PHAN NHẬT LINH

CHINH PHỤC VDC

GIẢI TÍCH 2023

(Biên soạn mới nhất dành cho học sinh luyện thi THPT năm 2023)

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy cô và bạn đọc thân mến!

Cuốn sách **"Chinh phục Vận dụng – Vận dụng cao Giải tích 2023"** này được nhóm tác giả biên soạn với mục đích giúp các em học sinh khá giỏi trên toàn quốc chinh phục được các câu khó trong đề thi của Bộ giáo dục trong các năm gần đây. Trong mỗi cuốn sách, chúng tôi trình bày một cách rõ ràng và khoa học, tạo sự thuận lợi nhất cho các em học tập và tham khảo. Tất cả các bài tập trong sách chúng tôi đều tóm tắt lý thuyết và tiến hành giải chi tiết 100% để các em tiện lợi cho việc ôn tập, so sánh đáp án và tra cứu thông tin.

Để có thể biên soạn đầy đủ và hoàn thiện bộ sách này, nhóm tác giả có sưu tầm, tham khảo một số bài toán trích từ đề thi của các Sở, trường Chuyên trên các nước và một số thầy cô trên toàn quốc. Chân thành cảm ơn quý thầy cô đã sáng tạo ra các bài toán hay và các phương pháp giải toán hiệu quả nhất. Mặc dù nhóm tác giả đã tiến hành biên soạn và phản biện kĩ lưỡng nhất nhưng vẫn không tránh khỏi sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến phản hồi và đóng góp từ quý thầy cô, các em học sinh và bạn đọc để cuốn sách trở nên hoàn thiện hơn. Mọi đóng góp vui lòng liên hệ:

- **Tác giả:** Phan Nhật Linh
- **Số điện thoại/Zalo:** 0817.098.716
- **Gmail:** linh.phannhat241289@gmail.com
- **Facebook:** fb.com/nhatlinh.phan.1401/

Cuối cùng, nhóm tác giả xin gửi lời chúc sức khỏe đến quý thầy cô, các em học sinh và quý bạn đọc. Chúc quý vị có thể khai thác hiệu quả nhất các kiến thức khi cầm trên tay cuốn sách này!

Trân trọng./

Phan Nhật Linh

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính đơn điệu của hàm hợp và hàm tổng

Cho hàm số $u=u(x)$ xác định với $x\in(a;b)$ và $u(x)\in(c;d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x\in(a;b)$ thì ta có các nhận xét sau đây:

- Giả sử hàm số $u=u(x)$ đồng biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x\in(a;b)\Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u\in(c;d)$.
- Giả sử hàm số $u=u(x)$ nghịch biến với $x\in(a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x\in(a;b)\Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u\in(c;d)$.

Bài toán: Cho đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$. Yêu cầu tìm khoảng đơn điệu của hàm số dạng $g(x)=f[u(x)]+v(x)$.

Phương pháp:

- **Bước 1:** Tính đạo hàm của $g(x)$ theo công thức $g'(x)=u'(x).f'[u(x)]+v'(x)$
- **Bước 2:** Giải phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\ f'[u(x)]=-\dfrac{v'(x)}{u'(x)},\ u'(x)\neq 0.\end{array}\right.$
- **Bước 3:** Lập bảng xét dấu của $g'(x)$
- **Bước 4:** Từ bảng xét dâú để xét các khoảng đơn điệu của hàm số và có thể mở rộng tìm các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.

2. Tính đơn điệu của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

Dạng 1: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=|u(x)|$ với hàm $u(x)$ tường minh hoặc $u(x)$ có chứa tham số.

- **Bước 1:** Khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số $u(x)$
- **Bước 2:** Sử dụng phép biến đổi đồ thị của hàm số $|u(x)|$
- **Bước 3:** Từ đó suy ra tính đơn điệu của hàm số đã cho.

Dạng 2: Biện luận tính đơn điệu của hàm số $y = |u(x)|$ trên khoảng K cho trước

- **Trường hợp 1:** $u(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = u(x) \\ y' = u'(x) \end{cases} \Rightarrow$ Yêu cầu bài toán

  Nếu hàm số đồng biến trên K thì yêu cầu bài toán $\Rightarrow \begin{cases} u'(x) \geq 0, \forall x \in K \\ u(x) \geq 0, \forall x \in K \end{cases}$

  Nếu hàm số nghịch biến trên K thì yêu cầu bài toán $\Rightarrow \begin{cases} u'(x) \leq 0, \forall x \in K \\ u(x) \geq 0, \forall x \in K \end{cases}$

- **Trường hợp 2:** $u(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -u(x) \\ y' = -u'(x) \end{cases} \Rightarrow$ Yêu cầu bài toán.

3. Xử lý tham số trong đơn điệu hàm hợp

Bài toán: Tìm m để hàm số $y = f\left[u(x)\right]$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D

Đặt $t = u(x)$ thì hàm số trở thành $y = f(t)$. Khi đó cần lưu ý các vấn đề sau:

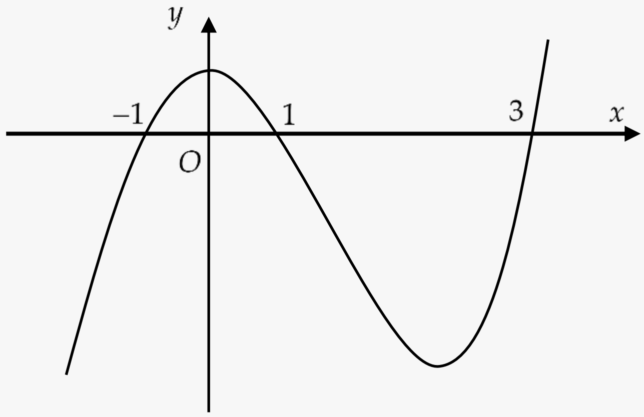
1. Tìm chính xác miền xác định của $t = u(x)$.
2. Nếu $t = u(x)$ đồng biến trên D thì $f\left[u(x)\right]$ và $f(t)$ có cùng tính chất là đồng biến hoặc nghịch biến.
3. Nếu $t = u(x)$ nghịch biến trên D thì $f\left[u(x)\right]$ và $f(t)$ ngược tính chất, nghĩa là $f\left[u(x)\right]$ đồng biến thì $f(t)$ nghịch biến và ngược lại.

Hoặc chúng ta có thể sử dụng công thức đạo hàm của hàm hợp $\left(f\left[u(x)\right]\right)' = u'(x).f'\left[u(x)\right]$

- Đối với các bài toán vận dụng và vận dụng cao thì không có một cách làm nào có thể bao quát hết được. Khi gặp các bài toán này, chúng ta cần áp dụng linh hoạt các phương pháp và kiến thức lại với nhau.
- Một số phương pháp thường sử dụng: đặt ẩn phụ, biện luận và tối ưu nhất là phương pháp ghép trục kết hợp với sơ đồ V. Trong lời giải các bài tập vận dụng, chúng ta sẽ thấy được sự kết hợp giữa các phương pháp trên.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f(x-m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-m)$. Vì $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)=f'(x-m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

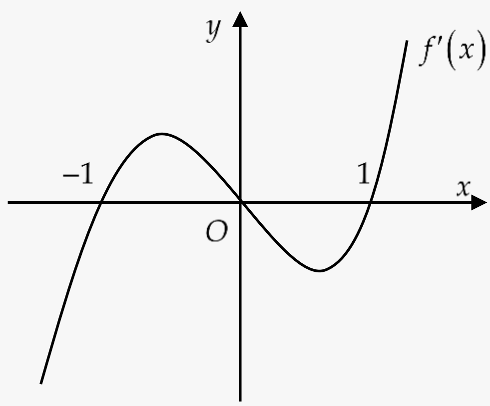
$$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x-m)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m<-1\\ 1<x-m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<m-1\\ 1+m<x<3+m\end{array}\right..$$

Hàm số $g(x)=f(x-m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\le m-1\\ \begin{cases} 3+m\ge 3\\ 1+m\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 4\\ m=0\end{array}\right..$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ nên ta có $S=\{0;4;5;6;..;10\}$.

Vậy S có 7 phần tử.

CÂU 2. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+bx^2+cx\ (b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hàm số $g(x)=f(f'(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)=x^3+bx^2+cx$ ta suy ra: $\begin{cases} b=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1$

Ta có: $g(x)=f(f'(x)) \Rightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)=f'(x^3-x)(3x^2-1)$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3-x)(3x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=a\ (1<a<2) \\ x=-a \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-a$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(a;+\infty)$ nên cũng đồng biến trên $(2;+\infty)$.

CÂU 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^2-2x+3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $g(x)=f(\sin^2 x+3\sin x-m)+m^2+2$ đồng biến trên $\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 14. **D.** 15.

LỜI GIẢI

Chọn D

Ta có: $g(x)=f(\sin^2 x+3\sin x-m)+m^2+2$

$g'(x)=(2\sin x.\cos x+3\cos x)f'(\sin^2 x+3\sin x-m)=\cos x(2\sin x+3)f'(\sin^2 x+3\sin x-m)$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow g'(x)\ge 0, \forall x\in\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x+3)f'(\sin^2 x+3\sin x-m)\ge 0 \Leftrightarrow f'(\sin^2 x+3\sin x-m)\le 0, \forall x\in\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Theo giả thiết: $f'(x)=-x^2-2x+3\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -3 \end{array}\right.$, ta có:

$f'(\sin^2 x+3\sin x-m)\le 0, \forall x\in\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x+3\sin x-m\ge 1, \forall x\in\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right) \\ \sin^2 x+3\sin x-m\le -3, \forall x\in\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x+3\sin x\ge m+1, \forall x\in\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right) \\ \sin^2 x+3\sin x\le m-3, \forall x\in\left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right) \end{array}\right.$.(1)

Xét hàm số $u(x)=\sin^2 x+3\sin x$ trên $\left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$, ta có $\max\limits_{\left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]} u(x)=\frac{3+6\sqrt{3}}{4}$, $\min\limits_{\left[\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]} u(x)=\frac{7}{4}$, do đó

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m-3\ge\frac{3+6\sqrt{3}}{4} \\ m+1\le\frac{7}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\ge\frac{15+6\sqrt{3}}{4} \\ m\le\frac{3}{4}\end{array}\right.$$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và thuộc $[-10;10]$ ta được $m\in\{-10,-9,...,0,7,...,10\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

CÂU 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	1	↘	0	↗	

Hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $[0;2021\pi]$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

A. 2042. **B.** 8084. **C.** 2021. **D.** 2020.

LỜI GIẢI

Chọn B

Hàm số $y=\sin 2x$ có chu kỳ $T=\pi$, nên ta xét hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $[0;\pi]$

Ta có $y'=f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)4\cos 2x\left(\sin 2x-2\right)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right).2\cos 2x\left(\sin 2x-2\right)>0$

$\Leftrightarrow \cos 2x.f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)<0\ (*)$.

Vì $-1\le\sin 2x\le 1\Rightarrow -2\le\sin^2 2x-4\sin 2x+1\le 6$.

Trường hợp 1: $\cos 2x<0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3\pi}{2}$.

$$(*)\Rightarrow f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -1<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<0 \\ 1<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<6\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{3}<\sin 2x<2-\sqrt{2} \\ -1<\sin 2x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{2}\right)<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right) \\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}\end{array}\right..$$

Trường hợp 2: $\cos 2x>0\Leftrightarrow 2x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

$$(*)\Rightarrow f'\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -2<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<-1 \\ 0<\sin^2 2x-4\sin 2x+1<1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}<\sin 2x<1 \\ 0<\sin 2x<2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{2}\right)<x<\frac{\pi}{4} \\ 0<x<\frac{1}{2}\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right) \end{array}\right. .$$

Suy ra hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $\left[0;\pi\right]$ có 4 khoảng đồng biến.

Vậy hàm số $y=f\left(\sin^2 2x-4\sin 2x+1\right)$ trên $\left[0;2021\pi\right]$ có ít nhất 8084 khoảng đồng biến.

CÂU 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'\left(x+1\right)=x^2-4x+3$. Hàm số $y=f\left(x^2+2x+3\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\left(-1-\sqrt{2};0\right)$.

C. $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Cách 1: Ta có $f'\left(x+1\right)=x^2-4x+3 \Leftrightarrow f'\left(x+1\right)=\left(x+1\right)^2-6\left(x+1\right)+8$.

Đặt $x+1=a$ ta được $f'\left(a\right)=a^2-6a+8$.

$$f'\left(a\right)=a^2-6a+8\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le 2 \\ a\ge 4 \end{array}\right. .$$

Ta có $y'=\left(f\left(x^2+2x+3\right)\right)'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x+3\right)$.

Hàm số đồng biến khi $\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x+3\right)\ge 0$

Trường hợp 1: $\left\{\begin{array}{l} 2x+2\ge 0 \\ f'\left(x^2+2x+3\right)\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+2x+3\le 2 \\ x^2+2x+3\ge 4 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} x\le -1-\sqrt{2} \\ x\ge -1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x\ge -1+\sqrt{2}$

Trường hợp 2: $\left\{\begin{array}{l} 2x+2\le 0 \\ f'\left(x^2+2x+3\right)\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le -1 \\ 2\le x^2+2x+3\le 4 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\le -1 \\ -1-\sqrt{2}\le x\le -1+\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}\le x\le -1$$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1\right)$.

Cách 2:

Đặt $x+1=a$ ta được $f'\left(a\right)=a^2-6a+8$. Đạo hàm : $f'\left(a\right)=a^2-6a+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=4 \end{array}\right.$.

Ta có: $y'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x+3\right)$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x+3=2 \\ x^2+2x+3=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \left(x+1\right)^2=0 \\ x=-1-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1\right)$.

CÂU 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(\frac{m}{3}x^3+\left(m-4\right)x^2+9x+2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 136. **C.** 68. **D.** 272

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Ta có: $y'=\left(mx^2-2\left(m-4\right)x+9\right).f'\left(\frac{m}{3}x^3+\left(m-4\right)x^2+9x+2021\right)$

Để hàm số: $y=f\left(\frac{m}{3}x^3+\left(m-4\right)x^2+9x+2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\le 0\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'=\left(mx^2-2\left(m-4\right)x+9\right).f'\left(\frac{m}{3}x^3+\left(m-4\right)x^2+9x+2021\right)\le 0\forall x\in\mathbb{R}$

Lại có: $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $f'(x)\le 0\forall\in\mathbb{R}$

Nên để hàm số: $y=f\left(\frac{m}{3}x^3+\left(m-4\right)x^2+9x+2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$mx^2-2\left(m-4\right)x+9\ge 0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\\left(m-4\right)^2-9m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m^2-17m+16\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m^2-17m+16\le 0\end{cases}$

Vậy $m\in\left\{1,2,3,...,15,16\right\}$

Tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là: $1+2+3+...+15+16=136$

CÂU 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x-1\right)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 8.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=-f'\left(3-x\right)=\left(x-3\right)\left(x-2\right)^2\left(\left(3-x\right)^2+m\left(3-x\right)+9\right)$.

$g\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(3;+\infty\right)\Leftrightarrow g'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(3;+\infty\right)\Leftrightarrow\left(3-x\right)^2+m\left(3-x\right)+9\ge 0,\forall x\in\left(3;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow t^2+mt+9\ge 0,\forall t\in\left(-\infty;0\right)$ (với $t=3-x$; $x\in\left(3;+\infty\right)$ ta có $t\in\left(-\infty;0\right)$).

$\Leftrightarrow m\le -t-\frac{9}{t},\forall t\in\left(-\infty;0\right)$.

Ta có trên $\left(-\infty;0\right)$ ta có $-t$ và $-\frac{9}{t}$ đều là các số dương nên có $-t-\frac{9}{t}\ge 6$.

Vậy $m\le -t-\frac{9}{t},\forall t\in\left(-\infty;0\right)\Leftrightarrow m\le 6$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)=(x-1)(x-2)...(x-2022)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2022;2022]$ để phương trinh $f'(x)=(m+1)f(x)$ có 2022 nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 4044. **C.** 2023. **D.** 4045.

LỜI GIẢI

Chọn B

Với $x\in D=R\setminus\{1;2;...;2022\}$

Phương trình đã tương đương: $m+1=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\Leftrightarrow m+1=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+...+\dfrac{1}{x-2022}(*)$.

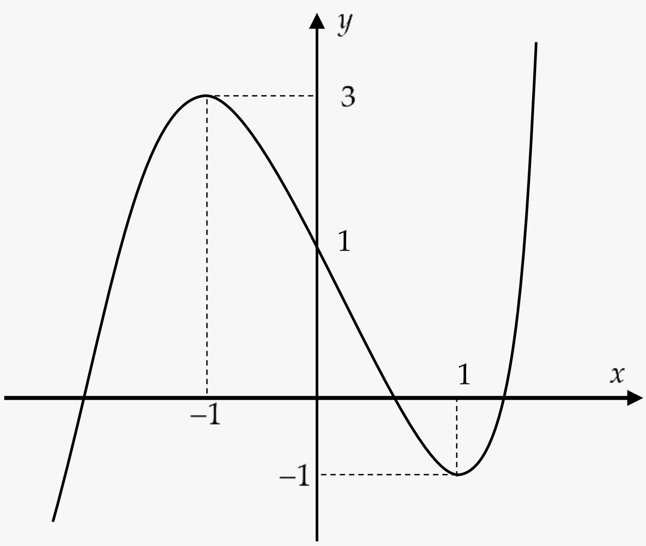
Đặt $g(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+...+\dfrac{1}{x-2022}\Rightarrow g'(x)<0,\forall x\in D$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta kết luận được phương trình đã cho có 2022 nghiệm khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l}m+1>0\\m+1<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>-1\\m<-1\end{array}\right.$.

Vậy có 4044 giá trị nguyên của $m\in[-2022;2022]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(1-x-x^3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

LỜI GIẢI

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Ta có: $y'=\left(3x^2-1\right)f'\left(1-x-x^3\right)$

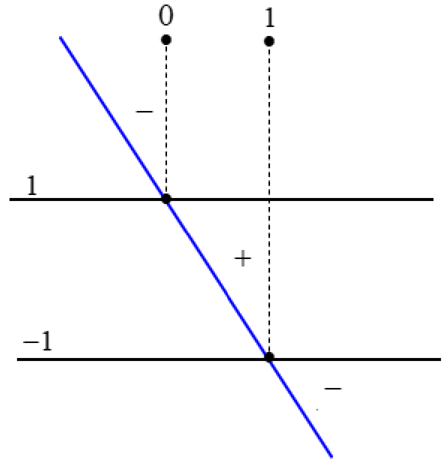
Để hàm số nghịch biến thì $y'=\left(3x^2-1\right)f'\left(1-x-x^3\right)\le 0$

$\Leftrightarrow f'\left(1-x-x^3\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x-x^3\ge 1\\1-x-x^3\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+x\le 0\\x^3+x-2\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\x\ge 1\end{array}\right.$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Cách 2: Sơ đồ V

Đặt $u = 1 - x - x^3$



Từ sơ đồ V suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $g(x) = f[f(x) - m]$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2021.

LỜI GIẢI

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = f[f(x) - m]$ với $u = f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow u' = f'(x) = 2x + 2$.

Đạo hàm $g'(x) = f'(x).f'[f(x) - m]$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;1)$ thì $g'(x) = f'(x).f'[f(x) - m] \ge 0, \forall x \in (-2;1)$.

Nhận thấy, khi $x \in (-2;1)$ thì $f'(x) \le 0$.

Suy ra $f'[f(x) - m] \le 0 \Leftrightarrow f(x) - m \le -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 \le m \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \le m, \forall x \in (-2;1)$

Suy ra: $m \ge 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z};\, m \in [-2021;2021]} 1 \le m \le 2021$

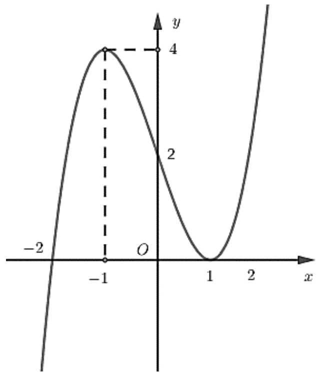
Vậy có 2021 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2-6}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Tổng các phần tử của S là:

A. -2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 2: Cho hàm số $y=(x+2)(x-1)^2$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng với hàm số $y=|x-1|\left(x^2+x-2\right)$?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

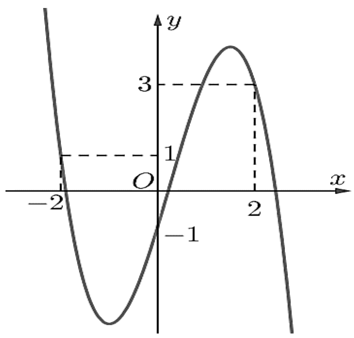
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left[f(x)\right]^3-3\left[f(x)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới đây



Đặt hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{4}-\dfrac{x^2}{4}+x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-5]$. **B.** $[-1;+\infty)$. **C.** $(-5;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-20<m<20$ và hàm số $y=f\left(x^2+2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 17 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 14

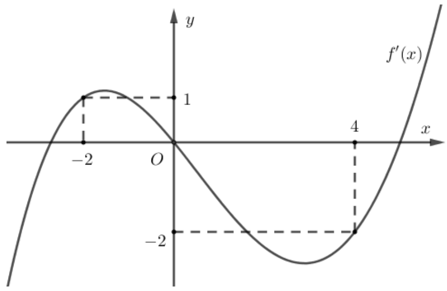
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3)=0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=\left|2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

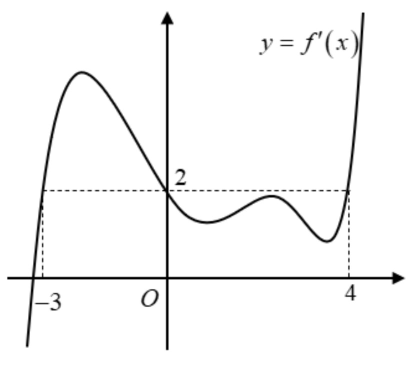
Câu 7: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=4f\left(x^2-1\right)+x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

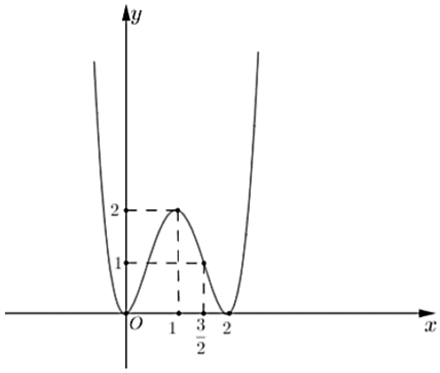
Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới đây



Hàm số $g(x)=f(x^2-3x)-2x^2+6x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=f(2x-2)$ có đồ thị như hình dưới.



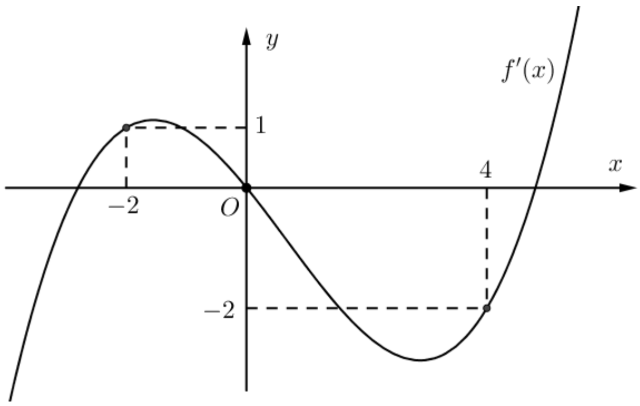
Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-m\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+1)=x^2-4x+3$. Hàm số $y=f(x^2+2x+3)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-1-\sqrt{2};0)$. **C.** $(-1+\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=4f(x-m)+x^2-2mx+2021$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^3+4x^2+x-4$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{R}\setminus(a;b)$ thì hàm số $h(x)=f\left(\dfrac{3}{x+1}-m^2-1\right)$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\dfrac{3}{2}$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=0$.

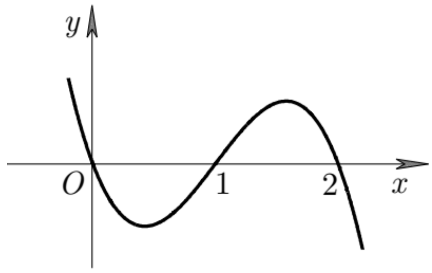
Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=\left[f(x)\right]^3-3\left[f(x)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 14: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(1+x)$ có đồ thị như trong hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$?

A. 2023. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2024.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(\frac{m}{3}x^3+(m-4)x^2+9x+2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 136. **C.** 68. **D.** 272

Câu 16: Cho hàm số $y=\frac{1}{9}x^9+x^7+\left(2m^2-3m-2\right)x^4+1$. Tập các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left\{2;-\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{2\}$.

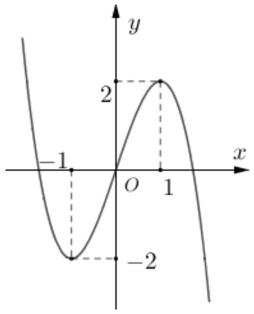
Câu 17: Cho hàm số $y=x^3-(m+1)x^2-\left(2m^2-3m+2\right)x+2m(2m-1)$. Biết $[a;b]$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $[2;+\infty)$. Tổng $a+b$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^5}{5}-x^2+(m-1)x-2007$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|f(x-1)\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;2)$?

A. 2005. **B.** 2006. **C.** 2007. **D.** 2008.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mf\left(x\right)+2021}{f\left(x\right)+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$?



A. 88. **B.** 84. **C.** 86. **D.** 89.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $\left(-10;10\right)$ để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{3-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-6;2\right)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in\left(-10;10\right)$ để hàm số $y=m^2x^4-2\left(4m-1\right)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$?

A. 15 . **B.** 6 . **C.** 7 . **D.** 16 .

Câu 22: Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $\left(-15;-3\right)$. Số phần tử của tập S là

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

Câu 23: Cho các hàm số $f\left(x\right)=x^2-x+m$ và $g\left(x\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)$. Điều kiện của tham số m để hàm số $y=g\left(f\left(x\right)\right)$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$ là:

A. $m<-4$. **B.** $m\geq-4$. **C.** $m<-2$. **D.** $m\geq-2$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x-1\right)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$?

A. 6 . **B.** 7 . **C.** 5 . **D.** 8 .

Câu 25: Cho hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-x\right)$ có đạo hàm $g'\left(x\right)=\left(3-x\right)^{2021}\left(2+x\right)^{2022}\left[x^2+\left(m-2\right)x-3m+6\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left(-5;5\right)$ để hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 7 . **D.** 6 .

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4+2x^2+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[0;10\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(3\left|x-m\right|+m^2\right)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;1\right)$?

A. 11. **B.** 5 . **C.** 10. **D.** 9 .

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+3x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ \frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. 2 . **B.** 1 . **C.** 4 . **D.** 0 .

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+m+2+3\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2-4x}+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-4;0)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 17.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

Biết rằng $f(0)=f(3)=2, f(1)=4$, hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $f(x)+x^2-m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$.

A. $m<2$. **B.** $m\le 13$. **C.** $m<13$. **D.** $m\le 2$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(1)=10\sqrt{2}, f(3)=9$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		4		$-\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2021;2021)$ của m để bất phương trình

$(x+1)^2\left[f^3(x)(x+1)+f(x)\right]>mx(m^2x^2+x+1)$ nghiệm đúng với mọi $x\in[2;4]$.

A. 2005 . **B.** 2006 . **C.** 2036 . **D.** 2035 .

Câu 31: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^6+6x^3y-7y^2+3x^3-3y=0$ với $0<y<90$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=x^5+2mx^4+3x^3+4(m-1)x^2+x+2$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** vô số

Câu 33: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)=|2x+m|+x^2-4x$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$?

A. 4043 **B.** 2028 **C.** 2033 **D.** 4045

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2012]$ để hàm số $g(x)=f^2(x)-2m.f(x)$ nghịch biến trên $[1;3]$?

A. 2010 **B.** 2019 **C.** 2011 **D.** 2018

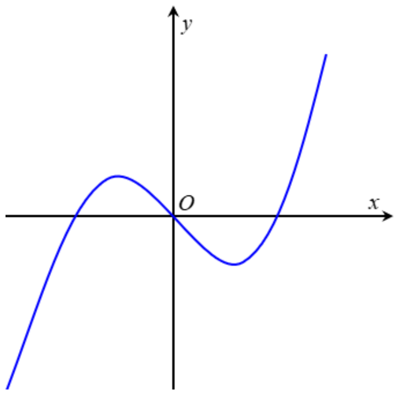
Câu 35: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2023;2023]$ để hàm số $g(x) = |x^2 - 1| + mx - m + 1$ đồng biến trên khoảng $(-3;2)$?

A. 2022 **B.** 2023 **C.** 2019 **D.** 2018

Câu 36: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022;2022]$ để hàm số $g(x) = |x-1| + |x-5| + |x-9| - mx$ đồng biến trên khoảng $(2;6)$?

A. 2021 **B.** 2022 **C.** 2039 **D.** 4041

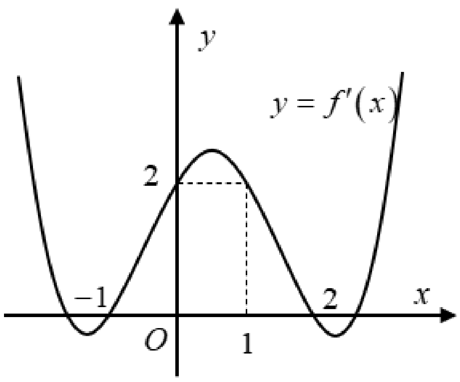
Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = \left[f(x^2-4)\right]'$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $h(x) = f(x^2 + x + m)$ đồng biến trên $(0;1)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ biết $g(x) = 3f(-x^3 - 3x + m) + (x^3 + 3x - m)^2(-2x^3 - 6x + 2m - 6)$.



A. 23. **B.** 21. **C.** 5. **D.** 17.

Câu 39: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $g(x) = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+2)x - m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$?

A. 4041. **B.** 4042. **C.** 2021. **D.** 4039.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. **D.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+4)(x^2+2mx+9)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-4)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

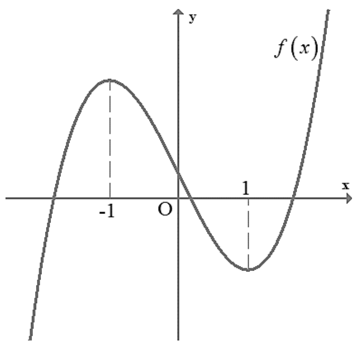
Câu 42: Cho hàm số $f(x)=-x^4-(4-m^2)x+2020$ và $g(x)=-x^3+5x^2-2020x+2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $h(x)=g[f(x)]$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 13. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f(x^2+4x+7)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng hàm số $f(x^3-3x-1)$ nghịch biến trên các khoảng lớn nhất $(a;b);(m;n);(p;q)$. Giá trị của biểu thức $(a^2+b^2+m^2+n^2+p^2+q^2)$ bằng:



A. 9. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 45: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét đấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

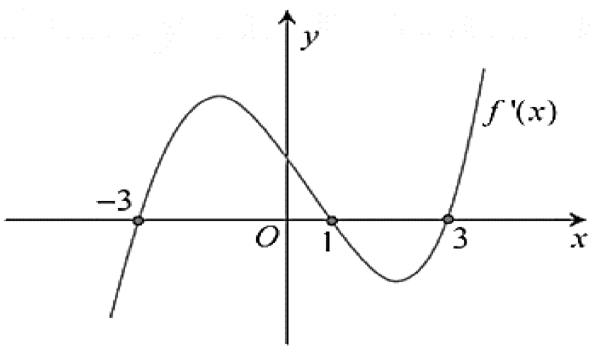
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ có biểu thức đạo hàm được cho bởi $f'(x)=x(x-2)(x+1)$. Hỏi tham số thực m thuộc khoảng nào dưới đây thì hàm số $g(x)=f\left(x^3+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?



A. 19. **B.** 23. **C.** 18. **D.** 17.

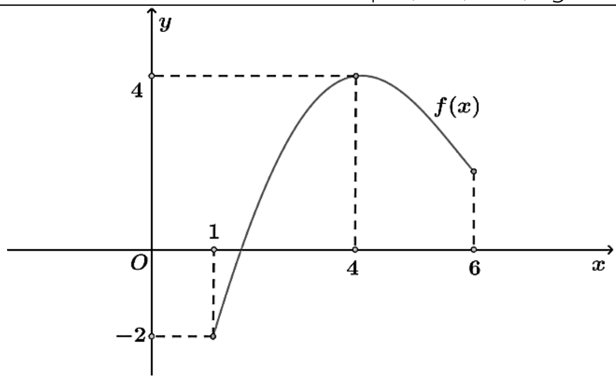
Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)=(m-1)x^3-3\left(m^2+m-1\right)x^2+3(m-1)x-m-1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(b-a)$ bằng:

A. $4\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{6}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=3m^2x^4-8mx^3+6x^2+12(2m-1)x+1$ với m là tham số. Biết rằng với mọi tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên $[a;b]$; với a, b là những số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $(2b-a)$ sẽ bằng:

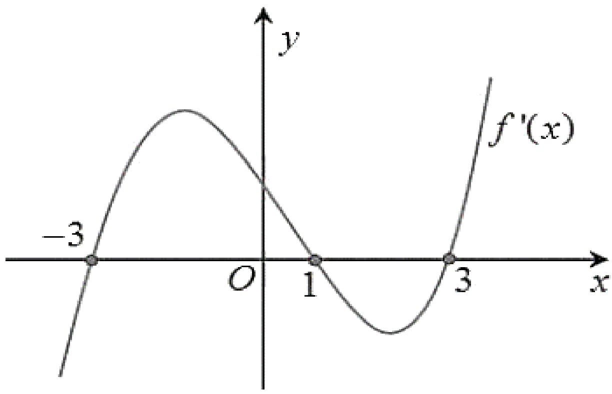
A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;2021)$ để hàm số $y=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên $(1;4)$?



A. 19 . **B.** 21 . **C.** 20 . **D.** 22 .

Câu 52: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \left[-30;30\right]$ để hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^2 - 2x - m\right)$nghịch biến trên$\left(-1;2\right)$.

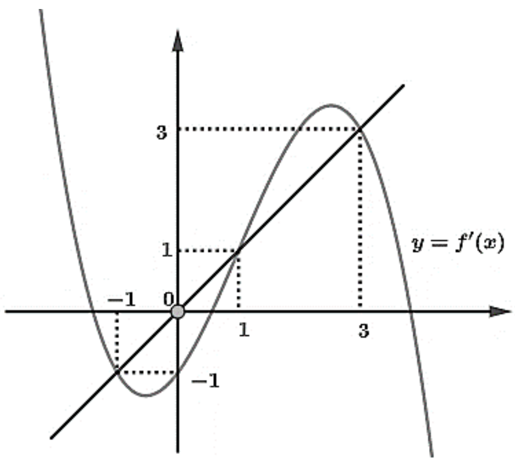


A. 0 . **B.** 1 . **C.** 28 . **D.** 23 .

Câu 53: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \left[-40;40\right]$ để hàm số $g\left(x\right) = \left|x^2 - 4mx + m - 3\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(-2;-1\right)$.

A. 79 . **B.** 39 . **C.** 80 . **D.** 40 .

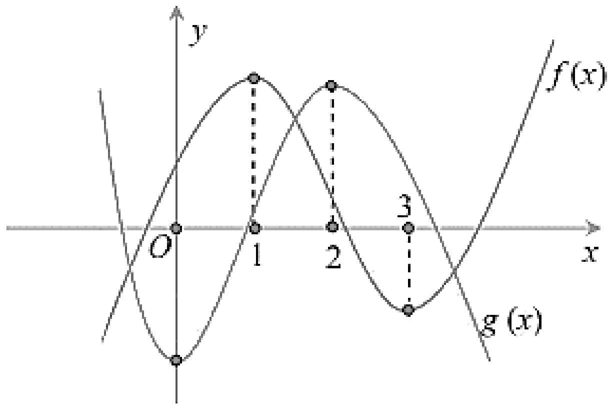
Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = 2f\left(\left|x-1\right|\right) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-3;1\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-2;0\right)$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết hai hàm số $y=f(2x-1)$, $y=g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng:



A. 0 . **B.** -2 . **C.** -4 . **D.** 3 .

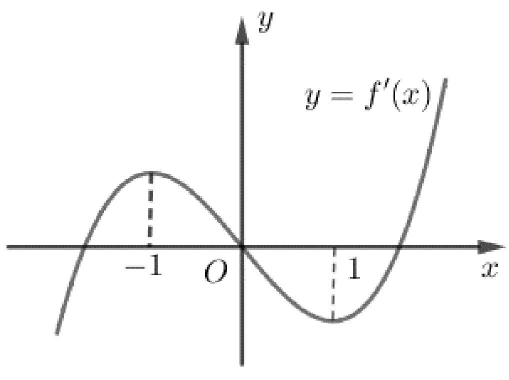
Câu 56: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'\left(x\right)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 57: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f\left(1\right)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=\left|4f\left(\sin x\right)+\cos 2x-a\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?



A. 2 . **B.** 3 . **C.** Vô số. **D.** 5 .

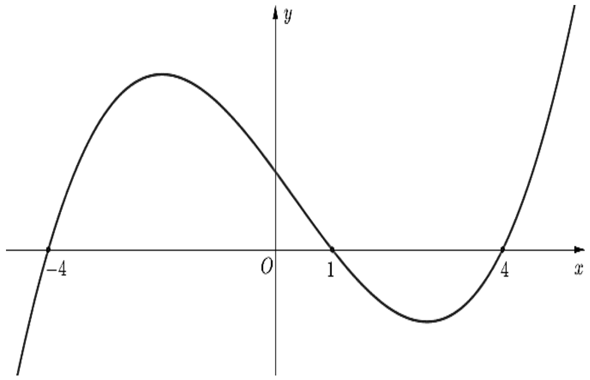
Câu 58: Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y=mx^9+\left(m^2-3m+2\right)x^6+\left(2m^3-m^2-m\right)x^4+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 59: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2}{5}m^2x^5-\dfrac{8}{3}mx^3-\left(m^2-m-20\right)x+1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 7 . **B.** 9 . **C.** 8 . **D.** 10 .

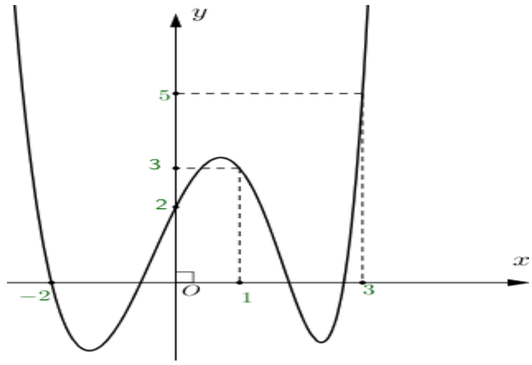
Câu 60: Cho hàm số $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, trong đó hàm số $g\left(x\right)=\left(f\left(2-x\right)\right)'$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ như dưới



Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)-x^3+2x^2-x+2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 61: Cho hai hàm số $f(x);g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y=f'\left(x^2+4x\right)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-4\right)-\frac{2}{3}x^3+2021$ nghịch biến trong khoảng nào?

A. $\left(0;3\right)$. **B.** $\left(3;5\right)$. **C.** $\left(2,3\right)$. **D.** $\left(4;6\right)$

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x^2-2)$ là hàm số bậc 4 có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3x+3\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(-2;1\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(-1;+\infty\right)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \dfrac{-m - m^2 + 6}{(x-m)^2} = \dfrac{-m^2 - m + 6}{(x-m)^2}$.

Để hàm số $y = \dfrac{x + m^2 - 6}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ thì

$f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - m + 6 > 0 \\ m \notin (-\infty; -2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 2 \\ m \geq -2 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq m < 2 \Rightarrow S = \{-2; -1; 0; 1\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là $-2 + (-1) + 0 + 1 = -2$.

Câu 2: Chọn B

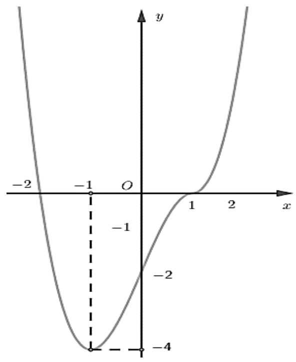
Đặt $y = f(x) = (x+2)(x-1)^2$

Ta có $y = g(x) = |x-1|(x^2 + x - 2) = \begin{cases} (x-1)(x^2 + x - 2) \text{ khi } x \geq 1 \\ (1-x)(x^2 + x - 2) \text{ khi } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \geq 1 \\ -f(x) \text{ khi } x < 1 \end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ gồm hai phần:

Khi $x \geq 1$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Khi $x < 1$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ là đồ thị của hàm số $y = -f(x)$.



Câu 3: Chọn C

Ta có $y' = 3[f(x)]^2.f'(x) - 6.f(x).f'(x) = 3.f(x).f'(x)[f(x) - 2]$.

Hàm số đã cho đồng biến $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow 3.f(x).f'(x)[f(x) - 2] > 0$.

Trường hợp 1: Nếu $x < 1$, khi đó ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 0 \text{ hoac } f(x) < 0 \\ f(x) - 2 > 0 \text{ hoac } f(x) - 2 < 0 \end{cases}$.

Chọn $f(x) = 1$, suy ra $\Rightarrow 3.f(x).f'(x)[f(x) - 2] < 0$.

Vậy hàm số đã cho không đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Trường hợp 2: Nếu $x \in (1;2)$, khi đó ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) - 2 > 0 \text{ hoac } f(x) - 2 < 0 \end{cases}$.

Chọn $f(x) = \dfrac{5}{2}$, suy ra $\Rightarrow 3.f(x).f'(x)\left[f(x)-2\right] < 0$.

Vậy hàm số đã cho không đồng biến trên $(1;2)$.

Trường hợp 3: Nếu $x \in (3;4)$, khi đó ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) - 2 < 0 \end{cases}$.

Suy ra $\Rightarrow 3.f(x).f'(x)\left[f(x)-2\right] > 0$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(3;4)$.

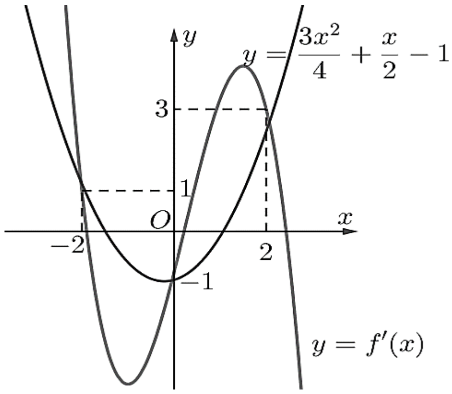
Trường hợp 4: Nếu $x \in (2;3)$, khi đó ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) - 2 < 0 \end{cases}$.

Suy ra $\Rightarrow 3.f(x).f'(x)\left[f(x)-2\right] < 0$. Vậy hàm số đã cho không đồng biến trên $(2;3)$.

Kết luận: Hàm số đã cho đồng biến trên $(3;4)$.

Câu 4: Chọn B

Xét $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^2}{4} + x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1$.



Giải phương trình: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Từ đó ta biểu diễn $g'(x) = ax(x+2)(x-2)$ trong đó

$a < 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Xét hàm số $y = g(x+m)$ có $y' = g'(x+m) = a(x+m)(x+m+2)(x+m-2)$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-m-2$		$-m$		$-m+2$		$+\infty$
$g'(x+m)$			0		0		0		
$g(x+m)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $-m+2\le 3 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Câu 5: Chọn C

Ta có $y'=\left(x^2+2x+m\right)'f'\left(x^2+2x+m\right)=2(x+1)f'\left(x^2+2x+m\right)$.

Hàm số $y=f\left(x^2+2x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(0;1)$ và $y'=0$ tại hữu hạn điểm.

Khi đó ta có $2(x+1)f'\left(x^2+2x+m\right)\ge 0,\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow f'\left(x^2+2x+m\right)\ge 0,\forall x\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x^2+2x+m\le 3,\forall x\in(0;1) \\ x^2+2x+m\le -2,\forall x\in(0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m\le x^2+2x\le 3-m,\forall x\in(0;1) \\ x^2+2x\le -2-m,\forall x\in(0;1) \end{array}\right. .$$

Xét hàm số $y=x^2+2x$, ta có bảng biến thiên

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Trường hợp 1: $-m\le x^2+2x\le 3-m,\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m\le 0 \\ 3-m\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m\le 0 \Leftrightarrow m=0$.

Trường hợp 2: $x^2+2x\le -2-m,\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow -2-m\ge 3 \Leftrightarrow m\le -5$.

Kết hợp với $-20<m<20$ suy ra $-20<m\le -5 \Leftrightarrow m\in\{-19;-18;-17;.....;-5\}$

Vậy có 16 số nguyên $-20<m<20$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Chọn B

Xét hàm số $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left(-x^4-4x^3-4x^2-2\right)$. Khi đó $g(x)=|h(x)|$.

Ta có $h(x)=2(x+1)^6-6(x+1)^2-3f\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Suy ra $h'(x)=12(x+1)^5-12(x+1)-3\left[-4(x+1)^3+4(x+1)\right]f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Hay $h'(x)=12(x+1)\left[(x+1)^4-1\right]+12(x+1)\left[(x+1)^2-1\right]f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]$.

Hay $h'(x)=12(x+1).\left[(x+1)^2-1\right].\left\{(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\right\}$.

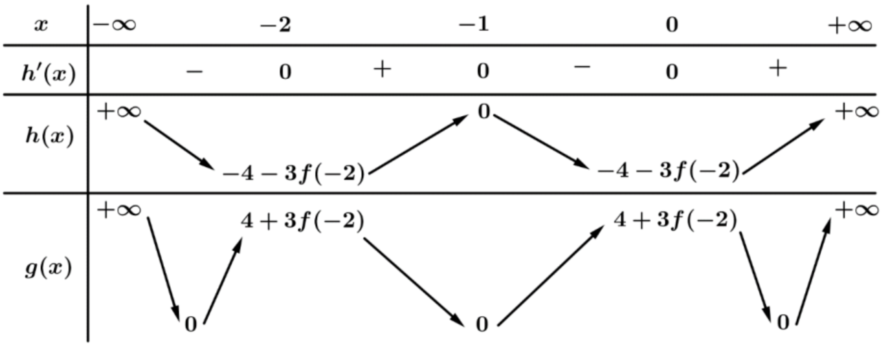
Hay $h'(x)=12(x+1).(x+2)x.\left\{(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\right\}$.

Ta có $-(x+1)^4+2(x+1)^2-3=-\left[(x+1)^2-1\right]^2-2\le -2, \forall x$.

Từ bảng xét dấu suy ra $f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]\ge 0, \forall x$.

Do đó, $(x+1)^2+1+f'\left[-(x+1)^4+2(x+1)^2-3\right]>0, \forall x$.

Vậy $h'(x)=0 \Leftrightarrow 12(x+1).(x+2)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$ và có bảng biến thiên:



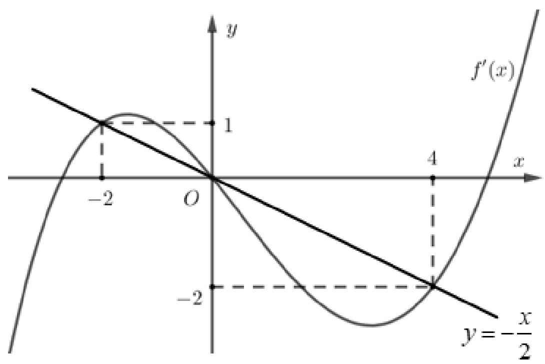
Từ bảng biến thiên có thể khẳng định hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 7: Chọn C

Ta có: $g'(x)=8x.f'(x^2-1)+4x^3-4x=4x\left[2f'(x^2-1)+x^2-1\right]$

Giải phương trình: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-1)=-\dfrac{x^2-1}{2} \end{array}\right.$.

Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ đi qua các điểm $(-2;1)$, $(0;0)$ và $(4;-2)$. Nghiệm của phương trình $f'(x)=-\dfrac{x}{2}$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$.



Quan sát hình vẽ trên, ta thấy $f'(x)=-\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$ và $f'(x)>-\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x<0 \\ x>4 \end{array}\right.$.

Khi đó $f'\left(x^2-1\right)=-\dfrac{x^2-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=-2 \\ x^2-1=0 \\ x^2-1=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có các nghiệm đơn là: $x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm\sqrt{5}$ nên $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này.

Có $g'(3)=24\left[f'(8)+4\right]>0$ do $f'(x)+\dfrac{x}{2}>0, \forall x\in(-2;0)\cup(4;+\infty)$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x		$-\sqrt{5}$		-1		0		1		$\sqrt{5}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)$, $(-1;0)$ và $\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Câu 8: **Chọn D**

Ta có: $g'(x)=f'\left(x^2-3x\right)(2x-3)-4x+6=(2x-3)\left[f'\left(x^2-3x\right)-2\right]$.

Xét $f'\left(x^2-3x\right)-2>0$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-3x\right)>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x>4 \\ -3<x^2-3x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-1 \\ 0<x<3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		3		4		$+\infty$
$2x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2-3x\right)-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$, $(3;4)$.

Câu 9: **Chọn B**

Ta có $g'(x)=2f'(2x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow f'(-2)=0 \\ x=1 \Rightarrow f'(0)=0 \\ x=2 \Rightarrow f'(2)=0 \end{array}\right.$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2		0	1	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow 1 \searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $h(x)=4f(\sin x)+\cos 2x-m$

Khi đó $h'(x)=4\cos x.f'(\sin x)-2\sin 2x$

Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos x,\sin 2x>0\\ \sin x\in(0;1)\Rightarrow f'(\sin x)<0\end{cases}\Rightarrow h'(x)<0\quad\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Do đó, hàm số $y=|h(x)|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow h(x)\ge 0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow 4f(1)-1-m\ge 0\Leftrightarrow 3-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 3.$

Kết hợp với điều kiện nguyên dương của $m\Rightarrow m\in\{1;2;3\}\Rightarrow$ có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn C

Cách 1:

Ta có $f'(x+1)=x^2-4x+3\Leftrightarrow f'(x+1)=(x+1)^2-6(x+1)+8$.

Đặt $x+1=a$ ta được $f'(a)=a^2-6a+8$.

$f'(a)=a^2-6a+8\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\le 2\\ a\ge 4\end{array}\right.$.

Ta có $y'=\left(f\left(x^2+2x+3\right)\right)'=(2x+2)f'\left(x^2+2x+3\right)$.

Hàm số đồng biến khi $(2x+2)f'\left(x^2+2x+3\right)\ge 0$

Trường hợp 1: $\begin{cases}2x+2\ge 0\\ f'\left(x^2+2x+3\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}x^2+2x+3\le 2\\ x^2+2x+3\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ \left[\begin{array}{l}x\le -1-\sqrt{2}\\ x\ge -1+\sqrt{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -1+\sqrt{2}$

Trường hợp 2: $\begin{cases}2x+2\le 0\\ f'\left(x^2+2x+3\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\ 2\le x^2+2x+3\le 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\ -1-\sqrt{2}\le x\le -1+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow -1-\sqrt{2}\le x\le -1$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1\right)$.

Cách 2:

Đặt $x+1=a$ ta được $f'(a)=a^2-6a+8$.

$f'(a)=a^2-6a+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=4\end{array}\right.$. Ta có: $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x+3\right)$.

Giải phương trình: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x+3=2 \\ x^2+2x+3=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (x+1)^2=0 \\ x=-1-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1\right)$.

Câu 11: Chọn C

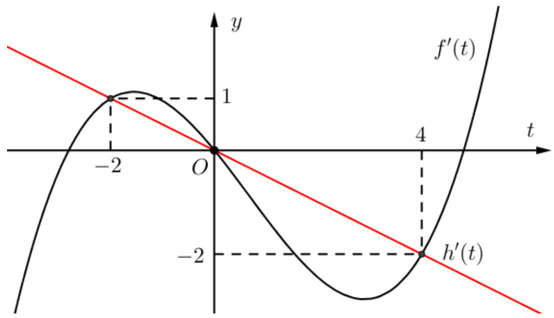
Để $g(x)$đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x)\ge 0 \quad \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow g'(x)=4.f'(x-m)+2x-2m\ge 0, \forall x\in(1;2) \Leftrightarrow f'(x-m)\ge -\dfrac{x-m}{2} \quad \forall x\in(1;2) \;\; (*)$

Đặt $t=x-m$. Với $x\in(1;2)\Rightarrow t\in(1-m;2-m)$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2} \quad \forall t\in(1-m;2-m)$

Vẽ đồ thị hàm số $f'(t)$ và $h(t)=-\dfrac{t}{2}$ trên cùng hệ trục ta được:



Từ đồ thị ta có: $f'(t)\ge h(t) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le t\le 0 \\ t\ge 4 \end{array}\right.$

Nên để $f'(t)\ge -\dfrac{t}{2} \quad \forall t\in(1-m;2-m) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1-m;2-m)\subset[-2;0] \\ (1-m;2-m)\subset[4;+\infty) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le 1-m<2-m\le 0 \\ 1-m\ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le m\le 3 \\ m\le -3 \end{array}\right.$

Mà m nguyên dương $\Rightarrow m\in\{2;3\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 12: Chọn D

Ta có: $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow -x^3+4x^2+x-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ 1\le x\le 4 \end{array}\right.$

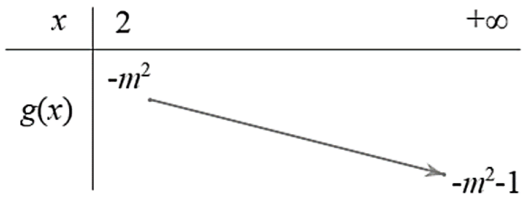
Ta có: $h'(x)=\dfrac{-3}{(x+1)^2}.f'\left(\dfrac{3}{x+1}-m^2-1\right)$

Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow h'(x)\le 0, \forall x\in(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{(x+1)^2}.f'\left(\frac{3}{x+1}-m^2-1\right)\le 0,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow f'\left(\frac{3}{x+1}-m^2-1\right)\ge 0,\forall x\in(2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3}{x+1}-m^2-1\le -1\\ 1\le \frac{3}{x+1}-m^2-1\le 4\end{array}\right.,\forall x\in(2;+\infty)\qquad (*)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\frac{3}{x+1}-m^2-1$ trên $(2;+\infty)$:

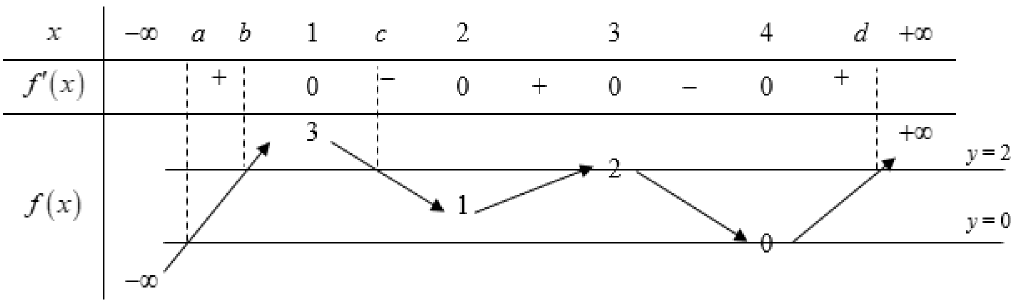


Khi đó $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m^2-1\ge 1\\ -m^2\le 4\end{cases}\\ -m^2\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow m^2\ge 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus(-1;1)$

Suy ra $a=-1;\ b=1$. Vậy $S=-1+1=0$.

Câu 13: Chọn C

Ta có $y'=3f'(x)\left[f^2(x)-2f(x)\right]$. Phương trình $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.$.



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1;2;3;4\}$;

Với $f(x)=0\Leftrightarrow x=a<1$ hoặc $x=4$;

Với $f(x)=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=b\ (a<b<1)\\ x=c\in(1;2)\\ x=3\\ x=d>4\end{array}\right.$.

Ta lập được bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		a		b		1		c		2		3		4		d		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;a)$; $(b;1)$; $(c;2)$; $(3;4)$ và $(d;+\infty)$.

Câu 14: Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(1+x)$ ta có $f'(1+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Đặt $t=1+x \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Vậy $f'(t)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ 2\le t\le 3 \end{array}\right., f'(t)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le t\le 2 \\ t\ge 3 \end{array}\right.$.

Hàm số: $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right) \Rightarrow g'(x)=(2-2x)f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)$.

Hàm số $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$

$\Leftrightarrow (2-2x)f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)\ge 0, \forall x\in(0;1) \Leftrightarrow f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)\ge 0, \forall x\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x-2022+m\le 1 \\ \begin{cases} -x^2+2x-2022+m\ge 2 \\ -x^2+2x-2022+m\le 3 \end{cases} \end{array}\right. \forall x\in(0;1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le x^2-2x+2023 \\ \begin{cases} m\ge x^2-2x+2024 \\ m\le x^2-2x+2025 \end{cases} \end{array}\right. \forall x\in(0;1)$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 2022 \\ 2024\le m\le 2024 \end{array}\right.$. Vậy có 2023 số.

Câu 15: Chọn B

Ta có: $y'=\left(mx^2-2(m-4)x+9\right).f'\left(\frac{m}{3}x^3+(m-4)x^2+9x+2021\right)$

Để hàm số: $y=f\left(\frac{m}{3}x^3+(m-4)x^2+9x+2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\le 0 \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow y'=\left(mx^2-2(m-4)x+9\right).f'\left(\frac{m}{3}x^3+(m-4)x^2+9x+2021\right)\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Lại có: $y=f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $f'(x)\le 0 \forall \in\mathbb{R}$.

Nên để hàm số: $y=f\left(\frac{m}{3}x^3+(m-4)x^2+9x+2021\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì:

$mx^2-2(m-4)x+9\ge 0 \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ (m-4)^2-9m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m^2-17m+16\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m^2-17m+16\le 0 \end{cases}$

Vậy $m\in\{1,2,3,...,15,16\}$

Tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là: $1+2+3+...+15+16=136$

Câu 16: Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'=x^3\left(x^5+7x^3+\left(2m^2-3m-2\right)\right)\ge 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện cần:

Ta thấy $y' = x^3\left(x^5 + 7x^3 + \left(2m^2 - 3m - 2\right)\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có nghiệm x = 0.

Để đạo hàm không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ thì $x^5 + 7x^3 + \left(2m^2 - 3m - 2\right)$ có nghiệm $x = 0$

Suy ra $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$, kết hợp với điều kiện m nguyên suy ra m=2

Điều kiện đủ:

Thử lại, với $m = 2$, ta có $y' = x^8 + 7x^6 \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 17: Chọn A

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, y' = 3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2$

$y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $\dfrac{m+1 \pm \sqrt{7m^2 - 7m + 7}}{3}$ với mọi m

Yêu cầu bài toán $\left[2; +\infty\right) \subset \left[\dfrac{m+1+\sqrt{7m^2-7m+7}}{3}\right)$, nên $\dfrac{m+1+\sqrt{7m^2-7m+7}}{3} \le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{7m^2 - 7m + 7} \le 5 - m \Leftrightarrow -2 \le m \le \dfrac{3}{2}$. Vậy $a + b = -\dfrac{1}{2}$

Câu 18: Chọn B

Ta có $f'\left(x\right) = x^4 - 2x + m - 1$

Đặt $g\left(x\right) = f\left(x-1\right)$, để hàm số $y = \left|g\left(x\right)\right|$ nghịch biến trên $\left(-\infty; 2\right)$ thì xảy ra hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $g\left(x\right)$ không âm và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; 2\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} g\left(2\right) \ge 0 \\ g'\left(x\right) \le 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(1\right) \ge 0 \\ f'\left(x-1\right) \le 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2008,8 \ge 0 \\ f'\left(t\right) \le 0, \forall t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2008,8 \\ f'\left(t\right) \le 0, \forall t < 1 \end{cases}$

Xét $f'\left(t\right) \le 0, \forall t < 1 \Leftrightarrow m \le -t^4 + 2t + 1 = h\left(t\right), \forall t < 1$

Ta có bảng biến thiên $h\left(t\right)$

t	$-\infty$		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		1
$h'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$h\left(t\right)$	$-\infty$	↗	$\approx 2,19$	↘	2

Từ bảng biến thiên ta có $m \in \varnothing$. Vậy $m \in \varnothing$.

Trường hợp 2: Hàm số $g\left(x\right)$ không dương và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; 2\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} g\left(2\right) \le 0 \\ g'\left(x\right) \ge 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(1\right) \le 0 \\ f'\left(x-1\right) \ge 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2008,8 \le 0 \\ f'\left(t\right) \ge 0, \forall t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2008,8 \\ f'\left(t\right) \ge 0, \forall t < 1 \end{cases}$

Xét $f'\left(t\right) \ge 0, \forall t < 1 \Leftrightarrow m \ge -t^4 + 2t + 1 = h\left(t\right), \forall t < 1 \Leftrightarrow m \ge 2,19$. Vậy $\left\{3; 4; ...; 2008\right\}$.

Vậy có 2006 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19: Chọn C

Đặt $t = f(x)$.

Nhận thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $x \in (-1;1)$ và $f(x) \in (-2;2), \forall x \in (-1;1)$.

Do đó yêu cầu bài toán dẫn đến bài toán tìm m để hàm số $y = \dfrac{mt+2021}{t+m}$ nghịch biến trên $(-2;2)$.

Điều kiện: $t + m \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -m$. Ta có: $y' = \dfrac{m^2-2021}{(t+m)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall t \in (-2;2) \\ -m \notin (-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2021 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} -m \geq 2 \\ -m \leq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2021} < m < \sqrt{2021} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2021} < m \leq -2 \\ 2 \leq m < \sqrt{2021} \end{array}\right.$.

Và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-44;-43;...;-2;2;3;...;44\}$. Vậy có 86 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 20: Chọn B

Đặt $t = \sqrt{3-x}$. Do $x \in (-6;2) \Rightarrow t \in (1;3)$.

Khi đó ta có $y = f(t) = \dfrac{t+2}{t+m}$ với $t \in (1;3)$ và $t \neq -m$. Ta có $y' = f'(t) = \dfrac{m-2}{(t+m)^2}$.

Mà hàm số $t = \sqrt{3-x}$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;2)$ nên để hàm số đã cho đồng biến trên $(-6;2) \Leftrightarrow$ hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên $(1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2<0 \\ -m \notin (1;3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2<0 \\ \left[\begin{array}{l} -m \leq 1 \\ -m \geq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq -1 \\ m \leq -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq m < 2 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10) \Rightarrow m \in \{-9;-8;-7;...;-4;-3;-1;0;1\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Chọn D

Trường hợp 1: Hàm số có một điểm cực trị $\Leftrightarrow m^2\left[-2(4m-1)\right] \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq \dfrac{1}{4} \\ m = 0 \end{array}\right.$.

Với $m = 0$, ta có $y = 2x^2 + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên đồng biến trên $(1;+\infty)$ nên nhận $m = 0$

.

Trường hợp 2: Hàm số có ba điểm cực trị sao cho ba điểm cực trị đó có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng 1.

$y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ m^2x^2 = 4m-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2} \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 điểm cực trị có giá trị nhỏ hơn bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m-1>0 \\ \dfrac{4m-1}{m^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-1>0 \\ \dfrac{4m-1}{m^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{-m^2+4m-1}{m^2} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2-\sqrt{3} \\ m \ge 2+\sqrt{3} \\ m \ne 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2+\sqrt{3}$$

Vậy để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $m \in \left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right] \cup \left(2+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 22: Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1-x}$. Với $x \in (-15;-3) \Rightarrow t \in (2;4)$.

Ta có $t' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0; \forall x \in (-15;-3)$ nên hàm số $t=\sqrt{1-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-15;-3)$

Khi đó, hàm số trở thành $y=f(t)=\dfrac{2t-14}{m-t}$, $t \in (2;4)$ và $t \ne m \Rightarrow f'(t)=\dfrac{2m-14}{(m-t)^2}$.

Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-15;-3)$ khi và chỉ khi hàm số $y=f(t)$ nghịch biến trên $(2;4) \Leftrightarrow f'(t)<0; \forall t \in (2;4) \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin (2;4) \\ 2m-14<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<7 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m \ge 4 \end{array}\right. \end{cases}$.

Mà m là số nguyên dương nên $m \in \{1;2;4;5;6\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 23: Chọn D

Ta có: $f'(x)=2x-1$ và $g(x)=(x^2+1)(x^2+2)=x^4+3x^2+2 \Rightarrow g'(x)=4x^3+6x$.

Suy ra:

$y'=\left[g(f(x))\right]'=g'(f(x)).f'(x)=(2x-1)\left(4f^3(x)+6f(x)\right)=(2x-1).f(x).\left[4f^2(x)+6\right]$

$\Rightarrow y' \ge 0, \forall x \ge 2 \Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x \ge 2$ (vì $2x-1>0, \forall x \ge 2$)

$\Rightarrow x^2-x+m \ge 0, \forall x \ge 2 \Leftrightarrow m \ge h(x)=-x^2+x, \forall x \ge 2$

$\Rightarrow m \ge \max\limits_{x \in [2;+\infty)} h(x)=-2$. Vậy $m \ge -2$.

Câu 24: Chọn A

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)=(x-3)(x-2)^2\left((3-x)^2+m(3-x)+9\right)$.

$g(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty) \Leftrightarrow g'(x) \ge 0, \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)^2+m(3-x)+9 \ge 0, \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow t^2+mt+9 \ge 0, \forall t \in (-\infty;0)$ (với $t=3-x$; $x \in (3;+\infty)$ ta có $t \in (-\infty;0)$).

$\Leftrightarrow m \le -t-\dfrac{9}{t}, \forall t \in (-\infty;0)$.

Ta có trên $(-\infty;0)$ ta có $-t$ và $-\dfrac{9}{t}$ đều là các số dương nên có $-t-\dfrac{9}{t}\ge 6$.

Vậy $m\le -t-\dfrac{9}{t},\forall t\in(-\infty;0)\Leftrightarrow m\le 6$.

Câu 25: Chọn C

Hàm số: $g(x)=f(1-x)$. Đặt $t=1-x\Rightarrow x=1-t$.

Khi đó: $g(x)=f(t)\Rightarrow g'(x)=f'(t)(1-t)'=-f'(t)$. (1)

Mặt khác, $g'(x)=(3-1+t)^{2021}(2+1-t)^{2022}\left[(1-t)^2+(m-2)(1-t)-3m+6\right]$.

$g'(x)=(3-1+t)^{2021}(2+1-t)^{2022}\left[(1-t)^2+(m-2)(1-t)-3m+6\right]$.

$g'(x)=(t+2)^{2021}(3-t)^{2022}\left(t^2-mt-2m+5\right)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Rightarrow -f'(t)=(t+2)^{2021}(3-t)^{2022}\left(t^2-mt-2m+5\right)$.

Vậy, $f'(x)=-(x+2)^{2021}(x-3)^{2022}\left(x^2-mx-2m+5\right)$.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow f'(x)\le 0\ \ \forall x\in(0;+\infty)$.

Do $-(x+2)^{2021}(x-3)^{2022}\le 0\ \forall x\in(0;+\infty)$ nên $f'(x)\le 0\Leftrightarrow x^2-mx-2m+5\ge 0\ \forall x\in(0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{x^2+5}{x+2}\ \ \forall x\in[0;+\infty)$.

Đặt $g(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$. Ta có: $m\le \dfrac{x^2+5}{x+2}\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[0;+\infty)} g(x)\Leftrightarrow m\le 2$.

Do m nguyên và $m\in(-5;5)$ nên có $m\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 7 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^4+2x^2+1$

Ta có $f'(x)=4x^3+4x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'(x)=f'\left(3|x-m|+m^2\right).\left(3|x-m|+m^2\right)'=f'\left(3|x-m|+m^2\right).\dfrac{3(x-m)}{|x-m|}$.

