystyle\int_0^2\left(x^2-3x^2\right)\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x^3-3x^2 \\ \mathrm{d}v = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x \\ v = \ln f(x) \end{cases}$.

Suy ra $I = \left[\left(x^3-3x^2\right)\ln f(x)\right]\Big|_0^2 - \displaystyle\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f(x)\mathrm{d}x$.

Đổi biến $x=2-t \Rightarrow dx=-dt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=2$ và $x=2 \Rightarrow t=0$

Khi đó:

$I=-\int_{2}^{0}\left(3t^2-6t\right)\ln f\left(2-t\right)\left(-\mathrm{d}t\right)=-\int_{0}^{2}\left(3t^2-6t\right)\ln f\left(2-t\right)\mathrm{d}t=-\int_{0}^{2}\left(3x^2-6x\right)\ln f\left(2-x\right)\mathrm{d}x$.

Từ $(1)$ và $(2)$ ta cộng vế theo vế, ta được $2I=-\int_{0}^{2}\left(3x^2-6x\right)\left[\ln f\left(x\right)+\ln f\left(2-x\right)\right]\mathrm{d}x$

Hay $I=-\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(3x^2-6x\right)\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(6x^4-24x^3-24x^2\right)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}x^5-6x^4-8x^3\right)\Big|_0^2=-\frac{16}{5}$.

**Câu 17: Chọn D**

Từ $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thay $x=0$ ta được $f\left(0\right)+f\left(2\right)=2$ mà $f\left(0\right)=3$ nên $f\left(2\right)=-1$.

Suy ra $\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f\left(2-x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

Đặt $t=2-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, khi đó $\int_{0}^{2}f\left(2-x\right)\mathrm{d}x=-\int_{2}^{0}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Xét $\int_{0}^{2}xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$, khi đó

$\int_{0}^{2}xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=xf\left(x\right)\Big|_0^2-\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2f\left(2\right)-\frac{4}{3}=-2-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

**Câu 18: Chọn D**

Ta có $2f\left(x\right)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x$ $(1)$. Đặt $\frac{1}{x}=t\Rightarrow x=\frac{1}{t}$ khi đó điều kiện đề bài cho trở thành

$2f\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}f\left(t\right)=\frac{1}{t}\Leftrightarrow 2t.f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(t\right)=1$ $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có: $\begin{cases}4f\left(t\right)+2t.f\left(\frac{1}{t}\right)=2x\\ f\left(t\right)+2t.f\left(\frac{1}{t}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow f\left(t\right)=\frac{1-2t}{-3}$.

Lấy tích phân cận từ $\frac{1}{2}$ đến $2$ ta được: $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(x\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1-2x}{-3}dx=\frac{3}{4}$..

**Câu 19: Chọn D**

Đặt $\begin{cases}u=2x-1\\ \mathrm{d}v=f''\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\\ \mathrm{v}=f'\left(x\right)\end{cases}$.

Ta có $I=\left(2x-1\right)f'\left(x\right)\Big|_0^2-2\int_{0}^{2}f'\left(x\right)\mathrm{d}x=3f'\left(2\right)+f'\left(0\right)-2f\left(x\right)\Big|_0^2$

$=3f'\left(2\right)+f'\left(0\right)-2\left(f\left(2\right)-f\left(0\right)\right)$.

Xét $f^2\left(1-x\right)=\left(x^2+3\right).f\left(x+1\right)(1)$.

Từ $(1)$ cho $x=-1, x=1$ ta được hệ sau $\begin{cases} f^2(2)=4f(0) \\ f^2(0)=4f(2) \end{cases}$

$\Rightarrow f^2(2)f^2(0)=16f(0)f(2) \Rightarrow f(0)f(2)=16 \Leftrightarrow f(0)=\dfrac{16}{f(2)}$.

Khi đó ta có $f^2(2)=4.\dfrac{16}{f(2)} \Leftrightarrow f^3(2)=64 \Leftrightarrow f(2)=4 \Rightarrow f(0)=4$.

Đạo hàm 2 vế của $(1)$ ta được $-2f(1-x)f'(1-x)=2xf(x+1)+(x^2+3)f'(x+1)(2)$

Từ $(2)$ cho $x=-1, x=1$ ta được hệ sau $\begin{cases} -2f(2)f'(2)=-2f(0)+4f'(0) \\ -2f(0)f'(0)=2f(2)+4f'(2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8f'(2)=-8+4f'(0) \\ -8f'(0)=8+4f'(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=-2 \\ f'(2)=2 \end{cases}$.

Vậy $I=3f'(2)+f'(0)-2\left(f(2)-f(0)\right)=3.2-2-2(4-4)=4$.

**Câu 20: Chọn D**

Do $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$ nên ta có: $f'(x)\left(1+f(x)\right)^2=\left[\left(f(x)\right)^2(x-1)\right]^2$

$$\Rightarrow f'(x)\left[\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}+\frac{1}{f(x)}\right]^2=(x-1)^2 \Rightarrow f'(x)\left[\frac{1}{\left(f(x)\right)^4}+\frac{2}{\left(f(x)\right)^3}+\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}\right]=(x-1)^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3\left(f(x)\right)^3}-\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}-\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{3}(x-1)^3+C$$

Lại có: $f(1)=-1 \Rightarrow C=\dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{3\left(f(x)\right)^3}-\dfrac{1}{\left(f(x)\right)^2}-\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{3}(x-1)^3+\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}+1\right]^3=(1-x)^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}+1=1-x \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^3\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_1^3=-\ln 3$$

Vậy $a=-1$; $b=0 \Rightarrow S=a+b^2=-1$

**Câu 21: Chọn A**

Từ giả thiết suy ra $f(1-x)+\dfrac{2}{x^2}f\left(\dfrac{2x-2}{x}\right)=\dfrac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}$.

Lấy tích phân 2 vế với cận từ 1 đến 2, ta được:

$$\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\int_1^2\left(-x+1+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^{-1} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\left(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\Bigg|_1^2 \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$. Vậy $\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$.

**Câu 22: Chọn D**

Xét: $x^2.f'(x)+f(x)=2x^3+x^2 \Leftrightarrow e^{\frac{-1}{x}}.f'(x)+\frac{1}{x^2}.e^{\frac{-1}{x}}.f(x)=(2x+1).e^{\frac{-1}{x}}$

$\Rightarrow \left(e^{\frac{-1}{x}}.f(x)\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x+1).e^{\frac{-1}{x}}dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right).e^x dx=I$

Đặt $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)dx, v=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} \end{cases}$, khi đó: $I=\left(\frac{2}{e}-\frac{3}{4e^2}\right)+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}.e^x dx-\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}.e^x dx$.

Đặt $I'=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}.e^x dx$, đặt $\begin{cases} u=e^x \Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\frac{1}{x^2}dx, v=\frac{-1}{x^2} \end{cases}$, khi đó: $I'=\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}.e^x dx$.

Suy ra: $I=\frac{1}{e}-\frac{1}{4e^2}=\left(e^{\frac{-1}{x}}.f(x)\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{-1}{e^2}.f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-e$

**Câu 23: Chọn B**

$(1+x^2)f''(x)+xf'(x)=25\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.f''(x)+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}f'(x)=\frac{25}{\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}.f'(x)\right)'=\frac{25}{\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}.f'(x)=25\int\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4 d\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5+C$

Mà $f'(0)=5\Leftrightarrow C=1\Rightarrow \sqrt{x^2+1}.f'(x)=5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5+1$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow f(x)=5\int\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4 d\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5+\int\frac{d\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C'$

Mà $f(0)=1$ nên $C'=0$ $\Rightarrow f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Khi đó

- $f\left(-\sqrt{3}\right)=\left(-\sqrt{3}+2\right)^5+\ln\left(-\sqrt{3}+2\right)$
- $f\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}+2\right)^5+\ln\left(\sqrt{3}+2\right)\Rightarrow f\left(-\sqrt{3}\right)+f\left(\sqrt{3}\right)=724.$.

**Câu 24: Chọn C**

Ta có: $x\left[f(x^3)-2\right]+f''(x^2)=x^3-3x^2-1$

$\Rightarrow x^2f(x^3)-2x^2+xf''(x^2)=x^4-3x^3-x\Rightarrow x^2f(x^3)+xf''(x^2)=x^4-3x^3+2x^2-x$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 xf''\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^4-3x^3+2x^2-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)=-\frac{23}{60}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{23}{60}-\frac{1}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right)=\frac{37}{60}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{37}{20}$$

**Câu 25: Chọn C**

Ta có: $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.\mathrm{e}^{2018x}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2018x}f'(x)-2018\mathrm{e}^{-2018x}f(x)=2018x^{2017}$

$\Rightarrow\left[e^{-2018x}f(x)\right]'=2018x^{2017}\Rightarrow e^{-2018x}f(x)=x^{2018}+C$.

Do $f(0)=2018$ nên $C=2018\Rightarrow e^{-2018x}f(x)=x^{2018}+2018\Rightarrow f(x)=\left(x^{2018}+2018\right)e^{2018x}$.

Vậy $f(1)=2019e^{2018}$.

**Câu 26: Chọn D**

Ta có : $F(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3}=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+3\right)}=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^x}-\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{3\left(\mathrm{e}^x+3\right)}=\frac{1}{3}\ln\mathrm{e}^x-\frac{1}{3}\ln\left(\mathrm{e}^x+3\right)+C$.

Theo đề : $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 4\Leftrightarrow-\frac{1}{3}\ln 4+C=-\frac{1}{3}\ln 4\Leftrightarrow C=0$.

Vậy: $F(x)=\frac{1}{3}\ln\mathrm{e}^x-\frac{1}{3}\ln\left(\mathrm{e}^x+3\right)$. Phương trình : $3F(x)+\ln\left(\mathrm{e}^x+3\right)=2$

$\Leftrightarrow-\ln\left(\mathrm{e}^x+3\right)+\ln\mathrm{e}^x+\ln\left(\mathrm{e}^x+3\right)=2\Leftrightarrow\ln\mathrm{e}^x=2\Leftrightarrow\ln\mathrm{e}^x=\ln\mathrm{e}^2\Leftrightarrow x=2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

**Câu 27: Chọn C**

Từ giả thiết $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$, với mọi $x\in[0;1]$, nhân hai vế cho $x^2$ ta được

$3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^{2020}\Leftrightarrow\left[x^3f(x)\right]'=x^{2020}$. Suy ra $x^3f(x)=\int x^{2020}\mathrm{d}x=\frac{x^{2021}}{2021}+C$.

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0$, suy ra $f(x)=\frac{x^{2018}}{2021}$.

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{2018}}{2021}\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}.\left.\frac{x^{2019}}{2029}\right|_0^1=\frac{1}{2019.2021}$.

**Câu 28: Chọn A**

Từ giả thiết $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$, với mọi $x\in[0;4]$, nhân hai vế cho $e^x$ ta được

$e^xf(x)+e^xf'(x)=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]'=\sqrt{2x+1}$.

Suy ra $e^xf(x)=\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$. Vậy $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$.

**Câu 29: Chọn D**

Ta có $3\int_0^1\left[f'(x)\left[f(x)\right]^2+\frac{1}{9}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3\int_0^1 \left[f'(x)\left[f(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{3} = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[9f'(x)\left[f(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x - 6\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[3\sqrt{f'(x)}.f(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow 3\sqrt{f'(x)}.f(x) - 1 = 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow 9f'(x).\left[f(x)\right]^2 = 1 \Rightarrow \int 9f'(x).\left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x$

$\Rightarrow 9.\frac{\left[f(x)\right]^3}{3} = x + C$. Vì $f(0) = 1$ nên ta có $C = 3$ $\Rightarrow \left[f(x)\right]^3 = \frac{1}{3}x + 1$.

Vậy $I = \int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \frac{7}{6}$.

**Câu 30: Chọn C**

Ta có: $\int_0^1 f'(x)\left[\left[f(x)\right]^2 + 1\right]\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)\left[f(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)\left[f(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)\,\mathrm{d}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)}f(x) - 1\right]^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \sqrt{f'(x)}f(x) = 1; \forall x \in [0;1] \Rightarrow f'(x)\left[f(x)\right]^2 = 1 \Rightarrow \int f'(x)\left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x$

$\Rightarrow \frac{\left[f(x)\right]^3}{3} = x + C \Rightarrow \left[f(x)\right]^3 = 3x + 3C$

Do $f(1) - f(0) = 1$ nên ta có $\sqrt[3]{3+3C} - \sqrt[3]{3C} = 1$

Đặt $u = \sqrt[3]{3+3C}, v = \sqrt[3]{3C}$. Ta có hệ: $\begin{cases} u - v = 1, (1) \\ u^3 - v^3 = 1, (2) \end{cases}$

Từ $(1)$ ta suy ra $u = v + 1$ thay vào $(2)$ ta được phương trình

$(v+1)^3 - v^3 = 3 \Leftrightarrow 3v^2 + 3v - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = \frac{-3-\sqrt{33}}{6} \\ v = \frac{-3+\sqrt{33}}{6} \end{array}\right.$

Hay $C = \frac{-27 \pm 5\sqrt{33}}{54} \Rightarrow \left[f(x)\right]^3 = 3x + \frac{-27 \pm 5\sqrt{33}}{18}$.

Với $\left[f(x)\right]^3 = 3x + \frac{-27+5\sqrt{33}}{18} \Rightarrow \int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \frac{5\sqrt{33}}{18} \Rightarrow \left|\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x\right| = \frac{5\sqrt{33}}{18}$.

Với $\left[f(x)\right]^3 = 3x + \frac{-27-5\sqrt{33}}{18} \Rightarrow \int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = -\frac{5\sqrt{33}}{18} \Rightarrow \left|\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x\right| = \frac{5\sqrt{33}}{18}$.

Vậy $\left|\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x\right| = \frac{5\sqrt{33}}{18}$.

**Câu 31: Chọn C**

Gọi $A=\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt: $u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$ ; $\mathrm{d}v=(x-1)^2\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{(x-1)^3}{3}$

Khi đó: $-\frac{1}{3}=\frac{(x-1)^3}{3}f(x)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{(x-1)^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_1^2(x-1)^3f'(x)\mathrm{d}x=1$.

Ta có $\int_1^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x=7,\int_1^2 2.\left(-7(x-1)^3.f'(x)\right)\mathrm{d}x=-14,\int_1^2 49(x-1)^6\mathrm{d}x=7$.

Suy ra $\int_1^2\left[f'(x)-7(x-1)^3\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)-7(x-1)^3=0\Rightarrow f(x)=\frac{7}{4}(x-1)^4+C$

Mà $f(2)=0\Rightarrow C=-\frac{7}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{7}{4}(x-1)^4-\frac{7}{4}\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{5}$.

**Cách 2.** Theo bất đẳng thức Holder:

$1=\left[\int_1^2(x-1)^3f'(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_1^2(x-1)^6\mathrm{d}x.\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{7}.7=1$.

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x)=k(x-1)^3$, với $k\in\mathbb{R}$.

Mà $\int_1^2(x-1)^3f'(x)\mathrm{d}x=1$ nên $\int_1^2 k(x-1)^6\mathrm{d}x=1\Rightarrow k=7\Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3$

$\Rightarrow f(x)=\frac{7}{4}(x-1)^4+C$ và $f(2)=0\Rightarrow C=-\frac{7}{4}\Rightarrow f(x)=\frac{7}{4}(x-1)^4-\frac{7}{4}\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{5}$.

**Câu 32: Chọn B**

Gọi $A=\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ .Khi đó: $A=2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$

Theo đề $A=\frac{2}{5}$ nên $2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}$ hay $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$.

Gọi $B=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $u=f(x)\Rightarrow\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x$ ; $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

Khi đó: $\frac{1}{5}=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$.

Ta có $\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{9}{5},\int_0^1 2.\left(-3x^2.f'(x)\right)\mathrm{d}x=-\frac{18}{5},\int_0^1 9x^4\mathrm{d}x=\frac{9}{5}\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)-3x^2\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'(x)-3x^2=0\Rightarrow f(x)=x^3+C$, mà $f(1)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x^3\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

***Cách 2:*** Theo bất đẳng thức Holder:

$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\left[\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_0^1 x^4\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{5}.\frac{9}{5}=\frac{9}{25}$.

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x)=kx^2$, với $k\in\mathbb{R}$. Mà $\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$ nên $\int_0^1 kx^4\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\Rightarrow k=3$.

Hay $f'(x)=3x^2$ suy ra $f(x)=x^3+C$.

Ta lại có $f(1)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x^3\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

**Câu 33: Chọn B**

$A=\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\cos(\pi x)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

Khi đó: $A=\left[\cos(\pi x).f(x)\right]\Big|_0^1+\pi\int_0^1\sin(\pi x)f(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\sin(\pi x)f(x)\mathrm{d}x$

Mà $A=\frac{\pi}{2}$ nên $\pi\int_0^1\sin(\pi x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^1\sin(\pi x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Ta lại có: $\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$; $\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Khi đó: $\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_0^1\sin(\pi x)f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f(x)-\sin(\pi x)\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f(x)-\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)=\sin(\pi x)\Rightarrow I=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

**Câu 34: Chọn B**

Gọi $A=\int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\cos x\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

Khi đó: $A=\left[\sin xf(x)\right]\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos x.f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^\pi\cos x.f(x)\mathrm{d}x$

Mà $A=-1$ nên $\int_0^\pi\cos x.f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\frac{4}{\pi}\int_0^\pi\cos x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}$.

Ta lại có: $\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$; $\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Suy ra: $\int_0^\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{4}{\pi}\int_0^\pi\cos x.f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\cos^2x\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^\pi\left[f(x)-\frac{2}{\pi}\cos x\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\cos x\Rightarrow I=\int_0^\pi xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi x\frac{2}{\pi}\cos x\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}$.

**Câu 35: Chọn B**

Gọi $I=\int_0^\pi(\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$, khi đó $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t-2t)f'(t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\sin 2x-2x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=(2\cos 2x-2)\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

Khi đó: $I=2\left[(\sin 2x-2x)f(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2x-2)f(x)\mathrm{d}x=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x$ (vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$)

Mà $I=6\pi$ nên $8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=6\pi$.

Ta lại có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x=3\pi$ ; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}16\sin^4 x\mathrm{d}x=6\pi$.

Khi đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x-8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}16\sin^4 x\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)-4\sin^2 x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f(x)-4\sin^2 x=0\Leftrightarrow f(x)=4\sin^2 x\Rightarrow f''(x)=8\cos 2x$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f''(x)\right]^3\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(8\cos 2x)^3\mathrm{d}x=0$.

**Câu 36: Chọn C**

Gọi $A=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=x\mathrm{e}^x\end{cases}$

Khi đó: $A=\left[x\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$

Mà $f(1)=0$ nên $\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\Rightarrow 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.

Ta lại có: $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{e^2-1}{4}$; $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Suy ra: $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int\limits_0^1 x e^x f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)+x\mathrm{e}^x\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x\Rightarrow f(x)=-\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(1-x)\mathrm{e}^x+C$

Mà $f(1)=0$ nên $C=0$ hay $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x$. Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2$.

**Câu 37: Chọn A**

**Cách 1.**

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}$ nên ta cần tìm một thông tin liên quan đến $f'(x)$.

Từ giả thiết $f(0)=0, f(1)=1$ ta nghĩ đến $\int\limits_0^1 f'(x)dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=1$.

Do đó ta có đạo hàm dưới dấu tích phân là $\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}$ và $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương

$\left[\frac{f'(x)}{e^x}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2$. Với số thực $\alpha$, ta có:

$$\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2dx=\int_0^1\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}dx+2\alpha\int_0^1 f'(x)dx+\alpha^2\int_0^1 e^xdx$$

$$=\frac{1}{e-1}+2\alpha+\alpha^2(e-1)=\frac{1}{e-1}\left[(e-1)\alpha+1\right]^2$$

Ta cần tìm $\alpha$ sao cho $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}+\alpha\sqrt{e^x}\right]^2dx=0$ hay $\frac{1}{e-1}\left[(e-1)\alpha+1\right]^2=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{e-1}$

Với $\alpha=-\frac{1}{e-1}$ thì $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}-\frac{1}{e-1}\sqrt{e^x}\right]^2dx=0\Rightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}\equiv\frac{1}{e-1}\sqrt{e^x},\ \forall x\in[0;1]$

Suy ra $f'(x)=\frac{e^x}{e-1}\to f(x)=\int\frac{e^x}{e-1}dx=\frac{e^x}{e-1}+C\xrightarrow{f(0)=0,\,f(1)=1}C=-\frac{1}{e-1}$.

Vậy $f(x)=\frac{e^x-1}{e-1}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{e-2}{e-1}$.

**Cách 2: Theo bđt Holder**

$$1=\left[f(1)-f(0)\right]^2=\left[\int_0^1 f'(x)dx\right]^2=\left[\int_0^1\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}.\sqrt{e^x}dx\right]^2\le\int_0^1\frac{\left[f'(x)\right]^2}{e^x}dx.\int_0^1 e^xdx=\frac{1}{e-1}(e-1)=1.$$

Từ đây suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}=k\sqrt{e^x}\Rightarrow f'(x)=ke^x$. Từ $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1=k(e-1)$ suy ra

$f'(x)=\frac{e^x}{e-1}\Rightarrow f(x)=\frac{e^x}{e-1}+C$, kết hợp $f(0)=0\Rightarrow f(x)=\frac{e^x-1}{e-1}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{e-2}{e-1}$.

**Câu 38: Chọn C**

Hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2$ nên ta cần tìm một thông tin liên quan $f'(x)$.

Từ giả thiết $f(0)=0,\ f(1)=1$ ta nghĩ đến $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\big|_0^1=f(1)-f(0)=1$.

Do đó ta có hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2$ và $f'(x)$ nên sẽ liên kết với bình phương

$$\left[\sqrt[4]{1+x^2}.f'(x)+\frac{\alpha}{\sqrt[4]{1+x^2}}\right]^2.$$

Với mỗi số thực $\alpha$ ta có :

$$\int_0^1\left[\sqrt[4]{1+x^2}.f'(x)+\frac{\alpha}{\sqrt[4]{1+x^2}}\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\alpha\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\alpha^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+2\alpha+\alpha^2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\left[\alpha\sqrt{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}\right]^2.$$

Ta cần tìm $\alpha$ sao cho $\int_0^1\left[\sqrt[4]{1+x^2}.f'(x)+\frac{\alpha}{\sqrt[4]{1+x^2}}\right]^2\mathrm{d}x=0$

$$\Rightarrow\left[\alpha\sqrt{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}\right]^2=0\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

Suy ra $f'(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

Mà $f(0)=0, f(1)\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\int_0^1\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\left.\frac{\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

**Cách 2.** Áp dụng BĐT Holder ta có

$$1=\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1\sqrt[4]{1+x^2}f'(x).\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}\mathrm{d}x\right)\le\int_0^1\sqrt{1+x^2}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=1$$

Suy ra $\sqrt[4]{1+x^2}f'(x)=k\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}\Rightarrow f'\left(x\right)=\dfrac{k}{\sqrt{1+x^2}}$.

Từ $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\left.f(x)\right|_0^1=f(1)-f(0)=1$ suy ra $k=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

Suy ra $f'(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

Mà $f(0)=0, f(1)\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\int_0^1\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\left.\frac{\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

**Câu 39: Chọn A**

Như các bài trước, ta chuyển $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$ về thông tin của $f'\left(x\right)$ bằng cách tích phân từng phần.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$.

Khi đó $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \dfrac{x^3}{3}f(x)\Big|_{-1}^{1} - \dfrac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^3 f'(x)dx = \dfrac{1}{3}f(1) + \dfrac{1}{3}f(-1) - \dfrac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^3 f'(x)dx$.

Tới đây ta bị vướng $f(1)$ vì giả thiết không cho. Do đó điều chỉnh lại như sau:

$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} + k \end{cases}$ với $k$ là hằng số.

Khi đó $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + k\right)f(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^3}{3} + k\right)f'(x)dx$

$= \left(\dfrac{1}{3} + k\right)f(1) - \underbrace{\left(-\dfrac{1}{3} + k\right)f(-1)}_{=0\ do\ f(-1)=0} - \int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^3}{3} + k\right)f'(x)dx$.

Ta chọn $k$ sao cho $\dfrac{1}{3} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3}$.

Khi đó $\dfrac{16}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = -\dfrac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^3 - 1)f'(x)dx \to \int_{-1}^{1}(x^3 - 1)f'(x)dx = -16$.

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $(x^3 - 1)f'(x)$ nên ta liên kết với $\left[f'(x) + \alpha(x^3 - 1)\right]^2$ tìm $\alpha$ sao cho $\int_{-1}^{1}\left[f'(x) + \alpha(x^3 - 1)\right]^2 dx = 0$.

Ta tìm được $\alpha = 7 \Rightarrow f'(x) = -7(x^3 - 1) \Rightarrow f(x) = -7\int(x^3 - 1)dx = -\dfrac{7}{4}x^4 + 7x + C$.

$\xrightarrow{f(-1)=0} C = \dfrac{35}{4} \to f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + 7x + \dfrac{35}{4}$. Vậy $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \dfrac{84}{5}$.

**Câu 40: Chọn A**

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $f(x).f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x) + \alpha f(x)]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$ nên hướng hày không khả thi.

Ta có $1 = \int_1^2 f(x).f'(x)dx = \dfrac{f^2(x)}{2}\Big|_1^2 = \dfrac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \dfrac{f^2(2) - 0}{2} \longrightarrow f(2) = \sqrt{2}$ (do đồng biến trên $[1;2]$ nên $f(2) > f(1) = 0$)

Từ $f(1) = 0$ và $f(2) = \sqrt{2}$ ta nghĩ đến $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$.

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $f'(x)$ nên ta sẽ liên kết $[f'(x) + \alpha]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -\sqrt{2} \longrightarrow f'(x) = \sqrt{2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{2}x + C \xrightarrow{f(1)=0} C = -\sqrt{2}$.

Vậy $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \longrightarrow \int_1^2 f(x)dx = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 41: Chọn A**

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2 f^2(x)$, $f^2(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)f(x)+\alpha f(x)\right]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int_0^1 f^2(x)f'(x)dx$ nên hướng hày không khả thi.

Tích phân từng phần $\int_0^1 f^2(x)dx=1$ kết hợp $f(1)=0$ ta được $\int_0^1 xf(x)f'(x)dx=-\dfrac{1}{2}$

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2 f^2(x)$, $xf(x)f'(x)$ nên ta sẽ liên kết $\left[f'(x)f(x)+\alpha x\right]^2$. Ta tìm được

$$\alpha=\frac{3}{2}\longrightarrow f(x)f'(x)=-\frac{3}{2}x\Rightarrow\int f(x)f'(x)dx=-\frac{3}{2}\int xdx\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=-\frac{3}{4}x^2+C.$$

$$\xrightarrow{f(1)=0}C=\frac{3}{4}\longrightarrow f^2(x)=\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)\longrightarrow f^2\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{3}{2}.$$

**Câu 42: Chọn B**

**Cách 1.**

Ta có: $\dfrac{8}{15}=\int_0^2 x^2.f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)=\left(\dfrac{x^3}{3}.f(x)\right)\Big|_0^2-\int_0^2\dfrac{x^3}{3}\mathrm{d}f(x)=\dfrac{8}{3}f(2)-\dfrac{1}{3}\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$

Suy ra $\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=8.f(2)-\dfrac{8}{5}=8.1-\dfrac{8}{5}=\dfrac{32}{5}.$

Áp dụng bất đẳng thức Hollder ta có

$$\left(\frac{32}{5}\right)^4=\left(\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x\right)^4=\left(\int_0^2 x^2.x.f'(x)\mathrm{d}x\right)^4\le\left(\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2.\left(\int_0^2 x^2.\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\le\left(\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^2.\int_0^2 x^4\mathrm{d}x.\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x=\left(\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\right)^3.\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x=\frac{1048576}{625}=\left(\frac{32}{5}\right)^4.$$

Dấu "=" xảy ra, tức là $xf'(x)=kx^2\Rightarrow f'(x)=kx$.

Thay $f'(x)=kx$ vào $\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{5}$. ta được

$$\int_0^2 kx^4\mathrm{d}x=\frac{32}{5}\Leftrightarrow k.\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{32}{5}\Leftrightarrow k.\frac{32}{5}=\frac{32}{5}\Leftrightarrow k=1.\Rightarrow f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C.$$

Vì $f(2)=1$ nên $C=-1$. Vậy $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-1$. Do đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{6}-x\right)\Big|_0^2=-\dfrac{2}{3}.$

**Cách 2.**

Áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có: $\left[f'(x)\right]^4+x^4+x^4+x^4\ge 4x^3.f'(x)$.

Do đó $\int_0^2\left[f'(x)\right]^4\mathrm{d}x+3\int_0^2 x^4\mathrm{d}x\ge 4\int_0^2 x^3.f'(x)\mathrm{d}x$.

Vì giá trị hai vế bằng nhau nên dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int x\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+C.$

Vì $f(2)=1$ nên $C=-1$. Vậy $f(x)=\frac{x^2}{2}-1$. Do đó $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{6}-x\right)\Big|_0^2=-\frac{2}{3}$.

**Câu 43: Chọn B**

**Cách 1:**

Như các bài trước, ta chuyển $\int\limits_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=2\ln 2-\frac{3}{2}$ về thông tin của $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=-\frac{1}{x+1}\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{f(x)}{x+1}\Big|_0^1+\int\limits_0^1\frac{f'(x)}{x+1}dx=-\frac{f(1)}{2}+\frac{f(0)}{1}+\int\limits_0^1\frac{f'(x)}{x+1}dx$ . Tới đây ta bị vướng $f(0)$ vì giả thiết không cho.

Do đó, ta điều chỉnh lại như sau: $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=-\frac{1}{x+1}+k\end{cases}$ với $k$ là hằng số.

Khi đó $\int\limits_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f'(x)dx$

$\overset{f(1)=0}{=}-(-1+k)f(0)-\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+k\right)f'(x)dx$.

Ta chọn $k$ sao cho $-1+k=0\Leftrightarrow k=1$.

Khi đó $2\ln 2-\frac{3}{2}=\int\limits_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\int\limits_0^1\frac{x}{x+1}f'(x)dx\longrightarrow\int\limits_0^1\frac{x}{x+1}f'(x)dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$.

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $\frac{x}{x+1}f'(x)$ nên ta liên kết với $\left[f'(x)+\alpha\frac{x}{x+1}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=-1\longrightarrow f'(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f(x)=\int\frac{x}{x+1}dx=x-\ln|x+1|+C$

$\xrightarrow{f(1)=0}C=\ln 2-1\longrightarrow f(x)=x-\ln(x+1)+\ln 2-1$. Vậy $\int\limits_0^1 f(x)dx=\frac{1-2\ln 2}{2}$.

**Cách 2: Theo BĐT Holder**

$$\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)^2=\left[\int\limits_0^1\frac{x}{x+1}f'(x)dx\right]^2\le\int\limits_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2dx\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right).\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right).$$

Từ đây suy ra $f'(x)=k.\frac{x}{x+1}$.

Từ $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$ suy ra $k=1\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow f(x)=\int\frac{x}{x+1}dx=x-\ln|x+1|+C$

$\xrightarrow{f(1)=0}C=\ln 2-1\Rightarrow f(x)=x-\ln(x+1)+\ln 2-1$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1-2\ln 2}{2}$.

**Câu 44: Chọn A**

Ta có: $g(x)=k(x+1)(x-2)$. Vì Parabol đối xứng qua trục nên điểm $I\left(\frac{1}{2};-\frac{7}{12}\right)$.

Khi đó, $-\frac{7}{12}=k\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\Rightarrow k=\frac{7}{27}\Rightarrow g(x)=\frac{7}{27}(x+1)(x-2)$.

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại

$x=-1,x=2\Rightarrow f'(x)=a(x+1)(x-2)\Rightarrow f(x)=a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)+b$

Đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $I$ nên $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{12}\Leftrightarrow -\frac{7}{12}=-\frac{13}{12}a+b,\ (1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)+b=\frac{7}{27}(x+1)(x-2)$

Theo định lý viet ta có: $18x_1x_2x_3=-55\Leftrightarrow 18.\frac{b+\frac{14}{27}}{\frac{a}{3}}=-55\Rightarrow 18b+\frac{28}{3}=-\frac{55a}{3},\ (2)$

Từ $(1),(2)$ bấm báy giải hệ $a=1,b=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra diện tích hình phẳng như hình có giá trị sấp sỉ 5,7.

Lưu ý: Bài này hoàn toàn có thể ra thi THPT, có thể "lách" định lí viet bậc ba vì rõ ràng $f(x)$, $g(x)$ có chung một nghiệm là $x=\frac{1}{2}\Rightarrow$ phân tích phương trình hoành độ giao điểm đưa về bậc hai rồi dùng viet bậc hai.

**Câu 45: Chọn B**

Dựa vào đồ thị nhận thấy $x_2=0,x_3=1$. Khi đó, $x_1x_4=-3,x_1+x_4=1$.

Khi đó, $f(x)-g(x)=kx(x-1)(x^2-x-3)$.

Theo đề ra, $\frac{8}{15}=k\int_0^1\left|x(x-1)(x^2-x-3)\right|\Rightarrow k=1$.

$\Rightarrow f(x)-g(x)=x(x-1)(x^2-x-3)\Rightarrow f(x)=x(x-1)(x^2-x-3)+x^2-1$.

Vậy $f(3)=26$.

**Câu 46: Chọn A**

Ta có: $f(x)-g(x)=k(x+1)^2(x-1)(x-2)$.

Cho $x=0\Rightarrow f(0)-g(0)=k(0+1)^2(0-1)(0-2)\Leftrightarrow 1-(-1)=2k\Rightarrow k=1$.

Vậy $f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-1)(x-2)\Rightarrow S=\int_{-1}^{1}\left|(x+1)^2(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{12}{5}$.