Giải phương trình: $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-m=0 & (1)\\ 3|x-m|+m^2=0 & (2)\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Nếu $m=0 \Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$ không thỏa mãn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên trường hợp này bị loại.

Trường hợp 2: Nếu $m>0 \Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=m$ (do phương trình (2) vô nghiệm)

Ta có $3|x-m|+m^2>0\ \forall x<1 \Rightarrow f'\left(3|x-m|+m^2\right)>0\ \forall x\in(-\infty;1)$ nên $g'(x)<0 \Leftrightarrow x<m$.

$\Rightarrow$ hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1) \Leftrightarrow g'(x)<0\,\forall x\in(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow (-\infty;1)\subset(-\infty;m) \Leftrightarrow 1\le m \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Câu 27: Chọn D

Ta có: $f'(x)=\begin{cases} x+3 & \text{khi } x\ge 0 \\ x^2+4x+3 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{3} \\ x=-3 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\dfrac{1}{3}$	↗	1	↗	$+\infty$

Suy ra: $g'(x)=2x.f'(x^2+m)$

Xét tên khoảng $(-1;0)$

Để hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ thì $f'(x^2+m)\le 0$

Do đó $-3\le x^2+m\le -1 \Leftrightarrow -x^2-3\le m\le -x^2-1;\forall x\in(-1;0)$

$\Leftrightarrow -3\le m\le -2;\forall x\in(-1;0) \Rightarrow m=\{-3;-2\}$

Thử lại:

Với $m=-3$ ta có: $-1<x<0 \Leftrightarrow 0<x^2<1 \Leftrightarrow -3<x^2-3<-2 \Rightarrow f'(x^2-3)\le 0,\forall x\in(-1;0)$

Suy ra hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ (đúng)

$+\,m=-2$

Ta có: $-1<x<0 \Leftrightarrow 0<x^2<1 \Leftrightarrow -2<x^2-2<-1 \Rightarrow f'(x^2-3)\le 0,\forall x\in(-1;0)$

Suy ra hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ (đúng)

Xét tên khoảng $[0;1)$

Thử lại:

Với $m=-3$ ta có: $0\le x<1 \Leftrightarrow 0\le x^2<1 \Leftrightarrow -3<x^2-3<-2 \Rightarrow f'(x^2-3)\le 0,\forall x\in[0;1)$

Suy ra hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ nghịch biến trên khoảng $[0;1)$ (không thỏa mãn)

Với $m=-2$ ta có: $0\le x<1 \Leftrightarrow 0\le x^2<1 \Leftrightarrow -2<x^2-2<-1 \Rightarrow f'(x^2-3)\le 0,\forall x\in[0;1)$

Suy ra hàm số $g(x)=f(x^2+m)$ nghịch biến trên khoảng $[0;1)$ (không thỏa mãn)

Ta thấy trên $[0;1)$ thì hàm số $g(x)$ nghịch biến với $m=-2$ và $m=-3$.

Vậy không có m nguyên để hàm số đồng biến trên $(-1;1)$

Câu 28: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x} \Rightarrow t'=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}<0 \ \ \forall \ t\in(-4;0)$

$\Rightarrow t$ nghịch biến trên $(-4;0) \Rightarrow t\in\left(0;4\sqrt{2}\right)$.

Khi đó bài toán trở thành tìm m nguyên dương để hàm số $g(t)=\dfrac{t^2+3t+m+2}{t+2}$ đồng biến trên $\left(0;4\sqrt{2}\right)$.

Ta có $g(t)=\dfrac{t^2+3t+m+2}{t+2} \Rightarrow g'(t)=\dfrac{t^2+4t+4-m}{(t+2)^2}=0 \Leftrightarrow t^2+4t+4-m=0 \Leftrightarrow (t+2)^2=m$

Do phương $m>0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x=-2\pm\sqrt{m}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biên trên $\left(-\infty;-2-\sqrt{m}\right)$ và $\left(-2+\sqrt{m};+\infty\right)$.

Để hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\left(0;4\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \left(0;4\sqrt{2}\right)\subset\left(-2+\sqrt{m};+\infty\right)$

$\Leftrightarrow -2+\sqrt{m}\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{m}\le 2 \Leftrightarrow m\le 4$.

Câu 29: Chọn D

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(x)>2, \forall x\in(0;3)$.

Mà $x^2>0, \forall x\in(0;3)$ nên $f(x)+x^2>2, \forall x\in(0;3)$.

Do đó: $f(x)+x^2>m, \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow m\le 2$.

Câu 30: Chọn A

$(x+1)^2\left[(x+1)f^3(x)+f(x)\right]>mx\left(m^2x^2+x+1\right)$

$\Leftrightarrow (x+1)^3f^3(x)+(x+1)^2f(x)-(mx)^3-mx(x+1)>0$

$\Leftrightarrow \left[(x+1)f(x)-mx\right]\left[(x+1)^2f^2(x)+(x+1)f(x).mx+(mx)^2\right]+(x+1)\left[f(x)(x+1)-mx\right]>0$

$\Leftrightarrow \left[(x+1)f(x)-mx\right]\left[(x+1)^2f^2(x)+(x+1)f(x).mx+(mx)^2+x+1\right]>0$

$\Leftrightarrow (x+1)f(x)-mx>0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)f(x)}{x}>m$

Vì $(x+1)^2f^2(x)+(x+1)f(x).mx+(mx)^2+x+1>0, \forall x\in[2;4]$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{(x+1)f(x)}{x}$, $x\in[2;4]$

$g'(x)=\dfrac{x(x+1)f'(x)-f(x)}{x^2}>0\ \ \forall x\in(2,4)$ vì $f'(x)>0, f(x)<0\ \forall x\in(2,4)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(2;4)$

x	2		4
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-15	$\nearrow$	-5

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\dfrac{(x+1)f(x)}{x}>m$ đúng với mọi $\forall x\in[2,4]$ khi và chỉ khi $m<-15$

Mà $m\in(-2021;2021)$ nên có 2005 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 31: Chọn C

Xét $x^6+6x^3y-7y^2+3x^3-3y=0$

$\Leftrightarrow\ (x^3)^2+6x^3y+9y^2+3(x^3+3y)=(4y)^2+12y \Leftrightarrow (x^3+3y)^2+3(x^3+3y)=(4y)^2+3.4y$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+3t$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t)=2t+3>0\ \ \forall t\in(0;+\infty) \implies f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vậy $(1)\Leftrightarrow x^3+3y=4y\ \Leftrightarrow\ x^3=y$.

Với $0<y<90\ \Leftrightarrow\ 0<x^3<90\ \Leftrightarrow\ 0<x<\sqrt[3]{90}\approx 4.48$.

Vì x là số nguyên dương nên $x\in\{1,2,3,4\}$.

Vậy có 4 cặp số (x,y) là $(1,1)$, $(2,8)$, $(3,27)$, $(4,64)$.

Câu 32: Chọn A

Đạo hàm: $f'(x)=5x^4+8mx^3+9x^2+8(m-1)x+1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra: $\begin{cases} f'(1)=5+8m+9+8(m-1)x+1\geq 0\\ f'(1)=5-8m+9-8(m-1)x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{7}{16}\leq m\leq\dfrac{23}{16}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{0;1\}$.

Thử lại:

Với $m=0\Rightarrow f'(x)=5x^4+9x^2-8x+1$ không thỏa mãn điều kiện lớn hơn hoặc bằng 0 với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $m=0$ không thỏa mãn.

Với $m=1\Rightarrow f'(x)=5x^4+8x^3+9x^2+1=x^2(5x^2+8x+9)+1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $m=1$ thỏa mãn

Vậy có 1 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)=|2x+m|+x^2-4x$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$?

A. 4043 **B.** 2028 **C.** 2033 **D.** 4045

Lời giải

Chọn A

Chia nghiệm trong trị tuyệt đối là $-\frac{m}{2}$ so với khoảng $(-2;1)$.

Trường hợp 1: $-\frac{m}{2}\le -2\Leftrightarrow m\ge 4\Rightarrow |2x+m|=2x+m$.

Suy ra: $f(x)=|2x+m|+x^2-4x=x^2-2x+m\Rightarrow f'(x)=2x-2\le 0,\forall x\in(-2;1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Trường hợp 2: $-\frac{m}{2}\ge 1\Leftrightarrow m\le -2\Rightarrow |2x+m|=-2x-m$.

Suy ra: $f(x)=|2x+m|+x^2-4x=x^2-6x-m\Rightarrow f'(x)=2x-6\le 0,\forall x\in(-2;1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Trường hợp 3: $-\frac{m}{2}\in(-2;1)\Leftrightarrow m\in(-2;4)\Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^2-6x-m & neu\ x\in\left(-2;-\frac{m}{2}\right] \\ f(x)=x^2-2x+m & neu\ x\in\left(-\frac{m}{2};1\right] \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} f'(x)=2x-6\le 0 & neu\ x\in\left(-2;-\frac{m}{2}\right] \\ f'(x)=2x-2\le 0 & neu\ x\in\left(-\frac{m}{2};1\right] \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3,\forall x\in\left(-2;-\frac{m}{2}\right] \\ \forall m \end{cases}\Leftrightarrow \forall m.$

Kết hợp với điều kiện của trường hợp là $m\in(-2;4)$ thì $-2<m<1$.

Kết hợp cả 3 trường hợp $\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\,m\in[-2022\,;2022]}-2022\le m\le 2022$.

Vậy có 4045 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)-2m.f(x)$ với $u=f(x)=x^2-2x\Rightarrow u'=f'(x)=2x-2$

Đạo hàm: $g'(x)=2.f'(x).\left(f(x)-m\right)$

Để hàm số nghịch biến trên $[1;3]$ thì $g'(x)=2.f'(x).\left(f(x)-m\right)\le 0,\forall x\in[1;3]$.

Nhận thấy khi $x\in[1;3]$ thì $f'(x)>0$.

Suy ra $f(x)-m\le 0\Leftrightarrow f(x)\le m\Leftrightarrow x^2-2x\le m,\forall x\in[1;3]$

Suy ra: $m\ge 3\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},\,m\in[-2021;2012]}3\le m\le 2012$. Vậy có 2010 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 35: Chọn D

Xét hàm số trên khoảng $(-3;2)$

Ta có: $f(x)=\begin{cases} -x^2+1+mx-m+1 & neu\ -1<x<1 \\ x^2-1+mx-m+1 & neu\ \left[\begin{array}{l} -3<x\le -1 \\ 1\le x<2 \end{array}\right. \end{cases}$

Đạo hàm của hàm số: $f'(x)=\begin{cases} -2x+m & neu\ -1<x<1 \\ 2x+m & neu\ \left[\begin{array}{l} -3<x<-1 \\ 1<x<2 \end{array}\right. \end{cases}$

Không xét đạo hàm tại $x=\pm 1$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3;2)$ thì $f'(x)\ge 0,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;2)\cup(-1;1)$

Suy ra: $\begin{cases}-2x+m\ge 0,\forall x\in(-1;1)\\ 2x+m\ge 0,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 2x,\forall x\in(-1;1)\\ m\ge -2x,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;2)\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}m\ge 2x,\forall x\in(-1;1)\\ m\ge -2x,\forall x\in(-3;-1)\cup(1;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 2\\ m\ge 6\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-2023;2023]}6\le m\le 2023$

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 36: Chọn B

Lập bảng xét hàm:

x	$-\infty$ 1	2 5	6 9	$+\infty$
$f(x)$	$(-3-m)x+15$	$(-1-m)x+13$	$(1-m)x+3$	$(3-m)x-15$
$f'(x)$	$-3-m$	$-1-m$	$1-m$	$3-m$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$
y				

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;6)$ thì $-1-m>0\Leftrightarrow m<-1$.

Xét trường hợp $m=-1$ thì hàm số sẽ có giá trị không đổi trên đoạn $[2;5]$ nên không thỏa mãn

Vậy suy ra $-2022\le m\le -2\Rightarrow$ Có 2021 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 37: Chọn D

Ta có: $g(x)=\left[f\left(x^2-4\right)\right]'=2xf'\left(x^2-4\right)$

Dựa trên đồ thị ta có $g(x)=kx(x-1)(x+1)=kx\left(x^2-1\right)$; $k>0$

Vì vậy, $f'\left(x^2-4\right)=\dfrac{k}{2}\left(x^2-1\right)$; $k>0$. Đặt $t=x^2-4,t\ge -4$, ta có $f'(t)=\dfrac{k}{2}(t+3)$; $k>0$

Phương trình đạo hàm: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-3$. Bảng xét dấu

t	-4		-3		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	

Hàm số $h(x)=f\left(x^2+x+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$ khi

$h'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)>0,\forall x\in(0;1)$ mà $2x+1>0,\ \forall x\in(0;1)$ nên

$h'(x)>0,\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow f'\left(x^2+x+m\right)>0,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow x^2+x+m>-3,\ \forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow m>-x^2-x-3,\ \forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right)=-3$ vì $\max\limits_{x\in[0;1]}\left(-x^2-x-3\right)=-3$ tại $x=0$

Kết luận: Có 3 giá trị nguyên âm của m thỏa đề là $m=-1;-2;-3$.

Câu 38: Chọn A

$g(x)=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2\left(-x^3-3x+m-3\right)$

$=3f\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^3-6\left(-x^3-3x+m\right)^2$

Ta có

$g'(x)=-9\left(x^2+1\right)f'\left(-x^3-3x+m\right)-18\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)^2+36\left(x^2+1\right)\left(-x^3-3x+m\right)$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$

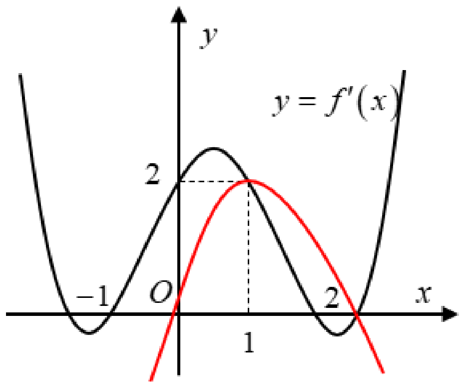
$g'(x)\le 0\ \forall x\in(-1;2)\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)+2\left(-x^3-3x+m\right)^2-4\left(-x^3-3x+m\right)\ge 0\ \forall x\in(-1;2)$

$\Leftrightarrow f'\left(-x^3-3x+m\right)\ge -2\left(-x^3-3x+m\right)^2+4\left(-x^3-3x+m\right)\ \forall x\in(-1;2)$

Đặt $t=-x^3-3x+m$. Với $x\in(-1;2)$ có $t'=-3x^2-3<0\ \forall x\in(-1;2)\Rightarrow t\in(m-14;m+4)$

Xét bất phương trình (1) $f'(t)\ge -2t^2+4t \quad (1)$

Đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t^2+4t$ trên cùng hệ trục tọa độ:



Để (1) luôn đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ \left[\begin{array}{l} t\le 1 \\ t\ge 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ t\le 1\end{cases} \\ \begin{cases} t\in(m-14,m+4) \\ t\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+4\le 1 \\ m-14\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -3 \\ m\ge 16\end{array}\right.$.

Do $m\in[-20;20]$ nên số giá trị của m là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$.

Câu 39: Chọn A

Xét hàm số $g(x)=|f(x)|=\left|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1\right|$ có $f'(x)=3x^2-6mx-3(m+2)$

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3) \\ \begin{cases} f(x)\le 0 \\ f'(x)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0)\ge 0 \\ 3x^2-6mx+3(m+2)\ge 0\end{cases},\forall x\in(0;3) \\ \begin{cases} f(0)\le 0 \\ 3x^2-6mx+3(m+2)\le 0\end{cases},\forall x\in(0;3)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m-2\geq 0\\ m\leq \dfrac{x^2-2}{2x+1},\forall x\in(0;3)\end{cases}\\ \begin{cases}-m-2\leq 0\\ m\geq \dfrac{x^2-2}{2x+1},\forall x\in(0;3)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\leq -2\\ m\leq -2\end{cases}\\ \begin{cases}m\geq -2\\ m\geq 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\leq -2\\ m\geq 1\end{array}\right..$$

Vì $m\in[-2021;2021]\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2021\leq m\leq -2\\ 1\leq m\leq 2021\end{array}\right.$

Vậy có tất cả 4041 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 40: Chọn B

Ta đặt: $y=g(x)=f(2x-1)-4x^3+15x^2-18x+1$.

$\Rightarrow g'(x)=6f'(2x-1)-12x^2+30x-18=6\left[f'(2x-1)-2x^2+5x-3\right]$.

Có $f'(2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=1\\ 2x-1=2\\ 2x-1=3\\ 2x-1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3}{2}\\ x=2\\ x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right..$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0		?	$-$		?		?		?	

Từ đó, ta có bảng xét dấu như sau:

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 41: Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+3)f'(x^2+3x-4)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi

$(2x+3)f'(x^2+3x-4)\geq 0,\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+3x-4)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-4)^2(x^2+3x)\left[(x^2+3x-4)^2+2m(x^2+3x-4)+9\right]\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)(1)$

Đặt $t=x^2+3x-4\ (t>0)$ do $x\in(1;+\infty)$

$(1) \Rightarrow t^2(t+4)\left(t^2+2mt+9\right) \ge 0, \forall t>0 \Leftrightarrow t^2+2mt+9 \ge 0, \forall t>0$

$\Leftrightarrow m \ge -\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{9}{t}\right), \forall t>0 \Leftrightarrow m \ge -3$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-3;-2;-1\}$.

Câu 42: Chọn D

Ta có $h(x)=g\left[f(x)\right] \Rightarrow h'(x)=g'\left[f(x)\right].f'(x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g'\left[f(x)\right]=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3f^2(x)+10f(x)-2020=0\,(vn) \\ -4x^3-\left(4-m^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^3=\dfrac{m^2-4}{4} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{m^2-4}{4}}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{\dfrac{m^2-4}{4}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $\sqrt[3]{\dfrac{m^2-4}{4}} \le 2 \Leftrightarrow -6 \le m \le 6$.

Vậy có 6 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 43: Chọn C

Ta có: $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2) \Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$.

Khi đó: $f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$. Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4).f'\left(x^2+4x+7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4=0 \\ f'\left(x^2+4x+7\right)=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+4x+7=3 \\ x^2+4x+7=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ (x+2)^2=0 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 44: Chọn B

Đặt $u = x^3 - 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) = f\left(x^3 - 3x - 1\right) \Rightarrow g'(x) = \left(3x^2 - 3\right) f'\left(x^3 - 3x - 1\right)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x - 1 = -1 \\ x^3 - 3x - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
u'		+	|	+	0	−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$f'(u)$		+	0	−	0	−	0	+	0	+	0	−	0	+	
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};-1\right), (0;1), \left(\sqrt{3};2\right)$.

Vậy giá trị của biểu thức $\left(a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2\right) = 12$

Câu 45: Chọn C

Cách 1: Tập xác định của hàm số $f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$ là $[-2;2]$

Đạo hàm: $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} f'\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right)$

Hàm số đồng biến thì $g'(x) \geq 0$. Từ tập xác định ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (0;2) \\ f'\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;0) \\ f'\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (0;2) \\ \left[\begin{array}{l} -3 \leq 4 - \sqrt{4 - x^2} \leq 1 \\ 4 - \sqrt{4 - x^2} \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;0) \\ \left[\begin{array}{l} 1 \leq 4 - \sqrt{4 - x^2} \leq 4 \\ 4 - \sqrt{4 - x^2} \leq -3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (0;2) \\ \left[\begin{array}{l} 4 - \sqrt{4 - x^2} \leq 1 \\ VN \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;0) \\ \left[\begin{array}{l} 1 \leq 4 - \sqrt{4 - x^2} \\ VN \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (0;2) \\ \sqrt{4 - x^2} \geq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;0) \\ \sqrt{4 - x^2} \leq 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (0;2) \\ VN \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;0) \\ \forall x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-2;0).$$

Cách 2: Ghép trục để tối ưu. $g(x) = f\left(4 - \sqrt{4 - x^2}\right) = f(u), u = 4 - \sqrt{4 - x^2}$, với $x \in [-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-2		0		2
u	4	$\longleftarrow$	2	$\longrightarrow$	4
$f(u)$	$\bullet$	$\nearrow$	$\bullet$	$\searrow$	$\bullet$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 46: Chọn D

Cách 1:

Tập xác định của hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ là $D=[-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}}f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x)\le 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ -1\le -1+\sqrt{7+6x-x^2}\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \left[\begin{array}{l}-1+\sqrt{7+6x-x^2}\le -1\\ -1+\sqrt{7+6x-x^2}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\ge 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \left[\begin{array}{l}x\le 3-\sqrt{7}\\ x\ge 3+\sqrt{7}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ 3-\sqrt{7}\le x\le 3+\sqrt{7}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le 3-\sqrt{7}\\ 3<x\le 3+\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục

$g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)=f(u)$ với $u=-1+\sqrt{7+6x-x^2}$ và $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-1	$3-\sqrt{7}$		3		$3+\sqrt{7}$	7
u	-1	2	$\longleftarrow$	3	$\longrightarrow$	2	4
$f(u)$	$\bullet$ $\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$	$\bullet$	$\searrow$	$\bullet$	$\nearrow$ $\bullet$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$.

Câu 47: Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x^3+m)$ có biểu thức đạo hàm:

$$g'(x)=3x^2.f'(x^3+m)=3x^2.(x^3+m)(x^3+m-2)(x^3+m+1)$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{m+1}$		$-\sqrt[3]{m}$		$-\sqrt[3]{m-2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì ta phải có: $\sqrt[3]{m-2}\le 1 \Leftrightarrow m\ge 1 \Leftrightarrow m\in[1;+\infty)$

Câu 48: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2x-m)\Rightarrow g'(x)=2(x-1).f'(x^2-2x-m)$

Với $\forall x\in(1;3)\Rightarrow x-1\ge 0$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$ thì:

$$g'(x)=2(x-1).f'(x^2-2x-m)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x^2-2x-m)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-m\ge 3 \\ -3\le x^2-2x-m\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le x^2-2x-3 \\ x^2-2x-1\le m\le x^2-2x+3 \end{array}\right., \forall x\in(1;3)$$

Suy ra với $\forall x\in(1;3)$ ta có:

$$\left[\begin{array}{l} m\le \min(x^2-2x-3) \\ \max(x^2-2x-1)\le m\le \min(x^2-2x+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 4 \\ 2\le m\le 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -20\le m\le -4 \\ m=2 \end{array}\right.$$

Do đó có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 49: Chọn D

Ta có $f'(x)=3(m-1)x^2-6(m^2+m-1)x+3(m-1)$

Hàm số luôn nghịch biến trên $(a;b)$ nên

$$f'(x)=3(m-1)x^2-6(m^2+m-1)x+3(m-1)\le 0 \ \forall x\in(a;b)$$

$$\Rightarrow (m-1)x^2-2(m^2+m-1)x+(m-1)\le 0 \ \forall x\in(a;b)$$

$$\Rightarrow -2xm^2+(x^2-2x+1)m-x^2+2x-1\le 0 \ \forall x\in(a;b)$$

$$\Rightarrow 2xm^2-(x^2-2x+1)m+x^2-2x+1\ge 0 \ \forall x\in(a;b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \Delta=(x-1)^4-8x(x-1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x-1)^2(x^2-10x+1)\le 0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[5-2\sqrt{6};5+2\sqrt{6}\right]$$

$$\Rightarrow (b-a)_{\max}=5+2\sqrt{6}-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$$

Câu 50: Chọn C

Hàm số luôn đồng biến trên $\left[a;b\right]$ suy ra

$f'\left(x\right)=12m^2x^3-24mx^2+12x+12\left(2m-1\right)\ge 0\ \forall x\in\left[a;b\right]$

$\Leftrightarrow m^2x^3-2mx^2+x+\left(2m-1\right)\ge 0\ \forall x\in\left[a;b\right]$

$\Leftrightarrow m^2x^3+\left(2-2x^2\right)m+x-1\ge 0\ \forall x\in\left[a;b\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta=\left(1-x^2\right)^2-x^3\left(x-1\right)=\left(x-1\right)\left(x^2-x-1\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1\le x\le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $1\le a\le b\le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \left(2b-a\right)_{\max}=\sqrt{5}$.

Câu 51: Chọn C

Tập xác định của hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ là $D=\{x\in R|\ f(x)\ne -m\}$

Để khoảng $(1;4)\subset D\to$ phương trình $f(x)=-m$ phải không có nghiệm $x\in(1;4)$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} -m\ge 4 \\ -m\le -2 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ m\ge 2 \end{array}\right.\quad (1)$

Đạo hàm: $y'=g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}$; Để ý rằng trên luôn có $f'(x)>0$

Để hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+5}{f(x)+m}$ nghịch biến trên thì:

$g'(x)=f'(x)\cdot\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0$ với $\forall x\in(1;4)$

Suy ra: $\dfrac{m-5}{\left(f(x)+m\right)^2}<0\Leftrightarrow m-5<0\Leftrightarrow m<5\quad\left(2\right)$

Kết hợp $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ và điều kiện m nguyên $m\in\left[-20;2021\right)$.

Ta suy ra: $\left[\begin{array}{l} -20\le m\le -4 \\ 2\le m<5 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -20\le m\le -4 \\ 2\le m\le 4 \end{array}\right.$. Có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 52: Chọn A

Ta có: $g'\left(x\right)=2\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x-m\right)$

Để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3x-m\right)$ nghịch biến trên$\left(-1;2\right)$ thì

$g'\left(x\right)=2\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\forall x\in\left(-1;2\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\forall x\in\left(-1;1\right) \\ 2\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x-m\right)\le 0,\forall x\in\left(1;2\right) \end{cases}\quad\left(1\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f'\left(x^2-2x-m\right) \ge 0, \forall x \in (-1;1) \\ f'\left(x^2-2x-m\right) \le 0, \forall x \in (1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x-m \ge 3 \\ -3 \le x^2-2x-m \le 1 \end{array}\right., \forall x \in (-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} 1 \le x^2-2x-m \le 3 \\ x^2-2x-m \le -3 \end{array}\right., \ \forall x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x \ge m+3 \\ m-3 \le x^2-2x \le m+1 \end{array}\right., \forall x \in (-1;1) \\ \left[\begin{array}{l} m+1 \le x^2-2x \le m+3 \\ x^2-2x \le m-3 \end{array}\right., \ \forall x \in (1;2) \end{cases} (2)$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x \Rightarrow h'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $\forall x \in (-1;1) \Rightarrow h'(x) = 2x - 2 < 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(-1) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 3, \forall x \in (-1;1)$

Với $\forall x \in (1;2) \Rightarrow h'(x) = 2x - 2 > 0 \Rightarrow h(1) < h(x) < h(2) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 0, \forall x \in (1;2)$

Câu 53: Chọn C

Xét hàm số $g(x) = |f(x)| = \left|x^2 - 4mx + m - 3\right|$ có $f'(x) = 2x - 4m$

Để hàm số nghịch biến trên $(1;3)$ thì $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f'(x) = 2x - 4m \le 0 \end{cases}, \forall x \in (-2;-1) \\ \begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f'(x) = 2x - 4m \ge 0 \end{cases}, \forall x \in (-2;-1) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5m-2 \ge 0 \\ m \ge \dfrac{x}{2} \end{cases}, \forall x \in (-2;-1) \\ \begin{cases} 5m-2 \le 0 \\ m \le \dfrac{x}{2} \end{cases}, \forall x \in (-2;-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \ge \dfrac{2}{5} \\ m \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m \le \dfrac{2}{5} \\ m \le -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{2}{5} \\ m \le -1 \end{array}\right. \xrightarrow[m \in Z, m \in [-40;40]]{} \left[\begin{array}{l} 1 \le m \le 40 \\ -40 \le m \le -1 \end{array}\right..$$

Vậy có 80 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 54: Chọn A

Với $x > 1$, ta có $g(x) = 2f(x-1) - (x-1)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x - 1 \qquad (*)$.

Đặt $t = x - 1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) > t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < t < 3 \\ t < -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x < 0 \quad (loai) \end{array}\right.$.

Với $x < 1$, ta có $g(x) = 2f(1-x) - (1-x)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1 - x \qquad (**)$.

Đặt $t = 1 - x$, khi đó $(**) \Leftrightarrow f'(t) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2), (0;1), (2;4)$.

Câu 55: Chọn B

Xét hàm số $y = f(2x-1) \Rightarrow \left(f(2x-1)\right)' = 2f'(2x-1)$ nghịch biến khi $f'(x) < 0$

$\Leftrightarrow \left(f(2x-1)\right)' = 2.f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x-1 < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Xét hàm số $y = g(ax+b) \Rightarrow \left(g(ax+b)\right)' = a.g'(ax+b)$ nghịch biến khi xảy ra hai trường hợp

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ g'(ax+b)<0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ g'(ax+b)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \left[\begin{array}{l}ax+b<0\\ ax+b>2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ 0<ax+b<2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-b}{a}\\ x>\dfrac{2-b}{a}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ -\dfrac{b-2}{a}<x<-\dfrac{b}{a}\end{cases}\end{array}\right.$$

Nếu $a>0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{a}\right);\left(\dfrac{2-b}{a};+\infty\right)$ không thỏa mãn điều kiện có khoảng nghịch biến là $(1;2)$.

Nếu $a<0$ thì hàm số $y = g(ax+b)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b-2}{a};\dfrac{-b}{a}\right)$

Yêu cầu bài toán là hai hàm số $y = f(2x-1)$, $y = g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến lớn nhất nên $\begin{cases}-\dfrac{b-2}{a}=1\\ \dfrac{-b}{a}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases} \Rightarrow 4a+b=-4$.

Câu 56: Chọn C

$$g'(x) = \frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2} = \frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

Câu 57: Chọn B

Đặt $g(x) = \left|4f(\sin x)+\cos 2x - a\right| \Rightarrow g(x) = \sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\left[4\cos x.f'(\sin x) - 2\sin 2x\right]\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]}{\sqrt{\left[4f(\sin x)+\cos 2x-a\right]^2}}.$$

Ta có $4\cos x.f'(\sin x) - 2\sin 2x = 4\cos x\left[f'(\sin x)-\sin x\right]$.

Với $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0, \sin x \in (0;1) \Rightarrow f'(\sin x) - \sin x < 0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x) + \cos 2x - a \ge 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x) + 1 - 2\sin^2 x \ge a, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \sin x$ được $4f(t) + 1 - 2t^2 \ge a, \forall t \in (0;1)$.

Xét $h(t) = 4f(t) + 1 - 2t^2 \Rightarrow h'(t) = 4f'(t) - 4t = 4\left[f'(t) - 1\right]$.

Với $t \in (0;1)$ thì $h'(t) < 0 \Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó $\Leftrightarrow a \le h(1) = 4f(1) + 1 - 2.1^2 = 3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của *a* thỏa mãn.

Câu 58: Chọn B

Ta có: $y' = 9mx^8 + 6\left(m^2 - 3m + 2\right)x^5 + 4\left(2m^3 - m^2 - m\right)x^3$

$= x^3\left(9mx^5 + 6\left(m^2 - 3m + 2\right)x^2 + 4\left(2m^3 - m^2 - m\right)\right)$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác ta thấy $y' = 0$ có nghiệm bội lẻ $x = 0$, do đó để $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $9mx^5 + 6\left(m^2 - 3m + 2\right)x^2 + 4\left(2m^3 - m^2 - m\right) = 0$ có nghiệm $x = 0$

$$\Rightarrow 2m^3 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \\ m = 0 \end{array}\right..$$

Thử lại:

Với $m = 0 \Rightarrow y' = 12x^5$.

Với $m = 1 \Rightarrow y' = 9x^8 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y' = -\frac{9}{2}x^8 + \frac{45}{2}x^5$.

Vậy có 1 giá trị của m.

Câu 59: Chọn B

Ta có: $f(x) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - \left(m^2 - m - 20\right)x + 1$.

$\Rightarrow f'(x) = 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = x^2, t \ge 0$ ta có: $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 \ge 0$ $(*)$, $\forall t \ge 0$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m = 0$: khi đó bpt $(*)$ trở thành $20 \ge 0$. Nên $m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ m^2 - m - 12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ -3 \le m \le 4 \end{cases}$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < -3 \end{array} \right.$.

Khi đó: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{m} < 0 \\ \dfrac{-m^2 + m + 20}{2m^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m + 20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-4 \leq m < -3$

Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\left[\begin{array}{l} -3 \leq m \leq 4 \\ -4 \leq m < -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Câu 60: Chọn C

Hàm số $g(x)$ là hàm số bậc 3 nên có dạng:

$g(x) = \left(f(2-x)\right)' = a(x+4)(x-1)(x-4), a > 0 \Rightarrow f'(2-x) = -a(x+4)(x-1)(x-4)$

Đặt $t = 2 - x \Rightarrow f'(t) = a(t-6)(t+2)(t-1)$

Đạo hàm của hàm số $y = f(x^2+2) - x^3 + 2x^2 - x + 2021$ là

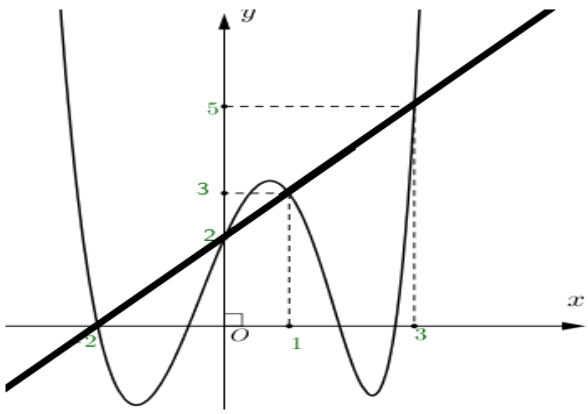
$$y' = 2xf'(x^2+2) - 3x^2 + 4x - 1 = 2ax(x^2-4)(x^2+4)(x^2+1) + \left[-3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$2xf'(x^2+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x^2+4x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu trên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 61: Chọn B



Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2-4) - 2x^2 = 2x\left[f'(x^2-4) - x\right]$. Đặt $t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2$

Suy ra: $g'(t)=2(t+2)\left[f'\left(t^2+4t\right)-t-2\right]$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(t^2+4t\right)=t+2 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\left[\begin{array}{l} t<0 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2<0 \\ 1<x-2<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ 3<x<5 \end{array}\right.$

Câu 62: Chọn C

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-2\right)$, dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ do đó

$f'\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ và do đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Xét $g(x)=f\left(x^3-3x+3\right)$ ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+3\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(3x^2-3\right)=0 \\ f'\left(x^3-3x+3\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x+3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên $(1;\,2)$.

CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tìm cực trị của hàm hợp

- **Bài toán:** Cho hàm số $y=f(x)$ có các điểm cực trị x_i *(Đề có thể cho bằng hàm tường minh, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x)$ hoặc $f'(x)$)*. Yêu cầu chúng ta tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x.
- Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$
  - **Bước 1.** Tính đạo hàm $y'=u'.f'(u)$
  - **Bước 2.** Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'=0 \\ f'(u)=0 \end{array}\right.$
  - **Bước 3**.Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Cách đếm nhanh số điểm cực trị của hàm hợp f(u)

- Đạo hàm $y'=u'.f'(u)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'=0 \\ f'(u)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u'=0 & (1) \\ u=x_i & (2) \end{array}\right.$
- Số điểm cực trị của hàm số $y=f(u)$ là số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình (1) và (2)
- Số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình (1) là số điểm cực trị của $u(x)$.
- **Suy ra:** Số điểm cực trị của $f(u)$ = Số điểm cực trị của u + $SNBL\{u=x_i\}$

2. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

- **Bài toán**: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị
- Áp dụng định nghĩa, ta có: $y=|f(x)| \Rightarrow y'=\dfrac{f(x).f'(x)}{|f(x)|}$
- Cho $y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=0 & (1) \\ f'(x)=0 & (2) \end{array}\right.$
- Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm tương ứng là $f'(x) = (x+3)(x+1)(x-1)$. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = (2x-2).f'(x^2 - 2x)$.

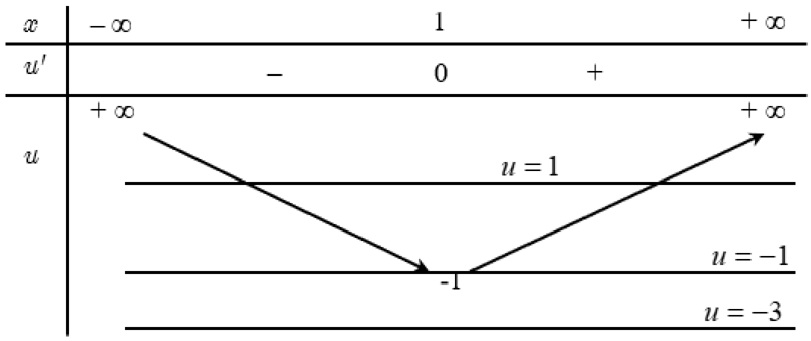
Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -3 (vo\ nghiem) \\ x^2 - 2x = -1\ (nghiem\, kep) \\ x^2 - 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị

Cách 2: Công thức đếm nhanh số điểm cực trị

Xét hàm số $y = f(u) = f(x^2 - 2x)$ với $u = x^2 - 2x$

Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$ như sau:



Công thức đếm nhanh: $SDCT\{f(u)\} = SDCT\{u\} + SNBL\left\{\left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = -1 \\ u = -3 \end{array}\right.\right\} = 1 + 2 = 3$.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?.

A. 16. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Cách 1: Phương pháp truyền thống

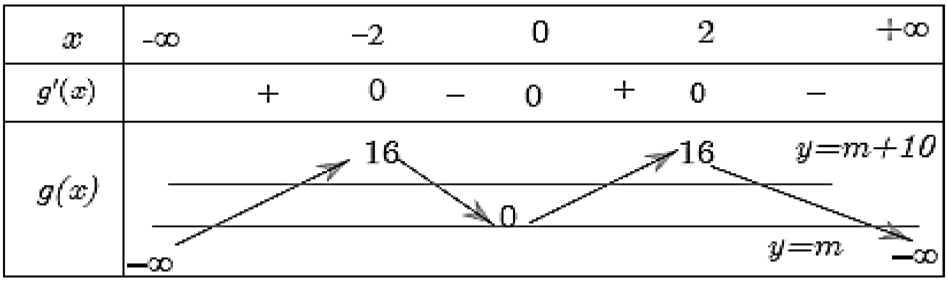
Ta có $f'(x) = x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -10 \end{array}\right.$.

Khi đó $y' = (4x^3 - 16x) f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ x^4-8x^2+m=0 \\ x^4-8x^2+m=-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \\ m=-x^4+8x^2 \quad (1) \\ m+10=-x^4+8x^2 \, (2) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=-x^4+8x^2$. Ta có $g'(x)=-4x^3+16x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm hoặc ba nghiệm trong đó có 1 nghiệm bằng 0 và (2) có 4 nghiệm phân biệt. Do đó dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)=-x^4+8x^2$ ta có

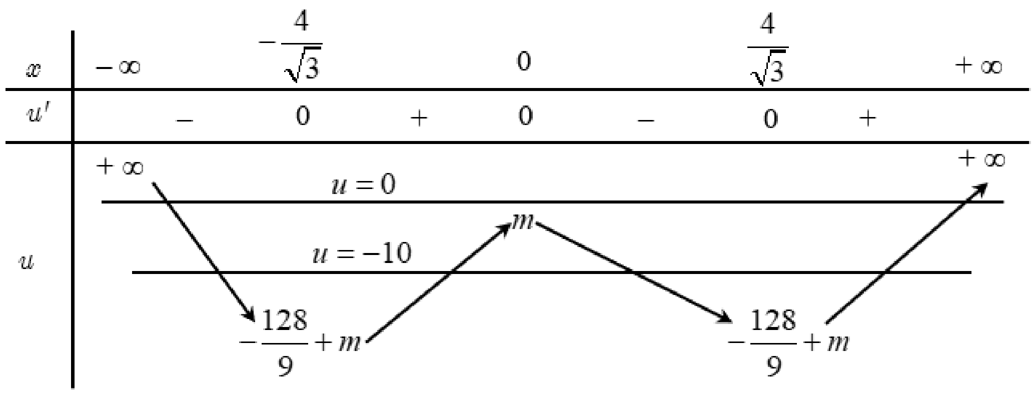
$$\begin{cases} 0<m+10<16 \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10<m<6 \\ m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10<m\le 0.$$ Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-9;-8;\cdots;-1;0\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên m.

Cách 2: Công thức đếm nhanh số điểm cực trị

Xét hàm số $y=f(u)=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ với $u=x^4-8x^2+m$

Bảng biến thiên hàm số $u=x^4-8x^2+m$ như sau:



$$SDCT\{f(u)\}=SDCT\{u\}+SNBL\left\{\left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=-10 \end{array}\right.\right\} \Leftrightarrow SNBL\left\{\left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=-10 \end{array}\right.\right\}=9-3=6.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ -\dfrac{128}{9}+m<-10<m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ -10<m<\dfrac{38}{9} \end{cases} \Leftrightarrow -10<m\le 0$

CÂU 3. Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=3\end{array}\right.$, $x=2$ là nghiệm kép nên khi qua giá trị $x=2$ thì $f'(x)$ không đổi dấu.

Đặt $g(x)=f(x^2-10x+m+9)$ khi đó $g'(x)=f'(u).(2x-10)$ với $u=x^2-10x+m+9$.

Nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-10=0\\(x^2-10x+m+9-2)^2=0\\x^2-10x+m+9=1\\x^2-10x+m+9=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\(x^2-10x+m+9-2)^2=0\\h(x)=x^2-10x+m+8=0\ (1)\\p(x)=x^2-10x+m+6=0\ (2)\end{array}\right.$

Hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1'>0\\\Delta_2'>0\\h(5)\neq0\\p(5)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17-m>0\\19-m>0\\-17+m\neq0\\-19+m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<17$.

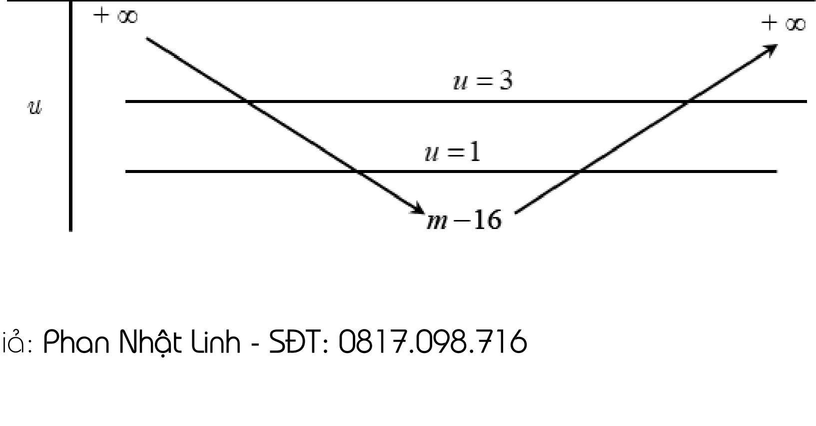
Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Cách 2: Phương pháp đếm nhanh số điểm cực trị

Xét hàm số $y=f(u)=y=f(x^2-10x+m+9)$ với $u=x^2-10x+m+9$

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\,(nghiem\ kep)\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $u=x^2-10x+m+9$ như sau:



$SDCT\left\{f\left(u\right)\right\}=SDCT\left\{u\right\}+SNBL\left\{\begin{bmatrix}u=1\\u=3\end{bmatrix}\right\}\Leftrightarrow SNBL\left\{\begin{bmatrix}u=0\\u=3\end{bmatrix}\right\}=5-1=4$.

Yêu cầu bài toán $\begin{cases}m-16<1\\m-16<3\end{cases}\Leftrightarrow m-16<1\Leftrightarrow m<17$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

CÂU 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)^2\left(x-1\right)\left(x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-1\right)$,$\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

LỜI GIẢI

Chọn C

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=1\\x=2.\\x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-1=0\ \ (*)\end{array}\right.$

Có $x=2$ là nghiệm bội 2, $x=1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq1$, có một nghiệm $x\leq0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x=0$ khi đó $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-1=0\Leftrightarrow m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm1$

Với $m=1$, có $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-1=0\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=4\end{bmatrix}$ $\left(\text{TM}\right)$

Với $m=-1$, có $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-1=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$ (Loại)

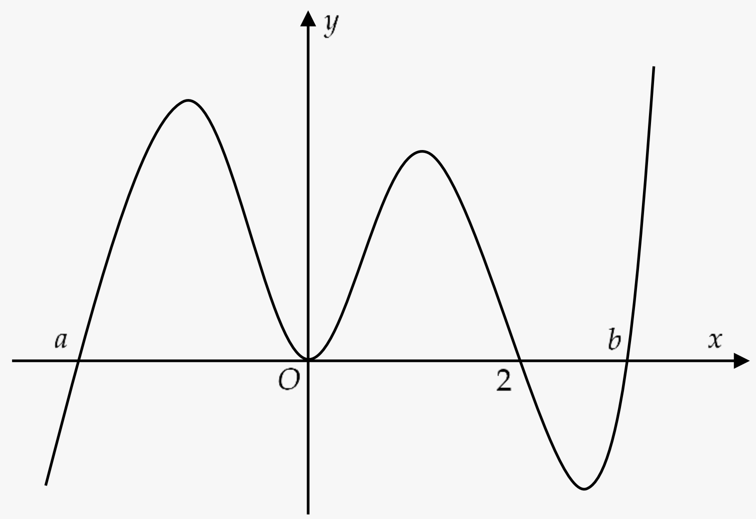
Trường hợp 2: $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x\neq1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases}m^2-1<0\\1^2-2\left(m+1\right).1+m^2-1\neq0\end{cases}\begin{cases}m\in\left(-1;1\right)\\m\neq1\pm\sqrt{3}\end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

CÂU 5. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f\left(\left|x^2 - 4x + 2\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 . **B.** 11 . **C.** 9 . **D.** 15 .

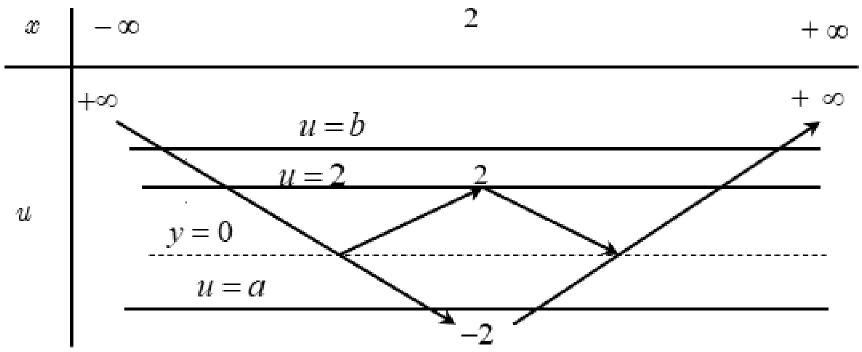
✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a < 0 \\ x = 0\ (khong\,doi\,dau) \\ x = 2 \\ x = b > 2 \end{array}\right.$

Xét hàm số $y = f(u) = f\left(\left|x^2 - 4x + 2\right|\right)$ với $\left|x^2 - 4x + 2\right|$

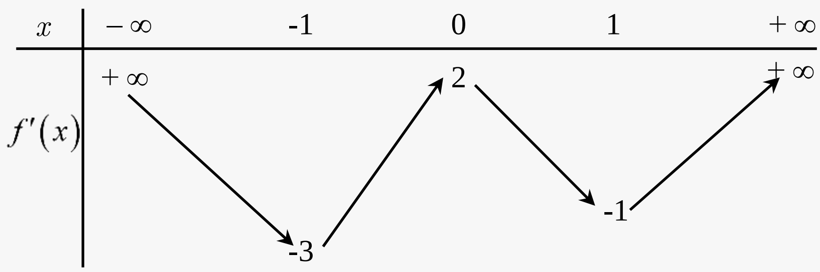
Bảng biến thiên của $u = \left|x^2 - 4x + 2\right|$ như sau:



$$SDCT\left\{f(u)\right\} = SDCT\left\{u\right\} + SNBL\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} u = a < 0 \\ u = 2 \\ u = b > 0 \end{array}\right.\end{array}\right\} = 3 + 4 = 7 .$$

Vậy hàm số có 7 điểm cực trị.

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ là:

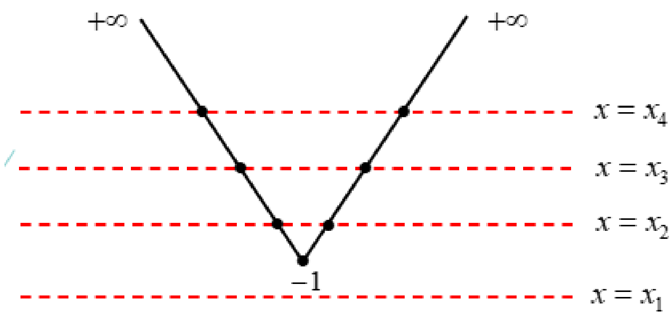
A. 9 . **B.** 3 . **C.** 7 . **D.** 5 .

✍ LỜI GIẢI

Sơ đồ V: Bản chất của sơ đồ V trong việc đếm số điểm cực trị của hàm hợp dựa trên công thức tính nhanh đã được trình bày ở các ví dụ trước.

Từ đồ thị, ta thấy phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-\infty;-1) \\ x = x_2 \in (-1;0) \\ x = x_3 \in (0;1) \\ x = x_4 \in (1;+\infty) \end{array}\right.$

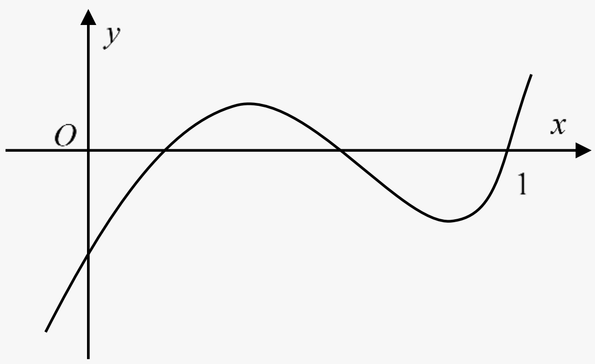
Vẽ bảng biến thiên hoặc dạng đồ thị của $u(x) = x^2 - 2x$



Từ sơ đồ V, các đường thẳng $x = x_2, x_3, x_4$ cắt dạng đồ thị của hàm $u(x)$ tại 6 điểm nên phương trình $u = x_i$ có 6 nghiệm đơn. Mặt khác $u(x)$ có một điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



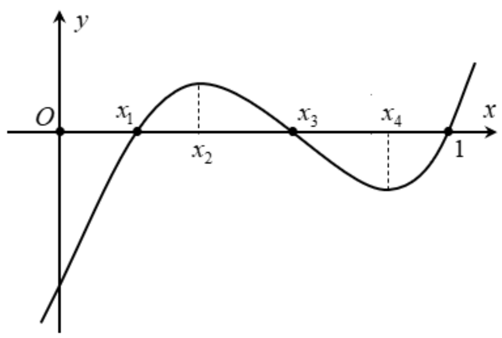
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f^2(g(x))$ với $g(x) = x^2 - 4x + 2\sqrt{4x - x^2}$.

A. 17 **B.** 21 **C.** 23 **D.** 19

✍ LỜI GIẢI

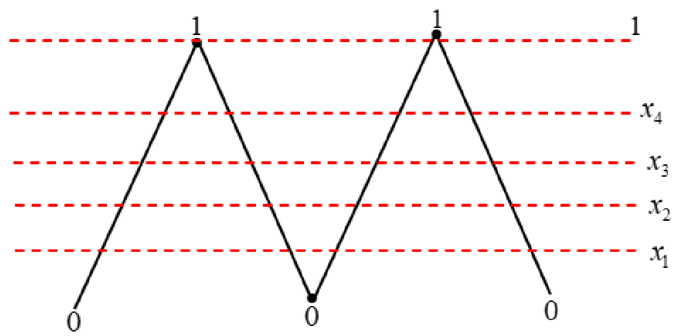
Từ hàm gốc $y=f^2\left(x\right)$ khi đó hàm $u=g\left(x\right)$.

Tìm điểm cực trị của hàm gốc: $y=f^2\left(x\right)\Rightarrow y'=2.f\left(x\right).f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\f'\left(x\right)=0\end{array}\right.$



Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_3\\x=1\end{array}\right.$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_2\\x=x_4\end{array}\right.$.

Bước 2: Phác họa đồ thị hàm số $g\left(x\right)=x^2-4x+2\sqrt{4x-x^2}$ bằng cách TABLE trên máy tính cầm tay



Từ sơ đồ V, hàm số $y=f^2\left(g\left(x\right)\right)$ có $3+4.4=19$ điểm cực trị.

CÂU 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'\left(x\right)=x^3-3x^2-10x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ có 13 điểm cực trị?

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

✍ LỜI GIẢI

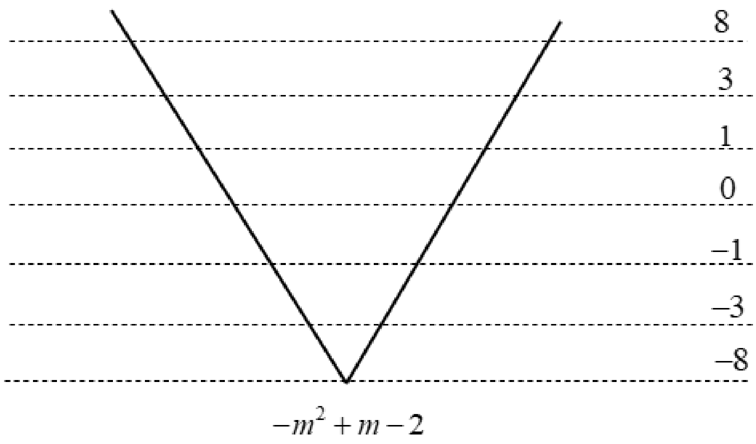
Hướng tiếp cận thứ nhất:

Ta có $f'\left(x\right)=x^3-3x^2-10x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\\x=-2\end{array}\right.$

Đặt $u=\left|x^2-2mx+m-2\right|$. Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|u\right|-3\right)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$.

Xét hàm số gốc: $h\left(x\right)=f\left(\left|x\right|-3\right)\Rightarrow h'\left(x\right)=\left(\left|x\right|\right)'.f'\left(\left|x\right|-3\right)=0\left[\begin{array}{l}\left|x\right|-3=-2\\\left|x\right|-3=0\\\left|x\right|-3=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm3\\x=\pm8\end{array}\right.$.

Nhận xét: $h'(x)$ không xác định tại $x=0$



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+m-2<-3 \\ -m^2+m-2\geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-1>0 \\ m^2-m-6\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ -2\leq m\leq 3 \end{cases}$

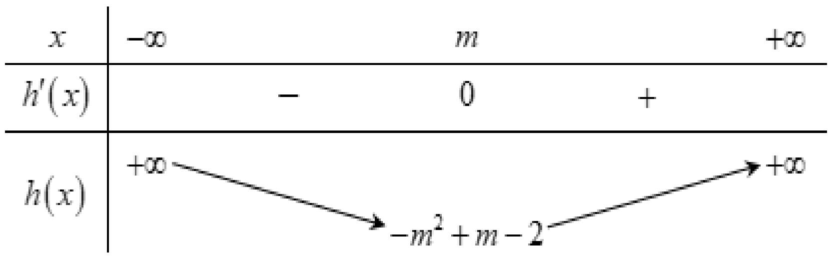
Vì m nguyên dương nên $m=\{2;3\}$, vậy có 2 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Hướng tiếp cận thứ hai:

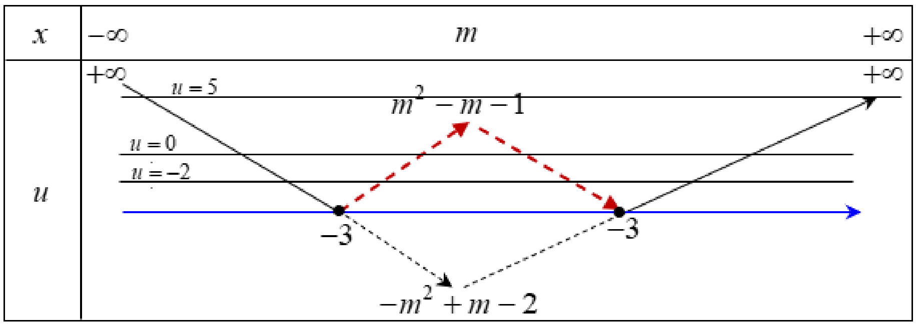
Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x=5; x=0; x=-2$.

Xét hàm số $f(u)=f\left(\left|x^2-2mx+m-2\right|-3\right)$ với $u=\left|x^2-2mx+m-2\right|-3$.

Đặt $h(x)=x^2-2mx+m-2$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:



Nhận thấy $-m^2+m-2<0$ nên ta suy ra được bảng biến thiên của u như sau:



Số điểm cực trị của $f(u)=$ Số điểm cực trị của u + Số nghiệm đơn (bội lẻ) của $\left[\begin{array}{l} u=5 \\ u=0 \\ u=-2 \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta thấy u có 3 điểm cực trị. Để hàm số $g(x)$ có 13 cực trị thì số nghiệm đơn (bội lẻ) của $\left[\begin{array}{l} u=5 \\ u=0 \\ u=-2 \end{array}\right.$ phải bằng 10.

Để có 10 nghiệm bội lẻ thì các đường thẳng $u=-2;u=0$ phải nằm dưới m^2-m-1 (nếu nằm trên thì chỉ cho tối đa 6 nghiệm) và đường thẳng $u=5$ phải nằm trên m^2-m-1.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2-m-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{2;3\}. \\ m^2-m-1\le 5 \Leftrightarrow -2\le m\le 3 \end{array}\right.$

CÂU 9. Cho hàm số $y=f(x)=x^4-10x^3+24x^2+(4-m)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 21.

LỜI GIẢI

Hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương.

Đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt là nghiệm đơn.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-30x^2+48x+4-m=0 \Leftrightarrow 4x^3-30x^2+48x+4=m$

Đặt $h(x)=4x^3-30x^2+48x+4$

Ta có $h'(x)=12x^2-60x+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	26	$\searrow$	-28	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra để $f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi $4<m<26$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị.

CÂU 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-9)(x^2-16), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+7x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 8.

LỜI GIẢI

Cách 1:

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $g(-x)=f(|-x^3-7x|+m)=f(|x^3+7x|+m)=g(x)$, do đó $g(x)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$

với a là số điểm cực trị dương của hàm số $h(x)=f\left(x^3+7x+m\right)$. Theo bài ra ta có $2a+1\geq 3 \Leftrightarrow a\geq 1$, vì vậy ta cần tìm m để hàm số $h(x)$ có ít nhất một điểm cực trị dương.

Ta có $f'(x)=(x-9)(x-4)(x+4) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=9, x=\pm 4$.

$$h'(x)=\left(3x^2+7\right)f'\left(x^3+7x+m\right),\ h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3+8x+m=9 & (1) \\ x^3+8x+m=4 & (2) \\ x^3+8x+m=-4 & (3) \end{array}\right..$$

Đặt $u(x)=x^3+7x+m, u'(x)=3x^2+7>0, \forall x\geq 0$.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1), (2) và (3) nếu có nghiệm $x>0$ thì đó là nghiệm duy nhất.

Phương trình $h'(x)=0$ có nghiệm $x>0$ khi và chỉ khi ít nhất một trong ba phương trình (1), (2) (3) có nghiệm $x>0$, điều này tương đương với $m<max\{-4;4;9\}=9$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2;...;8\}$, vậy có 9 giá trị nguyên dương của tham số m cần tìm.

Cách 2: Ta có: $g'(x)=f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right).\dfrac{x\left(x^2+7\right)}{\left|x^3+7x\right|}.\left(3x^2+7\right)$

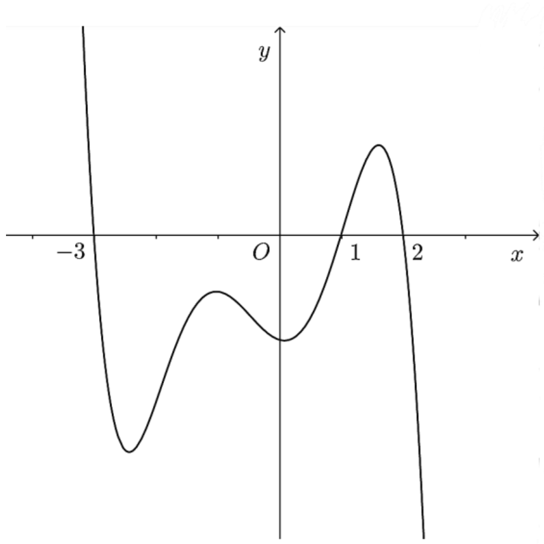
Xét hệ phương trình: $\left[\begin{array}{l} \left|x^3+7x\right|=-4-m \\ \left|x^3+7x\right|=4-m \\ \left|x^3+7x\right|=9-m \\ x=0 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên hàm số $y=\left|x^3+7x\right|$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 9-m>0 \overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow} m\in\{1;2;...;8\}$.

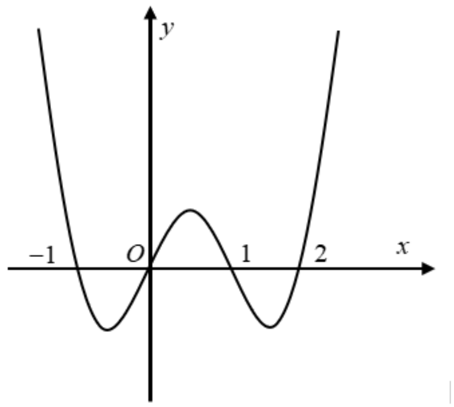
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-3)>0, f(2)=0$ và có đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x)=\left|f(x)-x^4+14x^2-24x+11\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 2: Cho $f(x)$ là đa thức bậc ba, biết hàm số $y=f'\left(x^2-x+1\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)$ có năm điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+(m-1)x^2+2x-m+2022$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021;2022]$ để hàm số $y=\left|f(x-2021)-2022\right|$ có số điểm cực trị nhiều nhất?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 4040. **D.** 2023

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(3-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\ge 3$. **B.** $\frac{-1}{2}<m$. **C.** $m>3$. **D.** $-\frac{1}{2}<m\le 3$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^3-2x^2)(x^3-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f(1-2022x)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 12. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

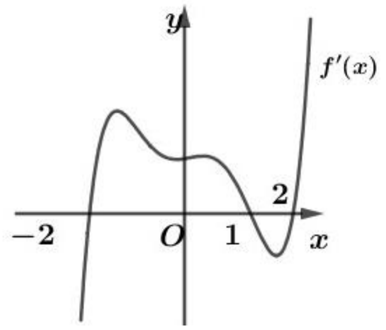
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2)<f(2)=0$, đồ thị $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x)=\left|f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-2)=0$ và đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=\left|15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

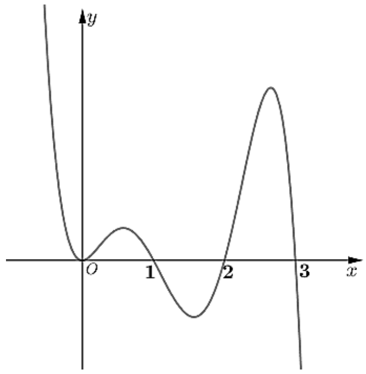
Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(|x-4|)+2022^{2023}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11: Cho hàm số $f'(x)=(1-x)(x^2-5x+6)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m (với $m\in[0;6];2m\in\mathbb{Z}$) để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 12: Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



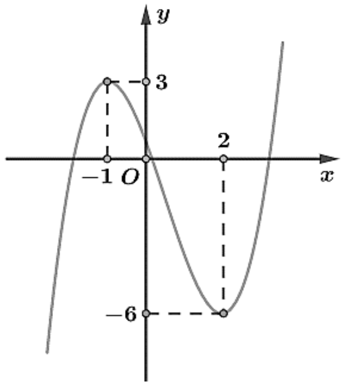
Có bao nhiêu giá trị của m để $m\in[0;6]$, $2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}\right|$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

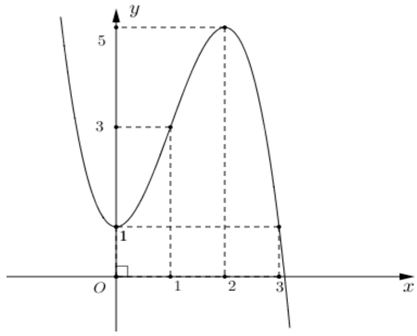
Câu 14: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)$ có 17 điểm cực trị là

A. 1652. **B.** 1653. **C.** 1654. **D.** 1651.

Câu 15: Cho hàm đa thức bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ.

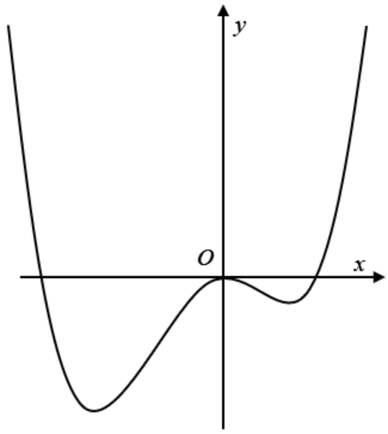


Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(f\left(x\right)+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 16: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức, có $f\left(-3\right)<0$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x-6\right)\right]^{2050}$ là



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

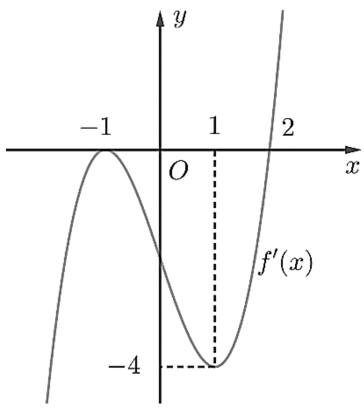
Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 18: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x^2-4\left|x\right|+m-3\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

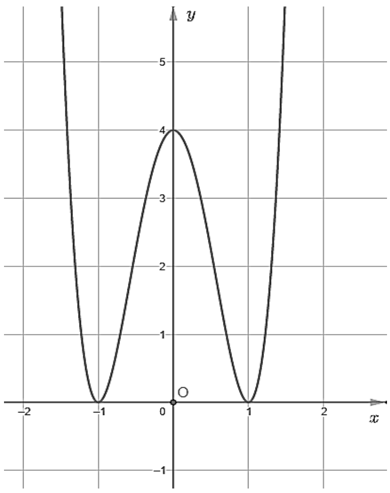
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^3+3x\right)+2022$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-x,\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4+3x^2+2+m\right)$ có đúng 3 cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi số tự nhiên n là số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f^2\left(f^2(x)-2022m\right)$. Khi đó với mọi m ta luôn có $\alpha\le n\le\beta;\alpha,\beta\in\mathbb{N}$. Giá trị của $\alpha+\beta$ bằng



A. 18. **B.** 25. **C.** 21. **D.** 15.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Câu 23: Cho $f(x)$ là hàm đa thức và cho hàm đa thức bậc ba $g(x)=f(x+1)$ thỏa mãn $(x-1)g'(x+3)=(x+1)g'(x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(2x^2-4x+5\right)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

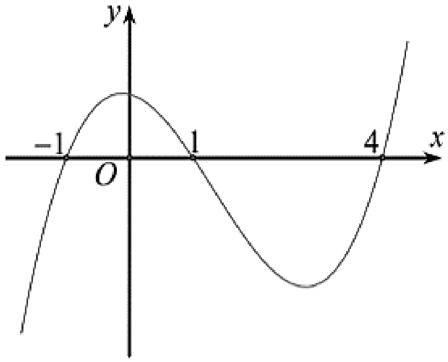
Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+3)^2(x^2 - x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 6x + m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 7x + 12), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + m)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|4 - 2x| + m - 6)$ có đúng 3 điểm cực tiểu. Tổng các phần tử của S bằng



A. 18. **B.** 11. **C.** 2. **D.** 13.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + x - 6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x^3 - 3x^2 - 9x + m)$ có đúng 6 điểm cực trị.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

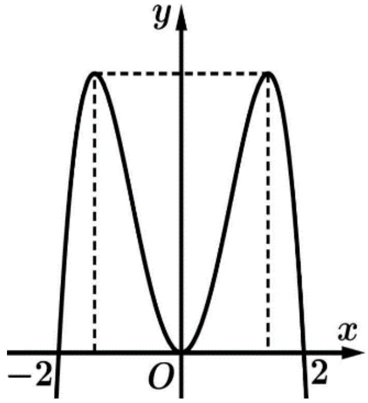
Câu 29: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x^3 - x)\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 8. **C.** 13. **D.** 10.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị hàm số $f'(x^2 - 1)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(|x-2| + |x^2 - 1|)$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 3 . **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** 15 .