**Câu 47: Chọn A**

Ta có: $f'(x)-2x=(2x+1)e^{x^2-f(x)}\Leftrightarrow e^{f(x)-x^2}\left(f'(x)-2x\right)=(2x+1)$

$\Rightarrow \int e^{f(x)-x^2}\left(f'(x)-2x\right)=x^2+x+C \Leftrightarrow e^{f(x)-x^2}=x^2+x+C$

Cho $x=0 \Rightarrow e^{f(0)-0^2}=C \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=x^2+\ln(x^2+x+1) \Rightarrow f(1)=1+\ln 3=\ln(3e)$

**Câu 48: Chọn A**

Từ giả thiết $\left(2x-f'(x)\right).e^{x^2}=e^{x+f(x)}, \forall x\in\mathbb{R}$ chia cả 2 vế cho $e^{f(x)}$ ta có

$\left(2x-f'(x)\right).e^{x^2-f(x)}=e^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Lấy nguyên hàm cả 2 vế ta có $\int\left(2x-f'(x)\right).e^{x^2-f(x)}\mathrm{d}x=\int e^x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int e^{x^2-f(x)}\mathrm{d}\left(x^2-f(x)\right)=\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C \Rightarrow e^{x^2-f(x)}=e^x+C$

Thay $x=0$ ta có $e^{0-f(0)}=e^0+C \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=x^2-x \Rightarrow f(2)=2^2-2=2$

**Câu 49: Chọn B**

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$ và $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$ không thấy liên kết. Do đó ta chuyển thông tin của $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)$ về $f'(x)$ bằng cách tính tích phân từng phần của $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)dx=\frac{1}{2}$ cùng kết hợp với $f(1)=0$, ta được $\int_0^1\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)dx=-\frac{\pi}{4}$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$ và $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha=\frac{\pi}{2} \to f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \to f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+C \xrightarrow{f(1)=0} C=0$.

Vậy $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \to \int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{\pi}$. Chọn B

**Cách 2.** Theo Holder

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2=\left[\int_0^1\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)dx\right]^2\le\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{8}.$$

**Câu 50: Chọn B**

Chuyển thông tin của $f'(x)\sin(\pi x)$ về $f(x)$ bằng cách phân tích từng phần của $\int_0^1 f'(x)\sin(\pi x)dx=\pi$, ta được $\int_0^1 f(x)\cos(\pi x)dx=-1$.

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $f^2(x)$ và $\cos(\pi x)f(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f(x)+\alpha\cos(\pi x)\right]^2$..

Ta tìm được $\alpha = 2 \to f'(x) = -2\cos(\pi x) \to \int\limits_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = -2\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{4}{\pi}$.

**Cách 2.** Theo Holder $(-1)^2 = \left[\int\limits_0^1 f(x)\cos(\pi x)dx\right]^2 \le \int\limits_0^1 \cos^2(\pi x)dx.\int\limits_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2}.2.$

**Câu 51: Chọn A**

Xét hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$

Ta có $g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 6$.

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm $m, n$ và $\begin{cases} g(m) = -3 \\ g(n) = 6 \end{cases}$.

Xét phương trình $\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \Rightarrow g(x) + 6 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = n \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \left|\int\limits_m^n \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_m^n \frac{g(x)+6-f(x)}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_m^n \frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_m^n \frac{g'(x)}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\ln|g(x)+6|\Big|_m^n\right| = \left|\ln|g(n)+6| - \ln|g(m)+6|\right| = |\ln 12 - \ln 3| = \ln 4 = 2\ln 2.$$

**Câu 52: Chọn A**

Vì $f(x) - mx - n = x^3 + ax^2 + (b-m)x + c - n$ là hàm số bậc ba có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$

nên $f(x) - mx - n = (x+1)^2(x-2)$.

Đặt $g(x) = f(x) - mx - n = (x+1)^2(x-2)$, suy ra $g'(x) = 3x^2 - 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm $(x^2-1)2^{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \left|\int\limits_{-1}^1 (x^2-1).2^{g(x)}\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{3}\left|\int\limits_{-1}^1 g'(x).2^{g(x)}\mathrm{d}x\right| = \frac{5}{16.\ln 2}.$$

**Câu 53: Chọn B**

Ta có $g'(x) = [f'(x) - f(x)].\mathrm{e}^{-x} = [-ax^2 + (2a-b)x + b - c].\mathrm{e}^{-x}$.

Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của $g'(x)$, khi đó $\begin{cases} g'(x_1) = 0 \\ g'(x_2) = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} g(x_1) = 5 \\ g(x_2) = -3 \end{cases}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$f(x).\mathrm{e}^{-x} = (2ax+b).\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a-b)x + b - c].\mathrm{e}^{-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$$

Vậy diện tích hình phẳng được giới hạn bằng

$$S = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} [-ax^2 + (2a-b)x + b - c].\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} g'(x)\mathrm{d}x\right| = |g(x_2) - g(x_1)| = 8.$$

**Câu 54: Chọn C**

Xét hàm số: $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)+f''''(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)+24$

Vì $f''''(x)=24$. Gọi $x_1;\,x_2;\,x_3$ là các điểm cực trị của hàm số thì ta có $g'(x_1)=g'(x_2)=g'(x_3)=0$ và có thể giả sử $\begin{cases} g(x_1)=-14 \\ g(x_2)=4 \\ g(x_3)=6 \end{cases}$

Xét phương trình:

$$\frac{f(x)}{g(x)+24}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)+24 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+f'''(x)+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_3}\left(\frac{f(x)}{g(x)+24}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+24}-1\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left(\frac{f(x)}{g(x)+24}-1\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+24}\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+24}\right)\mathrm{d}x\right| \qquad =\left|\ln|g(x)+24|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|+\left|\ln|g(x)+24|\Big|_{x_2}^{x_3}\right|$$

$$=\big|\ln|g(x_2)+24|-\ln|g(x_1)+24|\big|+\big|\ln|g(x_3)+24|-\ln|g(x_2)+24|\big|$$

$$=\big|\ln|4+24|-\ln|-14+24|\big|+\big|\ln|6+24|-\ln|4+24|\big|=\ln 3.$$

**Câu 55: Chọn C**

Xét hàm số: $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$

Ta có $g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+18$

Vì $f'''(x)=18$. Gọi $x_1;\,x_2$ là các điểm cực trị của hàm số thì ta có $g'(x_1)=g'(x_2)=0$ và có thể giả sử $\begin{cases} g(x_1)=-12 \\ g(x_2)=6 \end{cases}$

Xét phương trình:

$$\frac{f(x)}{g(x)+18}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)+18 \Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+18}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-18}{g(x)+18}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+18}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{(g(x)+18)'}{g(x)+18}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\ln|g(x)+18|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\big|\ln|g(x_2)+18|-\ln|g(x_1)+18|\big|=\big|\ln|6+18|-\ln|-12+18|\big|=\ln 4=2\ln 2.$$

**Câu 56: Chọn C**

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} f(-2)=g(-2) \\ f(1)=g(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16+4a-2b+1=4c-2d+3 \\ 1+a+b+1=c+d+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a-c)-2(b-d)=-14 \\ (a-c)+(b-d)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=-2 \\ b-d=3 \end{cases}$

Ta có $f(x)-g(x)=x^4+(a-c)x^2+(b-d)x-2$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$S=\left|\int_{-2}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-2}^{1}\left(x^4+(a-c)x^2+(b-d)x-2\right)\mathrm{d}x\right|$

$=\left|\left(\frac{x^5}{5}+(a-c)\frac{x^3}{3}+(b-d)\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}\right|$

Thay $\begin{cases} a-c=-2 \\ b-d=3 \end{cases}$ ta có $S=\left|\frac{1^5-(-2)^5}{5}-2.\frac{1^3-(-2)^3}{3}+3.\frac{1^2-(-2)^2}{2}-2\left(1-(-2)\right)\right|=\frac{99}{10}$.

# CHƯƠNG 4: CÁC BÀI TOÁN SỐ PHỨC CHỌN LỌC

## I. CÁC BÀI TOÁN SỐ PHỨC CHỌN LỌC SỐ 01

### ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Cho số phức $z=a+bi$, $z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1-i}{\overline{z}}$ là số thực và $|z-3i|-|z-3-2i|=2$. Đặt $T=a^2+b^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $T\in(4;8)$. **B.** $T\in(8;9)$. **C.** $T\in(11;14)$. **D.** $T\in(17;20)$.

**Câu 2:** Xét hai số phức $z_1,z_2$ thỏa mãn $|z_1|=1,|z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

**A.** $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

**Câu 3:** Cho hai số phức $z,w$ thỏa mãn $|z|=2$, $|w-3+2i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|z^2-2wz-4|$ bằng

**A.** $16\sqrt{2}$. **B.** $18\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 24.

**Câu 4:** Xét các số phức $z,w$ thỏa mãn $|z-2w|=4$ và $|3z+w|=5$. Khi $|5z-3w+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính giá trị $|z-w+1|$.

**A.** $\dfrac{17\sqrt{2}}{7}$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{170}}{7}$.

**Câu 5:** Tìm các số phức $z$ thõa mãn $|z-(1-i)|=|\overline{z}+(2+i)|$ và $|z+2-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $z=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $z=\dfrac{1}{2}$. **C.** $z=-\dfrac{1}{2}i$. **D.** $z=\dfrac{1}{2}i$.

**Câu 6:** Có bao nhiêu số phức $z$ thỏa mãn hiệu bình phương phần thực và phần ảo bằng $\dfrac{1}{2}$ và $\left(\sqrt{3}z-|z|\right)i=\sqrt{2}\left(|z|-1\right)-z+i$.

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Câu 7:** Cho hai số phức $z_1,z_2$ sao cho $|z_1|=2$, $|z_2-6i|=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3|z_1-4|+2|z_2-9-6i|+6|z_1-z_2|$?

**A.** $8$. **B.** $36$. **C.** $10$. **D.** $24$.

**Câu 8:** Cho số phức $z$ thỏa mãn: $\begin{cases}|z-1-2i|\le 1\\ |z-1+2i|\ge|z+3-2i|\end{cases}$.

Gọi $S$ là diện tích phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn của số phức $z$. Tính $S$.

**A.** $S=\pi$. **B.** $S=2\pi$. **C.** $S=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $S=\dfrac{\pi}{4}$.

**Câu 9:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-2+5i|=2\sqrt{5}$. Biết rằng số phức $w=\left(2-i^{2021}\right)\left(\overline{z}-3i\right)+2021$ có tập hợp các điểm biểu diễn thuộc đường tròn $(C)$. Tính bán kính của $(C)$.

**A.** $20\pi$. **B.** $100\pi$. **C.** $220\pi$. **D.** $36\pi$.

**Câu 10:** Cho hai số phức $z_1$; $z_2$ thỏa mãn: $\begin{cases}|z_1-z_2-9-12i|=3\\|z_1-3-20i|=7-|z_2|\end{cases}$. Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+2z_2+12-15i|$. Tính $M^2-m^2$.

**A.** $450$. **B.** $675$. **C.** $451$. **D.** $225$.

**Câu 11:** Gọi $z_1, z_2$ là hai trong số các số phức thỏa mãn $|z-1+2i|=5$ và $|z_1-z_2|=8$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

**A.** $3$. **B.** $5$. **C.** $8$. **D.** $6$.

**Câu 12:** Biết số phức $z$ thỏa mãn $2|z-i|\le|z-\bar{z}-3i|$ và $z-\bar{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn cho số phức $z$ có diện tích là

**A.** $\frac{5\sqrt{5}}{12}$. **B.** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{5\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

**Câu 13:** Xét các số phức $z$ thoả mãn $\frac{z-2+i}{(z+\bar{z})i+2}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $2z$ là parabol có toạ độ đỉnh $I(a;b)$. Tính $S=a+b$?

**A.** $0$. **B.** $-1$. **C.** $-2$. **D.** $-3$.

**Câu 14:** Cho số phức $z_1, z_2$ thỏa mãn $\begin{cases}|1-2z_1|=|z_1-\overline{z_1}+i|\\|z_2|=|z_2-5+5i|\end{cases}$. Với $z_2=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ thì biểu thức $P=|z_1-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của $2a+3b$ là

**A.** $2a+3b=0$. **B.** $2a+3b=1$. **C.** $2a+3b=3$. **D.** $2a+3b=2$.

**Câu 15:** Gọi $z_1,z_2,z_3,z_4$ là $4$ nghiệm phức của phương trình $z^4+(4-m)z^2-4m=0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

**A.** $m=-1$. **B.** $m=\pm2$. **C.** $m=\pm3$ **D.** $m=\pm1$.

**Câu 16:** Cho phương trình $z^3-(m+1)z^2+(m+1+mi)z-1-mi=0$ trong đó $z\in\mathbb{C}$, $m$ là tham số thực. Số giá trị của tham số $m$ để phương trình có 3 nghiệm phức phân biệt sao cho các điểm biểu diễn của các nghiệm trên mặt phẳng phức tạo thành một tam giác cân là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 17:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;2)$, $C(3;-1)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1,z_2,z_3$. Tìm mô đun của số phức $z$ thỏa mãn $|z+46-40i|=\sqrt{929}$ và $P=3|z-z_1|^2+5|z-z_2|^2-7|z-z_3|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $|z|=\sqrt{129}$. **B.** $|z|=2\sqrt{29}$. **C.** $|z|=3\sqrt{929}$. **D.** $|z|=\sqrt{929}$.

**Câu 18:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|\le2$ và $M=\max\left|z+\frac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $-1<M<2$. **B.** $2<M<\frac{7}{2}$. **C.** $1<M<\frac{5}{2}$. **D.** $M^3+M^2+M<3$.

**Câu 19:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m(m \neq 0)$ để tồn tại duy nhất số phức $z$ thỏa mãn

$$\begin{cases} |z+1-2i| = 2 \\ |z-2-2i| = |m| \\ \left|z-2m-\left(m^2+m-2\right)i\right| = \left|z-2m+2+\left(m^2+m+2\right)i\right| \end{cases}.$$

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 20:** Chọn hai số phức trong các số phức có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| \le 5\left|1-\sqrt{3}i\right| - |z-2+4i|$. Xác suất để trong hai số chọn được có ít nhất một số phức có phần thực lớn hơn 2 là

**A.** $\dfrac{27}{110}$. **B.** $\dfrac{34}{55}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

**Câu 21:** Cho số phức $z$ không phải là số thực và $\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức $z$ thoả mãn $\left|z+\bar{z}\right| + \left|z-\bar{z}\right| = \left|z^2\right|$

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $8$.

**Câu 22:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương $m$ để có tất cả bốn số phức $z$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z| = m$ và $3\left|z+\bar{z}\right| + 4\left|z-\bar{z}\right| = 20$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Câu 23:** Cho hai số phức $u, v$ thỏa mãn $|u| = |v| = 10$ và $|3u-4v| = 50$. Tính $M = |4u+3v|$.

**A.** $30$. **B.** $40$. **C.** $50$. **D.** $60$.

**Câu 24:** Trong các số phức $z$ thỏa mãn $\left|z^2+1\right| = 2|z|$, gọi $z_1$ và $z_2$ lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ có giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $|w| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|w| = 2$. **C.** $|w| = \sqrt{2}$. **D.** $|w| = 1+\sqrt{2}$.

**Câu 25:** Xét các số phức $z = a+bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ thoả mãn $4\left(z-\bar{z}\right) - 15i = i\left(z+\bar{z}-1\right)^2$ và $|2z-1+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a+b$

**A.** $P = 0$. **B.** $P = \dfrac{19}{4}$. **C.** $P = \dfrac{19}{8}$. **D.** $P = 2$.

**Câu 26:** Xét số phức $z$ thỏa $2|z-1| + 3|z-i| \ge 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

**A.** $\dfrac{3}{2} < |z| < 2$. **B.** $|z| > 2$. **C.** $|z| < \dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{2}$.

**Câu 27:** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m-1)z + m^2 - 5m = 0$ ($m$ là tham số thực). Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên $m$ để phương trình đó có nghiệm $z_0$ thỏa mãn $\left|z_0\right|^3 = 3\left|\overline{z_0}\right| + 2$. Tổng các phần tử của tập $S$ là

**A.** $8$. **B.** $9$. **C.** $4$. **D.** $7$.

**Câu 28:** Trong tập số phức, cho phương trình $2z^2+2(m-1)z+m^2-3m-2=0$, $m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ trong đoạn $[0;2021]$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$?

**A.** 2016. **B.** 202 **C.** 202 **D.** 2017.

**Câu 29:** Cho hai số phức $z_1$, $z_2$ thỏa $|iz_1-1|=1$ và $|\overline{z_2}+i|=2$. Khi biểu thức $P=|2z_1+3z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1-2z_2|$ bằng

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 30:** Xét các số phức $z$, $w$ thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Khi $|z^2-wz-4|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z|+|w|$ bằng

**A.** $2+\sqrt{5}$. **B.** $2(1+\sqrt{5})$. **C.** $1+\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}-2$.

**Câu 31:** Xét các số phức $z$, $w$ thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $3$.

**Câu 32:** Trên tập hợp các số phức, xét Phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ ($m$ là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của $m$ để phương trình đó có nghiệm $z_0$ thỏa mãn $|z_0|=7$?

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $3$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1:** Cho số phức $z=a+bi$, $z\neq 0$ thỏa mãn $\frac{1-i}{\overline{z}}$ là số thực và $|z-3i|-|z-3-2i|=2$. Đặt $T=a^2+b^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $T\in(4;8)$. **B.** $T\in(8;9)$. **C.** $T\in(11;14)$. **D.** $T\in(17;20)$.

**Lời giải**

Vì $\frac{1-i}{\overline{z}}$ là số thực với $z=a+bi$ nên tồn tại số thực $k\ (k\neq 0)$ sao cho:

$\overline{z}=k(1-i)\Leftrightarrow a-bi=k-ki\Leftrightarrow \begin{cases}a=k\\-b=-k\end{cases}\Rightarrow a=b \quad (1)$.

$|z-3i|-|z-3-2i|=2\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-3)^2}-\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}=2 \ (2)$.

Thế $(1)$ vào $(2)$ ta được:

$\sqrt{b^2+(b-3)^2}-\sqrt{(b-3)^2+(b-2)^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{b^2+(b-3)^2}=2+\sqrt{(b-3)^2+(b-2)^2}$

$\Leftrightarrow 2b^2-6b+9=4+2b^2-10b+13+4\sqrt{2b^2-10b+13} \Leftrightarrow 4b-8=4\sqrt{2b^2-10b+13}$

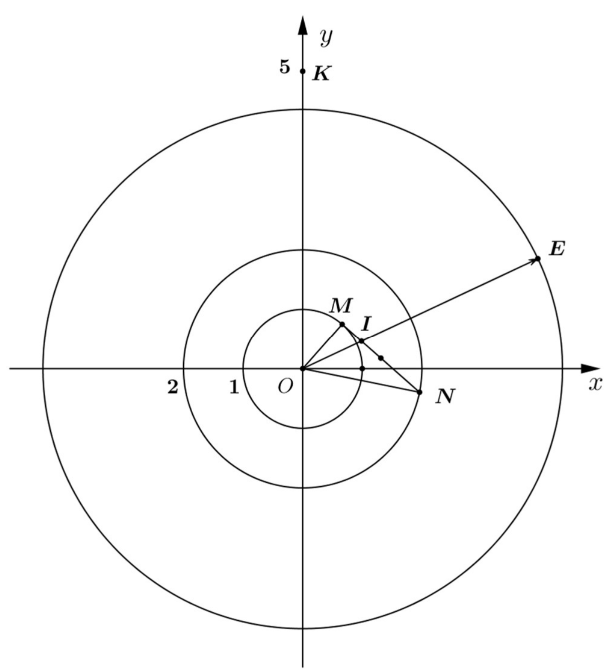
$\Leftrightarrow \begin{cases}b-2\geq 0\\(b-2)^2=(2b^2-10b+13)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b\geq 2\\b^2-6b+9=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b\geq 2\\b=3\end{cases}\Leftrightarrow b=3\Rightarrow a=3$.

$\Rightarrow T=3^2+3^2=18$. Chọn đáp án **D.**

**Câu 2:** Xét hai số phức $z_1,z_2$ thỏa mãn $|z_1|=1,|z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

**A.** $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

**Lời giải**




Giả sử $M,N,K$ lần lượt là các điểm biểu diễn $z_1,z_2,z_3=5i$.

Theo giả thiết ta có $M \in (C_1)$ tâm $O(0;0)$ và bán kính $r_1 = 1$.

$N \in (C_2)$ tâm $O(0;0)$ và bán kính $r_2 = 2$ và $MN = |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$.

Đặt $T = |3z_1 + z_2 - 5i| = |3\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK}|$

Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} = -3\overrightarrow{IM} \Rightarrow IN = 3IM, I \in MN$

Ta có $\Delta OMN$ vuông tại $M$, suy ra $OI^2 = OM^2 + IM^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{19}{14} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{19}}{4}$.

Suy ra $I$ thuộc đường tròn $(C_3)$ tâm $O$ bán kính $r_3 = \frac{\sqrt{19}}{4}$.

Khi đó $T = |3z_1 + z_2 - 5i| = |3\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK}| = |4\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OK}| = |\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OK}| = KE$

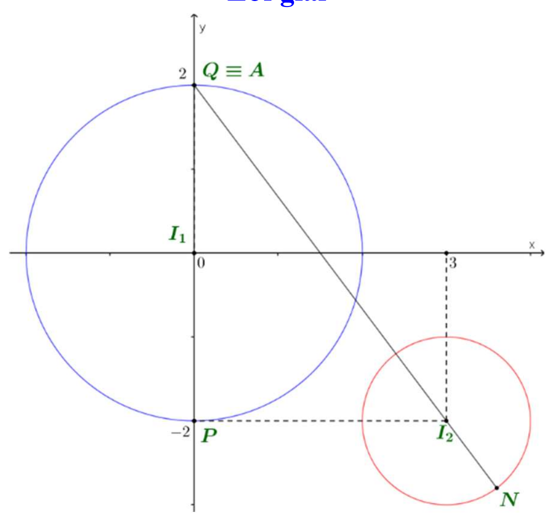
Với $\overrightarrow{OE} = 4\overrightarrow{OI}$ suy ra $E$ thuộc đường tròn $(C_4)$ tâm $O(0,0)$ bán kính $r_4 = \sqrt{19}$.

Suy ra $T_{\max} = KE_{\max} = KO + r_4 = 5 + \sqrt{19}$.

**Câu 3:** Cho hai số phức $z, w$ thỏa mãn $|z| = 2$, $|w - 3 + 2i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|z^2 - 2wz - 4|$ bằng

**A.** $16\sqrt{2}$. **B.** $18\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 24.

**Lời giải**




Giả sử $\begin{cases} z = a + bi \\ w = c + di \end{cases}, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$

Theo bài ra ta có: $|z| = 2 \Rightarrow |a + bi| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I_1(0;0)$, bán kính $R_1 = 2$.

$|w - 3 + 2i| = 1 \Rightarrow |c + di - 3 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |(c-3) + (d+2)i| = 1 \Leftrightarrow (c-3)^2 + (d+2)^2 = 1$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I_2(3;-2)$, bán kính $R_2 = 1$.

Đặt $T = |z^2 - 2wz - 4|$, ta có: $T = |z^2 - 2wz - z\bar{z}|$

$= |z||z - \bar{z} - 2w| = 2|a + bi - a + bi - 2w| = 4|bi - w|$.

Gọi $A(0;b)$ là điểm biểu diễn số phức $bi$; $N$ là điểm biểu diễn số phức $w$.

Khi đó $T = 4|bi - w| = 4.|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}| = 4AN \Rightarrow T_{\max} = 4AN_{\max}$.

Do $a^2+b^2=4 \Rightarrow -2 \le b \le 2$. Suy ra tập hợp $A$ là đoạn $PQ$ với $P(0;-2)$, $Q(0;2)$.

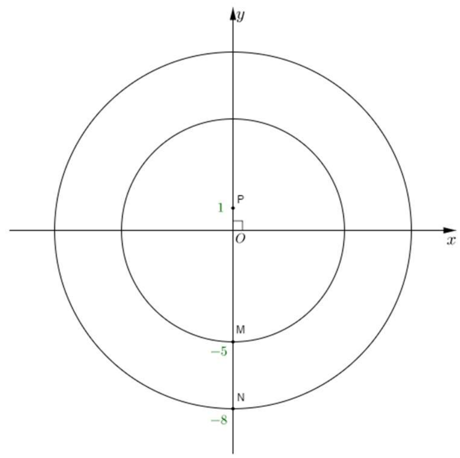
Dựa vào hình vẽ ta thấy $AN_{\max} \Leftrightarrow A \equiv Q$

$AN_{\max} = QI_2 + R_2 = 5+1=6$. Vậy $T_{\max} = 4AN_{\max} = 4.6 = 24$.

**Câu 4:** Xét các số phức $z, w$ thỏa mãn $|z-2w|=4$ và $|3z+w|=5$. Khi $|5z-3w+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính giá trị $|z-w+1|$.

**A.** $\dfrac{17\sqrt{2}}{7}$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{170}}{7}$.

**Lời giải**




Đặt $w_1 = 2z-4w, w_2 = -3z-w$.

Gọi $M, N, P(0;1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn $w_1, w_2, i$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} |w_1| = 2|z-2w| = 8 \\ |w_2| = |-3z-w| = 5 \end{cases}$ nên tập hợp các điểm $M$ biểu diễn $w_1$ là đường tròn tâm $O$, bán kính $R_1 = 8$, tập hợp các điểm $N$ biểu diễn $w_2$ là đường tròn tâm $O$, bán kính $R_2 = 5$.

Ta có $A = |5z-3w+i| = |w_1 - w_2 + i| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{OP}\right| \ge \left|\overrightarrow{NM}\right| - \left|\overrightarrow{OP}\right| \ge 8-5-1 = 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{NM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP} \\ NM \min \end{cases} \Leftrightarrow M(0;-8), N(0;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 2z-4w = -8i \\ w_2 = -3z-w = -5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{6i}{7} \\ w = \dfrac{17i}{7} \end{cases}$

$\Leftrightarrow |z-w+1| = \left|\dfrac{6i}{7} - \dfrac{17i}{7} + 1\right| = \dfrac{\sqrt{170}}{7}$.

Vậy khi $A = |5z-3w+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z-w+1| = \dfrac{\sqrt{170}}{7}$.

**Câu 5:** Tìm các số phức $z$ thõa mãn $|z-(1-i)| = |\bar{z}+(2+i)|$ và $|z+2-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $z = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $z = \dfrac{1}{2}$. **C.** $z = -\dfrac{1}{2}i$. **D.** $z = \dfrac{1}{2}i$.

**Lời giải**

Gọi $z = x + yi\,(x, y \in R)$; $|z-(1-i)| = |\bar{z}+(2+i)|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(1-y)^2 \Leftrightarrow 6x-4y+3=0\,(d)$

Giả sử $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z$, $M\in d$. $A(-2;1)$ biểu diễn số phức $z_1=-2+i$

$MA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $d$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-2-x)+6(1-y)=0 \\ 6x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=-2 \\ 6x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$. Vậy số phức $z=-\dfrac{1}{2}$

**Câu 6:** Có bao nhiêu số phức $z$ thỏa mãn hiệu bình phương phần thực và phần ảo bằng $\dfrac{1}{2}$ và $\left(\sqrt{3}z-|z|\right)i=\sqrt{2}\left(|z|-1\right)-z+i$.

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Ta có $\left(\sqrt{3}z-|z|\right)i=\sqrt{2}\left(|z|-1\right)-z+i \Leftrightarrow z\left(1+\sqrt{3}i\right)=\sqrt{2}\left(|z|-1\right)+\left(|z|+1\right)i$

$\Rightarrow 2|z|=\sqrt{2\left(|z|-1\right)^2+\left(|z|+1\right)^2}$.

Đặt $|z|=t,\ t\ge 0$, phương trình trở thành: $2t=\sqrt{2(t-1)^2+(t+1)^2}$

$\Leftrightarrow 4t^2=2(t-1)^2+(t+1)^2 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. \Rightarrow t=1$.

Gọi $z=x+yi$, với $x,\ y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$, kết hợp giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{3}{4} \\ y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i \\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \\ z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i \\ z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i \end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy chỉ có số phức $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ thỏa mãn đề.

Vậy có 1 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 7:** Cho hai số phức $z_1,z_2$ sao cho $|z_1|=2$, $|z_2-6i|=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3|z_{1^{,}}-4|+2|z_2-9-6i|+6|z_1-z_2|$?

**A.** $8$. **B.** $36$. **C.** $10$. **D.** $24$.

**Lời giải**

Gọi $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ $(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R})$ và hai điểm $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ trong mặt phẳng phức lần lượt biểu diễn số phức $z_1$ và $z_2$.

Ta có $|z_1|=2 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=4$ và $|z_2-6i|=3 \Leftrightarrow |x_2+(y_2-6)i|=3 \Leftrightarrow x_2^2+(y_2-6)^2=9$.

Ta xét các biểu thức

$3|z_{1'}-4|=3|x_1-4+y_1i|=3\sqrt{(x_1-4)^2+y_1^2}=3\sqrt{x_1^2+y_1^2-8x_1+16}$

$=3\sqrt{x_1^2+y_1^2-8x_1+16+3\left(x_1^2+y_1^2\right)-12}=6\sqrt{x_1^2-2x_1+1+y_1^2}$

$=6\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=6MA$, với điểm $A(1;0)$.

$2|z_2-9-6i|=2|x_2-9+(y_2-6)i|=2\sqrt{(x_2-9)^2+(y_2-6)^2}=2\sqrt{x_2^2+y_2^2-18x_2-12y_2+177}$

$=2\sqrt{x_2^2+y_2^2-18x_2-12y_2+177+8\left[x_2^2+(y_2-6)^2\right]-72}=6\sqrt{x_2^2-2x_2+1+y_2^2-12y_2+36}$

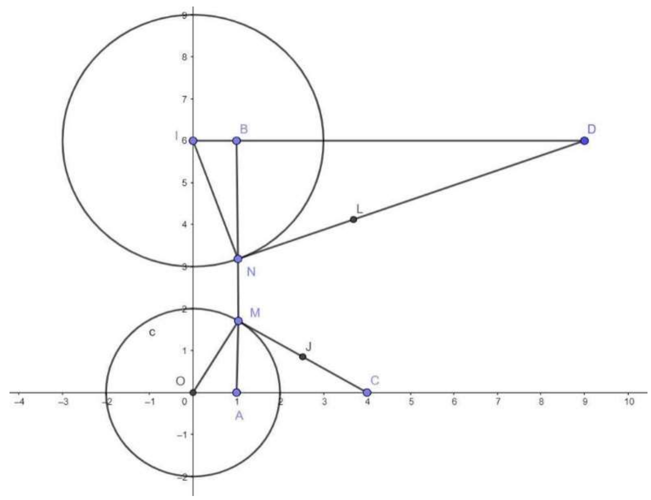
$=6\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-6)^2}=6NB$, với điểm $B(1;6)$.

$6|z_1-z_2|=6\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=6MN$ và $\overrightarrow{AB}=(0;6)\Rightarrow AB=6$.

Lúc đó $P=3|z_{1'}-4|+2|z_2-9-6i|+6|z_1-z_2|=6AM+6NB+6MN$

$=6(AM+MN+NB)\ge 6AB=36$.

Vậy $P_{\min}=36$. Dấu "=" xảy ra khi $A, M, N, B$ thẳng hàng.




**Câu 8:** Cho số phức $z$ thỏa mãn: $\begin{cases}|z-1-2i|\le 1\\ |z-1+2i|\ge |z+3-2i|\end{cases}$.

Gọi $S$ là diện tích phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn của số phức $z$. Tính $S$.

**A.** $S=\pi$. **B.** $S=2\pi$. **C.** $S=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $S=\dfrac{\pi}{4}$.

**Lời giải**

Giả sử $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

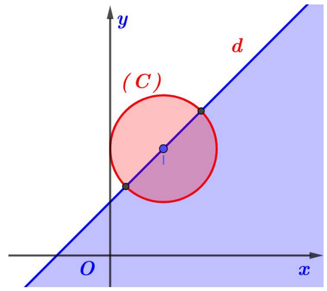
Khi đó $|z-1-2i|\le 1 \Leftrightarrow |(x-1)+(y-2)i|\le 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2\le 1$

Và $|z-1+2i|\ge|z+3-2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\ge\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\ge(x+3)^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow y\ge x+1$.

Gọi $(T)$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d: y=x+1$, không chứa gốc tọa độ $O(0;0)$.

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z$ thỏa mãn đề là nửa hình tròn $(C)$ tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$ và thuộc $(T)$.




Vì đường thẳng $d$ đi qua tâm $I(1;2)$ của hình tròn $(C)$ nên diện tích cần tìm là một nửa diện tích hình tròn $(C)$. Do đó $S=\dfrac{\pi}{2}$.

**Câu 9:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-2+5i|=2\sqrt{5}$. Biết rằng số phức $w=\left(2-i^{2021}\right)\left(\overline{z}-3i\right)+2021$ có tập hợp các điểm biểu diễn thuộc đường tròn $(C)$. Tính bán kính của $(C)$.

**A.** $20\pi$. **B.** $100\pi$. **C.** $220\pi$. **D.** $36\pi$.

**Lời giải**

Đặt $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2+5i|=2\sqrt{5}\Rightarrow\left|\overline{z-2+5i}\right|=2\sqrt{5}\Rightarrow\left|\overline{z}-2-5i\right|=2\sqrt{5}$.

Mà $w=\left(2-i^{2021}\right)\left(\overline{z}-3i\right)+2021=(2-i)\left(\overline{z}-2-5i+2i+2\right)+2021$

$\Leftrightarrow w=(2-i)\left(\overline{z}-2-5i\right)+(2-i)(2i+2)+2021\Leftrightarrow w-2027-2i=(2-i)\left(\overline{z}-2-5i\right)$.

Suy ra: $|w-2027-2i|=\left|(2-i)\left(\overline{z}-2-5i\right)\right|\Leftrightarrow|w-2027-2i|=|2-i|\left|\overline{z}-2-5i\right|$

$\Leftrightarrow|w-2027-2i|=\sqrt{5}.2\sqrt{5}\Leftrightarrow|w-2027-2i|=10\Leftrightarrow(x-2027)^2+(y-2)^2=100$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn w thuộc đường tròn $(C)$ có tâm $I(2027;2)$ và bán kính $R=10$.

Vậy bán kính của $(C)$ là $R=10$.

**Câu 10:** Cho hai số phức $z_1$; $z_2$ thỏa mãn: $\begin{cases}|z_1-z_2-9-12i|=3\\|z_1-3-20i|=7-|z_2|\end{cases}$. Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+2z_2+12-15i|$. Tính $M^2-m^2$.

**A.** $450$. **B.** $675$. **C.** $451$. **D.** $225$.

**Lời giải**

Đặt $w=z_1-9-12i$.

Ta có: $\begin{cases}|z_1-z_2-9-12i|=3\\|z_1-3-20i|=7-|z_2|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|w-z_2|=3\\|w+6-8i|+|z_2|=7.\end{cases}$

Gọi $A$, $B$ là điểm biểu diễn của $w$, $z_2$ $\Rightarrow\begin{cases}AB=3\\AM+OB=7\end{cases}$ với $M(-6;8)$

$\Rightarrow AB+AM+OB=10=OM\ \Rightarrow A,\ B$ nằm trên đoạn $OM$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{OM} \end{cases}$ với $x$, $y \in [0;1]$.

$\Rightarrow \begin{cases} w = -6x + 8xi \\ z_2 = -6y + 8yi \end{cases}$ với $x$, $y \in [0;1]$.

Khi đó $P = |z_1 + 2z_2 + 12 - 15i| = |w + 2z_2 + 21 - 3i|$

$= \sqrt{(-6x - 12y + 21)^2 + (8x + 16y - 3)^2} = \sqrt{[-6(x+2y)+21]^2 + [8(x+2y)-3]^2}$.

Đặt $t = x + 2y$ $(0 \le t \le 3)$.

$P = \sqrt{(-6t+21)^2 + (8t-3)^2} = \sqrt{100t^2 - 300t + 450}$

Khảo sát hàm số $f(t) = 100t^2 - 300t + 450$ trên đoạn $[0;3]$ ta được $\max\limits_{[0;3]} f(t) = f(0) = 450$ và

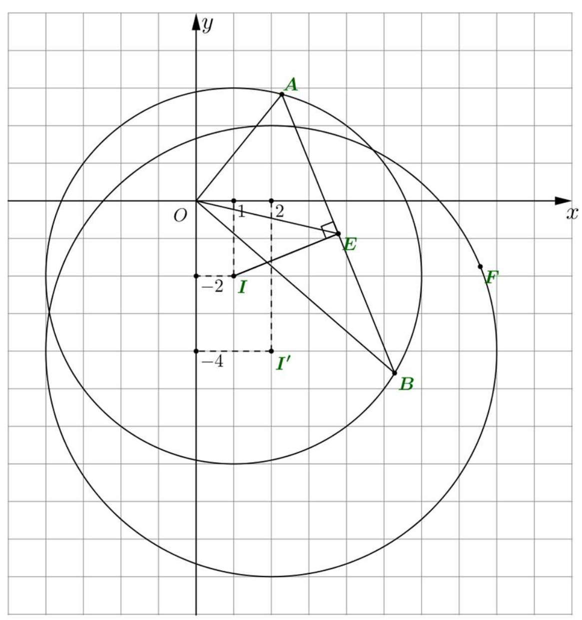
$\min\limits_{[0;3]} f(t) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 225 \Rightarrow \begin{cases} P_{\max} = M = \sqrt{450} \\ P_{\min} = m = 15 \end{cases}$.

Vậy $M^2 - m^2 = 225$.

**Câu 11:** Gọi $z_1, z_2$ là hai trong số các số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

**Lời giải**




Gọi $A, B$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1, z_2$.

Do $z_1, z_2$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ nên $A, B$ thuộc đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 5$.

Mà $|z_1 - z_2| = 8$ suy ra $AB = 8$.

Gọi $E$ là trung điểm của $AB$. Ta có $IE = \sqrt{IA^2 - EA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Như vậy khi $A, B$ thay đổi trên $(C)$ và thỏa mãn $AB = 8$ thì $E$ thay đổi trên đường tròn $(C_1)$ tâm $I$ bán kính $R_1 = IE = 3$.

Gọi $F$ là điểm biểu diễn số phức $w$. Ta có $w = z_1 + z_2 \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$.

Suy ra $F$ là ảnh của $E$ qua phép vị tự $V$ tâm $O$ tỉ số $k = 2$.

Do đó khi $E$ chạy trên đường tròn $(C_1)$ thì $F$ sẽ chạy trên đường tròn $\left(C_1'\right)$ là ảnh của $(C_1)$ qua phép vị tự $V$ tâm $O$ tỉ số $k = 2$.

Gọi $I'$ và $R_1'$ lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn $(C_1')$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OI'} = 2\overrightarrow{OI} \\ R_1' = 2R_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I'(2;-4) \\ R_1' = 6 \end{cases}$.

Vậy tập hợp điểm $F$ biểu diễn số phức $w$ là đường tròn có bán kính bằng 6.

**Câu 12:** Biết số phức $z$ thỏa mãn $2|z-i| \le |z - \bar{z} - 3i|$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn cho số phức $z$ có diện tích là

**A.** $\frac{5\sqrt{5}}{12}$. **B.** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{5\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

**Lời giải**

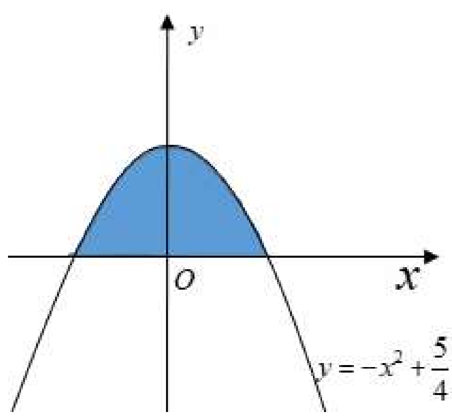
Gọi $z = x + yi\,(x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $2|z-i| \le |z-\bar{z}-3i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} \le \sqrt{(2y-3)^2} \Leftrightarrow 4\left[x^2+(y-1)^2\right] \le (2y-3)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-8y+4 \le 4y^2-12y+9 \Leftrightarrow 4y \le -4x^2+5 \Leftrightarrow y \le -x^2+\frac{5}{4}\ \ (1)$.

Số phức $z - \bar{z} = 2yi$ có phần ảo không âm $\Leftrightarrow y \ge 0\ \ (2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ ta suy ra phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn cho số phức $z$ là hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = -x^2 + \frac{5}{4}$ và trục hoành.




Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và trục hoành là $-x^2 + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi $S$ là diện tích cần tìm $\Rightarrow S = 2.\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(-x^2+\frac{5}{4}\right)\mathrm{d}x = 2.\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$.

**Câu 13:** Xét các số phức $z$ thoả mãn $\frac{z-2+i}{(z+\bar{z})i+2}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $2z$ là parabol có toạ độ đỉnh $I(a;b)$. Tính $S = a + b$?

**A.** $0$. **B.** $-1$. **C.** $-2$. **D.** $-3$.

**Lời giải**

Giả sử $z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $\dfrac{z-2+i}{(z+\overline{z})i+2}=\dfrac{x-2+(y+1)i}{2+2xi}=\dfrac{[x-2+(y+1)i](1-xi)}{2(1+x^2)}$

$=\dfrac{x-2+x(y+1)+[-x(x-2)+y+1]i}{2(1+x^2)}$.

$\dfrac{z-1+i}{(z+\overline{z})i+1}$ là số thực $\Leftrightarrow -x(x-2)+y+1=0 \Leftrightarrow y=x^2-2x-1 \Leftrightarrow 2y=\dfrac{1}{2}.4x^2-2.2x-2$.

Số phức $2z$ có điểm biểu diễn $M(2x;2y)$

$\Rightarrow$ quỹ tích các điểm $M$ là parabol có phương trình $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x-2$.

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $2z$ là parabol có toạ độ đỉnh $I(2;-4)$

$\Rightarrow S=2+(-4)=-2$.

**Câu 14:** Cho số phức $z_1,z_2$ thỏa mãn $\begin{cases}|1-2z_1|=|z_1-\overline{z_1}+i|\\|z_2|=|z_2-5+5i|\end{cases}$. Với $z_2=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ thì biểu thức $P=|z_1-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của $2a+3b$ là

**A.** $2a+3b=0$. **B.** $2a+3b=1$. **C.** $2a+3b=3$. **D.** $2a+3b=2$.

**Lời giải**

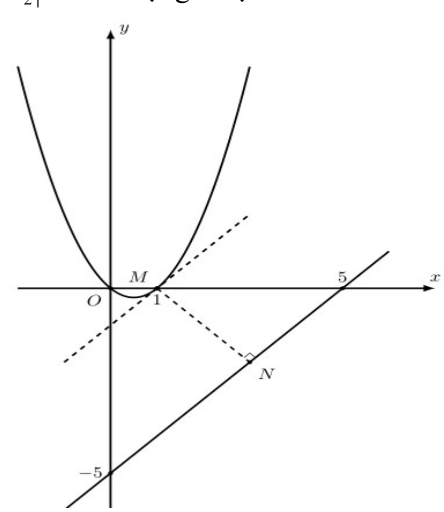
Đặt $z_1=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Gọi $M,N$ lần lượt là điểm biểu diễn hình học của hai số phức $z_1,z_2$.

Ta có $M(x;y),N(a;b)$ và

$$\begin{cases}|1-2z_1|=|z_1-\overline{z_1}+i|\\|z_2|=|z_2-5+5i|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1)^2+4y^2=(2y+1)^2\\a^2+b^2=(a-5)^2+(b+5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2-x\\b=a-5\end{cases}.$$

Khi đó bài toán trở thành tìm $M$ trên parabol $(P): y=x^2-x$ và $N$ trên đường thẳng $d: y=x-5$ sao cho $P=|z_1-z_2|=MN$ đạt giá trị nhỏ nhất.




Khi đó $M$ là điểm trên parabol $(P)$ sao cho tiếp tuyến với parabol tại $M$ có hệ số góc bằng 1.

Ta có $y'(1)=1 \Leftrightarrow 2x-1=1 \Leftrightarrow x=1$.

Suy ra $M(1;0)$.

Khi đó điểm $N$ là hình chiếu vuông góc của điểm $M$ lên đường thẳng $d: y=x-5$.

Đường thẳng $MN$ qua $M$ và vuông góc với đường thẳng $(d)$.

Ta có $MN: y=-x+1$.

$N=MN\cap d$ nên tọa độ điểm $N$ thỏa hệ $\begin{cases} y=x-5 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$.

Khi đó $N(3;-2)$ hay $z_2=3-2i$.

Vậy $2a+3b=2.3+3.(-2)=0$.

**Câu 15:** Gọi $z_1,z_2,z_3,z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4-m)z^2-4m=0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

**A.** $m=-1$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $m=\pm 3$ **D.** $m=\pm 1$.

**Lời giải**

Ta có: $z^4+(4-m)z^2-4m=0 \Leftrightarrow (z^2+4)(z^2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2=-4 & (1) \\ z^2=m & (2) \end{array}\right.$

Ta có: $|z^n|=|z|^n$.

$z_1;z_2$ là nghiệm của phương trình $(1)$. Ta có: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{|-4|}=2$.

$z_3;z_4$ là nghiệm của phương trình $(2)$. Ta có: $|z_3|=|z_4|=\sqrt{|m|}$.

Theo đề ra ta có: $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6 \Leftrightarrow 2\sqrt{|m|}+4=6 \Leftrightarrow \sqrt{|m|}=1 \Leftrightarrow |m|=1$.

Kết luận $m=\pm 1$.

**Câu 16:** Cho phương trình $z^3-(m+1)z^2+(m+1+mi)z-1-mi=0$ trong đó $z\in\mathbb{C}$, $m$ là tham số thực. Số giá trị của tham số $m$ để phương trình có 3 nghiệm phức phân biệt sao cho các điểm biểu diễn của các nghiệm trên mặt phẳng phức tạo thành một tam giác cân là

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

Xét phương trình:

$$z^3-(m+1)z^2+(m+1+mi)z-1-mi=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2-mz+1+mi=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2-i^2-(mz-mi)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ (z-i)(z+i-m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=i \\ z=m-i \end{array}\right..$$

Đặt $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(m;-1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các nghiệm $z=1$, $z=i$, $z=m-i$ trên mặt phẳng phức.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(m-1;-1)$, $\overrightarrow{BC}=(m;-2)$

$AB=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{m^2+4}$, $AC=\sqrt{(m-1)^2+1}$.

Ba điểm $A$, $B$, $C$ tạo thành một tam giác khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay $m \neq 2$.

Tam giác $ABC$ cân $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC = AB \\ BC = AB \\ AC = BC \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{(m-1)^2+1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{m^2+4} = \sqrt{2} \\ \sqrt{(m-1)^2+1} = \sqrt{m^2+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m=0 \\ -2m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $m \neq 2$ ta được $m \in \{0;-1\}$.

Vậy có hai giá trị của $m$ thỏa mãn đề.

**Câu 17:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;2)$, $C(3;-1)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1, z_2, z_3$. Tìm mô đun của số phức $z$ thỏa mãn $|z+46-40i| = \sqrt{929}$ và $P = 3|z-z_1|^2 + 5|z-z_2|^2 - 7|z-z_3|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $|z| = \sqrt{129}$. **B.** $|z| = 2\sqrt{29}$. **C.** $|z| = 3\sqrt{929}$. **D.** $|z| = \sqrt{929}$.

**Lời giải**

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z$ trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$. Khi đó,

$|z+46-40i| = \sqrt{929} \Leftrightarrow (x+46)^2 + (y-40)^2 = 929$.

Tập hợp điểm $M$ nằm trên đường tròn $(C)$ tâm $H(-46;40)$ bán kính $R = \sqrt{929}$.

$P = 3|z-z_1|^2 + 5|z-z_2|^2 - 7|z-z_3|^2 \Leftrightarrow P = 3MA^2 + 5MB^2 - 7MC^2$

Gọi $I$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}\right) + 5\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}\right) - 7\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 7\overrightarrow{OC} \Rightarrow$ Tọa độ điểm $I(-23;20)$

Khi đó: $P = 3\overrightarrow{MA}^2 + 5\overrightarrow{MB}^2 - 7\overrightarrow{MC}^2 = 3\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}\right)^2 + 5\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}\right)^2 - 7\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}\right)^2$

$= IM^2 - 2\overrightarrow{IM}\left(3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 7\overrightarrow{IC}\right) + 3IA^2 + 5IB^2 - 7IC^2 = IM^2 + 3IA^2 + 5IB^2 - 7IC^2$.

Do đó, $P$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $IM$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận thấy $I(-23;20)$ thuộc đường tròn $(C)$ suy ra $IM$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M$ trùng $I$.

Suy ra $z = -23 + 20i$. Vậy $|z| = \sqrt{929}$.

**Câu 18:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$ và $M = \max\left|z + \frac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $-1 < M < 2$. **B.** $2 < M < \frac{7}{2}$. **C.** $1 < M < \frac{5}{2}$. **D.** $M^3 + M^2 + M < 3$.

**Lời giải**

Ta có: $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\Leftrightarrow \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| = \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \Leftrightarrow \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \leq 2$

Mặt khác, $\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\geq\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$

$\Rightarrow \left|\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\leq 2$ $(*)$. Đặt $t=\left|z+\frac{1}{z}\right|$, $(t\geq 0)$

Bất phương trình $(*)$ trở thành: $t^3-3t-2\leq 0\Leftrightarrow(t-2)(t+1)^2\leq 0\Leftrightarrow t\leq 2\Rightarrow\left|z+\frac{1}{z}\right|\leq 2$

$\Rightarrow M=2$. Dấu bằng xảy ra khi $z=1$ hoặc $z=-1$.

**Câu 19:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m(m\neq 0)$ để tồn tại duy nhất số phức $z$ thỏa mãn

$$\begin{cases}|z+1-2i|=2\\|z-2-2i|=|m|\\|z-2m-(m^2+m-2)i|=|z-2m+2+(m^2+m+2)i|\end{cases}.$$

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Đặt hệ $(*)$ $\begin{cases}|z+1-2i|=2 & (1)\\|z-2-2i|=|m| & (2)\\|z-2m-(m^2+m-2)i|=|z-2m+2+(m^2+m+2)i| & (3)\end{cases}$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$ thỏa yêu cầu.

Từ $(1)$ ta có $M$ thuộc đường tròn $(C_1)$ tâm $I_1(-1;2)$, bán kính $R=2$.

Từ $(2)$ ta có $M$ thuộc đường tròn $(C_2)$ tâm $I_2(2;2)$, bán kính $R=|m|$ với $m\neq 0$.

Đặt $A(2m;m^2+m-2)$, $B(2m-2;-m^2-m-2)$.

Ta có $(3)\Leftrightarrow MA=MB$ nên tập hợp $M$ là đường trung trực $d$ của đoạn $AB$.

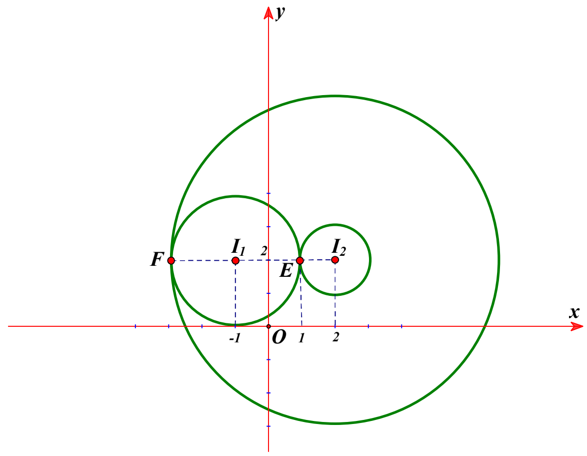
Đường trung trực $d$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-2;-2m^2-2m)$ hay $\overrightarrow{n}'=(1;m^2+m)$ và đi qua trung điểm $I(2m-1;-2)$ của $AB$

⇨ $d$ có phương trình là $x+(m^2+m)y+2m^2+1=0$.

Tồn tại duy nhất số phức $z$ thỏa mãn hệ $(*)$

⇔ tồn tại duy nhất $M$ là điểm chung của $(C_1)$, $(C_2)$ và $d$

⇔ $(C_1)$ tiếp xúc $(C_2)$ và $d$ là tiếp tuyến chung của $(C_1)$, $(C_2)$




$(C_1)$ tiếp xúc $(C_2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I_1I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1I_2 = |R_1 - R_2| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 = 2 + |m| \\ 3 = |2 - |m|| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm 5 \end{array}\right. \ (4)$

Quan sát đồ thị ta thấy $(C_1)$ tiếp xúc $(C_2)$ tại $E(1;2)$ hoặc $F(-3;2)$ và $I_1I_2 // Ox$ nên $d$ là tiếp tuyến chung của $(C_1)$ và $(C_2)$ tại $E(1;2)$ hoặc $F(-3;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} d // Oy \\ E \in d \end{cases} \\ \begin{cases} d // Oy \\ F \in d \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2 + m = 0 \\ 1 + 2m^2 + 1 = 0 \quad (vn) \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 + m = 0 \\ -3 + 2m^2 + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0; m = -1 \\ m = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \ (5)$$

Từ $(4)$ và $(5)$ ta nhận được $m = -1$ thỏa yêu cầu đề bài.

Vậy có một giá trị nguyên của $m$ .

**Câu 20:** Chọn hai số phức trong các số phức có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| \le 5|1 - \sqrt{3}i| - |z - 2 + 4i|$. Xác suất để trong hai số chọn được có ít nhất một số phức có phần thực lớn hơn 2 là

**A.** $\frac{27}{110}$. **B.** $\frac{34}{55}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

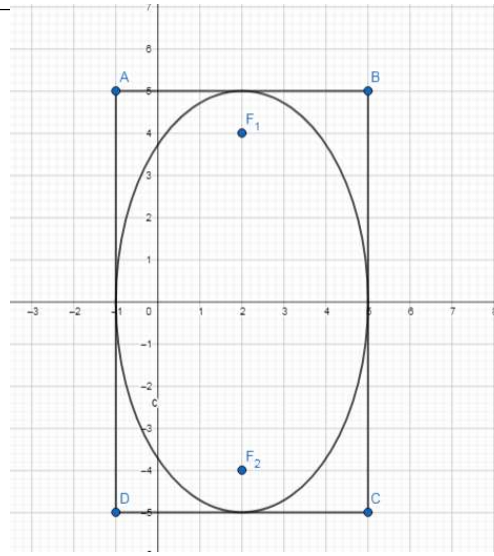
Giả sử số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng $z = x + yi, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Ta có:

$|z - 2 - 4i| \le 5|1 - \sqrt{3}i| - |z - 2 + 4i| \Leftrightarrow |z - 2 - 4i| + |z - 2 + 4i| \le 10$

$\Leftrightarrow |z - (2 + 4i)| + |z - (2 - 4i)| \le 10$

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$ và $F_1(2;4), F_2(2;-4)$ lần lượt biểu diễn cho các số phức $2 + 4i; 2 - 4i$. Khi đó ta có: $|z - (2 + 4i)| + |z - (2 - 4i)| \le 10 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 \le 10$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ là một hình Elip nhận $F_1(2;4), F_2(2;-4)$ là các tiêu điểm, tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 8$, trục lớn có độ dài là $2a = 10$ và trục bé có độ dài là $2b = 6$. Như hình vẽ sau:




$M(x,y)$ thuộc hình elip nói trên và $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ nên có 45 điểm thỏa mãn. Cụ thể như sau:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-1;\ 5$ | $0\ ;\ 4$ | $1;\ 3$ | $2$ |
| $y$ | $0$ | $0;\pm1;\pm2;\pm3$ | $0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4$ | $0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm5$ |

Gọi $\Omega$ là không gian mẫu của phép thử chọn hai số phức trong các số phức có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|\le 5\left|1-\sqrt{3}i\right|-|z-2+4i|$ . Ta có $n(\Omega)=C_{45}^2$.

Gọi $A$ là biến cố: "Trong hai số chọn được ít nhất một số phức có phần thực lớn hơn 2".

$\overline{A}$ là biến cố: "Trong hai số chọn không có số phức có phần thực lớn hơn 2". Ta có $n\left(\overline{A}\right)=C_{28}^2$

Suy ra $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_{28}^2}{C_{45}^2}=\dfrac{21}{55}$.

Vậy $P(A)=1-\dfrac{21}{55}=\dfrac{34}{55}$.

**Câu 21:** Cho số phức $z$ không phải là số thực và $\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức $z$ thoả mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=\left|z^2\right|$

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $8$.

**Lời giải**

Ta có $w=\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{w}=w\Leftrightarrow\dfrac{\overline{z}^2-2\overline{z}+4}{\overline{z}^2+2\overline{z}+4}=\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$.

$\Leftrightarrow 4\left(z-\overline{z}\right)\left(4-z.\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow z.\overline{z}=4$ .

$|z|^2=4\ (1)$. Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^2+y^2=4\,(2)$.

Mà $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=\left|z^2\right|\Leftrightarrow 2|x|+2|y|=4\Leftrightarrow |x|+|y|=2\ (3)$. Từ $(2),(3)$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases}|x|+|y|=2\\ x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)\in\{(0;2);(0;-2);(2;0);(-2;0)\}$. Vì $z\notin\mathbb{R}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=2i\\ z=-2i\end{array}\right.$.

**Câu 22:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương $m$ để có tất cả bốn số phức $z$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z| = m$ và $3|z+\overline{z}| + 4|z-\overline{z}| = 20$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Lời giải**

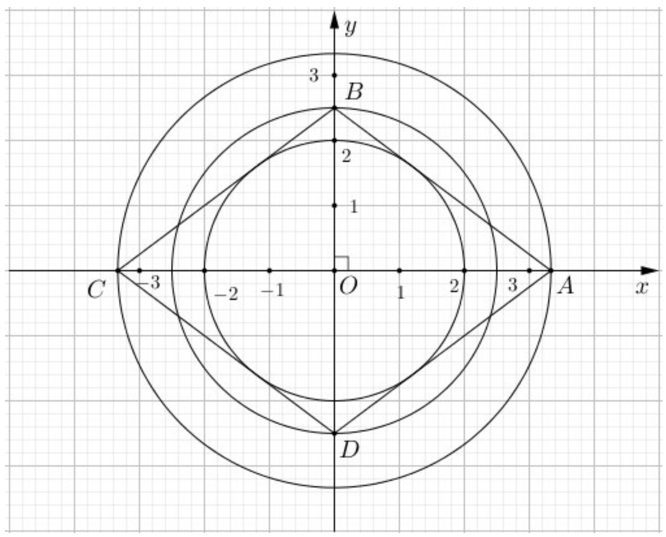
Gọi $M$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} = m \\ 3|x+yi+x-yi| + 4|x+yi-x+yi| = 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2 = m^2 \\ 6|x| + 8|y| = 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3|x| + 4|y| = 10 (1) \\ x^2+y^2 = m^2 (2)\end{cases}$$

Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $(1)$ là hình thoi $ABCD$ với $A\left(\frac{10}{3};0\right), B\left(0;\frac{5}{2}\right)$, $C\left(-\frac{10}{3};0\right), D\left(0;-\frac{5}{2}\right)$.

Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $(2)$ là đường tròn $(C)$ tâm $O(0;0), R = m\ (m > 0)$.




Có đúng 4 số phức thỏa mãn đề khi và chỉ khi $(C)$ có đúng 4 điểm chung với các cạnh hình thoi.

**Trường hợp 1:** $(C)$ là đường tròn nội tiếp hình thoi.

Khi đó ta có $R = d(O, AB) \Leftrightarrow m = 2$.

**Trường hợp 2:** $(C)$ nằm giữa hai đường tròn: đường tròn đường kính $BD$ và đường tròn đường kính $AC$. Khi đó ta có $\frac{BD}{2} < R < \frac{AC}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{10}{3}$. Do $m$ nguyên dương nên $m = 3$.

Vậy có tất cả 2 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 23:** Cho hai số phức $u, v$ thỏa mãn $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = 50$. Tính $M = |4u + 3v|$.

**A.** $30$. **B.** $40$. **C.** $50$. **D.** $60$.

**Lời giải**

***QuangPhi***

Ta có $|z|^2 = z.\overline{z}$. Đặt $T = |3u - 4v|$.

Khi đó $T^2 = (3u-4v)\left(3\overline{u} - 4\overline{v}\right) = 9|u|^2 + 16|v|^2 - 12\left(u\overline{v} + v\overline{u}\right)$.

Tương tự ta có $M^2 = (4u+3v)\left(4\overline{u} + 3\overline{v}\right) = 16|u|^2 + 9|v|^2 + 12\left(u\overline{v} + v\overline{u}\right)$.

Do đó $M^2+T^2=25\left(|u|^2+|v|^2\right)=5000$.

Suy ra $M^2=5000-T^2=5000-50^2=2500$.
Vậy $M=50$.

**Câu 24:** Trong các số phức $z$ thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2|z|$, gọi $z_1$ và $z_2$ lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w=z_1+z_2$ có giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $|w|=2\sqrt{2}$. **B.** $|w|=2$. **C.** $|w|=\sqrt{2}$. **D.** $|w|=1+\sqrt{2}$.

**Lời giải**

Gọi $z=x+yi\ \ (x;y\in\mathbb{R})$

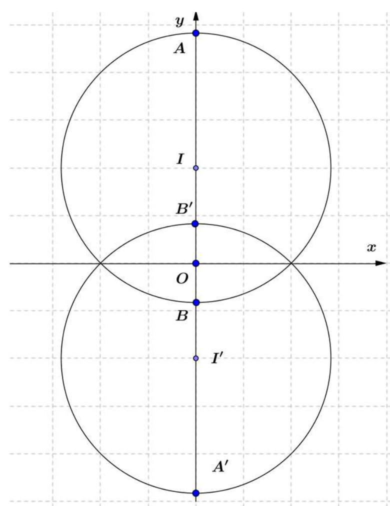
Ta có $\left|z^2+1\right|=2|z|\Leftrightarrow\left|x^2-y^2+1+2xyi\right|=2|x+yi|\Leftrightarrow\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2-6y^2+1=0\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+1=4y^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2-1=2y\\x^2+y^2-1=-2y\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2-2y-1=0\\x^2+y^2+2y-1=0\end{array}\right.$.

Khi đó điểm biểu diễn số phức $z$ thuộc đường tròn $(C):x^2+(y-1)^2=2$ có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$ hoặc $(C'):x^2+(y+1)^2=2$ có tâm $I'(0;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{2}$.

Với $A\left(0;1+\sqrt{2}\right)$, $B\left(0;1-\sqrt{2}\right)$, $A'\left(0;-1-\sqrt{2}\right)$, $B'\left(0;-1+\sqrt{2}\right)$ thuộc các đường tròn như hình vẽ




Suy ra $\max|z|=1+\sqrt{2}\ \Rightarrow z_1=\pm\left(\sqrt{2}+1\right)i$ và $\min|z|=\sqrt{2}-1\ \Rightarrow z_2=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)i$.

Vậy $\left|z_1+z_2\right|=2\sqrt{2}$ hoặc $\left|z_1+z_2\right|=2$ nên giá trị nhỏ nhất của $|w|=2$.

**Câu 25:** Xét các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $4\left(z-\overline{z}\right)-15i=i\left(z+\overline{z}-1\right)^2$ và $|2z-1+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b$

**A.** $P=0$. **B.** $P=\dfrac{19}{4}$. **C.** $P=\dfrac{19}{8}$. **D.** $P=2$.

**Lời giải**

$4\left(z-\overline{z}\right)-15i=i\left(z+\overline{z}-1\right)^2\Leftrightarrow 4(a+bi-a+bi)-15i=i(a+bi+a-bi-1)^2$.

$\Leftrightarrow 8bi-15i=i(2a-1)^2 \Leftrightarrow 8b-15=(2a-1)^2$ với $8b-15\ge 0 \Leftrightarrow b\ge \frac{15}{8}$.

Ta có $|2z-1+i|=|2a+2bi-1+i|=|(2a-1)+(2b+1)i|=\sqrt{(2a-1)^2+(2b+1)^2}$

$=\sqrt{8b-15+4b^2+4b+1}=\sqrt{4b^2+12b-14}$.

Xét $g(b)=4b^2+12b-14$ có $g'(b)=8b+12>0,\forall b\ge \frac{15}{8}$ nên hàm số $g(b)=4b^2+12b-14$

luôn đồng biến trên $\left[\frac{15}{8};+\infty\right) \Rightarrow g(b)\ge g\left(\frac{15}{8}\right)=\frac{361}{16} \Rightarrow |2z-1+i|\ge \sqrt{\frac{361}{16}}=\frac{\sqrt{361}}{4}$

$\Rightarrow |2z-1+i|$ có GTNN bằng $\frac{\sqrt{361}}{4}$ khi $b=\frac{15}{8}$ mà $8b-15=(2a-1)^2$ nên $a=\frac{1}{2}$.

Vậy $P=a+b=\frac{1}{2}+\frac{15}{8}=\frac{19}{8}$

**Câu 26:** Xét số phức $z$ thỏa $2|z-1|+3|z-i|\ge 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

**A.** $\frac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

Xét các điểm $A(1;0)$, $B(0;1)$ và $M(x;y)$ với $M$ là điểm biểu diễn số phức $z$ trong mặt phẳng phức. Ta có:

$2|z-1|+3|z-i|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}+3\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2MA+3MB$.

Ta có: $2MA+3MB=2(MA+MB)+MB\ge 2\sqrt{2}+MB\ge 2\sqrt{2}$.

Suy ra $2|z-1|+3|z-i|\ge 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M$ thuộc đoạn $AB$ và $MB=0$ $\Leftrightarrow M\equiv B \Leftrightarrow M(0;1)$. Khi đó $|z|=1$.

**Câu 27:** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2-5m=0$ ($m$ là tham số thực). Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên $m$ để phương trình đó có nghiệm $z_0$ thỏa mãn $|z_0|^3=3|\overline{z_0}|+2$. Tổng các phần tử của tập $S$ là

**A.** 8. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

**Lời giải**

Do $|z_0|=|\overline{z_0}|$ nên $|z_0|^3=3|\overline{z_0}|+2 \Leftrightarrow |z_0|^3-3|z_0|-2=0 \Leftrightarrow |z_0|=2$

$\Delta'=(m-1)^2-m^2+5m=3m+1$.

Trường hợp 1: Nếu $\Delta'\ge 0 \Leftrightarrow 3m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm thực

Khi đó $|z_0|=2 \Leftrightarrow z_0=\pm 2$.

Thay $z_0=2$ vào phương trình ta được: $m^2-9m+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=8 \end{array}\right.$ (TM).

Thay $z_0=-2$ vào phương trình ta được: $m^2-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ (TM).

**Trường hợp 2:** Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 3m+1<0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1$, $z_2$ thỏa mãn $z_2 = \overline{z_1}$, $|z_1| = |z_2| = 2$. Khi đó $z_1.z_2 = |z_1|^2 = m^2 - 5m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Vậy $S = \{0;1;8\}$. Suy ra tổng là $9$.

**Câu 28:** Trong tập số phức, cho phương trình $2z^2 + 2(m-1)z + m^2 - 3m - 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ trong đoạn $[0;2021]$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

**A.** 2016. **B.** 202 **C.** 202 **D.** 2017.

**Lời giải**

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

**Trường hợp 1:** $\Delta > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m > -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt $z_1$, $z_2$.