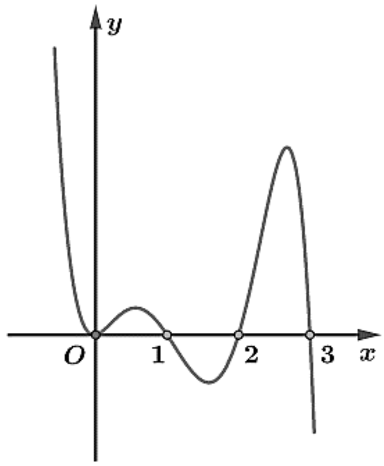
Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y = 2\left[f(x)\right]^3 - 9\left[f(x)\right]^2 + 12f(x) + 2021$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 5 . **B.** 10 . **C** 7 . **D.** 9 .

Câu 32: Cho hàm đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



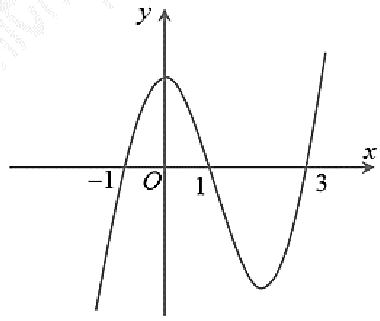
Có bao nhiêu giá trị của $m \in [2;6); 2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 3 . **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** 2 .

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{\sqrt[3]{x}}$. Hàm số $y = f\left(x^2 + 4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3 . **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** 2 .

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm m để hàm số $g(x) = f\left(|x|\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)-m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị.



A. $m > 2$. **B.** $m > 0$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \geq 2$.

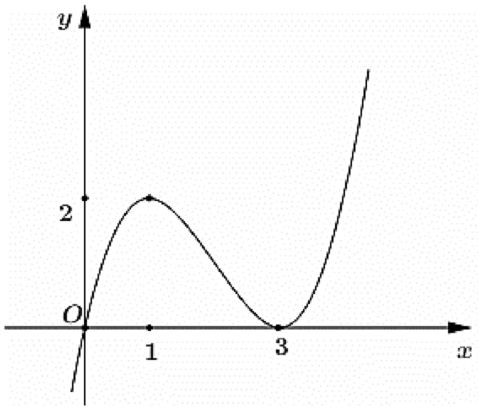
Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|x^3+2x+\sin x\right| - x^2 + 2 + m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 2

Câu 36: Cho hai hàm số $g(x); f(x)$, trong đó $g(x)$ là hàm số đa thức bậc ba thỏa mãn $g(x) = f(x+1)$ và $(x-1)g'(x+3) = (x+1)g'(x+2)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(2x^2 - 4x + 3 - m\right)$ có đúng ba cực trị.

A. 2 . **B.** 1. **C.** 3 . **D.** 5 .

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$. Hàm số $f'(1-x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - x^2$ là

A. 10 . **B.** 6 . **C.** 8 . **D.** 4 .

Câu 38: Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			1				1		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 39: Cho hàm số $y=x^6+\left(4+m\right)x^5+\left(16-m^2\right)x^4+2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 9.

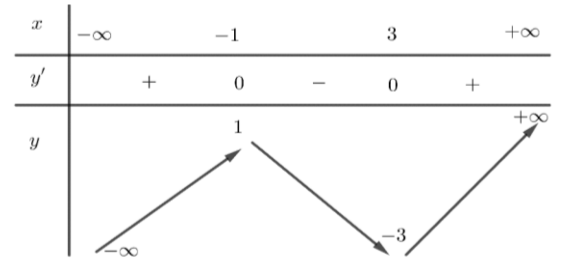
Câu 40: Cho hàm số $y=x^6+\left(2+m\right)x^5+\left(4-m^2\right)x^4+4$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên dương không vượt quá 10 để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 42. **B.** 52. **C.** 40. **D.** 50.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+\left(m-2\right)x^5-\left(m^2-4\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3 . **B.** 5 . **C.** vô số. **D.** 4 .

Câu 42: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-2x+m+1\right)$ có 3 điểm cực trị?

A. 5 . **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** 3 .

Câu 43: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-\left(m^2-2\right)x+m^2$ $\left(C_m\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A,B,C\left(x_A<x_B<x_C\right)$ và có hai điểm cực trị M,N. Số các giá trị của tham số m để $MN=AC$ là

A. 1. **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** 3

Câu 44: Có bao nhiêu giá trị m nguyên nhỏ hơn 2022 thỏa mãn đồ thị hàm số $y=\left(4+4m-m^2-m^3\right)x^4-2\left(m+1\right)x^2+3$ có đúng một điểm cực đại?

A. 2023 . **B.** 2021. **C.** 2 . **D.** 2022 .

Câu 45: Cho hàm số $y=4x^4-8mx^2+3m^2+2$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị A,B,C tạo thành một tam giác có tâm đường tròn nội tiếp nằm trên đường thẳng $x+y-2=0$.

A. 1. **B.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 46: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^2\left(x^2-2x\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $f'(x)=(x+3)(x-4)$. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;5]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^2-3x+m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 54. **B.** 9. **C.** -52. **D.** -54.

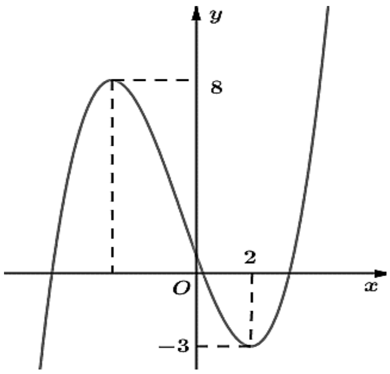
Câu 48: Cho hàm số $y=\left|x^3+(m+2)x^2+mx-m^2\right|$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thoả mãn $|m-1|<5$ để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 49: Gọi S là tập chứa tất cá các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x)=\left|x^2-2mx+1\right|+4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Tìm số phần tử của tập S.

A. 6. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 50: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là một đường cong như hình bên dưới.



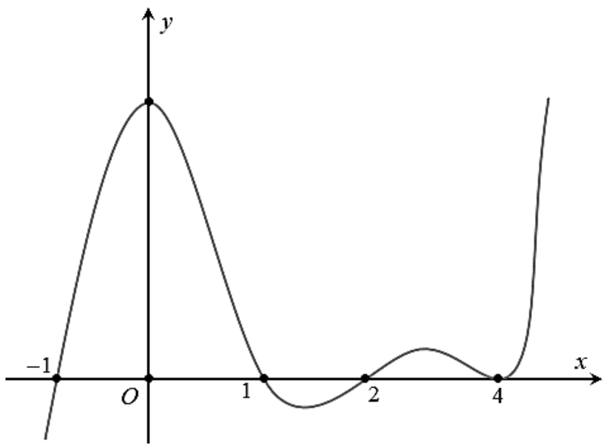
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|f^2(x)-2f(x)-m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 11. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 13.

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^3\left[x^2+(1-3m)x+2m^2-2m\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f\left(|x|+m\right)$ có tối thiểu 3 cực trị.

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(|x|^3 - 3|x| + m + 2021\right) + 2022m^3$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 5 . **D.** 1.

Câu 53: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right) = \left(x-12\right)^{2022}\left(x^2 - 2x\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in \left(-2021;2021\right)$ để hàm số $y = f\left(x^2 - 2022x + 2021m\right)$ có 3 điểm cực trị dương?

A. 4038 . **B.** 2021. **C.** 2020 . **D.** 2019 .

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(x^4 - 8x^2 + m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 9. **C.** 15. **D.** 10.

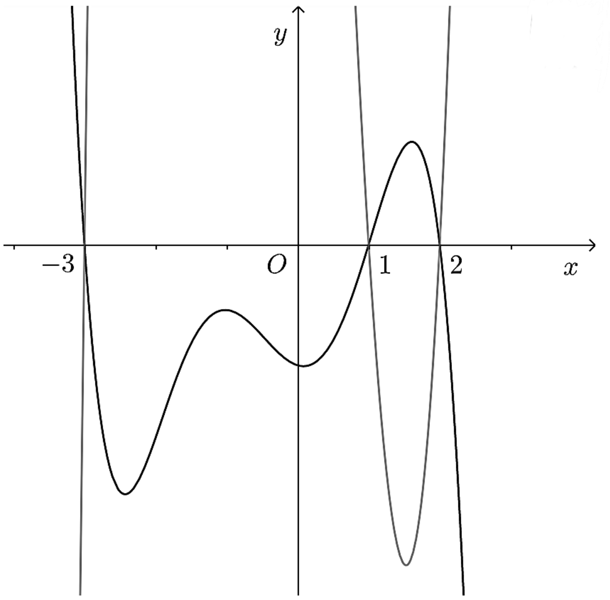
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$, suy ra $f(1) < f(2) = 0$.

Xét hàm số $h(x) = f(x) - x^4 + 14x^2 - 24x + 11; h'(x) = f'(x) - (4x^3 - 28x + 24)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 28x + 24$ trên cùng mặt phẳng tọa độ, ta lập được bảng biến thiên của $h(x)$ và $g(x) = |h(x)|$ ($h(-3) = f(-3) + 128 > 128, h(1) = f(1) < 0, h(2) = 3$).



x	$-\infty$	x_1	-3	x_2	1	x_3	2	x_4	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	>0	↘ 0	<0	↗ 0	3	↘ 0	$-\infty$
$\|h(x)\|$	$+\infty$ ↘	0 ↗		↘ 0 ↗		↘ 0 ↗		↘ 0 ↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) - x^4 + 14x^2 - 24x + 11|$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 2: Chọn B

Ta có $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $f'(x)$ là đa thức bậc hai $\Rightarrow f'(x^2 - x + 1)$ là đa thức bậc 4.

Do đó từ đồ thị hàm số $y = f'(x^2 - x + 1)$ ta có:

$f'(x^2 - x + 1) = a(x+1)x(x-1)(x-2)$, với $a > 0$.

$f'(x^2 - x + 1) = a(x^2 - x - 2)(x^2 - x) = a(x^2 - x + 1 - 3)(x^2 - x + 1 - 1)$.

Suy ra $f'(x) = a(x-3)(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+4} - m\right)$ có $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} f'\left(\sqrt{x^2+4} - m\right)$

Đạo hàm $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x^2+4}-m=1 \\ \sqrt{x^2+4}-m=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x^2+4}=m+1 \\ \sqrt{x^2+4}=m+3 \end{array}\right.$.

Hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+4}-m\right)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow y'=0$ có 5 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m+1>2 \Leftrightarrow m>1$

.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10]$ nên $m \in \{2;3;4;...;10\}$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Chọn A

Hàm số $y=\left|f(x-2021)-2022\right|$ có số điểm cực trị nhiều nhất là 7 khi và chỉ khi phương trình $f(x-2021)=2022$ có 4 nghiệm phân biệt hay phương trình $f(x)=2022$ có 4 nghiệm phân biệt. Ta có $f(x)=2022 \Leftrightarrow x^4-2x^3+(m-1)x^2+2x-m=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)\left[x^2-2x+m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x^2-2x+m=0\ (*) \end{array}\right.$

Suy ra $f(x)=2022$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 và 1 tức là $\begin{cases} 1-m>0 \\ 1^2-2+m \neq 0 \\ 1^2+2+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m \neq -3 \end{cases}$

Do m nguyên thuộc $[-2021;2022]$ nên có 2021 giá trị thỏa mãn.

Câu 4: Chọn A

Để hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 cực trị dương.

Khi đó $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3-m=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm dương và nghiệm còn lại phải bé hơn hoặc bằng 0. Suy ra

$\begin{cases} \Delta'=(2m+1)^2-3(3-m)>0 \\ x_1x_2=\dfrac{3-m}{3} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2+7m-8>0 \\ 3-m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{-7-\sqrt{177}}{8} \\ m>\dfrac{-7+\sqrt{177}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 3.$

Câu 5: Chọn C

Ta có: $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)=x^3(x-2)\left(x^2-2\right)=x^3(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn và 1 nghiệm bội 3 nên hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Số điểm cực trị của hàm số $\left|f(1-2022x)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $\left|f(x)\right|$.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $\left|f(x)\right|$ bằng $m+n$ (Trong đó m là số điểm cực trị của hàm

$f(x)$, n là số nghiệm của $f(x)$ không tính những nghiệm là điểm cực trị).

Theo trên ta có $m=4$ nên số nghiệm lớn nhất của $f(x)$ là 5 hay $n=5$.

Hàm số $\left|f(1-2022x)\right|$ có nhiều nhất 9 điểm cực trị.

Câu 6: **Chọn B**

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ ta có hàm số $f(x)$ có 2 cực trị tại $x=-1$ và $x=4$.

Xét $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)=\begin{cases} f\left(x^3+2x-4\right) \text{ khi } x\ge 0 \\ f\left(x^3-2x-4\right) \text{ khi } x<0 \end{cases}$

Đạo hàm: $g'(x)=\begin{cases} \left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right) \text{khi } x\ge 0 \\ \left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right) \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Xét phương trình đạo hàm $g'(x)=0$

Trường hợp 1: $x\ge 0$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(3x^2+2\right).f'\left(x^3+2x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+2x-4=-1 \\ x^3+2x-4=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+2x-3=0 \\ x^3+2x-8=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1>0 \\ x\simeq 1,67>0 \end{array}\right.$$

Với $x\ge 0$ có 2 cực trị.

Trường hợp 2: $x<0$. $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(3x^2-2\right).f'\left(x^3-2x-4\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-2=0 \\ x^3-2x-4=-1 \\ x^3-2x-4=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{2}{3} \\ x^3-2x-3=0 \\ x^3-2x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x=\sqrt{\dfrac{2}{3}} \text{ (loai)} \\ x\simeq 1.89 \text{ (loai)} \\ x\simeq 2,33 \text{ (loai)} \end{array}\right.$$

Với $x<0$ có 1 cực trị.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+2|x|-4\right)$ có 3 cực trị.

Câu 7: **Chọn C**

Nhận xét:

Hàm số $y=f(|x|)$ có số điểm cực trị $=2$. (số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$) $+1$.

Suy ra để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ phải có 2 điểm cực trị dương.

Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\,(L) \\ (x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\,(*) \end{array}\right..$$

Từ điều kiện bài toán suy ra phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 và trái dấu hoặc có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương khác 1.

Trường hợp 1: Hai nghiệm phân biệt khác 1 và trái dấu.

Điều kiện $\begin{cases}1^2-2(m+1).1+m^2-1\neq 0\\ 1.\left(m^2-1\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2m-2\neq 0\\ m^2-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1-\sqrt{3};\\ m\neq 1+\sqrt{3};\\ -1<m<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1-\sqrt{3}\\ -1<m<1\end{cases}$.

Suy ra $m=0$ (TM).

Trường hợp 2: có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương khác 1.

Điều kiện $0^2-2(m+1).0+m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

Với $m=1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right. \Rightarrow m=1$ (TM).

Với $m=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow m=-1$ (Loại).

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: **Chọn C**

Đặt $h(x)=f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x$.

Ta có $h'(x)=f'(x)+x^3-x^2-4x+4$. Với $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x^3+x^2+4x-4$.

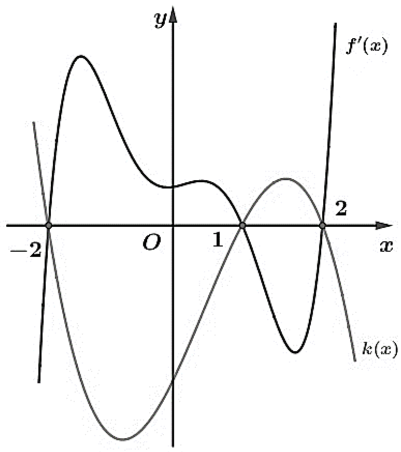
Đặt $k(x)=-x^3+x^2+4x-4$, ta sẽ khảo sát và vẽ đồ thị của $k(x)$.

Ta có $k'(x)=-3x^2+2x+4$. Cho $k'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$.

Chú ý sự tương giao của đồ thị hàm số $k(x)$ và trục hoành, ta thấy:

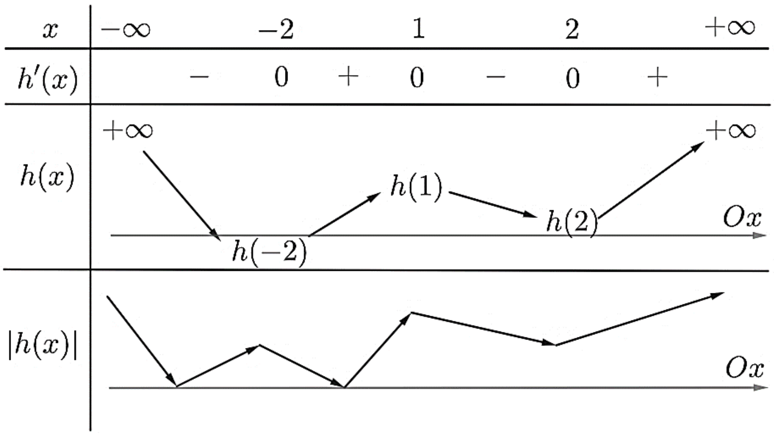
$k(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.$.

Từ đó ta có hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ, ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.$.

Hơn nữa, $h(-2)=f(-2)-\frac{28}{3}<0, h(2)=f(2)+\frac{4}{3}>0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ và $\left|h(x)\right|$ như sau



Vậy hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 9: Chọn C

Hàm số $h(x)=15f\left(-x^4+2x^2-2\right)-10x^6+30x^2$

Ta có $h'(x)=15\left(-4x^3+4x\right).f'\left(-x^4+2x^2-2\right)-60x^5+60x$

$\Rightarrow h'(x)=-60x\left(x^2-1\right)\left[f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1\right]$.

Mà $-x^4+2x^2-2=-\left(x^2-1\right)^2-1\le -1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)\ge 0$.

Suy ra $f'\left(-x^4+2x^2-2\right)+x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x)=-60x\left(x^2-1\right)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x=-1; x=0; x=1$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(0)=15f(-2)=0$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ tiếp xúc Ox tại O và cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt khác điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 10: Chọn C

Ta có $g'(x)=\left[f\left(|x-4|\right)\right]'=\left(|x-4|\right)'.f'\left(|x-4|\right)=\dfrac{x-4}{|x-4|}f'\left(|x-4|\right)$.

$g'(x)$ không xác định tại điểm $x=4$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(|x-4|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-4|=-2\\|x-4|=-1\\|x-4|=3\\|x-4|=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9\\x=-1\\x=7\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		4		7		9		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Do đó hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11: Chọn B

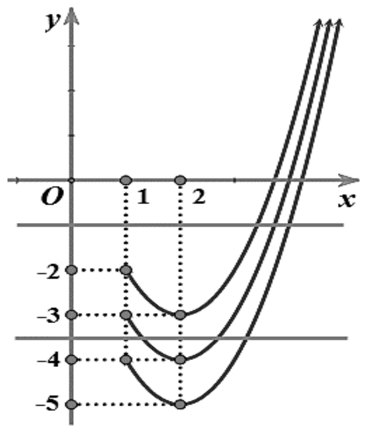
Đồ thị hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)=f\left(|x-1|^2-2|x-1|+m-1\right)$ đối xứng qua đường thẳng $x=1$.

Xét hàm số $y=f\left(x^2-4x+m+2\right)$, $x\ge 1$.

$$y'=(2x-4)f'\left(x^2-4x+m+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+m+2=0\ (l)\\x^2-4x+m+2=1\\x^2-4x+m+2=2\\x^2-4x+m+2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+1=-m\\x^2-4x=-m\\x^2-4x-1=-m\end{array}\right..$$

Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị khi và chỉ khi đường thẳng $y=-m$ cắt các đồ thị hàm số $y=x^2-4x-1, y=x^2-4x, y=x^2-4x+1$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1 và khác 2.

Ta có đồ thị



Từ đồ thị, ta được: $\left[\begin{array}{l}-m\ge -2\\-4<-m<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 2\\3<m<4\end{array}\right.\Rightarrow m\in\left\{0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{7}{2}\right\}$.

Câu 12: Chọn A

Đặt $g(x)=h(|x-1|)=f\left(|x-1|^2-2|x-1|+m-1\right)$

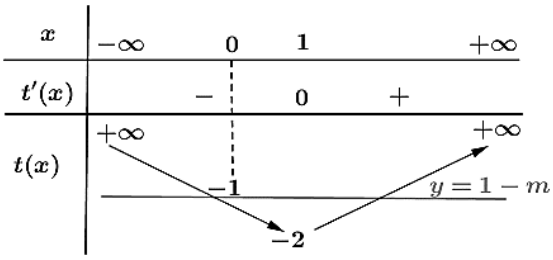
Do đồ thị hàm số $y=h(|x-1|)$ có được khi tịnh tiến đồ thị hàm số $y=h(|x|)$ sang phải một đơn vị nên số cực trị của hàm số $y=h(|x-1|)$ bằng số cực trị hàm $y=h(|x|)$. Như vậy, để hàm số $g(x)$ có 9 cực trị thì hàm số $y=h(x)=f\left(x^2-2x+m-1\right)$ có 4 cực trị có hoành độ dương.

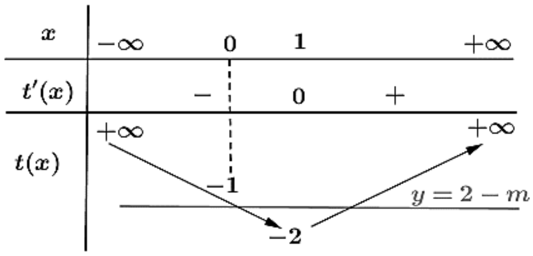
Lại có: $y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x+m-1\right)$. Giải phương trình $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\f'\left(x^2-2x+m-1\right)=0\ (*)\end{array}\right.$.

$$(*)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m-1=1\\x^2-2x+m-1=2\\x^2-2x+m-1=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-1=1-m\ (1)\\x^2-2x-1=2-m\ (2)\\x^2-2x-1=3-m\ (3)\end{array}\right.$$

(Trường hợp $x^2-2x+m-1=0$ có nghiệm bội chẵn nên không là cực trị).

Xét hàm số $t(x)=x^2-2x-1 \Rightarrow t'(x)=2x-2$





Để hàm số đã cho có 9 cực trị thì phương trình $(1),(2),(3)$ phải có 3 nghiệm dương phân biệt khác 1. Khi đó, ta có:

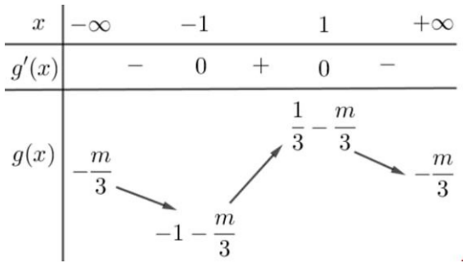
$$\left[\begin{array}{l}1-m\ge -1\\ -2<2-m<-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le 2\\ 3<m<4\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0\le 2m\le 4\\ 6<2m<8\end{array}\right..$$

Do $2m\in\mathbb{Z} \Rightarrow\ 2m\in\{0;1;2;3;4;7\}$. Vậy có 6 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13: Chọn A

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}-\dfrac{m}{3}$. Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Bảng biến thiên



Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị $x=-1,\ x=1$ với mọi $m\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)=|g(x)|$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g(x)=0$ có nghiệm bội lẻ.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(-1-\dfrac{m}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{m}{3}\right)<0\\ -\dfrac{m}{3}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3<m<1\\ m=0\end{array}\right. \Rightarrow m\in\{-2;-1,0\}$$ (Do m nguyên)

Câu 14: Chọn A

Ta có: $g'(x)=\dfrac{f'(x)\left(2f(x)-4\right)\left(f^2(x)-4f(x)-m\right)}{\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|}.f'\left(\left|f^2(x)-4f(x)-m\right|\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0\ (1) \\ 2f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=2\ (2) \\ f^2(x)-4f(x)-m=0 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)=m\ (3) \\ \left|f^2(x)-4f(x)-m\right|=-1\ (voly) \\ \left|f^2(x)-4f(x)-m\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2(x)-4f(x)-m=2 \\ f^2(x)-4f(x)-m=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2(x)-4f(x)=m+2\ (4) \\ f^2(x)-4f(x)=m-2\ (5) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Dễ thấy (1) có 2 nghiệm đơn (vì có 2 cực trị) và (2) có 3 nghiệm đơn

Vậy tổng số nghiệm đơn của phương trình $(3);(4);(5)$ là 12 thì thỏa mãn

Đặt $u=u(x)=f^2(x)-4f(x) \Rightarrow u'=2f'(x)\big(f(x)-2\big) \Rightarrow u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\{-1;2\} \\ x\in\{a;b;c\} \end{array}\right.$.

Các nghiệm trên được sắp thứ tự từ nhỏ đến lớn như sau: $a<-1<b<2<c$.

Bảng biến thiên của hàm số $u=f^2(x)-4f(x)$.

x	$-\infty$		a		-1		b		2		c		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	60	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy số giao điểm của các đường thẳng $y=m-2; y=m; y=m+2$ với đồ thị $u(x)$ là 12 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\le m-2<60 \\ -3\le m+2<60 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m<58 \Rightarrow m\in\{-1;0;1;...;57\} \Rightarrow S=1652.$$

Câu 15: Chọn A

Giả sử $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Vì đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua các điểm có toạ độ là $(0;1),(1;3),(2;5),(3;1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=1 \\ a+b+c+d=3 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x^3+3x^2+1 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Xét hàm số $y=f\big(f(x)+m\big) \Rightarrow y'=f'(x).f'\big(f(x)+m\big)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\big(f(x)+m\big)=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)+m=0 \\ f(x)+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=-m \\ f(x)=-m+2 \end{array}\right..$$

Hàm số $y=f\left(f\left(x\right)+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-m\le 1\\ -m+2>1\end{cases}\\ \begin{cases}-m+2\ge 5\\ -m<5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le m<1\\ -5<m\le -3\end{array}\right.$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-4;-3;-1;0\right\}$.

Vậy có 4 giá trị m nguyên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$. Ta có bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(-3)<0$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

Ta có $g'\left(x\right)=2050\left[f\left(x-6\right)\right]^{2049}.f'\left(x-6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x-6\right)=0\\ f'\left(x-6\right)=0.\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy phương trình $f\left(x-6\right)=0$ có một nghiệm đơn.

Mặt khác $f'\left(x-6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-6=-3\\ x-6=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=7\end{array}\right.$ là hai nghiệm đơn.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 17: Chọn D

Ta có $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x+1-\sqrt{\left(x-1\right)^2}\right)$

có $g'\left(x\right)=\left(2x-2-\dfrac{x-1}{\left|x-1\right|}\right)f'\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)=\left(x-1\right)\left(2-\dfrac{1}{\left|x-1\right|}\right)f'\left(x^2-2x+1-\left|x-1\right|\right)$

Suy ra $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ \left|x-1\right|=\dfrac{1}{2}\\ x^2-2x+1-\left|x-1\right|=-1\\ x^2-2x+1-\left|x-1\right|=0\\ x^2-2x+1-\left|x-1\right|=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\\ \left|x-1\right|^2-\left|x-1\right|+1=0\,(vn)\\ \left|x-1\right|^2-\left|x-1\right|=0\\ \left|x-1\right|^2-\left|x-1\right|-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\\ x=1(k)\\ x=0\\ x=2\\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$-\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 18: Chọn A

Đặt $h(x)=f\left(2x^2-4x+m-3\right)$.

Suy ra $h'(x)=(4x-4).f'\left(2x^2-4x+m-3\right)$

Để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì $h(x)$ phải có 3 điểm cực trị dương.

Ta có: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-4=0\\ 2x^2-4x+m-3=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ 2x^2-4x+m-5=0(*)\end{array}\right.$.

$h(x)$ có 3 điểm cực trị dương $\Rightarrow (*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt, khác 1.

$$\Rightarrow \begin{cases}4-2(m-5)>0\\ \dfrac{m-5}{2}>0\\ 2-4+m-5\neq 0\end{cases} \Rightarrow 5<m<7.$$

Vì m nguyên nên $m=6$. Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn.

Câu 19: Chọn B

Ta có $g'(x)=3\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x\right)f^2\left(x^3+3x\right)$.

Ta thấy $3\left(3x^2+3\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, và $f^2\left(x^3+3x\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'\left(x^3+3x\right)$.

$$f'\left(x^3+3x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3+3x=-1\\ x^3+3x=0\\ x^3+3x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-1;0)\\ x=0\\ x=x_2\in(0;1)\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ x>1\end{array}\right.$

Do đó $f'\left(x^3+3x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x^3+3x<0\\ x^3+3x>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1<x<0\\ x>x_2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 20: Chọn C

Xét hàm $g(x)=f\left(x^4+3x^2+2+m\right)$.

Có $g'(x)=\left(4x^3+6x\right).f'\left(x^4+3x^2+2+m\right)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3+6x=0 \\ f'\left(x^4+3x^2+2+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^4+3x^2+2+m=0 \\ x^4+3x^2+2+m=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^4+3x^2+2=-m \\ x^4+3x^2+2=-m+1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)=x^4+3x^2+2$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có đúng 3 cực trị thì $\begin{cases} -m+1>2 \\ -m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m<-1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 21: Chọn A

Giả thiết suy ra $f(x)=4\left(x^2-1\right)^2$.

Ta có $g'(x)=2f\left(f^2(x)-2022m\right).\left(f\left(f^2(x)-2022m\right)\right)'$

$=2f\left(f^2(x)-2022m\right).f'\left(f^2(x)-2022m\right).2f(x).f'(x)$

$=64\left(\left(f^2(x)-2022m\right)^2-1\right)^2\left(x^2-1\right)^2 f'\left(f^2(x)-2022m\right).f'(x)$

Số cực trị của $g(x)$ chính là số nghiệm bội lẻ của

$\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f^2(x)-2022m\right)=0\ (*) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\{-1;0;1\} \\ f^2(x)-2022m\in\{-1;0;1\} \end{array}\right.$.

Dễ dàng lập được bảng biến thiên của $f^2(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f^2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $(*)$ có tối đa 12 nghiệm đơn do đó hàm số $g(x)$ có tối đa 15 cực trị và có tối thiểu 3 cực trị. Vậy $\alpha+\beta=18$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$, trong đó $x=2$ là nghiệm bội chẵn nên không phải là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có đạo hàm $g'(x)=(x-6)f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)$.

Giải phương trình đạo hàm $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ f'\left(\frac{1}{2}x^2-6x+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=2 \\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=0 \\ \frac{1}{2}x^2-6x+m=1 \end{array}\right.$.

Nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

Để hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=0$ và $\frac{1}{2}x^2-6x+m=1$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 6.

Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}x^2-6x$ có $h'(x)=x-6$. Giải phương trình $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=0$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y=-m$.

Số nghiệm phương trình $\frac{1}{2}x^2-6x+m=1$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $h(x)$ và đường thẳng $y=-m+1$.

Mà $-m<-m+1$ nên để hai phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt khác 6 thì $-m>-18$

$\Leftrightarrow m < 18$.

Tập các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{1;...;17\}$.

Tổng tất cả các giá trị m của tập S là $1 + ... + 17 = 153$.

Câu 23: Chọn B

Ta có: $g(x) = f(x+1) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1)$.

$(x-1)g'(x+3) = (x+1)g'(x+2)$ hay $(x-1)f'(x+4) = (x+1)f'(x+3)$.

Cho $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(4) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = a(x-3)(x-4)$.

$y = f(2x^2 - 4x + 5) \Rightarrow y' = (4x-4).f'(2x^2 - 4x + 5)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 4 = 0 \\ f'(2x^2 - 4x + 5) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 - 4x + 5 = 4 \\ 2x^2 - 4x + 5 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy hàm số có 3 cực trị

Câu 24: Chọn D

Ta có: $g(x) = 2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$.

$$\Rightarrow g'(x) = 2^{-\frac{1}{x^4}}\frac{4\ln 2}{x^5}\left[f(2x+1)\right]^3 + 2^{-\frac{1}{x^4}}.3.2f'(2x+1)\left[f(2x+1)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = 2.2^{\frac{-1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^2\left(\frac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1) + 3f'(2x+1)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2(2x+1) = 0 \\ \dfrac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1) + 3f'(2x+1) = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Do các nghiệm của phương trình $f^2(2x+1) = 0$ là các nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $(*)$.

Xét phương trình $\dfrac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1) + 3f'(2x+1) = 0$.

Đặt $t = 2x+1$ ta được $\dfrac{2^6.\ln 2}{(t-1)^5}f(t) + 3f'(t) = 0$.

Từ bảng biến thiên ta thấy được phương trình $f(t) = 0$ có 4 nghiệm t_1, t_2, t_3, t_4.

$\Rightarrow f(t) = a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$

$\Rightarrow f'(t) = a\left[(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4) + (t-t_1)(t-t_3)(t-t_4) + (t-t_1)(t-t_2)(t-t_4) + (t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)\right]$

Do 4 nghiệm t_1, t_2, t_3, t_4 không là nghiệm của phương trình $(*)$ nên:

$$\frac{2^6.\ln 2}{(t-1)^5}f(t)+3f'(t)=0\Rightarrow \frac{2^6.\ln 2}{(t-1)^5}+3\frac{f'(t)}{f(t)}=0 \quad (**)$$

Thay $f(t)$ và $f'(t)$ vào $(**)$ ta có: $\dfrac{2^6\ln 2}{(t-1)^5}+\dfrac{3}{t-t_1}+\dfrac{3}{t-t_2}+\dfrac{3}{t-t_3}+\dfrac{3}{t-t_4}=0$

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{2^6\ln 2}{(t-1)^5}+\dfrac{3}{t-t_1}+\dfrac{3}{t-t_2}+\dfrac{3}{t-t_3}+\dfrac{3}{t-t_4}$ với $t\neq 1, t\neq t_i\left(i=\overline{1,4}\right)$.

$$\Rightarrow h'(t)=\frac{-2^6.5.\ln 2}{(t-1)^6}+\frac{-3}{(t-t_1)^2}+\frac{-3}{(t-t_2)^2}+\frac{-3}{(t-t_3)^2}+\frac{-3}{(t-t_4)^2}<0, \forall\ t\neq 1, t\neq t_i\left(i=\overline{1,4}\right).$$

Ta có bảng biến thiên của $h(t)$:

t	$-\infty$	t_1	t_2	t_3	1	t_4	$+\infty$
$h'(t)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$h(t)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(t)=0$ luôn có 4 nghiệm đơn phân biệt do đó hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 25: Chọn A

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3(nghiem\,boi\,chan)\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f\left(x^2-6x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-6).f'\left(x^2-6x+m\right)$

Giải phương trình: $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x^2-6x+m=-3(nghiem\ boi\ chan)\\ x^2-6x+m=0\ (1)\\ x^2-6x+m=1\ (2)\end{array}\right.$

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt khác 3

Mà $m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m\in\{1;2;3;...;8\}$. Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 26: Chọn B

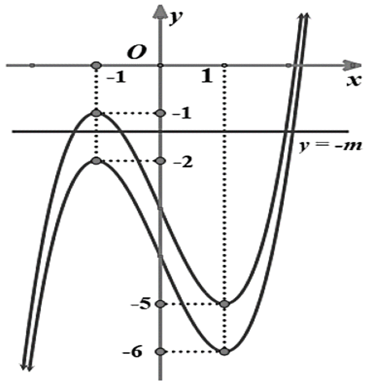
Ta có $f'(x)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (l)\\ x=3\\ x=4\end{array}\right.$.

Cho $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1\\ x^3-3x+m=3\\ x^3-3x+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1\\ x^3-3x-3=-m\ (1)\\ x^3-3x-4=-m\ (2)\end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có đúng 6 điểm cực trị khi và chỉ khi $(1),(2)$ có tổng 4 nghiệm phân biệt $x \neq \pm 1$

.

Ta vẽ đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 3x - 3, y = x^3 - 3x - 4$ trên cùng một hệ tọa độ.



Từ đồ thị, ta có: $\left[\begin{array}{l} -2 \leq -m < -1 \\ -6 < -m \leq -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m \leq 2 \\ 5 \leq m < 6 \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{2;5\}$.

Vậy có 2 số.

Câu 27: Chọn B

Ta có $y = f\left(|4-2x| + m - 6\right)$ là hàm số chẵn với biến số $2x-4$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng.

Xét hàm số $y = f\left[(2x-4) + m - 6\right]$ (1) có $y' = 2f'(2x + m - 10)$.

Theo đầu bài $y' = 0$ tại các điểm $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 4$.

Ta có $\left[\begin{array}{l} 2x_1 + m - 10 = -1 \\ 2x_2 + m - 10 = 1 \\ 2x_3 + m - 10 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{9-m}{2} \\ x_2 = \dfrac{11-m}{2} \\ x_3 = \dfrac{14-m}{2} \end{array}\right.$ (x_1, x_2, x_3 là các nghiệm đơn).

Suy ra hàm số (1) có 3 điểm cực trị (2 cực tiểu và 1 cực đại vì là hàm bậc 4 có hệ số $a > 0$).

Đồ thị hàm số $y = f\left(|4-2x| + m - 6\right)$ gồm 2 phần:

Phần 1: Đồ thị hàm số (1) phía bên phải đường thẳng $x = 2$.

Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua đường thẳng $x = 2$.

Do đó hàm số $y = f\left(|4-2x| + m - 6\right)$ có 3 điểm cực tiểu thì hàm số $y = f\left[(2x-4) + m - 6\right]$ có 3 cực trị x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$ và thỏa mãn $\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_2 > 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9-m}{2} \leq 2 \\ \dfrac{11-m}{2} > 2 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq m < 7 \Rightarrow m \in \{5;6\} \Rightarrow S = 11.$$

Câu 28: Chọn D

Ta có $f'(x) = x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có $y' = \left(3x^2 - 6x - 9\right) f'\left(x^3 - 3x^2 - 9x + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \\ x^3 - 3x^2 - 9x = -m - 3 \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 - 9x = -m + 2 \quad (2) \end{array}\right.$.

Xét $h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x;\ h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$
					$-m+2$		
					$-m-3$		

Để hàm số $y = f\left(x^3 - 3x^2 - 9x + m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị thì

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m + 2 \geq 5 \\ -27 < -m - 3 < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} -27 < -m + 2 < 5 \\ -m - 3 \leq -27 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8 < m \leq -3 \\ 24 \leq m < 29 \end{array}\right..$$

Vậy có 10 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(x^3 - 3x^2 - 9x + m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị.

Câu 29: Chọn D

Từ giả thiết $y' = ax\left(x^2 - 1\right)\left(a > 0\right) \Rightarrow y = ax^4 - \dfrac{a}{2}x^2 + c$.

Theo bài ra $\begin{cases} y(0) = 3 \\ y(1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ \dfrac{a}{4} - \dfrac{a}{2} + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

$g(x) = \left(x^3 - x\right)\left[f(x+1)\right]^2 \Rightarrow g'(x) = \left(3x^2 - 1\right)\left[f(x+1)\right]^2 + 2f'(x+1)\left(x^3 - x\right)f(x+1)$

$\Rightarrow g'(x) = f(x+1)\left[\left(3x^2 - 1\right)f(x+1) + 2f'(x+1)\left(x^3 - x\right)\right]$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x+1) = 0 \ (2) \\ \left(3x^2 - 1\right)f(x+1) + 2f'(x+1)\left(x^3 - x\right) = 0 \ (3) \end{array}\right.$

Giải $f(x+1) = 0\ (2)$.

Dựa vào đồ thị phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.

Giải $\left(3x^2 - 1\right)f(x+1) + 2f'(x+1)\left(x^3 - x\right) = 0\ (3)$

Hay $\left(3x^2 - 1\right)\left[5(x+1)^4 - 10(x+1)^2 + 3\right] + 40\left[(x+1)^3 - (x+1)\right]\left(x^3 - x\right) = 0$ (4)

Đặt $h(x) = \left(3x^2 - 1\right)\left[5(x+1)^4 - 10(x+1)^2 + 3\right] + 40\left[(x+1)^3 - (x+1)\right]\left(x^3 - x\right)$

$y=h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$h(-3)=6878, h(-2)=-22, h(-1)=6, h(-0.5)=\dfrac{-373}{64}, h(0)=2, h(0.5)=-\dfrac{1893}{64}, h(1)=86$

Ta có $\begin{cases} h(-3).\,h(-2)<0 \\ h(-2).\,h(-1)<0 \\ h(-1).h(-0.5)<0 \\ h(-0.5).h(0)<0 \\ h(0).h(0.5)<0 \\ h(0.5).h(1)<0 \end{cases}$ (5)

$y=h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $y=h(x)$ liên tục trên các đoạn

$[-3,-2],[-2;-1],[-1;-0.5],[-0.5;0],[0;0.5],[0.5;1]$ (6).

Từ (5) và (6) phương trình (4) có ít nhất 6 nghiệm đơn

$-3<x_5<-2,-2<x_6<-1,-1<x_7<-0.5,-0.5<x_8<0,0<x_9<0.5,0.5<x_{10}<1$.

Mà phương trình bậc 6 có tối đa 6 nghiệm nên (4) chỉ có 6 nghiệm phân biệt đơn nên đổi dấu

Vậy hàm số $g(x)=(x^3-x)\left[f(x+1)\right]^2$ có 10 điểm cực trị.

Câu 30: Chọn A

Ta thấy $f'(x^2-1)=a(x-2)(x+2)x^2=a(x^4-4x^2)=a\left[(x^2-1)^2-2(x^2-1)-3\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x^2-1)=-\infty \Rightarrow a<0$. Suy ra $f'(x)=a(x^2-2x-3)$

Đặt $u=|x-2|+|x^2-1|$

Suy ra $u(x)=\begin{cases} x^2+x-3, \ x\ge 2 \\ x^2-x+1, \ 1\le x<2 \\ -x^2-x+3, \ -1<x<1 \\ x^2-x+1, \ x\le -1 \end{cases} \Rightarrow u'(x)=\begin{cases} 2x+1, \ x>2 \\ 2x-1, \ 1<x<2 \\ -2x-1, \ -1<x<1 \\ 2x-1, \ x<-1 \end{cases}$ ta thấy $u'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘ 3	1		↗ 3		↗
$f(u)$	↗		↘	↗	↘		↗		↘		

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực đại.

Câu 31: Chọn A

Hàm số $y = g(x) = 2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2 + 12f(x) + 2021$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6.f^2(x).f'(x) - 18f(x).f'(x) + 12f'(x) = 6f'(x)\left[f^2(x) - 3f(x) + 2\right]$.

Giải phương trình đạo hàm: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \\ f(x) = 2 & (3) \end{array}\right.$.

Từ (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Từ (2), ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-\infty;1) \\ x = 2\ (\text{Nghieäm keùp}) \\ x = b \in (3;4) \\ x = c \in (4;+\infty) \end{array}\right.$.

Từ (3), ta có $f(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = d \in (a;1) \\ x = e \in (1;2) \\ x = 3(\text{nghieäm keùp}) \\ x = u \in (c;+\infty) \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu, ta có

x	$-\infty$		a		d		1		e		2		3		b		4		c		u		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	|	+	0	-	|	-	0	+	0	-	|	-	0	+	|	+	|	+	
$f(x)-1$		-	0	+	|	+	|	+	|	+	0	+	|	+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$f(x)-2$		-	|	-	0	+	|	+	0	-	|	-	0	-	|	-	|	-	|	-	0	+	
y'		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực đại.

Câu 32: Chọn C

Ta có: $g'(x) = \dfrac{2(x-1)(|x-1|-1)}{|x-1|} f'\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1\right)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ f'\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m - 1\right) = 0 \end{array}\right.$; $g'(x)$ không xác định tại $x = 1$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta có

$$f'\left(x^2-2|x-1|-2x+m-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2|x-1|-2x+m-1=1 \\ x^2-2|x-1|-2x+m-1=2 \\ x^2-2|x-1|-2x+m-1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2|x-1|-2x=2-m \\ x^2-2|x-1|-2x=3-m \\ x^2-2|x-1|-2x=4-m \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x)=x^2-2|x-1|-2x$, ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho có 9 cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-m\ge -1 \\ -2<3-m<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 3 \\ 4<m<5 \end{array}\right. \Rightarrow m\in\left\{2;3;\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right\}$.

Vậy có bốn giá trị của m.

Câu 33: Chọn B

Bảng xét dấu của $y=f'(x)$

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)$. Ta có $g'(x)=(2x+4)f'\left(x^2+4x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4=0 \\ f'\left(x^2+4x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+4x=-4 \\ x^2+4x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-2\pm\sqrt{5} \end{array}\right..$$

$f'\left(x^2+4x\right)$ không xác định khi $x^2+4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Xét bất phương trình $f'\left(x^2+4x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x^2+4x<0 \\ x^2+4x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-2 \\ -2<x<0 \\ x<-2-\sqrt{5} \\ x>-2+\sqrt{5} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $y=g'(x)$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-4		-2		0		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x+4$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f'(x^2+4x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Do hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y=g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)$ có năm điểm cực trị.

Câu 34: Chọn B

Tập xác định của $g(x): D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Nhận thấy hàm số $g(x)=f\left(|x|\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)-m\right)$ là hàm số chẵn.

Xét trường hợp $x>0$: $g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}-m\right)$.

Giải phương trình đạo hàm $g'(x)=f'\left(x+\sqrt{x^2+1}-m\right).\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Xét phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x+\sqrt{x^2+1}-m\right).\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=0$ $\quad(*)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\sqrt{x^2+1}-m=-1\\x+\sqrt{x^2+1}-m=1\\x+\sqrt{x^2+1}-m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x+\sqrt{x^2+1}=m-1 & (1)\\x+\sqrt{x^2+1}=m+1 & (2)\\x+\sqrt{x^2+1}=m+3 & (3)\end{array}\right.$$

Để hàm số $g(x)=f\left(|x|\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)-m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình phải có ít nhất 2 nghiệm dương phân biệt.

Do đó các phương trình,, phải có ít nhất 2 nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\quad \forall t>0$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	1 $\nearrow$ $+\infty$

Suy ra để có ít nhất 2 nghiệm dương phân biệt thì $m+1>1\Leftrightarrow m>0$.

Câu 35: Chọn D

Ta có $g(x)=g(-x),\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Do $x^3+2x+\sin x>0,\forall x\in(0;+\infty)$ và không tồn tại $(a;b)$ để $g'(x)=0,\forall x\in(a;b)$ nên hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị khi hàm số $h(x)=f\left(x^3-x^2+2x+\sin x+2+m\right)$ có đúng 2 điểm cực trị dương.

Ta có $h'(x)=\left(3x^2-2x+2+\cos x\right)f'\left(x^3-x^2+2x+\sin x+2+m\right)$.

Dễ thấy $3x^2-2x+2+\cos x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Suy ra $h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^3-x^2+2x+\sin x+2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-x^2+2x+\sin x=-m\\x^3-x^2+2x+\sin x=-m-2\\x^3-x^2+2x+\sin x=-m-4\end{array}\right.$

Đặt $u = x^3 - x^2 + 2x + \sin x \Rightarrow u' = 3x^2 - 2x + 2 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u'			$+$		
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta thấy, hàm số $h(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương khi

$\begin{cases} -m-2>0 \\ -m-4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4;-2)$. Vậy số giá trị nguyên cần tìm của m là 2.

Câu 36: Chọn B

Theo giả thiết thì $g(x)$ là hàm số bậc ba thỏa mãn $g(x) = f(x+1)$ nên ta có $f(x)$ cũng là hàm số bậc ba. Suy ra $f'(x) = ax^2 + bx + c$, do đó $f'(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác $g(x) = f(x+1) \Leftrightarrow g'(x) = f'(x+1)$.

Do đó $(x-1)g'(x+3) = (x+1)g'(x+2) \Leftrightarrow (x-1)f'(x+4) = (x+1)f'(x+3)$.

Với $x = 1 \Rightarrow 2f'(4) = 0$; $x = -1 \Rightarrow -2f'(3) = 0$.

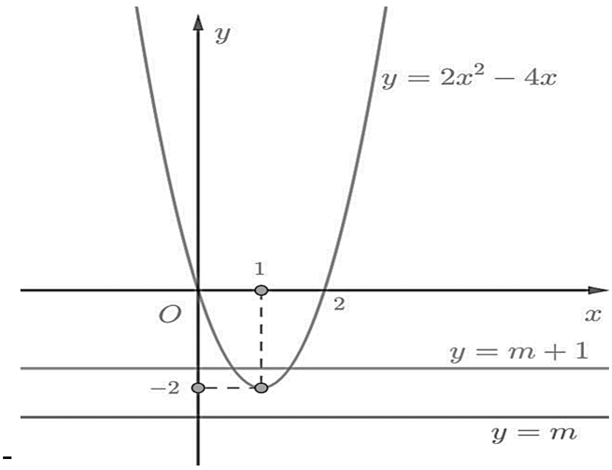
Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Ta có $y = f\left(2x^2 - 4x + 3 - m\right) \Rightarrow y' = (4x-4)f'\left(2x^2 - 4x + 3 - m\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 - 4x + 3 - m = 3 \\ 2x^2 - 4x + 3 - m = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^2 - 4x = m \\ 2x^2 - 4x = 1 + m \end{array}\right. .$$

Hàm số $y = f\left(2x^2 - 4x + 3 - m\right)$ có đúng ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng 3 nghiệm đơn hoặc bội lẻ.

Xét sự tương giao giữa đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 4x$ với hai đường $y = m$ và $y = m + 1$ như sau:



Do đó $y' = 0$ có đúng 3 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khi và chỉ khi $-3 < m \le -2$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Chọn B

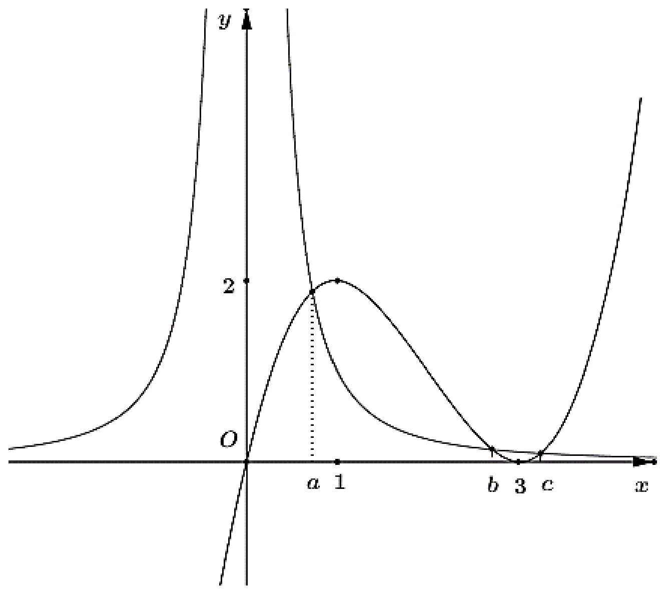
Ta có: $g(x)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)-x^2=f\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-x^2$.

Đạo hàm $g'(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)'f'\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-2x=\dfrac{2}{x^3}f'\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-2x$.

Giải phương trình đạo hàm $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{x^3}f'\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=2x\Leftrightarrow f'\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2}\ (*)$.

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)-x^2$ là số giao điểm (không tính điểm tiếp xúc) của đồ thị hàm số $y=f'\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ trên cùng một hệ trục với đồ thị hàm số $y=f'(1-x)$, ta được:



$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^2}=a\in(0;1)\\ \dfrac{1}{x^2}=b\in(1;3)\\ \dfrac{1}{x^2}=c\in(3;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{a}\\ x^2=\dfrac{1}{b}\\ x^2=\dfrac{1}{c}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{a}}\\ x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{b}}\\ x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{c}}\end{array}\right..$$

Vậy hàm số có 6 điểm cực trị.

Câu 38: Chọn A

Điều kiện $f\left(-x^2+2x\right)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+2x\neq 0\\ -x^2+2x\neq a\ \ (a<-1)\\ -x^2+2x\neq b\ \ (\text{b}>1)\ \ (\forall x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\\ x\neq 1+\sqrt{1-a}\\ x\neq 1-\sqrt{1-a}\end{cases}$.

Ta có $y=\dfrac{f\left(-x^2+2x\right)+2021}{f\left(-x^2+2x\right)}=1+\dfrac{2021}{f\left(-x^2+2x\right)}\Rightarrow y'=\dfrac{-2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)}{f^2\left(-x^2+2x\right)}$

Do đó $y'=0\Leftrightarrow \dfrac{-2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)}{f^2\left(-x^2+2x\right)}=0$

$\Leftrightarrow -2021(-2x+2)f'\left(-x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ -x^2+2x=-1\\ -x^2+2x=0\\ -x^2+2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=1\pm\sqrt{2}\\ x=0;x=2\notin TXĐ\\ \left(x-1\right)^2=0\end{array}\right.$.

Vậy hàm số có 3 cực trị.

Câu 39: Chọn A

Xét hàm số $y=x^6+\left(4+m\right)x^5+\left(16-m^2\right)x^4+2$ có TXĐ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^5+5\left(4+m\right)x^4+4\left(16-m^2\right)x^3=x^3\left[6x^2+5\left(4+m\right)x+4\left(16-m^2\right)\right]$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ 6x^2+5\left(4+m\right)x+4\left(16-m^2\right)=0\end{array}\right.$.

Do $x=0$ là một nghiệm của phương trình $y'=0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ $\left(-\right)$ sang $\left(+\right)$ khi qua điểm $x=0$.

Đặt $g\left(x\right)=6x^2+5\left(4+m\right)x+4\left(16-m^2\right)$.

Trường hợp 1: $x=0$ là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=0$. Suy ra $m=4$ hoặc $m=-4$.

Với $m=4$, $g\left(x\right)=6x^2+40x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-\dfrac{20}{3}\end{array}\right.$.

Khi đó phương trình $y'=0$ có $x=0$ là nghiệm bội 4 nên y' không đổi dấu khi qua điểm $x=0$.
Suy ra $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số.
Vậy $m=4$ không thỏa mãn.
Với $m=-4$, loại do m là số nguyên dương.

Trường hợp 2: $x=0$ không là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=0$ hay $m\neq\pm4$.

Ta có $y'=x^3.g\left(x\right)$; $g\left(0\right)=4\left(16-m^2\right)$.

y' đổi dấu từ $\left(-\right)$ sang $\left(+\right)$ khi qua điểm $x=0$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}g\left(x\right)>0\\ \lim\limits_{x\to0^-}g\left(x\right)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 4\left(16-m^2\right)>0\Leftrightarrow -4<m<4$.

Mà m là số nguyên dương nên ta có $m\in\left\{1,2,3\right\}$ hay $S=\left\{1,2,3\right\}$.

Vậy tổng các phần tử của tập hợp S là $1+2+3=6$.

Câu 40: Chọn B

Ta có $y'=6x^5+5\left(2+m\right)x^4+4\left(4-m^2\right)x^3=x^3\left(6x^2+5\left(2+m\right)x+4-m^2\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=0\\6x^2+5(2+m)x+4-m^2=0(*)\end{cases}$.

$(*)$ có $\Delta=49m^2+100m+4=(49m+2)(m+2)$.

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases}\Delta>0\\\dfrac{-5(2+m)}{6}<0\end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}4-m^2>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<2$: $(*)$ có hai nghiệm âm phân biệt $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Lúc này $x=0$ là điểm cực tiểu.

Trường hợp 2: $\begin{cases}4-m^2<0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2$: $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $x_1,x_2\,(x_1<0<x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đây suy ra $x=0$ là điểm cực đại.

Trường hợp 3: $(*)$ có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x=0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Tổng các phần tử của S bằng 52.

Câu 41: Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=8x^7+5(m-2)x^4-4(m^2-4)x^3=x^3\left[8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)\right]=x^3.g(x)$,

với $g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)=-4(m^2-4)$.

Trường hợp 1: $g(0)<0\Leftrightarrow-4(m^2-4)<0\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Khi $x\to0^-$ thì $y'=x^3.g(x)\to0^+$; khi $x\to0^+$ thì $y'=x^3.g(x)\to0^-\Rightarrow y'$ đổi dấu từ dương sang âm qua $x=0\Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Trường hợp 2: $g(0)>0\Leftrightarrow-4(m^2-4)>0\Leftrightarrow m\in(-2;2)$.

Khi $x\to0^-$ thì $y'=x^3.g(x)\to0^-$; khi $x\to0^+$ thì $y'=x^3.g(x)\to0^+\Rightarrow y'$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=0\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Trường hợp 3: $g(0)=0\Leftrightarrow-4(m^2-4)=0\Leftrightarrow m=\pm2$

Với $m=2$, ta có $y'=8x^7\Rightarrow y'$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=0\Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại

$x=0$.

Với $m=-2$, ta có $y'=x^3\left(8x^7-20x\right)=x^4\left(8x^6-20\right)\Rightarrow y'$ không đổi dấu qua $x=0\Rightarrow$ hàm số không đạt cực trị tại $x=0$.

Như vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0\Leftrightarrow m\in\left(-2;2\right]$. Do m nguyên nên $m\in\left\{-1;0;1;2\right\}$.

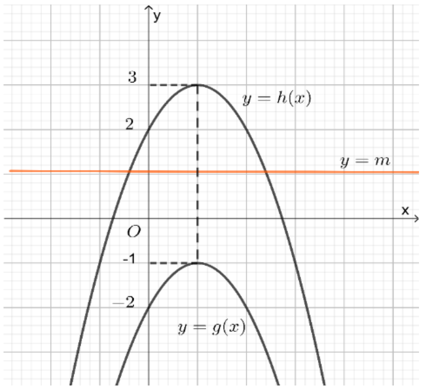
Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42: Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x+m+1\right)$ có $y'=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x+m+1\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x+m+1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x+m+1=-1\\ x^2-2x+m+1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ -x^2+2x-2=m\\ -x^2+2x+2=m\end{array}\right..$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=g\left(x\right)=-x^2+2x-2$ và $y=h\left(x\right)=-x^2+2x+2$.



Để hàm số $y=f\left(x^2-2x+m+1\right)$ có 3 điểm cực trị thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hai hàm số trên tại hai điểm phân biệt khác 1 hoặc 3 điểm phân biệt trong đó có một điểm có hoành độ bằng $x=1$ $\Leftrightarrow -1\le m<3$. Vì m nguyên nên $m\in\left\{-1,0,1,2\right\}$.

Câu 43: Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C_m\right)$ và trục Ox là: $x^3-3x^2-\left(m^2-2\right)x+m^2=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2-2x-m^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-m^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1\pm\sqrt{1+m^2}\end{array}\right..$$

Suy ra $\left(C_m\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $A\left(1-\sqrt{1+m^2};0\right),B\left(1;0\right),C\left(1+\sqrt{1+m^2};0\right)$ và $AC=2\sqrt{1+m^2}$.

Ta có, $y'=3x^2-6x-m^2+2$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-m^2+2=0\left(1\right)$, phương trình $\left(1\right)$ luôn có 2 nghiệm x_1,x_2 với mọi giá trị của tham số m.

Áp dung định lý Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1.x_2=\dfrac{-m^2+2}{3}\end{cases}$.

Gọi hai điểm cực trị là $M\left(x_1;y_1\right),N\left(x_2;y_2\right)$.

Đường thẳng qua hai điểm cực trị M,N là $y=-\frac{2}{3}\left(m^2+1\right)x+\frac{2m^2+2}{3}$.

Nên ta có $MN=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\left(x_2-x_1\right)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)\left(\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1x_2\right)}$

$=\sqrt{\left(1+\frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)\left(4-\frac{4}{3}\left(2-m^2\right)\right)}=\sqrt{\frac{4}{3}\left(1+m^2\right)+\frac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3}$

Theo giả thiết $MN=AC$

$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{4}{3}\left(1+m^2\right)+\frac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3}=2\sqrt{1+m^2}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\left(1+m^2\right)+\frac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3=4\left(1+m^2\right)$

$\Leftrightarrow\frac{4}{3}\left(1+m^2\right)+\frac{16}{27}\left(1+m^2\right)^3=4\left(1+m^2\right)\Leftrightarrow\frac{4}{3}+\frac{16}{27}\left(1+m^2\right)^2=4\Leftrightarrow\left(1+m^2\right)^2=\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow 1+m^2=\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}-1}$.

Câu 44: Chọn D

Ta có $y=-(m-2)(m+2)(m+1)x^4-2(m+1)x^2+3$.

Trường hợp 1: $m=2\Rightarrow y=-6x^2+3$, thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m=-2\Rightarrow y=2x^2+3$, loại.

Trường hợp 3: $m=-1\Rightarrow y=3$, loại.

Trường hợp 4: $\begin{cases}2(m-2)(m+2)(m+1)^2<0\\-(m-2)(m+2)(m+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)(m+2)<0\\m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<2.$

Trường hợp 5: $\begin{cases}2(m-2)(m+2)(m+1)^2>0\\-(m-2)(m+2)(m+1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)(m+2)>0\\m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2.$

Vậy $m>-1.$

Câu 45: Chọn B

Ta có $y=4x^4-8mx^2+3m^2+2\Rightarrow y'=16x^3-16mx$

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow 16x^3-16mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\ \ (*)\end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị A,B,C khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt, tức là phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A\left(0;3m^2+2\right)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+2\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+2\right)$

.

Nhận xét: Tam giác ABC luôn cân tại A và có Oy là trục đối xứng. Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC suy ra $AH\equiv Oy$ và AH là đường cao cũng là đường phân giác trong góc A nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác thì $I\in AH$ hay $I\in Oy$.

Vì tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp nằm trên đường thẳng $x+y-2=0$ nên I là giao điểm của đường thẳng $x+y-2=0$ với Oy. Suy ra tọa độ của I là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow I(0;2)$.

Phương trình đường thẳng $BC: y=-m^2+2$.

Phương trình đường thẳng $AC: \dfrac{x}{\sqrt{m}}=\dfrac{y-3m^2-2}{-4m^2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{m}}+\dfrac{y-3m^2-2}{4m^2}=0$

$\Leftrightarrow 4m\sqrt{m}x+y-3m^2-2=0.$

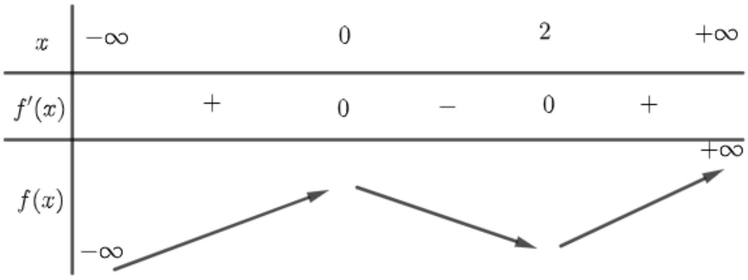
Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác nên $d(I,AC)=d(I,BC)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3m^2}{\sqrt{16m^3+1}}=m^2 \quad (m>0) \Leftrightarrow \sqrt{16m^3+1}=3 \Leftrightarrow 16m^3+1=9 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (thỏa mãn).

Vậy $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 46: Chọn C

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:



Cách 1: Giải trực tiếp

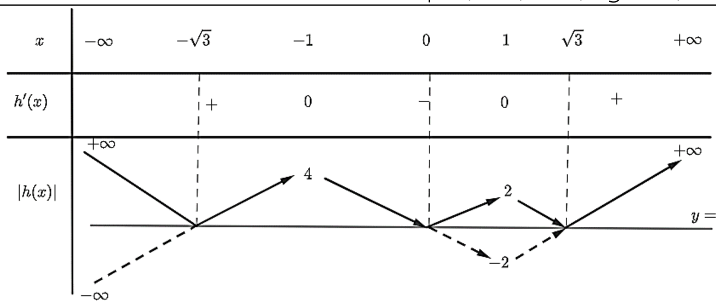
Ta có: $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right) \Rightarrow y'=\dfrac{\left(x^3-3x\right)\left(3x^2-3\right)}{\left|x^3-3x\right|}f'\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$

Phương trình $y'=0$ hoặc y' không xác định khi: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm1 \\ f'\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm1 \\ \left|x^3-3x\right|+m=0 \\ \left|x^3-3x\right|+m=2 \end{array}\right.$

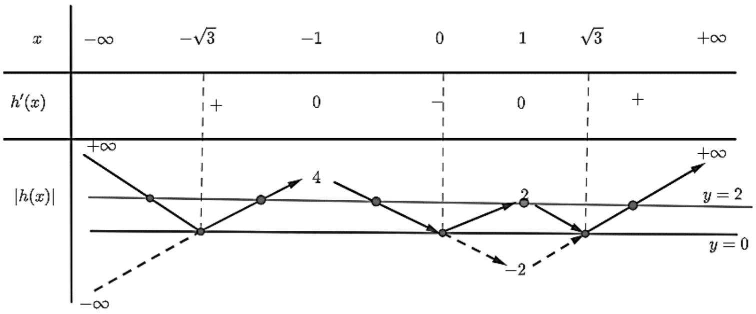
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm1 \\ \left|x^3-3x\right|=-m \\ \left|x^3-3x\right|=2-m \end{array}\right.$.

Đặt $h(x)=x^3-3x \Rightarrow h'(x)=3x^2-3$ có đạo hàm $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm1$.

Bảng biến thiên của hàm số $\left|h(x)\right|$:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có 7 cực trị thì số nghiệm bội lẻ của phương trình $y'=0$ phải là 7.



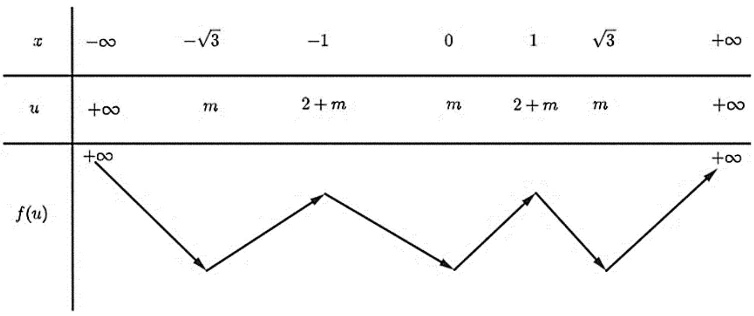
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m=2 \\ -m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên là $m=0$ thoả mãn hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 cực trị.

Cách 2: Ghép trục kết hợp với phương pháp đánh giá

Đặt $u=\left|x^3-3x\right|+m \Rightarrow u'=\dfrac{\left(x^3-3x\right)\left(3x^2-3\right)}{\left|x^3-3x\right|}$.

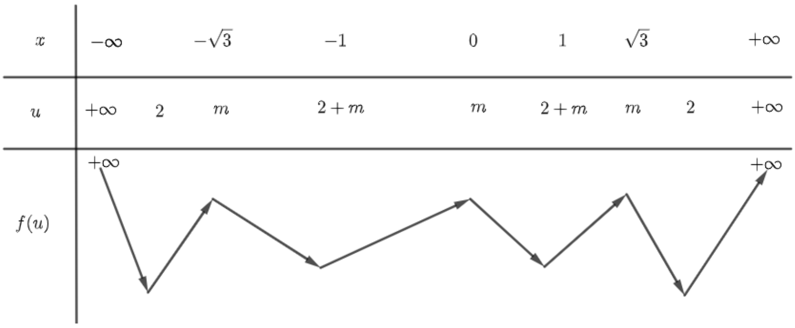
Cho $u'=0$ hoặc u' không xác định khi: $\left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=\pm 1 \\ u=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.