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -(m-1) \\ z_1 z_2 = m^2 - 3m - 2 \end{cases}$

Theo đề bài ta có: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow -(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

**Trường hợp 2:** $\Delta < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$

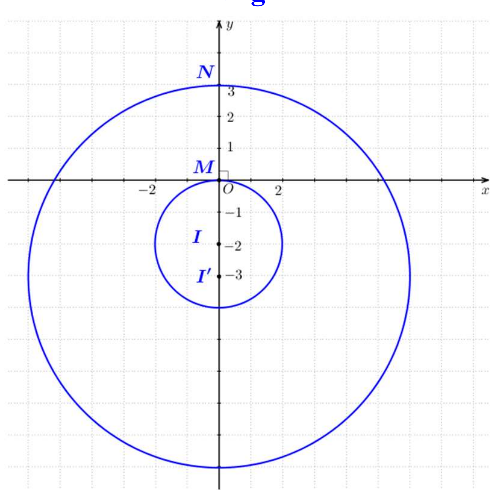
Phương trình luôn có 2 nghiệm phức $z_1$, $z_2$ luôn thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$.

Vậy có 2017 giá trị $m$ thỏa mãn.

**Câu 29:** Cho hai số phức $z_1$, $z_2$ thỏa $|iz_1 - 1| = 1$ và $|\overline{z_2} + i| = 2$. Khi biểu thức $P = |2z_1 + 3z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1 - 2z_2|$ bằng

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**




Ta có: $|iz_1 - 1| = 1 \Leftrightarrow |i|\left|z_1 - \frac{1}{i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_1 + i| = 1 \Leftrightarrow |2z_1 + 2i| = 2$

Gọi $M$ là điểm biểu diễn số phức $2z_1 \Rightarrow$ Tập hợp $M$ thuộc đường tròn tâm $I(0;-2)$, $R=2$
.

Ta có: $\left|\overline{z_2}+i\right|=2 \Leftrightarrow \left|z_2-i\right|=2 \Leftrightarrow \left|-3z_2+3i\right|=6$, Gọi $N$ là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$.

$\Rightarrow$ Tập hợp $N$ thuộc đường tròn tâm $I'(0;-3)$, $R'=6$. Suy ra: $P=\left|2z_1+3z_2\right|=MN$

$\Rightarrow P_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min} \Leftrightarrow M,N,I,I'$ thẳng hàng ( $M$ nằm giữa $N$ và $I$ ) $MN=3$ và $\overrightarrow{IM}=-2\overrightarrow{II'}$,

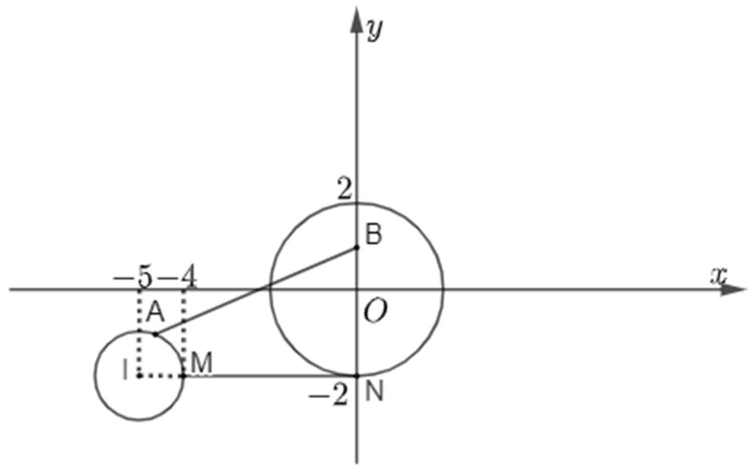
$M$ là trung điểm của $NI'$. Từ đó ta tính được $M(0;0)$, $N(0;3)$.

$\Rightarrow 2z_1=0, -3z_2=3i$. Khi đó, $z_1-2z_2=2i$. Vậy $\left|z_1-2z_2\right|=2$.

**Câu 30:** Xét các số phức $z$, $w$ thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Khi $\left|z^2-wz-4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z|+|w|$ bằng

**A.** $2+\sqrt{5}$. **B.** $2\left(1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $1+\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}-2$.

**Lời giải**




Ta có: $|iw-2+5i|=1 \Leftrightarrow |i|.\left|w+\dfrac{-2+5i}{i}\right|=1 \Leftrightarrow |w+5+2i|=1$.

Ta có: $T=\left|z^2-wz-4\right|=\left|z^2-wz-|z|^2\right|=\left|z^2-wz-z.\overline{z}\right|=|z|.\left|z-w-\overline{z}\right|=2\left|z-w-\overline{z}\right|$.

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, suy ra $z-\overline{z}=2bi$. Vì $|z|=2 \Rightarrow -2\le b\le 2$.

Gọi $A, B$ lần lượt là điểm biểu diễn của $w$, $2bi$ nên:

$A$ thuộc đường tròn tâm $I(-5;-2)$; $R=1$, $B$ thuộc trục $Oy$ và $-4\le x_B\le 4$

$\Rightarrow T=2AB\ge 2MN=2.4=8$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$A\equiv M(-4;-2)\Rightarrow w=-4-2i\Rightarrow |w|=2\sqrt{5}$ và $B\equiv N(0;-2)\Rightarrow 2bi=-2i\Rightarrow b=-1\Rightarrow z=a-i$

$\Rightarrow |z|=2\Rightarrow a^2+1=4\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}\Rightarrow z=\pm\sqrt{3}-i\Rightarrow |z|=2$. Vậy $|z|+|w|=2+2\sqrt{5}$.

$\left|z_1+z_2\right|=\left|\dfrac{2}{13}+\dfrac{75}{13}i\right|=\dfrac{\sqrt{5629}}{13}$.

**Câu 31:** Xét các số phức $z$, $w$ thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $\left|z+i\overline{w}-6-8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

**A.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức mô-đun ta có

$$|z+i\overline{w}-6-8i|\geq|6+8i|-|z+i\overline{w}|\geq 10-|z|-|i\overline{w}|=7.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại các số thực $k\geq 0$ và $m\geq 0$ sao cho $\begin{cases} z+i\overline{w}=k(6+8i) \\ z=mi\overline{w} \\ |z|=1;|w|=2 \end{cases}$

Với $z=mi\overline{w}\Rightarrow|z|=|m|\cdot|w|\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}\Rightarrow i\overline{w}=2z$.

Với $z+i\overline{w}=k(6+8i)\Leftrightarrow 3z=k(6+8i)\Rightarrow 3|z|=10|k|\Rightarrow k=\dfrac{3}{10}$.

Suy ra $z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$ và $\overline{w}=\dfrac{2}{i}z=-2iz=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i$.

Vậy khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z-w|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

**Câu 32:** Trên tập hợp các số phức, xét Phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ ($m$ là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của $m$ để phương trình đó có nghiệm $z_0$ thỏa mãn $|z_0|=7$?

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Ta có: $\Delta'=2m+1$

**Trường hợp 1:** $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow m\geq\dfrac{-1}{2}$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm thực $z_0$ thỏa mãn $|z_0|=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_0=7 \\ z_0=-7 \end{array}\right.$

Với $z_0=7$ thay vào phương trình ta có $49-14(m+1)+m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=7+\sqrt{14}\,(n) \\ m=7-\sqrt{14}\,(n) \end{array}\right.$

Với $z_0=-7$ thay vào phương trình ta có $49+14(m+1)+m^2=0\,(VN)$

**Trường hợp 2:** $\Delta'<0\Leftrightarrow m<\dfrac{-1}{2}$. Khi đó phương trình có 2 nghiệm phức là $z_0$ và $\overline{z_0}$

$|z_0|^2=49\Leftrightarrow z_0.\overline{z_0}=49\Leftrightarrow m^2=49\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=7\,(l) \\ m=-7\,(n) \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

## II. CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỌN LỌC SỐ 02

### ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để tồn tại 2 số phức $z$ thoả mãn $|z-m+i|=|z-1+2mi|$ và $|z|=\dfrac{3}{2}$

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

**Câu 2:** Có bao nhiêu số phức $z$ có phần thực và phần ảo đều là các số nguyên thỏa mãn đồng thời $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$ và $|z|\le 10$?

**A.** $12$. **B.** $2$. **C.** $10$. **D.** $5$.

**Câu 3:** Cho hai số phức $z_1$ ; $z_2$ thỏa mãn $|z_1|=24$ và $z_1^2+(z_2+1-2i)^2=z_1z_2+(1-2i)z_1$ . Biết $|z_1-z_2-1+2i|=a$ với $a$ là một số nguyên dương. Hỏi $a$ có bao nhiêu ước số nguyên?

**A.** $8$. **B.** $12$. **C.** $20$. **D.** $16$.

**Câu 4:** Cho hai số phức $z, \mathrm{w}$ thoả mãn $|z+2w|=3$, $|2z+3w|=5$ và $|z+3w|=4$. Tính giá trị của biểu thức $P=z.\overline{w}+\overline{z}.w$.

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 5:** Cho hai số phức $z_1$, $z_2$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=\sqrt{39}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Khi đó $|z_1+z_2|$ bằng

**A.** $8$. **B.** $2\sqrt{39}$. **C.** $12$. **D.** $2\sqrt{3}$.

**Câu 6:** Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=\dfrac{3+iz}{1+z}$ trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ là một đường thẳng. Khi đó mô đun của $z$ bằng?

**A.** $1$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Câu 7:** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{1+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng 2. Modul của $z$ thuộc tập nào dưới đây

**A.** $\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\left\{\sqrt{2};2\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{2}\right\}$.

**Câu 8:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của $z$ là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng

**A.** $4\sqrt{2}$. **B.** $0$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

**Câu 9:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm $M$ biểu diễn số phức $\mathrm{w}=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $c$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $20$. **B.** $10$. **C.** $18$. **D.** $17$.

**Câu 10:** Gọi $(C)$ là đường cong trong mặt phẳng $Oxy$ biểu diễn các số phức $z$ thỏa mãn $z.\overline{z}+|z-\overline{z}|^2=1$ và $H$ là hình phẳng giới hạn bởi $(C)$. Diện tích của hình phẳng $H$ bằng

**A.** $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$. **B.** $\pi\sqrt{5}$. **C.** $2\pi\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

**Câu 11:** Có bao nhiêu số thực dương $m$ để tồn tại duy nhất một số thực $z$ thoả mãn $|z-1-i|\le 2$ và $|z+2+3i|=m$?

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, số phức $\frac{1+iz}{4+z}$ có tập hợp các điểm biểu diễn là một đường thẳng. Môđun của $z$ bằng

**A.** 1. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Câu 13:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-2|=4$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2z-1-3i$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm $I$ và tính bán kính $R$ của đường tròn đó.

**A.** $I(3;-3), R=64$. **B.** $I(-3;3), R=8$. **C.** $I(3;-3), R=8$. **D.** $I(3;-3), R=2\sqrt{2}$.

**Câu 14:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm $M$ biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $c$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $20$. **B.** $10$. **C.** $18$. **D.** $17$.

**Câu 15:** Gọi $z_1, z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+73=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2+z_2^2-|z_1|.|z_2|$ bằng

**A.** $-213$. **B.** $-110$. **C.** $-37$. **D.** $-183$.

**Câu 16:** Cho các số thực $b,c$ sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1-3+3i|=\sqrt{2}$ và $(z_1+2i)(z_2-2)$ là số thuần ảo. Khi đó $b+c$ bằng:

**A.** $-1$. **B.** $12$. **C.** $4$. **D.** $-12$.

**Câu 17:** Giả sử $z_1, z_2$ là hai trong các số phức $z$ thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

**A.** $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

**Câu 18:** Giả sử $z_1, z_2$ là $2$ trong các số phức $z$ thỏa mãn $|z+1+i|=2$ và $|z_1|+|z_2|=|z_1-z_2|$. Khi $P=|z_1-2z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì số phức $z_1$ có tích phần thực, phần ảo bằng

**A.** $0$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{9}{8}$ **D.** $-\frac{3}{2}$

**Câu 19:** Xét hai số phức $z_1, z_2$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=5$ và $|z_2+6-8i|-|z_1+6-8i|=|z_1|+|z_2|$. Khi đó $|z_1+2z_2-3i|$ có giá trị lớn nhất bằng

**A.** $\frac{25}{2}$. **B.** $13$. **C.** $\sqrt{157}$. **D.** $3\sqrt{34}$.

**Câu 20:** Xét các số phức $z;w$ thỏa mãn $|z-2|^2+|z-2i|^2=6$ và $|w-3-2i|=|w+3+6i|$. Khi $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $|z|$.

**A.** $1+\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

**Câu 21:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=6$. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z-2-3i\right|$. Giá trị của $M+m$ bằng.

**A.** $2+2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}+\sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{2}+2\sqrt{10}$. **D.** $2+\sqrt{34}$.

**Câu 22:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|z-2i\right|\le\left|z-4i\right|$ và $\left|z-3-3i\right|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z-2\right|$ là

**A.** $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}+1$. **D.** $\sqrt{10}$.

**Câu 23:** Cho các số phức $z=x+yi$ $\left(x,y\in\mathbb{R},-4\le y\le 15\right)$ và $w$ thỏa $\left|w-4-3i\right|=2$. Các số phức $z,z^2,z^3$ lần lượt có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ tạo thành một tam giác vuông. Gọi $m=\min\left|z-w\right|,M=max\left|z-w\right|$. Khi đó $m+M^2$ bằng

**A.** $224$. **B.** $226$. **C.** $227$. **D.** $225$.

**Câu 24:** Xét hai số phức $z$, $w$ thỏa mãn $\left|z-1-2i\right|=\left|z-2+i\right|$ và $\left|w-2+3i\right|=\left|w-4-i\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z+3-i\right|+\left|w+3-i\right|+\left|z-w\right|$ bằng $\frac{2}{5}\sqrt{abc}$ với $a,b,c$ là các số nguyên tố. Tính giá trị của $a+b+c$.

**A.** $22$. **B.** $24$. **C.** $26$. **D.** $25$.

**Câu 25:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|\frac{z}{3-4i}+1-i\right|=1$ sao cho $\left|z-3-8i\right|$ đạt giá trị lớn nhất tại $z_1=x_1+iy_1$ và đạt giá trị nhỏ nhất tại $z_2=x_2+iy_2$. Giá trị của $x_1+x_2+y_1y_2$ bằng

**A.** $44$. **B.** $55$. **C.** $25$. **D.** $46$.

**Câu 26:** Xét ba số phức $z,z_1,z_2$ thoả mãn $\left|z-i\right|=\left|z+1\right|$, $\left|z_1-3\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}$ và $\left|z_2-4\sqrt{5}i\right|=2\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|\sqrt{5}z-z_1\right|+\left|\sqrt{5}z-z_2\right|$ bằng

**A.** $4\sqrt{5}$. **B.** $10\sqrt{5}$. **C.** $7\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

**Câu 27:** Xét các số phức $z$ thỏa mãn $\left|z+\overline{z}+2\right|+\left|z-\overline{z}\right|=6$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-3-2i\right|$. Khi đó $M+m$ bằng

**A.** $\frac{2\sqrt{53}+3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{53}+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{53}+\sqrt{5}$.

**Câu 28:** Với các số phức $z_1$, $z_2$, $z_3=iz_2$ thay đổi thỏa mãn $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=5$ thì giá trị lớn nhất của $\min\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|tz_2+(1-t)z_3-z_1\right|$ có dạng $a+\frac{b}{\sqrt{c}}$, ở đó $a$, $b$ là các số nguyên dương, $c$ là số nguyên tố. Giá trị của $a+b+c$ là

**A.** $15$. **B.** $12$. **C.** $13$. **D.** $14$.

**Câu 29:** Xét các số phức $z$, $w$ thỏa mãn $\left|z\right|=2$, $\left|iw-2+5i\right|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2-wz-4\right|$ bằng

**A.** $4$. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** $8$. **D.** $2\left(\sqrt{29}-5\right)$.

**Câu 30:** Với hai số phức $z_1,\ z_2$ thay đổi thỏa mãn $|z_1+1-2i|=|z_1-5+2i|$ và $|z_2+3-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+3+i|+|z_1-z_2|$ bằng

**A.** $5\sqrt{5}-2.$ **B.** $\sqrt{10}+2.$ **C.** $3\sqrt{10}-2.$ **D.** $\sqrt{85}-2.$

**Câu 31:** Cho hai số phức $z$, $w$ thỏa mãn $\begin{cases}\max\{|z|;|z-1-i|\}\le 1\\ |w+1+2i|\le|w-2-i|\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-w|$.

**A.** $\sqrt{2}-1$. **B.** $2\sqrt{2}-1$. **C.** $0$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

**Câu 32:** Cho $z\in\mathbb{C}$ thỏa mãn $\begin{cases}|z-1-2i|\le 1\\ |z-1-2i|\le 2\end{cases}$. Giá trị $S=\min|z|+\max|z|$ bằng:

**A.** $3\sqrt{5}-1$. **B.** $\sqrt{5}+2$. **C.** $2\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{2}+\sqrt{5}-1$

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để tồn tại 2 số phức $z$ thoả mãn $|z-m+i|=|z-1+2mi|$ và $|z|=\dfrac{3}{2}$

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}\left|(a-m)+(b+1)i\right|=\left|(a-1)+(b+2m)i\right|\\ |a+bi|=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-m)^2+(b+1)^2=(a-1)^2+(b+2m)^2\\ a^2+b^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-2)a+(4m-2)b-3m^2=0 & (1)\\ a^2+b^2=\dfrac{9}{4} & (2)\end{cases}$$

Phương trình $(1)$ là phương trình đường thẳng, phương trình $(2)$ là phương trình đường tròn tâm $O$ bán kính $R=\dfrac{3}{2}$.

Để tồn tại số phước $z$ thoả mãn đề bài thì đường thẳng có phương trình $(1)$ phải cắt đường tròn có phương trình $(2)$

Nghĩa là $d\left(O,(1)\right)\le R\ \Leftrightarrow\dfrac{\left|-3m^2\right|}{\sqrt{(2m-2)^2+(4m-2)^2}}\le\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow m^2\le\sqrt{(m-1)^2+(2m-1)^2}\ \Leftrightarrow m^4\le 5m^2-6m+2\Leftrightarrow(m-1)^2\left(m^2+2m-2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{3}\le m\le -1+\sqrt{3}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

**Câu 2:** Có bao nhiêu số phức $z$ có phần thực và phần ảo đều là các số nguyên thỏa mãn đồng thời $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$ và $|z|\le 10$?

**A.** $12$. **B.** $2$. **C.** $10$. **D.** $5$.

**Lời giải**

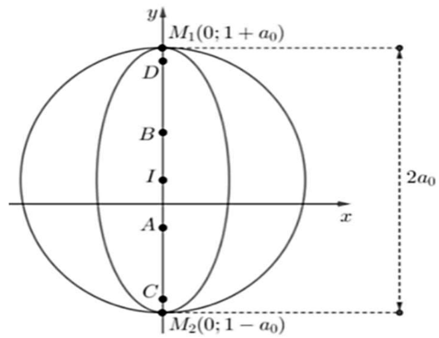
**Chọn A**

Xét $M(z),A(0;-1),B(0;3),C(0;-4),D(0;6)\Rightarrow|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$

$\Leftrightarrow MA+MB=MC+MD$.

Theo bất đẳng thức tam giác có: $MC+MD\ge CD=10$. Do đó đặt $MA+MB=MC+MD=2a_0\ (a_0\ge 5)$.

Khi đó M cùng thuộc hai elip $(E_1),(E_2)$ có cùng độ dài trục lớn $2a_0$ và tâm của hai elip này trùng nhau tại điểm $I(0;1)$ là trung điểm. Do đó $M=(E_1)\cap(E_2)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(0;1+a_0)\\ M(0;1-a_0)\end{array}\right.$




**TH1:** Nếu $M\left(0;1+a_0\right) \Rightarrow |z| \le 10 \Leftrightarrow |1+a_0| \le 10 \Leftrightarrow 5 \le a_0 \le 9$. Trường hợp này có $5$ điểm.

**TH2:** Nếu $M\left(0;1-a_0\right) \Rightarrow |z| \le 10 \Leftrightarrow |1-a_0| \le 10 \Leftrightarrow 5 \le a_0 \le 11$. Trường hợp này có $7$ điểm.

Vậy có tất cả là $12$ số phức thỏa mãn.

**Câu 3:** Cho hai số phức $z_1$ ; $z_2$ thỏa mãn $|z_1| = 24$ và $z_1^2 + \left(z_2+1-2i\right)^2 = z_1 z_2 + \left(1-2i\right)z_1$. Biết $|z_1 - z_2 - 1 + 2i| = a$ với $a$ là một số nguyên dương. Hỏi $a$ có bao nhiêu ước số nguyên?

**A.** $8$. **B.** $12$. **C.** $20$. **D.** $16$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $z_3 = z_2 + 1 - 2i$, ta có $z_1^2 + \left(z_2+1-2i\right)^2 = z_1 z_2 + \left(1-2i\right)z_1$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + \left(z_2+1-2i\right)^2 = z_1\left(z_2+1-2i\right) \Leftrightarrow z_1^2 + z_3^2 = z_1 z_3 \Leftrightarrow \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2 - \frac{z_3}{z_1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_3}{z_1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow z_3 = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} z_1.$$

Khi đó $a = |z_1 - z_2 - 1 + 2i| = |z_1 - z_3| = \left|z_1 - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} z_1\right| = |z_1|\left|1 - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right| = 24\left|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 24$.

Do $a = 2^3.3$ nên số ước nguyên của $a$ là $2.(3+1)(1+1) = 16$.

**Câu 4:** Cho hai số phức $z, \text{w}$ thoả mãn $|z+2w| = 3$, $|2z+3w| = 5$ và $|z+3w| = 4$. Tính giá trị của biểu thức $P = z.\overline{w} + \overline{z}.w$.

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $|z+2w| = 3 \Leftrightarrow |z+2w|^2 = 9 \Leftrightarrow (z+2w)\left(\overline{z}+2\overline{w}\right) = 9 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|\text{w}|^2 = 9\left(1\right)$.

Tương tự:

$|2z+3w| = 5 \Leftrightarrow |2z+3w|^2 = 25 \Leftrightarrow (2z+3w)\left(2\overline{z}+3\overline{w}\right) = 25 \Leftrightarrow 4|z|^2 + 6P + 9|\text{w}|^2 = 25\left(2\right)$

$|z+3w| = 4 \Leftrightarrow |z+3w|^2 = 16 \Leftrightarrow (z+3w)\left(\overline{z}+3\overline{w}\right) = 16 \Leftrightarrow |z|^2 + 3P + 9|\text{w}|^2 = 16\left(3\right)$

Giải hệ phương $\left(1\right),\left(2\right),\left(3\right)$ ta được $P = 2$.

**Câu 5:** Cho hai số phức $z_1$, $z_2$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{39}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Khi đó $|z_1 + z_2|$ bằng

**A.** $8$. **B.** $2\sqrt{39}$. **C.** $12$. **D.** $2\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $A$ và $B$ lần lượt là điểm biểu diễn của $z_1$ và $z_2$ trên mặt phẳng tọa độ. Khi đó: $OA = OB = \sqrt{39}$ và $AB = 2\sqrt{3}$.

Nhận xét: $\Delta OAB$ cân tại $O$. Khi đó: $|z_1 + z_2| = 2OC = 2\sqrt{OA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{39-3} = 12$ với $C$ là trung điểm cạnh $AB$.

**Câu 6:** Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = \dfrac{3+iz}{1+z}$ trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ là một đường thẳng. Khi đó mô đun của $z$ bằng?

**A.** $1$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $w = \dfrac{3+iz}{1+z} \Leftrightarrow w + w.z = 3 + iz \Leftrightarrow (w-i)z = 3 - w \Leftrightarrow |w-i|.|z| = |3-w|$.

Nếu $|z| = k \neq 1$ thì tập hợp biểu diễn số phức $w$ là đường tròn Apollonius.

Nếu $|z| = 1$ thì tập hợp biểu diễn số phức $w$ là đường thẳng.

Vậy $|z| = 1$ thỏa đề.

**Câu 7:** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \dfrac{1+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng 2. Modul của $z$ thuộc tập nào dưới đây

**A.** $\left\{\dfrac{1}{2}; 2\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right\}$. **C.** $\left\{\sqrt{2}; 2\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $w = x + iy; |z| = a$; điều kiện: $z \neq -1$

Từ $w = \dfrac{1+iz}{1+z} \Leftrightarrow (w-i)z = 1 - w \Leftrightarrow z = \dfrac{1-w}{w-i} \Leftrightarrow |z| = \left|\dfrac{1-w}{w-i}\right| \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{(x-1)^2 + y^2}{x^2 + (y-1)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{2x}{a^2-1} - \dfrac{2a^2y}{a^2-1} + 1 = 0$

Theo giả thiết quỹ tích $w$ là đường tròn bán kính bằng 2, ta có

$$\sqrt{\left(\frac{1}{a^2-1}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow 4a^4 - 10a^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$ đáp án B

**Câu 8:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $(z + 3 - i)(\overline{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của $z$ là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng

**A.** $4\sqrt{2}$. **B.** $0$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $z = x + yi$ với $x$, $y \in \mathbb{R}$

Ta có:

$$(z+3-i)(\bar{z}+1+3i) = [(x+3)+(y-1)i][(x+1)+(-y+3)i]$$

$$= (x+3)(x+1)-(-y+3)(y-1)+[(x+3)(-y+3)+(x+1)(y-1)]i$$

Vì $(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực nên

$$(x+3)(-y+3)+(x+1)(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+8=0 \Leftrightarrow x-y+4=0$$

Do đó tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của $z$ là đường thẳng $\Delta : x-y+4=0$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng $\Delta$ là:

$$d(O,\Delta) = \frac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

**Câu 9:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm $M$ biểu diễn số phức $w = 2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $c$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** $20$. **B.** $10$. **C.** $18$. **D.** $17$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w = x+yi, (x,y \in R)$.

$$\Rightarrow x+yi = 2\bar{z}-2+3i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{x+2}{2}+\frac{y-3}{2}i.$$

Khi đó $(z-2+i)(\bar{z}-2-i) = \left(\frac{x+2}{2}-\frac{y-3}{2}i-2+i\right)\left(\frac{x+2}{2}+\frac{y-3}{2}i-2-i\right)$

$$= \frac{1}{4}[x+2-(y-3)i-4+2i][x+2+(y-3)i-4-2i]$$

$$= \frac{1}{4}[x-2-(y-5)i][x-2+(y-5)i] = \frac{1}{4}\left[(x-2)^2-(y-5)^2 i^2\right] = \frac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right].$$

Từ giả thiết, suy ra $\frac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right] = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2 = 100$.

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $w = 2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $c = 10$.

Vậy $a+b+c = 2+5+10 = 17$.

**Câu 10:** Gọi $(C)$ là đường cong trong mặt phẳng $Oxy$ biểu diễn các số phức $z$ thỏa mãn $z.\bar{z}+|z-\bar{z}|^2 = 1$ và $H$ là hình phẳng giới hạn bởi $(C)$. Diện tích của hình phẳng $H$ bằng

**A.** $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$. **B.** $\pi\sqrt{5}$. **C.** $2\pi\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $z = x+yi; x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $z.\bar{z}+|z-\bar{z}|^2 = 1 \Leftrightarrow (x+yi)(x-yi)+|x+yi-(x-yi)|^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4y^2=1 \Leftrightarrow x^2+5y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{5}}=1$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ là elip có $a=1$; $b=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Suy ra diện tích hình phẳng $H$ là $S=\pi ab=\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$.

**Câu 11:** Có bao nhiêu số thực dương $m$ để tồn tại duy nhất một số thực $z$ thoả mãn $|z-1-i|\le 2$ và $|z+2+3i|=m$?

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $z=x+yi\quad (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $|z-1-i|\le 2 \Leftrightarrow |x+yi-1-i|\le 2 \Leftrightarrow |(x-1)+(y-1)i|\le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\le 2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\le 4 \quad (1)$

$\Rightarrow$ Tập hợp số phức cần tìm là hình tròn tâm $I(1;1), R_1=2$

Mặt khác $|z+2+3i|=m \Leftrightarrow |(x+2)+(y+3)i|=m$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}=m \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=m^2 \quad (2)$

$\Rightarrow$ Tập hợp số phức cần tìm là đường tròn tâm $J(-2;-3), R_2=m$

Do đó để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn và khi

$$\left[\begin{array}{l} IJ=|R_1+R_2| \\ IJ=|R_1-R_2| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |m+2|=\sqrt{13} \\ |m-2|=\sqrt{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\pm\sqrt{13} \\ m=2\pm\sqrt{13} \end{array}\right.$$

Vì $m>0$ nên $m=\sqrt{13}\pm 2$.

**Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, số phức $\dfrac{1+iz}{4+z}$ có tập hợp các điểm biểu diễn là một đường thẳng. Môđun của $z$ bằng

**A.** 1. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $w=\dfrac{1+iz}{4+z} \Leftrightarrow w(4+z)=1+iz \Leftrightarrow z(w-i)=1-4w \Rightarrow |z||w-1|=|1-4w|$.

Đặt $|z|=r(r\ge 0), \mathrm{w}=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$r\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(1-4x)^2+16y^2} \Leftrightarrow r^2\left(x^2+(y-1)^2\right)=(1-4x)^2+16y^2$

$\Leftrightarrow (16-r^2)z^2+(16-r^2)y^2-8x+2x^2y+1-r^2=0(*)$

Vì tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường thẳng nên $(*)$ phải là phương trình bậc nhất đối với $x,y \Leftrightarrow 16-r^2=0 \Rightarrow r=4$.

**Câu 13:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-2|=4$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2z-1-3i$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm $I$ và tính bán kính $R$ của đường tròn đó.

**A.** $I(3;-3), R=64$. **B.** $I(-3;3), R=8$. **C.** $I(3;-3), R=8$. **D.** $I(3;-3), R=2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $w=2z-1-3i \Leftrightarrow w-3+3i=2(z-2) \Rightarrow |w-3+3i|=2|z-2| \Leftrightarrow |w-3+3i|=8$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}=8 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2=64 \Rightarrow I(3;-3), R=8$. Vậy $I(3;-3), R=8$..

**Câu 14:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm $M$ biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $c$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

**A.** 20. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 17.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w=x+yi,(x,y\in R)$.

$\Rightarrow x+yi=2\overline{z}-2+3i \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y-3}{2}i$.

Khi đó $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=\left(\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y-3}{2}i-2+i\right)\left(\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y-3}{2}i-2-i\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left[x+2-(y-3)i-4+2i\right]\left[x+2+(y-3)i-4-2i\right]$

$=\dfrac{1}{4}\left[x-2-(y-5)i\right]\left[x-2+(y-5)i\right]=\dfrac{1}{4}\left[(x-2)^2-(y-5)^2i^2\right]=\dfrac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right]$.

Từ giả thiết, suy ra $\dfrac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right]=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=100$.

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $c=10$. Vậy $a+b+c=2+5+10=17$.

**Câu 15:** Gọi $z_1, z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+73=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2+z_2^2-|z_1|.|z_2|$ bằng

**A.** $-213$. **B.** $-110$. **C.** $-37$. **D.** $-183$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do $z_1, z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+73=0$.

Suy ra $\begin{cases} z_1+z_2=6 \\ z_1.z_2=73 \end{cases}$. Ta có:

$$z_1^2+z_2^2-|z_1|.|z_2|=(z_1+z_2)^2-2z_1.z_2-|z_1|.|z_2|$$
$$=(z_1+z_2)^2-2z_1.z_2-|z_1.z_2|=36-2.73-|73|=-183.$$

**Câu 16:** Cho các số thực $b,c$ sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1-3+3i|=\sqrt{2}$ và $(z_1+2i)(z_2-2)$ là số thuần ảo. Khi đó $b+c$ bằng:

**A.** $-1$. **B.** $12$. **C.** $4$. **D.** $-12$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Trường hợp 1: Nếu các nghiệm của phương trình là các số thực $x;y$ thì

$|z_1-3+3i|=|(x-3)+3i|=\sqrt{(x-3)^2+9}>\sqrt{2}$ mâu thuẫn với giả thiết.

Trường hợp 2: Các nghiệm phức của phương trình không là các số thực, khi đó với

$z_1=x+yi\Rightarrow z_2=\overline{z_1}=x-yi$.

Khi đó giả thiết môđun tương đương với $|z_1-3+3i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+3)^2=2\quad(1)$. Và

$(z_1+2i)(z_2-2)=[x+(y+2)i].[(x-2)-yi]=x.(x-2)+y.(y+2)+[(x-2).(y+2)-xy].i$

là một số thuần ảo khi và chỉ khi phần thực bằng $0$ tức

$x.(x-2)+y.(y+2)=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y=0\quad(2)$.

Giải hệ gồm $(1)$ và $(2)$: $\begin{cases}(x-3)^2+(y+3)^2=2\\ x^2+y^2-2x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$

$\Rightarrow z_1=2-2\mathrm{i}$ ; $z_2=2+2\mathrm{i}$.

Vì vậy theo Vi-et ta có: $\begin{cases}z_1+z_2=-b=(2-2\mathrm{i})+(2+2\mathrm{i})=4\\ z_1.z_2=c=(2-2\mathrm{i}).(2+2\mathrm{i})=8\end{cases}\Rightarrow b+c=-4+8=4$.

**Câu 17:** Giả sử $z_1,z_2$ là hai trong các số phức $z$ thỏa mãn $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

**A.** $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt

$z=x+yi\Rightarrow(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)=(x-6+yi)(8-y-xi)=(x-6)(8-y)+xy+(-x(x-6)+y(8-y))i$

là một số thực khi và chỉ khi phần ảo bằng 0 tức:

$-x(x-6)+y(8-y)=0\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-8y=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=25\Leftrightarrow|z-3-4i|=5$.

Đặt ẩn phụ cho đơn giản: $u=z-3-4i\Rightarrow\begin{cases}|u_1|=|u_2|=5\\ |z_1-z_2|=|(u_1+3+4i)-(u_2+3+4i)|=|u_1-u_2|=4\end{cases}$

Khi đó $|z_1+3z_2|=|(u_1+3+4i)+3(u_2+3+4i)|=|u_1+3u_2+4(3+4i)|$

Gọi $A(u_1),B(u_2)$ khi đó $|u_1|=\left|\overrightarrow{OA}\right|=5,|u_2|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=5$ và

$|u_1-u_2|^2=\left|\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2\right|=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=25+25-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=16\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=17$.

Vì vậy

$\left|u_1+3u_2\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=\overrightarrow{OA}^2+9\overrightarrow{OB}^2+6\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=25+9.25+6.17=352\Rightarrow\left|u_1+3u_2\right|=4\sqrt{22}$.

Dùng bất đẳng thức môđun $|a+b|\ge|a|-|b|$ có:

$\left|u_1+3u_2+4(3+4i)\right|\ge\left|4(3+4i)\right|-\left|u_1+3u_2\right|=20-4\sqrt{22}$.

**Câu 18:** Giả sử $z_1,z_2$ là 2 trong các số phức $z$ thỏa mãn $|z+1+i|=2$ và $|z_1|+|z_2|=|z_1-z_2|$. Khi $P=|z_1-2z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì số phức $z_1$ có tích phần thực, phần ảo bằng

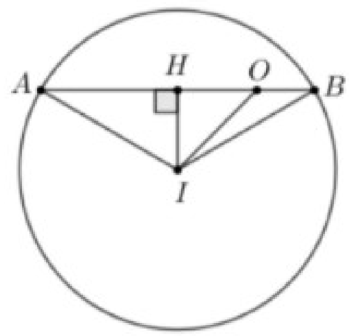
**A.** 0 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $-\dfrac{9}{8}$ **D.** $-\dfrac{3}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $|z+1+i|=2\Leftrightarrow|z-(-1-i)|=2\Rightarrow M(z)$ thuộc đường tròn có tâm $I(-1;-1),R=2$

Và gọi $A(z_1),B(z_2)\Rightarrow|z_1|+|z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow OA+OB=AB\Leftrightarrow O$ thuộc đoạn $AB$




Khi đó $P^2=|z_1-2z_2|^2=\left(\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right)^2=\overrightarrow{OA}^2+4\overrightarrow{OB}^2-4.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA^2+4OB^2+4OA.OB.$

Mặt khác $OA.OB=(HA+OH)(HB-OH)=(HA+OH)(HA-OH)=HA^2-OH^2$

$=HA^2-\left(OI^2-IH^2\right)=\left(HA^2+IH^2\right)-OI^2=IA^2-OI^2=R^2-OI^2=4-2=2$

Do đó: $P^2=OA^2+4OB^2+8\ge2\sqrt{OA^2.4OB^2}+8=16$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}OA^2=4OB^2\\OA.OB=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}OA=2\\OB=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z_1|=2\\|z_2|=1\end{cases}$

Đặt $z_1=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\begin{cases}|z_1+1+i|=2\\|z_1|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=4\\x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-1\\x^2+y^2=4\end{cases}$

Suy ra $xy=\dfrac{(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)}{2}=\dfrac{(-1)^2-4}{2}=-\dfrac{3}{2}$

Chọn đáp án D

**Câu 19:** Xét hai số phức $z_1,z_2$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=5$ và $|z_2+6-8i|-|z_1+6-8i|=|z_1|+|z_2|$. Khi đó $|z_1+2z_2-3i|$ có giá trị lớn nhất bằng

**A.** $\dfrac{25}{2}$. **B.** $13$. **C.** $\sqrt{157}$. **D.** $3\sqrt{34}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

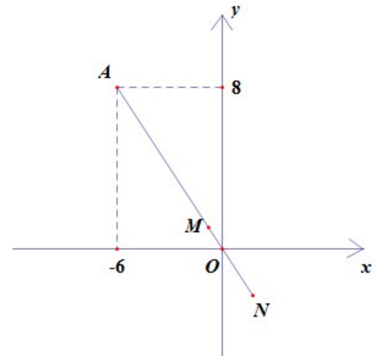
Gọi $A\left(-6;8\right), M\left(z_1\right), N\left(z_2\right)$, theo giả thiết $\left|z_1-z_2\right|=5 \Leftrightarrow MN=5$ và

$\left|z_2+6-8i\right|-\left|z_1+6-8i\right|=\left|z_1\right|+\left|z_2\right| \Leftrightarrow \left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\left|z_2+6-8i\right|-\left|-z_1+-6+8i\right| \le \left|z_1-z_2\right|=5$ mà

$\left|z_1\right|+\left|z_2\right| \ge \left|z_1-z_2\right|=5$ nên

$\left|z_2+6-8i\right|-\left|z_1+6-8i\right|=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\left|z_1-z_2\right|=5 \Leftrightarrow AN-AM=MN=OM+ON=5$

Như vậy $A, M, O, N$ phải là bốn điểm thẳng hàng và có vị trí như hình vẽ




Đường thẳng $OA$ có phương trình $y=-\dfrac{4}{3}x$ mà $N \in OA \Rightarrow N\left(x;-\dfrac{4}{3}x\right)$;

$\overrightarrow{NM}=\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{OA}=\left(-3;4\right) \Rightarrow M\left(x-3;-\dfrac{4}{3}x+4\right)$.

Ta có $\begin{cases} x_M \le x_O \\ x_N \ge x_O \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 3$.

Khi đó: $\left|z_1+2z_2-3i\right|=\sqrt{\left(x-3+2x\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}x+4-\dfrac{8}{3}x-3\right)^2}=\sqrt{\left(3x-3\right)^2+\left(-4x+1\right)^2}$

$=\sqrt{25x^2-26x+10} \le \max\limits_{[0;3]}\sqrt{25x^2-26x+10}=\sqrt{157}$.

**Câu 20:** Xét các số phức $z; w$ thỏa mãn $\left|z-2\right|^2+\left|z-2i\right|^2=6$ và $\left|w-3-2i\right|=\left|w+3+6i\right|$. Khi $\left|z-w\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $\left|z\right|$.

**A.** $1+\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $z=x+yi$ với $x;y \in \mathbb{R}$ và $M$ là điểm biểu diễn số phức $z$.

Ta có $\left|z-2\right|^2+\left|z-2i\right|^2=6 \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+y^2+x^2+\left(y-2\right)^2=6 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$.

Suy ra $M$ thuộc đường tròn $\left(C\right)$ tâm $I\left(1;1\right)$ bán kính $R=1$.

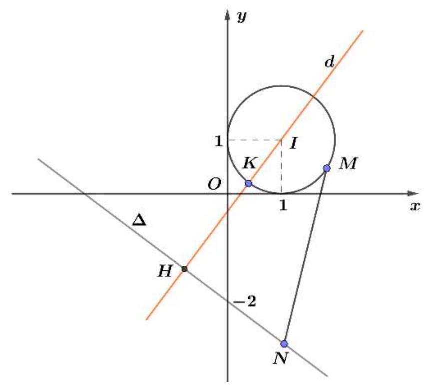
Gọi $w=a+bi$ với $a,b \in \mathbb{R}$ và $N$ là điểm biểu diễn số phức $w$.

Ta có $\left|w-3-2i\right|=\left|w+3+6i\right| \Leftrightarrow \sqrt{\left(a-3\right)^2+\left(b-2\right)^2}=\sqrt{\left(a+3\right)^2+\left(b+6\right)^2} \Leftrightarrow 3a+4b+8=0$.

Suy ra $N$ thuộc đường thẳng $\Delta: 3x+4y+8=0$.

Gọi $d$ đi qua $I$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+8=0$, suy ra $d: 4x-3y-1=0$.

Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H\left(-\frac{4}{5};-\frac{7}{5}\right) \Rightarrow IH = 3$.




Gọi $K$ là giao điểm của đoạn $IH$ và $(C)$. Ta có $IH = 3; IK = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IH} \Rightarrow K\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Mặt khác, ta có $|z - w| = MN$.

Vì $M$ thay đổi thuộc đường tròn $(C)$ và $N$ thay đổi thuộc đường thẳng $\Delta$ nên suy ra $MN \geq KH$
.

Do đó $|z - w|_{\min} = HK = 2$ khi $M \equiv K, N \equiv H$, suy ra $M\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Vậy $|z| = OM = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

**Câu 21:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| = 6$. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 3i|$. Giá trị của $M + m$ bằng.

**A.** $2 + 2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2} + \sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$. **D.** $2 + \sqrt{34}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

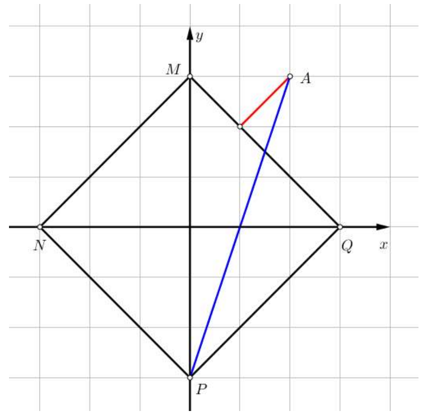
Đặt $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$. Khi đó ta có:

$|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| = 6 \Leftrightarrow |a + bi + a - bi| + |a + bi - a + bi| = 6 \Leftrightarrow 2|a| + 2|b| = 6 \Leftrightarrow |a| + |b| = 3$.

$P = |z - 2 - 3i| = \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2}$.

Gọi $I(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức $z$ và $A(2;3)$. Ta cần tìm max và min của $IA$.

Với $I$ là điểm thuộc cạnh của hình vuông có 4 đỉnh là $(-3;0)$, $(3;0)$, $(0;-3)$ và $(0;3)$.



Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy

$IA_{\min} = d\left(A, MQ\right)$, phương trình $MQ: x+y-3=0$ nên $IA_{\min} = \dfrac{\left|2+3-3\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = m$.

$IA_{\max} = AP = \sqrt{\left(2-0\right)^2 + \left(3+3\right)^2} = 2\sqrt{10} = M$.

Do đó $M + m = \sqrt{2} + 2\sqrt{10}$.

**Câu 22:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|z-2i\right| \le \left|z-4i\right|$ và $\left|z-3-3i\right| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|z-2\right|$ là

**A.** $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}+1$. **D.** $\sqrt{10}$.

**Lời giải**

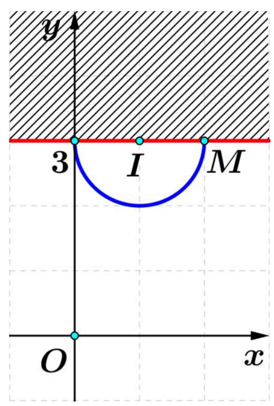
**Chọn B**

Đặt $u = z-2 \Leftrightarrow z = u+2$

Ta có $\begin{cases} \left|z-2i\right| \le \left|z-4i\right| \\ \left|z-3-3i\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|u+2-2i\right| \le \left|u+2-4i\right| \\ \left|u-1-3i\right| = 1 \end{cases}$, với $u = x+yi; x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le 3 \\ \left(x-1\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm $M$ biểu diễn số phức $u$ chính là giao giữa nửa đường tròn tâm $I\left(1;3\right)$, bán kính $R=1$ với là đường thẳng $y=3$ thì $P_{\max}$




Dựa vào hình vẽ, ta có $M\left(2;3\right), P_{\max} = \sqrt{13}$.

**Câu 23:** Cho các số phức $z = x+yi$ $\left(x, y \in \mathbb{R}, -4 \le y \le 15\right)$ và $w$ thỏa $\left|w-4-3i\right| = 2$. Các số phức $z, z^2, z^3$ lần lượt có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ tạo thành một tam giác vuông. Gọi $m = \min\left|z-w\right|, M = max\left|z-w\right|$. Khi đó $m + M^2$ bằng

**A.** $224$. **B.** $226$. **C.** $227$. **D.** $225$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi điểm biểu diễn của $w$ là $K$ thì từ $\left|w-4-3i\right| = 2$ ta có $K$ thuộc đường tròn tâm $J\left(4;3\right)$, bán kính $R=2$.

Gọi $A\left(x;y\right)$, $B$, $C$ lần lượt là điểm biểu diễn của $z, z^2, z^3$, khi đó $\left|z-w\right| = AK$.

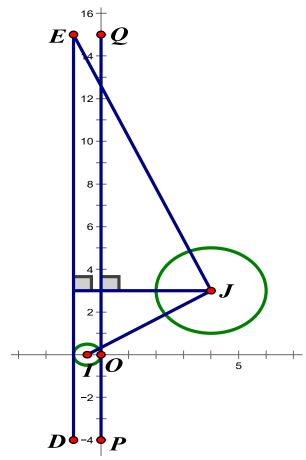
Ta có $AB = \left|z^2 - z\right| = \left|z\right|\left|z-1\right|$, $AC = \left|z^3 - z\right| = \left|z\right|\left|z^2-1\right|$, $BC = \left|z^3 - z^2\right| = \left|z\right|^2\left|z-1\right|$

Từ đề ta có tam giác ABC vuông nên $\left[\begin{array}{l} AB^2+AC^2=BC^2 \\ AB^2+BC^2=AC^2 \\ AC^2+BC^2=AB^2 \end{array}\right.$ và $|z|\neq 0, |z|\neq 1$

**Trường hợp 1:** $B^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow 1+|z+1|^2=|z|^2 \Leftrightarrow 1+(x+1)^2+y^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow x=-1$.

Do $-4\leq y\leq 15$ nên $A$ thuộc đoạn $DE$ với $D(-1;-4), E(-1;15)$.

Khi đó $M_1=\max AK = JE+R=15$, $m_1=\min AK=d(J,DE)-R=3$.




**Trường hợp 2:** $AB^2+BC^2=AC^2 \Leftrightarrow 1+|z|^2=|z+1|^2 \Leftrightarrow 1+x^2+y^2=(x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow x=0$.

Do $-4\leq y\leq 15$ nên $A$ thuộc đoạn $PQ$ với $P(0;-4), Q(0;15)$.

Khi đó $M_2=\max AK=JQ+R=4\sqrt{10}+2$, $m_1=\min AK=d(J,\text{PQ})=2$.

**Trường hợp 3:** $AC^2+BC^2=AB^2 \Leftrightarrow |z+1|^2+|z|^2=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2+x^2+y^2=1$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. Suy ra $A$ thuộc đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$, bán kính $R_1=\frac{1}{2}$ và bỏ các điểm $(-1;0),(0;0)$

Khi đó $M_3=\max AK=IJ+R+R_1=\frac{3\sqrt{13}+5}{2}$, $m_3=\min AK=IJ-R-R_1=\frac{3\sqrt{13}-5}{2}$.

Vậy $m=\min\{m_1,m_2,m_3\}=\min\left\{3;2;\frac{3\sqrt{13}-5}{2}\right\}=2$

$M=\max\{M_1;M_2;M_3\}=\max\left\{15;\sqrt{10}+2;\frac{3\sqrt{13}+5}{2}\right\}=15$.

Suy ra $m+M^2=227$.

***Chú ý:*** Nếu vẽ được chính xác hình vẽ thì có thể suy ra ngay $M=JE=15, m=d(I,PQ)-R=2$.

**Câu 24:** Xét hai số phức $z$, $w$ thỏa mãn $|z-1-2i|=|z-2+i|$ và $|w-2+3i|=|w-4-i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-i|+|w+3-i|+|z-w|$ bằng $\frac{2}{5}\sqrt{abc}$ với $a, b, c$ là các số nguyên tố. Tính giá trị của $a+b+c$.

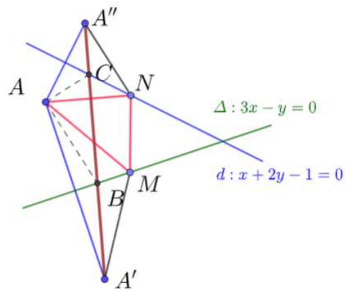
**A.** $22$. **B.** $24$. **C.** $26$. **D.** $25$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $z = x + iy, (x, y \in \mathbb{R})$, $w = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$; $M, N$ lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z$, $w$. Khi đó, $M \in \Delta : x - 3y = 0$; $N \in d : x + 2y - 1 = 0$ vì

$|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i| \Leftrightarrow x - 3y = 0$ và $|w - 2 + 3i| = |w - 4 - i| \Leftrightarrow a + 2b - 1 = 0$.




Ta có $T = |z + 3 - i| + |w + 3 - i| + |z - w| = AM + AN + MN$ với $A(-3;1)$.

Gọi $A' = Đ_{\Delta}(A) = (-1,8; -2,6)$ và $A'' = Đ_d(A) = (-2,2; 2,6)$, thì

$T = AM + AN + MN = A'M + A''N + MN \geq A'A'' = \frac{2}{5}\sqrt{170} = \frac{2}{5}\sqrt{2 \times 5 \times 17} = \frac{2}{5}\sqrt{abc}$.

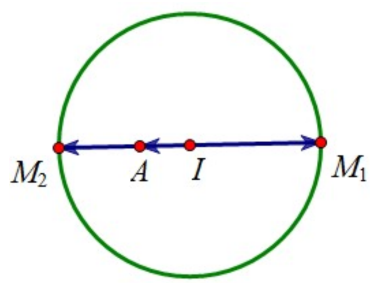
Vậy $a + b + c = 2 + 5 + 17 = 24$.

**Câu 25:** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|\frac{z}{3 - 4i} + 1 - i\right| = 1$ sao cho $|z - 3 - 8i|$ đạt giá trị lớn nhất tại $z_1 = x_1 + iy_1$ và đạt giá trị nhỏ nhất tại $z_2 = x_2 + iy_2$. Giá trị của $x_1 + x_2 + y_1 y_2$ bằng

**A.** 44. **B.** 55. **C.** 25. **D.** 46.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có $\left|\frac{z}{3 - 4i} + 1 - i\right| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 - 7i| = 5$. Điều này có nghĩa tập hợp các điểm biểu diễn cho các số thức $z = x + iy$ là đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 25$ có tâm $I(1;7)$ và bán kính $R = 5$.

$P = |z - 3 - 8i| = MA$ là khoảng cách giữa M và $A(3;8)$. Ta có $AI = \sqrt{5}$ và $\overrightarrow{IA} = (2;1)$.

Ta có $\left||z - 1 - 7i| - |-2 - i|\right| \leq P \leq |z - 1 - 7i| + |-2 - i| \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \leq P \leq 5 + \sqrt{5}$.

$$P_{\max} = M_1A = 5 + \sqrt{5} = M_1I + IA \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \in (C) \\ \overrightarrow{AM_1} = (\sqrt{5} + 1)\overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow M_1\left(1 - 2\sqrt{5}; 7 - \sqrt{5}\right)$$

$$P_{\min} = AM_2 = 5 - \sqrt{5} = IM_2 - IA \Leftrightarrow \begin{cases} M_2 \in (C) \\ \overrightarrow{AM_2} = (\sqrt{5} - 1)\overrightarrow{IA} \end{cases} \Leftrightarrow M_2\left(1 + 2\sqrt{5}; 7 + \sqrt{5}\right)$$

Vậy $x_1 + x_2 + y_1 y_2 = \left(1 - 2\sqrt{5} + 1 + 2\sqrt{5}\right) + \left(7 - \sqrt{5}\right)\left(7 + \sqrt{5}\right) = 2 + 44 = 46$.

**Câu 26:** Xét ba số phức $z, z_1, z_2$ thoả mãn $|z-i|=|z+1|$, $|z_1-3\sqrt{5}|=\sqrt{5}$ và $|z_2-4\sqrt{5}i|=2\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|\sqrt{5}z-z_1|+|\sqrt{5}z-z_2|$ bằng

**A.** $4\sqrt{5}$. **B.** $10\sqrt{5}$. **C.** $7\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $M, M_1, M_2$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $\sqrt{5}z, z_1$ và $z_2$.

Ta có $|z-i|=|z+1| \Leftrightarrow |\sqrt{5}z-\sqrt{5}i|=|\sqrt{5}z+\sqrt{5}| \Leftrightarrow MA=MB$ với $A(0;\sqrt{5})$ và $B(-\sqrt{5};0)$.

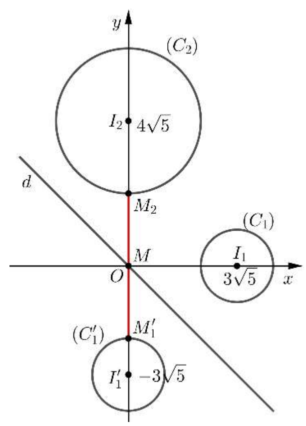
$\Leftrightarrow M \in d$ với $d$ là đường trung trực của $AB$.

$d$ qua $I\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ là trung điểm $AB$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{5};-\sqrt{5})$ làm VTPT $\Rightarrow d: x+y=0$.

$|z_1-3\sqrt{5}|=\sqrt{5} \Leftrightarrow M_1 \in (C_1)$ với $(C_1)$ là đường tròn tâm $I_1(3\sqrt{5};0)$, bán kính $R_1=\sqrt{5}$.

$|z_2-4\sqrt{5}i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow M_1 \in (C_2)$ với $(C_2)$ là đường tròn tâm $I_2(0;4\sqrt{5})$, bán kính $R_2=2\sqrt{5}$.

Khi đó $T=|\sqrt{5}z-z_1|+|\sqrt{5}z-z_2|=MM_1+MM_2$.




Lấy đối xứng $M_1$ qua $d$, ta được $M_1' \in (C_1')$ với $(C_1')$ là đường tròn tâm $I_1'(0;-3\sqrt{5})$, bán kính $R_1'=\sqrt{5}$.

Khi đó $MM_1'+MM_2 \geq M_1'M_2 \geq |I_1'I_2-R_1'-R_2|=4\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O(0;0), M_2(0;2\sqrt{5}), M_1(2\sqrt{5};0)$.

Hay $z=0, z_2=2\sqrt{5}i, z_1=2\sqrt{5}$.

**Câu 27:** Xét các số phức $z$ thỏa mãn $|z+\overline{z}+2|+|z-\overline{z}|=6$. Gọi $M, m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-2i|$. Khi đó $M+m$ bằng

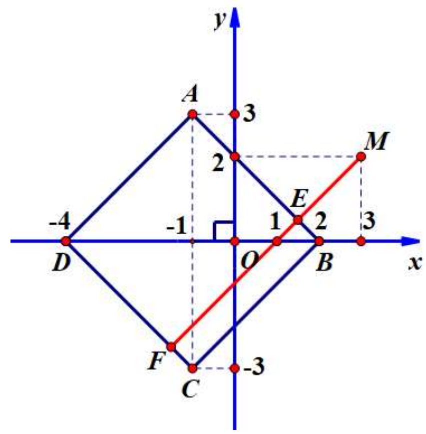
**A.** $\frac{2\sqrt{53}+3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{53}+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{53}+\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử $z=x+yi, (x, y \in \mathbb{R})$ khi đó ta có $z+\overline{z}=2x$ và $z-\overline{z}=2y$ do đó từ giả thiết bài toán ta được $|z+\overline{z}+2|+|z-\overline{z}|=6 \Leftrightarrow |2x+2|+|2y|=6 \Leftrightarrow |x+1|+|y|=3$.

Từ đây ta có bốn trường hợp sau $(I):\begin{cases}x\ge -1, y\ge 0\\ x+y=2\end{cases}$ $(II):\begin{cases}x\le -1, y\le 0\\ x+y=-4\end{cases}$ $(III):\begin{cases}x\ge -1, y\le 0\\ x-y=2\end{cases}$ và $(IV):\begin{cases}x\le -1, y\ge 0\\ x-y=-4\end{cases}$. Hình biểu diễn của $(I)$ là đoạn $AB$, của $(II)$ là đoạn $CD$, của $(III)$ là đoạn $BC$ và của $(IV)$ là đoạn $AD$. Với $ABCD$ là hình vuông như hình vẽ.




Đặt $M(3;2)$ khi đó $P=|z-3-2i|=MN$ với $N$ là điểm thuộc cạnh của hình vuông $ABCD$.
Dựng đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $AB$ cắt $AB$ tại $E$ và cắt $CD$ tại $F$. Từ hình vẽ ta có $\max P+\min P=ME+MD=d(M,AB)+MD=\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{53}$.

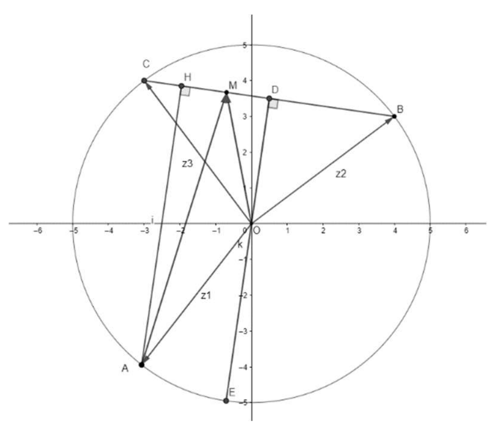
Hay $M+m=\dfrac{2\sqrt{53}+3\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 28:** Với các số phức $z_1$, $z_2$, $z_3=iz_2$ thay đổi thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=5$ thì giá trị lớn nhất của $\min\limits_{t\in\mathbb{R}}|tz_2+(1-t)z_3-z_1|$ có dạng $a+\dfrac{b}{\sqrt{c}}$, ở đó $a$, $b$ là các số nguyên dương, $c$ là số nguyên tố. Giá trị của $a+b+c$ là

**A.** $15$. **B.** $12$. **C.** $13$. **D.** $14$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z_1, z_2, z_3$ là đường tròn tâm $O$ bán kính $R=5$.
Gọi các điểm biểu diễn số phức $z_1$, $z_2$, $z_3$ lần lượt là $A$, $B$, $C$.
Ta có $\Delta OBC$ là tam giác vuông cân tại $O$ và $|z_3-z_2|=BC=5\sqrt{2}$.

Số phức $tz_2+(1-t)z_3$ được biểu diễn bởi điểm $M$ thuộc đường thẳng $BC$.

Do đó, ta có $\left|tz_2+(1-t)z_3-z_1\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right|=AM$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên $BC$ ta có $AM\ge AH$.

$\Rightarrow \min\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|tz_2+(1-t)z_3-z_1\right|=\min AM=AH$.

Khi đó $\max\left\{\min\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|tz_2+(1-t)z_3-z_1\right|\right\}=\max\{AH\}=ED=R+OD=5+\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

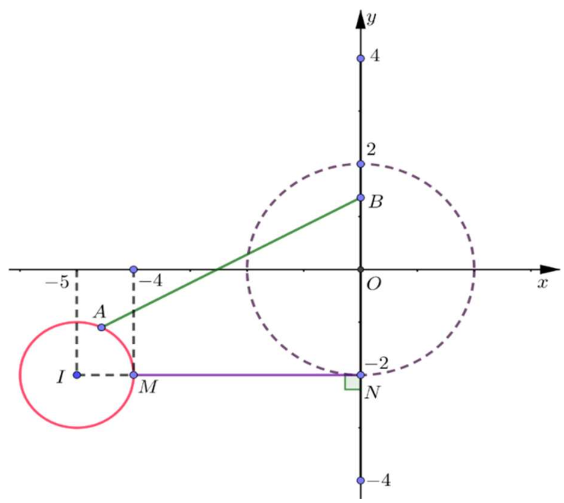
Vậy ta có $a=5,\ b=5, c=2$.

**Câu 29:** Xét các số phức $z$, $w$ thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2-wz-4\right|$ bằng

**A.** $4$. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** $8$. **D.** $2\left(\sqrt{29}-5\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có: $|iw-2+5i|=1\Leftrightarrow |i|\cdot\left|w+\dfrac{-2+5i}{i}\right|=1\Leftrightarrow |w+5+2i|=1$.

Ta có: $T=\left|z^2-wz-4\right|=\left|z^2-wz-|z|^2\right|=\left|z^2-wz-z\cdot\overline{z}\right|=|z|\cdot\left|z-\overline{z}-w\right|=2\left|z-\overline{z}-w\right|\ (*)$

Đặt $z=a+bi$. Suy ra: $z-\overline{z}=2bi$. Vì $|z|=2$ nên $-4\le 2b\le 4$.

Gọi $A$, $B$ lần lượt là điểm biểu diễn của $w$ và $2bi$. Suy ra:

+ $A$ thuộc đường tròn $(C)$ có tâm $I(-5;-2)$, bán kính $R=1$.

+ $B$ thuộc trục $Oy$ và $-4\le x_B\le 4$.

Từ $(*)$ suy ra: $T=2AB\ge 2MN=2\cdot 4=8$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A\equiv M(-4;-2)\Rightarrow w=-4-2i$ và

$B\equiv N(0;-2)\Rightarrow 2bi=-2i\Rightarrow b=-1\Rightarrow z=a-i\Rightarrow a^2+1=4\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}\Rightarrow z=\pm\sqrt{3}-i$.

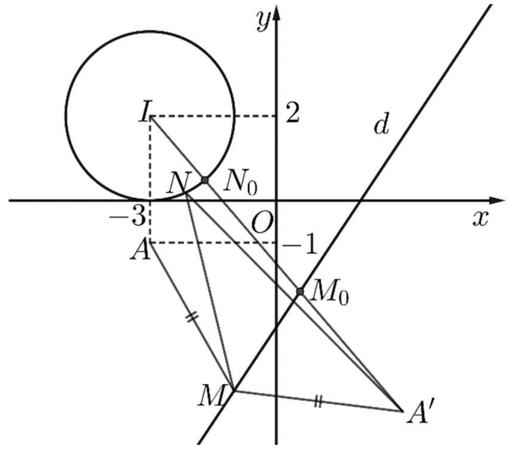
Vậy $\left|z^2-wz-4\right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng $8$.

**Câu 30:** Với hai số phức $z_1$, $z_2$ thay đổi thỏa mãn $|z_1+1-2i|=|z_1-5+2i|$ và $|z_2+3-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+3+i|+|z_1-z_2|$ bằng

**A.** $5\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{10}+2$. **C.** $3\sqrt{10}-2$. **D.** $\sqrt{85}-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ với $x_1, y_1$ là các số thực.

Từ $|z_1 + 1 - 2i| = |z_1 - 5 + 2i|$ suy ra $\sqrt{(x_1+1)^2 + (y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-5)^2 + (y_1+2)^2}$

$\Leftrightarrow 3x_1 - 2y_1 - 6 = 0$.

Tập hợp các điểm $M$ biểu diễn cho số phức $z_1$ trên mặt phẳng phức là đường thẳng $d: 3x - 2y - 6 = 0$.

Do $|z_2 + 3 - 2i| = 2$ nên tập hợp các điểm $N$ biểu diễn cho số phức $z_2$ là đường tròn $(C)$ tâm $I(-3;2)$, bán kính $R = 2$.

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 3 + i| + |z_1 - z_2| = AM + MN$ trong đó điểm $A(-3;-1)$.

Gọi $A'$ là điểm đối xứng với điểm $A$ qua đường thẳng $d$, ta tìm được $A'(3;-5)$.

Có $P = AM + MN = A'M + MN \geq A'N \geq A'N_0 = A'I - IN_0 = A'I - R$ với $N_0$ là một trong hai giao điểm của $A'I$ với đường tròn $(C)$, $N_0$ ở giữa $I$ và $A'$. Khi đó, $M_0$ là giao điểm của $A'I$ và $d$.

Vậy biểu thức $P = AM + MN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $A'I - R$ và bằng $\sqrt{85} - 2$.

Cách 2:

$P = |z_1 + 3 + i| + |z_1 - z_2| = |z_1 + 3 + i| + |z_1 + 3 - 2i - (z_2 + 3 - 2i)|$.

$P \geq |z_1 + 3 + i| + |z_1 + 3 - 2i| - |z_2 + 3 - 2i|$.

$P \geq |z_1 + 3 + i| + |z_1 + 3 - 2i| - 2$.

Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ với $x_1, y_1$ là các số thực.

Từ $|z_1 + 1 - 2i| = |z_1 - 5 + 2i|$ suy ra $\sqrt{(x_1+1)^2 + (y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-5)^2 + (y_1+2)^2}$

$\Leftrightarrow 3x_1 - 2y_1 - 6 = 0$.

$P \geq \sqrt{(x_1+3)^2 + (y_1+1)^2} + \sqrt{(x_1+3)^2 + (y_1-2)^2} - 2$.

Thay $y_1 = \dfrac{3x_1 - 6}{2}$ ta có $P \geq \sqrt{\dfrac{13}{4}x_1^2 + 13} + \sqrt{\dfrac{13}{4}x_1^2 - 9x_1 + 34} - 2$

$$P \ge \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}x_1\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{2}x_1\right)^2 + \left(\frac{19}{\sqrt{13}}\right)^2} - 2$$

$$P \ge \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}x_1 + \frac{9}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{2}x_1\right)^2 + \left(\sqrt{13} + \frac{19}{\sqrt{13}}\right)^2} - 2 = \sqrt{85} - 2.$$

$$P_{\min} = \sqrt{85} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{\sqrt{13}}{2}x_1}{\frac{9}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{2}x_1} = \dfrac{\sqrt{13}}{\frac{19}{\sqrt{13}}} \\ \dfrac{x_2+3}{x_1+3} = \dfrac{y_2-2}{y_1-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{16}; y_1 = \dfrac{-69}{32} \\ \dfrac{x_2+3}{\frac{57}{16}} = \dfrac{y_2-2}{\frac{-133}{32}} \end{cases} (*)$$

Từ suy ra: $\dfrac{x_2+3}{3} = \dfrac{y_2-2}{-\frac{7}{2}} = t > 0 \Rightarrow x_2 + 3 = 3t; y_2 - 2 = \dfrac{-7}{2}t.$

Có $\sqrt{(x_2+3)^2 + (y_2-2)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9t^2 + \dfrac{49}{4}t^2} = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{\sqrt{85}}$ do $t > 0$.