Kết hợp với bảng biến thiên của $y=f(x)$, ta thấy để hàm số $y=f(u)$ có 7 cực trị thì $m<2$ và trong $(m;2+m)$ không chứa điểm cực trị nào của $f(x)$.

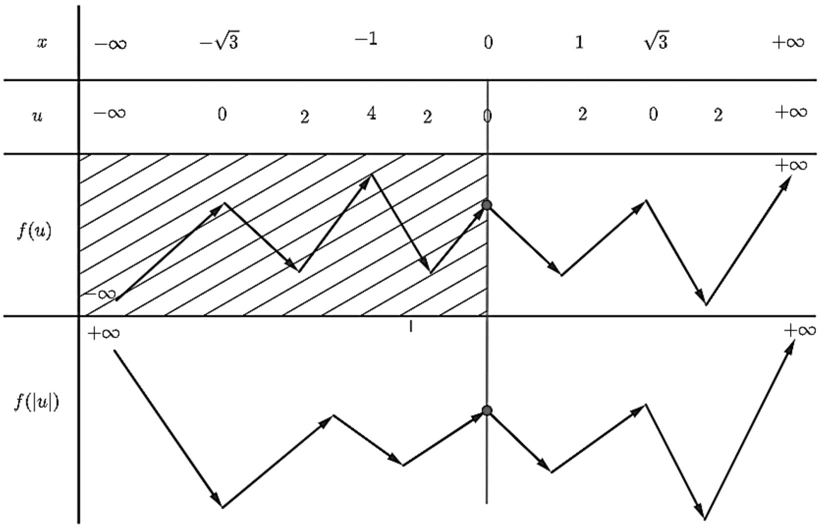
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m=0$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên là $m=0$ thoả mãn hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x\right|+m\right)$ có đúng 7 cực trị.



Cách 3: Ghép trục kết hợp với phương pháp tịnh tiến đồ thị.

Đặt $u = x^3 - 3x \Rightarrow u' = 3x^2 - 3$. Cho $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = 1 \end{array}\right.$.



Hàm số $y = f\left(\left|u\right| + m\right)$ được tạo thành từ việc tịnh tiến qua trái m đơn vị $\left(m > 0\right)$, rồi lấy đối xứng qua trục Oy.

Ta thấy để hàm số $y = f\left(\left|u\right| + m\right)$ có 7 cực trị thì số cực trị dương của $f\left(u + m\right)$ phải là 3 $\Rightarrow 0 \le m < 1$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên là $m = 0$ thoả mãn hàm số $y = f\left(\left|x^3 - 3x\right| + m\right)$ có đúng 7 cực trị.

Câu 47: Chọn D

Ta có $f'\left(x\right) = \left(x+3\right)\left(x-4\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Tính đạo hàm, $y' = f'\left(\left|x^2 - 3x + m\right|\right)\dfrac{x^2 - 3x + m}{\left|x^2 - 3x + m\right|}\left(2x - 3\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 3x + m = 0 \\ \left|x^2 - 3x + m\right| = -3\ \left(VN\right) \\ \left|x^2 - 3x + m\right| = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - 3x + m = 4 \\ x^2 - 3x + m = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 3x = -m\ \left(1\right) \\ x^2 - 3x = 4 - m\ \left(2\right) \\ x^2 - 3x = -4 - m\ \left(3\right) \end{array}\right.$$

Đặt $g\left(x\right) = x^2 - 3x$, khảo sát hàm số $y = g\left(x\right)$, ta được bảng biến thiên như bên dưới.

x	$+\infty$	$3/2$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{4}$	↗ $+\infty$ $-m+4$ $-m$ $-m-4$

Để hàm số có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $-m-4>\frac{-9}{4}\Leftrightarrow m<-\frac{7}{4}$.

Kết hợp với điều kiện $m\in[-10;5]$ suy ra tập giá trị m là $S=\{-10,-9,-8,...,-2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng -54.

Câu 48: Chọn D

Hàm số $y=\left|x^3+(m+2)x^2+mx-m^2\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y=x^3+(m+2)x^2+mx-m^2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow x^3+(m+2)x^2+mx-m^2=0\ (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

Ta có $x^3+(m+2)x^2+mx-m^2=0\Leftrightarrow (x+m)(x^2+2x-m)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-m\\ x^2+2x-m=0\ (2)\end{array}\right.$.

Để (1) có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác $-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m+1>0\\ m^2-3m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ m\neq 0, m\neq 3\end{cases}$.

Do m nguyên và $-4<m<6$ nên suy ra $m\in\{1;2;4;5\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 49: Chọn B

Xét phương trình $x^2-2mx+1=0$ có $\Delta'=m^2-1$.

Trường hợp 1. Nếu $\Delta'=m^2-1\le 0$ thì ta có :

Hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$. Dễ thấy hàm số này không tồn tại điểm cực đại.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta'=m^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>1\end{array}\right.$; khi đó hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2mx+1=0$ lần lượt là $x_1=m-\sqrt{m^2-1}; x_2=m+\sqrt{m^2-1}$.

Với $\left[\begin{array}{l}x\le x_1\\ x\ge x_2\end{array}\right.$ thì $y=f(x)=x^2-2mx+1+4x=x^2-2(m-2)x+1$ không có điểm cực đại.

Với $x_1<x<x_2$ thì $y=f(x)=-x^2+2mx-1+4x=-x^2+2(m+2)x-1$.

Hàm số này có điểm cực đại là: $x=m+2$ và giá tri cực đại là: $y=f(m+2)=m^2+4m+3$.

Suy ra điều kiện: $\begin{cases}x_1<x=m+2<x_2\\ f(m+2)=m^2+4m+3\in(3;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-\sqrt{m^2-1}<m+2<m+\sqrt{m^2-1}\\ 3<m^2+4m+3<4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2-1} > 2 \\ m^2+4m+3 < 4 \\ m^2+4m+3 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{5} \\ m > \sqrt{5} \end{array}\right. \\ -2-\sqrt{5} < m < -2+\sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -2-\sqrt{5} < m < -4.$$

Suy ra $10\left(-2-\sqrt{5}\right) < 10m < -40$

$\Rightarrow -42,3 < 10m < -40 \Rightarrow 10m \in \{-42;-41\} \Leftrightarrow m \in \{-4,2;-4,1\} = S$.

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 50: Chọn A

Đặt: $u = f^2(x) - 2f(x) \Rightarrow u' = 2f'(x)\left(f(x)-1\right)$.

Cho $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{a;2\} \\ x \in \{b;c;d\} \end{array}\right.$ trong đó $b < a < c < 2 < d$.

Bảng biến thiên của hàm số $u = f^2(x) - 2f(x)$:

x	$-\infty$		b		a		c				d		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	48	↘	-1	↗	15	↘	-1	↗	$+\infty$

Mặt khác: $g(x) = f\left(|u-m|\right) \Rightarrow g'(x) = \left(|u-m|\right)' f'\left(|u-m|\right)$. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|$ chính là số nghiệm nghiệm bội lẻ của hệ:

$$\left[\begin{array}{l} u-m=0 \\ \left(|u-m|\right)' = 0 \\ f'\left(|u-m|\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = m \\ x \in \{b;a;c;2;d\} \\ |u-m| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = m \\ x \in \{b;a;c;2;d\} \\ u \in \{m-2;m+2\} \end{array}\right.$$

Hàm số $g(x) = f\left(\left|f^2(x) - 2f(x) - m\right|\right)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi:

$\begin{cases} -1 < m-2 < 15 \\ -1 < m+2 < 15 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 13$. Do m nguyên nên có 11 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 51: Chọn D

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + (1-3m)x + 2m^2 - 2m = 0 \, (*) \end{array}\right.$

$\Delta_{(*)} = (1-3m)^2 - 4\left(2m^2-2m\right) = (m+1)^2$.

$g'(x) = f'\left(|x|+m\right).\dfrac{x}{|x|}$

Trường hợp 1: $m = -1$.

Phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ |x|+m=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ |x|=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy nhận $m=-1$.

Trường hợp 2: $m \neq -1$. Khi đó $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $m-1$ và $2m$.

Phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ |x|+m=1 \\ |x|+m=m-1 \\ |x|+m=2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ |x|=1-m \\ |x|=-1(VN) \\ |x|=m \end{array}\right.$

Khả năng 1: $1-m>m \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1-m>0 \Leftrightarrow m<1$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{1}{2} \\ m\neq -1 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in[-5;5]} m\in\{-5;-4;-3;-2;0\}$.

Khả năng 2: $1-m<m \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m>0$.

Vậy $m>\dfrac{1}{2} \xrightarrow{m\in[-5;5]} m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 11 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 52: Chọn D

Với mỗi tham số m thì số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)+2022m^3$

và $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ bằng nhau.

Do đó ta chỉ cần tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$

có đúng 11 điểm cực trị.

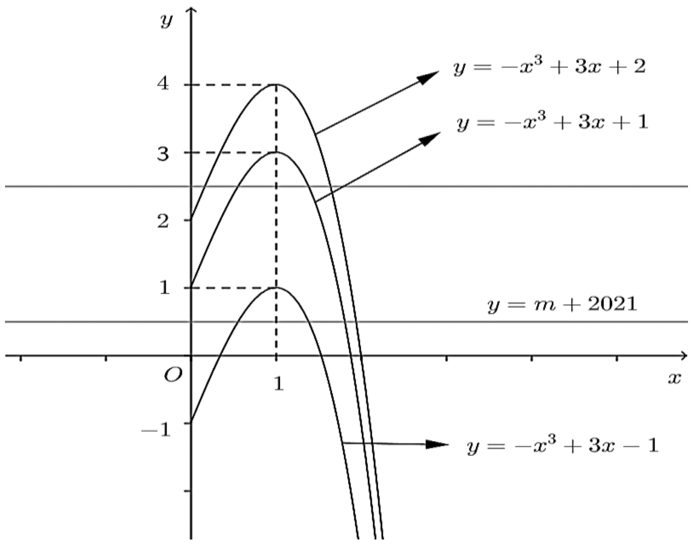
Xét $x>0$: Hàm số có dạng $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$.

Khi đó ta có đạo hàm như sau: $y'=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+m+2021\right)$.

Do nghiệm của phương trình $x^3-3x+m+2021=4$ là các nghiệm bội bậc chẵn của phương trình $y'=0$ nên ta chỉ cần quan tâm đến các nghiệm còn lại. Tức là

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-3=0 \\ f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0 \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (\text{do } x>0) \\ x^3-3x+m+2021=-1 \\ x^3-3x+m+2021=1 \\ x^3-3x+m+2021=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (\text{do } x>0) \\ m+2021=-x^3+3x-1 \\ m+2021=-x^3+3x+1 \\ m+2021=-x^3+3x+2 \end{array}\right.$$

Vẽ đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ với $x>0$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $y=f\left(|x|^3-3|x|+m+2021\right)$ có đúng 11 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(x^3-3x+m+2021\right)$ có đúng 5 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'\left(x^3-3x+m+2021\right)=0$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ dương và khác 1

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=m+2021$ cắt đồ thị ba hàm số $y=-x^3+3x-1$; $y=-x^3+3x+1$; $y=-x^3+3x+2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ dương khác 1

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<m+2021<1\\2<m+2021<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2022<m<-2020\\-2019<m<-2018\end{array}\right.$.

Do điều kiện m nguyên nên $m=-2021$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 53: Chọn B

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=12\\x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		12		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	

Do đó hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=0$ và $x=2$.

Xét $y=f\left(x^2-2022x+2021m\right)$ có $y'=(2x-2022).f'\left(x^2-2022x+2021m\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1011\\f'\left(x^2-2022x+2021m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2022x+2021m=0\\x^2-2022x+2021m=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2022x=-2021m\\x^2-2022x-2=-2021m\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Xét các hàm số $g(x)=x^2-2022x$ và $h(x)=x^2-2022x-2$, với $x>0$.

$g'(x)=2x-2022$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1011$

Bảng biến thiên:

x	0		1011		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1011^2	$\nearrow$	$+\infty$
$h(x)$	-2	$\searrow$	-1011^2-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1011^2-2<-2021m\le -1011^2 \\ -2021m\ge 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1022121}{2021}\le m<\dfrac{1022123}{2021} \\ m\le 0 \end{array}\right.$.

Kết hợp với giả thiết $\Rightarrow m\in\{-2020;-2019;...;0\}$

Câu 54: Chọn D

Xét $f'(x)=x^2+10x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-10 \end{array}\right.$.

Xét $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)\Rightarrow y'=\left(4x^3-16x\right)f'\left(x^4-8x^2+m\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3-16x=0 \\ f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình: $4x^3-16x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Xét phương trình: $f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-8x^2+m=0 \\ x^4-8x^2+m=-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -x^4+8x^2=m & (1) \\ -x^4+8x^2=m+10 & (2) \end{array}\right.$.

Để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị thì phương trình $f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0$ cần có 6 nghiệm đơn $x\ne 0$ và $x\ne\pm 2$.

Xét hàm số $g(x)=-x^4+8x^2$ có $g'(x)=-x^3+16x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	$-\infty$

Xét hai đường thẳng $d_1: y=m, d_2: y=m+10$ song song với trục Ox.

Vì $m+10>m$ $(\forall m\in\mathbb{R})$, nên đường thẳng d_2 nằm trên đường thẳng d_1.

Phương trình (1) có 2 nghiệm và phương trình (2) có 4 nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m + 10 < 16 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < m < 0$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $\Leftrightarrow m \in \{-9;...;-1\}$.

Vì $x = 0$ đã là cực trị của hàm số $y = f\left(x^4 - 8x^2 + m\right)$ nên ta lấy cả trường hợp $m = 0$.

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho hàm số xác định trên *D*
  - Số A được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên *D* nếu:

$$\begin{cases} f\left(x\right) \le A; \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f\left(x_0\right) = A \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } A = \max_{x \in D} f\left(x\right)$$

  - **Chú ý:** Nếu $f\left(x\right) \le A; \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $A = \max_{x \in D} f\left(x\right)$
  - Số a được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu:

$$\begin{cases} f\left(x\right) \ge a; \forall x \in D \\ \exists x_o \in D : f\left(x_0\right) = a \end{cases}, \text{ ta kí hiệu } a = \min_{x \in D} f\left(x\right)$$

  - **Chú ý:** Nếu $f\left(x\right) \ge a; \forall x \in D$ thì ta chưa thể suy ra $a = \min_{x \in D} f\left(x\right)$

2. Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số hai biến.

- Các bài toán hai biến *(Yêu cầu: tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hoặc tìm tập giá trị).*
  - Sử dụng phương pháp thế $y = h\left(x\right)$ từ giả thiết vào biểu thức *P* cần tìm cực trị, khi đó $P = f\left(x\right)$ với $x \in [a;b] \to$ đưa về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của bài toán một biến.
  - Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản (có thể dùng để giải quyết các bài toán một biến)
  - Bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực không âm

$$a + b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 4ab \le \left(a+b\right)^2 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 \ge 0$$

  - Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho các số thực *a, b, c, d*

$$\left(ax+by\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right). \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

- Một số bổ đề cơ bản dùng trong các bài toán hai biến
  - $xy \le \dfrac{\left(x+y\right)^2}{4} \le \dfrac{\left(x^2+y^2\right)}{2}$ và $x^2 + xy + y^2 \ge \dfrac{3}{4}(x+y)^2$

- $x^3+y^3 \ge \dfrac{(x+y)\left(x^2+y^2\right)}{2} \ge \dfrac{(x+y)^3}{4} \ge xy(x+y)$
- Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân số $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$

3. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối

- **Bổ đề:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng A và a $\max\limits_{x\in D} f(x)=A$ và $\min\limits_{x\in D} f(x)=a$. Khi đó $\max\limits_{x\in D}\left|f(x)\right|=\max\left\{|A|;|a|\right\}$.

Dạng 1: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ trên D luôn nhỏ hơn $k\,(k\in\mathbb{R})$

- **Bước 1:** Tìm $\min\limits_{x\in D} f(x)$ và $\max\limits_{x\in D} f(x)$, giả sử $\min\limits_{x\in D} f(x)=a$ và $\max\limits_{x\in D} f(x)=A$. Khi đó $\max\limits_{x\in D}\left|f(x)\right|=\max\left\{|A+m|;|a+m|\right\}$.
- **Bước 2:** Tìm m để $\max\left\{|A+m|;|a+m|\right\}<k \Leftrightarrow \begin{cases}|A+m|<k\\|a+m|<k\end{cases}$

VÍ DỤ 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ không vượt quá 20

A. 33 **B.** 36 **C.** 34 **D.** 35

LỜI GIẢI

Đặt $g(x)=x^3-12x+m \Rightarrow g'(x)=3x^2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\in(1;3)\\x=-2\notin(1;3)\end{array}\right.$

Ta có: $g(1)=m-11;\ g(2)=-16;\ g(3)=m-9$

Suy ra: $\min\limits_{[1;3]} g(x)=m-16;\ \max\limits_{[1;3]} g(x)=m-9$

Do đó: $\max\limits_{[1;3]}\left|g(x)\right|=\max\left\{|m-9|;|m-16|\right\}$

Từ đó suy ra: $\begin{cases}|m-9|\le 20\\|m-16|\le 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-20\le m-9\le 20\\-20\le m-16\le 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-11\le m\le 29\\-4\le m\le 36\end{cases} \Leftrightarrow -4\le m\le 29$

Vậy có 34 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Dạng 2: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ trên D bằng k

- **Bước 1:** Tìm $\min\limits_{x\in D} f(x)$ và $\max\limits_{x\in D} f(x)$, giả sử $\min\limits_{x\in D} f(x)=a$ và $\max\limits_{x\in D} f(x)=A$. Khi đó $\max\limits_{x\in D}\left|f(x)\right|=\max\left\{|A+m|;|a+m|\right\}$.
- **Bước 2:** Tìm m để $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|A+m|=k\\|a+m|\le k\end{cases}\\ \begin{cases}|A+m|\le k\\|a+m|=k\end{cases}\end{array}\right.$

VÍ DỤ 2: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 10. Tổng các phần tử của S bằng

A. 26 **B.** 40 **C.** 10 **D.** 25

✍ LỜI GIẢI

Đặt $g(x)=x^3-12x+m \Rightarrow g'(x)=3x^2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in(1;3) \\ x=-2\notin(1;3) \end{array}\right.$

Ta có: $g(1)=m-11;\ g(2)=-16;\ g(3)=m-9$. Suy ra: $\min\limits_{[1;3]} g(x)=m-16;\ \max\limits_{[1;3]} g(x)=m-9$

Do đó: $\max\limits_{[1;3]}\left|g(x)\right|=\max\left\{|m-9|;|m-16|\right\}$

Trường hợp 1: $\begin{cases} |m-9|=10 \\ |m-16|\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=19 \\ m=-1 \end{array}\right. \\ |m-16|\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow m=19.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} |m-9|\le 10 \\ |m-16|=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-9|\le 10 \\ \left[\begin{array}{l} m=26 \\ m=6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=6.$

Vậy $S=\{19;6\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 25.

Dạng 3: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ trên D đạt nhỏ nhất.

- **Bước 1:** Tìm $\min\limits_{x\in D} f(x)$ và $\max\limits_{x\in D} f(x)$, giả sử $\min\limits_{x\in D} f(x)=a$ và $\max\limits_{x\in D} f(x)=A$. Khi đó $\max\limits_{x\in D}\left|f(x)\right|=\max\left\{|A+m|;|a+m|\right\}$.
- **Bước 2:** Đặt $M=\max\left\{|A+m|;|a+m|\right\} \Rightarrow \begin{cases} M\ge |A+m| \\ M\ge |a+m| \end{cases} \Rightarrow 2M\ge |A+m|+|a+m|$

  $2M\ge |A+m|+|-a-m|\ge |A-a|$

  Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} |A+m|=|a+m| \\ |A+m|+|-a-m|\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow A+m=-a-m \Leftrightarrow m=-\dfrac{A+a}{2}$

VÍ DỤ 3: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ đạt nhỏ nhất

A. $m=\dfrac{25}{2}$ **B.** $m=5$ **C.** $m=\dfrac{12}{7}$ **D.** $m=\dfrac{50}{3}$

✍ LỜI GIẢI

Đặt $g(x)=x^3-12x+m$, dễ thấy $\min\limits_{[1;3]} g(x)=-16;\ \max\limits_{[1;3]} g(x)=-9$

Ta có: $m=\dfrac{A+a}{2}=\dfrac{-9-16}{2}=\dfrac{25}{2}$

Dạng 4: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$ trên D đạt nhỏ nhất.

- **Bước 1:** Nhận thấy, $y=\left|f(x)+m\right|\ge 0, \forall x\in D$ nên $\min\limits_{x\in D}\left|f(x)+m\right|\ge 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f(x)+m=0$ có nghiệm.
- **Bước 2:** Tìm m để phương trình $f(x)+m=0$ có nghiệm.

VÍ DỤ 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ đạt nhỏ nhất

A. $m=\dfrac{25}{2}$ **B.** $m=5$ **C.** $m=\dfrac{12}{7}$ **D.** $m=\dfrac{50}{3}$

✍ LỜI GIẢI

Nhận thấy $f(x)\ge 0,\forall x\in[1;3]$ nên $\min\limits_{x\in[1;3]} f(x)\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi phương trình $x^3-12x+m=0$ có nghiệm.

Vì $x^3-12x\in[-16;-9]$ khi $x\in[1;3]$ nên $-m\in[-16;-9]\Leftrightarrow m\in[9;16]$.

Dạng 5: Cho hàm số $y=\left|f(x)+m\right|$. Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y+\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=h\ (h>0)$

- **Bước 1:** Tìm $\min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)$ và $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)$, giả sử $\min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=a$ và $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=A$.
- **Bước 2:** $\begin{cases}\min\limits_{[\alpha;\beta]} y\in\left\{|A+m|;|a+m|\right\}\\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} y\in\left\{|A+m|;0;|a+m|\right\}\end{cases}$

Trường hợp 1: $a+m\ge 0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=a+m\\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} y=A+m\end{cases}\Rightarrow h=A+a+2m$.

Trường hợp 2: $A+m\le 0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=-a-m\\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} y=-A-m\end{cases}\Rightarrow h=-A-a-2m$

Trường hợp 3: $\begin{cases}a+m<0\\ A+m>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=0\\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left\{A+m;-a-m\right\}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}h=A+m\\ h=-a-m\end{array}\right.$

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=10$?

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 1

✍ LỜI GIẢI

Chọn C.

Đặt $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|=\left|f(x)\right|$. Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^3+x^2+a$

Khi đó $f'(x)=4x^3-6x^2+2x=2x(2x^2-3x+1)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;\dfrac{1}{2};1\right\}$.

$\Rightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;2]$ và $f(1)=a;f(2)=a+4$. Ta có $\forall x\in[1;2]$ thì $\begin{cases}\max y\in\left\{|a|,|a+4|\right\}\\ \min y\in\left\{|a|,0,|a+4|\right\}\end{cases}$.

Xét các trường hợp:

TH 1: $a\ge 0\Rightarrow\max y=a+4;\min y=a\Rightarrow 2a+4=10\Rightarrow a=3$ (nhận)

TH 2: $a\le -4\Rightarrow\max y=-a;\min y=-a-4\Rightarrow -a-4-a=10\Rightarrow a=-7$ (nhận)

TH 3: $\begin{cases}a<0\\ a+4>0\end{cases}\Leftrightarrow -4<a<0\Rightarrow\min y=0;\max y\in\left\{a+4;-a\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+4=10\\ -a=10\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\ a=-10\end{array}\right.$ (loại).

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ và hàm số $y=xf\left(x\right)$ cùng đạt cực tiểu tại $x=1$ và có tổng hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số bằng 4 (các nghiệm bội chỉ tính là một). Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};4\right]$ lần lượt là α và $2\alpha+1$. Giá trị của số thực α bằng

A. $-\frac{27}{320}$. **B.** $-\frac{16}{291}$. **C.** $-\frac{11}{108}$. **D.** $-\frac{32}{307}$.

LỜI GIẢI

Chọn D

Xét $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có $f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$ và $f''\left(x\right)=6ax+2b$

Xét $y=g\left(x\right)=xf\left(x\right)$ có $g'\left(x\right)=f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)$ và $g''\left(x\right)=2f'\left(x\right)+x.f''\left(x\right)$

Vì cả hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cùng đạt cực tiểu tại $x=1$ nên ta có

$$\begin{cases} f'\left(1\right)=0 \\ f''\left(1\right)>0 \\ g'\left(1\right)=0 \\ g''\left(1\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 6a+2b>0 \\ f\left(1\right)+1.f'\left(1\right)=0 \\ 2f'\left(1\right)+1.f''\left(1\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 & (1) \\ a+b+c+d=0 & (2) \\ 3a+b>0 & (3) \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ $f\left(x\right)=x.f\left(x\right) \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=0$ (4)

Từ (2) suy ra đa thức ax^3+bx^2+cx+d có nghiệm $x=1$.

Khi đó $ax^3+bx^2+cx+d=\left(x-1\right)\left[ax^2+\left(a+b\right)x+\left(a+b+c\right)\right]$

Từ đó suy ra phương trình (4) tương đương với $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ ax^2+\left(a+b\right)x+\left(a+b+c\right)=0 \quad (5) \end{array}\right.$

Từ (1) suy ra đa thức $ax^2+\left(a+b\right)x+\left(a+b+c\right)$ có nghiệm $x=1$. Như vậy để tổng các nghiệm của phương trình (4) bằng 4 thì phương trình (5) phải có một nghiệm bằng 1 và một nghiệm bằng 3, nên

$9a+3\left(a+b\right)+\left(a+b+c\right)=0 \Leftrightarrow 13a+4b+c=0$ (6)

Từ (1), (2), (3) và (6) ta được $\begin{cases} b=-5a \\ c=7a \\ d=-3a \\ a<0 \end{cases}$

Vậy $f\left(x\right)=ax^3-5ax^2+7ax-3a$ với $a<0$, ta có $f'\left(x\right)=3ax^2-10ax+7a$, $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{7}{3} \end{array}\right.$

x	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{7}{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{5a}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{32a}{27}$	$\searrow$	$9a$

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = -\dfrac{32a}{27}$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = 9a$. Ta có $\begin{cases} -\dfrac{32a}{27} = \alpha \\ 9a = 2\alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{32}{307} \\ a = \dfrac{27}{307} \end{cases}$

CÂU 2. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực nguyên tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{\left|x^3 - 3x^2 - m\right|}{\sqrt{\left(x^3 - 3x^2 - m\right)^2 + 25}}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng $\dfrac{12}{13}$. Tổng bình phương giá trị của các phần tử của S bằng:

A. 68. **B.** 80. **C.** 100. **D.** 41.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Ta có $f(x) = \dfrac{\left|x^3 - 3x^2 - m\right|}{\sqrt{\left(x^3 - 3x^2 - m\right)^2 + 25}} = \dfrac{\sqrt{\left(x^3 - 3x^2 - m\right)^2}}{\sqrt{\left(x^3 - 3x^2 - m\right)^2 + 25}}$

Đặt $t = x^3 - 3x^2 - m$ với $t \in [-4 - m; 16 - m]$. Khi đó xét hàm số $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 25}$

Ta có $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 25} \le \dfrac{144}{169} \Leftrightarrow t^2 \le 144$ với $t \in [-4 - m; 16 - m]$

$\begin{cases} (m+4)^2 \le 12^2 \\ (m-16)^2 \le 12^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le m \le 28 \\ -16 \le m \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le m \le 8$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 8 \end{array}\right.$

Thử lại:

Với $m = 4 \Rightarrow t \in [-8;12] \Rightarrow g(t) = \dfrac{144}{169} \Leftrightarrow t = 12$ (thỏa)

Với $m = 8 \Rightarrow t \in [-12;4] \Rightarrow g(t) = \dfrac{144}{169} \Leftrightarrow t = -12$ (thỏa)

Vậy $S = \{4;8\}$. Suy ra $4^2 + 8^2 = 80$

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng trên đoạn $[-1;1]$, hàm số $y = f\left(x^4 - 6x^2 - 4x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = m\cos\dfrac{n\pi}{p}$ ($m,n,p \in \mathbb{N}$; $n \le p$; $\dfrac{n}{p}$ là phân số tối giản). Giá trị $m + n.p$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 47. **D.** 65.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có $y' = \left(4x^3 - 12x - 4\right).f'\left(x^4 - 6x^2 - 4x\right)$.

Do $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 1$ **(1).**

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^3 - 3x - 1$ trên đoạn $[-1;1]$:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$-$	|	$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3

Suy ra $x^3-3x=1 \Leftrightarrow x=x_0 \in (-1;0)$. Đặt $x=2\cos t$, $t \in \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right)$, phương trình **(1)** trở thành:

$8\cos^3 t-6\cos t=1 \Leftrightarrow \cos 3t=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3t=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vì $t \in \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right)$ nên $t=\dfrac{5\pi}{9}$. Do đó trên đoạn $[-1;1]$, $y'=0 \Leftrightarrow x=2\cos\dfrac{5\pi}{9}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^4-6x^2-4x\right)$ trên đoạn $[-1;1]$:

x	-1		$2\cos\dfrac{5\pi}{9}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó, trên đoạn $[-1;1]$, hàm số $y=f\left(x^4-6x^2-4x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2\cos\dfrac{5\pi}{9}$.

Vậy $m=2$, $n=5$, $p=9$ hay $m+n.p=47$.

CÂU 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^{2021}-x$ với mọi số thực x, đồng thời $f(0)=2020$ và z,t là hai số thực tùy ý thỏa mãn $z>t\ge -1$. Giá trị lớn nhất của $f(t)-f(z)$ bằng

A. $\dfrac{1010}{1011}$. **B.** $-\dfrac{505}{1011}$. **C.** $-\dfrac{1010}{1011}$. **D.** $\dfrac{505}{1011}$.

LỜI GIẢI

Chọn D

Ta có $f'(x)=x^{2021}-x$ nên $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^{2021}-x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2022}x^{2022}-\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Mà $f(0)=2020 \Rightarrow C=2020$. Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2022}x^{2022}-\dfrac{1}{2}x^2+2020$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2022}x^{2022}-\dfrac{1}{2}x^2+2020$ có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^{2021}-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^{2020}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Trên $\left[-1;+\infty\right)$ để $f\left(t\right)-f\left(z\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì $f\left(t\right)$ đạt giá trị lớn nhất và $f\left(z\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Theo giả thiết thì $z>t\geq -1$ nên $\min\limits_{\left(-1;+\infty\right)} f\left(z\right)=f\left(1\right)=\dfrac{1}{2022}-\dfrac{1}{2}+2020$.

Do $t\in\left[-1;z\right)$ và $f\left(z\right)$ đạt GTNN tại $z=1$ nên $\max\limits_{\left(-1;1\right)} f\left(t\right)=f\left(0\right)=2020$.

Vậy giá trị lớn nhât của $f\left(t\right)-f\left(z\right)$ bằng $2020-\left(\dfrac{1}{2022}-\dfrac{1}{2}+2020\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2022}=\dfrac{505}{1011}$.

CÂU 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^5+bx^3+cx$, $\left(a>0,b>0\right)$ thỏa mãn $f\left(3\right)=-\dfrac{7}{3}$; $f\left(9\right)=81$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\max\limits_{\left[-1;5\right]}\left|g\left(x\right)\right|+\min\limits_{\left[-1;5\right]}\left|g\left(x\right)\right|=86$ với $g\left(x\right)=f\left(1-2x\right)+2.f\left(x+4\right)+m$. Tổng của tất cả các phần tử của S bằng

A. 11. **B.** -80. **C.** -148. **D.** -74.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Ta có: $f\left(x\right)=ax^5+bx^3+cx$, $\left(a>0,b>0\right)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)=5ax^4+3bx^2+c$.

Khi đó: $g'\left(x\right)=-2f'\left(1-2x\right)+2f'\left(x+4\right)$

$=-2\left[5a\left(1-2x\right)^4+3b\left(1-2x\right)^2+c\right]+2\left(x+4\right)\left[5a\left(x+4\right)^4+3b\left(x+4\right)^2+c\right]$

$=10a\left[\left(x+4\right)^4-\left(1-2x\right)^4\right]+6b\left[\left(x+4\right)^2-\left(1-2x\right)^2\right]$

$=10a\left[\left(\left(x+4\right)^2+\left(1-2x\right)^2\right)\left(\left(x+4\right)^2-\left(1-2x\right)^2\right)\right]+6b\left[\left(x+4\right)^2-\left(1-2x\right)^2\right]$

$=10a\left[\left(x+4\right)^2-\left(1-2x\right)^2\right]\left[\left(\left(x+4\right)^2+\left(1-2x\right)^2\right)+6b\right]$

$=30a\left(1+x\right)\left(5-x\right)\left[\left(\left(x+4\right)^2+\left(1-2x\right)^2\right)+6b\right]\geq 0\ \forall x\in\left[-1;5\right]$.

Suy ra hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[-1;5\right]$ nên ta có:

$g\left(-1\right)\leq g\left(x\right)\leq g\left(5\right)\Leftrightarrow f\left(3\right)+2f\left(3\right)+m\leq g\left(x\right)\leq f\left(-9\right)+2f\left(9\right)+m$

$\Leftrightarrow 3f\left(3\right)+m\leq g\left(x\right)\leq -f\left(9\right)+2f\left(9\right)+m$ (Do $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ)

$\Leftrightarrow 3f\left(3\right)+m\leq g\left(x\right)\leq f\left(9\right)+m \Leftrightarrow m-7\leq g\left(x\right)\leq m+81$

Trường hợp 1: Nếu $\left(m-7\right)\left(m+81\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>7\\ m<-81\end{array}\right.$ $\left(*\right)$ thì

$\max\limits_{\left[-1;5\right]}\left|g\left(x\right)\right|+\min\limits_{\left[-1;5\right]}\left|g\left(x\right)\right|=86\Leftrightarrow\left|m-7\right|+\left|m+81\right|=86$

$\Leftrightarrow\left|2m+74\right|=86\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-80\end{array}\right.$ (loại do $\left(*\right)$).

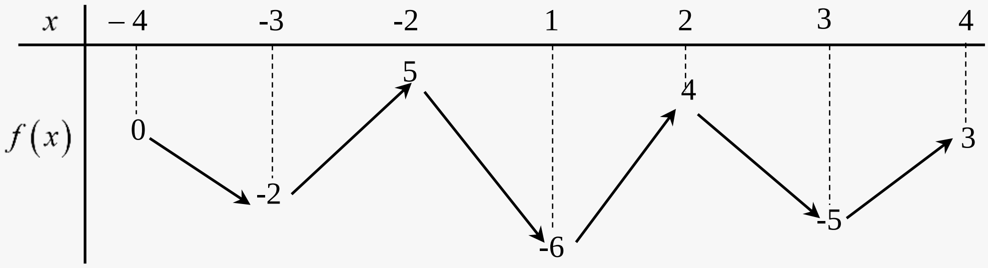
Trường hợp 2: Nếu $\left(m-7\right)\left(m+81\right)\leq 0\Leftrightarrow -81\leq m\leq 7$ $\left(**\right)$ thì $\begin{cases}\min\limits_{\left[-1;5\right]} g\left(x\right)=0\\ \max\limits_{\left[-1;5\right]} g\left(x\right)=\max\left\{7-m;m+81\right\}\end{cases}$.

Khi đó: $\max\limits_{\left[-1;5\right]}\left|g\left(x\right)\right|+\min\limits_{\left[-1;5\right]}\left|g\left(x\right)\right|=86\Leftrightarrow\max\left\{7-m;m+81\right\}=86$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+81=86\\7-m\le m+81\end{cases}\\\begin{cases}7-m=86\\m+81\le 7-m\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=5\\m=-79\end{array}\right.$$ (thỏa mãn).

Vậy tổng của tất cả các phần tử của S bằng: $5+(-79)=-74$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của $m\in[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 11. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

LỜI GIẢI

Chọn A

Đặt $t=x^3+2x$, với $x\in[-1;1]$ ta có $t'(x)=3x^2+2>0,\ \forall x\in[-1;1]$. Do đó, $t\in[-3;3]$.

Khi đó, xét hàm số $y=f(t)+3f(m)$ trên đoạn $[-3;3]$, ta có

$$y'=f'(t);\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-2\\t=1\\t=2\end{array}\right..$$

Ta có: $y(-2)=f(-2)+3f(m)=5+3f(m)$; $y(1)=f(1)+3f(m)=-6+3f(m)$ và $y(2)=4+3f(m)$.

Nhận xét rằng $y(1)<y(2)<y(-2)$ nên $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=|y(-2)|$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=|y(1)|$.

Trường hợp 1:

Nếu $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=|y(-2)|$ thì ta phải có $\begin{cases}|5+3f(m)|=8\\|-6+3f(m)|\le 8\end{cases}\Leftrightarrow f(m)=1$. Khi đó có 5 giá trị thực của m trên đoạn $[-4;4]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2:

Nếu $\max\limits_{[-1;1]}g(x)=|y(1)|$ thì ta phải có $\begin{cases}|5+3f(m)|\le 8\\|-6+3f(m)|=8\end{cases}\Leftrightarrow f(m)=-\dfrac{2}{3}$. Khi đó có 6 giá trị thực của m trên đoạn $[-4;4]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy có tất cả 11 giá trị thực của m trên đoạn $[-4;4]$ thỏa yêu cầu bài toán.

CÂU 7. Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+4x$ bằng -1

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

LỜI GIẢI

Chọn D

Trường hợp 1: Nếu $x^2-2x+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow 1-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 1$

Khi đó, ta có hàm số : $y = x^2 + 2x + m$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(-1) = m - 1 \Rightarrow m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Nếu $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{1-m} \\ x_1 = 1 + \sqrt{1-m} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{1-m}$		$1+\sqrt{1-m}$	$+\infty$
y	$x^2 - 2x + m$		$-x^2 + 6x - m$		$x^2 - 2x + m$

Đặt $f(x) = x^2 + 2x + m$; $g(x) = -x^2 + 6x - m$

Ta có $\text{Min}y = \min\{f(x); g(x)\} = f(-1) = m - 1$ hoặc $f\left(1 - \sqrt{1-m}\right) = 4 - 4\sqrt{1-m}$.

$$\text{Min}y = \min\{f(x); g(x)\} = f(-1) \Rightarrow \begin{cases} -1 < 1 - \sqrt{1-m} \\ m - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \text{ thỏa mãn.}$$

$$\text{Min}y = \min\{f(x); g(x)\} = 4 - 4\sqrt{1-m} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{1-m} < -1 \\ 4 - 4\sqrt{1-m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m = -\dfrac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$$

Trường hợp 3: Nếu $x^2 - 2x + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, không xảy ra vì hệ số $a = 1 > 0$

Vậy chỉ có $m = 0$ thỏa mãn bài toán.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \left|f^2(x) - 2f(x) + m\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng 8.

A. 5 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 2 .

LỜI GIẢI

Chọn D

Xét bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$

x	-1		1		3
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Nhìn vào bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ta thấy $x \in [-1;3] \Rightarrow f(x) \in [-2;2]$

Đặt $t = f(x)$, $t \in [-2;2]$.S

Khi đó hàm số $g(x) = \left|f^2(x) - 2f(x) + m\right|$ trở thành $g(t) = \left|t^2 - 2t + m\right|$

Đặt $u = t^2 - 2t$. Ta có bảng biến thiên:

t	-2		1		2
u	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra $-1 \le u \le 8$,$\forall t \in [-2;2]$

Bài toán trở thành tìm $\underset{[-1;8]}{\text{Max}}|u + m|$. Ta có: $\underset{[-1;8]}{\text{Max}}|u + m| = \underset{[-1;8]}{\text{Max}}\{|-1 + m|, |8 + m|\}$

Trường hợp 1: $\left|-1+m\right|>\left|8+m\right|\Leftrightarrow m<\dfrac{-63}{18}$. Khi đó $\underset{\left[-1;8\right]}{\text{Max}}\left|u+m\right|=\left|-1+m\right|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\m=-7\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-7$.

Trường hợp 2: $\left|-1+m\right|<\left|8+m\right|\Leftrightarrow m>-\dfrac{63}{18}$. Khi đó $\underset{\left[-1;8\right]}{\text{Max}}\left|u+m\right|=\left|m+8\right|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-16\end{array}\right.\Leftrightarrow m=0$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 9. Gọi α là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^4-2mx^3+\left(m^2+1\right)x^2-2mx-m^2+2m$. Khi tham số $m=m_0$ thì α đạt giá trị lớn nhất bằng α_{max}. Giá trị của biểu thức $T=m_0+\alpha_{max}$ bằng

A. 2. **B.** 0. **C.** -4. **D.** 1.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Ta thấy $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}m^2+\dfrac{3}{4}m+\dfrac{5}{16}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=\dfrac{1}{2}$.

Gọi α là giá trị nhỏ nhất của $f\left(x\right)$. Khi đó $\alpha\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ (1).

Ta chứng tỏ rằng dấu bằng ở (1) xảy ra, tức là tồn tại m để $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Thật vậy, khi $m=\dfrac{1}{2}$, ta có hàm số $y=x^4-x^3+\dfrac{5}{4}x^2-x+\dfrac{3}{4}$.

Khi đó $y'=4x^3-3x^2+\dfrac{5}{2}x-1$ và $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số này là

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất α của $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất $\alpha_{max}=\dfrac{1}{2}$ khi $m=m_0=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $T=m_0+\alpha_{max}=1$.

CÂU 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2m^2-m}{x-1}$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để $\underset{\left[2;3\right]}{\max}y=2\underset{\left[4;5\right]}{\max}y-4$. Tập S tương ứng là

A. $\left\{1\right\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Tập xác định: $D=\left(-\infty;1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. Ta có: $y'=\dfrac{2m^2+m-1}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{\left(2m-1\right)\left(m+1\right)}{\left(x-1\right)^2}$.

Trường hợp 1: $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow$ Hàm số đã cho trở thành $y=1\Rightarrow\underset{\left[2;3\right]}{\max}y=1;\underset{\left[4;5\right]}{\max}y=1\Rightarrow\underset{\left[2;3\right]}{\max}y\ne2\underset{\left[4;5\right]}{\max}y-4$.

Trường hợp 2: $-1 < m < \dfrac{1}{2} \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(2;3),(4;5)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;3]} y = y(2) = \dfrac{2-2m^2-m}{1} = -2m^2 - m + 2 \\ \max\limits_{[4;5]} y = y(4) = \dfrac{4-2m^2-m}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max\limits_{[2;3]} y = 2\max\limits_{[4;5]} y - 4 \Leftrightarrow -2m^2 - m + 2 = 2\dfrac{4-2m^2-m}{3} - 4$$

$$\Rightarrow -6m^2 - 3m + 6 = -4 - 4m^2 - 2m \Leftrightarrow 2m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2(L) \\ m = \dfrac{-5}{2}(L) \end{array}\right..$$

Trường hợp 3: $\left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{2} \\ m < -1 \end{array}\right. \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(2;3),(4;5)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;3]} y = y(3) = \dfrac{3-2m^2-m}{2} \\ \max\limits_{[4;5]} y = y(5) = \dfrac{5-2m^2-m}{4} \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[2;3]} y = 2\max\limits_{[4;5]} y - 4 \Leftrightarrow \dfrac{3-2m^2-m}{2} = \dfrac{5-2m^2-m}{2} - 4$$

$\Leftrightarrow 0 = -3$ (Vô lý). Vậy không có giá trị m để $\max\limits_{[2;3]} y = 2\max\limits_{[4;5]} y - 4$.

CÂU 11. Cho hàm số $y = f(3-2x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		$3/2$		2		5		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $g(x) = \left|2f(x^2-4x+3) - m\right|$ có giá trị lớn nhất?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

✍ **LỜI GIẢI**

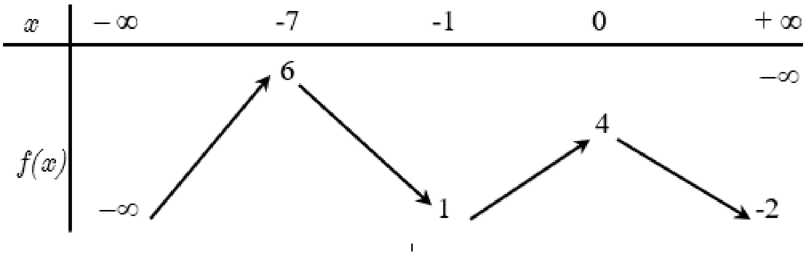
Chọn B

Đặt $t = 3-2x$, ta có:

x	$-\infty$		$3/2$		2		5		$+\infty$
t	$+\infty$		0		-1		-7		$-\infty$
$f(t)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(t)$ cũng là bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.



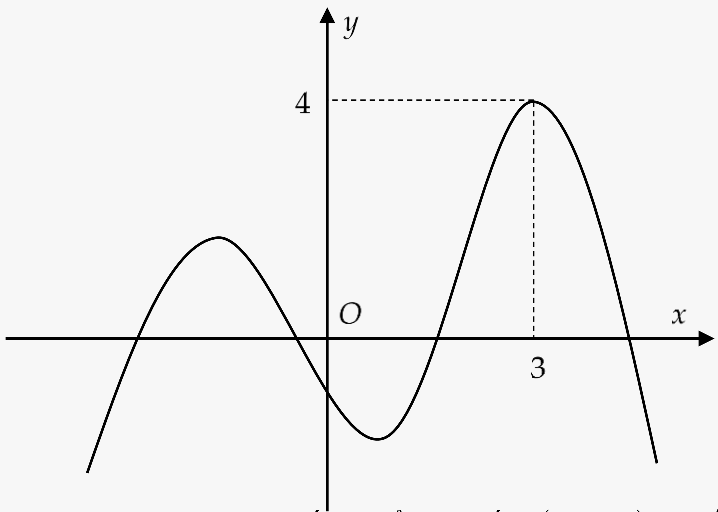
Ta có: $u = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow u \in [-1;+\infty)$. Từ bảng biến thiên của $f(x) \Rightarrow f(u) \in (-2;4]$
$\Rightarrow 2f(u) \in (-4;8] \Rightarrow -4 - m < 2f(u) - m \leq 8 - m$

Đặt $g(u) = |2f(u) - m|$

Để $g(u)$ có giá trị lớn nhất thì $\begin{cases} 8 - m > 0 \\ |m+4| \leq 8 - m \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vì m là số tự nhiên $\Rightarrow m \in \{0;1;2\}$.

CÂU 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới với m là tham số thực.



Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(3x-m) + 2f(x^2-2x)$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng giá trị tất cả các phần tử thuộc tập S bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 3.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Nhận thấy, $max\, f(x) = f(3) = 4 \leq f(x) \leq f(3) = 4$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\begin{cases} f(3x-m) \leq f(3) = 4 \\ f(x^2-2x) \leq f(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ f(3x-m) + 2f(x^2-2x) \right\} \leq 4 + 2.4 = 12$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 3x - m = 3 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3x - 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m = \{-6;6\}$

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử thuộc tập S bằng 0.

CÂU 13. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số $m \in [-100;100]$ để hàm số $y = |x^2 - 4x| - mx$ có giá trị nhỏ nhất nhỏ hơn -4. Số phần tử của tập S bằng

A. 191. **B.** 186. **C.** 192. **D.** 187.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có: $\left|x^2-4x\right|-mx \ge \min\left(\left|x^2-4x\right|-mx\right) \ge -4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx \le \left|x^2-4x\right|+4$ (đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Với $x=0 \Rightarrow 0 \le 1$ (thỏa mãn)

Với $x \ne 0$, ta chia các trường hợp như sau:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ mx \le x^2-4x+4\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge 4\\ mx \le x^2-4x+4\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<4\\ mx \le -x^2+4x+4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ m \ge x-4+\dfrac{4}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x \ge 4\\ m \le x-4+\dfrac{4}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<4\\ m \le -x+4+\dfrac{4}{x}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}m \ge -8\\ m \le 1\\ m \le 1\end{cases} \Leftrightarrow -8 \le m \le 1 (*)$$

Lấy phần bù trên $\mathbb{R}$ của điều kiện $(*)$ ta được:

Để $\min\left(\left|x^2-4x\right|-mx\right)<-4$ thì $\left[\begin{array}{l}m<-8\\ m>1\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\, m\in[-100;100]} \left[\begin{array}{l}-100 \le m \le -9\\ 2 \le m \le 100\end{array}\right.$

Vậy có tất cả 191 giá trị nguyên m thỏa mãn điều kiện.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)=x^3-3mx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $[1;3)$?

A. 30. **B.** 29. **C.** 31. **D.** 28.

LỜI GIẢI

Chọn A

Đạo hàm $f'(x)=3x^2-3m$

Nếu $m>0$ thì hàm số có điểm cực tiểu là $x=\sqrt{m}$ và $f\left(\sqrt{m}\right)=-2m\sqrt{m}$.

Để hàm số $f(x)=x^3-3mx$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $[1;3)$ thì xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(1) \le f(3) \Leftrightarrow 1-3m \le 27-9m \Leftrightarrow m \le \dfrac{13}{3}$.

Trường hợp 2: $f(1) > f(3) \Leftrightarrow 1-3m > 27-9m \Leftrightarrow m > \dfrac{13}{3}$.

Khi đó hàm số $f(x)$ phải có điểm cực tiểu nằm trong $(1;3)$ và giá trị cực tiểu tương ứng phải nhỏ hơn hoặc bằng giá trị tại $f(3)$.

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{m} \in (1;3)\\ f\left(\sqrt{m}\right) \le f(3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1<m<9\\ -2m\sqrt{m} \le 27-9m\end{cases} \Leftrightarrow 3 \le m < 9$.

Kết hợp điều kiện $m>\dfrac{13}{3} \Rightarrow \dfrac{13}{3}<m<9 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};\, m\in[-20;20]} -20 \le m \le 8$.

Vậy có tất cả 29 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x-2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. $f(2)-\frac{4}{3}$. **B.** $f(1)-\frac{8}{3}$. **C.** $f(0)-2$. **D.** $f(-1)-\frac{4}{3}$.

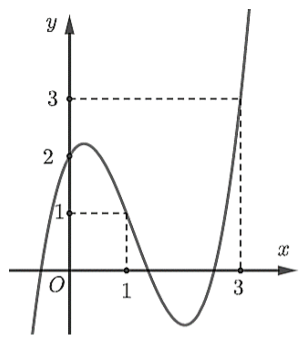
Câu 2: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0<-1$. **B.** $m_0>4$. **C.** $1\le m_0<3$. **D.** $3<m_0\le 4$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=10^x+x$ và hàm số $g(x)=x^3-mx^2+(m^2+1)x-2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x+f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng

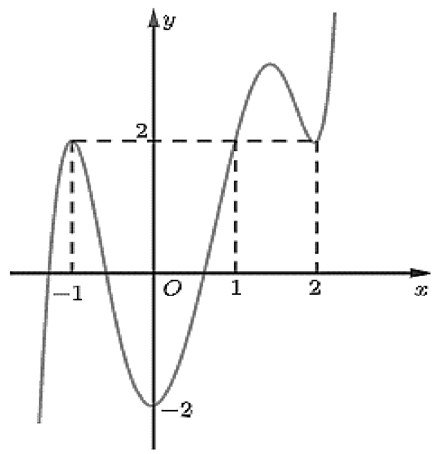
A. $\frac{21}{2}$. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 5.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln(x^2+8x+16)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$ **B.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x+1)-4x-3$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ bằng

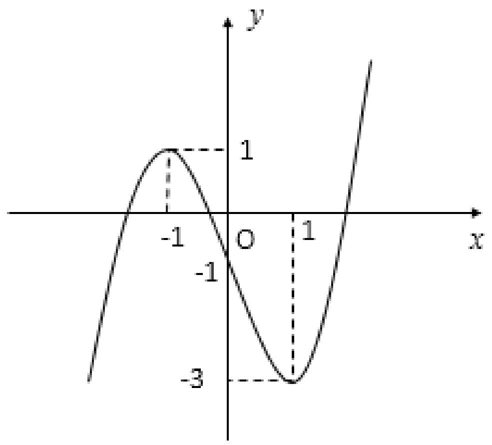
A. $f(0)$. **B.** $f(-1)+1$. **C.** $f(1)-3$. **D.** $f(2)-5$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

A. 12. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 7.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



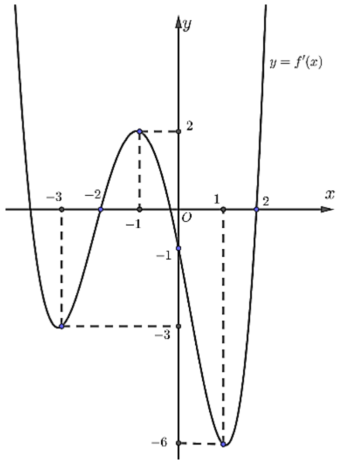
Đặt $g(x)=x^2-4x+f\left(\sqrt{x^2-4x+8}\right)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0;4]$ là

A. $10\sqrt{2}-4$. **B.** $10\sqrt{2}-1$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** $8\sqrt{2}-4$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=f'(x)=-3x^2+6x$. Biết $f(0)=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+2\right)+2022$ trên đoạn $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$ bằng

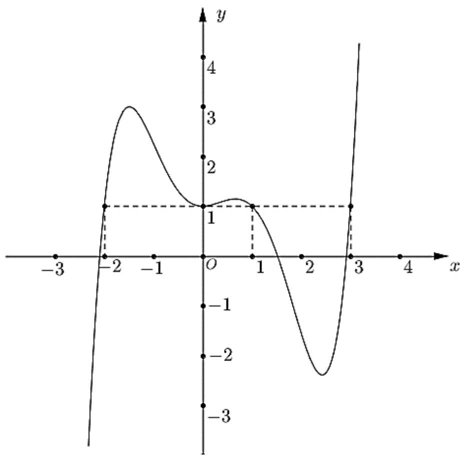
A. $f\left(\frac{21}{16}\right)+2022$. **B.** 2024. **C.** 2025. **D.** $f\left(\frac{3}{2}\right)+2022$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ bằng



A. $f(0)+1$. **B.** $f(6)$. **C.** $f(2)-\dfrac{1}{3}$. **D.** $f(-3)+8$.

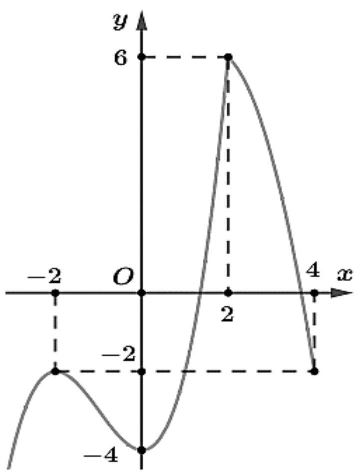
Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x^2+x)-2x^2-x$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ là

A. $f(1)+1$. **B.** $f\left(\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{1}{8}$. **C.** $f(-3)+3$. **D.** $f\left(-\dfrac{1}{8}\right)+\dfrac{1}{8}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;4]$. Giá trị của M^2+m^2 bằng



A. 52. **B.** 2. **C.** 40. **D.** 20.

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Câu 13: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-1\right)+2$ như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2\cos 2x+4\sin x-1$ là:

A. 2. **B.** 4. **C.** -9. **D.** -2.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên trên đoạn $\left[-4;4\right]$ như sau

x	-4		-3		-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m\in\left[-3;2\right]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^3\right|+3\left|x\right|\right)+f\left(m\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng $\frac{11}{2}$.

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** Vô số.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(-6\right)=42$ và bảng xét dấu đạo hàm như

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 16: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của $K=\left|2\left(x+y\right)+m\right|$ bằng $\sqrt{2}$. Tích các phần tử của S bằng

A. $-2-2\sqrt{2}$. **B.** $2+2\sqrt{2}$. **C.** $2-2\sqrt{2}$. **D.** $-2+2\sqrt{2}$.

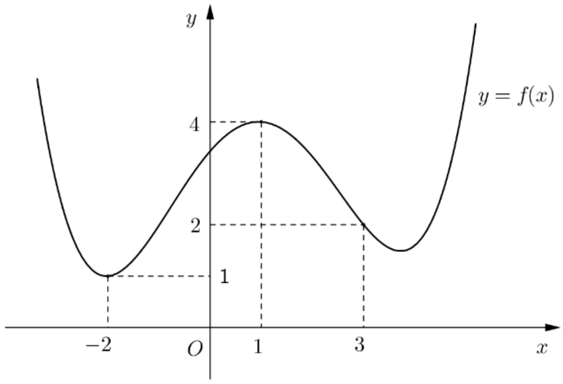
Câu 17: Cho x và y là các số thực dương thỏa $x+y=\dfrac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}$

A. 5. **B.** 4. **C.** $\dfrac{34}{5}$. **D.** $\dfrac{28}{5}$.

Câu 18: Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ thuộc khoảng nào?

A. $(-6;-5)$. **B.** $(-10;-9)$. **C.** $(-11;-9)$. **D.** $(-5;-4)$.

Câu 19: Cho Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 2022 để bất phương trình $\dfrac{m}{f\left(x\right)}-\sqrt{mf\left(x\right)}-1\ge\dfrac{3}{4}f^2\left(x\right)$ đúng với mọi $x\in\left[-2;3\right]$?

A. 1875. **B.** 1872. **C.** 1874. **D.** 1873.

Câu 20: Cho hàm số $y=g\left(x\right)$ thỏa mãn $2g^3\left(x\right)-6g^2\left(x\right)+7g\left(x\right)=3-\left(2x-3\right)\sqrt{1-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2g\left(x\right)+x$

A. 6. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 21: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+1}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-1;8\right]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là:

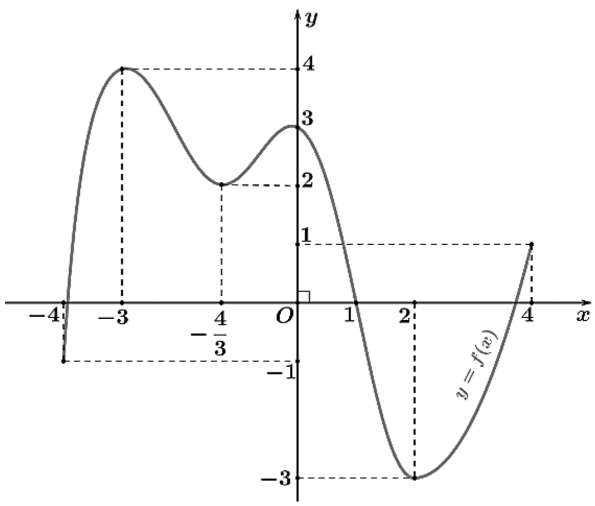
A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$. Biết $\min\limits_{\left[0;2\right]}y+3\max\limits_{\left[0;2\right]}y=10$. Chọn khẳng định đúng

A. $m\in\left(1;3\right)$. **B.** $m\in\left[3;5\right)$. **C.** $m\in\left(5;7\right)$. **D.** $m\in\left[7;9\right)$.

Câu 23: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[-4;4\right]$, có các điểm cực trị trên khoảng $\left(-4;4\right)$ là

$-3;-\frac{4}{3};0;2$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(x^3+3x\right)+m$ với m là tham số. Gọi m_1 là giá trị của m để $\max\limits_{x\in[0;1]} g(x)=2022$, m_2 là giá trị của m để $\min\limits_{x\in[-1;0]} g(x)=2004$. Giá trị của m_1-m_2 bằng

A. 12. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 14.

Câu 24: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+1}$ với m là tham số thực, thoả mãn : $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\frac{17}{6}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\le 0$. **B.** $2<m\le 4$. **C.** $m>4$. **D.** $0<m\le 2$.

Câu 25: Biết rằng các số thực a,b thay đổi sao cho hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2-4a-4b+2$.

A. -2. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 26: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{2x-m}{x+1}\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 2. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** –1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=m.\sqrt{x-1}$,. Gọi $m_1;m_2$ là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-1$. Giá trị của m_1+m_2 bằng

A. 5. **B.** –3. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 28: Cho hàm số $y=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số thực a để $\max\limits_{[2,3]} y+\min\limits_{[2,3]} y=11$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=\frac{x-2m}{x+1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên sao cho $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\left|f(7\sin x)\right|=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 6.

Câu 30: Cho biết hàm số $y = f(x) = \left|x^2 - 4x - 1 + m\right|$ có giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x \in [0;3]$. Số các giá trị của tham số m thỏa mãn là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\left|x - m^2\right|}{x+1}$ trên $[0;3]$ có giá trị lớn nhất bằng 5. Tích các giá trị của m bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32: Tìm tổng các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - x^2 + 6x + 9 - m\right|$ trên đoạn $[0;1]$ bằng 5.

A. 24. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 5.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}\left(m^2 - 2\right)x^3 - m^2x^2 + m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5?

A. 0. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \left|x^6 + x^3 + m\right| - 2x^3$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 35: Cho hàm số $f(x) = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn. $[-1;3]$. Giá trị nhỏ nhất của M bằng

A. $\dfrac{57}{2}$. **B.** $\dfrac{59}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 16.

Câu 36: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ và $g(x) = \left|f(2 + \sin x) + m\right|$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) + \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 50$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = \left|4x^4 - ax^2 + b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\dfrac{1}{2}$. Tính $a + b$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 38: Gọi S là tập các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \left|x^2 - 4x + m - 1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;3]$ bằng 4. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \left|4x^4 - ax^2 + b\right|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\dfrac{1}{2}$. Tính $a + b$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 40: Tổng các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m\right|$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 18.

A. $-\frac{17}{7}$. **B.** $-\frac{3}{7}$. **C.** 3. **D.** 2.

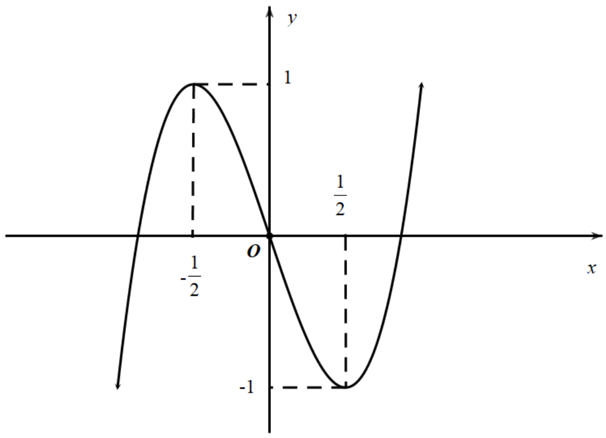
Câu 41: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\left|2x^3-12x^2+9x+m+8\right|+9x$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;5]$ bằng 78. Tính tổng các giá trị của tham số m?

A. 6 . **B.** 12 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Câu 42: Cho hàm số $y=\left|\frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

A. 14 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 18

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ đồ thị như hình vẽ



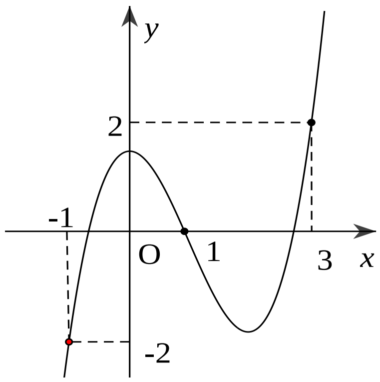
Đặt $g(x)=|f(x)|-\sqrt{1-2|x|}+f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0 .

A. Không tồn tại. **B.** 0 . **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(\cos x+1)+m\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4 . **B.** -7. **C.** $-\frac{7}{2}$. **D.** 6 .

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;0]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm $g(x) = \left|\left|2f(x)+m-4\right|+f(x)-3\right|$ trên đoạn $[-1;3]$ lớn hơn 1?

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 46: Tổng các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 5 là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 47: Cho các số thực x, y thoả mãn $\begin{cases} \max\{5;9x+7y-20\} \le x^2+y^2 \le 2x+8 \\ y \le 1 \end{cases}$.Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x-2y$. Tính $M-m$

A. $1+3\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $1+2\sqrt{2}$. **D.** $2+3\sqrt{5}$.

Câu 48: Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy \ge 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 5\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+2$ bằng

A. 14. **B.** $\dfrac{15}{16}$. **C.** $\dfrac{14}{15}$. **D.** -14.

Câu 49: Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x+y=1$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S = \left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$ lần lượt là

A. $M = \dfrac{25}{2}, m = 12.$ **B.** $M = 12, m = \dfrac{191}{16}.$ **C.** $M = \dfrac{25}{2}, m = \dfrac{191}{16}.$ **D.** $M = \dfrac{25}{2}, m = 0.$

Câu 50: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\dfrac{4x^3+x}{y+1} = \sqrt{2y+1}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 8x-y+\dfrac{3}{2}$.

A. 4. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 51: Cho các số thực x, y, z không đồng thời bằng 0 thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2 \le 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy-yz-zx-\dfrac{2022}{x^2+y^2+z^2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 669. **D.** -671.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 1$.

Khi đó: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2(x-2) + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-3x+3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Do phương trình $x^2 - 3x + 3 = 0$ vô nghiệm.

Bảng biến thiên:

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$ và giá trị nhỏ nhất bằng $g(1) = f(1) - \frac{8}{3}$.

Câu 2: **Chọn B**

Ta có: $y' = \frac{-m-1}{(x-1)^2}$. Với $x \neq 1$.

Nếu $-m-1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$

$\Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[2;4] \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(2) = m+2$.

Theo giả thiết: $m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Nếu $-m-1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$

$\Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên $[2;4] \Rightarrow \min\limits_{[2;4]} y = y(4) = \frac{4+m}{3}$.

Theo giả thiết: $\frac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$. Vậy $m_0 = 5$.

Câu 3: **Chọn B**

Đặt $t = x + f(x)$ vì $x \in [0;1] \Rightarrow t \in [1;12]$.

Xét $g(t) = t^3 - mt^2 + (m^2+1)t - 2$ trên $[1;12]$

$\Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 2mt + m^2 + 1$ có $\Delta' = m^2 - 3(m^2+1) = -2m^2 - 3 < 0\ \forall m$.

$\Rightarrow g'(t) > 0 \forall t \in [1;12] \Rightarrow y = g(t)$ đồng biến trên $[1;12]$.

Vậy $M = \max\limits_{t \in [1;12]} g(t) = g(12) = 12m^2 - 144m + 1738$.

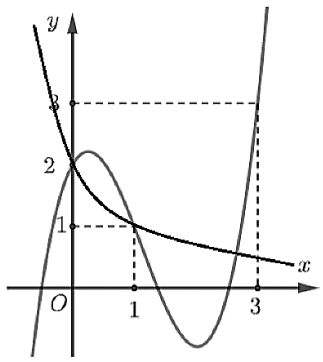
$\Rightarrow M$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \frac{144}{2.12} = 6$.

Câu 4: **Chọn B**

Ta có: $g'(x) = \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{2x+8}{x^2+8x+16} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{2}{x+4}$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=\dfrac{4}{x+4}$ (1). Đặt $t=\dfrac{x}{2}+1$, $\left(t\in[0;3]\right)$; khi đó: $(1)\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{2}{t+1}$.

Ta có đồ thị biểu diễn sự tương giao của hai đồ thị là:



Dựa vào đồ thị ta có GTLN của $g(x)$ là tại $g(1)$ hoặc $g(3)$.

Ta thấy: $\displaystyle\int_1^a\left[\frac{2}{t+1}-f'(t)\right]dt>\int_a^3\left[f'(t)-\frac{2}{t+1}\right]dt \Leftrightarrow \left(2\ln|t+1|-f(t)\right)\Big|_1^a>\left(f(t)-2\ln|t+1|\right)\Big|_a^3$

$\Leftrightarrow 2\ln(a+1)-f(a)-2\ln 2+f(1)>f(3)-4\ln 2-f(a)+2\ln(a+1)$

$\Leftrightarrow f(1)-f(3)+2\ln 2>0$ (*)

Xét $g(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$, khi đó: $g(1)=f(1)-4\ln 2$ và $g(3)=f(3)-8\ln 2$.