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{-255 + 12\sqrt{85}}{85}$; $y_2 = \dfrac{170 - 14\sqrt{85}}{85}$.

**Câu 31:** Cho hai số phức $z$, $w$ thỏa mãn $\begin{cases} \max\{|z|;|z-1-i|\} \le 1 \\ |w+1+2i| \le |w-2-i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z-w|$.

**A.** $\sqrt{2} - 1$. **B.** $2\sqrt{2} - 1$. **C.** $0$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $M$, $N$ lần lượt là điểm biểu diễn của $z, w$ trên mặt phẳng phức.

Đặt $z = a + bi$ và $w = x + yi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $\max\{|z|;|z-1-i|\} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \le 1 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 \le 1 \end{cases}$.

Do đó $M$ nằm trong miền giao của hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính 1 và hình tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $1$.

Ta có $|w+1+2i| \le |w-2-i| \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 \le (x-2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x + y \le 0$.

Do đó $N$ nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $y = -x$ và chứa điểm $(-1;-1)$.

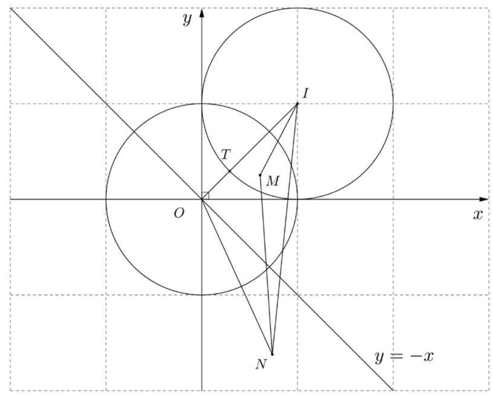
Gọi $T$ là giao điểm của $IO$ và đường tròn tâm $I$, bán kính $1$.

Ta thấy $IM \le IT < IO \le IN$.

Theo bất đẳng thức tam giác $|z-w| = MN \ge IN - IM \ge IO - IT = \sqrt{2} - 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $M$ trùng $T$, $N$ trùng $O$.

Vậy $\min|z-w| = \sqrt{2} - 1$.

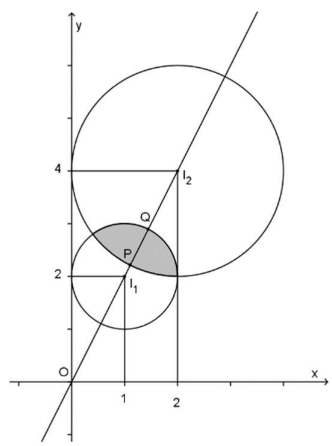



**Câu 32:** Cho $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $\begin{cases} |z-1-2i| \le 1 \\ |z-1-2i| \le 2 \end{cases}$. Giá trị $S = \min|z| + \max|z|$ bằng:

**A.** $3\sqrt{5}-1$. **B.** $\sqrt{5}+2$. **C.** $2\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{2}+\sqrt{5}-1$

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $M$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ trên mặt phẳng phức.

Ta có: $\begin{cases} |z-1-2i| \le 1 \\ |z-1-2i| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 1 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 \le 4 \end{cases}$

Do đó $M$ thuộc phần chung của hai hình tròn $(I_1;1)$ và $(I_2;2)$, với $I_1(1;2)$ và $I_2(2;4)$.

Phương trình đường thẳng $I_1I_2$ là $y = 2x$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $|z|$ lớn nhất khi $M \equiv Q$ và $|z|$ nhỏ nhất khi $M \equiv P$, trong đó $P$; $Q$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ với các đường tròn $(I_2;2)$ và $(I_1;1)$ sao cho $P$; $Q$ nằm giữa $I_1$ và $I_2$.

Dễ thấy $P\left(2-\frac{2\sqrt{5}}{5};4-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$; $Q\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5};2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Vậy $S = \min|z| + \max|z| = OP + OQ = 3\sqrt{5}-1$.

# CHƯƠNG 5: TỔ HỢP XÁC SUẤT VDC CHỌN LỌC

## I. CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT CHỌN LỌC

### ĐỀ BÀI

**Câu 1:** Có $6$ học sinh gồm 1 học sinh lớp $10$, $2$ học sinh lớp $11$ và 3 học sinh lớp $12$. Xếp ngẫu nhiên $6$ học sinh đó thành một hàng ngang. Xác suất để học sinh lớp $10$ đứng xen kẽ giữa $2$ học sinh lớp $12$ bằng

**A.** $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

**Câu 2:** Từ 30 câu hỏi trắc nghiệm gồm 15 câu dễ, 9 câu trung bình và 6 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Số đề kiểm tra có thể lập được là:

**A.** $27730143$. **B.** $27731043$. **C.** $27737049$. **D.** $27730749$.

**Câu 3:** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp $X$ gồm các số tự nhiên bé hơn $10^{10}$ và có tổng các chữ số bằng 2. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 2000.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{12}{55}$. **C.** $\frac{16}{45}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Câu 4:** Giải bóng chuyền VTV Cup có $16$ đội tham gia, trong đó có $12$ đôi nước ngoài và $4$ đội Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành bốn bảng đấu A, B, C, D mỗi bảng có $4$ đội. Tính xác suất để $4$ đội Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau.

**A.** $\frac{391}{455}$. **B.** $\frac{8}{1365}$. **C.** $\frac{32}{1365}$. **D.** $\frac{64}{455}$.

**Câu 5:** Có 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Rút ngẫu nhiên cùng một lúc 3 tấm thẻ. Tính xác suất sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị.

**A.** $\frac{17}{25}$. **B.** $\frac{27}{52}$. **C.** $\frac{1771}{2600}$. **D.** $\frac{253}{325}$.

**Câu 6:** Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ $101$ đến $200$. Tính xác suất để 3 số được chọn lập thành một cấp số cộng.

**A.** $\frac{1}{66}$. **B.** $\frac{3}{100}$. **C.** $\frac{2}{33}$. **D.** $\frac{1}{33}$.

**Câu 7:** Từ các số $0,1,2,..,8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau mà có $3$ chữ số chẵn, $2$ số lẻ và hai số $2,3$ không đồng thời có mặt.

**A.** 4392. **B.** 6336. **C.** 1944. **D.** 4350.

**Câu 8:** Cho đa giác đều $(H)$ có 20 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của $(H)$. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác mà không có cạnh nào là cạnh của $(H)$.

**A.** $\frac{625}{969}$. **B.** $\frac{545}{969}$. **C.** $\frac{455}{969}$. **D.** $\frac{541}{969}$.

**Câu 9:** Từ tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số $\overline{abcd}$ sao cho $a\le b\le c\le d$.

**A.** $495$. **B.** $309$. **C.** $1534$. **D.** $876$.

**Câu 10:** Có 2021 hộp quà được đánh số từ 1 đến 2021. Lấy ngẫu nhiên 8 hộp để tặng 3 người. Tính xác suất để các số ghi trên hộp lấy ra đó không những có cả số chia hết cho 8 mà còn có cả số chia hết cho 3.

**A.** $\frac{3}{8}$. **B.** $\simeq 0,83$. **C.** $\simeq 0,38$. **D.** $\simeq 0,63$.

**Câu 11:** Tờ tiền VN được gọi là may mắn nếu mệnh giá và sê-ri thỏa mãn điều kiện:

1. Tờ bạc có mệnh giá 10000 VNĐ
2. 2 chữ cái in hoa không trùng nhau
3. Tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Hỏi có bao nhiêu tờ tiền may mắn ?

**A.** $313041850$. **B.** $3130419500$ **C.** $313419500$. **D.** $313041950$.

**Câu 12:** Cho đa giác 30 đỉnh nội tiếp đường tròn, gọi $S$ là tập hợp các đường thẳng đi qua 2 trong số 30 đỉnh đã cho. Chọn hai đường thẳng bất kì từ tập $S$. Tính xác suất để chọn được hai đường thẳng mà giao điểm của chúng nằm bên trong đường tròn.

**A.** $\frac{7}{25}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{9}{31}$.

**Câu 13:** Gọi $S$ là tập hợp các số tự nhiên gồm $4$ chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số $0;\,1;\,2;\,3;\,4;\,5$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Xác suất để số được chọn có chứa ít nhất một trong hai chữ số $1$ hoặc $2$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{3}{50}$. **D.** $\frac{47}{50}$.

**Câu 14:** Cho tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $9$ chữ số phân biệt sao cho các chữ số $1,2,3,4,5$ xuất hiện theo thứ tự giảm dần từ trái qua phải và chữ số $9$ luôn đứng trước chữ số $1$?

**A.** $2250$. **B.** $2520$. **C.** $420$. **D.** $3024$.

**Câu 15:** Cho một bảng hình chữ nhật kích thước $10\times 9$ gồm $90$ ô vuông đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật được tạo bởi các ô vuông đơn vị của bảng. Xác suất để hình được chọn là hình vuông là

**A.** $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{2}{15}$. **C.** $\frac{3}{10}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 16:** Thầy giáo yêu cầu $3$ bạn An, Bình, Lâm lần lượt lên bảng viết ngẫu nhiên một số có $2$ chữ số mà chỉ dùng các chữ số $0;1;8;9$. Tính xác suất tổng $3$ số ba bạn viết là một số chia hết cho $3$

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $\frac{2}{9}$

**Câu 17:** Có $6$ học sinh nam và $3$ học sinh nữ được xếp chỗ ngồi ngẫu nhiên vào một dãy gồm $9$ ghế. Xác suất để mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam là

**A.** $11,9\%$. **B.** $58,33\%$. **C.** $60,71\%$. **D.** $6,94\%$.

**Câu 18:** Có 200 cái kẹo, chia cho 5 người sao cho ai cũng có kẹo. Xác suất để mỗi người có ít nhất 10 kẹo gần đúng với đáp án nào sau đây?

**A.** $0,711$. **B.** $0,277$. **C.** $0,432$. **D.** $0,355$.

**Câu 19:** Bạn An chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Tìm xác suất sao cho số của An lớn hơn số của Bình.

**A.** $\dfrac{47}{72}$. **B.** $\dfrac{37}{56}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{49}{72}$.

**Câu 20:** Cho đa giác đều $2020$ đỉnh nội tiếp đường tròn $(C)$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời $3$ đỉnh trong $2020$ tạo thành 1 tam giác và chọn ngẫu nhiên đồng thời $4$ đỉnh trong
$2020$ đỉnh tạo thành 1 tứ giác. Gọi $x$ là xác suất chọn được tam giác vuông cân, $y$ là xác suất chọn được hình chữ nhật. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$.

**A.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2017}{1009}$. **B.** $\dfrac{x}{y}=2017$. **C.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1009}{2017}$. **D.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2020}{2021}$.

**Câu 21:** Gọi $S$ là tập các số tự nhiên có $9$ chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Tính xác suất để lấy được số có mặt đồng thời bốn chữ số $4;5;6;7$ và bốn chữ số đó đôi một không kề nhau.

**A.** $\dfrac{5}{63}$. **B.** $\dfrac{89}{1134}$. **C.** $\dfrac{17}{252}$. **D.** $\dfrac{85}{1134}$.

**Câu 22:** Số tập con có ba phần tử của tập $\left\{2^1;2^2;...;2^{2020}\right\}$ sao cho ba phần tử đó có thể xếp thành một cấp số nhân tăng bằng

**A.** $1017072$ **B.** $2039190$. **C.** $1018081$. **D.** $1019090$.

**Câu 23:** Có bao nhiêu xâu kí tự độ dài 2021 mà mỗi ký tự thuộc tập hợp $\{1;2;3\}$, trong đó số ký tự 1 xuất hiện chẵn lần?

**A.** $\dfrac{3^{2021}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{3^{2021}+1}{2}$. **C.** $3^{2021}-1$. **D.** $3^{2021}+1$.

**Câu 24:** Người ta dùng $100$ số nguyên dương đầu tiên để đánh số cho $100$ tấm thẻ (mỗi thẻ đánh một số). Chọn ngẫu nhiên bốn thẻ trong $100$ thẻ đó. Xác suất để chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho $9$ gần nhất với kết quả nào sau đây?

**A.** $0,536$. **B.** $0,464$. **C.** $0,489$. **D.** $0,511$.

**Câu 25:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 đồng thời số đó chia hết cho 9?

**A.** $10000$. **B.** $9999$. **C.** $100000$. **D.** $99999$.

**Câu 26:** Một bảng vuông gồm $100\times100$ ô vuông. Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật. Tính xác suất để ô được chọn là hình vuông (trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân)

**A.** $0,0134$. **B.** $0,0133$. **C.** $0,0136$. **D.** $0,0132$

**Câu 27:** Cho tập hợp $X=\{1;2;3;4;...;100\}$ hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 7 số bất kì khác nhau sao cho hiệu của 2 số bất kì trong 7 số đó có trị tuyệt đối không nhỏ hơn 4?

**A.** $C_{82}^7$ **B.** $C_{100}^7$ **C.** $C_{100}^7-97$ **D.** $C_{93}^7$

**Câu 28:** Có 30 quả cầu được đánh số từ 1 đến 30. Bạn Minh chọn ngẫu nhiên ra 10 quả cầu. Tính xác suất để trong 10 quả cầu lấy ra có 5 quả cầu mang số chẵn, 5 quả cầu mang số lẻ trong đó có đúng một quả cầu mang số chẵn và một quả cầu mang số lẻ chia hết cho 3.

**A.** $\dfrac{5040}{95381}$. **B.** $\dfrac{3500}{95381}$. **C.** $\dfrac{1001}{3335}$. **D.** $\dfrac{5031}{95381}$.

**Câu 29:** Gọi $S$ là tập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S$. Xác suất để chọn được số có 4 chữ số viết theo thứ tự tăng dần và không có hai số nào liên tiếp nhau là:

**A.** $\dfrac{1}{36}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{63}$. **D.** $\dfrac{5}{1512}$.

**Câu 30:** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6;7\}$. Gọi $B$ là tập hợp các số tự nhiên gồm $4$ chữ số khác nhau được lập từ $A$. Chọn thứ tự $2$ số thuộc tập $B$. Tính xác suất để $2$ số được chọn có đúng một số có mặt chữ số $5$.

**A.** $\frac{1440}{5873}$. **B.** $\frac{2880}{5873}$. **C.** $\frac{480}{5873}$. **D.** $\frac{720}{5873}$.

**Câu 31:** Xếp ngẫu nhiên $5$ học sinh lớp Toán, $2$ học sinh lớp Văn và $2$ học sinh lớp Hóa vào $9$ ghế quanh một bàn tròn (mỗi học sinh ngồi đúng một ghế). Tính xác suất để $5$ học sinh lớp Toán ngồi cạnh nhau.

**A.** $\frac{1}{126}$. **B.** $\frac{5}{126}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{1}{14}$.

**Câu 32:** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có một đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú hoạ một câu trả lời. Xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1là

**A.** $0,7759$. **B.** $0,5256$. **C.** $0,5652$. **D.** $0,7959$.

**Câu 33:** Trong hộp có $m$ bóng đỏ và $n$ bóng xanh đôi một khác nhau. Ta lấy lần lượt ra ngoài ngẫu nhiên không hoàn lại một lần một quả bóng. Xác suất để lần cuối lấy được bóng màu đỏ là

**A.** $\frac{m}{m+n}$. **B.** $\frac{n}{m+n}$. **C.** $\frac{1}{(m+n-1)!}$. **D.** $\frac{m!}{(m+n)!}$.

**Câu 34:** Bộ mã ASCII là bảng mã dùng một dãy gồm 8 kí hiệu là 0 hoặc 1 để mã hóa cho một kí tự. Lấy ngẫu nhiên 1 dãy 8 kí hiệu trong bảng mã này. Xác suất để dãy lấy ra có nhiều nhất 6 kí hiệu là 1 là

**A.** $\frac{255}{256}$. **B.** $\frac{219}{256}$. **C.** $\frac{9}{256}$. **D.** $\frac{247}{256}$.

**Câu 35:** Đặt $5$ quân cờ lên một bàn cờ vua, mỗi ô vuông trên bàn cờ chỉ chứa nhiều nhất một quân cờ. Xác suất để không hàng, không cột nào có nhiều hơn một quân cờ là:

**A.** $\frac{7}{17019}$. **B.** $\frac{560}{5763}$. **C.** $\frac{35}{1891}$. **D.** $\frac{280}{5763}$.

**Câu 36:** Từ các đỉnh của một đa giác đều 20 cạnh chọn 4 đỉnh bất kì để tạo thành một tứ giác lồi. Xác suất để tứ giác được chọn là một hình thang mà không phải là hình chữ nhật là

**A.** $\frac{3}{19}$. **B.** $\frac{21}{323}$. **C.** $\frac{48}{323}$. **D.** $\frac{54}{323}$.

**Câu 37:** Cho một đa giác đều 45 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác cân mà không phải là tam giác đều.

**A.** $P=\frac{63}{496}$. **B.** $P=\frac{3}{43}$. **C.** $P=\frac{65}{496}$. **D.** $P=\frac{5}{43}$.

**Câu 38:** Cho tập $A=\{0;1;2;...9\}$. Từ tập $A$ lấy 1 số tự nhiên gồm có $7$ chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để số lấy được tạo thành là số chẵn trong đó các số $3;4;5$ đứng liền với nhau và $7;9$ đứng liền với nhau.

**A.** $\frac{23}{9720}$. **B.** $\frac{17}{6840}$. **C.** $\frac{23}{4860}$. **D.** $\frac{23}{3240}$.

**Câu 39:** Cho tập hợp $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Hai bạn A, B mỗi người chọn ngẫu nhiên một tập con của S. Xác suất để tập con mà A và B chọn được có đúng 3 phần tử chung là:

**A.** $\frac{889}{1024}$. **B.** $\frac{135}{1024}$. **C.** $\frac{605}{2048}$. **D.** $\frac{1443}{2048}$.

**Câu 40:** Cho $E$ là tập các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $E$. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

**A.** $\frac{9}{28}$. **B.** $\frac{17}{56}$. **C.** $\frac{37}{112}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

**Câu 41:** Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có năm chữ số chia hết cho 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Xác suất để số được chọn chia hết cho 3 là.

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1902}{5712}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{6667}{20000}$.

**Câu 42:** Xếp 32 chiếc ghế giống nhau vào 3 phòng khác nhau được đánh số I,II,III từ trước sao cho phòng I có ít nhất 11 chiếc ghế,phòng II có ít nhất 7 chiếc ghế và phòng III có ít nhất 5 chiếc ghế. Có bao nhiêu cách thực hiện?

**A.** $54$. **B.** $56$. **C.** $57$. **D.** $55$.

**Câu 43:** Có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 5 gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây?

**A.** $0{,}09$. **B.** $0{,}07$. **C.** $0{,}18$. **D.** $0{,}5$.

**Câu 44:** Cắm hết 6 bông hoa giống nhau và 3 lọ khác nhau. Tính xác suất để có lọ chứa 3 bông hoa.

**A.** $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{15}{28}$.

**Câu 45:** Cho tập hợp $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7{,}8\}$. Gọi $S$ là tập hợp các số tự nhiên có $6$ chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập $A$. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S$, tính xác xuất để số được chọn là một số chẵn và chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho $5$.

**A.** $\frac{215}{1792}$. **B.** $\frac{211}{1792}$. **C.** $\frac{217}{1792}$. **D.** $\frac{205}{1792}$.

**Câu 46:** Có hai chiế chộp, mỗi hộp chứa 7 viên bi xanh, 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai, sau đó lấy ngẫu nhiên ở hộp thứ hai 5 viên bi. Tính xác xuất để lấy được 5 viên bi ở hộp thứ hai có đủ hai mầu.

**A.** $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{231232}{435323}$. **C.** $\frac{633269}{649740}$. **D.** $\frac{11}{13}$.

**Câu 47:** Cho đa giác lồi có 14 đỉnh. Gọi $X$ là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong $X$ một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

**A.** $\frac{11}{26}$. **B.** $\frac{15}{26}$. **C.** $\frac{5}{13}$. **D.** $\frac{8}{13}$.

**Câu 48:** Gọi $S$ là tập hợp các ước số nguyên dương của số $34034175$. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử thuộc $S$. Tính xác suất lấy được hai phần tử là hai số không chia hết cho $7$.

**A.** $\frac{7}{195}$. **B.** $P=\frac{7}{267}$. **C.** $P=\frac{7}{276}$. **D.** $P=\frac{7}{159}$.

**Câu 49:** Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5$, hãy lập số có 10 chữ số. Tính xác suất để số đó có số 3 lặp lại hai lần, số 4 lặp lại ba lần, số 5 lặp lại hai lần và các chữ số khác có mặt đúng một lần.

**A.** $\frac{7}{1296}$. **B.** $\frac{9}{2592}$. **C.** $\frac{5}{2592}$. **D.** $\frac{7}{2592}$.

**Câu 50:** Gọi $T$ là tập hợp gồm các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau. Lấy từ $T$ ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để lấy được một số chẵn chứa các chữ số $2$, $3$, $4$ sao cho chữ số $2$ đứng trước chữ số $3$ và chữ số $3$ đứng trước chữ số $4$.

**A.** $\frac{65}{1944}$. **B.** $\frac{40}{1701}$. **C.** $\frac{25}{1512}$. **D.** $\frac{50}{1701}$.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1:** Có $6$ học sinh gồm 1 học sinh lớp $10$, $2$ học sinh lớp $11$ và 3 học sinh lớp $12$. Xếp ngẫu nhiên $6$ học sinh đó thành một hàng ngang. Xác suất để học sinh lớp $10$ đứng xen kẽ giữa $2$ học sinh lớp $12$ bằng

**A.** $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

**Lời giải**

Xếp ngẫu nhiên $6$ học sinh thành một hàng ngang nên $n(\Omega)=6!$.

Gọi $A$ là biến cố: “Xếp ngẫu nhiên $6$ học sinh thành một hàng ngang sao cho học sinh lớp $10$ đứng xen kẽ giữa $2$ học sinh lớp $12$”.

Xếp 1 học sinh lớp 10 vào đầu tiên thì có 1 cách.

Lấy 2 học sinh lớp 12 và xếp đứng 2 bên học sinh lớp 10 thì có $C_3^2.2$ cách.

Nhóm 3 học sinh trên thành một nhóm, xếp nhóm này và 3 học sinh còn lại thành một hàng ngang thì có $4!$ cách.

Suy ra: $n(A)=C_3^2.2.4!=144$.

Vậy $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{5}$.

**Câu 2:** Từ 30 câu hỏi trắc nghiệm gồm 15 câu dễ, 9 câu trung bình và 6 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Số đề kiểm tra có thể lập được là:

**A.** $27730143$. **B.** $27731043$. **C.** $27737049$. **D.** $27730749$.

**Lời giải**

Số đề kiểm tra có 10 câu tùy ý từ 30 câu hỏi trắc nghiệm là: $C_{30}^{10}$

Số đề kiểm tra có 10 câu chỉ toàn câu dễ từ 30 câu hỏi trắc nghiệm là: $C_{15}^{10}$

Không có đề kiểm tra có 10 câu mà toàn câu trung bình và khó, vì số lượng các câu này bé hơn 10

Số đề kiểm tra 10 câu chỉ có hai loại câu dễ và trung bình là: $C_{24}^{10}-C_{15}^{10}$ (phải trừ trường hợp chỉ có 10 câu dễ đã đếm ở trên)

Số đề kiểm tra 10 câu chỉ có hai loại câu dễ và khó là: $C_{21}^{10}-C_{15}^{10}$ (phải trừ trường hợp chỉ có 10 câu dễ đã đếm ở trên)

Số đề kiểm tra 10 câu chỉ có hai loại câu trung bình và khó là: $C_{15}^{10}$.

Số đề kiểm tra 10 câu hỏi đủ cả 3 loại dễ, khó, và trung bình là:

**Câu 3:** Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp $X$ gồm các số tự nhiên bé hơn $10^{10}$ và có tổng các chữ số bằng 2. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 2000.

**A.** $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{12}{55}$. **C.** $\frac{16}{45}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

**Lời giải**

Số $10^{10}$ gồm có 1 chữ số 1 và 10 chữ số 0 nên tập hợp $X$ gồm các số tự nhiên có không quá 10 chữ số.

Ta có thể xem mỗi số thuộc tập $X$ là một dãy số gồm 10 chữ số $a_1a_2a_2...a_{10}$ (các chữ số $a_i$ có thể bằng 0).

Vì tổng các chữ số bằng 2 nên ta có hai trường hợp.

**Trường hợp 1:** Mỗi số là một dãy số gồm 2 chữ số 1 và 8 chữ số 0.

**Trường hợp 2:** Mỗi số là một dãy số gồm 1 chữ số 2 và 9 chữ số 0.

Khi đó ta có $n(\Omega) = C_{10}^2 + C_{10}^1 = 55$.

Gọi $A$ là biến cố "số được chọn chia hết cho 2000".

Số đó thuộc trường hợp 1 có tất cả: $C_6^2 = 15$.

Số đó thuộc trường hợp 2 có tất cả: $C_7^1 = 7$.

Do đó $n(A) = 15 + 7 = 22$. Xác suất là $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{5}$.

**Câu 4:** Giải bóng chuyền VTV Cup có 16 đội tham gia, trong đó có 12 đôi nước ngoài và 4 đội Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành bốn bảng đấu A, B, C, D mỗi bảng có 4 đội. Tính xác suất để 4 đội Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau.

**A.** $\dfrac{391}{455}$. **B.** $\dfrac{8}{1365}$. **C.** $\dfrac{32}{1365}$. **D.** $\dfrac{64}{455}$.

**Lời giải**

Số cách chia 16 đội thành 4 bảng mỗi bảng có 4 đội một cách ngẫu nhiên là

$n(\Omega) = C_{16}^4.C_{12}^4.C_8^4.C_4^4 = 63063000$.

Gọi biến cố A: " 4 đội Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau."

Có $4!$ cách chia 4 đội Việt Nam vào 4 bảng, mỗi bảng có 1 đội.

12 đội còn lại chia đều cho 4 bảng sẽ có $C_{12}^3.C_9^3.C_6^3.C_3^3$ cách.

Do đó $n(A) = 4!.C_{12}^3.C_9^3.C_6^3.C_3^3 = 8870400$

Vậy $P(A) = \dfrac{8870400}{63063000} = \dfrac{64}{455}$.

**Câu 5:** Có 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Rút ngẫu nhiên cùng một lúc 3 tấm thẻ. Tính xác suất sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị.

**A.** $\dfrac{17}{25}$. **B.** $\dfrac{27}{52}$. **C.** $\dfrac{1771}{2600}$. **D.** $\dfrac{253}{325}$.

**Lời giải**

Để bất kì 2 trong 3 tấm thẻ lấy ra đó có 2 số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị thì phải rút được 3 thẻ sao cho trong đó không có 2 thẻ nào là 2 số tự nhiên liên tiếp.

Số phần tử của không gian mẫu ( số cách rút 3 thẻ bất kì trong 26 thẻ): $C_{26}^3$

Đếm số cách rút 3 thẻ mà trong 3 thẻ đó có đúng 2 số tự nhiên liên tiếp:

Chọn các bộ 2 số tự nhiên liên tiếp: $(1;2),(2;3),...,(25;26)$.

Nếu chọn 2 thẻ $(1;2)$ và $(25;26)$ thì có 2 cách, thẻ còn lại không được là 3 hoặc 24. Vậy ở trường hợp này có tất cả $2(26-3) = 46$ cách.

Nếu chọn 2 thẻ là $(2;3),...,(24;25)$ thì có 23 cách, thẻ còn lại có $26-4 = 22$ cách. Vậy ở trường hợp này có $23.22 = 506$ cách.

Vậy tổng số cách rút 3 thẻ mà trong 3 thẻ đó có đúng 2 số tự nhiên liên tiếp: $46+506=552$ cách.

Đếm số cách rút 3 thẻ mà 3 thẻ đó là 3 số tự nhiên liên tiếp:

Là các bộ số $(1;2;3),(2;3;4),...,(24;25;26)$. Vậy trường hợp này có 24 cách.

Do đó tổng số cách rút 3 thẻ để bất kì 2 trong 3 tấm thẻ lấy ra đó có 2 số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị là: $C_{26}^3-552-24=2024$ cách.

Xác xuất cần tìm: $\dfrac{2024}{C_{26}^3}=\dfrac{253}{325}$.

**Câu 6:** Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ 101 đến $200$. Tính xác suất để 3 số được chọn lập thành một cấp số cộng.

**A.** $\dfrac{1}{66}$. **B.** $\dfrac{3}{100}$. **C.** $\dfrac{2}{33}$. **D.** $\dfrac{1}{33}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{100}^3$.

Gọi $a,b,c$ là 3 số theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Khi đó $a+c=2b$, do vậy $a,c$ cùng tính chẵn hoặc lẻ. (Khi chọn hai số $a$ và $c$ khác nhau cùng chẵn hoặc cùng lẻ trong các số từ 101 đến 200 thì luôn tồn tại số $b$ trong các số từ 101 đến 200 mà $a,b,c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng).

Gọi $A$ là biến cố: "3 Số được chọn là các số tự nhiên từ 101 đến $200$ lập thành cấp số cộng".

Ta có: $n(A)=C_{50}^2+C_{50}^2$ (vì có 50 số chẵn và 50 số lẻ từ 101 đến $200$).

Vậy xác suất cần tính là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2C_{50}^2}{C_{100}^3}=\dfrac{1}{66}$.

**Câu 7:** Từ các số $0,1,2,..,8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có $5$ chữ số đôi một khác nhau mà có $3$ chữ số chẵn, $2$ số lẻ và hai số $2,3$ không đồng thời có mặt.

**A.** 4392. **B.** 6336. **C.** 1944. **D.** 4350.

**Lời giải**

**Trường hợp 1:** $\overline{abcde}$ kể cả số 0 đứng đầu **và** có $3$ số chẵn, $2$ số lẻ

Chọn $3$ số chẵn trong $5$ số chẵn $0;2;4;6;8$ có $C_5^3$ cách

Chọn $2$ số lẻ trong $4$ số lẻ $1;3;5;7$ có $C_4^2$ cách

Xếp 5 số trên vào $5$ vị trí có: $5!$ cách

**Trường hợp 2**: $\overline{0bcde}$ mà có $3$ số chẵn, $2$ số lẻ

Chọn $2$ số chẵn trong $4$ số chẵn $0;2;4;6;8$ có $C_4^2$ cách

Chọn $2$ số lẻ trong $4$ số lẻ $1;3;5;7$ có $C_4^2$ cách

Xếp 4 số trên vào $4$ vị trí có: $4!$ cách

Vậy th1 và th2 có: $C_5^3.C_4^2.5!-C_4^2.C_4^2.4!=6336$ ( số )

**Trường hợp 3**: $\overline{abcde}$ kể cả số 0 đứng đầu mà có $3$ số chẵn, $2$ số lẻ và hai số $2,3$ đồng thời có mặt

Chọn $2$ số chẵn trong $4$ số chẵn $0;4;6;8$ có $C_4^2$ cách

Chọn $1$ số lẻ trong $3$ số lẻ $1;5;7$ có $C_3^1$ cách

Xếp 5 số trên vào $5$ vị trí có: $5!$ cách

**Trường hợp 4**: $\overline{0bcde}$ mà có $3$ số chẵn, $2$ số lẻ và hai số $2,3$ đồng thời có mặt

Chọn $1$ số chẵn trong $3$ số chẵn $4;6;8$ có $C_3^1$ cách

Chọn $1$ số lẻ trong $3$ số lẻ $1;5;7$ có $C_3^1$ cách

Xếp 4 số trên vào $4$ vị trí có: $4!$ cách

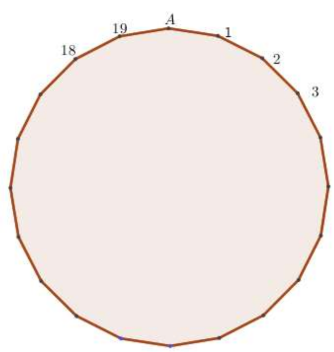
Vậy th3 và th4 ta có: $C_4^2.C_3^1.5!-C_3^1.C_3^1.4!=1944$ ( số )

Vậy kết quả bài toán: $6336-1944=4392$.

**Câu 8:** Cho đa giác đều $(H)$ có 20 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của $(H)$. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác mà không có cạnh nào là cạnh của $(H)$.

**A.** $\dfrac{625}{969}$. **B.** $\dfrac{545}{969}$. **C.** $\dfrac{455}{969}$. **D.** $\dfrac{541}{969}$.

**Lời giải**




Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{20}^4=4845$.

Gọi biến cố E " Tứ giác tạo thành không có cạnh nào là cạnh của $(H)$".

Gọi tứ giác mà không có cạnh nào là cạnh của $(H)$ là $ABCD$.

Chọn $A$ có 20 cách.

Ta đánh số thứ tự các đỉnh của đa giác đều $(H)$ như hình vẽ (từ $1$ đến $19$, sau khi đã chọn $A$).

Gọi $b,c,d$ lần lượt là số thứ tự của $B,C,D$. Ta có:

$b\ge 2$, để $AB$ là đường chéo ( $B$ không kề $A$ ).

$b+1<c$, để $BC$ là đường chéo ( $C$ không kề $B$ ).

$c+1<d$, để $CD$ là đường chéo ( $D$ không kề $C$ ).

$d \le 18$, để $DA$ là đường chéo ( $A$ không kề $D$).

$\Rightarrow 2 \le b < c - 1 < d - 2 \le 16$.

Có $C_{15}^3$ cách chọn $b, c, d$, suy ra có $20.C_{15}^3$ tứ giác $ABCD$, tuy nhiên mỗi tứ giác được xác định như vậy đã được tính 4 lần, do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố E là: $n(E) = \dfrac{20.C_{15}^3}{4} = 5.C_{15}^3$

Vậy xác suất cần tìm là: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{5.C_{15}^3}{4845} = \dfrac{455}{969}$.