$\Rightarrow g(1)-g(3)=f(1)-f(3)+4\ln 2$, từ (*) ta suy ra $\Rightarrow g(1)-g(3)>0\Leftrightarrow g(1)>g(3)$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $t=1\Rightarrow x=0$.

Câu 5: Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(2x+1)-4x-3$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$, ta có $g'(x)=2f'(2x+1)-4$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x+1)=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=-1\\2x+1=1\\2x+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(2x+1)-4x-3$ trên đoạn $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ như sau:

x	-1		0		$\frac{1}{2}$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	

Vậy $\min\limits_{\left[-1;\frac{1}{2}\right]} g(x)=g(0)=f(1)-3$.

Câu 6: Chọn D

Ta có: $g'(x)=(4-2x)f'(4x-x^2)+x^2-6x+8$

$=2(2-x)f'(4x-x^2)+(x-4)(x-2)=(2-x)\left[2f'(4x-x^2)+4-x\right]$.

Ta thấy $3\le 4x-x^2\le 4$, $\forall x\in[1;3]\Rightarrow f'(4x-x^2)>0$.

Hơn nữa, $4-x>0,\forall x\in[1;3]$.

Suy ra $2f'(4x-x^2)+4-x>0$. Do đó, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(3)$

Vậy $\max\limits_{[1;3]}g(x)=g(2)=f(4)+7=0+7=7$.

Câu 7: Chọn A

Đặt $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có $f(0)=-1\Leftrightarrow d=-1$, suy ra $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$.

Ta cũng có $\begin{cases}f(-1)=1\\f(1)=-3\\f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b-c=2\\a+b+c=-2\\3a+2b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\end{cases}$.

Như vậy $y=f(x)=x^3-3x-1$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+8}\Leftrightarrow t^2=x^2-4x+8$, $x\in[0;4]$. Ta có bảng biến thiên

x	0		2		4
t^2	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	8

Suy ra $4\le t^2\le 8\Leftrightarrow 2\le t\le 2\sqrt{2}$.

Hàm số $g(x)$ thành $h(t)=t^2-8+f(t)$.

Xét hàm số $h(t)=t^2-8+f(t)$ trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]$. Ta có: $h'(t)=2t+f'(t)>0$, $\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$, (vì từ đồ thị của hàm số $f(t)$ suy ra $f'(t)>0$, $\forall t\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$).

Như vậy hàm số $h(t)=t^2-8+f(t)$ đồng biến trên $\left[2;2\sqrt{2}\right]$, suy ra

$\min\limits_{[2;2\sqrt{2}]}h(t)=h(2)=4-8+f(2)=-3=\min\limits_{[0;4]}g(x)$; $\max\limits_{[2;2\sqrt{2}]}h(t)=h(2\sqrt{2})=10\sqrt{2}-1=\max\limits_{[0;4]}g(x)$

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[0;4]$ là: $10\sqrt{2}-4$.

Câu 8: Chọn C

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y'=f'\left(x\right)=-3x^2+6x$ và $f\left(0\right)=-1$ nên hàm số:

$y=f\left(x\right)=-x^3+3x^2-1$. Cho $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Xét: $g'\left(x\right)=\left(2x-3\right).f'\left(x^2-3x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=0\\x^2-3x+2=0\\x^2-3x+2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right]\\x=1\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right]\\x=2\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right]\\x=0\in\left[-3;\frac{1}{2}\right]\\x=3\notin\left[-3;\frac{1}{2}\right]\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$ là:

x	-3		0		$\frac{1}{2}$
$2x-3$	|	$-$	|	$-$	|
$f'\left(x^2-3x+2\right)$	|	$-$	0	$+$	|
$g'(x)$	|	$+$	0	$-$	|
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

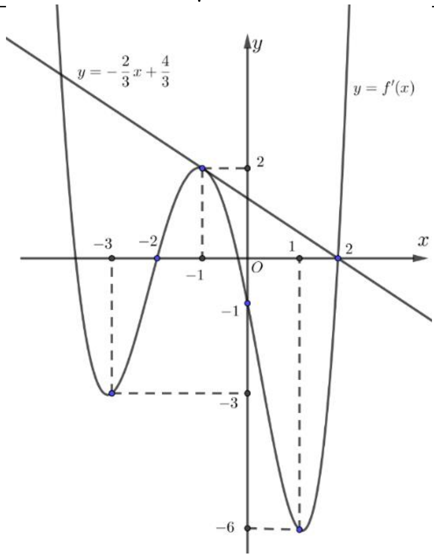
Suy ra: $\max\limits_{\left[-3;\frac{1}{2}\right]}g\left(x\right)=g\left(0\right)=f\left(2\right)+2022=2025$.

Câu 9: Chọn C

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(3x\right)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$.

Đạo hàm $g'\left(x\right)=3f'\left(3x\right)+6x-4$. Cho $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow3f'\left(3x\right)=-6x+4$.

Đặt $t=3x$. Vì $x\in\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ nên $t\in\left[-2;2\right]$ khi đó phương trình trở thành: $f'\left(t\right)=-\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}$ (*).



Theo đồ thị có $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$

x	$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-\frac{2}{3})$	$\searrow$			$g(\frac{2}{3})$

Vậy $\min\limits_{\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]} g(x)=g\left(\dfrac{2}{3}\right)=f(2)-\dfrac{1}{3}$.

Câu 10: Chọn D

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=f(2x^2+x)-2x^2-x$ liên tục trên $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có: $g'(x)=(4x+1)f'(2x^2+x)-(4x+1)=(4x+1)\left[f'(2x^2+x)-1\right]$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+1=0 \\ f'(2x^2+x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+1=0 \\ 2x^2+x=-2(vo\,nghiem) \\ 2x^2+x=0(nghiem\,kep) \\ 2x^2+x=1 \\ 2x^2+x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4} \\ x=0;x=-\dfrac{1}{2}(nghiem\,kep) \\ x=\dfrac{1}{2};x=-1 \\ x=1;x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-1		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x^2+x)-2x^2-x$ trên đoạn $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ là $g\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}$.

Câu 11: Chọn A

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta thấy $-4\le y\le 6$ khi $-2\le x\le 4$.

Do đó $M=\max\limits_{[-2;4]} f(x)=6$ tại $x=2$ và $m=\min\limits_{[-2;4]} f(x)=-4$ tại $x=0$.

$\Rightarrow M^2+m^2=6^2+(-4)^2=52$.

Câu 12: Chọn D

Ta có $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$

Đạo hàm $g'(x)=(4-2x)f'\left(4x-x^2\right)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'\left(4x-x^2\right)+4-x\right]$.

Với $x\in[1;3]$ thì $4-x>0$; $3\le 4x-x^2\le 4$ nên dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f'\left(4x-x^2\right)>0$. Vậy: $2f'\left(4x-x^2\right)+4-x>0$, $\forall x\in[1;3]$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$

x	1		2		3
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(3)$

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x)=g(2)=f(4)+7=12$.

Câu 13: Chọn B

Bằng cách đổi biến ta rút được $f(x)=g(x+1)-2$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đặt $t=\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|=2\left|\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$, ta có $0\le\left|\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right|\le 1\Rightarrow t\in[0;2]\Rightarrow -t+2\in[0;2]$

Suy ra $f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)=f(-t+2)\le 2$, dấu "=" xảy ra được khi $x=\dfrac{\pi}{6}$.

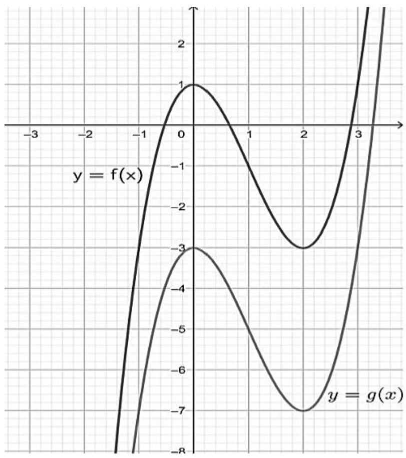
Ta có

$$2\cos 2x+4\sin x-1=2\left(1-2\sin^2 x\right)+4\sin x-1=-4\sin^2 x+4\sin x+1=-(2\sin x-1)^2+2\le 2$$

Dấu "=" xảy ra được khi $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Suy ra $y=f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2\cos 2x+4\sin x-1\le 4$, dấu "=" xảy ra được khi $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2\cos 2x+4\sin x-1$ là 4.



Từ đồ thị ta có: $-7<m<1$. Vậy $S=\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

Câu 14: Chọn A

Đặt $t=\left|x^3\right|+3|x|$.

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x$, $\forall x\in[-1;1]$ có đạo hàm $h'(x)=3x^2+3>0$, $\forall x\in[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $t=h(|x|)$

x	-1		0		1
h'		$+$	3	$+$	
$t=h(\lvert x\rvert)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Vậy $t\in[0;4]\Rightarrow \max\limits_{t\in[0;4]} f(t)=3$.

Mặt khác $\max\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=\dfrac{11}{2} \Leftrightarrow \max\limits_{t\in[0;4]} f(t)+f(m)=\dfrac{11}{2} \Leftrightarrow f(m)=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=a\ ;\ a\in(-4;-3) \\ m=b\ ;\ b\in(-3;-1) \\ m=c\ ;\ c\in(-1;0) \\ m=d\ ;\ d\in(0;2) \end{array}\right.$.

Vì $m\in[-3;2]$ nên có tất cả 3 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15: Chọn D

Đặt $y=g(x)=f\left(-3x^4+12x^2-15\right)+2x^6+6x^4-48x^2$

$g'(x)=\left(-12x^3+24x\right)f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)+12x^5+24x^3-96x$

$=-12x\left(x^2-2\right)f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)+12x\left(x^2-2\right)\left(x^2+4\right)$

$=-12x\left(x^2-2\right)\left[f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)-\left(x^2+4\right)\right]$.

Vì $-3x^4+12x^2-15=-3\left(x^2-2\right)^2-3\le -3$

$\Rightarrow f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)<0 \Rightarrow f'\left(-3x^4+12x^2-15\right)-\left(x^2+4\right)<0$

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\min g(x)=g(-1)=g(1)=f(-6)-40=2$.

Câu 16: Chọn B

Điều kiện: $x,y\in[-1;1]$.

Đặt $x=\sin\alpha$; $y=\sin\beta$ với $\alpha,\beta\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Giả thiết $\Rightarrow \sin\alpha.cos\beta+cos\alpha.\sin\beta=1 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta)=1 \Rightarrow \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ và $\alpha,\beta\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó $2(x+y)+m=2(\sin\alpha+cos\alpha)+m=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+m\in\left[2+m;2\sqrt{2}+m\right]$.

$K_{\max}=\left|2(x+y)+m\right|_{\max}=max\left\{|m+2|;\left|2\sqrt{2}+m\right|\right\}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+2|=\sqrt{2} \\ \left|2\sqrt{2}+m\right|\le\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \left|2\sqrt{2}+m\right|=\sqrt{2} \\ |m+2|\le\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2-\sqrt{2} \\ m=-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy tích của các phần tử của S là $\left(-2-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)=2+2\sqrt{2}$.

Câu 17: Chọn A

Cách 1:

Ta có: $x+y=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{5}{4}-x$. Vì $x,y>0$ nên $0<x<\frac{5}{4}$.

Khi đó, $P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4\left(\frac{5}{4}-x\right)}=\frac{4}{x}-\frac{1}{4x-5}$.

Đặt $f\left(x\right)=\frac{4}{x}-\frac{1}{4x-5}$, $x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)$, $f'\left(x\right)=-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{\left(4x-5\right)^2}$,

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(4x-5\right)^2=x^2\Leftrightarrow 15x^2-40x+25=0 \Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{5}{3}$ (loại)

Bảng biến thiên

x	0		1		$\frac{5}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)} f\left(x\right)=5$ khi $x=1$.

Vậy $P_{\min}=5$ khi $x=1$ và $y=\frac{1}{4}$.

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz (bất đẳng thức cộng mẫu số)

Cho $b_1,b_2,...,b_n>0$, ta có: $\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}+...+\frac{a_n{}^2}{b_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Với $x>0,4y>0$, áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$P=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}=\frac{2^2}{x}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{y}\ge\frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}{x+y}=5 \text{ (vì } x+y=\frac{5}{4}\text{)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{y}\Leftrightarrow x=4y$ hay $x=1,y=\frac{1}{4}$.

Câu 18: Chọn A

Vì a,b dương nên từ giả thiết $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$, ta chia hai vế cho ab

$$2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho hai số dương $(a+b)$ và $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$:

$(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{(a+b).2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$.

Dấu "=" xảy ra khi $(a+b)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Suy ra $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\ge 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$. Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},(t>0)$.

Khi đó: $2t+1\ge 2\sqrt{2(t+2)}\Leftrightarrow 4t^2-4t-15\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge \frac{5}{2} \\ t\le -\frac{3}{2}\end{array}\right.$. Do đó, ta có điều kiện $t\ge \frac{5}{2}$.

Mặt khác: $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=4\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]-9\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2\right]$

$=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18.$

Đặt $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18\Rightarrow f'(\text{t})=12t^2-18t-12>0,\forall t\ge \frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$-\frac{23}{4}$ ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $\underset{t\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right)}{Min}\ f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $-\frac{23}{4}$ khi $\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\\(a+b)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Câu 19: Chọn D

Điều kiện: $mf(x)\ge 0$ vì $f(x)>0\ \forall x\in[-2;3]\Rightarrow m\ge 0$.

Ta có $\frac{m}{f(x)}-\sqrt{mf(x)}-1\ge \frac{3}{4}f^2(x)\Leftrightarrow \frac{m}{f(x)}-\sqrt{mf(x)}+\frac{f^2(x)}{4}\ge f^2(x)+1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{m}{f(x)}}-\frac{f(x)}{2}\right)^2\ge f^2(x)+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{m}{f(x)}}-\frac{f(x)}{2}\ge\sqrt{f^2(x)+1}\\\sqrt{\frac{m}{f(x)}}-\frac{f(x)}{2}\le-\sqrt{f^2(x)+1}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{m} \ge \sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)} \\ \sqrt{m} \le -\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{m} \ge \max\left\{\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\right\} \\ \sqrt{m} \le \min\left\{-\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)}+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\right\}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{m} \ge 4+2\sqrt{17} \\ \sqrt{m} \le 4-2\sqrt{17}\,(vo\ ly)\end{array}\right. \quad \forall x \in [-2;3]$$

$\Leftrightarrow m \ge \left(4+2\sqrt{17}\right)^2 \simeq 149,96$. Vì $m \le 2022$. Nên có $2022-150+1=1873$.

Câu 20: Chọn D

Điều kiện xác định của phương trình là $x \le 1$.

Ta có: $2g^3(x)-6g^2(x)+7g(x)=3-(2x-3)\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2g^3(x)-6g^2(x)+6g(x)-2+g(x)-1=-(2x-2)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

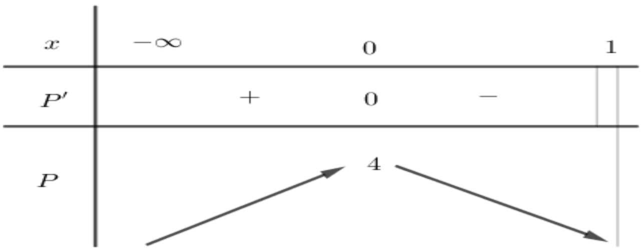
$\Leftrightarrow 2\left(g(x)-1\right)^3+g(x)-1=2(1-x)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow 2\left(g(x)-1\right)^3+g(x)-1=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$. Dễ thấy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $g(x)-1=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow g(x)=1+\sqrt{1-x}$.

Do đó $P=2+2\sqrt{1-x}+x$. Ta có $P'=\frac{-1}{\sqrt{1-x}}+1$; $P'=0 \Leftrightarrow x=0$



Vậy $\max P=4 \Leftrightarrow x=0$.

Câu 21: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+1}$, khi đó mới mọi $x \in [-1;8] \Rightarrow t \in [0;3]$. Bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)=\frac{2t+m}{t+1}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ nhỏ hơn 3. Xét $f'(t)=\frac{2-m}{(t+1)^2}$.

Trường hợp 1: $f'(t)>0 \Leftrightarrow m<2$ $(*)$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=3$. Khi đó $\underset{[0;3]}{\text{Max}}\, f(t)=f(3)=\frac{6+m}{4}$. Theo bài ra ta có $\frac{6+m}{4}<3 \Leftrightarrow m<6$, kết hợp với điều kiện $(*)$ suy ra $m<2$.

Trường hợp 2: $f'(t)<0 \Leftrightarrow m>2$ $(**)$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=0$. Khi đó

$\underset{[0;3]}{\text{Max}}\, f(t) = f(0) = m$. Theo bài ra ta có $m < 3$, kết hợp với điều kiện $(**)$ suy ra $2 < m < 3$.

Vậy $S = \{1\}$.

Câu 22: Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{2-m}{(x+1)^2}$

Trường hợp 1: Nếu $2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì $\min\limits_{[0;2]} y = f(0) = m; \max\limits_{[0;2]} y = f(2) = \dfrac{m+4}{3}$

Khi đó $\min\limits_{[0;2]} y + 3\max\limits_{[0;2]} y = 10 \Leftrightarrow m + m + 4 = 10 \Leftrightarrow m = 3$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu $2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì $\max\limits_{[0;2]} y = f(0) = m; \min\limits_{[0;2]} y = f(2) = \dfrac{m+4}{3}$

Khi đó $\min\limits_{[0;2]} y + 3\max\limits_{[0;2]} y = 10 \Leftrightarrow 3m + \dfrac{m+4}{3} = 10 \Leftrightarrow m = 2,6$ (tm)

Vậy $m = 2,6 \in (1;3)$.

Câu 23: Chọn D

Ta có: $g'(x) = (3x^2+3).f'(x^3+3x)$

Cho $g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x^3+3x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x=-3 \\ x^3+3x=-\dfrac{4}{3} \\ x^3+3x=0 \\ x^3+3x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx -0,82 \\ x \approx -0,42 \\ x = 0 \\ x \approx 0,6 \end{array}\right.$.

Vậy: $\left.\begin{array}{l} \max\limits_{x\in[0;1]} g(x) = g(0) = f(0) + m = 2022 \Rightarrow m = 2019 \\ \min\limits_{x\in[-1;0]} g(x) = g(-1) = f(-4) + m = 2004 \Rightarrow m = 2005 \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 - m_2 = 2019 - 2005 = 14.$

Câu 24: Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Có $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Trường hợp 1: $m = 1 \Rightarrow y = 1$ là hàm hằng và không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m \neq 1 \Rightarrow$ Hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định $(-\infty;-1)$, $(-1;+\infty)$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \min\limits_{[1;2]} y = y(1) \\ \max\limits_{[1;2]} y = y(2) \end{cases} \\ \begin{cases} \min\limits_{[1;2]} y = y(2) \\ \max\limits_{[1;2]} y = y(1) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = y(2) + y(1) = \dfrac{2+m}{3} + \dfrac{1+m}{2}.$$

Theo giả thiết:

$\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{17}{6} \Leftrightarrow \dfrac{2+m}{3} + \dfrac{1+m}{2} = \dfrac{17}{6} \Leftrightarrow 4 + 2m + 3 + 3m = 17 \Leftrightarrow 5m = 10 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 25: Chọn A

Xét hàm số $f(x)=-x^3+(x+a)^3+(x+b)^3$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=-3x^2+3(x+a)^2+3(x+b)^2=3x^2+6(a+b)x+3(a^2+b^2)$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow 18ab\le 0\Leftrightarrow ab\le 0$.

Với $ab\le 0$ ta có $P=a^2+b^2-4a-4b+2\ge a^2+b^2+2ab-4a-4b+2$

$\Rightarrow P\ge (a+b)^2-4a-4b+2\Rightarrow P\ge (a+b-2)^2-2\Rightarrow P\ge -2$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a+b=2\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$.

Vậy $\min P=-2$ khi $\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$.

Câu 26: Chọn A

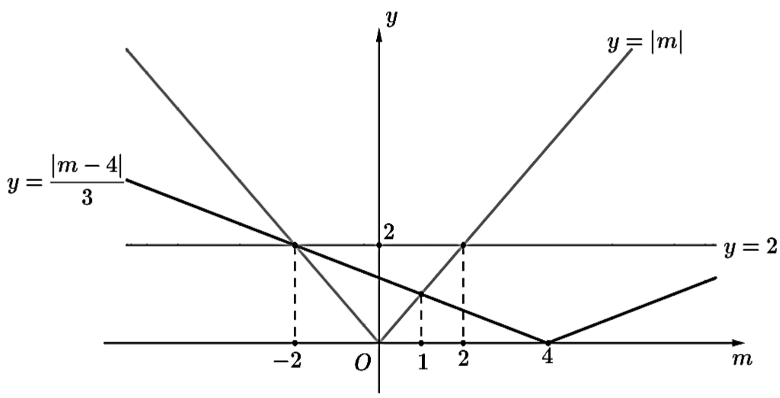
Đặt $f(x)=\dfrac{2x-m}{x+1}$.

Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{m+2}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=-2$ thì hàm số $f(x)=2,\forall x\ne -1$. Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 2. Do đó $m=-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán $(*)$.

Nếu $m\ne -2$ thì $M=\max\limits_{x\in[0;2]}|f(x)|=\max\limits_{m\in\mathbb{R}}\{|f(0)|;|f(2)|\}=\max\limits_{m\in\mathbb{R}}\left\{|m|;\dfrac{|m-4|}{3}\right\}$.

Phác thảo đồ thị hàm số $y=|m|$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{|m-4|}{3}$ trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Khi $m<-2$ thì $2=M=-m\Leftrightarrow m=-2$ (loại).

Khi $-2<m<1$ thì $2=M=\dfrac{4-m}{3}\Leftrightarrow m=-2$ (loại).

+ Khi $m\ge 1$ thì $2=M=m$. Suy ra $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $S=\{-2;2\}$ do đó tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 27: Chọn D

Điều kiện xác định: $x \ge 1$. Ta có : $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x-1}}$,

Trường hợp 1: $m > 0$ ta có : $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x-1}} > 0$

Khi đó : $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$

Theo giả thiết : $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 1$

Ta có: $m + 2m = m^2 - 1 \Rightarrow m^2 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} (TM) \\ m = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} (loai) \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $m < 0$ ta có : $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x-1}} < 0$

Khi đó : $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 1$

Ta có: $2m + m = m^2 - 1 \Rightarrow m^2 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} (loai) \\ m = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} (TM) \end{array}\right.$

Vậy $m_1 + m_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} + \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} = 3$.

Câu 28: Chọn A

Đặt $y = \left|x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a\right| = \left|f(x)\right|$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

Khi đó $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0;1;2\right\}$.

$\Rightarrow f'\left(x\right) \ge 0, \forall x \in \left[2;3\right]$ và $f(2) = a; f(3) = a + 9$.

Ta có $\forall x \in \left[2;3\right]$ thì $\begin{cases} \max y \in \left\{|a|, |a+9|\right\} \\ \min y \in \left\{|a|, 0, |a+9|\right\} \end{cases}$.

Xét các trường hợp:

$a \ge 0 \Rightarrow \max y = a + 9; \min y = a \Rightarrow 2a + 9 = 11 \Rightarrow a = 1$, nhận.

$a \le -9 \Rightarrow \max y = -a; \min y = -a - 9 \Rightarrow -a - 9 - a = 11 \Rightarrow a = -10$, nhận.

$\begin{cases} a < 0 \\ a + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < a < 0 \Rightarrow \min y = 0; \max y \in \left\{a + 9; -a\right\}$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a + 9 = 11 \\ -a = 11 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -11 \end{array}\right.$ (loại)

Do đó $a \in \left\{-10;\ 1\right\}$. Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Câu 29: Chọn D

Đặt $t = 7\sin x$ khi đó ta có $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0;7]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min\limits_{[0;7]}|f(t)| = 0$

Ta có: $f(t) = \dfrac{t-2m}{t+1}$ luôn xác định trên $[0;7]$

Với $m = -\dfrac{1}{2}$ thì $f(t) = 1$ $\Rightarrow$Loại $m = -\dfrac{1}{2}$

Với $m \neq -\dfrac{1}{2}$ thì ta có: $f(0) = -2m;\ f(7) = \dfrac{7-2m}{8}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(0).f(7) \le 0 \Leftrightarrow -2m.\dfrac{7-2m}{8} \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \dfrac{7}{2}$

Khi đó: $\min\limits_{[0;7]}|f(t)| = 0 \Rightarrow 0 \le m \le \dfrac{7}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán

Mà m nguyên nên $m \in \{0;1;2;3\}$

Trường hợp 2: $f(0).f(7) > 0 \Leftrightarrow -2m.\dfrac{7-2m}{8} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{7}{2} \\ m < 0 \end{array}\right.$

Khi đó: $\min\limits_{[0;7]}|f(t)| > 0 \Rightarrow$ Không có giá trị m thỏa đề bài.

Do đó: $S = \{0;1;2;3\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng 6.

Câu 30: Chọn A

Đặt $g(x) = x^2 - 4x - 1 + m$. Ta có: $g'(x) = 2x - 4$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có: $g(0) = -1 + m$; $g(2) = -5 + m$; $g(3) = -4 + m$ suy ra $y_{\max} = \{|-5+m|;|-1+m|\}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} |-5+m| \ge |-1+m| \\ |-5+m| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-5+m| \ge |-1+m| \\ \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} |-5+m| < |-1+m| \\ |-1+m| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-5+m| < |-1+m| \\ \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 31: Chọn A

Với $x \in [0;3]$ thì $f(x) = \dfrac{|x - m^2|}{x+1} = \left|\dfrac{x-m^2}{x+1}\right|$.

Hàm $y = \dfrac{x-m^2}{x+1}$ đồng biến trên $[0;3]$ nên $\max\limits_{[0;3]} y = y(3) = \dfrac{3-m^2}{4}$; $\min\limits_{[0;3]} y = y(0) = -m^2$

$$\Rightarrow \max_{[0;3]} f(x) = \frac{\left|m^2 + \dfrac{3-m^2}{4}\right| + \left|m^2 - \dfrac{3-m^2}{4}\right|}{2} = 5 \Leftrightarrow 3 + 3m^2 + |5m^2 - 3| = 40$$

$$\Leftrightarrow \left|5m^2-3\right| = 37-3m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \le \dfrac{37}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m^2 = 5(tm) \\ m^2 = -17(l) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}.$$

Câu 32: Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - x^2 + 6x + 9 - m \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 2x + 6 > 0, \forall x$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;1]} y = \max\left\{|9-m|, |15-m|\right\}$

Trường hợp 1: $\begin{cases} |9-m| = 5 \\ |9-m| \ge |15-m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 14 \end{array}\right. \\ |9-m| \ge |15-m| \end{cases} \Leftrightarrow m = 14$

Trường hợp 2: $\begin{cases} |15-m| = 5 \\ |9-m| \le |15-m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = 20 \end{array}\right. \\ |9-m| \le |15-m| \end{cases} \Leftrightarrow m = 10$

Vậy $m = 10; m = 14$ thỏa mãn bài toán $\Rightarrow$ tổng các giá trị của tham số m bằng 24.

Câu 33: Chọn B

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}\left(m^2-2\right)x^3 - m^2x^2 + m$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 + \left(m^2-2\right)x^2 - 2m^2x = x(x-2)\left(x+m^2\right) \le 0,\ \forall x \in [0;2]$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[0;2]$

Để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}\left(m^2-2\right)x^3 - m^2x^2 + m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5 $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \le 5 \\ g(2) \ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 5 \\ 4 + \dfrac{8}{3}\left(m^2-2\right) - 4m^2 + m \ge -5 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{185}}{8} \le m \le \dfrac{3+\sqrt{185}}{8} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-1;0;1;2\}$.

Câu 34: Chọn B

Tập xác định: $\mathbb{R}$

$y = f(x) = \left|x^6 + x^3 + m\right| - 2x^3$.

Đặt $t = x^3$ hàm số ban đầu trở thành hàm số $y = g(t) = \left|t^2 + t + m\right| - 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

Tam thức bậc hai $h(t) = t^2 + t + m$ có biệt thức $\Delta = 1 - 4m$. Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta = 1 - 4m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{1}{4} \Rightarrow h(t) = t^2 + t + m \ge 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó, $y = g(t) = t^2 + t + m - 2t = t^2 - t + m = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + m - \dfrac{1}{4} \ge m - \dfrac{1}{4},\ \forall t \in \mathbb{R}$.

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = m - \dfrac{1}{4}$.

Theo đề $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{1}{4} \\ m-\dfrac{1}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{1}{4} \\ m=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{4}$.

Trường hợp 2: $\Delta = 1-4m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4} \Rightarrow h(t)=t^2+t+m$ có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 $(t_1<t_2)$.

Vì $t_1+t_2=-1<0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1<t_2<0 \\ t_1<0\le t_2 \end{array}\right.$.

Nếu $t_1<t_2<0$ thì $P=t_1t_2=m>0$ kết hợp với $m<\dfrac{1}{4}$ ta có $0<m<\dfrac{1}{4}$.

Khi đó: $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|\dfrac{3}{4}+m\right|-1<0 \Rightarrow \min\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t)\le \left|\dfrac{3}{4}+m\right|-1<0$

Nếu $t_1<0\le t_2$ thì $g(t_2)=\left|t_2^2+t_2+m\right|-2t_2=-2t_2\le 0 \Rightarrow \min\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t)\le 0$.

Suy ra trong **trường hợp 2** hàm số $y=g(t)$ không thể có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên $\mathbb{R}$.

Vậy $m=\dfrac{5}{4}$. Suy ra tổng các phần tử của S là $\dfrac{5}{4}$.

Câu 35: Chọn B

Đặt $g(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m$ trên $[-1;3]$.

Ta có: $g'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-1;3] \\ x=0\in[-1;3] \\ x=2\in[-1;3] \end{array}\right.$

$g(-1)=m-5$; $g(0)=m$; $g(2)=m-32$; $g(3)=m+27$

Thấy: $m-32<m-5<m<m+27, \forall m\in\mathbb{R}$. Vậy $\max\limits_{[-1;3]}=\max\{|m-32|;|m+27|\}$.

Trường hợp 1: $|m+27|\le|m-32| \Leftrightarrow m\le\dfrac{5}{2}$.

Khi đó $M=|m-32|\ge\dfrac{59}{2}, \forall m\le\dfrac{5}{2} \Rightarrow \min M=\dfrac{59}{2}$.

Trường hợp 2: $|m+27|\ge|m-32| \Leftrightarrow m\ge\dfrac{5}{2}$.

Khi đó $M=|m+27|\ge\dfrac{59}{2}, \forall m\ge\dfrac{5}{2} \Rightarrow \min M=\dfrac{59}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{59}{2}$.

Câu 36: Chọn C

Đặt $t=2+\sin x\in[1;3] \Rightarrow g(t)=\left|t^3-3t-m\right|, t\in[1;3] \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} g(t)+\min\limits_{[1;3]} g(t)=50$.

Xét hàm số: $y=t^3-3t-m \Rightarrow y'=3t^2-3\ge 0\ \forall t\in[1;3]$.

$$y(1)=-m-2, y(3)=18-m \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;3]} g(t)=\max\{|-m-2|;|18-m|\} \\ \left[\begin{array}{l} \min\limits_{[1;3]} g(t)=\min\{|-m-2|;|18-m|\} \\ \min\limits_{[1;3]} g(t)=0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Nếu $-m-2>0 \Leftrightarrow m<-2$ thì

$$\begin{cases} \max\limits_{[1;3]} g(t)=|18-m|=18-m \\ \min\limits_{[1;3]} g(t)=|-2-m|=-m-2 \end{cases} \Rightarrow -2-m+18-m=50 \Leftrightarrow m=-17(t/m).$$

Trường hợp 2: Nếu $18-m<0 \Leftrightarrow m>18$ thì

$$\begin{cases} \min\limits_{[1;3]} g(t)=|18-m|=m-18 \\ \max\limits_{[1;3]} g(t)=|-2-m|=m+2 \end{cases} \Rightarrow m+2+m-18=50 \Leftrightarrow m=33(t/m)$$

Trường hợp 3: Nếu $(-m-2)(-m+18)\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 18$ thì

$$\begin{cases} \max\limits_{[1;3]} g(t)=\max\{|-m-2|;|18-m|\} \\ \min\limits_{[1;3]} g(t)=0 \end{cases}.$$

Nhận xét: $\max\limits_{[1;3]} g(t)=\max\{|-m-2|;|18-m|\}<50, \forall m\in[-2;18] \Rightarrow m\in\varnothing$.

Vậy $m\in\{-17;33\}$.

Câu 37: Chọn D

Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\frac{1}{2}$ nên $|4x^4-ax^2+b|\le\frac{1}{2}, \forall x\in[-1;1]$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} f(1)\le\frac{1}{2} \\ f(0)\le\frac{1}{2} \\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4-a+b|\le\frac{1}{2} \\ |b|\le\frac{1}{2} \\ \left|4.\frac{1}{4}-a.\frac{1}{2}+b\right|\le\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4-a+b|\le\frac{1}{2} \\ |b|\le\frac{1}{2} \\ |-2+a-2b|\le 1 \end{cases}.$

Suy ra $|4-a+b+b-2+a-2b|\le|4-a+b|+|b|+|-2+a-2b|\le 2$

$\Leftrightarrow 2\le|4-a+b|+|b|+|-2+a-2b|\le 2$.

Dấu $"="$ xảy ra khi:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 4-a+b=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ -2+a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}.$

Thử lại ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)=\left|4x^4-4x^2+\frac{1}{2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\frac{1}{2}$.

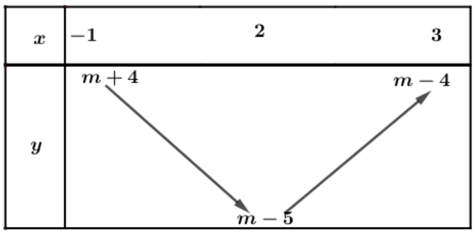
Trường hợp 2: $\begin{cases} 4-a+b=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ -2+a-2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=\dfrac{7}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (loại).

Vậy $a+b=\dfrac{9}{2}$.

Câu 38: Chọn C

Đặt $g(x)=x^2-4x+m-1$. Ta có $g'(x)=2x-4 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.



Dựa vào bảng biên thiên của hàm số $g(x)$ ta có:

Trường hợp 1: Nếu $(m+4)(m-5)\le 0$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=\min\limits_{[-1;3]}|g(x)|=0$.

Trường hợp 2: Nếu $(m+4)<0 \Leftrightarrow m<-4$ thì

$\min\limits_{[-1;3]} f(x)=\min\limits_{[-1;3]}|g(x)|=|m+4|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=0 & (l) \\ m=-8 & (tm) \end{array}\right.$.

Trường hợp 3: Nếu $(m-5)>0 \Leftrightarrow m>5$ thì

$\min\limits_{[-1;3]} f(x)=\min\limits_{[-1;3]}|g(x)|=|m-5|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=1 & (l) \\ m=9 & (tm) \end{array}\right.$.

Vậy $S=\{9;-8\}$ nên tổng các phần tử của S là $9-8=1$.

Câu 39: Chọn D

Ta có $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=\dfrac{1}{2}$ nên $\left|4x^4-ax^2+b\right|\le\dfrac{1}{2}, \forall x\in[-1;1]$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} f(1)\le\dfrac{1}{2} \\ f(0)\le\dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\le\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4-a+b|\le\dfrac{1}{2} \\ |b|\le\dfrac{1}{2} \\ \left|4.\dfrac{1}{4}-a.\dfrac{1}{2}+b\right|\le\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4-a+b|\le\dfrac{1}{2} \\ |b|\le\dfrac{1}{2} \\ |-2+a-2b|\le 1 \end{cases}$.

Suy ra $|4-a+b+b-2+a-2b|\le|4-a+b|+|b|+|-2+a-2b|\le 2$

$\Leftrightarrow 2\le|4-a+b|+|b|+|-2+a-2b|\le 2$.

Dấu $"="$ xảy ra khi:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 4-a+b=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ -2+a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Thử lại ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)=\left|4x^4-4x^2+\dfrac{1}{2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 4-a+b=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ -2+a-2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=\dfrac{7}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (loại).

Vậy $a+b=\dfrac{9}{2}$.

Câu 40: Chọn B

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m$ có

$f'(x)=12x^3-12x^2-12mx+12m=12(x^3-x^2-mx+m)=12(x-1)(x^2-m)$

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12(x-1)(x^2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Với $m\le 1$ ta có $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;2]} f(x)=f(2)=m+16 \\ \min\limits_{[1;2]} f(x)=f(1)=7m-1 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[1;2]}|f(x)|=\max\{|m+16|;|7m-1|\}$.

Trường hợp 1. $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=|m+16|=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\,(L) \\ m=-34 \end{array}\right.$

Kiểm tra $m=-34$ có $|7.(-34)-1|=239>18$ (Loại)

Trường hợp 2. $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|=|7m-1|=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{19}{7}(L) \\ m=\dfrac{-17}{7} \end{array}\right.$

Kiểm tra $m=\dfrac{-17}{7}$ có $\left|\dfrac{-17}{7}+16\right|=\dfrac{25}{7}<18 \Rightarrow m=\dfrac{-17}{7}$ thỏa mãn.

Với $1<m\le 4$ thì $\sqrt{m}\in(1;2]$ và $f(\sqrt{m})=-3m^2+8m\sqrt{m}+m$.

Bảng biến thiên:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & & \sqrt{m} & & 2 \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & f(1) & \searrow & f(\sqrt{m}) & \nearrow & f(2) \end{array}$$

Đặt $u=\sqrt{m}\left(1<u\le 2\right)$, $f\left(u\right)=-3u^4+8u^3+u^2$

Có $f'\left(u\right)=-12u^3+24u^2+2u=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\dfrac{6\pm\sqrt{42}}{6}\notin\left(1;2\right)\\u=0\notin\left(1;2\right)\end{array}\right.$

$\Rightarrow f'\left(u\right)>0\ \ \forall u\in\left(1;2\right)$

$\Rightarrow f\left(u\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$ $\Rightarrow f\left(u\right)>f\left(1\right)=6$ hay $f\left(\sqrt{m}\right)>6$

Do đó $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{7m-1;m+16\right\}$

Trường hợp 1. $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=m+16=18\Leftrightarrow m=2$

Kiểm tra $m=2$ có $7.2-1=13<18\Rightarrow m=2$ thỏa mãn

Trường hợp 2. $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=7m-1=18\Leftrightarrow m=\dfrac{19}{7}$

Kiểm tra $m=\dfrac{19}{7}$ có $\dfrac{19}{7}+16=\dfrac{131}{7}>18$ (Loại)

Với $m>4$ ta có $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Mà $\begin{cases}m+16>20>18\\7m-1>27>18\end{cases}$ nên $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|\ne 18.$

Vậy $m\in\left\{2;\dfrac{-17}{7}\right\}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-6mx^2+12mx+m\right|$ trên đoạn $\left[1;2\right]$ bằng 18. Từ đó tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2-\dfrac{17}{7}=-\dfrac{3}{7}$.

Câu 41: Chọn D

Do giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=\left|2x^3-12x^2+9x+m+8\right|+9x$ (m là tham số) trên đoạn $\left[0;5\right]$ là 78 nên $\left|2x^3-12x^2+9x+m+8\right|+9x\le 78\quad\forall x\in\left[0;5\right]$ và dấu bằng phải xảy ra tại ít nhất một điểm

$\Leftrightarrow\left|2x^3-12x^2+9x+m+8\right|\le 78-9x\quad\forall x\in\left[0;5\right]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}78-9x\ge 0\ dung\ \forall x\in\left[0;5\right]\\9x-78\le 2x^3-12x^2+9x+m+8\le 78-9x\end{cases}$

$\Leftrightarrow -2x^3+12x^2-86\le m\le -2x^3+12x^2-18x+70\ \ \forall x\in\left[0;5\right]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\max\limits_{x\in\left[0;5\right]}\left(-2x^3+12x^2-86\right)\\m\le\min\limits_{x\in\left[0;5\right]}\left(-2x^3+12x^2-18x+70\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\ge -22\\m\le 30\end{cases}$

Và dấu bằng phải xảy ra nên $\left[\begin{array}{l}m=-22\\m=30\end{array}\right.$. Vậy tổng tất cả giá trị m là 8

Câu 42: Chọn A

Theo đề ra ta có $\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}\ge 4$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}=1$ do đó luôn tồn tại $\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}$ trên $\mathbb{R}$ thoả yêu cầu bài toán.

Ta tìm m để $\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}<4,\forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|<4,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}>-4,\forall x\in\mathbb{R}\\ \dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}<4,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5\text{x}^2-(2m+4)x+9>0,\forall x\in\mathbb{R}\\ -3\text{x}^2-(2m-4)x-7<0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m-41<0\\ m^2-4m-17<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2-3\sqrt5<m<-2+3\sqrt5\\ 2-\sqrt{21}<m<2+\sqrt{21}\end{cases}$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{21}<m<-2+3\sqrt5$

Khi đó $\max\left\{\left|\dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2}\right|\right\}\ge4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le2-\sqrt{21}\\ m\ge-2+3\sqrt5\end{array}\right.$.

Giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ là $m\in\{-10;-9;...;-3;5;6;...;10\}$.

Câu 43: Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $1-2|x|\ge0\Leftrightarrow-\dfrac12\le x\le\dfrac12$.

Ta có: $|f(x)|\ge0$ và $-\sqrt{1-2|x|}\ge-1$

Do đó: $|f(x)|-\sqrt{1-2|x|}\ge-1$ .Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}f(x)=0\\ 1-2|x|=1\end{cases}\Rightarrow x=0$

$\Rightarrow g(x)\ge f\left(\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt2}\right)-1$

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0 thì:

$f\left(\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt2}\right)-1=0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt2}\right)=1$

Từ đồ thị hàm số $\Rightarrow\dfrac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt2}=-\dfrac12$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}=-\sqrt2\Leftrightarrow\begin{cases}\{\sqrt{1+2m}+\sqrt2=\sqrt{1-2m}\\ -\dfrac12\le m\le\dfrac12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2m+2+2\sqrt{2+4m}=1-2m\\ -\dfrac12\le m\le\dfrac12\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2+4m}=-2m-1\\ -2m-1\ge0\\ -\dfrac12\le m\le\dfrac12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2+4m}=-2m-1\\ m\le-\dfrac12\\ -\dfrac12\le m\le\dfrac12\end{cases}\Rightarrow m=-\dfrac12$.

Câu 44: Chọn C

Đặt $t=\cos x+1,\ t\in[0;2]$. Khi đó $y=\left|t^4-2t^2+m\right|$ với $t\in[0;2]$.

Xét $f(t)=t^4-2t^2+m$ với $t\in[0;2]$.

$$f'(t)=4t^3-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (\text{nhan})\\ t=1\ (\text{nhan})\\ t=-1(\text{loai})\end{array}\right..$$

Ta có $f(0)=m$, $f(1)=-1+m$, $f(2)=8+m$.

Do đó $\max\limits_{[0;2]}f(t)=8+m$, $\min\limits_{[0;2]}f(t)=m-1$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]}\left|f(t)\right|=\dfrac{\left|m+8+m-1\right|+\left|m+8-m+1\right|}{2}=\dfrac{\left|2m+7\right|+9}{2}$.

Ta có $\max y=\max\limits_{[0;2]}\left|f(t)\right|=\dfrac{\left|2m+7\right|+9}{2}\ge\dfrac{9}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2m+7=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 45: Chọn B

Đặt $f(x)=t,t\in[-2;2]$ suy ra $\min\limits_{[-1;3]}g(x)>1\Leftrightarrow g(x)>1,\forall x\in[-1;3]$

$$\Leftrightarrow\left|\left|2t+m-4\right|+t-3\right|>1,\forall t\in[-2;2]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2t+m-4\right|+t-3>1\\ \left|2t+m-4\right|+t-3<-1\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2t+m-4\right|>-t+4\\ \left|2t+m-4\right|<-t+2\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2t+m-4>-t+4\\ 2t+m-4<t-4\\ t-2<2t+m-4<-t+2\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>-3t+8\\ m<-t\\ -t+2<m<-3t+6\end{array}\right.,\forall t\in[-2;2]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>14\\ m<-2\\ 4<m<0(VL)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>14\\ m<-2\end{array}\right.$$

Do $m\in[-10;0]\Rightarrow m\in\{-10;-9;...;-3\}$

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46: Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

Trường hợp 1: $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-(-2+m)=2-m$

Khi đó $2-m=5\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases}2+m>0\\ m<0\end{cases} \Leftrightarrow -2<m<0$.

Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

Khi đó $2-m=5 \Leftrightarrow m=-3$ (loại).

Trường hợp 3: $\begin{cases}m>0\\ -2+m<0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$.

Khi đó: $|m-2|=2-m<2<2+m \Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$. Khi đó $2+m=5 \Leftrightarrow m=3$ (loại).

Trường hợp 4: $-2+m>0 \Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=5 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn). Vậy tổng các giá trị của m là 0.

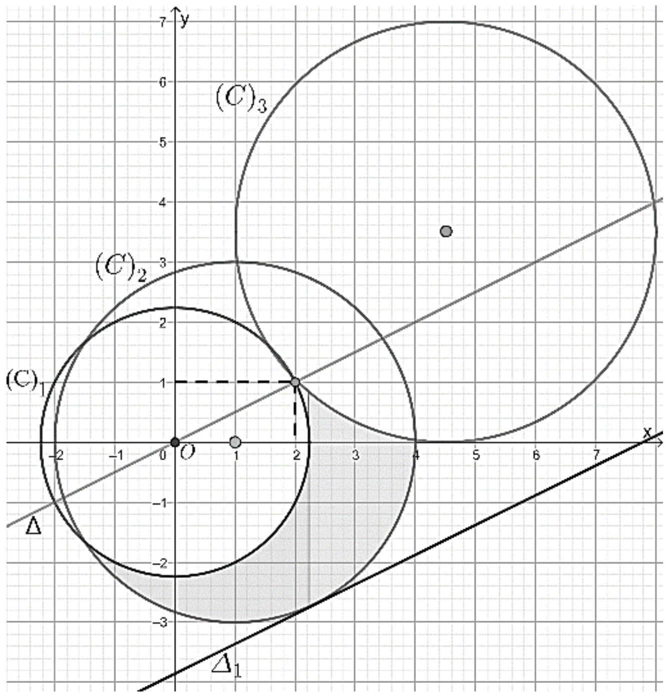
Cách khác: (Dùng công thức tính nhanh)

Ta có $A=\max\limits_{[0;2]} f(x)=m+2$, $a=\min\limits_{[0;2]} f(x)=-2+m$

Nên $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\dfrac{|m+2-2+m|+|m+2-(-2+m)|}{2}=5 \Leftrightarrow \dfrac{|2m|+4}{2}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-3\end{array}\right.$.

Câu 47: Chọn A

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}x^2+y^2\ge 5\\ (x-1)^2+y^2\le 9\\ \left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2\ge \dfrac{25}{2}\end{cases}$.



Tập hợp điểm (x,y) thoả mãn yêu cầu bài là phần được tô trên hình vẽ kể cả biên.

Ta thấy (C_1) cắt (C_3) tại hai điểm phân biệt trong đó có điểm $(2,1)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Xét đường thẳng Δ đi qua (x,y) thoả mãn yêu cầu bài toán: $x-2y=c$.

$x-2y$ đạt giá trị nhỏ nhất khi Δ đi qua $(2,1)$ nên $m=0$.

$(C_2): x^2+y^2=2x+8 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=9$.

$x-2y=(x-1)+(-2)y+1 \le \sqrt{\left(1+(-2)^2\right).9}+1=3\sqrt{5}+1$.

$\Delta_1: x-2y-1-3\sqrt{5}=0$. Δ_1 cắt (C_2) tại điểm thoả mãn bài toán.

Khi đó $M=3\sqrt{5}+1$. Vậy $M-m=3\sqrt{5}+1$.

Câu 48: Chọn B

Ta có, $(x+y)^2 \ge 4xy, \forall x,y \in \mathbb{R}$, kết hợp với giả thiết $(x+y)^3+4xy \ge 2$ suy ra $(x+y)^3+(x+y)^2 \ge 2 \Rightarrow x+y \ge 1$.

$$A=5\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+2=\frac{5}{2}\left[\left(x^2+y^2\right)^2+x^4+y^4\right]-4\left(x^2+y^2\right)+2$$

$$\ge \frac{5}{2}\left[\left(x^2+y^2\right)^2+\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}\right]-4\left(x^2+y^2\right)+2=\frac{15}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+2.$$

Đặt $t=x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} \ge \frac{1}{2}$. Do đó, $A \ge \frac{15}{4}t^2-4t+2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)=\frac{15}{4}t^2-4t+2$ trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ như sau

t	$-\infty$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(t)$			$\frac{15}{16}$	$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{16}$.

Tức là, $A \ge \frac{15}{16}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{15}{16}$.

Câu 49: Chọn C

Do $\begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0 \\ x+y=1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} 0 \le x,y \le 1 \\ y=1-x \end{cases}$.

Thay $y=1-x$ vào biểu thức S ta được: $S=\left(4x^2+3(1-x)\right)\left(4(1-x)^2+3x\right)+25x(1-x)$

$=\left(4x^2-3x+3\right)\left(4x^2-5x+4\right)+25x-25x^2=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$

Đặt $S=S(x)=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$ với $0\le x\le 1$.

Ta có $S'(x)=64x^3-96x^2+36x-2$.

Xét phương trình

$$S'(x)=0\Leftrightarrow 64x^3-96x^2+36x-2=0\Leftrightarrow (2x-1)\left(32x^2-32x+2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\in(0;1) \\ x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\in(0;1). \\ x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\in(0;1) \end{array}\right.$$

Ta có $S(0)=12;\ S(1)=12;\ S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{25}{2};\ S\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{191}{16};\ S\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{191}{16}$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]}S(x)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$ và $\min\limits_{[0;1]}S(x)=S\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=S\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{191}{16}$.

Vậy $M=\dfrac{25}{2}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$. Và $m=\dfrac{191}{16}$ khi $\begin{cases} x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \\ y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

Câu 50: Chọn D

Theo giả thiết $y>0$ nên ta có

$\dfrac{4x^3+x}{y+1}=\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow 4x^3+x=\sqrt{2y+1}(y+1)$

$\Leftrightarrow 8x^3+2x=\sqrt{2y+1}(2y+2)\Leftrightarrow (2x)^3+2x=\left(\sqrt{2y+1}\right)^3+(2y+1)$.

Xét $f(t)=t^3+t$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(2x)=f\left(\sqrt{2y+1}\right)\Leftrightarrow 2x=\sqrt{2y+1}\Leftrightarrow 4x^2=2y+1\Leftrightarrow y=2x^2-\dfrac{1}{2}$.

Do $y>0$ và $2x=\sqrt{2y+1}$ nên $x>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $S=8x-y+\dfrac{3}{2}=8x-2x^2+2=-2\left(x^2-4x+4\right)+10=10-2(x-2)^2\le 10$.

Vậy $\max S=10$ khi $x=2$.

Câu 51: Chọn D

Ta phải chứng minh $x^2+y^2+z^2 \ge xy-yz-zx,\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có $x^2+y^2+z^2 \ge xy-yz-zx \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(z+y)^2+\frac{1}{2}(x+z)^2 \ge 0$.

Khi đó $P = xy-yz-zx-\dfrac{2022}{x^2+y^2+z^2} \le x^2+y^2+z^2-\dfrac{2022}{x^2+y^2+z^2}$

Đặt $t = x^2+y^2+z^2$, $t \in [0;3]$. Khi đó, ta có $P \le f(t) = t-\dfrac{2022}{t}$

$f'(t) = 1+\dfrac{2022}{t^2} > 0, \forall t \in (0;3] \Rightarrow f(t)$ đồng biến và liên tục trên $(0;3]$. Vậy $P \le f(3) = -671$.

Do đó $\max P = -671$ khi $x = y = 1;\ z = -1$ hoặc $x = y = -1;\ z = 1$.

CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- **Định nghĩa 1:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $\left(a;+\infty\right)$; $\left(-\infty;b\right)$ hoặc $\left(-\infty;+\infty\right)$). Đường thẳng $y=y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} y=y_0;\ \lim_{x\to-\infty} y=y_0.$$

- **Định nghĩa 2:** Đường thẳng $x=x_0$ là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} y=+\infty; \qquad \lim_{x\to x_0^-} y=+\infty; \qquad \lim_{x\to x_0^+} y=-\infty; \qquad \lim_{x\to x_0^-} y=-\infty.$$

2. Các phương pháp giải toán nâng cao

Dạng 1: Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số không chứa tham số

- Để tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thực hiện các bước sau:
  - **Bước 1:** Tìm miền xác định của hàm số $y=f\left(x\right)$
  - **Bước 2:** Tìm giới hạn của $f\left(x\right)$ khi *x* tiến đến biên của miền xác định.
  - **Bước 3:** Từ các giới hạn và định nghĩa tiệm cận suy ra phương trình các đường tiệm cận.
- **Đặc biệt:** Để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ ta có thể làm như sau:
  - **Bước 1:** Tìm tập xác định *D*.
  - **Bước 2:**

    Tìm tiệm cận ngang: Ta tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y;\ \lim\limits_{x\to-\infty} y$ và kết luận tiệm cận ngang

    Tìm tiệm cận đứng: Sử dụng phương pháp nhân liên hợp hoặc phân tính nhân tử để đơn giản biểu thức $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ về dạng tối giản nhất có thể từ đó kết luận về tiệm cận đứng.

Chú ý:

Nếu bậc của $f\left(x\right)$ **nhỏ hơn hoặc bằng bậc** của $g\left(x\right)$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

Nếu bậc của $f\left(x\right)$ **lớn hơn bậc của** thì $g\left(x\right)$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Dạng 2: Các bài toán tiệm cận của đồ thị hàm số chứa tham số

Một số loại toán thường gặp:

- **Loại 1:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$.
    - Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $ad - bc \neq 0$.
- **Loại 2:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-x_0}$ với $a \neq 0$.
    - Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g\left(x\right) = ax^2+bx+c = 0$ không có nghiệm $x = x_0 \Leftrightarrow g\left(x_0\right) \neq 0$.
    - Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g\left(x\right) = ax^2+bx+c = 0$ có nghiệm $x = x_0 \Leftrightarrow g\left(x_0\right) = 0$.
- **Loại 3:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-x_0}{ax^2+bx+c}\left(C\right)$ với $a \neq 0$.
    - Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi $g\left(x\right) = ax^2+bx+c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g\left(x_0\right) \neq 0 \end{cases}$.
    - Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $g\left(x\right) = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$.
    - Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g\left(x\right) = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$.
- **Loại 4:** Biện luận số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$ $\left(C\right)$ với $a \neq 0, x_1 \neq x_2$
    - Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $g\left(x\right) = ax^2+bx+c = 0$ không nhận x_1, x_2 là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} g\left(x_1\right) \neq 0 \\ g\left(x_2\right) \neq 0 \end{cases}$.
    - Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi phương trình $g\left(x\right) = ax^2+bx+c = 0$ có nghiệm $x = x_1$ hoặc $x = x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g\left(x_1\right) = 0 \\ g\left(x_2\right) = 0 \end{array}\right.$ (Chú ý hai điều kiện này không đồng thời xảy ra).
    - Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi $g\left(x\right) = ax^2+bx+c = 0$ nhận $x = x_1$ và $x = x_2$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} g\left(x_1\right) = 0 \\ g\left(x_2\right) = 0 \end{cases}$.
- **Loại 5:** Biện luận số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$.
    - Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang bậc của mẫu số lớn hơn hoặc bậc của mẫu số và phải tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} y$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm bậc 4 và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-2}{f^2\left(x\right)+3f\left(x\right)-4}$ có mấy đường tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

LỜI GIẢI

Chọn D

Đặt $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,a\neq 0$. Ta có $f'\left(x\right)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Đồ thị hàm số có các điểm cực trị: $A\left(0;-3\right),B\left(-\sqrt{2};1\right),C\left(\sqrt{2};1\right)$ nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} f'\left(0\right)=0\\ f\left(0\right)=-3\\ f'\left(\sqrt{2}\right)=0\\ f'\left(-\sqrt{2}\right)=0\\ f\left(\sqrt{2}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} d=0\\ e=-3\\ 8\sqrt{2}a+6b+2\sqrt{2}c=0\\ -8\sqrt{2}a+6b-2\sqrt{2}c=0\\ 4a+2\sqrt{2}b+2c+\sqrt{2}d+e=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1\\ b=0\\ c=4\\ d=0\\ e=-3\end{cases}$$

. Vậy $f\left(x\right)=-x^4+4x^2-3$.

Khi đó $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-2}{\left(f\left(x\right)-1\right)\left(f\left(x\right)+4\right)}=\dfrac{x^2-2}{\left(x^4-4x^2+4\right)\left(x^4-4x^2-1\right)}=\dfrac{1}{\left(x^2-2\right)\left(x^4-4x^2-1\right)}$.

Do phương trình $\left(x^2-2\right)\left(x^4-4x^2-1\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt: $x=\pm\sqrt{2};x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$ nên đồ thị hàm số đã cho có bốn đường tiệm cận đứng.

CÂU 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+2x+3}+ax$ có tiệm cận ngang.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

LỜI GIẢI

Chọn D

Hàm số $y=\sqrt{x^2+2x+3}+ax$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Xét $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+ax\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+a\right)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+a\right)=1+a$.

Nếu $1+a\neq 0$ thì $I=\infty$, khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang phía $+\infty$.

Nếu $1+a=0\Leftrightarrow a=-1$, ta có:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=1.$$

Khi đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang.

Xét $J=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+a\right)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+a\right)=a-1$.

Nếu $a-1\neq 0$ thì $J=\infty$, khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang về phía $-\infty$.

Nếu $a-1=0\Leftrightarrow a=1$, ta có:

$$J=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1}=-1.$$

Khi đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang.

Vậy để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $a=1$ hoặc $a=-1$.

CÂU 3. Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với a,b,c,d,e là các số thực và $a\neq 0$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{f^2(x)+3f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có $f^2(x)+3f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)+3\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\ f(x)=-3\end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=x_1 & (0<x_1<1)\\ x=x_2 & (x_2>1)\end{array}\right.$.

$\Rightarrow f(x)=(x-x_1)(x-x_2)h(x)$ (trong đó $h(x)$ là hàm bậc hai và vô nghiệm).

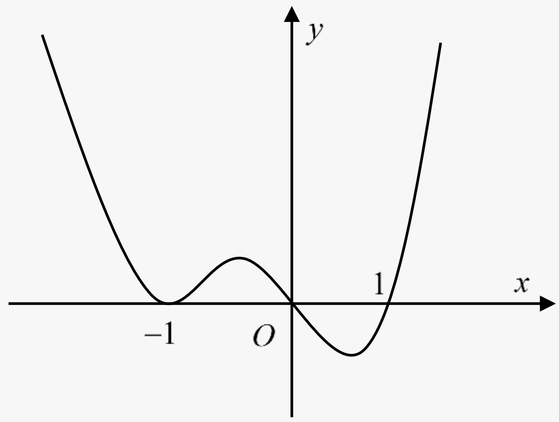
Từ bảng biến thiên $f(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=x_3 & (x_3<-2)\\ x=x_4 & (x_4>1)\\ x=0 & \end{array}\right.\Rightarrow f(x)+3=ax^2(x-x_3)(x-x_4)$

$$\Rightarrow y=\frac{x^2}{f^2(x)+3f(x)}=\frac{x^2}{(x-x_1)(x-x_2)h(x)ax^2(x-x_3)(x-x_4)}$$

$$=\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)h(x)(x-x_3)(x-x_4)}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{f^2(x)+3f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

CÂU 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Biết $f'(x)<0$, $\forall x<-1$ và $f'(x)>0, \forall x>1$.

Khi đó, tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2021}{\sqrt{xf(x+1)}\left[xf(x+1)+1\right]-2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

LỜI GIẢI

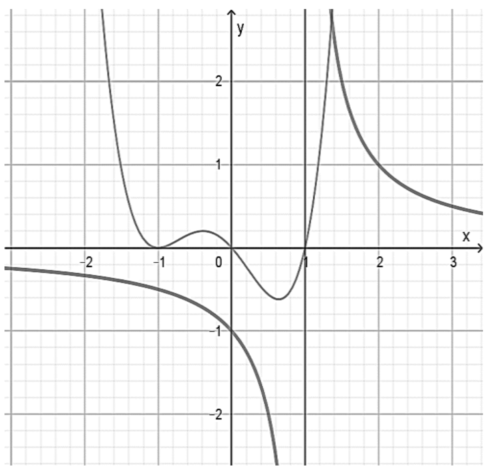
Chọn D

Ta có: $\sqrt{xf(x+1)}\left[xf(x+1)+1\right]-2=0\ (1)$.

Đặt $t=\sqrt{xf(x+1)}\ (t\ge 0)$, ta được phương trình: $t(t^2+1)=2 \Leftrightarrow t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$.

$\sqrt{xf(x+1)}=1 \Leftrightarrow xf(x+1)-1=0$.

Đặt $t=x+1 \Rightarrow x=t-1$, ta được phương trình: $(t-1)f(t)-1=0 \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{1}{t-1}\ (2)$.



Nhận thấy đồ thị của các hàm số $y=f(t), y=\dfrac{1}{t-1}$ chỉ cắt nhau tại 1 điểm do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất, suy ra đồ thị có 1 tiệm cận đứng.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2021}{\sqrt{xf(x+1)}\left[xf(x+1)+1\right]-2}=a>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xf\left(x+1\right)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2021}{\sqrt{xf\left(x+1\right)\left[xf\left(x+1\right)+1\right]}-2}$ không tồn tại.

Do đó đường thẳng $y=a$ là tiệm cận ngang.

CÂU 5. Tập tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-2x^2+5x-2}}{x^6+6x^4-m^3x^3+3\left(5-m^2\right)x^2-6mx+10}$ có đúng hai đường tiệm cận là $S=\left(a;b\right]$. Tính $T=5a+8b$.

A. $T=43$. **B.** $T=30$. **C.** $T=31$. **D.** $T=18$.

LỜI GIẢI

Chọn B

Ta thấy $\sqrt{-2x^2+5x-2}$ có nghĩa khi $-2x^2+5x-2\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le 2$.

Do đó, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình:

$x^6+6x^4-m^3x^3+3\left(5-m^2\right)x^2-6mx+10=0\ \left(*\right)$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Từ $\left(*\right)$ ta có $\left(x^2+2\right)^3+3\left(x^2+2\right)=\left(mx+1\right)^3+3\left(mx+1\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+3t$ với $t\in\mathbb{R}$, $f'\left(t\right)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$, nên hàm số đồng biến

Do đó $f\left(x^2+2\right)=f\left(mx+1\right)\Leftrightarrow x^2+2=mx+1\Leftrightarrow m=x+\dfrac{1}{x}=g\left(x\right)$

Xét hàm số $g\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$ trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$, ta có $g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x^2}; g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\notin\left[\dfrac{1}{2};2\right]\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Từ đó ta suy ra $2<m\le\dfrac{5}{2}$, hay $m\in\left(2;\dfrac{5}{2}\right]$. Vậy $a=2;b=\dfrac{5}{2}\Rightarrow T=5a+8b=10+20=30$.

CÂU 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-5;5\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

LỜI GIẢI

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có đúng 1 nghiệm khác -1.

Ta có $x^3-3x^2-m=0\Leftrightarrow m=x^3-3x^2$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3-3x^2\Rightarrow g'\left(x\right)=3x^2-6x\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	↗	-4 ↗		0	↘	-4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-4\end{array}\right.$.

Mà m là tham số nguyên thuộc đoạn $\left[-5;5\right]$ suy ra $m\in\left\{-5;1;2;3;4;5\right\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-5;5\right]$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{\left(x-m\right)\left(x^2-n^2\right)}$ có đồ thị $\left(C\right)$, với m và n là hai tham số nguyên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $\left(m;n\right)$ để $\left(C\right)$ có đúng 2 đường tiệm cận (nếu chỉ xét TCĐ và TCN)?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 11.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{\left(x-m\right)\left(x^2-n^2\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{\left(1-\dfrac{m}{x}\right)\left(1-\dfrac{n^2}{x^2}\right)}=0$ nên đường thẳng $y=0$ luôn là đường tiệm cận ngang của $\left(C\right),\forall m,n\in\mathbb{Z}$. Do đó $\left(C\right)$ có đúng 2 đường tiệm cận khi và chỉ khi $\left(C\right)$ có một đường tiệm cận đứng tức là mẫu số có đúng 1 nghiệm mà không phải là nghiệm của tử số, hàm số.

Mặt khác, $y=\dfrac{x^2-3x+2}{\left(x-m\right)\left(x^2-n^2\right)}=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{\left(x-m\right)\left(x-n\right)\left(x+n\right)}$.

Trường hợp 1: $m=1\Rightarrow y=\dfrac{\left(x-2\right)}{\left(x-n\right)\left(x+n\right)}$.

Trường hợp này có 3 giá trị nguyên của n thỏa mãn là $n\in\left\{2;-2;0\right\}$.

Trường hợp 2: $m=2\Rightarrow y=\dfrac{\left(x-1\right)}{\left(x-n\right)\left(x+n\right)}$.

Trường hợp này có 3 giá trị nguyên của n thỏa mãn là $n\in\left\{1;-1;0\right\}$.

Trường hợp 3: $n=1\Rightarrow y=\dfrac{\left(x-2\right)}{\left(x-m\right)\left(x+1\right)}$.

Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\left\{2;-1\right\}$.

Trường hợp 4: $n=2\Rightarrow y=\dfrac{\left(x-2\right)}{\left(x-m\right)\left(x+2\right)}$.

Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\left\{1;-2\right\}$.

Trường hợp 5: $n=-1\Rightarrow y=\dfrac{(x-2)}{(x-m)(x+1)}$.

Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{2;-1\}$.

Trường hợp 6: $n=-2\Rightarrow y=\dfrac{(x-1)}{(x-m)(x+2)}$.

Trường hợp này có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{1;-2\}$.

Trường hợp 7: $\begin{cases}m\neq 1, m\neq 2\\ n\neq \pm 1, n\neq \pm 2\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-m)(x-n)(x+n)}$ có 3 nghiệm của mẫu đều không là nghiệm của tử. Nên yêu cầu bài toán tương đương $m=n=0$.

Vậy có 11 cặp $(m;n)$ nguyên thỏa mãn đề bài.

CÂU 8. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-m}+\left(m^3-3m+2\right)x+2021$ có đúng 1 đường tiệm cận (nếu chỉ tính tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 2. **B.** 13. **C.** 3. **D.** 1.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\geq -3\\ x^2\neq m\end{cases}$.

Xét $m^3-3m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-2\end{array}\right.$.

Khi $m=1$, ta có $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}+2021$ dễ thấy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm đứng $x=-1$ và 1 đường tiệm cận ngang $y=2021$, nên $m=1$ **không** thỏa mãn.

Khi $m=-2$ ta có $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2}+2021$ đồ thị hàm số chỉ có 1 đường tiệm ngang $y=2021$ nên $m=-2$ thỏa mãn.

Xét $m^3-3m+2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq -2\end{cases}$.

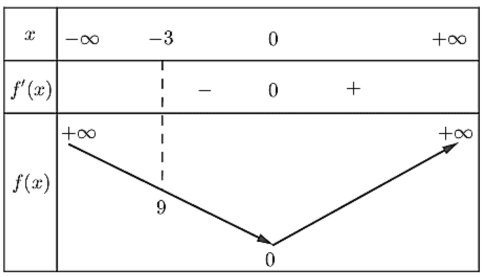
Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-m}+\left(m^3-3m+2\right)x+2021\right]=\left[\begin{array}{l}-\infty,\text{khi}\, m^3-3m+2<0\\ +\infty,\text{khi}\, m^3-3m+2>0\end{array}\right.$.

Lúc này đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Từ đây yêu cầu bài toán tương đương với đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng.

hay phương trình $x^2=m$ có đúng 1 nghiệm trên tập $[-3;+\infty)$ (1).

Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)=x^2$ trên $[-3;+\infty)$.



Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>9 \\ m=0 \end{array}\right.$, từ giả thiết thì $m \in \{0;10;11;...,20\}$.

Vậy có tất cả 13 giá trị tham số trị nguyên $m \in [-20;20]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Trường hợp phương trình có 2 nghiệm trong đó có 1 nghiệm trùng với nghiệm $x=1$ trên tử đã được xét ở trên khi $m=1$ nên không xét lại.

CÂU 9. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{20+\sqrt{6x-x^2}}{\sqrt{x^2-8x+2m}}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng là:

A. 12. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 17.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} 6x-x^2 \ge 0 \\ x^2-8x+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ x^2-8x+2m>0 \end{cases}$

Khi đó, nếu D là tập xác định của hàm số thì $D \subset [0;6]$ và

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=a$ thì $\lim\limits_{x\to a^+} y=+\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+} y=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-} y=-\infty$).

Ta thấy khi $0 \le a \le 6$ thì $\lim\limits_{x\to a^+}\left(20+\sqrt{6x-x^2}\right)$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^-}\left(20+\sqrt{6x-x^2}\right)$ sẽ luôn là một số dương xác định.

Do đó để $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+}\left(\sqrt{x^2-8x+2m}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to a^-}\left(\sqrt{x^2-8x+2m}\right)=0 \end{array}\right.$ và hàm số phải xác định tại lân cận a. Suy ra a là nghiệm của phương trình $x^2-8x+2m=0$.

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng thì phải tồn tại 2 giá trị a phân biệt là nghiệm của phương trình $x^2-8x+2m=0$ đồng thời hàm số đã cho xác định tại lân cận a.

Trước hết ta tìm m để phương trình $x^2-8x+2m=0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0;6]$

Ta có $x^2-8x+2m=0 \Leftrightarrow 2m=-x^2+8x$

Xét hàm số $g(x)=-x^2+8x$; $g'(x)=-2x+8$

Bảng biến thiên:

x	0		4		6
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	12

Dựa vào bảng biến thiên ta được $12 \le 2m < 16 \Leftrightarrow 6 \le m < 8$

Với $m=6$ ta được $y=\dfrac{20+\sqrt{6x-x^2}}{\sqrt{x^2-8x+12}}$. Hàm số có tập xác định $D=[0;2)$. Khi đó hàm số chỉ có duy nhất 1 tiệm cận đứng là $x=2$ nên ta loại $m=6$.

Với $m=7$ ta được $y=\dfrac{20+\sqrt{6x-x^2}}{\sqrt{x^2-8x+14}}$. Hàm số có ập xác định $D=\left[0;4-\sqrt{2}\right)\cup\left(4+\sqrt{2};6\right]$. Khi đó hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x=4-\sqrt{2}$ và $x=4+\sqrt{2}$ nên ta nhận $m=7$.

Vậy có duy nhất giá trị nguyên $m=7$ thỏa yêu cầu bài toán.

CÂU 10. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (0;2021]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^{2022} + \sqrt{x-2}}{x^2 - (m-2)x + 2}$ có đúng một tiệm cận đứng?

A. 2021. **B.** 2015. **C.** 2017. **D.** 2016.

LỜI GIẢI

Chọn C

Với $x \ge 2$ thì $x^{2022} + \sqrt{x-2} > 0$.

Xét phương trình $x^2 - (m-2)x + 2 = 0\,(1), \forall x \ge 2$. Ta có $(1) \Leftrightarrow m = x + 2 + \dfrac{2}{x}\,(2)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng 1 nghiệm thuộc $[2;+\infty)$ khi và chỉ khi đường thẳng $(d): y = m$ cắt đồ thị $y = g(x) = x + 2 + \dfrac{2}{x}$ tại duy nhất 1 điểm trên $[2;+\infty)$ $(*)$.

Ta có : $g'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	2		$+\infty$
g'		$+$	
g	5	$\nearrow$	$+\infty$

$(*) \Leftrightarrow m \ge 5$ mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (0;2021] \end{cases}$. Suy ra $m \in \{5;6;...;2021\}$. Suy ra có 2017 số cần tìm.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{mx^2+4x}$ có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** -6. **D.** 2.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x-1\right).\sqrt{x^2+3x}}{x^2+\left(m+1\right)x-m-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x-1\right)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+\left(m+1\right)x-m-2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

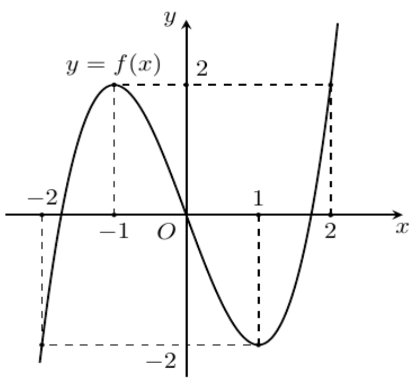
Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{-2x^2+9x-4}}{\sqrt{\left(1-m^3\right)x^3+3x^2+3x+1}}$ (với m là tham số) có đúng một đường tiệm cận.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=3$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$. Số tiệm cận của hàm số $h\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{f\left(x\right)}+\dfrac{2022\sqrt{x+1}}{x^2+15}$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 6: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Với giá trị nào của m thì hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f^2(x)-2f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng?



A. $m>2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m\ge 2$.

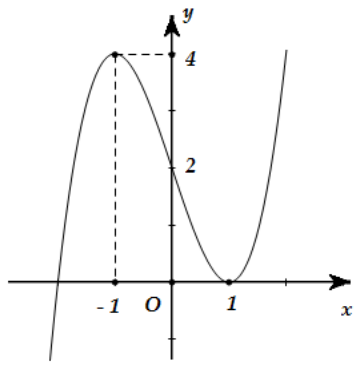
Câu 7: Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{f(x)-1}$ có mấy đường tiệm cận?

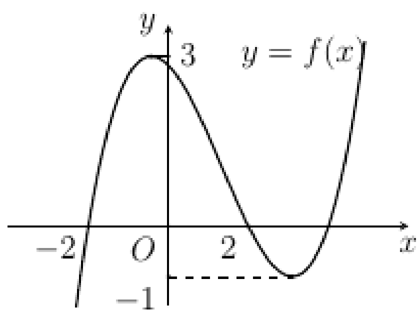
A. 3 . **B.** 4 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{f^2(x)-4f(x)}$ bằng



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\left|3f(x^3-3x)\right|-m}$ có 8 tiệm cận đứng?

A. 4 . **B.** 6 . **C.** 5 . **D.** 3 .

Câu 10: Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2mx+2m^2-3m+3}}{x^3-3x^2-m}$ có ít nhất một tiệm cận đứng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 6 . **B.** -4 . **C.** 2 . **D.** 5 .

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn và có bảng biến thiên như sau

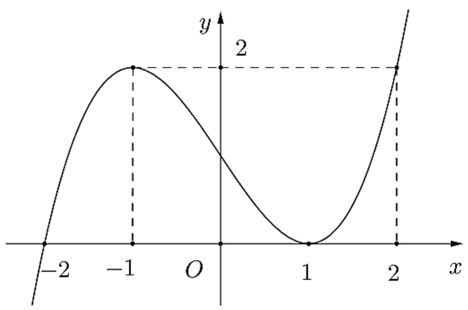
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x^4-2x^2}{f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

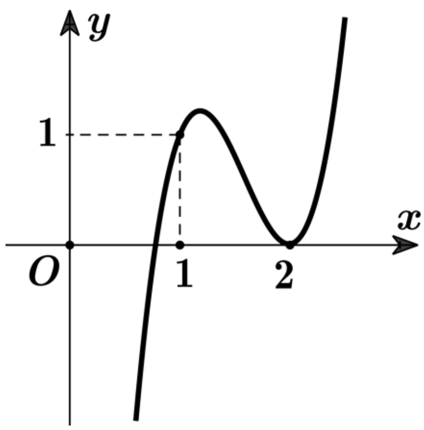
Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình bên. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $\left(-2019;2021\right)$ để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)\sqrt{f\left(x\right)}}{\left(f\left(x\right)-2\right)\left(x^2-2mx+m+2\right)}$ có 5 đường tiệm cận (tiệm cận đứng hoặc tiệm cận ngang).

Số phần tử của tập S là



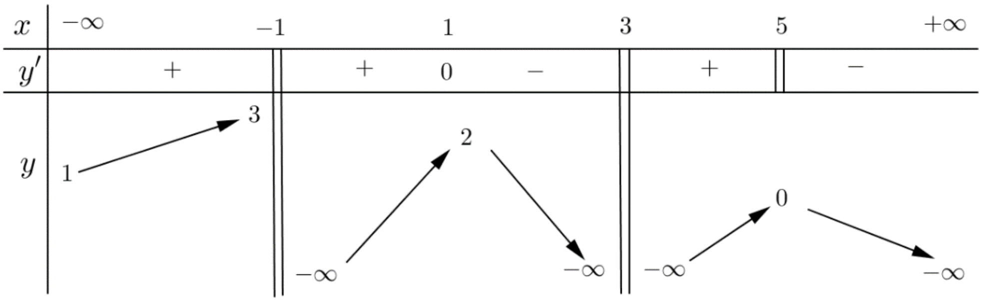
A. 4036. **B.** 4034. **C.** 2017. **D.** 2016.

Câu 13: Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 5 . **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 3 .

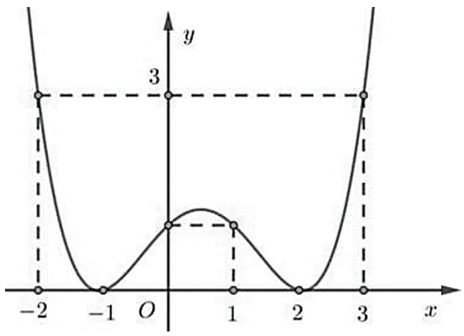
Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$ và có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2020 + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)}}$ có tổng số tất cả các đường tiện cận đứng và đường tiệm cận ngang là

A. 4 . **B.** 5 . **C.** 6 . **D.** 3 .

Câu 15: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\left(x^2-4\right)^4.(x-3).\left(x^3+1\right)}{f\left(f(x)-1\right)}$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 16: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Tìm tham số a để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) cách một tiệm cận ngang một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$.

A. $a = 2$. **B.** $a = 3$. **C.** $a > 0$. **D.** $a = 1$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$. **C.** $-5 \le m < -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \le -5 \\ m > -1 \end{array}\right.$.

Câu 18: Cho số thực $a > 0$ .Gọi (C) là đồ thị của hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{\left(\sqrt{ax^2-3x}+2x\right)(x-3)} & khi\ \ x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+4}{2x+1}\right)^{\frac{3x+2}{4}} & khi\ \ x \ge 0 \end{cases}.$$

Biết rằng các đường tiệm cận của (C) đều nằm phía trên trục Ox, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường tiệm cận của (C) và đường thẳng $y=x$ có dạng $S=\frac{1}{2}e^{m}-n$. Tính $a\cdot m\cdot n$

A. 4. **B.** 32. **C.** -8. **D.** 8.

Câu 19: Có hai giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{mx+\sqrt{x^2-2x+3}}{2x-1}$ có một tiệm cận ngang là $y=1$. Tổng hai giá trị này bằng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 20: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}$ có đồ thị (C). Tồn tại $a\in\mathbb{R}$ để đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận ngang đó cách đường tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$. Giá trị của a thuộc tập nào trong các đáp án sau?

A. $(3;5)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(0;5)$.

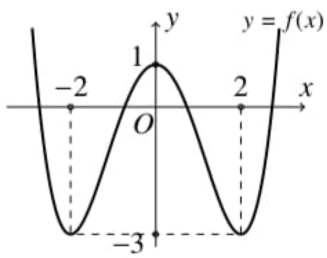
Câu 21: Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-1} & \text{khi } x>1\\ \sqrt{4x^2+2x+1}+2x+2020 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Gọi $S=\{a\in\mathbb{R}\mid x=a$ hoặc $y=a$ là tiệm cận của $(C)\}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. 2022. **B.** 2020. **C.** $\frac{4045}{2}$. **D.** $\frac{4043}{2}$.

Câu 22: Đồ thị hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2} & neu\ \ x>2\\ \sqrt{4x^2+x+1}+2x & \text{neu } x\le 2\end{cases}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số đường tiệm cận đứng của hàm số $y=\frac{(x^2-4).(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ là

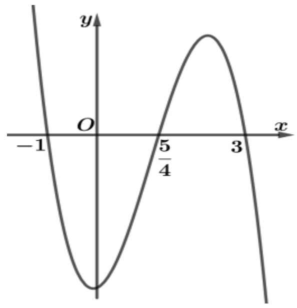


A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 24: Tìm m để đồ thị hàm số $y=\frac{mx+\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+x}}$ có 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng 2.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 25: Cho hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2018}{h\left(x\right)-m^2-m}$ với $h\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $\left(m,n,p,q\in\mathbb{R}\right)$. Hàm số $y=h'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ là 2.

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Câu 26: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{f^2\left(x\right)-mf\left(x\right)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của tập S là:

A. 9. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 8.

Câu 27: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{2x+3}\left(m\neq-\dfrac{3}{2}\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)$ là 1 điểm bất kỳ thuộc $\left(C\right)$. Gọi A,B lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của $\left(C\right)$. Biết diện tích ΔMAB bằng 1. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $m\in\left\{\dfrac{5}{2};-\dfrac{11}{2}\right\}$. **B.** $m\in\left\{-\dfrac{5}{2};-\dfrac{11}{2}\right\}$. **C.** $m\in\left\{-\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left\{\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right\}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Giả sử $M\left(x_M;y_M\right)$ là điểm thuộc $\left(C\right)$ thỏa mãn tổng khoảng cách từ M tới trục hoành và đường tiệm cận đứng của $\left(C\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của x_M+y_M bằng

A. 2. **B.** −2. **C.** 1. **D.** −1.

Câu 29: Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+3}{x-m}$ có đồ thị $\left(C\right)$ và I là giao điểm của hai đường tiệm cận của $\left(C\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho tiếp tuyến tại điểm M trên đồ thị $\left(C\right)$ cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm A,B và tam giác IAB có diện tích bằng 64. Tổng các phần tử của tập hợp S là

A. $\sqrt{58}$. **B.** $2\sqrt{58}$. **C.** $-2\sqrt{58}$. **D.** 0.

Câu 30: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Giả sử $M(x_0;y_0)$ là điểm trên đồ thị (C) có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm A,B thỏa mãn $IA^2+IB^2=40$. Giá trị của biểu thức $P=x_0^2+y_0^2+x_0y_0$ bằng

A. 8. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 31: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận và $M(x_0;y_0)$ là điểm nằm trên (C) với $x_0>0$. Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm P và Q sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IPQ lớn nhất. Tính tổng x_0+y_0.

A. $x_0+y_0=0$. **B.** $x_0+y_0=2+2\sqrt{3}$. **C.** $x_0+y_0=2$. **D.** $x_0+y_0=2\sqrt{3}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận và M là điểm nằm trên (C) có hoành độ lớn hơn 1. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại hai điểm A và B. Hoành độ của điểm M thuộc khoảng nào sau đây để $P=IA+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $(-4;1)$. **B.** $(-\infty;-4)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(1;4)$.

Câu 33: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận và $M(x_0;y_0)$ là một điểm thuộc (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $IA^2+IB^2=32$. Tìm tọa độ điểm M biết $y_0>0$.

A. $(-5;3)$. **B.** $\left(2;\dfrac{1}{5}\right)$. **C.** $\left(3;\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $(-1;-1)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm gấp 2 lần tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{mx^2+4x}=\dfrac{1}{m}$. Suy ra để hàm số có một tiệm cận ngang thì $m\neq 0$ (1).

Lại có $\dfrac{x^2-3x+2}{mx^2+4x}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x\left(mx+4\right)}$.

Để đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng thì m thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} m+4=0 \\ 2m+4=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=-2 \end{array}\right.$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra để đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang thì $\left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Vậy tổng các phần tử của S bằng -6.

Câu 2: Chọn A

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x\leq -3 \end{array}\right.$.

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có 2 tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Xét phương trình $x^2+\left(m+1\right)x-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-m-2 \end{array}\right.$.

Vì $x=1$ là nghiệm của tử số nên đồ thị hàm số có ba đường đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có một tiệm cận đứng nữa là $x=-m-2$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l} -m-2\geq 0 \\ -m-2\leq -3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\leq -2 \\ m\geq 1 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên thuộc $\left[-10;10\right]$ nên $m\in\left\{-10;-9;-8;....;-2;1;2;...;10\right\}$

Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Chọn B

Xét $x^2+3x\geq 0\Leftrightarrow x\leq -3\ \vee\ x\geq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-1\right)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+\left(m+1\right)x-m-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right).x\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x^2\left(1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right).\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}}=1.$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$.

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-1\right)\sqrt{x^2+3x}}{x^2+\left(m+1\right)x-m-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right).\left(-x\right)\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x^2\left(1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(1-\frac{1}{x}\right).\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1+\frac{m+1}{x}+\frac{-m-2}{x^2}}=-1$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=-1$.

Xét $x^2+\left(m+1\right)x-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-m-2 \end{array}\right.$.

Khi đó, đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận khi và chỉ khi $\begin{cases} -m-2 \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} -m-2 \leq -3 \\ -m-2 \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Lại có $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10]$ nên $m \in [1;10] \cup [-10;-2] \setminus \{-3\}$.

Do vậy có 18 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} -2x^2+9x-4 \geq 0 \\ (1-m^3)x^3+3x^2+3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \\ x^3+3x^2+3x+1>m^3x^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \\ (x+1)^3 > m^3x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \\ x+1>mx \end{cases}$.

Do $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Suy ra đồ thị có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $(1-m^3)x^3+3x^2+3x+1=0$ (1) có đúng một nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};4\right]$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow x+1=mx \Leftrightarrow m=\frac{x+1}{x} \in \left[\frac{5}{4};3\right]$, $\forall x \in \left[\frac{1}{2};4\right]$.

So với điều kiện, suy ra $\frac{5}{4} \leq m < 3$. Vậy có một giá trị nguyên $m=2$ thỏa mãn.

Câu 5: Chọn A

Ta có: $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x)>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Mà $x^2+15>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Suy ra tập xác định của hàm số $y=h(x)$: $D=[-1;+\infty)$.

Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{f(x)}+\frac{2022\sqrt{x+1}}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5}}{f(x)}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2022\sqrt{x+1}}{x^2+1}=0$.

Suy ra $y=0$ là tiệm cận ngang. Vậy hàm số $y=h(x)$ có 1 đường tiệm cận ngang.

Câu 6: Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\frac{\sqrt{m-x}}{f^2(x)-2f(x)}$

Biểu thức $\sqrt{m-x}$ xác định khi $m-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq m(1)$

Ta có: $f^2(x)-2f(x)=0$ (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ fx)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \in (-2;-1) \\ x=0 \\ x=x_2 \in (1;2) \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Hàm số có 5 tiệm cận đứng khi phương trình (2) có 5 nghiệm thỏa mãn điều kiện của (1) $\Leftrightarrow m \geq 2$

Câu 7: Chọn D

Xét phương trình $f\left(x\right)-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\left(b2\right) \\ x=-2\left(b2\right) \end{array}\right.$.

Do $f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty$ nên $f\left(x\right)-1=a\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)^2$ $(a<0)$.

Khi đó, $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x-2\right)}{a\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)^2}=\dfrac{1}{a\left(x+2\right)}$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a\left(x+2\right)}=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a\left(x+2\right)}=0$, nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và $\lim\limits_{x\to-2^+} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{a\left(x+2\right)}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1}{a\left(x+2\right)}=+\infty$, nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận.

Câu 8: Chọn A

Tiệm cận đứng:

Dựa vào đồ thị ta có: $f\left(x\right)=m\left(x-a\right)\left(x-1\right)^2, m>0, a<-1$

$\Rightarrow f\left(x\right)-4=m\left(x+1\right)^2\left(x-b\right), m>0, b>1.$

Ta có: $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)^2}{f\left(x\right)\left[f\left(x\right)-4\right]}=\dfrac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)^2}{m^2\left(x-a\right)\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2\left(x-b\right)}=\dfrac{1}{m^2\left(x-a\right)\left(x+1\right)\left(x-b\right)}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng $x=a, x=-1, x=b$.

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=0.$ Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

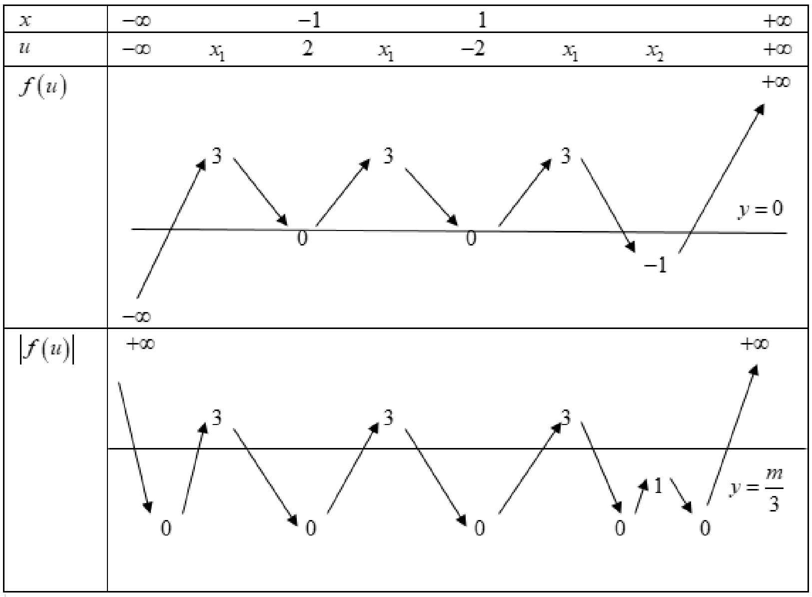
Câu 9: Chọn C

Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\left|3f\left(x^3-3x\right)\right|-m}$ có 8 tiệm cận đứng khi phương trình $\left|3f\left(x^3-3x\right)\right|=m$ hay $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{m}{3}$ có đúng 8 nghiệm phân biệt.

Đặt $u=x^3-3x \Rightarrow u'=3x^2-3 \Rightarrow u'=0 \Leftrightarrow x=\pm1$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A\left(x_1;3\right), B\left(x_2;-1\right)$ với $-2<x_1<0<2<x_2$.

Bảng ghép trục



Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{m}{3}$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<\dfrac{m}{3}<3 \Leftrightarrow 3<m<9$ mà $m\in Z \Rightarrow m\in\{4,5,6,7,8\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 10: Chọn B

Ta có $\Delta'=m^2-\left(2m^2-3m+3\right)=-m^2+3m-3<0$ với mọi giá trị của m.

Suy ra $x^2-2mx+2m^2-3m+3>0$ với mọi giá trị của $x\in R$.

Gọi $\Delta: x+c=0$ là đường thẳng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Khoảng cách từ tâm $I(1;-2)$ đến đường thẳng Δ bằng bán kính $R=3$.

Suy ra $d(I;\Delta)=|1+c|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+c=3\\1+c=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=2\\c=-4\end{array}\right.$

Vậy đường thẳng Δ có phương trình $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-3m+3}{x^3-3x^2-m}$ có ít nhất một đường tiệm đứng tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Suy ra phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có nghiệm $x=-2$ hoặc $x=4$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(-2)^3-3(-2)^2-m=0\\4^3-3.4^2-m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-20-m=0\\16-m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-20\\m=16\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của tập S là $-20+16=-4$.

Câu 11: Chọn C

Mẫu của $g(x)$ là một đa thức bậc 8 nên $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\(x\to+\infty)}} g(x)=0$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là đường thẳng $y=0$.

Ta có: $f^2(x)+2f(x)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \\ x=0 \\ x=a,\left(a<-\sqrt{2}\right) \\ x=b,\left(b>\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$ do đó

$g(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{f^2(x)+2f(x)-3}=\dfrac{x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{x^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2\left(x-\sqrt{2}\right)^2(x-a)(x-b)}$ nên

1) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=y_0\in R$ nên đường thẳng $x=0$ **không phải** là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

2) $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^+} g(x)=\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} g(x)=\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=-\infty$ nên đường thẳng $x=\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

4) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=-\infty$ nên đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

5) $\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x-a)(x-b)}=+\infty$ nên đường thẳng $x=b$ là tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có **5 đường tiệm cận**.

Câu 12: Chọn C

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua bốn điểm $(-2;0),(-1;2),(1;0),(2;2)$ nên ta có

$$\begin{cases} -8a+4b-2c+d=0 \\ -a+b-c+d=2 \\ a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=0 \\ c=-\dfrac{3}{2} \\ d=1 \end{cases}.$$

Do đó, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-3x+2\right)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2(x+2)$.

$$g(x)=\frac{(x+1)\sqrt{\frac{1}{2}(x-1)^2(x+2)}}{\frac{1}{2}(x^3-3x-2)(x^2-2mx+m+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(x+1)\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-2)(x+1)^2(x^2-2mx+m+2)}=\frac{\sqrt{2}|x-1|\sqrt{x+2}}{(x-2)(x+1)(x^2-2mx+m+2)}$$

Điều kiện xác định của $g(x)$ là $\begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne 2 \\ x\ne -1 \\ x^2-2mx+m+2\ne 0 \end{cases}$

Dễ thấy đồ thị hàm số $g(x)$ có duy nhất tiệm cận ngang là $y=0$, các đường thẳng $x=2;x=-1$ là những tiệm cận đứng. Bởi thế, để đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận thì đồ thị này phải có thêm 2 tiệm cận đứng nữa. Tức là, phương trình $x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $2;1;-1$ và cùng lớn hơn hoặc bằng -2.

Đặt $h(x)=x^2-2mx+m+2$, điều kiện kể trên tương đương với

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ h(2)h(1)h(-1)\ne 0 \\ h(-2)\ge 0 \\ x_1+x_2>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ (6-3m)(3-m)(3m+3)\ne 0 \\ 6+5m\ge 0 \\ 2m>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m\ne 2;m\ne 3;m\ne -1 \\ m\ge -\frac{6}{5} \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>2 \\ m\ne 3 \end{cases} \\ -\frac{6}{5}\le m<-1 \end{array}\right.$$

Vậy các giá trị nguyên của $m\in(-2019;2021)$ thỏa yêu cầu bài toán là $4;5;...;2020$, có 2017 giá trị nguyên.

Câu 13: Chọn B

Ta có $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f^2(x)-f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$

$x=0$ loại do điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$

$f(x)=0$ cho nghiệm $x=a>\frac{1}{2}$; $x=2$ là nghiệm kép

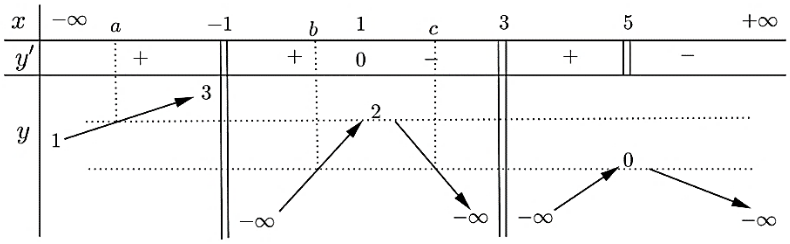
$f(x)=1$ cho ba nghiệm đơn $x=1;x=b;x=c$

Khi đó có thể viết mẫu thành $x(x-a)(x-b)(x-1)(x-c)(x-2)^2.g(x)$ trong đó $g(x)$ vô nghiệm; tử phân tích thành $(x-1)(x-2)\sqrt{2x-1}$.

Suy ra $g(x)=\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{2x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\frac{\sqrt{2x-1}}{x(x-a)(x-b)(x-c)(x-2).g(x)}$

Ta dễ dàng kiểm tra được hàm sô có 4 tiệm cận đứng là $x=a;x=b;x=c;x=2$.

Câu 14: Chọn B



Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq \{-1;3\} \\ f(x) > 0 \\ 2f(x) - f^2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \{-1;3\} \\ f(x) \in (0;2) \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty;a) \cup (b;c) \setminus \{1\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{f(x) \to 1^+} \dfrac{2020 + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{2f(x) - f^2(x)}} = 2021 \Rightarrow y = 2021$ là TCN của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = \lim\limits_{f(x) \to 2^-} \dfrac{2020 + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2 - f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x \to b^+} g(x) = \lim\limits_{f(x) \to 0^+} \dfrac{2020 + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2 - f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{f(x) \to 2^-} \dfrac{2020 + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2 - f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$\lim\limits_{x \to c^-} g(x) = \lim\limits_{f(x) \to 0^+} \dfrac{2020 + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)(2 - f(x))}} = +\infty \Rightarrow x = c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 5 đường tiệm cận.

Câu 15: Chọn B

Ta có: $f\left(f(x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - 1 = -1 \\ f(x) - 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \end{array}\right.$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (boi 4)} \\ x = 2 \text{ (boi 4)} \end{array}\right.$; $f(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ (kep)} \\ x = 3 \text{ (kep)} \end{array}\right.$

Ta lại có $\left(x^2 - 4\right)^4 (x - 3)\left(x^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$. Trong đó $x = -2$ và $x = 2$ là nghiệm bội 4.

$x = 3$ và $x = -1$ là nghiệm đơn.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 3$.

Bậc của $f\left(f(x) - 1\right) = 16 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Suy ra hàm số $y = \dfrac{\left(x^2 - 4\right)^4 (x - 3)\left(x^3 + 1\right)}{f\left(f(x) - 1\right)}$ có 2 TCĐ và 1 TCN.

Câu 16: Chọn D

Ta có: $y' = \dfrac{\sqrt{ax^2+1} - (x+1).\dfrac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1} = \dfrac{ax^2+1-ax^2-ax}{\left(ax^2+1\right)\sqrt{ax^2+1}} = \dfrac{1-ax}{\left(ax^2+1\right)\sqrt{ax^2+1}}$

Với $a \le 0$ không có TCN. Với $a > 0$ có 2 TCN: $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Tiếp tuyến song song với TCN suy ra $y' = 0$. Suy ra $x_0 = \dfrac{1}{a}$ là hoành độ tiếp điểm

Khi đó tiếp tuyến là $y = y\left(\dfrac{1}{a}\right) = \sqrt{1+\dfrac{1}{a}}$.

Theo yêu cầu bài toán, ta có $\left|\sqrt{1+\dfrac{1}{a}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right| = \sqrt{2}-1$. Thử đáp án chọn $a = 1$

Câu 17: Chọn D

Điều kiện xác định $x^3+3x^2+m+1 \ne 0$. Đặt $g(x) = x^3+3x^2+m+1$.

Ttường hợp 1: $g(1) = 0 \Leftrightarrow m = -5$.

Khi đó $g(x) = x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2}$

Suy ra đường thẳng $x = 1$ không là TCĐ.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 2$ là TCĐ. Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng $x = 2$.

Trường hợp 2: $g(1) \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -5$

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^3+3x^2+m+1 = 0$ có đúng một nghiệm . $x \ne 1$. $\Leftrightarrow m = -\left(x^3+3x^2+1\right)$ có đúng một nghiệm $x \ne 1$

Xét hàm số: $f(x) = -\left(x^3+3x^2+1\right)$

Ta có $f'(x) = -\left(3x^2+6x\right)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\left(3x^2+6x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có đúng một nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=-\left(x^3+3x^2+1\right)$ tại một điểm duy nhất. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>-1 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số có đúng một TCĐ. Kết luận: $\left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m>-1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 18: Chọn B

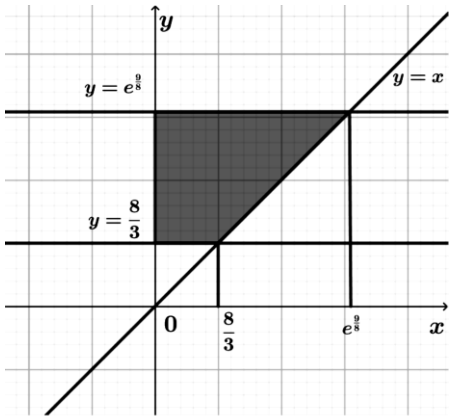
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x+1}\right)^{\frac{3x+2}{4}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{9t+1}{8}}=e^{\frac{9}{8}}$

Nếu $a\ne 4$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0 \Rightarrow$ loại $a\ne 4$.

Nếu $a=4$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\left(\sqrt{4x^2-3x}-2x\right)}{-3x(x-3)}=\dfrac{8}{3}$

$\lim\limits_{x\to0^-} y=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-1}{\left(\sqrt{4x^2-3x}+2x\right)(x-3)}=+\infty$.

Vậy (C) có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{8}{3}; y=e^{\frac{9}{8}}$, và có 1 tiệm cận đứng là $x=0$.



Ta có $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{3}+e^{\frac{9}{8}}\right)\left(e^{\frac{9}{8}}-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{9}{4}}-\dfrac{64}{9}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{9}{4}}-\dfrac{32}{9}$. Vậy $a.m.n=4.\dfrac{9}{4}.\dfrac{32}{9}=32$.

Câu 19: Chọn A

Khi $x\to+\infty$:

$$y=\frac{mx+|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{mx+x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{x\left(m+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{m+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{2-\dfrac{1}{x}}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{m+1}{2}=1\Rightarrow m=1$.

Khi $x\to-\infty$:

$$y=\frac{mx+|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{mx-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1}=\frac{x\left(m-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{m-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\frac{m-1}{2}=1\Rightarrow m=3$. Vậy tổng hai giá trị m bằng 4.

Câu 20: Chọn D

Nhận xét:

Khi $a=0$ thì $y=x+1$: Hàm số không có tiệm cận.

Với $a<0$, hàm số có tập xác định $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{-a}};\frac{1}{\sqrt{-a}}\right)$, không tồn lại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y$, suy ra đồ thị hàm số không tồn tại tiệm cận ngang

Với $a>0$, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}$

Như vậy, đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{\sqrt{a}}$ và $y=-\frac{1}{\sqrt{a}}$

$$y'=\left(\frac{x+1}{\sqrt{ax^2+1}}\right)'=\frac{1-ax}{\left(ax^2+1\right)\sqrt{ax^2+1}}$$

Tiếp tuyến song song với tiệm cận ngang nên $y'\left(x_o\right)=0$ suy ra $x_0=\frac{1}{a};y_0=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tọa độ $\left(\frac{1}{a};\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)$ là: $y=\sqrt{1+\frac{1}{a}}$

Khoảng cách giữa tiệm cận ngang và tiếp tuyến của (C) một khoảng bằng $\sqrt{2}-1$ nên

Trường hợp 1. $\left|\sqrt{1+\frac{1}{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\ (tm)\\ a=0\ (ktm)\end{array}\right.$

Trường hợp 2. $\left|\sqrt{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{2}-1$. Vậy $a=1$

Câu 21: Chọn B

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^4+x^3-1}{(x-1)\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+2020\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}-2x}+2020\right)=-\frac{1}{2}+2020$$

$$\lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{(x-1)\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x^4-x^3+1}\right)}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+2020\right)=2022+\sqrt{7}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{2}; y=-\frac{1}{2}+2020$.

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+2020\right)=2020$.

Câu 22: Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}.\frac{1-2\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}\right)=0$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2}=-\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{4}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$\lim_{x\to 2^+} y=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2\sqrt{x+2}}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^4-4x-8}{x(x-2)^2\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+2x^2+4x+4}{x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)}$$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^3+2x^2+4x+4\right)=28\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)\right)=0 \text{ va } x(x-2)\left(x^2+2\sqrt{x+2}\right)>0,\ \forall x>2\end{cases}$

Nên $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty \Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Vậy đồ thị hàm số trên có tất cả 3 đường tiệm cận

Câu 23: Chọn A

$$y=\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f(x)\right]^2+2f(x)-3}=\frac{x(x+2)^2(x-2)}{\left[f(x)\right]^2+2f(x)-3}.$$

Xét $x(x+2)^2(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có: $\left[f(x)\right]^2+2f(x)-3=0 \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a(a<-2)\\x=0\\x=b(b>2)\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0;x=\pm 2$ là các nghiệm kép.

Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm bậc bốn nên đa thức $\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3$ có bậc là 8.

Vậy $y=\dfrac{x\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)}{k^2x^2\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)^2\left(x-a\right)\left(x-b\right)}$ với $k>0$.

Vậy hàm số có 4 tiệm cận đứng là $x=0;x=2;x=a;x=b$.

Câu 24: Chọn A

Tập xác định: $D=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;+\infty\right)$. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m-\sqrt{1^2+\dfrac{3}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1^2+\dfrac{1}{x}}}=1-m$

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m+\sqrt{1^2+\dfrac{3}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1^2+\dfrac{1}{x}}}=m+1$

Suy ra để đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang thì $m+1\neq 1-m\Leftrightarrow m\neq 0$

$\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{mx+\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-}y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{mx+\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+x}}=\begin{cases}+\infty & khi\ m<1\\ -\infty & khi\ m>1\end{cases}$

Vậy khi $m\neq 0,m\neq 1$ thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=m+1;y=1-m$ và 2 đường tiệm cận đứng là $x=0;x=-1$. Để 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang tạo thành hình chữ nhật có diện tích bằng 2 thì $1.2\left|m\right|=2\Leftrightarrow m=\pm 1$

Đối chiếu điều kiện $m=-1$.

Câu 25: Chọn B

Ta có $h'\left(x\right)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{5}{4}\\ x=3\end{array}\right.$ và $\left(m<0\right)$.

Suy ra $h'\left(x\right)=4m\left(x+1\right)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)\left(x-3\right)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

Suy ra $h\left(x\right)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h\left(x\right)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$. Xét $h\left(x\right)-m^2-m=0\Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1\Rightarrow f'\left(x\right)=4x^3-13x^2-2x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{5}{4}\\ x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7807}{768}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\frac{35}{3}<m<-1$.

Do m nguyên nên $m\in\{-11;-10;...;-2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Chọn B

Xét hàm $y=g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{f^2(x)-mf(x)}$ với $x\ge 2$.

Khi đó $f^2(x)-mf(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m\\ f(x)=0\end{array}\right.$

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=a & (a<-1)\\ x=b & (-1<b<2)\\ x=c & (c>2,c\ne n)\end{array}\right.$

Với $x=a$, $x=b$ loại vì không thõa điều kiện.

Với $x=c$, $\lim\limits_{x\to c^+}g(x)=-\infty$ nên đường $x=c$ là một tiệm cận đứng của đồ thị $g(x)$.

Đồ thị $g(x)$ có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ $f(x)=m$ có một nghiệm $x\ge 2$ và $x\ne c$

Dựa vào bảng biến thiên của $y=f(x)$, $f(x)=m$ có một nghiệm $x\ge 2$ và $x\ne c$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}m\ge -2\\ m\ne 0\end{cases}$.

Câu 27: Chọn A

Với $m\ne -\frac{3}{2}$, đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $x=-\frac{3}{2}$ và tiệm cận ngang $y=\frac{1}{2}$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận đứng: $d_1=\left|x_M+\frac{3}{2}\right|$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận ngang: $d_2=\left|\dfrac{x_M-m}{2x_M+3}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{-2m-3}{2(2x_M+3)}\right|=\dfrac{|2m+3|}{2|2x_M+3|}$.

Từ giả thiết, ΔMAB vuông tại M nên $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}MA.MB=\frac{1}{2}d_1.d_2=1\Rightarrow d_1d_2=2$

Do đó $\left|x_M+\frac{3}{2}\right|.\dfrac{|2m+3|}{2|2x_M+3|}=2\Leftrightarrow|2m+3|=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m+3=8\\ 2m+3=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{5}{2}\\ m=-\frac{11}{2}\end{array}\right.$

Câu 28: Chọn D

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x=1$. Ta có $M\in(C)$ nên $y_M=\dfrac{2x_M+2}{x_M-1}$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận đứng: $d_1=|x_M-1|$.

Khoảng cách từ M tới trục hoành: $d_2=|y_M|=\left|\dfrac{2x_M+2}{x_M-1}\right|$.

Tổng khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng và trục hoành: $d=d_1+d_2=|x_M-1|+\left|\dfrac{2x_M+2}{x_M-1}\right|$

Nếu $x_M>1$, ta có $d=|x_M-1|+\dfrac{2|x_M+1|}{|x_M-1|}\ge 2\sqrt{2|x_M+1|}>2\sqrt{2.2}=4$

Nếu $-1\le x_M<1$, ta có

$$d=1-x_M+\frac{2x_M+2}{1-x_M}=2+(-1-x_M)+\frac{2x_M+2}{1-x_M}$$

$$=2+\frac{(-1-x_M)(1-x_M)+2x_M+2}{1-x_M}=2+\frac{x_M^2-1+2x_M+2}{1-x_M}=2+\frac{(x_M+1)^2}{1-x_M}\ge 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_M=-1$.

Nếu $x_M<-1$, ta có $d=1-x_M+\left|\dfrac{2x_M+2}{x_M-1}\right|>1-x_M>2$

Vậy $d\ge 2$, dấu bằng chỉ xảy ra khi $x_M=-1$, do đó $M(-1;0)$.

Câu 29: Chọn D

Đồ thị $(C): y=\dfrac{2mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x=m$ và tiệm cận ngang $y=2m$ nên giao điểm của hai tiệm cận là $I(m;2m)$. Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{2mx_0+3}{x_0-m}\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại M là $y=-\dfrac{2m^2+3}{(x_0-m)^2}(x-x_0)+\dfrac{2mx_0+3}{x_0-m}$.

Tiếp tuyến cắt TCĐ $x=m$ tại $A\left(m;\dfrac{2mx_0+2m^2+6}{x_0-m}\right)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0-m;2m)$

Ta có $IA=\left|\dfrac{4m^2+6}{x_0-m}\right|$ và $IB=2|x_0-m|$. Diện tích tam giác IAB là

$$S_{IAB}=64\Leftrightarrow\frac{1}{2}IA.IB=64\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\frac{4m^2+6}{x_0-m}\right|.2|x_0-m|=64\Leftrightarrow 4m^2+6=64\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{58}}{2}$$

Vậy $S=\dfrac{\sqrt{58}}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{58}}{2}\right)=0$.

Câu 30: Chọn D

Đồ thị $(C): y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=2$ nên $I(-1;2)$.

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)$, $(x_0>0)$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}$.

$\Rightarrow A\left(-1;\dfrac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$, $B(2x_0+1;2)$. Ta có $IA=\left|\dfrac{6}{x_0+1}\right|$ và $IB=2|x_0+1|$.

Khi đó $IA^2+IB^2=40 \Leftrightarrow \dfrac{36}{(x_0+1)^2}+4(x_0+1)^2=40$, $x_0>0$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)^4-10(x_0+1)^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_0+1)^2=1\\(x_0+1)^2=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\ (l)\\x_0=-2\ (l)\\x_0=2\ (n)\\x_0=-4\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow x_0=2 \Rightarrow y_0=1.$$

Suy ra $M(2;1)$. Giá trị của biểu thức $P=7$.

Câu 31: Chọn A

Đồ thị (C) có đường tiệm đứng $x=-1$ và đường tiệm cận ngang $y=1$.

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(-1;1)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C)$ với $x_0>0$. Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-2}{x_0+1}$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng tại điểm $P\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $Q(2x_0+1;1)$. Ta có $S_{\Delta IPQ}=\dfrac{1}{2}IP.IQ=\dfrac{1}{2}\dfrac{6}{|x_0+1|}.2|x_0+1|=6$.

Mặt khác $S_{\Delta IPQ}=pr \Leftrightarrow r=\dfrac{S_{\Delta IPQ}}{p}=\dfrac{6}{p}$ nên r đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi p đạt giá trị nhỏ nhất hay chu vi tam giác IPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà chu vi tam giác IPQ:

$$C=IP+IQ+PQ=IP+IQ+\sqrt{IP^2+IQ^2}\ge\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{IP.IQ}=\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{12}$$

Nên chu vi tam giác IPQ nhỏ nhất khi $IP=IQ \Leftrightarrow \dfrac{6}{|x_0+1|}=2|x_0+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\\x_0=-1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Do $x_0>0$ nên $x_0=-1+\sqrt{3} \Rightarrow M\left(-1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$. Vậy $x_0+y_0=0$.

Câu 32: Chọn D

Đồ thị (C) có đường tiệm đứng $x=1$ và đường tiệm cận ngang $y=1$.

Giao điểm hai đường tiệm cận $I(1;1)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}\right)\in(C)$ với $x_0>1$. Ta có $y'=-\dfrac{2}{(2x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là $y=-\dfrac{2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2x_0-1;1)$. Ta có $IA+IB=\dfrac{1}{x_0-1}+2(x_0-1)\ge 2\sqrt{2}$

Suy ra $Min(IA+IB)=2\sqrt{2}$ khi $\dfrac{1}{x_0-1}=2(x_0-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\\ x_0=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$.

Do $x_0>1$ nên $x_0=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. Vậy $x_0=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 33: Chọn A

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x=-3$ và tiệm cận ngang $y=1$.

Giao điểm của hai đường tiệm cận $I(-3;1)$.

Ta có điểm $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{x_0+3}\right)$ và $y'=\dfrac{4}{(x+3)^2}$, $\forall x\ne -3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng $y=\dfrac{4}{(x_0+3)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{x_0+3}$.

Cho $y=1\Rightarrow(x_0+3)^2=4x-4x_0+(x_0-1)(x_0+3)\Leftrightarrow x=2x_0+3$.

Cho $x=-3\Rightarrow y=\dfrac{4}{(x_0+3)^2}(-3-x_0)+\dfrac{x_0-1}{x_0+3}=\dfrac{x_0-5}{x_0+3}$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt tiệm cận đứng tại $A\left(-3;\dfrac{x_0-5}{x_0+3}\right)$ và cắt tiệm cận ngang tại điểm $B(2x_0+3;1)$.

Ta có $IA^2+IB^2=32\Leftrightarrow\dfrac{64}{(x_0+3)^2}+4(x_0+3)^2=32\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0+3=2\\ x_0+3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\ x_0=-5\end{array}\right.$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-1$. Với $x_0=-5\Rightarrow y_0=3$. Vậy $M(-5;3)$.

Câu 34: Chọn C

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1 : x = 1$ và tiệm cận ngang $d_2 : y = 2$.

Giả sử $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}\right) \in (C)$ với $x_0 \neq 1$.

Ta có: $d(M;d_1) = |x_0 - 1|$; $d(M;d_2) = \left|\dfrac{2x_0-1}{x_0-1} - 2\right| = \dfrac{1}{|x_0-1|}$

Theo đề bài: $|x_0-1| + \dfrac{1}{|x_0-1|} = 2|x_0-1|.\dfrac{1}{|x_0-1|} = 2 \Leftrightarrow |x_0-1| = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn đề bài.

CHƯƠNG 1

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 5 SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bài toán: Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y=f(x)$ hoặc $y=f'(x)$. Tìm số giao điểm hoặc số nghiệm của phương trình $y=f\left[u(x)\right]$ hoặc biện luận theo tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán đưa ra.

Đây là dạng toán hay và khó được các SGD và các trường Chuyên trên cả nước khai thác một cách triệt để. Để giải quyết các bài toán này, chúng ta có thể sử dụng phương pháp biện luận truyền thống hoặc tối ưu hơn là phương pháp ghép trục (hoặc ghép bảng biến thiên). Đi vào từng ví dụ minh họa và bài tập vận dụng, chúng ta sẽ hình dung và hiểu sâu hơn về dạng toán này.

Dạng 1: Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị

Cho 2 hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') :

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') là $f(x)=g(x)$ $(*)$
- Giải phương trình tìm x thay vào $f(x)$ hoặc $g(x)$ để suy ra y và tọa độ giao điểm
- Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của (C) và (C')

Dạng 2: Sự tương giao của đồ thị hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất

- Xét sự tương giao giữa đồ thị $(C): y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và đường thẳng $d: y=kx+\ell$
- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=kx+\ell \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{d}{c} \\ g(x)=Ax^2+Bx+C=0 \end{cases}$ $(*)$

Bài toán biện luận số giao điểm của hai đồ thị

Trường hợp 1: Xét $A=0 \Rightarrow$ Kết luận về số giao điểm.

Trường hợp 2: Xét $A\neq 0$

- d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ hai nghiệm phân biệt khác $\dfrac{-d}{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = B^2-4AC>0 \\ g\left(\dfrac{-d}{c}\right)=A.\left(\dfrac{-d}{c}\right)^2+B.\dfrac{-d}{c}+C\neq 0 \end{cases}$$

- d cắt (C) tại điểm duy nhất $\Leftrightarrow g(x)$ có nghiệm kép khác $\frac{-d}{c}$ hoặc $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

  trong đó có một nghiệm $x=\frac{-d}{c} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta_{g(x)}=0\\ g\left(\frac{-d}{c}\right)\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta_{g(x)}>0\\ g\left(\frac{-d}{c}\right)=0\end{cases}\end{array}\right.$

- d không cắt $(C) \Leftrightarrow g(x)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng $\frac{-d}{c} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_{g(x)}<0\\ \begin{cases}\Delta_{g(x)}=0\\ g\left(\frac{-d}{c}\right)=0\end{cases}\end{array}\right.$

Bài toán liên quan đến tính chất các giao điểm

Phần này, ta chỉ xét bài toán mà có liên quan đến d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

- **Bước 1.** Tìm điều kiện để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt

  $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{-d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=B^2-4AC>0\\ g\left(\frac{-d}{c}\right)=A.\left(\frac{-d}{c}\right)^2+B.\frac{-d}{c}+C\neq 0\end{cases}(1)$

- **Bước 2.** Khi đó gọi $A(x_1;kx_1+\ell),B(x_2;kx_2+\ell)$ là tọa độ hai giao điểm

  Với x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x)=0$ nên theo định lý Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{B}{A}\\ x_1x_2=\frac{C}{A}\end{cases}$

- **Bước 3.** Theo yêu cầu bài toán, ta tìm giá trị của tham số chú ý đối chiếu với điều kiện (1) để chọn đáp án đúng.

Dạng 3: Sự tương giao của đồ thị hàm số trùng phương

Xét sự tương giao đồ thị $(C): y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ và trục hoành có phương trình $y=0$

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và trục hoành là $ax^4+bx^2+c=0\,(1)$

Bài toán liên quan đến số giao điểm

Số giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành chính là số nghiệm của phương trình (1).

Đặt $t=x^2\geq 0$ thì (1) thành $at^2+bt+c=0\ (2)$

- (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ t_1+t_2=-\frac{b}{a}>0\\ t_1.t_2=\frac{c}{a}>0\end{cases}$

- (C) cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0.

- (C) cắt trục hoành tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép dương hoặc (2) có hai nghiệm trái dấu.
- (C) cắt trục hoành tại điểm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép bằng 0 hoặc (2) có một nghiệm bằng 0 hoặc một nghiệm âm.
- (C) không cắt trục hoành $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm, có nghiệm kép âm hoặc có 2 nghiệm phân biệt đều âm
- Một số bài toán có thể thay trục hoành thành $d: y = m$ hoặc $(P): y = mx^2 + n$, phương pháp giải hoàn toàn tương tự như trên.

Bài toán liên quan đến tính chất giao điểm

Tìm điều kiện để $(C): y = ax^4 + bx^2 + c\left(a \neq 0\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A,B,C,D thỏa mãn điều kiện cho trước.

- **Bước 1:** Tìm điều kiện để (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(2) có 2 nghiệm dương phân biệt } t_1 \text{ và } t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ t_1.t_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

- **Bước 2:** Giả sử $t_1 > t_2 > 0$ khi đó các nghiệm của (1) sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$, xử lý điều kiện và tìm giá trị của tham số.
- **Đặc biệt:** Khi hoành độ 4 điểm A,B,C,D lập thành cấp số cộng hoặc $AB = BC = CD$ khi: $\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_2} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 = 9t_2$

B VÍ DỤ MINH HỌA

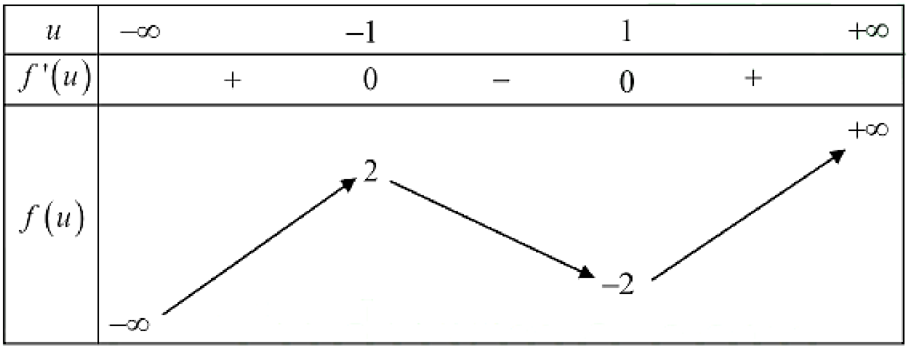
CÂU 1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^4-4x^2\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực x?

A. 48 **B.** 46 **C.** 49 **D.** 51

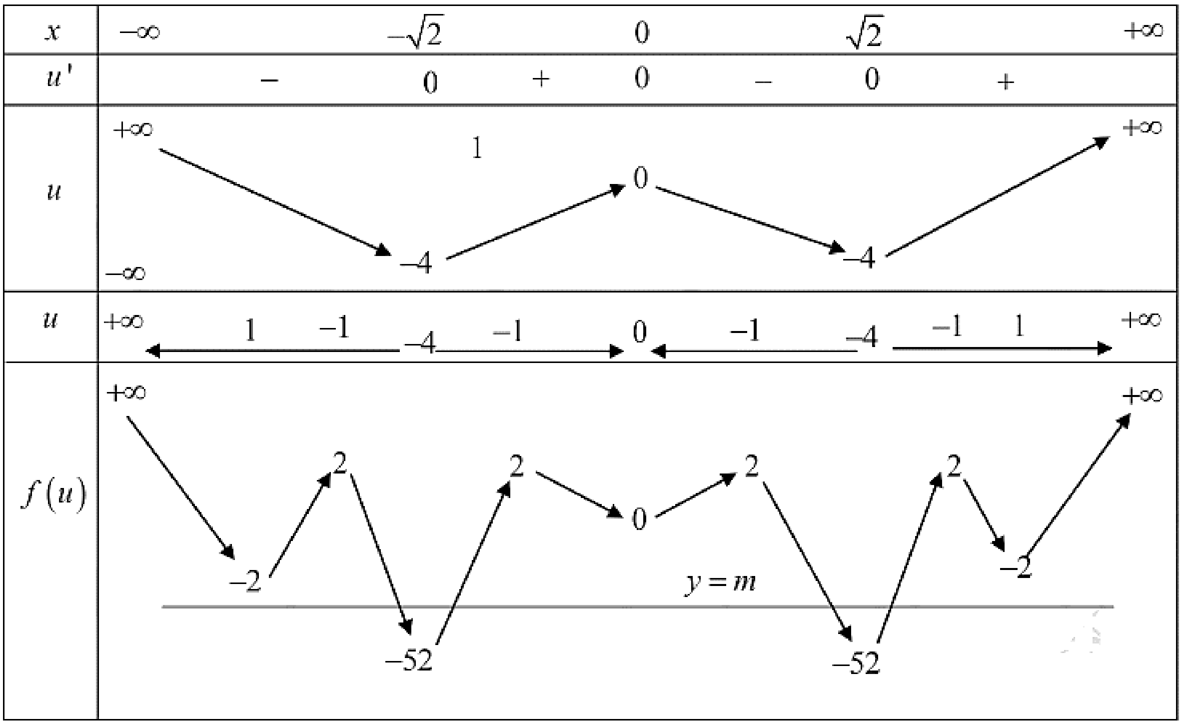
LỜI GIẢI

Sử dụng phương pháp ghép trục:

Bảng biến thiên của $f(u)=u^3-3u$



Bảng biến thiên ghép hàm hợp $f\left(x^4-4x^2\right)=f(u)$ với $u=x^4-4x^2$



Để phương trình $f(u)=m$ có đúng 4 nghiệm thực x thì $-52<m<-2\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}-51\le m\le -3$

Vậy có tất cả 49 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

CÂU 2. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+m}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt trong đó mỗi điểm nằm ở một nhánh của đồ thị (C)?

A. $(-\infty;2)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $\varnothing$

LỜI GIẢI

Nhận thấy, mỗi nhánh của đồ thị nằm về hai phía khác nhau của đường tiệm cận đứng tức $x < -1$ và $x > -1$.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

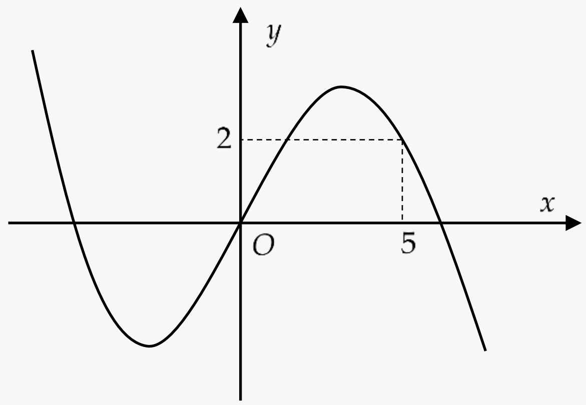
Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+m}{x+1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x+m = (x+1)(x+2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ g(x) = x^2 + x + 2 - m = 0 \quad (2) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$

Suy ra $a.g(-1) < 0 \Leftrightarrow 1.(2-m) < 0 \Leftrightarrow m > 2$.

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Phương trình $f(2x-5)\left[f(x) - f(3)\right] - 2f(x) + 4 = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 3 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 10

✍ LỜI GIẢI

Ta có $f(2x-5)\left[f(x)-f(3)\right] - 2f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(2x-5)\left[f(x)-2\right] - 2f(x) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[f(2x-5)-2\right]\left[f(x)-2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right. \\ f(2x-5) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-5 = 5 \\ 2x-5 = x_1 \Leftrightarrow x = \dfrac{x_1+5}{2} \\ 2x-5 = x_2 \Leftrightarrow x = \dfrac{x_2+5}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nhiều nhất là 5 nghiệm

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm nằm trong khoảng $(2;3)$

A. $(-\infty;2)$ **B.** $(9;+\infty)$ **C.** $(2;9)$ **D.** $\varnothing$

✍ LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+3}{x-2} = m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 2x+3 = m(x-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow (m-2)x = 2m+3 \quad (1)$

Để phương trình (1) có nghiệm nằm trong khoảng $(2;3)$ thì:

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ x = \dfrac{2m+3}{m-2} \in (2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ 2 < \dfrac{2m+3}{m-2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 9$$

CÂU 5. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (3-m)x^2 + (m^2+1)x + m^2 - 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$. Tổng tất cả các phần tử của tập S là:

A. $-\dfrac{3}{7}$ **B.** $\dfrac{9}{7}$ **C.** $-\dfrac{12}{7}$ **D.** $\dfrac{15}{7}$

✍ LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^3 - (3-m)x^2 + (m^2+1)x + m^2 - 2 = 0 \quad (*)$

Áp dụng hệ thức Viet cho phương trình bậc ba, ta có:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 16$

$$\Leftrightarrow \left[3(m-1)\right]^2 - 2(m^2+1) = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

Thử lại:

Với $m = 3 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 10x + 7 = 0 \Rightarrow$ có một nghiệm phân biệt (loại)

Với $m = -\dfrac{3}{7} \Rightarrow x^3 + \dfrac{30}{7}x^2 + \dfrac{58}{49}x - \dfrac{89}{49} = 0 \Rightarrow$ có ba nghiệm phân biệt (thỏa mãn)

Vậy $S = \left\{-\dfrac{3}{7}\right\}$ nên tổng các phần tử của tập S bằng $-\dfrac{3}{7}$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1 (C)$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 20$. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

A. -1 **B.** 2 **C.** -3 **D.** 1

✍ LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là $x^4 - 2mx^2 + m + 1 = 0 (1)$

Đặt $t = x^2 : (1) \Rightarrow t^2 - 2mt + m + 1 = 0 (2)$

Để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1 > t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = m + 1 > 0 \end{cases} (*). \text{ Theo Viet: } \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1.t_2 = m + 1 \end{cases}$$

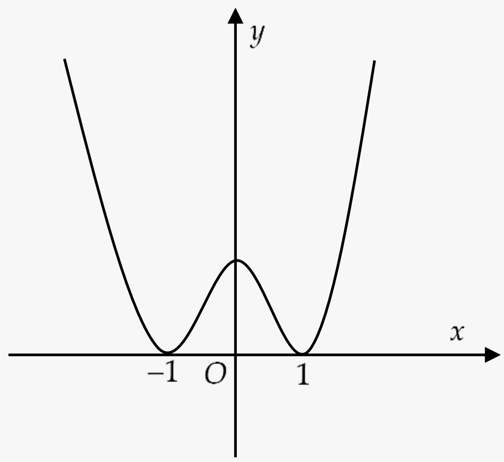
Khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$

Ta có: giả thiết bài toán $\Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 + t_2^2 + t_1^2 = 20 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 10 \Leftrightarrow (t_1+t_2)^2 - 2t_1t_2 = 10$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 2 = 10 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -3 \end{array}\right.$$

Kết hợp $(*)$ $\Rightarrow m = 2$ là giá trị cần tìm.

CÂU 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của m để đường thẳng $d:y=-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại bốn điểm phân biệt cách đều nhau là



A. $\left\{\frac{34}{25};\frac{7}{4}\right\}$ **B.** $\left\{\frac{34}{25}\right\}$ **C.** $\left\{\frac{7}{4}\right\}$ **D.** $\left\{1;2\right\}$

LỜI GIẢI

Dựa vào đồ thị hàm số, suy ra $y=f\left(x\right)=x^4-2x^2+1$

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị là $x^4-2x^2+1=-m+2\xrightarrow{t=x^2}t^2-2t+m-1=0\left(*\right)$

Hai đồ thị có 4 giao điểm khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

Suy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'(*)>0\\t_1+t_2>0\\t_1.t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m+1>0\\2>0\\m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<2\Rightarrow\begin{cases}t_1+t_2=2\\t_1.t_2=m-1\end{cases}$

Giả sử $t_1>t_2$, 4 nghiệm của phương trình ban đầu theo thứ tự từ bé đến lớn sẽ là $-\sqrt{t_1};-\sqrt{t_2};\sqrt{t_2};\sqrt{t_1}$

Theo đề bài ta có $-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=-2\sqrt{t_2}\Rightarrow\sqrt{t_1}=3\sqrt{t_2}\Leftrightarrow t_1=9t_2\Rightarrow\begin{cases}t_1+t_2=2\\t_1.t_2=m-1\\t_1=9t_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\frac{9}{5};t_2=\frac{1}{5}\\t_1.t_2=m-1\end{cases}$

$\Rightarrow m-1=\frac{9}{25}\Leftrightarrow m=\frac{34}{25}$.

CÂU 8. Cho hàm số: $y=x^3+\left(m+2\right)x-m\left(C\right)$ và đường thẳng $d:y=2x+1$. Số giá trị nguyên của m để đồ thị $\left(C\right)$ cắt đường $y=x+m$ tại 3 điểm phân biệt có tung độ y_1,y_2,y_3 thỏa mãn $A=y_1^2+y_2^2+y_3^2\le 83$

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và đường thẳng d là: $x^3+mx-m-1=0$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x+1-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=1\Rightarrow y_3=3\\g(x)=x^2+x+1-m=0\end{array}\right.\left(1\right)$

Đồ thị $\left(C\right)$ cắt $y=x+m$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm đó khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=1-4(1-m)>0\\g(1)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-3>0\\3-m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\frac{3}{4}(*)\\m\ne 3\end{cases}$

Khi đó cho $x_3=1;y_3=3$ và $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $g(x)=0$

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 . x_2 = -m \end{cases}$

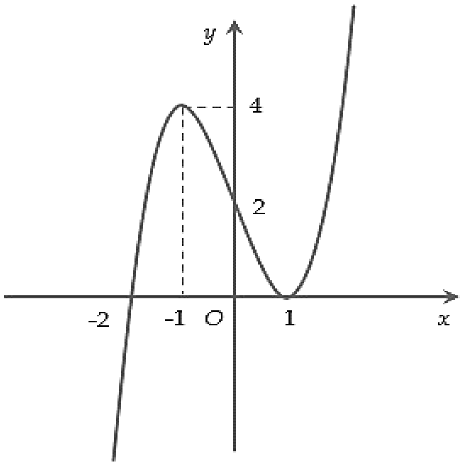
Theo đề bài ta có: $A = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \left(2x_1 + 1\right)^2 + \left(2x_2 + 1\right)^2 + 9 = 4\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 4\left(x_1 + x_2\right) + 11$

$A = 4\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right] + 4\left(x_1 + x_2\right) + 11 = 4\left[1 - 2\left(1 - m\right)\right] - 4 + 11 = 8m + 3 \le 83 \Leftrightarrow m \le 10$

Kết hợp và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị của m.

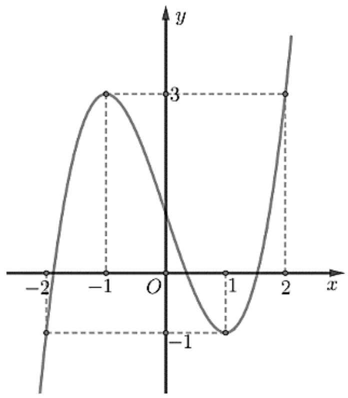
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f^2(x) - f(x) - 12\right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 11.

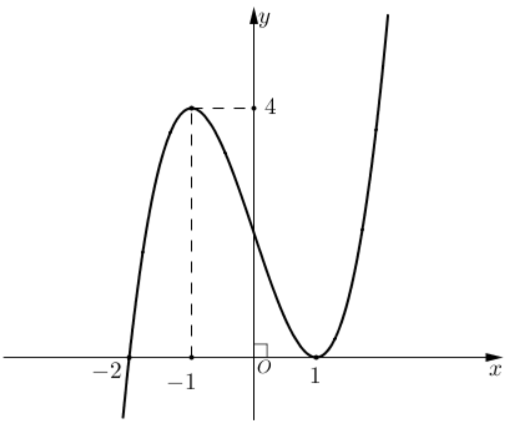
Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(2 - f(x)\right) = 0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

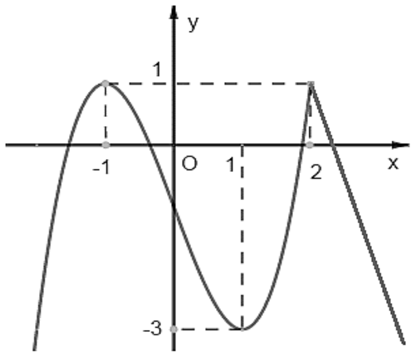
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(f(x) - 2\right) = 0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 5 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 6 .

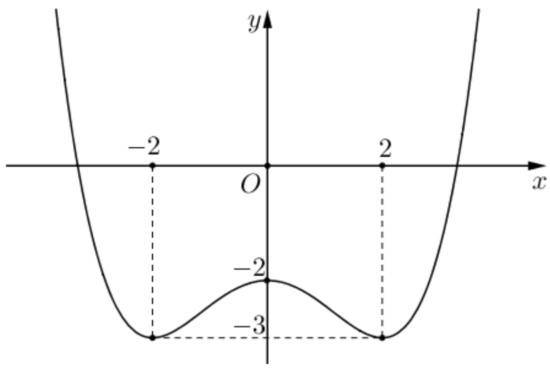
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'\left(5-3f(x)\right)=0$ là

A. 12 . **B.** 8 . **C.** 9. **D.** 10 .

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'\left(2f(x)+3\right)=0$ là

A. 7 . **B.** 8 . **C.** 6 . **D.** 9 .

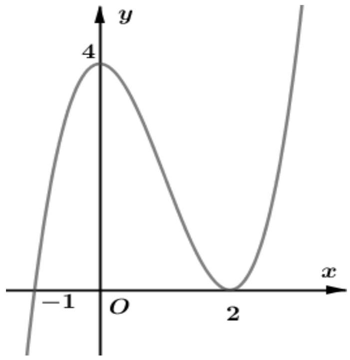
Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in \left[-2022;2022\right]$ để phương trình $\left(f^2\left(x\right)+x^2\right)^2 - \left(m^2+2m+14\right)\left(f^2\left(x\right)+x^2\right)+4\left(m+1\right)^2+36=0$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

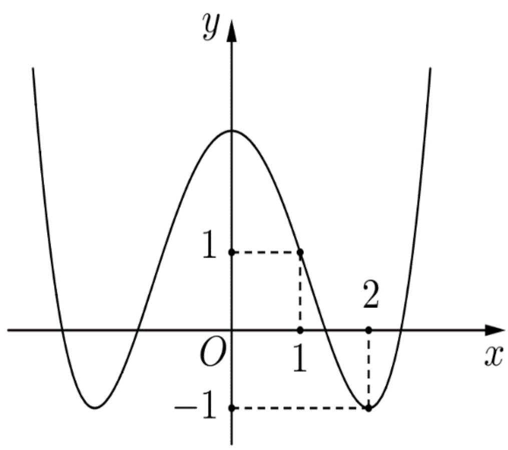
A. 4043. **B.** 4044. **C.** 1. **D.** 0 .