**Câu 9:** Từ tập $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số $\overline{abcd}$ sao cho $a \le b \le c \le d$.

**A.** 495. **B.** 309. **C.** 1534. **D.** 876.

**Lời giải**

Ta đánh số thứ tự các đỉnh của đa giác đều $(H)$ như hình vẽ (từ 1 đến 19, sau khi đã chọn $A$).

Ta có $a \le b \le c \le d \Leftrightarrow \begin{cases} a \le b \\ b \le c \\ c \le d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b+1 \\ b < c+1 \\ c < d+1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le a < b+1 < c+2 < d+3 \le 12$

Có $C_{12}^4$ cách chọn bộ $a,\ b+1,\ c+2,\ d+3$

Mỗi bộ đó ứng với 1 bộ $a,\ b,\ c,\ d$ thỏa mãn $a \le b \le c \le d$

Vậy có $C_{12}^4 = 495$ số thỏa mãn bài ra

**Câu 10:** Có 2021 hộp quà được đánh số từ 1 đến 2021. Lấy ngẫu nhiên 8 hộp để tặng 3 người. Tính xác suất để các số ghi trên hộp lấy ra đó không những có cả số chia hết cho 8 mà còn có cả số chia hết cho 3.

**A.** $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\simeq 0,83$. **C.** $\simeq 0,38$. **D.** $\simeq 0,63$.

**Lời giải**

Hộp có số chia hết cho 8 có dạng $8n, (n \in \mathbb{N})$,

$\Rightarrow 1 \le 8n \le 2021 \Rightarrow n \in \{1,2,...,252\}$ vậy có 252 hộp có số chia hết 8.

Hộp có số chia hết cho 3 có dạng $3m, (m \in \mathbb{N})$, $\Rightarrow 1 \le 3m \le 2021 \Rightarrow m \in \{1,2,...,673\}$ vậy có 673 hộp có số chia hết 3.

Trong đó sẽ có hộp mang số chia hết cho 8 và 3 có dạng $24p, (p \in \mathbb{N})$,

$\Rightarrow 1 \le 24p \le 2021 \Rightarrow p \in \{1,2,...,84\}$ vậy có 84 hộp có số chia hết 24.

Số hộp mang số không chia hết cho cả 3 và 8 là 1180 hộp.

Gọi $X$ là biến cố " Trong 8 hộp được chọn thì có số chia hết cho 8 thì không có số chia hết cho 3 hoặc có số chia hết cho 3 thì không có số chia hết cho 3 hoặc không có số chia hết cho cả 8 lẫn 3 rồi sau đó đem chia cho 3 người là"

Số phần tử của $X$ là $n(X) = \left(C_{168+1180}^8 + C_{589+1180}^8 - C_{1180}^8\right)A_8^3$

Số cách chọn 8 hộp để chia 3 người là : $n(\Omega) = C_{2021}^8.A_8^3$

Xác suất biến cố thỏa mã yêu cầu bài toán là: $P\left(\overline{X}\right)=1-P\left(X\right)=1-\dfrac{n\left(X\right)}{n\left(\Omega\right)}\simeq 0,63$

**Câu 11:** Tờ tiền VN được gọi là may mắn nếu mệnh giá và sê-ri thỏa mãn điều kiện:

1. Tờ bạc có mệnh giá 10000 VNĐ
2. 2 chữ cái in hoa không trùng nhau
3. Tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Hỏi có bao nhiêu tờ tiền may mắn ?

**A.** $313041850$. **B.** $3130419500$ **C.** $313419500$. **D.** $313041950$.

**Lời giải**

Giả sử dãy số may mắn có dạng: $\overline{abcd\left(9-e\right)\left(9-f\right)\left(9-g\right)\left(9-h\right)}$

$\left(a,b,c,d,e,f,g,h\in\left\{0;1;.....;8;9\right\}\right)$

Ta có $a+b+c+d=36-\left(e+f+g+h\right)$

$\Leftrightarrow a+b+c+d+e+f+g+h=36\ \ (*)$.

Ta cần tìm số nghiệm tự nhiên của $(*)$, theo nguyên lý bù trừ số nghiệm của $(*)$ là:

$n=C_8^0C_{43}^7-C_8^1C_{33}^7+C_8^2C_{23}^7-C_8^3C_{13}^7=4816030$ (nghiệm).

Vậy số tiền may mắn là $T=26.25.n=3130419500$ ( tờ tiền)

**Câu 12:** Cho đa giác 30 đỉnh nội tiếp đường tròn, gọi $S$ là tập hợp các đường thẳng đi qua 2 trong số 30 đỉnh đã cho. Chọn hai đường thẳng bất kì từ tập $S$. Tính xác suất để chọn được hai đường thẳng mà giao điểm của chúng nằm bên trong đường tròn.

**A.** $\dfrac{7}{25}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{5}{14}$. **D.** $\dfrac{9}{31}$.

**Lời giải**

Số phần tử của tập $S$ là: $n\left(S\right)=C_{30}^2=435$.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n\left(\Omega\right)=C_{435}^2$.

Goi $A$ là biến cố "hai đường thẳng được chọn mà giao điểm của chúng nằm bên trong đường tròn".

Để hai đường thẳng được chọn có giao điểm nằm bên trong đường tròn thì hai đường thẳng đó là hai đường chéo của một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh trong 30 đỉnh của đa giác đã cho. Vậy số cách chọn hai đường thẳng mà có giao điểm nằm bên trong đường tròn là:

$n\left(A\right)=C_{30}^4$.

Vậy $P\left(A\right)=\dfrac{C_{30}^4}{C_{435}^2}=\dfrac{9}{31}$.

**Câu 13:** Gọi $S$ là tập hợp các số tự nhiên gồm $4$ chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số $0;\,1;\,2;\,3;\,4;\,5$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Xác suất để số được chọn có chứa ít nhất một trong hai chữ số $1$ hoặc $2$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{15}$. **C.** $\dfrac{3}{50}$. **D.** $\dfrac{47}{50}$.

**Lời giải**

Ta có số phần tử của tập $S$ là: $5.A_5^3=300$.

$\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=300$.

Gọi $A$ là biến cố: " Số được chọn từ tập $S$ có chứa ít nhất một trong hai chữ số $1$ hoặc $2$ ".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố: " Số được chọn từ tập $S$ không có mặt cả hai chữ số 1 và 2 ".

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số 0; 3; 4; 5 là: $3.3! = 18$. Do đó $n\left(\overline{A}\right) = 18$.

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)} = 1 - \dfrac{18}{300} = \dfrac{47}{50}$.

**Câu 14:** Cho tập $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số phân biệt sao cho các chữ số $1,2,3,4,5$ xuất hiện theo thứ tự giảm dần từ trái qua phải và chữ số 9 luôn đứng trước chữ số 1?

**A.** 2250. **B.** 2520. **C.** 420. **D.** 3024.

**Lời giải**

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ là số cần tìm.

Chọn 3 vị trí và xếp 3 số $6,7,8$ vào: $A_9^3$ cách.

Chọn vị trí cho chữ số 9 (trừ vị trí còn lại ở cuối): 5 cách.

Xếp 5 số $1,2,3,4,5$ theo thứ tự giảm dần vào 5 vị trí còn lại: 1 cách.

Vậy có $A_9^3.5.1 = 2520$ số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 15:** Cho một bảng hình chữ nhật kích thước $10\times 9$ gồm 90 ô vuông đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật được tạo bởi các ô vuông đơn vị của bảng. Xác suất để hình được chọn là hình vuông là

**A.** $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{2}{15}$. **C.** $\dfrac{3}{10}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

Giả sử hình chữ nhật tạo thành từ 11 đường thẳng song song $a_1, a_2, ..., a_{11}$ và 10 đường thẳng $b_1, b_2, ..., b_{10}$ vuông góc với 11 đường thẳng đã cho.

Mỗi hình chữ nhật tạo thành từ việc chọn hai đường thẳng trong 11 đường thẳng $a_1, a_2, ..., a_{11}$ và hai đường thẳng trong 10 đường thẳng $b_1, b_2, ..., b_{10}$.

Do đó số hình chữ nhật là $C_{11}^2 \times C_{10}^2 = 2475$ hình.

Số hình vuông có cạnh bằng $x$ là $(11-x)(10-x)$, với $1 \le x \le 9$.

Do đó số hình vuông là $\sum\limits_{x=1}^{9}(11-x)(10-x) = 330$. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{330}{2475} = \dfrac{2}{15}$.

**Câu 16:** Thầy giáo yêu cầu 3 bạn An, Bình, Lâm lần lượt lên bảng viết ngẫu nhiên một số có 2 chữ số mà chỉ dùng các chữ số $0;1;8;9$. Tính xác suất tổng 3 số ba bạn viết là một số chia hết cho 3

**A.** $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{27}$. **D.** $\dfrac{2}{9}$

**Lời giải**

Gọi $M$ là tập hợp các số có hai chữ số được lập từ các chữ số $0;1;8;9$

$\Rightarrow n(M) = 3.4 = 12$

Gọi $A$ lần lượt là tập hợp các số chia hết cho 3 từ tập $M \Rightarrow A = \{18;81;90;99\}$

Gọi $B$ lần lượt là tập hợp các số chia hết cho 3 dư 1 từ tập $M \Rightarrow B = \{19;10;91;88\}$

Gọi $C$ lần lượt là tập hợp các số chia hết cho $3$ dư 2 từ tập $M \Rightarrow C = \{11;80;89;98\}$

Phép thử ba bạn An, Bình, Lâm lần lượt lên bảng viết ngẫu nhiên một số có $2$ chữ số mà chỉ dùng các chữ số $0;1;8;9$ có không gian mẫu: $n(\Omega) = 12^3$

Gọi $E$ là biến cố " tổng $3$ số ba bạn viết là một số chia hết cho $3$ "

Tổng $3$ số ba bạn viết là một số chia hết cho $3$ khi ba số thuộc một trong $3$ tập hợp $A,B,C$ hoặc mỗi số thuộc một tập trong 3 tập $A,B,C \Rightarrow n(E) = 4^3.3 + 4^3.3!$

Xác suất tổng $3$ số ba bạn viết là một số chia hết cho $3$: $P(E) = \dfrac{4^3.3 + 4^3.3!}{12^3} = \dfrac{1}{3}$.

**Câu 17:** Có $6$ học sinh nam và $3$ học sinh nữ được xếp chỗ ngồi ngẫu nhiên vào một dãy gồm $9$ ghế. Xác suất để mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam là

**A.** $11,9\%$. **B.** $58,33\%$. **C.** $60,71\%$. **D.** $6,94\%$.

**Lời giải**

Số cách xếp chỗ ngồi cho $9$ học sinh vào $9$ ghế là: $n(\Omega) = 9!$

Gọi $A$ là biến cố: " Mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam"

Xếp thứ tự $6$ học sinh nam có $6!$ cách

Xếp thứ tự $3$ học sinh nữ vào giữa các học sinh nam có $A_5^3$ cách $\Rightarrow n(A) = 6!.A_5^3$

Xác suất biến cố $A$ là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6!A_5^3}{9!} = \dfrac{5}{42} = 11,9\%$.

**Câu 18:** Có 200 cái kẹo, chia cho 5 người sao cho ai cũng có kẹo. Xác suất để mỗi người có ít nhất 10 kẹo gần đúng với đáp án nào sau đây?

**A.** $0,711$. **B.** $0,277$. **C.** $0,432$. **D.** $0,355$.

**Lời giải**

Không gian mẫu: Xếp 200 cái kẹo thành một hàng ngang. 200 cái kẹo tạo ra 199 khoảng trống ở giữa.

Đặt vào 4 vách ngăn sẽ chia số kẹo thành 5 phần sao cho phần nào cũng có kẹo. Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{199}^4$

Gọi A là biến cố "mỗi người có ít nhất 10 kẹo."

Chia trước cho mỗi người 9 kẹo, còn lại 155 cái. Bài toán đưa về chia 155 kẹo cho 5 người sao cho ai cũng có kẹo.

Xếp 155 cái kẹo thành một hàng ngang. 155 cái kẹo tạo ra 154 khoảng trống ở giữa.

Đặt vào 4 vách ngăn sẽ chia số kẹo thành 5 phần sao cho phần nào cũng có kẹo. Do đó số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A) = C_{154}^4$.

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_{154}^4}{C_{199}^4} \approx 0,355$

**Câu 19:** Bạn An chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Tìm xác suất sao cho số của An lớn hơn số của Bình.

**A.** $\frac{47}{72}$. **B.** $\frac{37}{56}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{49}{72}$.

**Lời giải**

Xét hai trường hợp

**Trường hợp 1**: An chọn được số $9$.

Trong trường hợp này số của An chắc chắn lớn hơn số của Bình.

Xác suất An chọn được số 9 là $\frac{C_8^2}{C_9^3}=\frac{1}{3}$.

**Trường hợp 2**. An không chọn được số $9$.

Xác suất để An không chọn được số $9$ là $\frac{C_8^3}{C_9^3}=\frac{2}{3}$.

Trong trường hợp này An chọn số cùng tập với Bình nên xác suất An chọn được số lớn hơn cũng bằng xác suất Bình chọn được số lớn hơn.

Ta tính xác suất để 2 bạn chọn được cùng số:

Số cách chọn của hai bạn là: $C_8^3.C_8^3$

Số cách để An chọn được ba số bất kỳ là $C_8^3$; Ứng với mỗi cách chọn của An thì Bình chỉ có một cách chọn để giống An nên số cách hai người chọn được số giống nhau là $C_8^3$

Vậy, xác suất để 2 bạn chọn được cùng số là $\frac{C_8^3}{C_8^3.C_8^3}=\frac{3!}{8.7.6}=\frac{1}{56}$ nên xác suất để An chọn được số lớn hơn là: $\frac{1-\frac{1}{56}}{2}=\frac{55}{112}$. Do đó xác suất trong trường hợp này là $\frac{2}{3}.\frac{55}{112}=\frac{55}{168}$.

Vậy, xác suất cần tìm là $\frac{1}{3}+\frac{55}{168}=\frac{37}{56}$.

**Câu 20:** Cho đa giác đều $2020$ đỉnh nội tiếp đường tròn $(C)$. Chọn ngẫu nhiên đồng thời $3$ đỉnh trong $2020$ tạo thành 1 tam giác và chọn ngẫu nhiên đồng thời $4$ đỉnh trong $2020$ đỉnh tạo thành 1 tứ giác. Gọi $x$ là xác suất chọn được tam giác vuông cân, $y$ là xác suất chọn được hình chữ nhật. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

**A.** $\frac{x}{y}=\frac{2017}{1009}$. **B.** $\frac{x}{y}=2017$. **C.** $\frac{x}{y}=\frac{1009}{2017}$. **D.** $\frac{x}{y}=\frac{2020}{2021}$.

**Lời giải**

Đa giác đều $2020$ đỉnh nội tiếp đường tròn $(C)$ có $1010$ đường kính.

Chọn $3$ đỉnh trong $2020$ đỉnh của đa giác đều tạo thành 1 tam giác có $C_{2020}^3$ cách

Để chọn được 1 tam giác vuông cân, ta chọn như sau:

Chọn $1$ đường kính trong $1010$ đường kính có $1010$ cách

$1$ đường kính chia đường tròn $(C)$ thành $2$ nửa đường tròn, mỗi nửa đường tròn có $1009$ đỉnh của đa giác đều (trừ $2$ đỉnh thuộc đường kính). Ta chọn $1$ đỉnh nằm chính giữa $1$ nửa đường tròn với $1$ đường kính đã chọn tạo thành $1$ tam giác vuông cân. Từ đó ta có $2$ cách chọn $1$ đỉnh nằm chính giữa $2$ nửa đường tròn.

Do đó số tam giác vuông cân tạo thành là: $1010.2=2020$

Xác suất chọn tam giác vuông cân là: $x=\dfrac{2020}{C_{2020}^{3}}$

Chọn 4 đỉnh trong 2020 đỉnh của đa giác đều tạo thành 1 tứ giác có $C_{2020}^{4}$ cách

Để chọn được 1 hình chữ nhật, ta chọn 2 đường kính trong 1010 đường kính có $C_{1010}^{2}$ cách

Khi đó xác suất chọn hình chữ nhật là: $y=\dfrac{C_{1010}^{2}}{C_{2020}^{4}}$

Vậy $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2020}{C_{2020}^{3}}:\dfrac{C_{1010}^{2}}{C_{2020}^{4}}=\dfrac{4}{1009}.\dfrac{2017}{4}=\dfrac{2017}{1009}$

**Câu 21:** Gọi $S$ là tập các số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập $S$. Tính xác suất để lấy được số có mặt đồng thời bốn chữ số $4;5;6;7$ và bốn chữ số đó đôi một không kề nhau.

**A.** $\dfrac{5}{63}$. **B.** $\dfrac{89}{1134}$. **C.** $\dfrac{17}{252}$. **D.** $\dfrac{85}{1134}$.

**Lời giải**

Lập số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau.Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2...a_9}$.

Chữ số $a_1$ có 9 cách chọn. Có $A_9^8$ cách chọn các chữ số còn lại.

Vậy lập được $9.A_9^8$ số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau.

Lập số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau có mặt đồng thời bốn chữ số $4;5;6;7$ và bốn chữ số đó đôi một không kề nhau.

**Trường hợp 1:** Lấy 5 chữ số trong 6 chữ số $0,1,2,3,8,9$ có $C_6^5$ cách.

Xếp 5 chữ số trên thành một hàng ngang có $5!$ cách.

Ta có 6 khoảng trống từ cách xếp trên nên có $A_6^4$ cách xếp chữ số $4;5;6;7$. Vậy có $C_6^5.5!A_6^4$ số.

**Trường hợp 2:** Chữ số 0 đứng đầu.

Lấy 4 chữ số trong 5 chữ số $1,2,3,8,9$ có $C_5^4$ cách.

Xếp 4 chữ số trên thành một hàng ngang (sau chữ số 0) có $4!$cách.

Ta có 5 khoảng trống từ cách xếp trên nên có $A_5^4$ cách xếp chữ số $4;5;6;7$. Vậy có $C_5^4.4!.A_5^4$ số.

Ta có $C_6^5.5!A_6^4-C_5^4.4!.A_5^4=244800$. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{244800}{9.A_9^8}=\dfrac{85}{1134}$.

**Câu 22:** Số tập con có ba phần tử của tập $\left\{2^1;2^2;...;2^{2020}\right\}$ sao cho ba phần tử đó có thể xếp thành một cấp số nhân tăng bằng

**A.** 1017072 **B.** 2039190. **C.** 1018081. **D.** 1019090.

**Lời giải**

**Cách 1**

Gọi $\left\{2^a;2^b;2^c\right\}$ là một tập con thỏa mãn bài toán. Ta có:

$2^a<2^b<2^c\Leftrightarrow a<b<c;\ \ a,b,c\in\left\{1;2;...;2020\right\}$

$2^a;2^b;2^c$ lập thành cấp số nhân tăng $\Leftrightarrow a;b;c$ lập thành cấp số cộng tăng $\Leftrightarrow a+c=2b$

Thấy rằng $a+c=2b$ thì nếu $a\neq c$ ta có $b$ sẽ khác cả $a$ và $c$.

Nói cách khác, ycbt $\Leftrightarrow$ lấy được hai số $a,c$ cùng tính chẵn, lẻ.

Vậy có $C_{1010}^2+C_{1010}^2=1019090$ tập con thỏa mãn bài toán.

**Cách 2**

Các tập con có ba phần tử thỏa mãn bài toán gồm các tập:

$\{2^1;2^2;2^3\},\{2^1;2^3;2^5\},...,\{2^1;2^{1010};2^{2019}\}\Rightarrow$ có 1009 tập

$\{2^2;2^3;2^4\},\{2^2;2^4;2^6\},...,\{2^2;2^{1011};2^{2020}\}\Rightarrow$ có 1009 tập

$\{2^3;2^4;2^5\},\{2^3;2^5;2^7\},...,\{2^3;2^{1011};2^{2019}\}\Rightarrow$ có 1008 tập

$\{2^4;2^5;2^6\},\{2^4;2^6;2^8\},...,\{2^4;2^{1012};2^{2020}\}\Rightarrow$ có 1008 tập

…

$\{2^{2017};2^{2018};2^{2019}\}\Rightarrow$ có 1 tập

$\{2^{2018};2^{2019};2^{2020}\}\Rightarrow$ có 1 tập

$\Rightarrow$ có $2(1+2+3+...+1009)=1019090$ tập con thỏa mãn bài toán.

**Câu 23:** Có bao nhiêu xâu kí tự độ dài 2021 mà mỗi ký tự thuộc tập hợp $\{1;2;3\}$, trong đó số ký tự 1 xuất hiện chẵn lần?

**A.** $\dfrac{3^{2021}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{3^{2021}+1}{2}$. **C.** $3^{2021}-1$. **D.** $3^{2021}+1$.

**Lời giải**

**Cách 1:**

**Xét bài toán tổng quát :** Có bao nhiêu xâu kí tự có độ dài $n$ mà mỗi kí tự thuộc tập hợp $\{1;2;3\}$ trong đó số kí tự 1 xuất hiện chẵn lần.

**Giải**

Ký hiệu $M_n$ là tập hợp tất cả các xâu có $n$ kí tự được lập từ các số thuộc tập $\{1;2;3\}$.

$A_n$, $B_n$ là tập hợp tất cả các xâu có $n$ kí tự được lập từ các số thuộc tập $\{1;2;3\}$ theo thứ tự chứa một số chẵn các chữ số 1, một số lẻ các chữ số 1.

Dễ thấy $A_n$, $B_n$ rời nhau và $M_n=A_n\cup B_n$ $\Rightarrow|A_n|=|B_n|=\dfrac{1}{2}|M_n|=\dfrac{3^n}{2}$.

Lấy 1 phần tử của $M_{n+1}$ bỏ đi 1 kí tự cuối ta được một phần tử của $M_n$, ngược lại lấy 1 phần tử $x$ của $M_n$

Nếu $x\in A_n$ thì có hai cách để thêm vào chữ số cuối để được phần tử của $A_{n+1}$.

Nếu $x\in B_n$ thì có 1 cách để thêm vào chữ số cuối để tạo ra 1 phần tử của $A_{n+1}$.

Suy ra: $|A_{n+1}|=2|A_n|+|B_n|=|A_n|+\left[|A_n|+|B_n|\right]=|A_n|+3^n$

Từ $|A_1|=2,|A_{n+1}|=|A_n|+3^n$.

Khi đó: $|A_2|=2+3^1;|A_3|=2+3^1+3^2;..;|A_n|=2+3^1+..+3^n=\dfrac{3^n-1}{2}+1=\dfrac{3^n+1}{2}$.

Xét bài toán cụ thể với $n=2021$ ta có: $|A_{2021}|=\dfrac{3^{2021}-1}{2}$.

**Cách 2:**

**Trường hợp 1:** 0 số 1 có $C_{2021}^0.2^{2021}$.

**Trường hợp 2:** 2 số 1 có $C_{2021}^2.2^{2019}$.

…

**Trường hợp 1010:** 2020 số 1 có $C_{2021}^{2020}.2$.

Vậy có: $C_{2021}^{0}.2^{2021}+C_{2021}^{2}.2^{2019}+..+C_{2021}^{2020}=\dfrac{(2+1)^{2021}+(2-1)^{2021}}{2}=\dfrac{3^{2021}+1}{2}$.

**Câu 24:** Người ta dùng $100$ số nguyên dương đầu tiên để đánh số cho $100$ tấm thẻ (mỗi thẻ đánh một số). Chọn ngẫu nhiên bốn thẻ trong $100$ thẻ đó. Xác suất để chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho $9$ gần nhất với kết quả nào sau đây?

**A.** $0,536$. **B.** $0,464$. **C.** $0,489$. **D.** $0,511$.

**Lời giải**

Ta có $n(\Omega)=C_{100}^{4}$.

Xét $1\le n=3k\le 100, n\in N^{*}\Rightarrow k\in\{1,2,...,33\}$, nên trong $100$ số nguyên dương đầu tiên có 33 số chia hết cho 3.

Gọi $A$ là tập hợp các số nguyên dương bé hơn $100$ và chia hết cho $9$ $\Rightarrow A=\{9,18,27,36,45,54,63,72,81,90,99\}\Rightarrow n(A)=11$.

Gọi $B$ là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 100 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 $\Rightarrow n(B)=33-11=22$.

Gọi $C$ là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 100 và không chia hết cho 3 $\Rightarrow n(C)=100-33=67$.

Gọi $M$ là biến cố: "chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho $9$"

$\Rightarrow\overline{M}$ là biến cố: chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ không chia hết cho $9$". Để tích 4 số không chia hết cho 9 xảy ra hai trường hợp sau.

TH1: 4 số thuộc tập $C$, có $C_{67}^{4}$ ( cách)

TH2: 3 số thuộc tập $C$, 1 số thuộc tập $B$ có $C_{24}^{1}.C_{67}^{3}$ ( cách)

**Câu 25:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 đồng thời số đó chia hết cho 9?

**A.** $10000$. **B.** $9999$. **C.** $100000$. **D.** $99999$.

**Lời giải**

**Cách 1:** Dễ thấy 100071 là số tự nhiên nhỏ nhất có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 đồng thời số đó chia hết cho 9.

Dễ thấy 999981 là số tự nhiên lớn nhất có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 đồng thời số đó chia hết cho 9.

Do cứ cách đúng 90 số lại có 1 số tự nhiên có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 và đồng thời số đó chia hết cho 9 nên số số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$\dfrac{999981-100071}{90}+1=10000$ số.

**Cách 2:** Đặt số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcde1}=\overline{A1}=9.\overline{B9}=9.(10\mathrm{B}+9)$

Do $100000<9.\overline{B9}=9(10B+9)<999999\Leftrightarrow\dfrac{99919}{90}<B<\dfrac{111102}{10}$

Từ đó B nhận các giá trị nguyên liên tiếp từ 1111 đến 11110 hay có 10000 số thỏa mãn yêu cầu.

Nên $P(\overline{M})=\dfrac{C_{67}^{4}+C_{22}^{1}.C_{67}^{3}}{C_{100}^{4}}\Rightarrow P(M)=1-P(\overline{M})=1-\dfrac{C_{67}^{4}+C_{22}^{1}.C_{67}^{3}}{C_{100}^{4}}\approx 0,536$.

**Câu 26:** Một bảng vuông gồm $100\times100$ ô vuông. Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật. Tính xác suất để ô được chọn là hình vuông (trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân)

**A.** $0,0134$. **B.** $0,0133$. **C.** $0,0136$. **D.** $0,0132$

**Lời giải**

Giả sử bảng vuông gồm $100\times100$ ô vuông được xác định bởi các đường thẳng $x=0$, $x=1$, $x=2$, …, $x=100$ và $y=0$, $y=1$, $y=2$, …, $y=100$ trong hệ trục tọa độ $Oxy$.

Mỗi hình chữ nhật được tạo bởi 2 đường thẳng khác nhau $x=a$, $x=b$ ($0\le a, b\le 100$) và hai đường thẳng khác nhau $y=c$, $y=d$ ($0\le c,d\le 100$) nên có $C_{101}^2.C_{101}^2$ hình chữ nhật.

Suy ra không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega)=C_{101}^2.C_{101}^2$.

Gọi $A$ là biến cố "ô được chọn là hình vuông ".

Xét các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** ô được chọn có kích thước $1\times1$: có $100.100=100^2$ hình vuông.

**Trường hợp 2:** ô được chọn có kích thước $2\times2$: mỗi ô được tạo thành bởi 2 đường thẳng khác nhau $x=a, x=b$ ($0\le a<b\le 100$) và hai đường thẳng khác nhau $y=c$, $y=d$ ($0\le c<d\le 100$) sao cho $b-a=d-c=2 \Rightarrow$ có $99.99=99^2$ hình vuông.

Tương tự:

**Trường hợp 3:** ô được chọn có kích thước $3\times3$: có $98.98=98^2$ hình vuông.

…

**Trường hợp 100:** ô được chọn có kích thước $100\times100$: có $1.1=1^2$ hình vuông.

Suy ra không gian thuận lợi cho biến cố $A$ có số phần tử là

$$n(\Omega_A)=100^2+99^2+98^2+...+1^2=\frac{100.(100+1)(2.100+1)}{6}=338350.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(\Omega_A)}{n(\Omega)}=\dfrac{338350}{C_{101}^2.C_{101}^2}=\dfrac{67}{5050}\approx 0,0133$.

**Câu 27:** Cho tập hợp $X=\{1;2;3;4;...;100\}$ hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 7 số bất kì khác nhau sao cho hiệu của 2 số bất kì trong 7 số đó có trị tuyệt đối không nhỏ hơn 4?

**A.** $C_{82}^7$ **B.** $C_{100}^7$ **C.** $C_{100}^7-97$ **D.** $C_{93}^7$

**Lời giải**

Các số được chọn ra luôn xếp được theo thứ tự tăng dần

Giả sử 7 số được chọn là $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7$. Theo giả thiết vì hiệu của hai số bất kì không nhỏ hơn 4 nên $1\le a_1<a_2-3<a_3-6<a_4-9<a_5-12<a_6-15<a_7-18\le 82$.

Đặt $x_1=a_1; x_2=a_2-3; x_3=a_3-6; x_4=a_4-9; x_5=a_5-12; x_6=a_6-15; x_7=a_7-18$ trong đó $1\le x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7\le 82$.

Vậy bài toán trở thành chọn ra 7 số bất kì trong 82 số phân biệt: $C_{82}^7$

**Câu 28:** Có 30 quả cầu được đánh số từ 1 đến 30. Bạn Minh chọn ngẫu nhiên ra 10 quả cầu. Tính xác suất để trong 10 quả cầu lấy ra có 5 quả cầu mang số chẵn, 5 quả cầu mang số lẻ trong đó có đúng một quả cầu mang số chẵn và một quả cầu mang số lẻ chia hết cho 3.

**A.** $\dfrac{5040}{95381}$. **B.** $\dfrac{3500}{95381}$. **C.** $\dfrac{1001}{3335}$. **D.** $\dfrac{5031}{95381}$.

**Lời giải**

Không gian mẫu: $C_{30}^{10}$

Từ 1 đến 30 có 15 số chẵn và 15 số lẻ.

Từ 1 đến 30 có 5 số chẵn và 5 số lẻ chia hết cho 3: $\{3;6;9;12;15;18;21;24;27;30\}$

Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán.

Lấy 1 quả cầu chia hết cho 3 và là số chẵn: $C_5^1$

Lấy 1 quả cầu chia hết cho 3 và là số lẻ: $C_5^1$

Lấy 4 quả cầu mang số chẵn và không chia hết cho 3: $C_{10}^4$

Lấy 4 quả cầu mang số lẻ và không chia hết cho 3: $C_{10}^4$

Số kết quả thuận lợi của biến cố A: $C_5^1.C_5^1.C_{10}^4.C_{10}^4$

Vậy $P(A)=\dfrac{C_5^1.C_5^1.C_{10}^4.C_{10}^4}{C_{30}^{10}}=\dfrac{3500}{95381}$

**Câu 29:** Gọi $S$ là tập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S$. Xác suất để chọn được số có 4 chữ số viết theo thứ tự tăng dần và không có hai số nào liên tiếp nhau là:

**A.** $\dfrac{1}{36}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{63}$. **D.** $\dfrac{5}{1512}$.

**Lời giải**

Ta có số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là:

$|S|=9.A_9^3=n(\Omega)$.

Gọi $A$ là biến cố chọn được số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcd}$ trong đó $1\le a<b-1<c-2<d-3\le 6$. Việc chon 4 chữ số $a,b,c,d$ thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với việc chọn 4 chữ số $a, b-1, c-2, d-3$ theo thứ tự tăng dần từ chữ số 1 đến 6, tương ứng ta có $C_6^4$ cách.

Suy ra $n(A)=C_6^4$. Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_6^4}{9.A_9^3}=\dfrac{5}{1512}$.

**Câu 30:** Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6;7\}$. Gọi $B$ là tập hợp các số tự nhiên gồm $4$ chữ số khác nhau được lập từ $A$. Chọn thứ tự $2$ số thuộc tập $B$. Tính xác suất để $2$ số được chọn có đúng một số có mặt chữ số $5$.

**A.** $\dfrac{1440}{5873}$. **B.** $\dfrac{2880}{5873}$. **C.** $\dfrac{480}{5873}$. **D.** $\dfrac{720}{5873}$.

**Lời giải**

Chọn $4$ số khác nhau và xếp có thứ tự từ tập hợp có $7$ chữ số, có $A_7^4=840$ số.

Do đó số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=840.839=704760$.

Gọi biến cố C: " Hai số được chọn có đúng một số có mặt chứ sỗ 5 ".

Trong các số thuộc tập $B$ có $4!C_6^3=480$ số luôn có mặt chữ số $5$.

Trong tập $B$ có $A_6^4=360$ số không có mặt chữ số $5$.

Khi đó số phần tử của biến cố C là $n(C)=2!C_{480}^1.C_{360}^1=345600$.

Vậy $P(C)=\dfrac{345600}{704760}=\dfrac{2880}{5873}$.

**Câu 31:** Xếp ngẫu nhiên 5 học sinh lớp Toán, 2 học sinh lớp Văn và 2 học sinh lớp Hóa vào 9 ghế quanh một bàn tròn (mỗi học sinh ngồi đúng một ghế). Tính xác suất để 5 học sinh lớp Toán ngồi cạnh nhau.

**A.** $\frac{1}{126}$. **B.** $\frac{5}{126}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{1}{14}$.

**Lời giải**

Không gian mẫu là $n(\Omega)=(9-1)!=8!=40320$.

Gọi $A$ là biến cố "5 học sinh lớp Toán ngồi cạnh nhau".

Sắp xếp thứ thự 5 học sinh lớp Toán: có $5!=120$ cách.