Câu 8: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'\left(2x-1\right)$ như hình vẽ. Hỏi phương trình $f\left(x^3+1\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



A. 2 nghiệm. **B.** 3 nghiệm. **C.** 1 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

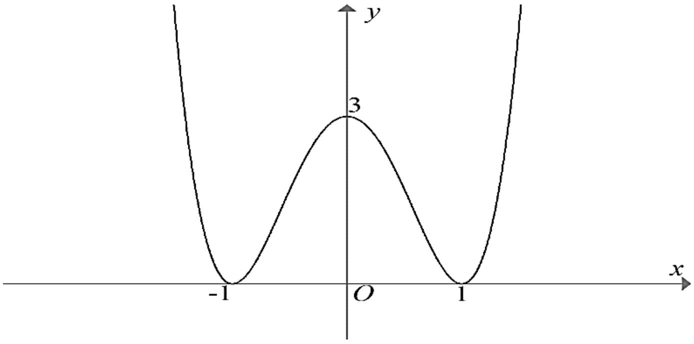
Câu 9: Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$. Biết rằng hàm số $y = f'\left(1-x^2\right)$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy, như hình vẽ.



Đặt $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)+\dfrac{2}{x}$. Đồ thị hàm số $y = g'\left(x\right)$ cắt trục Ox tại bao nhiêu điểm?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

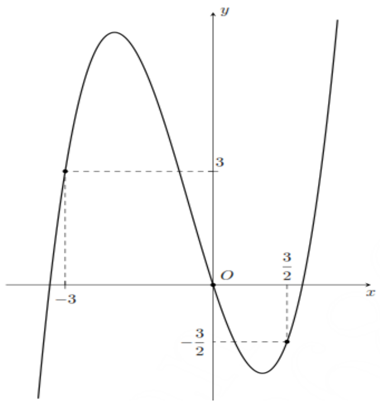
Câu 10: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2 - \left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right) + 4(m+1)^2 + 36 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt.

A. 2022. **B.** 4043. **C.** 4042. **D.** 2021.

Câu 11: Cho hàm $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết rằng $f(0) = 0$, $f(-3) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = \left|4f(x) + 2x^2\right| - 2m^2 + 1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-50; 50)$ để phương trình $g(x) = 1$ có đúng hai nghiệm thực?

A. 94. **B.** 96. **C.** 47. **D.** 48.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $\left|f(x-1)+2\right| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

A. $4 < m < 6$. **B.** $3 < m < 6$. **C.** $2 < m < 6$. **D.** $2 < m < 4$.

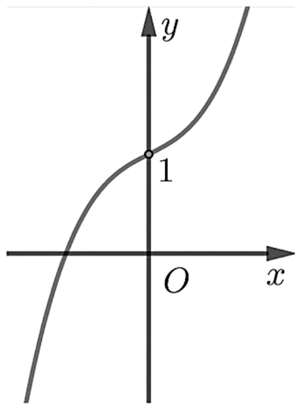
Câu 13: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\infty$

Số giá trị nguyên của *m* để phương trình $\dfrac{f(f(x))}{f(x)+1}=m$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. 10 . **B.** 13 . **C.** 12 . **D.** 11 .

Câu 14: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)+1}+\dfrac{f\left(x\right)+1}{f\left(x\right)+2}+\dfrac{f\left(x\right)+2}{f\left(x\right)+3}=\left|f\left(x\right)-2\right|-f\left(x\right)+m$ (*) có đúng 3 nghiệm âm và 1 nghiệm dương.

A. 5 **.** **B.** 3 . **C.** 7 . **D. Vô số.**

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
y'		$+$	0	$-$	
y	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x-1\right)=\dfrac{m}{x^2-6x+12}$ có nhiều nghiệm nhất trên đoạn $\left[2;4\right]$. Tổng các phần tử của S là

A. -297 . **B.** -294 . **C.** -75 . **D.** -72 .

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-2022\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-2022;2022\right]$ để phương trình $f'\left(x\right)=\left(m+1\right)f\left(x\right)$ có 2022 nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B.** 4044. **C.** 2023. **D.** 4045.

Câu 17: Biết rằng tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m(x+4)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24$ có 4 nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

A. $\frac{28}{3}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+2022x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $f\left(2m-sinx\cos x-\cos^2 x\right)+f\left(2sin^2x-3m\right)=0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[-5;3]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-5		-3		-1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	4

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $3f(-x-2)=x^3-3x+2+m$ có đúng 3 nghiệm thuộc $[-5;3]$?

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+m+2021$ có đồ thị là (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<x_1<3<x_2<4<x_3$. **B.** $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$.

C. $1<x_1<x_2<3<x_3<4$. **D.** $x_1<0<1<x_2<3<x_3<4$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $d:y=-x+2$. S là tập các giá trị m thỏa mãn (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $A(0;2),B,C$ sao cho diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$. Tính tổng bình phương các phần tử của S?

A. 4. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 25.

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(3m-4)x+2$ có đồ thị (C) và cho điểm $M(3;1)$. Số giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d:y=-x+2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2),B$ và C đồng thời tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{7}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-2(m-1)x^2+2(m^2-2m)x+4m^2\,(C)$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(0;8)$ và có hệ số góc bằng 4. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

A. $\min P=1$. **B.** $\min P=-4$. **C.** $\min P=-6$. **D.** $\min P=0$.

Câu 24: Giả sử $m=-\dfrac{b}{a}$, $a,b\in\mathbb{Z}^{+}$, $(a,b)=1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-3x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc toạ độ). Tính $a+2b$.

A. 2. **B.** 20. **C.** 11. **D.** 27.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Biết $f(0)=1$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x^2)$ tại 2 điểm phân biệt M,N có hoành độ khác 0 sao cho trung điểm của MN nằm trên trục hoành.

A. 7. **B.** 8. **C.** 13. **D.** Vô số.

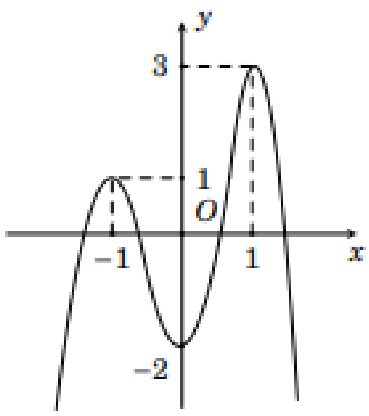
Câu 26: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x+m$. Khi d cắt (C) tại hai điểm A và B phân biệt, gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm m để $P=(k_1)^{2022}+(k_2)^{2022}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. -4. **B.** $m=4$. **C.** $m=0$. **D.** 2.

Câu 27: Biết rằng với tham số $m\in\left(a;\dfrac{b}{c}\right)$, với $b,c\in\mathbb{N}, c>0$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản, thì đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m+15, (Cm)$ cắt đường thẳng $y=5$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ đều nhỏ hơn 3. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 108. **B.** 115. **C.** 105. **D.** 111.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(1-x)$ được cho trong hình vẽ có đúng 3 điểm cực trị là $A(-1;1)$, $B(0;-2)$, $C(1;3)$.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1-x}{x+2}\right)-\frac{2x+1}{x+2}+m=0$ có đúng 4 nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=x^4-3x^2-4$ và hàm số $g(x)=f\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)$, tìm các giá trị nguyên của $m\in[-30;10]$ để hàm số $g'(x)$ cắt trục Ox tại 11 điểm phân biệt

A. 18. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 15.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\left|x^3-3x-1\right|$ và đồ thị hàm số $y=\left|mx^3-6mx^2+9mx-7m\right|$ cắt nhau tại ít nhất một điểm có hoành độ $x_0\in[0;2]$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 31: Cho hai hàm số $y=f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(3|x|+m)$; $y=g(x)=-3x^5+30x^4-101x^3+120x^2-2x-50$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2022;2022]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 5 điểm phân biệt?

A. 2044. **B.** 2023. **C.** 2021. **D.** 2022.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=\frac{5^x}{5^x+5}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để phương trình $f\left(x^3+3mx^2+3m^2x\right)+f\left(m^3+m+1-\sqrt[3]{x+1}\right)=1$ có nghiệm thuộc $[0;+\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 46.. **B.** -47.. **C.** -44.. **D.** 10.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=x^{2021}+2021x$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m-2020)+f\left(2021m-5^8\right)\le 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0\in[180;191]$. **B.** $m_0\in(191;204]$. **C.** $m_0\in(204;223)$. **D.** $m_0\in[223;234)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f(\cos x)\right)=2$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

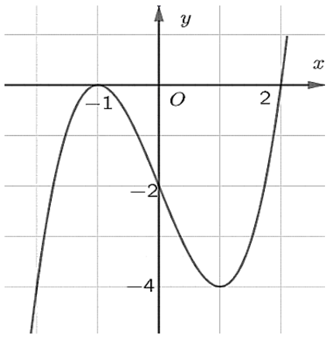
Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 36: Biết tập tất cả các giá trị thực của m để $4|x+m|\left(x^2+2mx+m^2-3\right)+9x+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Hỏi giá trị của $(b-a)$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

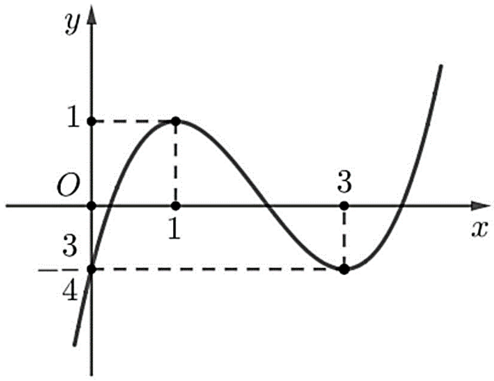
Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $f^2(x)-(m+7)|f(x)|+4m+12=0$ có 7 nghiệm phân biệt là

A. -6. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 6.

Câu 38: Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ thoả mãn $a+b\le 16$ để phương trình $f\left(ax^2-1\right)=\dfrac{1}{bx}$ có 7 nghiệm thực phân biệt?

A. 101. **B.** 96. **C.** 89. **D.** 99.

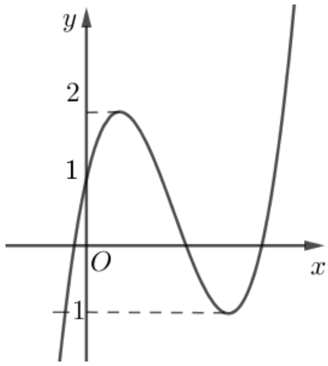
Câu 39: Cho hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+|2x|)$ và $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt.

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 2021. **D.** 4041.

Câu 40: Cho hai hàm số $y = x(x-2)(x-3)(m-|x|)$, $y = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 11x - 6$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 4 điểm phân biệt?

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 4041. **D.** 2020.

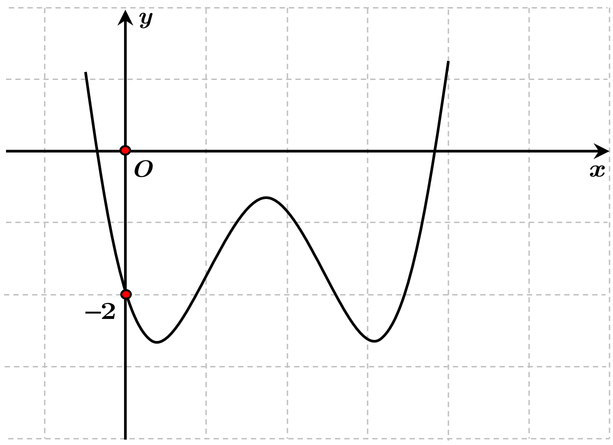
Câu 41: Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f(|x|)\right| = \frac{2}{9}m^2 - \frac{1}{81}m^4$ có 8 nghiệm phân biệt?

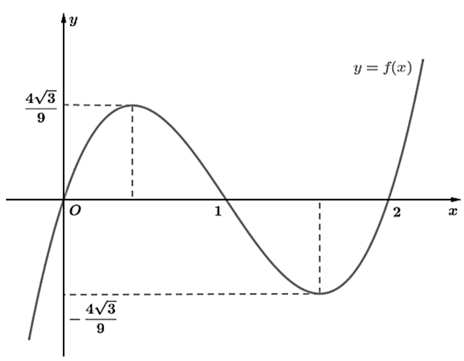
A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 42: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$ là



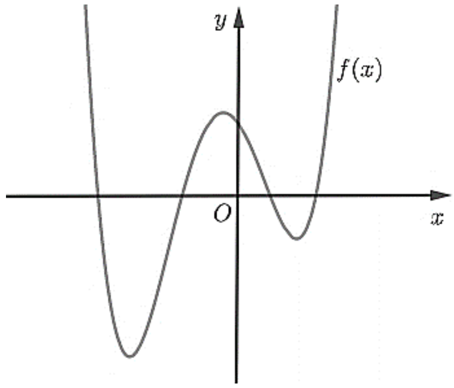
A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 43: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - \left|x^2-1\right|\right|\right) = \frac{1}{2021}$ là



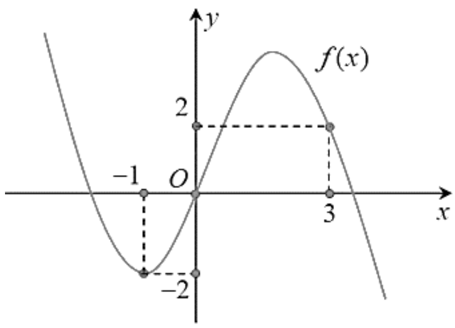
A. 14. **B.** 10. **C.** 24. **D.** 12.

Câu 44: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hàm số $y=f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2$ và $y=2021^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là?



A. 1. **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Câu 45: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới. Hỏi phương trình $\dfrac{\left|x^2-3x\right|}{x^2-3x}f\left(x^2-2x\right)=-2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?



A. 6 . **B.** 3 . **C.** 5 . **D.** 4 .

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ là

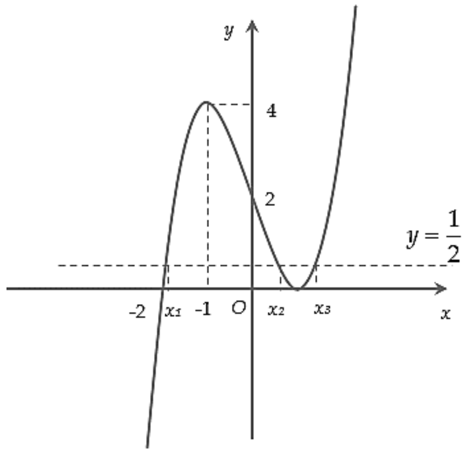
A. 9 . **B.** 7 . **C.** 8 . **D.** 6 .

Câu 47: Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty:-2)$. **C.** $(-2:+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn D

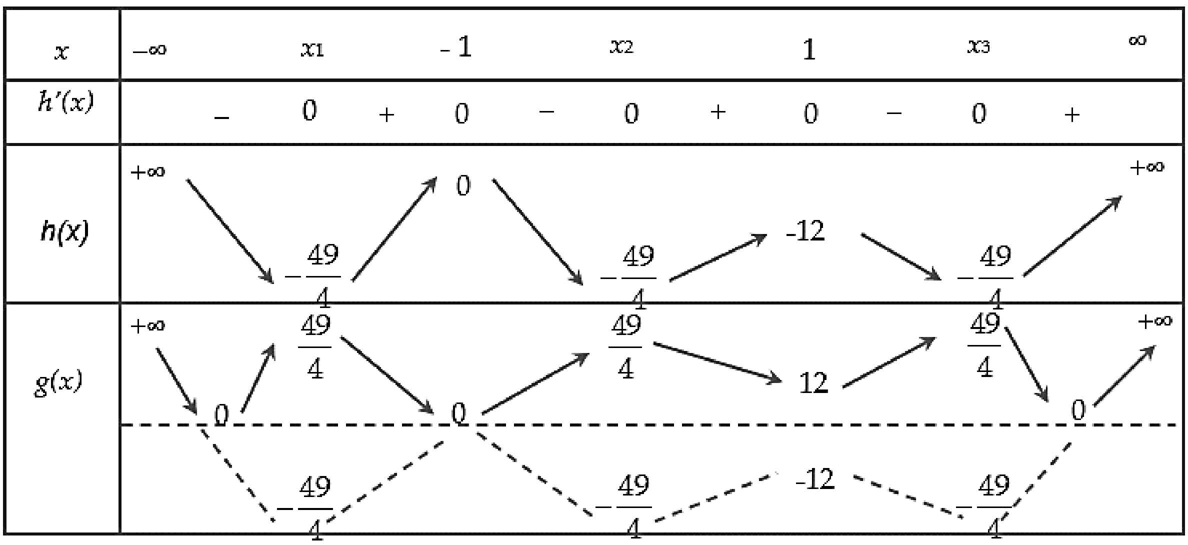


Xét hàm số $h(x)=f^2(x)-f(x)-12 \Rightarrow h'(x)=2f(x)f'(x)-f'(x)=f'(x)\left[2f(x)-1\right]$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\left[2f(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=x_1\in(-2;-1) \\ x=x_2\in(0;1) \\ x=x_3\in(1;2) \end{array}\right.$$

Ta có: $$h'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>\frac{1}{2} \\ f'(x)<0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)<\frac{1}{2} \\ f'(x)>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x>x_3 \\ x_1<x<x_2 \end{array}\right. \\ -1<x<1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<x_1 \\ x_2<x<x_3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<x_2 \\ x<x_1 \\ 1<x<x_3 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:



Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì $0<m<12$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} \Rightarrow$ có 11 giá trị m.

Câu 2: Chọn D

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$$f\left(2-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-f(x)=a\ \left(a\in(-2;-1)\right) \\ 2-f(x)=b\ \left(b\in(0;1)\right) \\ 2-f(x)=c\ \left(c\in(1;2)\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2-a\ (1)\ \left(2-a\in(3;4)\right) \\ f(x)=2-b\ (2)\ \left(2-b\in(1;2)\right) \\ f(x)=2-c\ (3)\ \left(2-c\in(0;1)\right)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta thấy phương trình $(1),(2),(3)$ lần lượt có đúng 1, 3, 3 nghiệm và các nghiệm này là phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 3: Chọn C

Dựa vào đồ thị ta suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\end{array}\right.$.

Khi đó $f'\left(f(x)-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-2=1 \\ f(x)-2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=3 \\ f(x)=1\end{array}\right.$.

Phương trình $f(x)=3$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $f'\left(f(x)-2\right)=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

Câu 4: Chọn C

$f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ (1). Điều kiện xác định: $x^3+x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

Đặt $t=1-\sqrt{x^3+x}$, phương trình (1) thành $f(t)=a$ (2).

Xét hàm số $y=1-\sqrt{x^3+x}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

$y'=-\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}<0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ Hàm số $y=1-\sqrt{x^3+x}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ và $y(0)=1$ nên $t\le 1$ với mọi $x\in[0;+\infty)$.

Với mỗi giá trị $t\le 1$ có duy nhất giá trị $x\in[0;+\infty)$ $\Rightarrow$ số nghiệm của phương trình (1) là số nghiệm $t\le 1$ của phương trình (2).

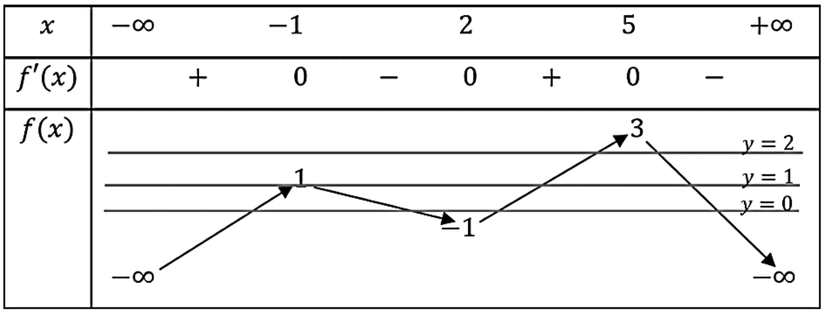
Theo giả thiết, phương trình (1) có nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t\le 1$ và từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đã cho thì phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm và ít nhất 1 nghiệm $t\le 1$.

Vậy $m+n=3$.

Câu 5: Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$. Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=5\end{array}\right.$.

Khi đó: $f'\left(5-3f(x)\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5-3f(x)=-1 \\ 5-3f(x)=2 \\ 5-3f(x)=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f(x)=1 \\ f(x)=0\end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình: $f\left(x\right)=2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f'\left(5-3f\left(x\right)\right)=0$ có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 6: **Chọn B**

Xét phương trình $f'\left(2f\left(x\right)+3\right)=0\ \left(*\right)$.

Đặt $t=2f\left(x\right)+3$, từ phương trình $\left(*\right)$ ta có $f'\left(t\right)=0$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta suy ra: $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Với $t=-2\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{5}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Với $t=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Với $t=2\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$, dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy, số nghiệm thực phân biệt của phương trình đã cho là: $4+2+2=8$ nghiệm.

Câu 7: **Chọn D**

Từ bảng biến thiên của hàm số cho ta có: $\begin{cases}f\left(x\right)=a\left(x^2-1\right)^2\\f\left(0\right)=3\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=3\left(x^2-1\right)^2$.

$$\left(f^2\left(x\right)+x^2\right)^2-\left(m^2+2m+14\right)\left(f^2\left(x\right)+x^2\right)+4\left(m+1\right)^2+36=0\ \left(1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(f^2\left(x\right)+x^2\right)^2-\left(\left(m+1\right)^2+13\right)\left(f^2\left(x\right)+x^2\right)+4\left(\left(m+1\right)^2+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^2\left(x\right)+x^2=4\\f^2\left(x\right)+x^2=\left(m+1\right)^2+9\end{array}\right.\quad\left(I\right)$$

Hàm số $g\left(x\right)=f^2\left(x\right)+x^2=9\left(x^2-1\right)^4+x^2$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ và $g\left(0\right)=9$ nên để $\left(1\right)$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt thì $\left(1\right)$ phải có nghiệm bằng 0. Suy ra: $\left(m+1\right)^2+9=9\ \Leftrightarrow m=-1$.

Thay $m=-1$ vào (I) ta được: $\left[\begin{array}{l} 9\left(x^2-1\right)^4+x^2=4 \\ 9\left(x^2-1\right)^4+x^2=9 \end{array}\right.$ (II)

Đặt $t=x^2-1(*)(t\geq -1)$, thay vào (II) ta được: $\left[\begin{array}{l} 9t^4+t=3\ (2) \\ 9t^4+t=8\ (3) \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(t)=9t^4+t$ trên $[-1;+\infty)$: $h'(t)=36t^3+1$; $h'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{36}}$

t	-1		$\dfrac{-1}{\sqrt[3]{36}}$		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	8	$\searrow$	$\dfrac{-\sqrt[3]{6}}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra: (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1,t_2>-1$ $t_1,t_2>-1$; (3) có 2 nghiệm phân biệt $t_3=-1,t_4>-1$ và các nghiệm của $(2),(3)$ là khác nhau.

Thay các nghiệm trên vào $(*)$ ta được (1) có đúng 7 nghiệm phân biệt (không thỏa mãn).

Câu 8: Chọn A

Dựa vào đồ thị, ta suy ra

$f'(2x-1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -1<x<2 \\ x>2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -3<2x-1<3 \\ 2x-1>3 \end{array}\right.$

$f'(2x-1)<0\Leftrightarrow x<-1\Leftrightarrow 2x-1<-3$

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Đặt $t=x^3+1$. Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình $f(t)=m$ có nhiều nhất 2 nghiệm là $t_1;t_2$ với $t_1<-3;t_2>-3$.

Phương trình $x^3+1=t_1$ (với $t_1<-3$) có 1 nghiệm.

Phương trình $x^3+1=t_2$ (với $t_2>-3$) có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(x^3+1\right)=m$ có nhiều nhất 2 nghiệm.

Câu 9: Chọn A

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc ba nên hàm số $y=f'\left(1-x^2\right)$ phải là hàm bậc bốn. Vì hàm số này có đồ thị đối xứng qua Oy nên hàm số $y=f'\left(1-x^2\right)$ phải là hàm trùng phương.

Đặt $h(x)=f'\left(1-x^2\right)=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$.

Ta có $h'(x)=4ax^3+2bx$.

Do đồ thị $y = h(x)$ có điểm cực trị $A(2;-1)$ và đi qua điểm $B(1;1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} h'(2) = 0 \\ h(2) = -1 \\ h(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32a + 4b = 0 \\ 16a + 4b + c = -1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{9} \\ b = -\dfrac{16}{9} \\ c = \dfrac{23}{9} \end{cases}.$$

Suy ra $h(x) = f'(1-x^2) = \frac{2}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^2 + \frac{23}{9}$. Ta có $g(x) = f\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}, (x \neq 0)$.

$$g'(x) = \frac{2}{x^3}f'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{x}f'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - 1\right).$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = g'(x)$ và Ox là: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}f'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Đặt $t = \frac{1}{x}$ ta được phương trình $t.f'(1-t^2) = 1 \Rightarrow f'(1-x^2) = \frac{1}{x}$ $(\forall x \neq 0)$.

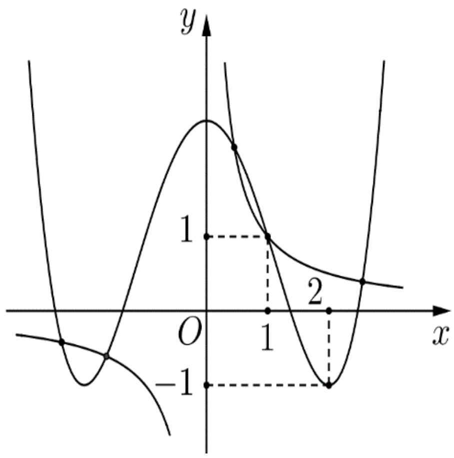
Xét phương trình: $f'(1-x^2) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^2 + \frac{23}{9} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x^4 - 16x^2 - \frac{9}{x} + 23 = 0$.

Ta thấy hàm số $F(x) = 2x^4 - 16x^2 - \frac{9}{x} + 23$ lên tục trên $(0;+\infty)$.

Có $F\left(\frac{1}{10}\right) = -67,1598$; $F\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{337}{126}$; $F(1) = 0$; $F\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1903}{324}$; $F(3) = 38$.

Suy ra $F\left(\frac{1}{10}\right).F\left(\frac{3}{4}\right) < 0$; $F(1) = 0$; $F\left(\frac{4}{3}\right).F(3) < 0$ nên phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_1 \in (0;1)$, $x_2 = 1$, $x_3 \in (2;+\infty)$.

Trên $(-\infty;0)$ dễ dàng nhận thấy $F(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_4 \in (-3;-2)$, $x_5 \in (-2;-1)$ do $F(-3) = 44$; $F(-2) = -\frac{9}{2}$; $F(-1) = 18$.



Từ đó suy ra phương trình: $f'(1-x^2) = \frac{1}{x}$ có 5 nghiệm phân biệt (minh họa đồ thị). Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = g'(x)$ cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt.

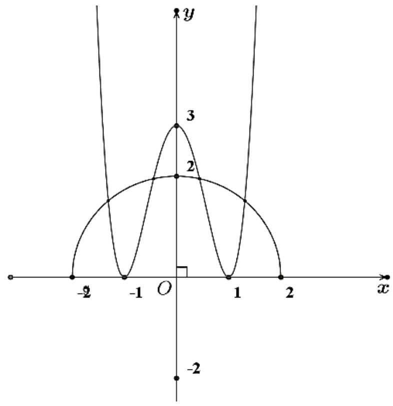
Câu 10: Chọn C

Đặt $t = f^2(x) + x^2, (t \ge 0)$ ta có phương trình

$$t^2 - (m^2 + 2m + 14)t + 4(m+1)^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = m^2 + 2m + 10 \end{array}\right.$$

Với $t = 4$ hay $f^2(x) + x^2 = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (Do $f(x) \ge 0$).

Số nghiệm của phương trình $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ là số giao điểm của đường cong $y = f(x)$ và nửa đường tròn $C(O;2)$

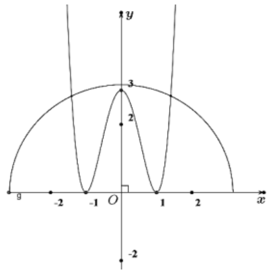


Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t = m^2 + 2m + 10$ hay $f^2(x) + x^2 = m^2 + 2m + 10 \Leftrightarrow f^2(x) = m^2 + 2m + 10 - x^2$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{m^2 + 2m + 10 - x^2}$ (Do $f(x) \ge 0$).

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường cong $y = f(x)$ và nửa đường tròn $C\left(O;\sqrt{m^2 + 2m + 10}\right)$



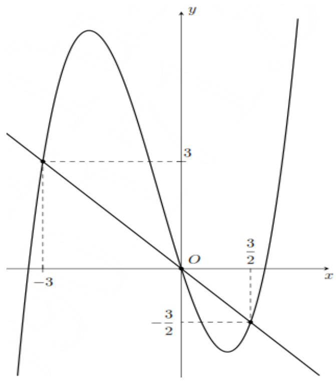
$\left(f^2(x) + x^2\right)^2 - (m^2 + 2m + 14)\left(f^2(x) + x^2\right) + 4(m+1)^2 + 36 = 0$ chỉ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x) = \sqrt{m^2 + 2m + 10 - x^2}$ chỉ có 2 nghiệm phân biệt.Dựa vào đồ thị ta có điều kiện $m^2 + 2m + 10 > 9 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \ne -1$. Vậy có 4042 giá trị của $m \in \left[-2021;2021\right]$.

Câu 11: Chọn A

Ta có $\left|4f(x) + 2x^2\right| - 2m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \left|4f(x) + 2x^2\right| = 2m^2, (1)$.

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + 2x^2$, ta có $h'(x) = 4\left[f'(x) - (-x)\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$.



Ta thấy: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$ và $h(-3)=4f(-3)+2(-3)^2=-1$, $h(0)=0$,

$h\left(\frac{3}{2}\right)=4f\left(\frac{3}{2}\right)+2\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{2}$.

Do đó ta có bảng biến thiên hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{29}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $|h(x)|$ như sau

x	$-\infty$		x_1		-3		0		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$			-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{29}{2}$	$\nearrow$			$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{29}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thực thì $2m^2>\frac{29}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{\sqrt{29}}{2} \\ m<-\frac{\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$.

Mà m là số nguyên thuộc $(-50;50)$ nên $\left[\begin{array}{l} 3\le m\le 49 \\ -49\le m\le -3 \end{array}\right.$. Vậy có 94 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 12: Chọn A

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có $\begin{cases} f'\left(-1\right)=0 \\ f'\left(1\right)=0 \\ f\left(-1\right)=4 \\ f\left(1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ -a+b-c+d=4 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=2. \end{cases}$

Do đó $y=f\left(x\right)=x^3-3x+2 \Rightarrow f\left(0\right)=2$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-1\right)$ như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta cũng có $g\left(1\right)=f\left(0\right)=2$ và phương trình $g\left(x\right)+2=0$ có duy nhất một nghiệm $x=a<0$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $h\left(x\right)=\left|f\left(x-1\right)+2\right|$ như sau

x	$-\infty$		a		0		1		2		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó phương trình $\left|f\left(x-1\right)+2\right|=m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$ khi và chỉ khi $4<m<6$.

Câu 13: Chọn D

$f'\left(x\right)=ax\left(x-2\right)=a\left(x^2-2x\right) \Rightarrow f\left(x\right)=a\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2\right)+C$

$\begin{cases} f\left(0\right)=4 \\ f\left(2\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=4 \\ a=3 \end{cases} \Rightarrow f\left(x\right)=-x^3+3x^2+4 \Rightarrow \dfrac{f\left(x\right)}{x+1}=\dfrac{-x^3+3x^2+4}{x+1}=h\left(x\right)$

$\Rightarrow h'\left(x\right)=\dfrac{-2\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}{\left(x+1\right)^2}$

Đặt $g\left(x\right)=\dfrac{f(f(x))}{f(x)+1} \Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{-2\left(f\left(x\right)-1\right)^2\left(f\left(x\right)+2\right)f'\left(x\right)}{\left(f\left(x\right)+1\right)^2}$

$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=1 \\ f\left(x\right)=-2 \\ f'\left(x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\left(a>2\right) \\ x=b\left(b>a\right) \\ x=0, x=2 \end{array}\right.$

$g'\left(x\right)$ không xác định $\Leftrightarrow f\left(x\right)=-1 \Leftrightarrow x=c\in\left(a;b\right)$

x	$-\infty$		0		2		a		c		b		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-12}{5}$	$\searrow$	$\frac{-316}{9}$	$\nearrow$		$+\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow$	-24	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $g\left(x\right)=m$ có 5 nghiệm phân biệt $\frac{-316}{9}<m<-24\Rightarrow m\in\left\{-35;-34;...;-25\right\}$

Câu 14: Chọn B

Đặt $t=f(x)$. Từ đồ thị $y=f\left(x\right)$ ta có:

Với mỗi $t<1$ ta có một x âm, với mỗi $t>1$ ta có một x dương.

Phương trình (*) trở thành: $\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+2}+\frac{t+2}{t+3}=\left|t-2\right|-t+m$

$\Leftrightarrow \frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+2}+\frac{t+2}{t+3}+t-\left|t-2\right|=m;(**)$

Xét $g(t)=\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+2}+\frac{t+2}{t+3}+t-\left|t-2\right|$; TXĐ: $D=\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-3;-2\right)\cup\left(-2;-1\right)\cup\left(-1;+\infty\right)$. Ta có: $g'(t)=\frac{1}{\left(t+1\right)^2}+\frac{1}{\left(t+2\right)^2}+\frac{1}{\left(t+3\right)^2}+\frac{\left|t-2\right|-t+2}{\left|t-2\right|}>0,\forall t\in D$ và $t\neq 2$.

Ta có bảng biến thiên của $y=g(t)$:

t	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	||	$+$	||	$+$	||		$+$		
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{23}{12}$	$\nearrow$	5

$y=m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (**) có đúng 3 nghiệm nhỏ hơn 1 và 1 nghiệm lớn hơn 1.

$\Leftrightarrow \frac{23}{12}<m<5$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 15: Chọn D

$f\left(x-1\right)=\frac{m}{x^2-6x+12}\Leftrightarrow m=\left(x^2-6x+12\right)f\left(x-1\right)$.

Đặt $x-1=t$ và $g\left(t\right)=\left(t^2-4t+7\right)f\left(t\right)$. Với $x\in\left[2;4\right]$ thì $t\in\left[1;3\right]$.

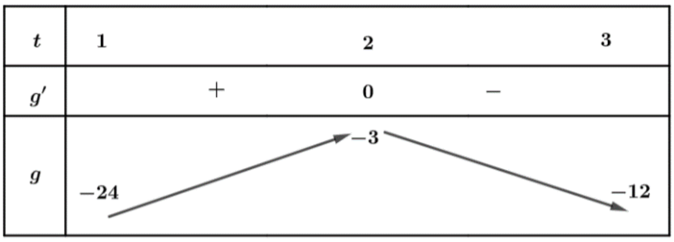
Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị nguyên của tham số m để phương trình $m=g\left(t\right)$ có nhiều nghiệm nhất trên đoạn $\left[1;3\right]$. $g'\left(t\right)=\left(2t-4\right)f\left(t\right)+\left(t^2-4t+7\right)f'\left(t\right)$.

Vì $f'\left(2\right)=0$ nên $f'\left(t\right)=\left(t-2\right)h\left(t\right)$, suy ra

$g'(t)=(2t-4)f(t)+(t^2-4t+7)(t-2)h(t)=(t-2)\left(2f(t)+(t^2-4t+7)h(t)\right)$

Từ bảng biến thiên ta có được $h(t)<0,\forall t\in[1;3]$ nên $2f(t)+(t^2-4t+7)h(t)<0,\forall t\in[1;3]$.

Ta có bảng biến thiên:



Vậy với $m\in[-12;-3)$ thì phương trình đã cho có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt.

Tổng các phần tử của S là -72.

Câu 16: Chọn B

$f'(x)=(m+1)f(x)\ (1)$

Ta có:

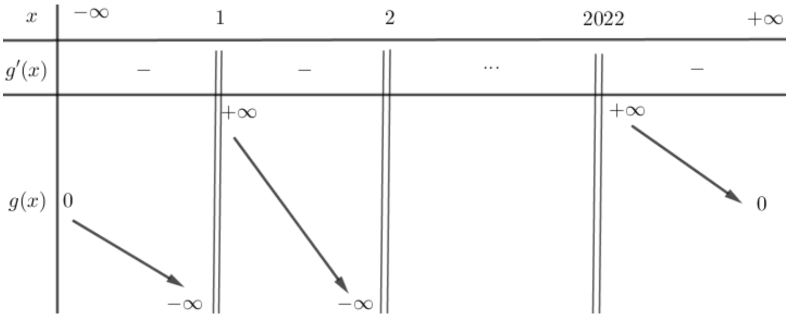
$f'(x)=(x-2)(x-3)...(x-2022)+(x-1)(x-3)(x-4)...(x-2022)+...+(x-1)(x-2)...(x-2021)$

Nhận thấy với mọi m phương trình (1) không có nghiệm trong tập $\{1;2;...;2022\}$.

Suy ra $(1)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=m+1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+...+\dfrac{1}{x-2022}=m+1\ (2)$

Xét hàm số: $g(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+...+\dfrac{1}{x-2022}$

$g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-1}{(x-2)^2}+...+\dfrac{-1}{(x-2022)^2}<0,\forall x\notin\{1;2;...;2022\}$



Vậy phương trình (1) có 2022 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2022 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$. Suy ra có 4044 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để phương trình $f'(x)=(m+1)f(x)$ có 2022 nghiệm phân biệt.

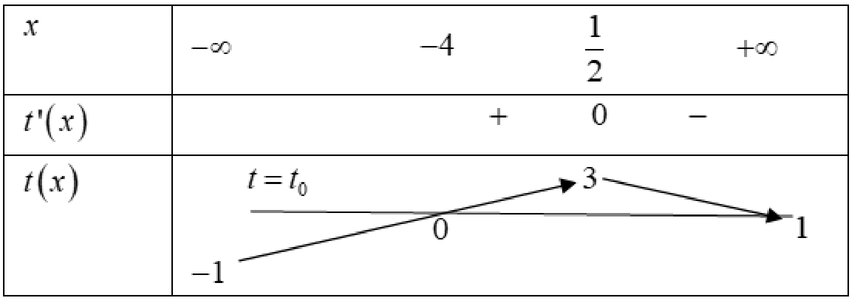
Câu 17: Chọn B

Ta có: $m(x+4)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24$

$\Leftrightarrow m(x+4)\sqrt{x^2+2}=4(x^2+2)+(x+4)^2\Leftrightarrow m=\dfrac{4\sqrt{x^2+2}}{x+4}+\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}\ (x\neq -4)\quad (*)$

Đặt $t=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$; $t'(x)=\dfrac{2-4x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow t'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ và $t(-4)=0$.

Bảng biến thiên:

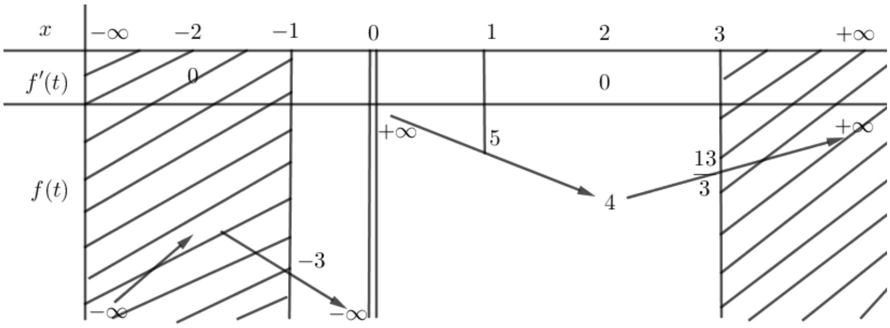


Từ bảng biến thiên ta suy ra: $t\in(-1;3]\setminus\{0\}$, với $t_0\in(1;3)$ thì phương trình $t(x)=t_0$ cho ta hai nghiệm x và $t\in\{3\}\cup(-1;1]\setminus\{0\}$ thì phương trình $t(x)=t_0$ cho ta một nghiệm x.

Khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow m=\frac{4}{t}+t=f(t)$ với $t\in(-1;3]\setminus\{0\}$.

Ta có: $f'(t)=1-\frac{4}{t^2}=\frac{t^2-4}{t^2}=0\Leftrightarrow t^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta nhận thấy $f(t)=m$ có nhiều nhất hai nghiệm t, mà mỗi giá trị t lại cho ta nhiều nhất hai nghiệm x.Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm thực thì phương trình $f(t)=m$ phải có hai nghiệm $t_0\in(1;3)\Leftrightarrow 4<m<\frac{13}{3}$.

Vậy $m\in\left(4;\frac{13}{3}\right)$. Suy ra $a+b=\frac{25}{3}$.

Câu 18: Chọn D

Ta có: $y=f(-x)=-x^3-2022x=-\left(x^3+2022x\right)=-f(x)$ suy ra hàm số $y=f(x)$là hàm số lẻ.

Mặt khác $y'=f'(x)=3x^2+2022>0,\forall x\in R$ hay hàm số đồng biến trên R

Lúc đó ta có $pt\Leftrightarrow f\left(2m-sinx\cos x-\cos^2x\right)=-f\left(2sin^2x-3m\right)$

$\Leftrightarrow f\left(2m-sinx\cos x-\cos^2x\right)=f\left(3m-2sin^2x\right)$

$\Leftrightarrow 2m-sinx\cos x-\cos^2x=3m-2sin^2x\Leftrightarrow 2sin^2x-sinx\cos x-\cos^2x=m$

$\Leftrightarrow 1-\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{2}(1+\cos2x)=m\Leftrightarrow\sin2x+3\cos2x=1-2m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1+9\ge(1-2m)^2\Leftrightarrow 4m^2-4m-9\le0\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{10}}{2}\le m\le\frac{1+\sqrt{10}}{2}$

Ta có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 19: Chọn D

Đặt $t=-x-2\Rightarrow 3f\left(t\right)=-t^3-6t^2-9t+m$. Gọi $g\left(t\right)=\dfrac{-t^3}{3}-2t^2-3t\Rightarrow f\left(t\right)-g\left(t\right)=\dfrac{m}{3}$.

Ta có $g'\left(t\right)=-t^2-4t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-3\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng xét dấu của $y=f'\left(t\right)$ và $y=g'\left(t\right)$ suy ra: $f'\left(t\right)-g'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-3\end{array}\right.$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của $f\left(t\right)-g\left(t\right)$:

t	-5		-3		-1		3
$f'(t)-g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)-g(t)$	$-\dfrac{23}{3}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	40

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow -1<\dfrac{m}{3}<2\Rightarrow -3<m<6$.

Vậy có 8 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 20: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa $\left(C_m\right)$ và trục hoành:

$x^3-6x^2+9x+m+2021=0\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x+2021=-m$.

$\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=-m$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x+2021$ tại 3 điểm phân biệt.

Xét $f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x+2021$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2-12x+9$. Cho $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	3	x_3	4	$+\infty$
y'		$+$		0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	2021	$\nearrow$	2025	$\searrow$	2021	$\nearrow$	2025	$+\infty$

$y=-m$

ycbt $\Leftrightarrow 2021<-m<2025\Leftrightarrow -2025<m<-2021$ và ta thấy các hoành độ giao điểm thỏa $0<x_1<1<x_2<3<x_3<4$.

Câu 21: Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(d\right)$ và đồ thị $\left(C\right)$:

$x^3+2mx^2+3\left(m-1\right)x+2=-x+2\Leftrightarrow x^3+2mx^2+3\left(m-1\right)x+x=0$

$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-2)x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+3m-2=0 \end{array}\right.$ (1)

Với $x=0$, ta có giao điểm là $A(0;2)$.

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2\neq 0 \\ \Delta'=m^2-3m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \end{cases}(*)$.

Ta gọi các giao điểm của d và (C) lần lượt là $A(0;2), B(x_B;-x_B+2), C(x_C;-x_C+2)$ với x_B, x_C là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_B+x_C &=-2m \\ x_B.x_C &=3m-2 \end{cases}$.

Ta có diện tích của tam giác MBC là $S_{\Delta MBC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot d(M,BC)=2\sqrt{2}$.

Phương trình d được viết lại là: $d: y=-x+2 \Leftrightarrow x+y-2=0$.

Mà $d(M,BC)=d(M,d)=\dfrac{|3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Do đó: $BC=\dfrac{2S_{\Delta MBC}}{d(M,BC)}=\dfrac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4 \Leftrightarrow BC^2=16$.

Ta lại có: $BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2=(x_C-x_B)^2+\left[(-x_C+2)-(-x_B+2)\right]^2$.

$=(x_C-x_B)^2+(x_B-x_C)^2=2(x_C-x_B)^2=16 \Leftrightarrow (x_C-x_B)^2=8$

$\Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_B.x_C=8 \Leftrightarrow (-2m)^2-4(3m-2)=8$.

$\Leftrightarrow 4m^2-12m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn). Vậy $S=\{0;3\} \Rightarrow 0^2+3^2=9$.

Câu 22: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$x^3+2mx^2+(3m-4)x+2=-x+2 \Leftrightarrow x^3+2mx^2+(3m-3)x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+(3m-3)=0 \end{array}\right.$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại ba điểm thỏa mãn bài toán, khi và chỉ khi $x^2+2mx+(3m-3)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+3>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1$.

Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm phương trình $x^2+2mx+(3m-3)=0$, theo định lí Viet có

$\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1.x_2=3m-3 \end{cases}$

Do $B;C \in d$ nên $d\left(M,BC\right)=d\left(M;d\right)=\dfrac{\left|3+1-2\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác MBC bằng $2\sqrt{7} \Leftrightarrow BC=2\sqrt{14}\ \left(1\right)$

Khi đó $B\left(x_1;-x_1+2\right);C\left(x_2;-x_2+2\right)\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\left(x_2-x_1;x_1-x_2\right)\Rightarrow BC^2=2\left(x_1-x_2\right)^2\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có

$56=2\left(x_1+x_2\right)^2-8x_1.x_2 \Leftrightarrow 8m^2-24m-32=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow m=-1;m=4$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 23: Chọn C

Đường thẳng d có phương trình là $y=4x+8$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị $\left(C\right)$ là:

$x^3-2\left(m-1\right)x^2+2\left(m^2-2m\right)x+4m^2=4x+8\ \left(1\right)$

$\Leftrightarrow x^3-2\left(m-1\right)x^2+2\left(m^2-2m-2\right)x+4m^2-8=0$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)\left(x^2-2mx+2m^2-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2mx+2m^2-4=0\quad \left(2\right)\\ x+2=0\end{array}\right.$

Để đường thẳng d cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left(1\right)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$\Leftrightarrow \begin{cases}4+4m+2m^2-4\neq 0\\ \Delta'=m^2-2m^2+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq -2\\ 4-m^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ -2<m<2\end{cases}\ \left(*\right)$.

Khi đó d cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3, giả sử $x_3=-2$, x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\left(1\right)$. Theo định lý Viet, ta có: $\Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1.x_2=2m^2-4\end{cases}$.

Ta có $P=x_1x_2-2x_2-2x_1=x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)=2m^2-4m-4$

Xét hàm số $f\left(m\right)=2m^2-4m-4\quad \forall m\in\left(-2;2\right),m\neq 0$

$f'\left(m\right)=4m-4;\ f'\left(m\right)=0 \Leftrightarrow m=1$.

Lập bảng biến thiên

x	-2		0		1		2
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	12	↘	-4 ‖ -4	↘	-6	↗	-4

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=-6$ khi $m=1$.

Câu 24: Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1}=-3x+m$, $x\neq 1$.

$\Rightarrow 3x^2-(m+1)x+m+1=0\ (*)$.

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Suy ra

$$\begin{cases}(m+1)^2-12(m+1)>0\\ 3.1^2-(m+1).1+(m+1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>11\end{array}\right..$$

Khi đó $A(x_1;-3x_1+m)$, $B(x_2;-3x_2+m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ đồng thời thoả mãn $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m+1}{3}\\ x_1x_2=\dfrac{m+1}{3}\end{cases}$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow 10x_1x_2-3m(x_1+x_2)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 7m+10=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-10}{7}(TM)\Rightarrow\begin{cases}b=10\\ a=7\end{cases}$. Vậy $a+2b=27$.

Câu 25: Chọn D

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang: $y=-1\Rightarrow\dfrac{a}{c}=-1\Rightarrow a=-c\ (1)$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng: $x=1\Rightarrow-\dfrac{d}{c}=1\Rightarrow d=-c\ (2)$.

Ta có: $f(0)=1\Rightarrow\dfrac{b}{d}=1\Rightarrow b=d\ (3)$.

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, nên $f(x^2)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=f(x^2)$ và $y=mx+1$:

$\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=mx+1\Leftrightarrow(1+x^2)=(mx+1)(1-x^2)$, do $x=\pm1$ không phải nghiệm.

$$\Leftrightarrow x(mx^2+2x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ g(x)=mx^2+2x-m=0\end{array}\right.$$

Để 2 đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt M,N có hoành độ khác 0 thì phương trình $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+m^2>0\\ -m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq0$.

Gọi x_1,x_2 là nghiệm phương trình $g(x)=0$, khi đó tọa độ M,N:

$M(x_1;mx_1+1),N(x_2;mx_2+1)$.

Gọi I là trung điểm MN thì I có tung độ:

$$y_0=\frac{1}{2}(y_M+y_N)=\frac{1}{2}(mx_1+mx_2+2)=\frac{1}{2}\left[m\left(-\frac{2}{m}\right)+2\right]=0.$$

Vậy trung điểm I của MN luôn nằm trên trục hoành với mọi tham số $m\neq0$. Vậy có vô số giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $d:\ \dfrac{2x+1}{x+1}=-2x+m$ (1)

Điều kiện $x\neq -1$

Với điều kiện $x\neq -1$ phương trình (1) $\Leftrightarrow 2x^2+(4-m)x+1-m=0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta=m^2+8>0,\forall m\in\mathbb{R}$ và $x=-1$ không là nghiệm của phương trình (2) nên d cắt (C) tại hai điểm A và B phân biệt với mọi số số thực m.

Ta có $y=\dfrac{2x+1}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), theo Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m-4}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{1-m}{2} \end{cases}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B lần lượt là $k_1=\dfrac{1}{(x_1+1)^2};k_2=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$.

Ta có $k_1>0,\mathrm{k}_2>0$; $k_1.k_2=\dfrac{1}{(x_1+1)^2.(x_2+1)^2}=\dfrac{1}{(x_1.x_2+x_1+x_2+1)^2}$=4.

$P=(k_1)^{2022}+(k_2)^{2022}\geq 2.\sqrt{(k_1.k_2)^{2022}}=2^{2023}$

$\Rightarrow P$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2^{2023} khi $k_1^{2022}=k_2^{2022}\Leftrightarrow\ k_1=k_2\Leftrightarrow (x_1+1)^2=(x_2+1)^2$ (3)

Vì $x_1\neq x_2$, nên (3) $\Leftrightarrow x_1+2=-(x_2+2)\Rightarrow x_1+x_2=-4\Rightarrow \dfrac{m-4}{2}=-4\Leftrightarrow m=-4$. Vậy $m=-4$ thỏa mãn đề bài.

Câu 27: Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (Cm) và đường thẳng $y=5$ là: $x^4-2mx^2+3m+15=5\Leftrightarrow x^4-2mx^2+3m+10=0,(1)$.

Đặt $t=x^2,t\geq 0$, ta được phương trình $t^2-2mt+3m+10=0,(2)$.

Đồ thị (Cm) cắt đường thẳng $y=5$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-10>0 \\ 2m>0 \\ 3m+10>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>5 \end{array}\right. \\ m>0 \\ m>-\dfrac{10}{3} \end{cases}\Leftrightarrow m>5(*)$$

Với iều kiện $(*)$ giả sử phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2,(t_1<t_2)$, theo định lí Vi ét ta có $\begin{cases} t_1+t_2=2m \\ t_1.t_2=3m+10 \end{cases}$, khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm $x_1,x_2,x_3,x_4\,(x_1<x_2<x_3<x_4)$ với $x_1=-\sqrt{t_2},x_2=-\sqrt{t_1},x_3=\sqrt{t_1},x_4=\sqrt{t_2}$. Lại có $x_4<3\Leftrightarrow t_2<9$.

Phương trình (1) có cả 4 nghiệm đều nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi PT (2) có hai nghiệm thỏa mãn

$$t_1 < t_2 < 9 \Leftrightarrow \begin{cases}(t_1-9)(t_2-9)>0\\(t_1-9)+(t_2-9)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1.t_2-9(t_1+t_2)+81>0\\t_1+t_2-18<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3m+10-9.2m+81>0\\2m-18<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{91}{15}\\m<9\end{cases} \Leftrightarrow m<\dfrac{91}{15}.$$

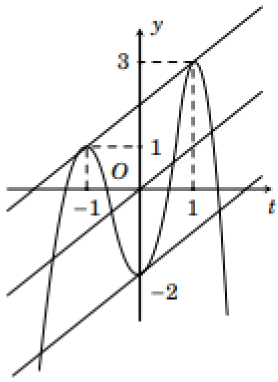
Kết hợp với $(*)$ ta được $5<m<\dfrac{91}{15}$. Ta được $\begin{cases}a=5\\b=91\\c=15\end{cases} \Rightarrow a+b+c=111$.

Câu 28: Chọn D

Đặt $1-t=\dfrac{1-x}{x+2} \Leftrightarrow x=\dfrac{2t-1}{2-t}, \forall t\neq 2$, khi đó phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ trở thành $f(1-t)=t-m \quad (*)$.

Nhận thấy với mỗi nghiệm $t\neq 2$ của phương trình $(*)$ ta có được một nghiệm x. Do đó để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)-\dfrac{2x+1}{x+2}+m=0$ có đúng 4 nghiệm thì phương trình $(*)$ có đúng 4 nghiệm $t\neq 2$.

Ta thấy đồ thị hàm số $y=t-m$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y=t$ cắt trục tung tại điểm $(0;-m)$.



Từ đồ thị ta có phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-2\le m\le 2$. Mặt khác $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 29: Chọn A

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x+2)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Có: $g'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right)(x^3-8x)}{\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2+12\right|}f'\left(\left|\dfrac{x^4}{4}-4x^2\right|+m\right)$

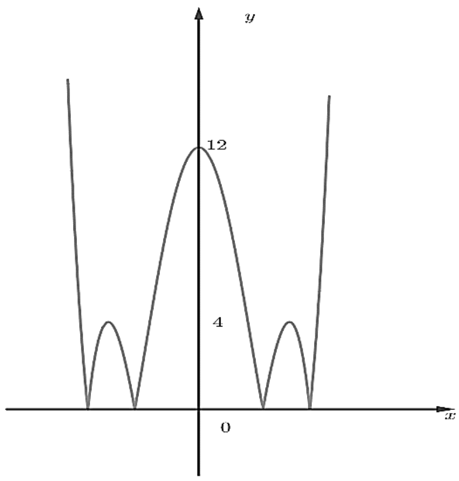
Phương trình hoành độ giao điểm của $g'(x)$ và trục Ox là: $g'(x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right)\left(x^3-8x\right)}{\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|} f'\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2} \\ x=\pm 2 \\ f'\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)=0 \\ x=\pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$f'\left(\left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m=2 \\ \left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|+m=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|=2-m(1) \\ \left|\frac{x^4}{4}-4x^2+12\right|=-2-m(2) \end{array}\right.$$

Xét hàm $h(x)=\frac{x^4}{4}-4x^2+12$, có $h'(x)=x^3-8x, h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2} \\ x=0 \\ x=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Suy ra ta có đồ thị hàm $y=|h(x)|$ như hình vẽ:



Để hàm số $g'(x)$ cắt trục Ox tại 11 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(1),(2)$ có 4 nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 \le -2-m < 12 \\ -2-m \le 0 \end{cases} \\ -2-m \ge 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -10 < m \le -2 \\ m \ge -2 \end{cases} \\ m \le -14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m \le -14 \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-30;-29;\ldots -14;-2\}$$

Suy ra có 18 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm

$\left|x^3-3x-1\right|=\left|mx^3-6mx^2+9mx-7m\right| \Leftrightarrow \left|x^3-3x-1\right|=|m|\left|x^3-6x^2+9x-7\right|$ (*)

Xét hai hàm số $f(x)=\left|x^3-3x-1\right|$, $g(x)=\left|x^3-6x^2+9x-7\right|$ có bảng biến thiên trên $[0;2]$ như sau:

x	0		1		x_1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	3	↘	0	↗	1

Bảng biến thiên:

x	0		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	7	↘	3	↗	5

Vì $g(x)>0$ nên $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\left|x^3-3x-1\right|}{\left|x^3-6x^2+9x-7\right|}=|m| \Leftrightarrow h(x)=|m|$.

Ta có hàm số $h(x)=\dfrac{\left|x^3-3x-1\right|}{\left|x^3-6x^2+9x-7\right|}$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $h(x)\ge 0$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $x_0\in[0;2]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[0;2]} h(x) \le |m| \le \max\limits_{[0;2]} h(x)$

Vì $f(x_1)=0$ nên $h(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $\min\limits_{[0;2]} h(x) = h(x_1)=0$

Vì khi $x=1$ ta có $f(x)$ lớn nhất và $g(x)$ nhỏ nhất nên $\max\limits_{[0;2]} h(x) = h(1)=\dfrac{\max\limits_{[0;2]} f(x)}{\min\limits_{[0;2]} g(x)}=1$

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm $x_0\in[0;2]$ khi và chỉ khi $0\le|m|\le 1 \Leftrightarrow -1\le m\le 1$

Kết luận có 3 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Câu 31: Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2):

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(3|x|+m)=-3x^5+30x^4-101x^3+120x^2-2x-50$ (1)

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 5 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 5 nghiệm phân biệt.

Với $x\in\{1;2;3;4\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x\notin\{1;2;3;4\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m=\frac{-3x^5+30x^4-101x^3+120x^2-2x-50}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}-3|x|$$

$$\Leftrightarrow m=-3x-3|x|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}.$$

Xét hàm số $h(x)=-3x-3|x|+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2;3;4\}$.

Suy ra: $h'(x)=-3-\dfrac{3x}{|x|}-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{(x-3)^2}-\dfrac{1}{(x-4)^2}$.

Ta có: $h'(x)=\begin{cases} -6-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{(x-3)^2}-\dfrac{1}{(x-4)^2} & \text{khi } x\in(0;+\infty)\setminus\{1;2;3;4\} \\ -\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{(x-3)^2}-\dfrac{1}{(x-4)^2} & \text{khi } x\in(-\infty;0) \end{cases}$ và $h'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 5 nghiệm phân biệt thì $m<0$. Do đó có 2022 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Chọn C

Ta xét $f(u)+f(v)=\dfrac{5^u}{5^u+5}+\dfrac{5^v}{5^v+5}=\dfrac{5^u\left(5^v+5\right)+5^v\left(5^u+5\right)}{\left(5^u+5\right)\left(5^v+5\right)}=\dfrac{2.5^{u+v}+5\left(5^u+5^v\right)}{5^{u+v}+5\left(5^u+5^v\right)+25}$

Ta có $f(u)+f(v)=1\Leftrightarrow\dfrac{2.5^{u+v}+5\left(5^u+5^v\right)}{5^{u+v}+5\left(5^u+5^v\right)+25}=1\Leftrightarrow 5^{u+v}=25\Leftrightarrow u+v=2.$

Lúc đó $f\left(x^3+3mx^2+3m^2x\right)+f\left(m^3+m+1-\sqrt[3]{x+1}\right)=1$

$\Leftrightarrow\left(x^3+3mx^2+3m^2x\right)+\left(m^3+m+1-\sqrt[3]{x+1}\right)=2\Leftrightarrow\left(x^3+3mx^2+3m^2x+m^3\right)=\sqrt[3]{x+1}+1-m$

$\Leftrightarrow(x+m)^3=\sqrt[3]{x+1}+1-m\Leftrightarrow(x+m)^3+(x+m)=(x+1)+\sqrt[3]{x+1}$

$\Leftrightarrow g(x+m)=g\left(\sqrt[3]{x+1}\right)\quad(*)$

Xét $g(t)=t^3+t\Rightarrow g'(t)=3t^2+1>0,\forall t.$ Do đó $(*)\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{x+1}-x, x\in[0;+\infty)$

Xét hàm số $h(x)=\sqrt[3]{x+1}-x, x\in[0;+\infty).$ Ta có $h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}-1<0,\forall x\in[0;+\infty).$

Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	1 $\searrow$	$-\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\le 1\xrightarrow{m\in(-10;10);\,m\in\mathbb{Z}}m\in\{-9;-8;...;-1;0;1\}.$

Do đó $\sum\limits_{X=-9}^{1}(X)=-44.$

Câu 33: Chọn B

Xét $f(x)=x^{2021}+2021x$. Ta chứng minh hàm $f(x)=x^{2021}+2021x$ là hàm lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$.

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$, $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$f(-x)=(-x)^{2021}+2021(-x)=-\left(x^{2021}+2021x\right)$, do đó $f(x)$ là hàm số lẻ.

Ta có $f'(x)=2021.x^{2020}+2021>0,\forall x\in\mathbb{R}$, nên $f(x)$ là hàm số tăng.

Yêu cầu bài toán $f(m-2020)+f\left(2021m-5^8\right)\le 0\Leftrightarrow f\left(2021m-5^8\right)\le -f(m-2020)$

$\Leftrightarrow f\left(2021m-5^8\right)\le f\left[-(m-2020)\right]$ (do tính chất hàm lẻ).

$\Leftrightarrow 2021m-5^8\le -(m-2020)$ (do tính đồng biến của hàm số $\forall x\in\mathbb{R}$).

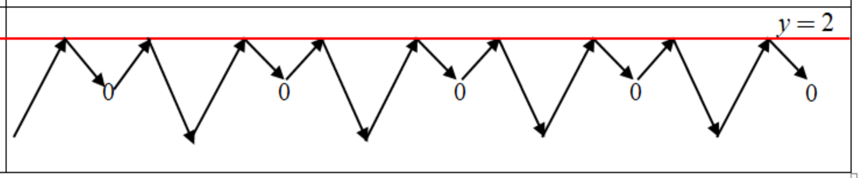
$\Leftrightarrow 2022m\le 5^8+2020\Leftrightarrow m\le\dfrac{5^8+2020}{2022}$

Do m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m nên $m_0=\left[\dfrac{5^8+2020}{2022}\right]=194$.

Câu 34: Chọn D

Cách 1: Phương pháp ghép trục

Đặt $u=\cos x\in[-1;1]$. Vì $x\in\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ nên $u'=-\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pi\\x=2\pi\\x=3\pi\\x=4\pi\end{array}\right.$

x	0				π				2π				3π				4π		$\dfrac{9\pi}{2}$
$u=\cos x$	1		0		-1		0		1		0		-1		0		1		0
$t=f(u)$	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0
$y=f(t)$																			

Từ bảng biến thiên suy ra tổng số nghiệm phương trình đã cho là 9.

Cách 2: Tự luận truyền thống

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $f\left(f(\cos x)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos x)=-1\\f(\cos x)=1\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $f(\cos x)=-1$. Đặt $t=\cos x$, $t\in[-1;1]$

Khi đó phương trình $f(\cos x)=-1$ trở thành $f(t)=-1$, với $t\in[-1;1]$.

Đây là phương trình có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a<-1\\t=b>1\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $f(\cos x)=1$. Đặt $t=\cos x$, $t\in[-1;1]$; $f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\in(-\infty;-1)\ (loai)\\ t=n\in(-1;0)\\ t=p\in(0;1)\\ t=q\in(1;+\infty)\ (loai)\end{array}\right.$

Với $t=n\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\cos x=t$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Với $t=p\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình $\cos x=t$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Hiển nhiên, 9 nghiệm trong những trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 35: Chọn A

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}+3^x.\ln 3+\dfrac{1}{x^2}.3^{\frac{1}{x}}.\ln 3>0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ (1).

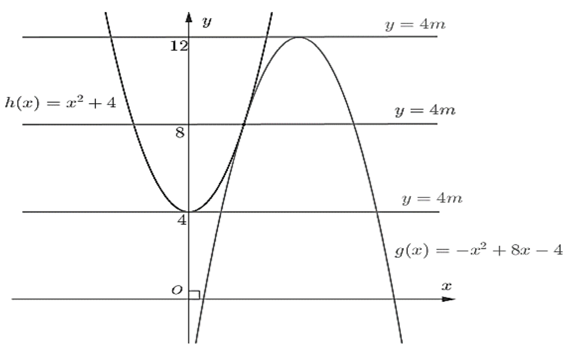
Mặt khác $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_3\dfrac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}-3^x=-\left(\log_3 x-3^{\frac{1}{x}}+3^x\right)=-f(x)$, khi đó

$$f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0\Leftrightarrow -f\left(4|x-m|+3\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$

$\Leftrightarrow f\left(4|x-m|+3\right)=f\left(x^2-4x+7\right)$ (2).

Từ $(1),(2)\Rightarrow 4|x-m|+3=x^2-4x+7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m=-x^2+8x-4\\ 4m=x^2+4\end{array}\right.$.

Ta có đồ thị sau:



Theo yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l}4m=4\\ 4m=8\\ 4m=12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=2\\ m=3\end{array}\right.$. Vậy $1^2+2^2+3^2=14$.

Câu 36: Chọn B

Ta có: $4|x+m|\left(x^2+2mx+m^2-3\right)+9x+1=0\Leftrightarrow 4|x+m|\left[(x+m)^2-3\right]+9(x+m)+1-9m=0$

$\Leftrightarrow 4\left|x+m\right|^3-12\left|x+m\right|+9\left(x+m\right)+1=9m$. Đặt $t=x+m$.

Phương trình trở thành: $4\left|t\right|^3-12\left|t\right|+9t+1=9m$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=4\left|t\right|^3-12\left|t\right|+9t+1$, $t\in\mathbb{R}$.

$$f\left(t\right)=\begin{cases}4t^3-3t+1,\ t\ge 0\\ -4t^3+21t+1,\ t<0\end{cases}\Rightarrow f'\left(t\right)=\begin{cases}12t^2-3,\ t>0\\ -12t^2+21,\ t<0\end{cases}.$$

$$f'\left(0^+\right)\ne f'\left(0^-\right)\Rightarrow \nexists f'\left(0\right);\ f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\ t=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{7}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-7\sqrt{7}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

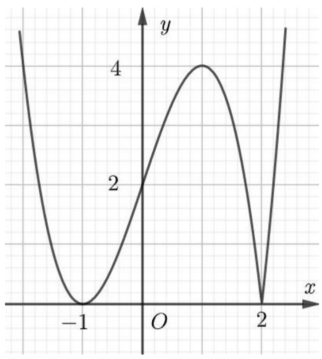
Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ cắt đường thẳng $y=9m$ tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 9m\in\left(0;1\right)\Leftrightarrow m\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right)$. Vậy $a=0;b=\dfrac{1}{9}\Rightarrow b-a=\dfrac{1}{9}\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 37: Chọn C

Phương trình đã cho tương đương với $\left|f\left(x\right)\right|^2-\left(m+7\right)\left|f\left(x\right)\right|+4m+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|f\left(x\right)\right|=4\\ \left|f\left(x\right)\right|=m+3\end{array}\right.$.