Sắp xếp vòng tròn 5 phần tử gồm 4 học sinh còn lại và nhóm 5 học sinh lớp Toán ( coi như 1 phần tử ): có $4!=24$ cách.

Do đó $n(A)=120.24=2880$.

Vậy xác suất để 5 học sinh lớp Toán ngồi cạnh nhau là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2880}{40320}=\frac{1}{14}$.

**Câu 32:** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có một đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú hoạ một câu trả lời. Xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1là

**A.** $0,7759$. **B.** $0,5256$. **C.** $0,5652$. **D.** $0,7959$.

**Lời giải**

Ta có xác suất để học sinh trả lời câu đúng là $\frac{1}{4}$ và xác suất trả lời câu sai là $\frac{3}{4}$.

Gọi $x$ là số câu trả lời đúng, khi đó số câu trả lời sai là $10-x$.

Số điểm học sinh này đạt được là $5x-2(10-x)=7x-20$

Nên học sinh này nhận điểm dưới 1 khi $7x-20<1 \Leftrightarrow x<3$

Mà $x$ nguyên nên $x$ nhận các giá trị $0;1;2$

Gọi $Ai$ $(i=0;1;2)$ là biến cố " Học sinh trả lời đúng $i$ câu".

$A$ là biến cố "Học sinh nhận điểm dưới 1".

Suy ra $A=A_o\cup A_1\cup A_2$ và $P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)$

Mà $P(A_i)=C_{10}^i.\left(\frac{1}{4}\right)^i.\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$ nên $P(A)=\sum\limits_{i=0}^{2}C_{10}^i.\left(\frac{1}{4}\right)^i.\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}=0,5256$.

**Câu 33:** Trong hộp có $m$ bóng đỏ và $n$ bóng xanh đôi một khác nhau. Ta lấy lần lượt ra ngoài ngẫu nhiên không hoàn lại một lần một quả bóng. Xác suất để lần cuối lấy được bóng màu đỏ là

**A.** $\frac{m}{m+n}$. **B.** $\frac{n}{m+n}$. **C.** $\frac{1}{(m+n-1)!}$. **D.** $\frac{m!}{(m+n)!}$.

**Lời giải**

Coi việc bốc lần lượt cũng giống như lấy một lúc $m+n-1$ quả sau đó lấy nốt quả bóng cuối cùng.

Không gian mẫu là $n_\Omega=(m+n)!$.

A: "lần cuối lấy được bóng màu đỏ"

Bốc quả bóng đỏ ở lần cuối: $m$ cách.

Bốc $m+n-1$ quả bóng đầu tiên: $(m+n-1)!$ cách.

Vậy có $m(m+n-1)!$ cách.

Do đó xác suất để lần cuối lấy được bóng đỏ là $\frac{n_A}{n_\Omega}=\frac{m(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{m}{m+n}$.

**Câu 34:** Bộ mã ASCII là bảng mã dùng một dãy gồm 8 kí hiệu là 0 hoặc 1 để mã hóa cho một kí tự. Lấy ngẫu nhiên 1 dãy 8 kí hiệu trong bảng mã này. Xác suất để dãy lấy ra có nhiều nhất 6 kí hiệu là 1 là

**A.** $\frac{255}{256}$. **B.** $\frac{219}{256}$. **C.** $\frac{9}{256}$. **D.** $\frac{247}{256}$.

**Lời giải**

Số cách chọn 1 dãy 8 kí hiệu trong bảng mã là: $n(\Omega)=2^8$.

Gọi $A$ là biến cố " lấy ra có nhiều nhất 6 kí hiệu là 1 ".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "lấy ra có hơn 6 kí hiệu là 1".

$n(\overline{A})=C_8^7.C_1^1+C_8^8=9$

Xác suất để dãy lấy ra có nhiều nhất 6 kí hiệu 1 là: $P=1-\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=1-\frac{9}{256}=\frac{247}{256}$.

**Câu 35:** Đặt 5 quân cờ lên một bàn cờ vua, mỗi ô vuông trên bàn cờ chỉ chứa nhiều nhất một quân cờ. Xác suất để không hàng, không cột nào có nhiều hơn một quân cờ là:

**A.** $\frac{7}{17019}$. **B.** $\frac{560}{5763}$. **C.** $\frac{35}{1891}$. **D.** $\frac{280}{5763}$.

**Lời giải**

Bàn cờ vua có $8.8=64$ ô vuông.

Gọi $A$ là biến cố: "Không hàng, không cột nào có nhiều hơn một quân cờ"

**Cách 1:**

Chọn một ô cho quân cờ đầu tiên có 64 cách, một ô cho quân thứ 2 có 63 cách,…

$n(\Omega)=64.63.62.61.60$

Chọn 1 ô cho quân cờ đầu tiên có 64 cách, khi đó nó sẽ nằm ở 1 hàng và một cột, quân cờ tiếp theo sẽ còn $7.7=49$ ô còn lại có thể đặt vào,…Cứ tiếp tục như vậy.

Do đó $n(A)=64.49.36.25.16$

$\Rightarrow P(A)=\frac{64.49.36.25.16}{64.63.62.61.60}=\frac{280}{5763}$.

**Cách 2:**

Chọn 5 ô trong 64 ô để đặt 5 quân cờ. $n(\Omega)=C_{64}^5$

Chọn 5 hàng trong 8 hàng để đặt mỗi quân cờ vào một hàng, có $C_8^5$ cách. Công việc còn lại là xếp 5 quân cờ sao cho không có cột nào có nhiều hơn một quân cờ, nếu coi 5 hàng là 1 hàng thì công việc trở thành xếp có thứ tự 5 quân cờ vào 8 vị trí, có $A_8^5$ cách.

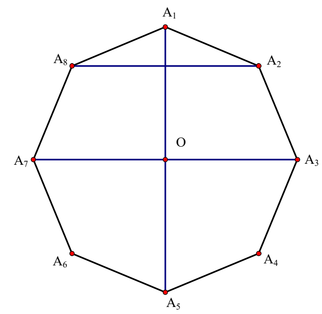
Do đó: $n(A)=C_8^5.A_8^5 \Rightarrow P(A)=\frac{C_8^5.A_8^5}{C_{64}^5}=\frac{280}{5763}$.

**Câu 36:** Từ các đỉnh của một đa giác đều 20 cạnh chọn 4 đỉnh bất kì để tạo thành một tứ giác lồi. Xác suất để tứ giác được chọn là một hình thang mà không phải là hình chữ nhật là

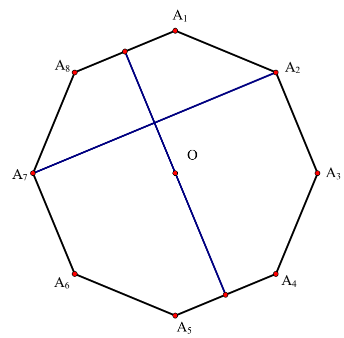
**A.** $\frac{3}{19}$. **B.** $\frac{21}{323}$. **C.** $\frac{48}{323}$. **D.** $\frac{54}{323}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là $C_{20}^4 = 4845$.




Số hình thang cân có trục đối xứng đi qua các đỉnh của đa giác là $10C_9^2$.




Số hình thang cân có trục đối xứng không đi qua đỉnh của đa giác là $10C_{10}^2$.

Cứ 2 trục đối xứng qua đỉnh của đa giác thí xác định một hình chữ nhật, do vậy số hình chữ nhật được tạo thành là $C_{10}^2$.

Khi hai trục đối xứng của đa giác vuông góc với nhau thì ta chỉ xác định được một hình chữ nhật.

Khi đó số hình thang cân mà không phải là hình chữ nhật là $10C_9^2 + 10C_{10}^2 - 2C_{10}^2 = 720$

Vậy xác suất cần tính là $\dfrac{720}{4845} = \dfrac{48}{323}$.

**Câu 37:** Cho một đa giác đều 45 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác cân mà không phải là tam giác đều.

**A.** $P = \dfrac{63}{496}$. **B.** $P = \dfrac{3}{43}$. **C.** $P = \dfrac{65}{496}$. **D.** $P = \dfrac{5}{43}$.

**Lời giải**

Gọi O là tâm đối xứng của đa giác đều. Xét một đỉnh A bất kì của đa giác đều đó.

Khi đó có 22 cặp đỉnh đối xứng với nhau qua đường thẳng O**A.** Hay có 22 tam giác cân nhận A làm đỉnh.

Như vậy với mỗi đỉnh của đa giác đều có 22 tam giác cân (kể cả đều) nhận nó làm đỉnh của tam giác cân. Số tam giác đều có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác là: $\dfrac{45}{3} = 15$.

Chú ý rằng mọi tam giác đều thì đều là tam giác cân tại 3 đỉnh. Nên trong số các tam giác cân đã đếm thì số tam giác đều được đếm 3 lần.

Vậy số tam giác cân mà không đều nhận các đỉnh của đa giác làm đỉnh là:

$45.22 - 3.15 = 945$

Số tam giác được tạo thành từ các đỉnh của đa giác đều là: $C_{45}^3 = 14190$

Vậy xác suất lấy được 3 đỉnh tạo thành một tam giác cân mà không phải tam giác đều là:

$P = \dfrac{63}{496}$.

**Câu 38:** Cho tập $A=\{0;1;2;...9\}$. Từ tập $A$ lấy 1 số tự nhiên gồm có $7$ chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để số lấy được tạo thành là số chẵn trong đó các số $3;4;5$ đứng liền với nhau và $7;9$ đứng liền với nhau.

**A.** $\dfrac{23}{9720}$. **B.** $\dfrac{17}{6840}$. **C.** $\dfrac{23}{4860}$. **D.** $\dfrac{23}{3240}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=9.A_9^6$

**Trường hợp 1:** $\overline{abcdef4}$ ( số tận cùng là số $4$ kể cả số $0$ đứng đầu )

Xếp 2 số $3,5$ vào 2 vị trí $e,f$ có $2!$ cách. Chọn $2$ số trong 5 số $0;1;2;6;8$ có $C_5^2$ cách

Xếp 3 "nhóm" gồm 1 nhóm có 2 số $7,9$ và 2 số trong $5$ số $0;1;2;6;8$ ta có: $2!.3!$ cách

Vậy có: $C_5^2.2!.3!.2=240$ ( số )

**Trường hợp 2**: $\overline{0bcdef4}$

Xếp 2 số $3,5$ vào 2 vị trí $e,f$ có $2!$ cách. Chọn $1$ số trong 4 số $1;2;6;8$ có $4$ cách

Xếp 2 "nhóm" gồm 1 nhóm có 2 số $7,9$ và 1 số trong $4$ số $1;2;6;8$ ta có: $2!.2!$ cách

Vậy có: $C_4^1.2!.2!.2=32$ ( số )

**Trường hợp 3**: $\overline{abcdefg}, g\in\{0;2;6;8\}$ : có $4$ cách

Hoán vị 3 số $3,4,5$ có $3!$ cách. Hoán vị 2 số $7,9$ có $2!$ cách

Chọn $1$ số trong 4 số có $4$ cách. Xếp 3 " nhóm " trên có $3!$ cách

Vậy có $4.2!.3!.3!.4=1152$ ( số )

**Trường hợp 4**: $\overline{0bcdefg}, g\in\{2;6;8\}$ : có $3$ cách

Hoán vị 3 số $3,4,5$ có $3!$ cách. Hoán vị 2 số $7,9$ có $2!$ cách

Xếp 2 nhóm trên có $2!$ cách. Vậy có: $3.3!.2!.2!=72$ ( số )

Vậy $n(A)=240-32+1152-72=1288$. Vậy $p(A)=\dfrac{1288}{9.A_9^6}=\dfrac{23}{9720}$.

**Câu 39:** Cho tập hợp $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Hai bạn A, B mỗi người chọn ngẫu nhiên một tập con của S. Xác suất để tập con mà A và B chọn được có đúng 3 phần tử chung là:

**A.** $\dfrac{889}{1024}$. **B.** $\dfrac{135}{1024}$. **C.** $\dfrac{605}{2048}$. **D.** $\dfrac{1443}{2048}$.

**Lời giải**

Vì S có 6 phần tử nên số tập con của S là $2^6=64$. Mỗi bạn A và B có 64 cách chọn tập con, do vậy số phần tử của không gian mẫu là $64^2$.

Ta tìm số cách chọn tập con thoả mãn yêu cầu.

Vì tập con của A và B chọn được có chung 3 phần tử nên các tập con này phải có ít nhất 3 phần tử.

Giả sử tập con của A và B gồm $x;y\,(x,y\ge 3)$ phần tử, khi đó:

A có $C_6^x$ cách chọn tập con, lúc này S còn $(6-x)$ phần tử.

Chọn ra 3 phần tử gọi là a, b, c có trong tập con gồm x phần tử của A ( để làm 3 phần tử chung với tập con mà B chọn) có $C_x^3$ cách;

Lúc này tập con mà B chọn đã có 3 phần tử chung với tập con của A là a, b, c ta cần chọn thêm $(y-3)$ phần tử khác trong $(6-x)$ phần tử còn lại sau khi A đã chọn tập con, có $C_{6-x}^{y-3}$ cách.

Vậy có tất cả $C_6^x C_x^3 C_{6-x}^{y-3}$ cách.

Ta có điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 3 \\ y-3 \leq 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 6 \\ 3 \leq y \leq 9-x \end{cases}$.

Khi đó số cách chọn tập con thỏa mãn điều kiện của bài toán là:

$$\sum_{y=3}^{6} C_6^3.C_3^3.C_3^{y-3} + \sum_{y=3}^{5} C_6^4.C_4^3.C_2^{y-3} + \sum_{y=3}^{4} C_6^5.C_5^3.C_1^{y-3} + \sum_{y=3}^{3} C_6^6.C_6^3.C_0^{y-3} = 160 + 240 + 120 + 20 = 540$$

Xác suất cần tính bằng $\dfrac{540}{64^2} = \dfrac{135}{1024}$

**Câu 40:** Cho $E$ là tập các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập $E$. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

**A.** $\dfrac{9}{28}$. **B.** $\dfrac{17}{56}$. **C.** $\dfrac{37}{112}$. **D.** $\dfrac{2}{7}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 8.8.7.6 = 2688$.

Đặt $A = \{0, 3, 6\}$, $B = \{1, 4, 7\}$, $C = \{2, 5, 8\}$.

Gọi $x$ là một thuộc tập $E$ và $x$ chia hết cho 3.

**Trường hợp 1:** $x$ có hai chữ số thuộc tập $B$, hai chữ số thuộc tập $C$. Số các số là $C_3^2.C_3^2.4! = 216$.

**Trường hợp 2:** $x$ có một chữ số thuộc tập $A$, ba chữ số còn lại cùng thuộc tập $B$ hoặc cùng thuộc tập $C$. Số các số là $2(3.4! - 3!) = 132$.

**Trường hợp 3:** $x$ có hai chữ số thuộc tập $A$, một chữ số thuộc tập $B$ và một chữ số thuộc tập $C$. Số các số $x$ là $3.3.C_3^2.4! - 3.3.2.3! = 540$.

Gọi $M$ là biến cố "Số được chọn chia hết cho 3''. Xác suất xảy ra biến cố $M$ là $P(M) = \dfrac{216+132+540}{2688} = \dfrac{37}{112}$.

**Câu 41:** Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có năm chữ số chia hết cho 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Xác suất để số được chọn chia hết cho 3 là.

**A.** $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1902}{5712}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{6667}{20000}$.

**Lời giải**

Giả sử số có năm chữ số có dạng $\overline{abcde}$.

Vì chia hết cho 5 nên $e$ có hai cách chọn là chữ số 0 và 5

$a$ có chín cách chọn vì $a \neq 0$

các vị trí $b, c, d$ mỗi vị trí có mười cách chọn

Suy số phần tử tập S là $2.9.10^3 = 18000$ phần tử $\Rightarrow n(\Omega) = 18000$.

Số có năm chữ số bé nhất chia hết cho 5 là 10000 và lớn nhất là 99995.

Gọi B là biến cố: "một số lấy từ tập S và chia hết cho 3", khi đó số được lấy này phải chia hết cho 15. (vì vừa chia hết cho 3, vừa chia hết cho 5 và các số 3 và 5 đều là số nguyên tố).

Số có năm chữ số bé nhất chia hết cho 15 là 10005 và lớn nhất là 99990.

Vì chi hết cho 15 nên các số trong tập B này có thể xem như một cấp số cộng với $u_1 = 10005,\ u_n = 99990, d = 15, \Rightarrow n = \dfrac{99990 - 10005}{15} + 1 = 6000$

Hay $\Rightarrow n(B) = 6000$. Vậy $\Rightarrow P_B = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{6000}{18000} = \dfrac{1}{3}$.

**Câu 42:** Xếp 32 chiếc ghế giống nhau vào 3 phòng khác nhau được đánh số I,II,III từ trước sao cho phòng I có ít nhất 11 chiếc ghế,phòng II có ít nhất 7 chiếc ghế và phòng III có ít nhất 5 chiếc ghế. Có bao nhiêu cách thực hiện?

**A.** 54. **B.** 56. **C.** 57. **D.** 55.

**Lời giải**

Gọi $x, y, z$ lần lượt là số ghế cho vào phòng I,II,III

Ta có $\begin{cases} x + y + z = 32 \\ x \geq 11 \\ y \geq 7 \\ z \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-10) + (y-6) + (z-4) = 12 \\ x - 10 \geq 1 \\ y - 6 \geq 1 \\ z - 4 \geq 1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a = x - 10 \geq 1 \\ b = y - 6 \geq 1 \\ c = z - 4 \geq 1 \end{cases}$

Từ đó ta có: $\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a, b, c \geq 1 \end{cases}$

Đây chính là bài toán chia 12 kẹo cho 3 đứa trẻ sao cho mỗi đứa có ít nhất 1 cái kẹo,nên số cách chia là: $C_{12-1}^{3-1} = C_{11}^{2} = 55$

**Câu 43:** Có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 5 gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây?

**A.** $0{,}09$. **B.** $0{,}07$. **C.** $0{,}18$. **D.** $0{,}5$.

**Lời giải**

Chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ trong 50 tấm thẻ nên $n(\Omega) = C_{50}^{10}$.

Từ 1 đến 50 có 25 số chẵn và 25 số lẻ.

Đặt

$$X = \{5; 15; 25; 35; 45\}$$

$$Y = \{10; 20; 30; 40; 50\}$$

Gọi $A$: "Chọn 10 tấm thẻ có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 5".

**Trường hợp 1**: 2 tấm thẻ chia hết cho 5 mang số lẻ.

Lấy 2 tấm thẻ mang số thuộc $X$ có $C_5^2$ cách.

Lấy 3 tấm thẻ mang số lẻ từ 20 số lẻ còn lại (không thuộc $X$) có $C_{20}^3$ cách.

Lấy 5 tấm thẻ mang số chẵn từ 20 số chẵn (không thuộc $Y$) có $C_{20}^5$ cách.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ là: $C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5$.

**Trường hợp 2**: 2 tấm thẻ chia hết cho 5 mang số chẵn.

Tương tự như trường hợp 1, suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ là: $C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5$.

**Trường hợp 3**: 2 tấm thẻ chia hết cho 5 gồm 1 thẻ mang số lẻ và 1 thẻ mang số chẵn.

Lấy 1 tấm thẻ mang số thuộc $X$ và 1 tấm thẻ mang số thuộc $Y$ có $C_5^1C_5^1$ cách.

Lấy 4 tấm thẻ mang số lẻ từ 20 số lẻ còn lại (không thuộc $X$) có $C_{20}^4$.

Lấy 4 tấm thẻ mang số chẵn từ 20 số chẵn còn lại (không thuộc $Y$) có $C_{20}^4$.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố $A$ là: $C_5^1.C_5^1.C_{20}^4.C_{20}^4$.

Khi đó: $n(A)=2.C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5+C_5^1.C_5^1.C_{20}^4.C_{20}^4$

Vậy $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2.C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5+C_5^1.C_5^1.C_{20}^4.C_{20}^4}{C_{50}^{10}}\approx 0,09$.

**Câu 44:** Cắm hết 6 bông hoa giống nhau và 3 lọ khác nhau. Tính xác suất để có lọ chứa 3 bông hoa.

**A.** $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{15}{28}$.

**Lời giải**

Gọi $x,y,z$ lần lượt là số bông hoa cắm vào ba lọ khác nhau, khi đó $x+y+z=6$ hay $(x+1)+(y+1)+(z+1)=9$. Do đó ta có thể xem bài toán như là chia 9 cây kẹo cho 3 học sinh khác nhau các em đều phải có kẹo. Do đó số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=C_8^2=28$

Gọi $A$ là biến cố "có lọ cắm ba bông hoa". Để tính số phần tử của $A$ ta có hai trường hợp

**Trường hợp 1:** Số bông hoa cắm ở các lọ là 3; 3; 0

Số cách cắm hoa là $C_3^1=3$

**Trường hợp 2:** Số bông hoa cắm ở các lọ là 3; 2; 1

Số cách cắm hoa là $3!=6$. Suy ra $n(A)=9$

Xác suất biến cố $A$ là $p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

**Câu 45:** Cho tập hợp $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7,8\}$. Gọi $S$ là tập hợp các số tự nhiên có $6$ chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập $A$. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S$, tính xác xuất để số được chọn là một số chẵn và chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho $5$.

**A.** $\frac{215}{1792}$. **B.** $\frac{211}{1792}$. **C.** $\frac{217}{1792}$. **D.** $\frac{205}{1792}$.

***Lời giải***

Gọi số cần tìm của tập $S$ có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Khi đó

Số cách chọn chữ số $a_1$ có $8$ cách chọn vì $a_1\neq 0$.

Số cách chọn thứ tự cho $a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6$ trong tập $A\setminus\{a_1\}$ có $A_8^5$ cách.

Do đó tập $S$ có $8.A_8^5=53760$ phần tử.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên $1$ số từ tập $S$.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{53760}^1=53760$.

Gọi $X$ là biến cố "Số được chọn là một số chẵn và chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho 5". Suy ra $a_3\in\{0;5\}$. Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố $X$ như sau:

**Trường hợp 1.** Với $a_3=0$: chữ số $a_6=\{2,4,6,8\}$ có $4$ cách chọn, $a_1$ có $7$ cách chọn, ba chữ số còn lại có $A_6^3$ cách chọn. Do đó trong tường hợp này có $4.7.A_6^3$ số.

**Trường hợp 2.** Với $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_6 = 0 \end{cases}$: Bốn chữ số còn lại có $A_7^4$ cách chọn. Do đó trong tường hợp này có $A_7^4$ số.

**Trường hợp 3.** Với $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_6 \neq 0 \end{cases}$: chữ số $a_6$ có $4$ cách chọn, $a_1$ có $6$ cách chọn, ba chữ số còn lại có $A_6^3$ cách chọn. Do đó trong tường hợp này có $4.6.A_6^3$ số.

Suy ra số phần tử của biến cố $X$ là $n(\mathrm{X}) = 4.7.A_6^{\ 3} + A_7^{\ 4} + 4.6.A_6^{\ 3} = 6450$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{n(\mathrm{X})}{n(\Omega)} = \dfrac{6450}{53760} = \dfrac{215}{1792}$.

**Câu 46:** Có hai chiế chộp, mỗi hộp chứa 7 viên bi xanh, 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai, sau đó lấy ngẫu nhiên ở hộp thứ hai 5 viên bi. Tính xác xuất để lấy được 5 viên bi ở hộp thứ hai có đủ hai mầu.

**A.** $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{231232}{435323}$. **C.** $\dfrac{633269}{649740}$. **D.** $\dfrac{11}{13}$.

**Lờigiải**

Không gian mẫu của phép thử là $n(\Omega) = C_{15}^2.C_{17}^5 = 649740$

Gọi biến cố $A$ "lấy được 5 viên ở hộp thứ hai có đủ hai mầu".

**Trường hợp 1:** Lấy được ở hộp thứ nhất 2 viên xanh sẽ có $C_7^2$ cách lấy. Khi đó hộp thứ hai sẽ có 9 viên xanh và 8 viên đỏ nên có $C_{17}^5 - C_9^5 - C_8^5$ cách lấy hai viên đủ hai mầu.

$\Rightarrow C_7^2.\left(C_{17}^5 - C_9^5 - C_8^5\right) = 131313$ (cách)

**Trường hợp 2:** TH2: Lấy được ở hộp thứ nhất 2 viên đỏ sẽ có $C_8^2$ cách lấy. Khi đó hộp thứ hai sẽ có 7 viên xanh và 10 viên đỏ nên có $C_{17}^5 - C_7^5 - C_{10}^5$ cách lấy hai viên đủ hai mầu.

$\Rightarrow C_8^2.\left(C_{17}^5 - C_7^5 - C_{10}^5\right) = 165620$ (cách)

**Trường hợp 3:** TH3: Lấy được ở hộp thứ nhất 1 viên xanh và 1 viên đỏ sẽ có $C_7^1.C_8^1$ cách lấy. Khi đó hộp thứ hai sẽ có 8 viên xanh và 9 viên đỏ nên có $C_{17}^5 - C_8^5 - C_9^5$ cách lấy hai viên đủ hai mầu.

$\Rightarrow C_7^1.C_8^1.\left(C_{17}^5 - C_8^5 - C_9^5\right) = 336336$ (cách)

Do đó $n(A) = 633269$. Vậy $P(A) = \dfrac{633269}{649740}$

**Câu 47:** Cho đa giác lồi có 14 đỉnh. Gọi $X$ là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong $X$ một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

**A.** $\dfrac{11}{26}$. **B.** $\dfrac{15}{26}$. **C.** $\dfrac{5}{13}$. **D.** $\dfrac{8}{13}$.

**Lời giải**

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^3 = 364$.

Gọi $A$ là biến cố: "Tam giác được chọn trong $X$ không có cạnh nào là cạnh của đa giác"

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Tam giác được chọn trong $X$ có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác"

**Trường hợp 1**: Nếu tam giác được chọn có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác thì có 14 tam giác thỏa mãn.

**Trường hợp 1:** Nếu tam giác được chọn có đúng một cạnh là cạnh của đa giác thì có 14.10=140 tam giác thỏa mãn.

Do đó $n(\overline{A})=14+140=154$. Suy ra số phần tử của biến cố $A$ là: $n(A)=n(\Omega)-n(\overline{A})=210$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{15}{26}$.

**Câu 48:** Gọi $S$ là tập hợp các ước số nguyên dương của số $34034175$. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử thuộc $S$. Tính xác suất lấy được hai phần tử là hai số không chia hết cho $7$.

**A.** $\dfrac{7}{195}$. **B.** $P=\dfrac{7}{267}$. **C.** $P=\dfrac{7}{276}$. **D.** $P=\dfrac{7}{159}$.

**Lời giải**

Ta có $34034175=7^5.3^4.5^2$.

Mỗi ước nguyên dương của số $34034175$ là một số có dạng $7^i.3^j.5^k$, trong đó $i\in\{0;1;2;3;4;5\}$, $j\in\{0;1;2;3;4\}$, $k\in\{0;1;2\}$.

Số ước nguyên dương bằng số bộ $(i;j;k)$ được chọn từ 3 tập trên. Suy ra số cách chọn bộ $(i;j;k)$ từ 3 tập trên là 6.5.3 = 90(cách) nên số phần tử của $S$ là 90.

Có $C_{90}^2$ cách chọn ngẫu nhiên hai phần tử thuộc $S$.

Mỗi ước nguyên dương không chia hết cho 7 của số $34034175$ là một số có dạng $7^0.3^j.5^k$

Suy ra số các ước của $34034175$ không chia hết cho 7 trong tập $S$ là 5.3 = 15.

Do đó có $C_{15}^2$ cách lấy hai phần tử thuộc $S$ mà không chia hết cho 7.

Suy ra xác suất lấy được hai số không chia hết cho 7 trong $S$ là $P=\dfrac{C_{15}^2}{C_{90}^2}=\dfrac{7}{267}$

**Câu 49:** Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5$, hãy lập số có 10 chữ số. Tính xác suất để số đó có số 3 lặp lại hai lần, số 4 lặp lại ba lần, số 5 lặp lại hai lần và các chữ số khác có mặt đúng một lần.

**A.** $\dfrac{7}{1296}$. **B.** $\dfrac{9}{2592}$. **C.** $\dfrac{5}{2592}$. **D.** $\dfrac{7}{2592}$.

**Lời giải**

Gọi số 10 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=5.6^9=50388480$ (số).

**Cách 1:** Gọi $A$: " Số đó có số 3 lặp lại hai lần, số 4 lặp lại ba lần, số 5 lặp lại hai lần và các chữ số khác có mặt đúng một lần."

$n(A)=\dfrac{10!}{2!.3!.2!.1!.1!.1!}-\dfrac{9!}{2!.3!.2!1!.1!}=136080$ (số).

Xác suất cần tìm là: $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{136080}{50388480}=\dfrac{7}{2592}$.

**Cách 2:** Gọi $A$: " Số đó có số 3 lặp lại hai lần, số 4 lặp lại ba lần, số 5 lặp lại hai lần và các chữ số khác có mặt đúng một lần."

**Trường hợp 1:** $a_1=3$

Số cách xếp số 3 còn lại là $C_9^1$. Số cách xếp số 4 là $C_8^3$. Số cách xếp số 5 là $C_5^2$

Số cách xếp các số còn lại : 3!. Có : $C_9^1.C_8^3.C_5^2.3!$ cách xếp.

**Trường hợp 2:** $a_1=4$

Số cách xếp hai số 4 còn lại là $C_9^2$. Số cách xếp số 3 là $C_7^2$. Số cách xếp số 5 là $C_5^2$

Số cách xếp các số còn lại : $3!$Có : $C_9^2.C_7^2.C_5^2.3!$ cách xếp.

**Trường hợp 3:** : $a_1 = 5$

Số cách xếp số 5 còn lại là $C_9^1$. Số cách xếp số 3 là $C_8^2$. Số cách xếp số 4 là $C_6^3$

Số cách xếp các số còn lại : $3!$ Có : $C_9^1.C_8^2.C_6^3.3!$ cách xếp.

**Trường hợp 4:** : $a_1 \notin \{3;4;5\}$ : $a_1$ có 2 cách chọn.

Số cách xếp số 3 còn lại là $C_9^2$. Số cách xếp số 4 là $C_7^3$. Số cách xếp số 5 là $C_5^2$

Số cách xếp các số còn lại : $3!$ Có : $C_9^1.C_8^3.C_5^2.3!$ cách xếp.

$n(A) = C_9^1.C_8^3.C_5^2.3! + C_9^2.C_7^2.C_5^2.3! + C_9^1.C_8^2.C_6^3.3! + C_9^1.C_8^3.C_5^2.3! = 136080$ (số).

Xác suất cần tìm là: $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{136080}{50388480} = \dfrac{7}{2592}$.

**Câu 50:** Gọi $T$ là tập hợp gồm các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau. Lấy từ $T$ ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để lấy được một số chẵn chứa các chữ số $2$, $3$, $4$ sao cho chữ số $2$ đứng trước chữ số $3$ và chữ số $3$ đứng trước chữ số $4$.

**A.** $\dfrac{65}{1944}$. **B.** $\dfrac{40}{1701}$. **C.** $\dfrac{25}{1512}$. **D.** $\dfrac{50}{1701}$.

**Lời giải**

**Cách 1:**

Gọi số có 7 chữ số đôi một khác nhau là $a$, $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_5a_7}$, $a_1 \neq 0$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.A_9^6 = 544320$. Gọi A là biến số cần tính xác suất.

Ta có $a_7 \in \{0;4;6;8\}$.

**Trường hợp 1:** $a_7 = 0$

Xếp các chữ số $2$, $3$, $4$ vào số $a$ có $C_6^3$ cách, xếp $3$ chữ số còn lại của số $a$ có $A_6^3$ cách.

Vậy trường hợp 1: có $C_6^3.A_6^3 = 2400$ số.

**Trường hợp 2:** $a_7 = 4$

Nếu $a_1 = 2$ thì có $5$ cách xếp chữ số $3$, các chữ số còn lại có $A_7^4$ cách.

Nếu $a_1 \neq 2$ thì $a_1$ có 6 cách chọn $\left(a_1 \notin \{0;2;3;4\}\right)$, xếp các chữ số $2$, $3$ có $C_5^2$ cách, các chữ số còn lại có $A_6^3$ cách.

Vậy trường hợp 2 có $5.A_7^4 + 6.C_5^2.A_6^3 = 11400$ số.

**Trường hợp 3:** $a_7 \in \{6;8\}$. $a_7$ có $2$ cách chọn.

Nếu $a_1 = 2$ thì có $C_5^2$ cách xếp các chữ số $3$, $4$, các chữ số còn lại có $A_6^3$ cách.

Nếu $a_1 \neq 2$ thì $a_1$ có 5 cách chọn $\left(a_1 \notin \{0;2;3;4;a_7\}\right)$, xếp các chữ số $2$, $3$, $4$ có $C_5^3$ cách, các chữ số còn lại có $A_5^2$ cách. Vậy trường hợp 3 có $2\left(C_5^2.A_6^3 + 5.C_5^3.A_5^2\right) = 4400$ số.

Do đó $n(A) = 2400 + 11400 + 4400 = 18200$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{18200}{544320} = \dfrac{65}{1944}$.

# TÀI LIỆU LUYỆN THI ĐẠI HỌC NĂM 2022


## PHAN NHẬT LINH

Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia 10,11,12

Điện thoại: 0921.573.413 – Email: linh.phannhat241289@gmail.com

Facebook: fb.com/nhatlinh.phan.1401/



**CHỊU TRÁCH NHIỆM NỘI DUNG**

NGUYỄN VĂN HIẾU

PHAN NHẬT LINH

**BIÊN TẬP**

PHAN NHẬT LINH

**THIẾT KẾ BÌA**

PHAN NHẬT LINH


**CHINH PHỤC VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO GIẢI TÍCH**