Do cách lấy đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nên ta thấy phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=4$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2=1,x_3$.



Vậy để thỏa mãn bài toán thì ta phải có phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m+3$ có bốn nghiệm phân biệt và các nghiệm này khác với ba nghiệm $x_1,\ x_2=1,x_3$ ở trên. Khi đó ta phải có

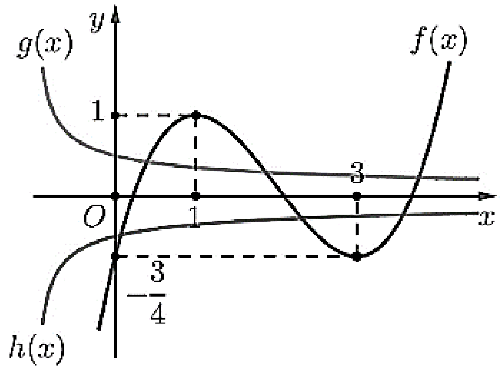
$$0<m+3<4\Leftrightarrow -3<m<1.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-2,\ m=-1,m=0$. Do đó có tổng là $-2+\left(-1\right)+0=-3$.

Câu 38: Chọn D

Đặt $t = ax^2 - 1, (t > -1) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{a}(t+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t+1}, (x > 0) \\ x = -\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t+1}, (x < 0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{t+1}} \\ f(t) = -\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{t+1}} \end{array}\right.$

Vẽ thêm đồ thị của hai hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{x+1}}; h(x) = -\frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{x+1}}$



Phương trình đã cho có 7 nghiệm khi $\begin{cases} g(1) < 1 \\ h(3) > -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}b} < 1 \\ -\frac{\sqrt{a}}{2b} > -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{2}b \Leftrightarrow a < 2b^2$

Nếu $2b^2 > 15 \Rightarrow b \in \{3, \ldots, 15\} \Rightarrow a \in \{1, \ldots, 16-b\} \Rightarrow \sum_{b=3}^{15}(16-b) = 91 \Rightarrow$ có 91 cặp.

Nếu $2b^2 \le 15 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a = 1 \\ b = 2 \Rightarrow a < 8 \Rightarrow a \in \{1, \ldots 7\} \end{cases} \Rightarrow$ có 8 cặp. Vậy có 99 cặp số $(a;b)$ thoả đề.

Câu 39: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2)

$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|) = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3 \ (1)$

Để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Vì $\left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$ không phải là nghiệm phương trình (1) nên

$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| = -2x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1} - 2|x|$

$\Leftrightarrow m = -2x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1} - 2|x| \ (2)$

(2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = m$ và $y = -2x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1} - 2|x|$.

Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1} - 2|x|$ và đường thẳng $y = m$.

Xét $y=-2x+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-2|x|$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$.

$y'=-2-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2}-2\dfrac{x}{|x|}<0,\ \forall x\neq 0;-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (2) có 3 nghiệm khi $m\geq 0$.

Kết hợp với đề bài, ta có $m\in\{0;1;2;...;2020\}$. Vậy có 2021 số thỏa điều kiện bài toán.

Câu 40: Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x(x-2)(x-3)(m-|x|)=x^4-6x^3+5x^2+11x-6\ (*)$.

Vì $x=0,\ x=2,\ x=3$ không phải là nghiệm của phương trình $(*)$ nên

$$(*)\Leftrightarrow m-|x|=\frac{x^4-6x^3+5x^2+11x-6}{x(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow m-|x|=x-1-\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x}\Leftrightarrow m=x-1-\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x}+|x|.$$

Xét hàm số $f(x)=x-1-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{1}{x}+|x|=\begin{cases}2x-1-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{1}{x} & khi\ x\geq 0\\ -1-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{1}{x} & khi\ x<0\end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases}2+\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{(x-3)^2}+\dfrac{1}{x^2} & khi\ x\geq 0\\ \dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{3}{(x-3)^2}+\dfrac{1}{x^2} & khi\ x<0\end{cases}$. Khi $f'(x)>0,\forall x\notin\{0;2;3\}$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

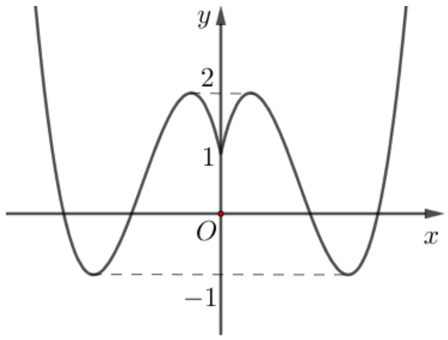
x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $m>-1$.

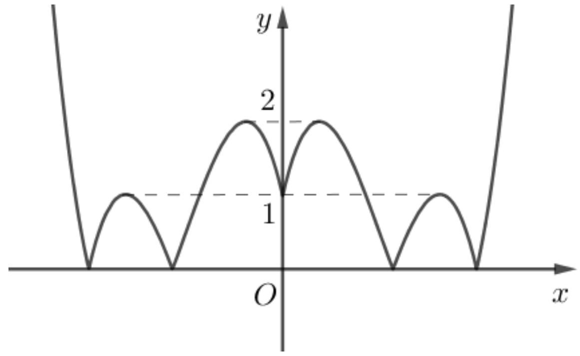
Vì m nguyên và thuộc đoạn $[-2020;2020]$ suy ra $m\in\{0;1;2;\ldots;2020\}$ nên có 2021 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 41: Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như sau



Từ đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ như sau



Phương trình $\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|=\dfrac{2}{9}m^2-\dfrac{1}{81}m^4$ có 8 nghiệm phân biệt khi chỉ khi

$0<\dfrac{2}{9}m^2-\dfrac{1}{81}m^4<1 \Leftrightarrow 0<18m^2-m^4<81$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^4-18m^2+81>0 \\ m^4-18m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m^2-9\right)^2>0 \\ m^2\left(m^2-18\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \pm 3 \\ m\neq 0 \\ -3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2} \end{cases}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-4;-2;-1;1;2;4\right\}$.

Câu 42: Chọn D

Cách 1:

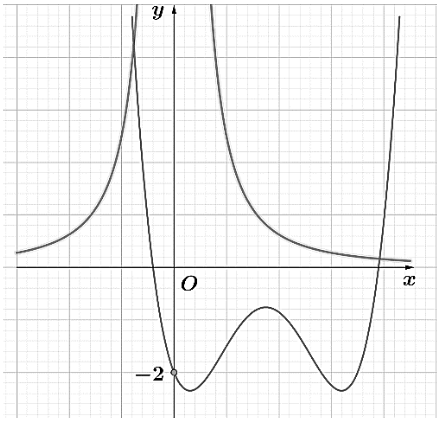
Ta có $f\left(x^2f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2f(x)=0 \\ x^2f(x)=a\in(0;1) \\ x^2f(x)=b\in\left(2;3\right) \\ x^2f(x)=c\in(3;4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ f(x)=0 & (1) \\ f(x)=\dfrac{a}{x^2},\ a\in(0;1) & (2) \\ f(x)=\dfrac{b}{x^2},\ b\in\left(2;3\right) & (3) \\ f(x)=\dfrac{c}{x^2},\ c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{k}{x^2}(k>0)$, Ta có $g'(x)=-\dfrac{2k}{x^3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Đồ thị của $f(x)$ và $g(x)$ được mô tả như sau:



Do đó ta có:,, và mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 9 nghiệm.

Cách 2:

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) \\ x^2 f(x)=b\in\left(2;3\right) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=0 \\ f(x)=0 \end{cases} & (1) \\ f(x)-\dfrac{a}{x^2}=0,\ a\in(0;1)\,(2) & \\ f(x)-\dfrac{b}{x^2}=0,\ b\in\left(2;3\right) & (3) \\ f(x)-\dfrac{c}{x^2}=0,\ c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$

có 2 nghiệm phân biệt là $x=\alpha<0, x=\beta>3$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{x^2}(k>0)$ có $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2k}{x^3}$. Ta có:

Khi $x\in\left[\alpha;\beta\right]$ thì $g(x)<0$ nên các phương trình, và không có nghiệm $x\in\left[\alpha;\beta\right]$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\alpha^-} g(x)=-\dfrac{k}{\alpha^2}<0 \\ g'(x)<0,\forall x\in(-\infty;\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow$ Mỗi phương trình, và chỉ có đúng một nghiệm $x\in\left(-\infty;\alpha\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\beta^+} g(x)=-\dfrac{k}{\beta^2}<0 \\ g'(x)>0,\forall x\in(\beta;+\infty),\beta>3 \end{array}\right\}\Rightarrow$ Mỗi phương trình, và đều chỉ có đúng một nghiệm $x\in\left(\beta;+\infty\right)$

Suy ra mỗi phương trình,, và có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm.

Cách 3:

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 f(x)=0 & (1) \\ x^2 f(x)=a\in(0;1) & (2) \\ x^2 f(x)=b\in\left(2;3\right) & (3) \\ x^2 f(x)=c\in(3;4) & (4) \end{array}\right.$

Ta có có ba nghiệm phận biệt là $x=0, x=\alpha<0, x=\beta>3$.

Xét $g(x)=x^2 f(x)$ có $g'(x)=2xf(x)+x^2 f'(x)$

Với $x\in\left[\alpha;\beta\right]$ thì $g(x)=x^2 f(x)\le 0$ nên,, không có nghiệm $x\in\left[\alpha;\beta\right]$.

Với $x\in\left(-\infty;\alpha\right)$ ta có: $g'(x)<0$. Và với $x\in\left(\beta;+\infty\right)$, $\beta>3$, thì $g'(x)>0$ nên ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó các phương trình,, đều có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 43: Chọn B

$y=g(x)=f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)$ với $g(x)=\dfrac{1}{2021}$

Ta đặt: $t=\sqrt{4-x^2}, \forall x\in\left[-2;2\right]$ thì suy ra $y=g(t)=f\left(\left|t-\left|t^2-3\right|\right|\right), \forall t\in\left[0;2\right]$

Suy ra: $h(t)=t-\left|t^2-3\right|=\begin{cases} t^2+t-3, t\in\left[0;\sqrt{3}\right] \\ -t^2+t+3, t\in\left[\sqrt{3};2\right] \end{cases}$.

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:

t	0		$\sqrt{3}$		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1

Đặt $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ thì ta cũng có BBT của u như sau:

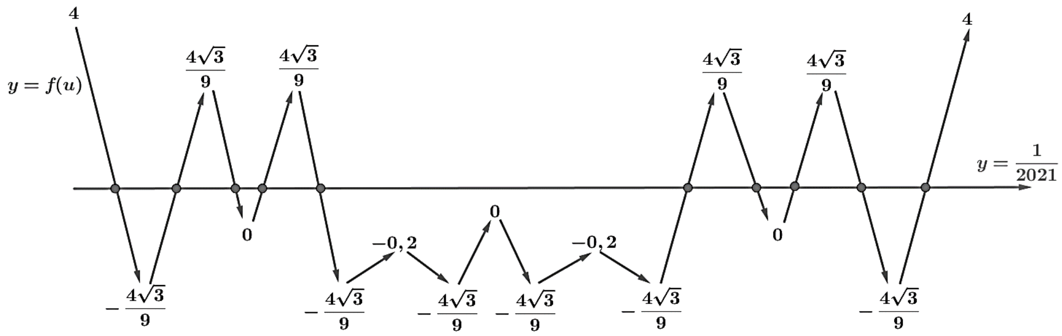
x	-2			0			2
t	0			2			0
$t-\left\|t^2-3\right\|$	-3		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		-3
$\left\|t-\left\|t^2-3\right\|\right\|$	3	0	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	3

Nhìn vào đồ thị $y=f(x)$ trên ta có được $\Rightarrow\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+cx, a\neq 0 \\ f(1)=f(2)=0, f''(1)=0 \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{2}{3}>0$

Như vậy ta suy ra $f(x)=\dfrac{2}{3}x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x=x_0$ nên suy ra $f\left(x_0\right)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}\Rightarrow x_0=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Như vậy: $f(3)=4, f\left(\sqrt{3}\right)=-0,2, f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{-4\sqrt{3}}{9}$

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y=f\left(u\right)$ với $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x)=\dfrac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Câu 44: Chọn B

Do hàm $y=f\left(x\right)$ là hàm bậc bốn, cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1<x_2<x_3<x_4$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$ nên đồ thị hàm $y=f\left(x\right)$ có dạng: $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$.

Ta có:

$$f'\left(x\right)=a\begin{bmatrix}\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)\\+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_4\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\end{bmatrix}$$

Khi đó: $\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}$.

Suy ra:

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)} = -\frac{1}{(x-x_1)^2}-\frac{1}{(x-x_2)^2}-\frac{1}{(x-x_3)^2}-\frac{1}{(x-x_4)^2}<0$$

$\forall x \ne x_i, i = 1,...,4$

$\Rightarrow y = f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Mà $y = 2021^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2 = 2021^x$ vô nghiệm.

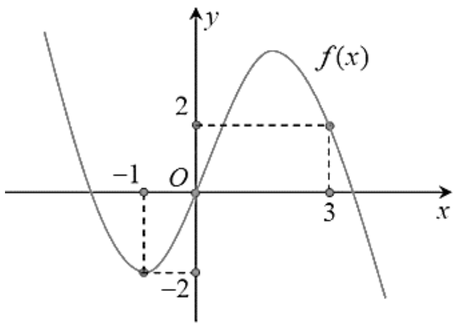
Câu 45: Chọn B

Ta có: $\dfrac{\left|x^2-3x\right|}{x^2-3x} f\left(x^2-2x\right) = -2 \quad (1)$.

Trường hợp 1: $x^2-3x>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

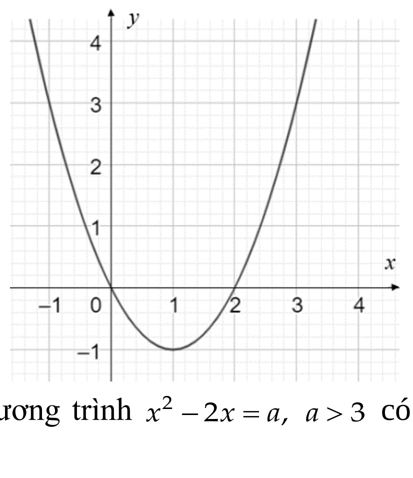
$(1) \Leftrightarrow f\left(x^2-2x\right) = -2 \quad (2)$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $d_1: y=-2$ và đồ thị $(C): y = f(x)$. Dựa vào hình vẽ:



$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=a,\ a>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=a,\ a>3 \end{array}\right.$. $\left(x=1 \notin (-\infty;0)\cup(3;+\infty)\right)$

Xét đồ thị hàm số $y=x^2-2x$:



Dựa vào đồ thị trên suy ra phương trình $x^2-2x=a,\ a>3$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<-1$ và $x_2>3$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm thõa mãn bài toán.

Trường hợp 2: $x^2-3x<0 \Leftrightarrow x \in (0;3)$.

$(1) \Leftrightarrow f\left(x^2-2x\right) = 2 \quad (3)$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $d_2: y=2$ và đồ thị $(C): y=f(x)$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ đã cho, suy ra:

$$(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=3\\x^2-2x=b,\, b<-1\\x^2-2x=c,\ 0<c<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\\x^2-2x=b,\, b<-1\\x^2-2x=c,\, 0<c<3\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ suy ra:

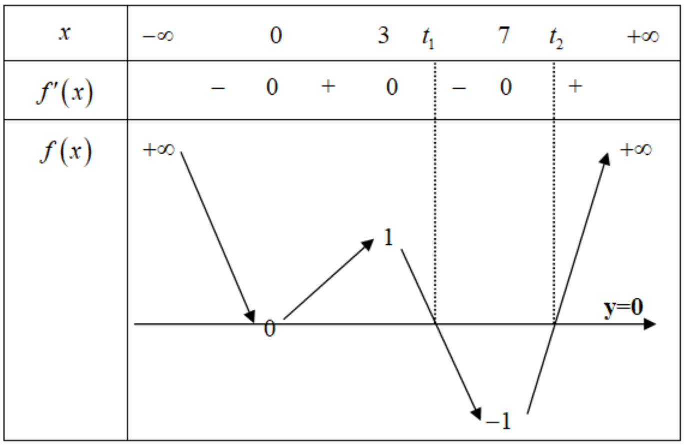
Khi $x^2-2x=b,\ b<-1$ vô nghiệm.

Khi $x^2-2x=c,\, 0<c<3$ có hai nghiệm phân biệt, chỉ có một nghiệm thõa mãn $x\in(0;3)$.

Vậy phương trình (1) có 1 nghiệm thõa mãn bài toán.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm thực.

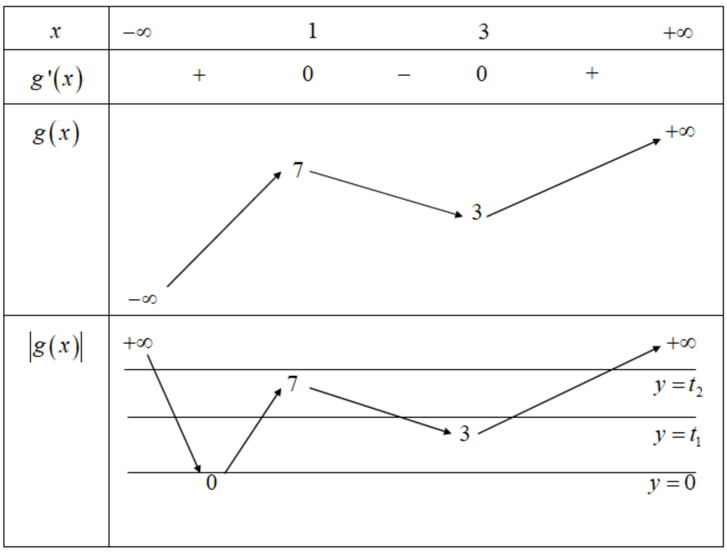
Câu 46: Chọn B



$$f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|x^3-6x^2+9x+3\right|=0\\\left|x^3-6x^2+9x+3\right|=t_1\in(3;7)\\\left|x^3-6x^2+9x+3\right|=t_2\in(7;+\infty)\end{array}\right.$$

Đặt $g(x)=x^3-6x^2+9x+3$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$; $g'(x)=3x^2-12x+9$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Vậy phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 47: Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$

Với điều kiện trên, phương trình trở thành

$$4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=|x+2|-x-m\ \ (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-4+|x+2|-x=m.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-4+|x+2|-x$ với tập xác định D. Ta có

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{x+2}{|x+2|}-1<0,\forall x\in D.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-2

Để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt. Từ bảng biến thiên suy ra tất cả các giá trị m cần tìm là $m\le -2$.

CHƯƠNG
1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 6 TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm

- Cho hàm số $y=f(x)(C)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(x_0;f(x_0))\in(C)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
- Trong đó x_0 được gọi là hoành độ tiếp điểm: $y_0=f(x_0)$ là tung độ tiếp điểm và $k=f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến. Điểm $A(x_0;y_0)$ được gọi là tiếp điểm.

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc

- Để viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)(C)$ khi biết hệ số góc là k :
- Giải phương trình $k=f'(x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_{01}\\x=x_{02}\\\dots\dots\dots\\x=x_i\end{array}\right.\Rightarrow y(x_i)\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến.
- **Chú ý:** Cho 2 đường thẳng $d_1:y=k_1x+b_1$ và $d_2:y=k_2x+b_2$
- Khi đó k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các đường thẳng d_1 và d_2.
  - Nếu $d_1//d_2\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=k_2\\b_1\neq b_2\end{cases}$
  - Nếu $d_1\perp d_2\Leftrightarrow k_1.k_2=-1$
  - Đường thẳng $d:y=kx+b$ tạo với trục hoành một góc α thì $k=\pm\tan\alpha$.

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến đi qua một điểm

- Cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến đi qua $B(\alpha;\beta)$
- Gọi $A(x_0;f(x_0))\in(C)$.
- Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm A của (C) là $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)(d)$.
- Mặt khác d đi qua $B(\alpha;\beta)$ nên $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ từ đó giải phương trình tìm x_0.

Dạng 4: Tiếp tuyến với bài toán tương giao

- Viết phương trình hoành độ giữa đồ thị hàm số $y=f(x)(C)$ và đường thẳng $d: y=ax+b$. Gọi $A(x_i;ax_i+b)$ là tọa độ giao điểm khi đó $k_i=f'(x_i)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

Dạng 6: Tìm điều kiện để 2 đồ thị tiếp xúc với nhau

- Cho 2 hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Đồ thị 2 hàm số trên tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$ và nghiệm của hệ phương trình này chính là hoành độ của tiếp điểm.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}(C)$ tại giao điểm của (C) với trục tung là:

A. $y=-3x-1$ **B.** $y=-3x-3$ **C.** $y=-3x$ **D.** $y=-3x+3$

✍ LỜI GIẢI

$(C)\cap Oy=A(0;-1)$. Lại có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(0)=-3$

Do vậy phương trình tiếp tuyến là: $y=-3x-1$.

CÂU 2. Cho hàm số $y=x^3+mx(C)$. Tìm giá trị của tham số *m* để khoảng cách từ gốc tọa độ *O* đến tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của (C) bằng $\sqrt{2}$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=-1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=-3 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=-2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=0 \end{array}\right.$

✍ LỜI GIẢI

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=1+m; f'(1)=3+m$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=(m+3)(x-1)+m+1(d)$

$d(O;d)=\dfrac{|-m-3+m+1|}{\sqrt{(m+3)^2+1}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow (m+3)^2+1=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

CÂU 3. Cho hàm số $y=x^4-2x^2-3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=24x-1$.

A. $y=24x-48$ **B.** $y=24x-21$ **C.** $y=24x-45$ **D.** $y=24x-43$

✍ LỜI GIẢI

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=24x-1$ suy ra $k_n=24$

Khi đó $y'=4x^3-4x=24\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=5$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y=24(x-2)+5=24x-43$.

CÂU 4. Gọi *d* là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3-4x^2+9x-11$. Đường thẳng *d* xđi qua điểm nào dưới đây?

A. $M\left(-5;\dfrac{2}{3}\right)$ **B.** $P\left(5;-\dfrac{2}{3}\right)$ **C.** $N\left(2;-\dfrac{5}{3}\right)$ **D.** $Q\left(-2;\dfrac{5}{3}\right)$

LỜI GIẢI

Ta có $y=\frac{2}{3}x^3-4x^2+9x-11 \longrightarrow y'=2x^2-8x+9, \forall x\in\mathbb{R}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại $M(x_0;y_0)$ là $k=y'(x_0)=2x_0^2-8x_0+9$.

Mặt khác $2x_0^2-8x_0+9=2(x_0^2-4x_0+4)+1=2(x_0-2)^2+1\ge 1 \Rightarrow k_{\min}=1$.

Dấu bằng xảy ra khi $(x_0-2)^2=0 \Leftrightarrow x_0=2 \Rightarrow y_0=-\frac{11}{3}$.

Vậy phương trình d là $y+\frac{11}{3}=x-2 \Leftrightarrow y=x-\frac{17}{3} \Rightarrow P\left(5;-\frac{2}{3}\right)\in d$.

CÂU 5. Cho đồ thị $(C): y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 15 **B.** 9 **C.** 16 **D.** 17

LỜI GIẢI

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;x_0^3-3x_0^2)$ có dạng: $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$

Do tiếp tuyến đi qua điểm $(0;b) \Rightarrow b=(3x_0^2-6x_0)(-x_0)+x_0^3-3x_0^2=-2x_0^3+3x_0^2$

Để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua $B(0;b)$ thì phương trình $b=-2x_0^3+3x_0^2$ có duy nhất một nghiệm. Xét hàm số $y=-2x^3+3x^2 \Rightarrow y'=-6x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=0 \\ x=1\Rightarrow y=1 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra PT có 1 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} b>1 \\ b<0 \end{array}\right.$

Vậy $b\in(-10;10)$ có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 6. Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+6x^2+2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để qua M có hai tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng các phần tử của S là

A. $\frac{20}{3}$ **B.** $\frac{13}{2}$ **C.** $\frac{12}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

LỜI GIẢI

Gọi $A(a;-a^3+6a^2+2)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là: $y=(-3a^2+12a)(x-a)-a^3+6a^2+2$

Do tiếp tuyến đi qua $M(m;2)$ nên $2=(-3a^2+12a)(x-a)-a^3+6a^2+2$

$\Leftrightarrow(-3a^2+12)(m-a)=a^3-6a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ (-3a+12)(m-a)=a^2-6a\,(*) \end{array}\right.$

$(*) \Leftrightarrow -3ma-12a+12m+3a^2=a^2-6a \Leftrightarrow g(a)=-2a^2+3(m+2)a-12m=0$

Để qua M có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) ta có 2 trường hợp.

Trường hợp 1: $g(a)=0$ có nghiệm kép khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0)=-12m\ne 0 \\ \Delta=9(m+2)^2-96m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3} \\ m=6 \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $g(a)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm bằng 0 (vô nghiệm)

Vậy $m=\frac{2}{3};m=6\Rightarrow\sum m=\frac{20}{3}$.

CÂU 7. Cho hàm số $y=x^3-12x+12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;-4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2;5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của tập S bằng

A. 7 **B.** 9 **C.** 3 **D.** 4

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(a;a^3-12a+12\right)\in(C)$, phương trình tiếp tuyến tại M là:

$y=\left(3a^2-12\right)(x-a)+a^3-12a+12$

Tiếp tuyến đi qua điểm $A(m;-4)$ khi $-4=\left(3a^2-12\right)(m-a)+a^3-12a+12$

$\Leftrightarrow a^3-12a+16+3(a-2)(a+2)(m-a)=0\Leftrightarrow(a-2)\left[(a+4)(a-2)+(3a+6)(m-a)\right]=0$

$\Leftrightarrow(a-2)\left(-2a^2+2a+3ma-6a-8+6m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ g(a)=-2a^2+(3m-4)a+6m-8=0\end{array}\right.$

Để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C) khi $g(a)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow\begin{cases}g(2)=-8+6m-8+6m-8\neq0\\ \Delta=(3m-4)^2+8(6m-8)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\frac{4}{3}\\ m<-4\end{array}\right.\\ m\neq2\end{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in(2;5)}m=3;4\Rightarrow\sum m=7$.

CÂU 8. Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x-1}(C)$. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $d:y=x+m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

LỜI GIẢI

Phương trình hoành độ giao điểm là: $\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow(x+m)(2x-1)=-x+1$ (Do $x=\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2+2x-m-1=0(*)$.

Ta có: $\Delta'=m^2+2m+2>0(\forall x\in\mathbb{R})\Rightarrow d$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (*) theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-1\\ x_1x_2=\frac{-m-1}{2}\end{cases}$

Khi đó $k_1+x_2=\frac{-1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1+x_2)^2-8x_1x_2-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$

$=-4m^2-8m-6=-4(m+1)^2-2\leq-2$.

Do đó k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=-1$.

CÂU 9. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm $A\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại *A* cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ (*M*, *N* khác *A*) thỏa mãn $y_1-y_2=6(x_1-x_2)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

LỜI GIẢI

Từ giả thiết ta được đường thẳng *MN* có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;6)$.

Suy ra hệ số góc của đường thẳng *MN* bằng 6.

Gọi $A(x_0;y_0)$ ta có: $f'(x_0)=6\Leftrightarrow x_0^3-7x_0=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Ta được các phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y=6x-\frac{117}{4}$, $y=6x+\frac{11}{4}$, $y=6x+2$.

Kiểm tra điều kiện cắt tại 3 điểm

Ta xét phương trình $\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2=6x+m\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2-6x=m(*)$.

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow x^3-7x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\\x=-2\end{array}\right.$. Ta được bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$\frac{11}{4}$	↘	$-\frac{117}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m=\frac{11}{4}$, $m=2$ thì phương trình (*) có ba nghiệm.

Vậy có hai điểm *A* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 10. Cho hàm số $y=f(x)(C)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(2-x)+f(x+1)=x^2+2x$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$ đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A. $(2;1)$ **B.** $\left(1;\frac{5}{3}\right)$ **C.** $\left(2;\frac{-2}{3}\right)$ **D.** $\left(1;\frac{13}{3}\right)$

LỜI GIẢI

Thay $x=0;x=1$ vào đề bài ta có: $\begin{cases}2f(2)+f(1)=0\\2f(1)+f(2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(2)=-1\\f(1)=2\end{cases}$

Đạo hàm 2 vế biểu thức: $2f(2-x)+f(x+1)=x^2+2x$ ta được: $-2f'(2-x)+f'(x+1)=2x+2(*)$

Thay $x=0;x=1$ vào (*) ta được: $\begin{cases}-2f'(2)+f'(1)=2\\-2f'(1)+f'(2)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(2)=-\dfrac{8}{3}\\f'(1)=\dfrac{-10}{3}\end{cases}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=2$ có phương trình là:

$y=-\dfrac{8}{3}(x-2)-1=\dfrac{-8}{3}x+\dfrac{13}{3}$

Do đó tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x-2$ đi qua điểm $\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C) và $I(-1;1)$. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) lần lượt tại $A;B$ sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó chu vi nhỏ nhất của tam giác IAB là

A. $2\sqrt{3}+4\sqrt{6}$. **B.** $4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}$ trong đó m là tham số khác 0. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để tại giao điểm của đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến sẽ vuông góc với đường thẳng $x+y-2020=0$. Khi đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng

A. $-\dfrac{6}{5}$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=2x^3+3ax^2+b$ có đồ thị (C). Gọi A,B lần lượt là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A,B có cùng hệ số góc bằng 6. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB bằng 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2a^2+(a+b)^2$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x-1)+\dfrac{f(x-1)}{x}=3x+2$ và $f(1)=6$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là.

A. $y=-9x+7$. **B.** $y=9x-7$. **C.** $y=9x+7$. **D.** $y=-9x-7$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, đồng thời thỏa mãn $[f(x)]^2+3f(x)=x+3$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=5x+4$. **B.** $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$. **C.** $y=-5x+9$. **D.** $y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{6}{5}$.

Câu 6: Gọi *S* là tập hợp các giá trị của tham số *m* sao cho parabol $(P): y = 4x^2 + (m-2)x - 3m$ cắt đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 + 3$ tại ba điểm phân biệt *A*, *B*, $C(3;30)$ mà tiếp tuyến với (C) tại *A* và tại *B* vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của *S*.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 7: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Điểm $M(a;b)$ với $a > 0$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại *M* là lớn nhất. Khi đó $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc trục *Oy*, có tung độ là số nguyên âm và thỏa mãn từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm cùng một phía của trục Ox?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 - 2mx + 16m - 7$ có đồ thị là (C_m). Gọi M là điểm cố định có tung độ nguyên của (C_m) và Δ là tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tính tổng các phần tử của S.

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{12}{7}$. **D.** $\dfrac{11}{7}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm nằm trên đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng OM, biết điểm M có tung độ dương.

A. $OM = \sqrt{34}$. **B.** $OM = \sqrt{5}$. **C.** $OM = 7$. **D.** $OM = 5$.

Câu 11: Tiếp tuyến bất kì của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x-1}{x+3}$ cùng với hai tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng

A. 35. **B.** 39. **C.** 32. **D.** 33.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(8x+1)]^2 + [f(1-x)]^5 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = \dfrac{1}{21}x - \dfrac{20}{21}$. **B.** $y = -\dfrac{1}{21}x - \dfrac{20}{21}$. **C.** $y = \dfrac{1}{21}x - \dfrac{15}{21}$. **D.** $y = -\dfrac{1}{21}x + \dfrac{20}{21}$.

Câu 13: Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+3) = g(x) + x^2 - 10x + 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(4) = f'(4) = 5$. Tiếp tuyến của hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A. $y = 13x - 4$. **B.** $y = -13x + 4$. **C.** $y = -13x - 4$. **D.** $y = 13x + 4$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình $f^2(2-x) = x - 1 - f^3(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi $(d): y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại $x = 1$. Khi đó $a+b$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 15: Cho đường cong $(C): y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3$. Có bao nhiêu đường thẳng d tiếp xúc (C) tại ít nhất hai điểm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2+(m^2+3)x-1$có đồ thị là. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị m sao cho tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của song song với đường thẳng $y=-5x-\sqrt{3}$. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** -2. **C.** $\frac{-7}{3}$. **D.** $\frac{-4}{3}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến với (C). tại A và B lần lượt có hệ số góc là k_1, k_2 thỏa mãn $201(k_1+k_2)+\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=2020k_1^{2020}.k_2^{2020}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử của S thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-10;0)$. **B.** $(1;10)$. **C.** $(11;20)$. **D.** $(21;30)$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C). Biết $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=2$ là

A. $y=-x+1$. **B.** $y=2x-2$. **C.** $y=-2x+2$. **D.** $y=4x+4$.

Câu 19: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x}$. Giả sử M có hoành độ $m, m>0$ thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung và hoành lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $S_{\Delta IAB}=12$ trong đó I là giao điểm của 2 đường tiệm cận. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8;25)$. **B.** $(-23;2)$. **C.** $(-6;9)$. **D.** $(15;27)$.

Câu 20: Cho hàm số đa thức $f(x)$ là hàm số chẵn. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hệ số góc nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Δ vuông góc với trục tung.

B. Δ qua O.

C. Δ song song với đường thẳng $y=x$.

D. Δ song song với đường thẳng $y=-x$.

Câu 21: Cho đồ thị (C_m) hàm số $y=\frac{x+m}{x+2}$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị (C_m) với trục Ox và Oy. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại A và B. Giá trị nhỏ nhất của $|k_1+k_2|$ là

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 22: Hàm số $y=\frac{x+7}{x-2}$ có đồ thị, gọi I là tâm đối xứng của. Đường thẳng $d: y=ax+b$ là tiếp tuyến của, biết d cắt 2 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của lần lượt tại M và N sao cho ΔIMN cân tại I. Khi đó b có giá trị bằng

A. $b=9$. **B.** $b=13$. **C.** $\left[\begin{array}{l} b=9 \\ b=-3 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} b=13 \\ b=-7 \end{array}\right.$.

Câu 23: Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng là một parabol thỏa mãn điều kiện $y'=2\sqrt{y}$ và $f(1)=0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có tung độ bằng 4 là

A. $y=-4x,\ y=-4x-8$. **B.** $y=4x,\ y=4x-8$.

C. $y=-4x,\ y=4x-8$. **D.** $y=4x,\ y=-4x-8$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết $f'(x)>-1; f(1)=3$ và $\left[f'(x)+1\right]^2=9x^2+9x.f(x)$. Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 4 của đồ thị (C) hàm số: $g(x)=f(x)+x$ là

A. $k=9$. **B.** 81. **C.** $k=54$. **D.** 27.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-6x^2+9x+m$ có đồ thị (C_m). Biết đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm A,B,C có hoành độ lần lượt là x_1,x_2,x_3 $(x_1<x_2<x_3)$, đồng thời tiếp tuyến tại A và C song song với nhau. Viết phương trình tiếp tuyến tại B.

A. $y=3x-6$. **B.** $y=3x-30$. **C.** $y=-3x+6$. **D.** $y=-3x+30$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ (C), gọi I là tâm đối xứng của đồ thị (C) và $M(a;b)$ là một điểm thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B. Để tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất thì tổng $|2a+b|$ gần nhất với số nào sau đây.

A. 0. **B.** 3. **C.** 5. **D.** -3.

Câu 27: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (H). Gọi M, N là 2 điểm thuộc (H) sao cho khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến tiếp tuyến tại M, N bằng 2. Khi đó x_M+x_N bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\frac{2x}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x)=f(f(x))$ tại điểm $x=3$.

A. $y=\frac{1}{8}x+\frac{9}{8}$. **B.** $y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$. **C.** $y=\frac{1}{16}x+\frac{21}{16}$. **D.** $y=\frac{1}{25}x+\frac{27}{25}$.

Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là. Giả sử tiếp tuyến của tại điểm có hoành độ $x=0$ là đường thẳng $y=x+1$. Khi đó: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{f\left(x\right)-3f\left(3x\right)+2f\left(2x\right)}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{-1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{-1}{3}$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=2$. Gọi d_1,d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)=xf\left(4x-6\right)$ tại $x=2$. Mệnh đề nào sau đây là điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng d_1,d_2 có tích hệ số góc bằng -2?

A. $\left|f\left(2\right)\right|\ge 4\sqrt{2}$. **B.** $-8\le f\left(2\right)\le 8$. **C.** $f\left(2\right)\ge 8$. **D.** $\left|f\left(2\right)\right|\ge 8$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(3x\right)+3f\left(1-3x\right)=9x^2+3x$. Gọi $\left(d\right): y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 0. Khi đó $a+3b$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+28$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho từ $M\left(m;-4\right)$ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới $\left(C\right)$. Số các phần tử của tập S là

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2f\left(2x-1\right)$ và $y=xf\left(2x-1\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng d_1, d_2 có hệ số góc lần lượt là 2020 và 2021. Giá trị của $f\left(1\right)$ bằng:

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 34: Cho hàm số $y=x^3-\sqrt{3}x$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tiếp tuyến của $\left(C\right)$tại điểm $x=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ và hai tiếp tuyến khác tại điểm A và B tạo thành tam giác đều. Biết tung độ tại 3 tiếp điểm đó đều không âm, khi đó tổng hoành độ của A và B thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(-2;-1\right)$.

Câu 35: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Trên đồ thị $\left(C\right)$ có bao nhiêu cặp điểm mà tiếp tuyến tại hai điểm đó song song với nhau đồng thời khoảng cách giữa cặp điểm đó bằng $4\sqrt{2}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Trên đồ thị có bao nhiêu điểm M mà khoảng cách từ $A\left(6;-4\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm M gấp hai lần khoảng cách từ điểm $B\left(5;1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm M?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 37: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-8}{3}$	$\searrow$	$\frac{-40}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

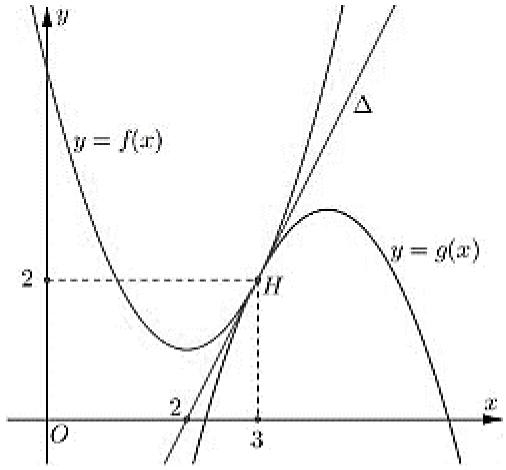
Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hỏi có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B thỏa mãn tam giác OAB vuông cân?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 5$ có đồ thị (S). Gọi A, B, C là các điểm phân biệt trên (S) có tiếp tuyến với (S) tại các điểm đó song song với nhau. Biết A, B, C cùng nằm trên một parabol (P) có đỉnh $I(-1; y_0)$. Tìm y_0.

A. 4. **B.** -4. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ sau. Biết đường thẳng Δ là tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tại điểm $H(2;3)$.



Đạo hàm của hàm số $h(x) = \sin\left(\pi f(x) g(x)\right) + \cos\left(\dfrac{\pi g(x)}{f(x)}\right)$ tại điểm $x_0 = 3$ bằng

A. 8π. **B.** 0. **C.** 4π. **D.** -8π.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(-\infty; a)$.

Đặt $g(x) = \begin{cases} (x-a).f'(x) & \text{khi } x \le a \\ mx & \text{khi } x > a \end{cases}$, với $m \ne 0$.

Biết rằng hàm số $y = g(x)$ có đạo hàm tại $x = a \in (-2;2)$ và tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)$ tại giao điểm của (C) và Oy có hệ số góc là $\sqrt{2}$. Khi đó m là giá trị nào sau đây

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 41: Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị là (C). Giả sử điểm $M(a;b)$ thuộc (C) mà từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến (C). Tính a^2+b^2

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -1.

Câu 42: Có bao nhiêu điểm M trên trục Ox mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số (C): $y=-x^3+3x+2$ sao cho có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\left[f(1+x)\right]^3+2f(1+2x)-21x-3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$

A. $y=3x+1$. **B.** $y=3x+2$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x-1$.

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^2(-x)=\left(x^2+2x+4\right)f(x+2)$ và $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-2x+4$. **B.** $y=2x+4$. **C.** $y=2x$. **D.** $y=4x+4$.

Câu 45: Cho $(P): y=\dfrac{x^2}{m^2}$ và $(H): y=\dfrac{m}{x}$ $(m\neq 0)$. Có bao nhiêu giá trị m để tiếp tuyến của (P) và (H) tại giao điểm của chúng tạo với nhau 1 góc 60^0?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 46: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Biết rằng từ điểm $A\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$ kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C). Gọi $k_1;k_2$ lần lượt là hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x_1;x_2(\neq 3)$ trong các tiếp tuyến trên. Gọi $E(x_1;k_1), F(x_2;k_2)$. Khi đó $d(O;EF)$ là

A. $\dfrac{9}{5}$. **B.** $\dfrac{9}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị (C). Trên (C) có những cặp điểm A, B phân biệt sao cho tiếp tuyến tại các điểm đó có cùng hệ số góc k và đường thẳng AB luôn có điểm chung với đường tròn $(T): (x-1)^2+y^2=2$. Gọi K là tập hợp các giá trị k nguyên thuộc đoạn $[-2021; 2021]$. Số phần tử của tập K là:

A. 2024. **B.** 2025. **C.** 2019. **D.** 4037.

Câu 48: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\left|2x^3-3x\right|$ vuông góc với trục tung?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=x^3-12x+9$ có đồ là thị là (C_1), hàm số $g(x)=m\sqrt{4-x^2}$ có đồ thị là (C_2) Số giá trị của tham số m để đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 50: Cho (C): $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P): $y=ax^2+bx-8$ $(a\neq 0)$. Từ điểm $A(4;1)$ kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của 2 tiếp tuyến đó. (P) có đỉnh I và cắt Ox tại 2 điểm $M(k_1;0)$ và $N(k_2;0)$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{25}{13}$. **C.** $\dfrac{161}{36}$. **D.** $\dfrac{19}{4}$.

Câu 51: Cho hàm số $y=x^3+\dfrac{3}{2}ax^2+b$ có đồ thị (C). Gọi M,N lần lượt là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M,N có cùng hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng MN bằng 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a^2+(a+2b)^2$ bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=x^2-4x+4m-m^2$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $g(x)=f(f(x))$ tiếp xúc với trục Ox.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là

A. $y=16x-44$. **B.** $y=16x+44$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=16x-20$.

Câu 54: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 55: Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ $(x_A\neq x_B)$ là 2 điểm trên (C) mà tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB=2\sqrt{2}$. Tích x_Ax_B bằng

A. -2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm M, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 57: Trên đường thẳng $d: y = 2x + 1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C): y = \dfrac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D. Vô số.**

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 tạo với hai trục Ox, Oy một tam giác có diện tích S bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 59: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ mà tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 60: Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A, B. Có bao nhiêu số nguyên dương m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB?

A. 4041. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.

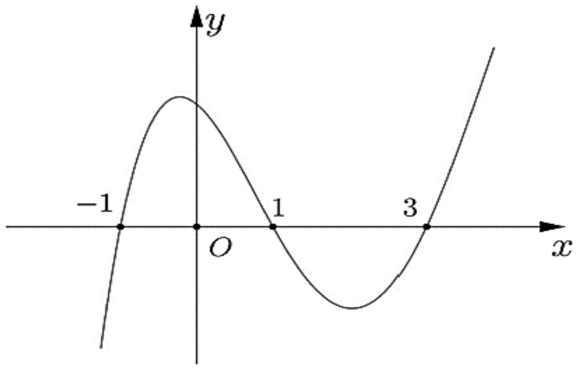
Câu 61: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục trung tại điểm $A(0;1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc bằng -3. Khi đó giá trị a, b thỏa mãn điều kiện sau:

A. $a + b = 3$. **B.** $a + b = 2$. **C.** $a + b = 1$. **D.** $a + b = 0$.

Câu 62: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1;m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C). Số phần tử của S là

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C), biết đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ



Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt lần lượt có hoành độ a, b. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $a, b < 3$. **B.** $a^2 + b^2 > 10$. **C.** $4 \ge a - b \ge -4$. **D.** $a, b \ge 0$.

Câu 64: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu số nguyên $b \in (-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 9 . **B.** 2 . **C.** 17 . **D.** 16 .

Câu 65: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) và điểm $A(1;m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Số phần tử của S là

A. 9 . **B.** 5 . **C.** 7 . **D.** 3 .

Câu 66: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả giá trị thực của k để đường thẳng $d: y = k(x+1) + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho các tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. Biết $M(-1;2)$, tính tích tất cả các phần tử của tập S.

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $-\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** -1.

Câu 67: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành.

A. 2019 . **B.** 2020 . **C.** 2017 . **D.** 2018 .

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

TCĐ: $x=-1$; TCN: $y=1$.

Suy ra $I(-1;1)$ là giao của 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

$M\in(C)\Rightarrow M(a;\dfrac{a-2}{a+1})$.

PTTT Δ của (C) tại M là: $y=\dfrac{3}{(a+1)^2}(x-a)+\dfrac{a-2}{a+1}$.

Δ giao với TCĐ tại điểm $A\left(-1;\dfrac{a-5}{a+1}\right)$, Δ giao với TCN tại điểm $B(2a+1;1)$.

Ta có: $IA=\sqrt{(-1+1)^2+\left(\dfrac{a-5}{a+1}-1\right)^2}=\left|\dfrac{a-5}{a+1}-1\right|=\left|\dfrac{-6}{a+1}\right|$.

$IB=\sqrt{(2a+1+1)^2+(1-1)^2}=2|a+1|$.

Do tam giác IAB vuông tại I nên $AB=\sqrt{IA^2+IB^2}$

Ta có chu vi tam giác IAB là

$IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\ge 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}\ge 2\sqrt{12}+\sqrt{24}=4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

Câu 2 : Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Đồ thị hàm số (C) có đường tiệm cận đứng là $x=-1$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a-2}{a+1}\right)\in(C),(a\ne-1)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y=y'(a)(x-a)+\frac{a-2}{a+1}=\frac{3x}{(a+1)^2}+\frac{a^2-4a-2}{(a+1)^2}\quad(\Delta)$$

Gọi A,B lần lượt là giao điểm của (Δ) với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C), I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Khi đó $A\left(-1;\dfrac{a-5}{a+1}\right),B(2a+1;1),I(-1;1)$.

Phương trình đường thẳng $IA: x=-1\Leftrightarrow x+1=0\Rightarrow d(O,IA)=1$.

Phương trình đường thẳng $IB: y=1\Leftrightarrow y-1=0\Rightarrow d(O,IB)=1$.

Vì $d(O;IA)=d(O;IB)=1$ nên O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IAB khi O nằm trong tam giác IAB và $d(O;AB)=1$.

Ta có: $d(O;AB)=1\Leftrightarrow d(O,\Delta)=1\Leftrightarrow\dfrac{|a^2-4a-2|}{\sqrt{9+(a+1)^4}}=1\Leftrightarrow|a^2-4a-2|=\sqrt{9+(a+1)^4}$

$\Leftrightarrow \left(a^2-4a-2\right)^2=9+\left(a+1\right)^4 \Leftrightarrow 12a^3-6a^2-12a+6=0$

$$\Leftrightarrow 6\left(a^2-1\right)\left(2a-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1\left(l\right). \\ a=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với $a=1 \Rightarrow M\left(1;-\dfrac{1}{2}\right), A\left(-1;-2\right), B\left(3;1\right) \Rightarrow O$ nằm trong tam giác $IAB \Rightarrow O$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔIAB.

Với $a=\dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};-1\right), A\left(-1;-3\right), B\left(2;1\right) \Rightarrow O$ nằm trong tam giác $IAB \Rightarrow$ O là tâmđường tròn nội tiếp ΔIAB. Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2: Điều kiện xác định: $x \neq -m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$\frac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(3m+1)x-m^2+m=0 \\ x+m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{m^2-m}{3m+1} \\ x\neq -m\end{cases} \quad (3m+1\neq 0)$$

Ta có: $x=\dfrac{m^2-m}{3m+1}\neq -m \Leftrightarrow m\neq 0$. Nên điều kiện $x\neq -m$ luôn thỏa mãn.

Vậy hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $x=\dfrac{m^2-m}{3m+1}$ $(3m+1\neq 0)$.

Ta có $y'=\dfrac{(3m+1)m-(-m^2+m)}{(x+m)^2}=\dfrac{4m^2}{(x+m)^2}$.

Vì tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của đồ thị với trục hoành vuông góc với đường thẳng $x+y-2020=0$ nên ta có

$$y'\left(\frac{m^2-m}{3m+1}\right).\left(-1\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{4m^2}{\left(\dfrac{m^2-m}{3m+1}+m\right)^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4m^2(3m+1)^2}{16m^4}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3m+1)^2}{4m^2}=1 \Leftrightarrow (3m+1)^2=4m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3m+1=2m \\ 3m+1=-2m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{6}{5}$.

Câu 3: Ta có $y'=6x^2+6ax$.

Do tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại A,B có cùng hệ số góc là 6 nên x_A, x_B là nghiệm phương trình $y'=6 \Leftrightarrow 6x^2+6ax=6 \Leftrightarrow x^2+ax-1=0$.

Ta lại có $y=\left(x^2+ax-1\right)\left(2x+a\right)+\left(2-a^2\right)x+a+b$. Khi đó, phương trình đường thẳng AB là $\left(2-a^2\right)x-y+a+b=0$.

Theo giả thiết $d\left(O;AB\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{\left|a+b\right|}{\sqrt{\left(2-a^2\right)^2+1}}=1\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2=\left(2-a^2\right)^2+1$

$\Leftrightarrow 2ab+b^2=a^4-5a^2+5$.

Từ ta có $P=2a^2+\left(a+b\right)^2=3a^2+2ab+b^2=a^4-2a^2+5=\left(a^2-1\right)^2+4\geq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=\pm1$. Vậy GTNN cần tìm là 4.

Câu 4: Ta có $f'\left(x-1\right)+\dfrac{f\left(x-1\right)}{x}=3x+2\Leftrightarrow f\left(x-1\right)+xf'\left(x-1\right)=3x^2+2x$.

$\Leftrightarrow\left(xf\left(x-1\right)\right)'=3x^2+2x\Leftrightarrow xf\left(x-1\right)=\int\left(3x^2+2x\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow xf\left(x-1\right)=x^3+x^2+C\ \left(*\right)$.

Thay $x=2$ vào $\left(*\right)$ ta được: $2f\left(1\right)=12+C\Leftrightarrow 2.6=12+C\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $xf\left(x-1\right)=x^3+x^2\Rightarrow f\left(x-1\right)=x^2+x=\left(x-1\right)^2+3\left(x-1\right)+2$.

$\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+3x+2\Rightarrow f'\left(x\right)=2x+3\Rightarrow f'\left(3\right)=9$ và $f\left(3\right)=20$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=3$ là $y=9\left(x-3\right)+20\Leftrightarrow y=9x-7$.

Câu 5: Thay $x=1$ vào đẳng thức $\left[f\left(x\right)\right]^2+3f\left(x\right)=x+3\ \left(1\right)$ ta được:

$\left[f\left(1\right)\right]^2+3f\left(1\right)=4\Leftrightarrow f\left(1\right)=1;f\left(1\right)=-4$.

Đạo hàm hai vế của $\left(1\right)$ ta được: $2f'\left(x\right).f\left(x\right)+3f'\left(x\right)=1\left(2\right)$.

Thay $x=1$ vào $\left(2\right)$: $2f'\left(1\right)f\left(1\right)+3f'\left(1\right)=1$.

Với $f\left(1\right)=1$ ta có: $2f'\left(1\right)+3f'\left(1\right)=1\Leftrightarrow f'\left(1\right)=\dfrac{1}{5}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm $\left(1;1\right)$ có hệ số góc $k=f'\left(1\right)=\dfrac{1}{5}$ là $y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$.

Câu 6: Phương trình hoành độ giao điểm là: $2x^3-3x^2+3=4x^2+\left(m-2\right)x-3m$

$\Leftrightarrow 2x^3-7x^2+2x-mx+3+3m=0\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(2x^2-x-1\right)-m\left(x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(2x^2-x-1-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow y=30\\ g\left(x\right)=2x^2-x-1-m=0\end{array}\right.$

Để d cắt $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt thì phương trình $g\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm khác 3 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=1+8\left(1+m\right)>0\\ g\left(3\right)=14-m\neq 0\end{cases}$

Gọi $A\left(x_1;2x_1^3-3x_1^2+3\right)$ và $B\left(x_2;2x_2^3-3x_2^2+3\right)$ theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{-1-m}{2} \end{cases}$

Để tiếp tuyến tại A và B của (C) vuông góc với nhau thì $y'(x_1).y'(x_2)=-1$

$\Leftrightarrow \left(6x_1^2-6x_1\right)\left(6x_2^2-6x_2\right)=-1 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1-1)(x_2-1)=-\dfrac{1}{36}$

$\Leftrightarrow x_1x_2(x_1x_2-x_1-x_2+1)=-\dfrac{1}{36} \Leftrightarrow \dfrac{-1-m}{2}\left(\dfrac{-1-m}{2}-\dfrac{1}{2}+1\right)=-\dfrac{1}{36}$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2+2m+1}{4}-\dfrac{1+m}{4}=-\dfrac{1}{36} \Leftrightarrow m^2+m+\dfrac{1}{9}=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{6}\left(t/m(*)\right)$

Suy ra tổng các phần tử của S bằng -1.

Câu 7: Gọi $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$. Khi đó tiếp tuyến tại M có phương trình:

$\Delta: y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+2-\dfrac{3}{x_0+1} \Leftrightarrow 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$.

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến Δ là:

$$d=\frac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}.(x_0+1)^2}=6$. Khi đó $d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{3} \\ x_0=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Do điểm M có hoành độ dương nên $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$. Khi đó $a+b=1$.

Câu 8: $y=\dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow y=1+\dfrac{3}{x-1}$. Gọi $M(0;m)\in Oy,\ (m<0)$.

Gọi tiếp tuyến của (C) đi qua M là đường thẳng $d: y=kx+m$.

Yêu cầu của đề bài, điều kiện là hệ phương trình $\begin{cases} kx+m=1+\dfrac{3}{x-1} & (1) \\ k=\dfrac{-3}{(x-1)^2} & (2) \end{cases}$.

có 2 nghiệm $x_1,\ x_2\ne 1$ và thỏa mãn $\begin{cases} y(x_1)<0 \\ y(x_2)<0 \end{cases}$.

Xét điều kiện $\begin{cases} y(x_1)<0 \\ y(x_2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{3}{x_1-1}<0 \\ 1+\dfrac{3}{x_2-1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x_1-1}<-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x_2-1}<-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Từ và suy ra $\dfrac{-3x}{(x-1)^2}+m=1+\dfrac{3}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{6}{x-1}+1-m=0$.

Đặt $\dfrac{1}{x-1}=t \ (t \neq 0)$, phương trình trở thành $3t^2+6t+1-m=0$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình có 2 nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn: $t_1<t_2<-\dfrac{1}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ a.f\left(-\dfrac{1}{3}\right)>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 3.f\left(-\dfrac{1}{3}\right)>0 \\ -1<-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-3(1-m)>0 \\ m<-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m<-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<-\dfrac{2}{3}.$$

Do m nguyên âm nên $m=-1$.

Câu 9: Ta thấy điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của $(C_m) \Leftrightarrow y_0=f(x_0)$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y_0=x_0^3-3mx_0^2-2mx_0+16m-7$, $\forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m\left(-3x_0^2-2x_0+16\right)+x_0^3-y_0-7=0$, $\forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_0^2-2x_0+16=0 \\ x_0^3-y_0-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=\dfrac{-8}{3} \end{array}\right. \\ y_0=x_0^3-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \end{cases}.$$

Lại có $y'=f'(x)=3x^2-6mx-2m \Rightarrow f'(2)=12-14m$.

Ta có phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại điểm $M(2;1)$ là $y=f'(2)(x-2)+1$

Hay $y=(12-14m)x+28m-23 \ (\Delta)$.

Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân thì Δ sẽ song song với đường thẳng $y=x$ hoặc

$$y=-x \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 12-14m=1 \\ 12-14m=-1 \end{array}\right. \\ 28m-23 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{11}{14} \\ m=\dfrac{13}{14} \end{array}\right..$$

Suy ra tập $S=\left\{\dfrac{11}{14};\dfrac{13}{14}\right\}$ và tổng các phần tử của S là $\dfrac{12}{7}$.

Câu 10: Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0+1}{x_0-2}\right)$ là điểm thuộc đồ thị (C).

Vì $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$ nên tiếp tuyến d tại M có hệ số góc là $k=f'(x_0)=\dfrac{-3}{(x_0-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến d là $y=\dfrac{-3}{\left(x_0-2\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+1}{x_0-2}$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-3x}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{3x_0}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{\left(x_0-2\right)\left(x_0+1\right)}{\left(x_0-2\right)^2}\Leftrightarrow y=\dfrac{-3x}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{\left(x_0-2\right)^2}$.

Khi đó $d\cap Ox=A\left(\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{3};0\right)$; $d\cap Oy=B\left(0;\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{\left(x_0-2\right)^2}\right)$.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB khi và chỉ khi I là trung điểm AB hay $I\left(\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{6};\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2\left(x_0-2\right)^2}\right)$.

Vì $I\in\Delta$ nên $\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2}-\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2\left(x_0-2\right)^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2+2x_0-2}{2\left(x_0-2\right)^2}.\left[\left(x_0-2\right)^2-1\right]=0$.

Vì các điểm d không đi qua O nên $x_0^2+2x_0-2\neq 0$. Suy ra $\left(x_0-2\right)^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=1\end{array}\right.$.

Kết hợp M có tung độ dương ta được $M\left(3;4\right)$. Vậy $OM=\sqrt{9+16}=5$.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-1}{x+3}$ $\left(C\right)$ có hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x=-3, y=5,$ giao điểm của hai đường tiệp cận là $I\left(-3;5\right)$.

Lấy $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}\left(x_0\neq -3\right)$

Phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm M là $y=\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(x-x_0\right)+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}$ $\left(d\right)$

Cho $x=-3\Rightarrow y=\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(-3-x_0\right)+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}=\dfrac{-16}{x_0+3}+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}=\dfrac{5x_0-17}{x_0+3}$

Suy ra giao điểm của $\left(d\right)$ và TCĐ của $\left(C\right)$ là $A\left(-3;\dfrac{5x_0-17}{x_0+3}\right)\Rightarrow IA=\left|\dfrac{5x_0-17}{x_0+3}-5\right|=\left|\dfrac{32}{x_0+3}\right|$

Cho $y=5\Rightarrow 5=\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(x-x_0\right)+\dfrac{5x_0-1}{x_0+3}\Leftrightarrow\dfrac{16}{\left(x_0+3\right)^2}\cdot\left(x-x_0\right)=\dfrac{16}{x_0+3}$

$\Rightarrow x-x_0=x_0+3\Leftrightarrow x=2x_0+3$

Suy ra giao điểm của $\left(d\right)$ và TCN của $\left(C\right)$ là $B\left(2x_0+3;5\right)\Rightarrow IB=\left|2x_0+3+3\right|=\left|2x_0+6\right|$

Diện tích tam giác cần tìm là $S=\dfrac{1}{2}.IA.IB=\dfrac{1}{2}.\left|2x_0+6\right|.\left|\dfrac{32}{x_0+3}\right|=32$.

Câu 12: Từ $\left[f\left(8x+1\right)\right]^2+\left[f\left(1-x\right)\right]^5=x$, cho $x=0$ ta có $\left[f\left(1\right)\right]^2+\left[f\left(1\right)\right]^5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(1\right)=0\\f\left(1\right)=-1\end{array}\right.$

Đạo hàm hai vế của ta được $2.8.f\left(8x+1\right).f'\left(8x+1\right)-5\left[f\left(1-x\right)\right]^4.f'\left(1-x\right)=1$.

Cho $x=0$ ta được $16f(1).f'(1)-5.\left[f(1)\right]^4.f'(1)=1 \Leftrightarrow f(1).f'(1).\left[16-5\left(f(1)\right)^3\right]=1$.

Nếu $f(1)=0$ thì vô lý, do đó $f(1)=-1$, khi đó trở thành

$-f'(1).\left[16+5\right]=1 \Leftrightarrow f'(1)=-\dfrac{1}{21}$. Vậy tọa độ tiếp điểm là $A(1;-1)$ và hệ số góc $k=-\dfrac{1}{21}$

Phương trình tiếp tuyến $y=-\dfrac{1}{21}(x-1)-1 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{21}x-\dfrac{20}{21}$.

Câu 13: Ta có $f(x+3)=g(x)+x^2-10x+5 \Rightarrow f'(x+3)=g'(x)+2x-10$.

ta chọn $x=1$

$\Rightarrow \begin{cases} f'(4)=g'(1)+2.1-10 \\ f(4)=g(1)+1^2-10.1+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(1)=f'(4)+8=5+8=13 \\ g(1)=f(4)+10-5-1=9 \end{cases}$.

Từ đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại $x=1$ là $y=g'(1).(x-1)+g(1)=13(x-1)+9=13x-4$

Câu 14: Gọi $M(1;f(1))\in(C)$ khi đó hoành độ của M thỏa mãn phương trình

$f^2(2-x)=x-1-f^3(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Thay hoành độ M vào ta được $f^2(1)=-f^3(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)=-1 \end{array}\right.$.

Đạo hàm hai vế của ta được $-2f(2-x)f'(2-x)=1-3f^2(x).f'(x)$.

Thay $x=1$ ta được $-2f(1)f'(1)=1-3f^2(1).f'(1)$.

Nhận thấy $f(1)=0$ không thỏa mãn suy ra $f(1)=-1$. Thay $f(1)=-1$ vào ta được

$2f'(1)=1-3.f'(1) \Leftrightarrow 5f'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)=\dfrac{1}{5}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y=\dfrac{1}{5}(x-1)-1$ hay $y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{6}{5}$.

Suy ra $a+b=-1$.

Câu 15: Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3$ có đạo hàm $y'=x^3+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Do đường thẳng d tiếp xúc với (C) tại 2 điểm có hoành độ a,b, ở đó $a\neq b$, nên có hệ số góc là

k và thỏa mãn $\begin{cases} \dfrac{y(a)-y(b)}{a-b}=y'(a)(1) \\ \dfrac{y(a)-y(b)}{a-b}=y'(b)(2) \end{cases}$

Lấy - và rút gọn cả 2 vế cho $a-b$ ta được

$a^2+b^2+ab+a+b=0$ hay $(a+b)^2+(a+b)=ab$

Lấy + ta được $\dfrac{1}{2}\left(a^3+b^3+a^2b+ab^2\right)+\dfrac{2}{3}\left(a^2+b^2-ab\right)=a^3+b^3+a^2+b^2$

Hay $\dfrac{(a+b)^3}{2}-2ab(a+b)+\dfrac{1}{3}(a+b)^2-\dfrac{4}{3}ab=0$

Thế vào được $-\frac{3}{2}(a+b)^3 - -\frac{4}{3}(a+b) = 0$

Từ suy ra $a+b=0$ hoặc $a+b=-\frac{2}{3}$ hoặc $a+b=-\frac{4}{3}$.

Với $a+b=0$, kết hợp với suy ra $a=b=0$.

Với $a+b=-\frac{2}{3}$, kết hợp với suy ra mâu thuẫn.

Với $a+b=-\frac{4}{3}$, kết hợp với suy ra $a=b=-\frac{2}{3}$.

Vậy không tồn tại tiếp tuyến d tiếp xúc (C) tại ít nhất 2 điểm.

Câu 16: Ta có $y' = x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 3$

$= x^2 - 2(2m+1)x + (2m+1)^2 - (2m+1)^2 + m^2 + 3$

$= (x-2m-1)^2 - 3m^2 - 4m + 2 \ge -3m^2 - 4m + 2$

Vì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của song song với đường thẳng $y = -5x - \sqrt{3}$

nên ta có $-3m^2 - 4m + 2 = -5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-7}{3} \end{array}\right.$. Vậy tổng phần tử của S là $\frac{-4}{3}$.

Câu 17: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Gọi hoành độ của A và B lần lượt là x_1, x_2. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$\frac{3x+2}{x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-2)x + m - 2 = 0 \, (*) \\ x \ne -1 \end{cases}$.

Để đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 + (m-2)(-1) + m - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - 4(m-2) > 0 \\ 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2>4 \\ m-2<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<2 \end{array}\right.$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2-m \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$. Có $k_1 = \frac{1}{(x_1+1)^2}$, $k_2 = \frac{1}{(x_2+1)^2}$ nên:

$k_1 k_2 = \frac{1}{(x_1+1)^2} \cdot \frac{1}{(x_2+1)^2} = \frac{1}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2} = \frac{1}{(m-2+2-m+1)^2} = 1$

và $k_1 + k_2 = \frac{1}{(x_1+1)^2} + \frac{1}{(x_2+1)^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 2}{(x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2}$

$= (2-m)^2 - 2(m-2) + 2(2-m) + 2 = m^2 - 8m + 14$.

Có $201(k_1+k_2) + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2020 k_1^{2020} . k_2^{2020} \Leftrightarrow 201(k_1+k_2) + \frac{k_1+k_2}{k_1k_2} = 2020(k_1k_2)^{2020}$

$\Leftrightarrow 201\left(k_1+k_2\right)+k_1+k_2=2020 \quad \Leftrightarrow 202\left(k_1+k_2\right)=2020 \quad \Leftrightarrow k_1+k_2=10 \quad \Leftrightarrow m^2-8m+14=10$

$\Leftrightarrow m^2-8m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4+2\sqrt{3}\,(tm) \\ m=4-2\sqrt{3}\,(tm) \end{array}\right.$. Vậy $S=\left\{4+2\sqrt{3};4-2\sqrt{3}\right\}$.

Câu 18: Đặt $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow x=\dfrac{t}{t-1}$

Khi đó: $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ trở thành:

$f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f\left(\dfrac{t-1}{t}\right)=1-\dfrac{2(t-1)}{t}+\dfrac{3(t-1)^2}{t^2} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f\left(\dfrac{t-1}{t}\right)=2-\dfrac{4}{t}+\dfrac{3}{t^2}$

Ta có hệ: $\begin{cases} f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2} \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2} \end{cases} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f(x)=x^2$

Thử lại ta thấy $f(x)=x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa đề.

Vậy $f'(x)=2x$. Khi đó: $f(2)=4,\ f'(2)=4$, nên phương trình tiếp tuyến tại $x=2$ là $y=4x+4$

Câu 19: Giả sử điểm M có hoành độ là $m>0$, vì $M\in(C)$ nên $M\left(m;\dfrac{m+1}{m}\right)$.

Ta có: $f'(m)=\dfrac{-1}{m^2}$.

Từ đó ta có phương trình tiếp tuyến tại điểm M có dạng:

$y=f'(m)(x-m)+f(m) \Rightarrow y=\dfrac{-1}{m^2}(x-m)+1+\dfrac{1}{m}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M cắt trục tung tại điểm $B\left(0;1+\dfrac{2}{m}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M cắt trục hoành tại điểm $A\left(m^2+2m;\,0\right)$.

Mặt khác ta có giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(0;1)$.

Theo đề ta có $S_{\Delta IAB}=12$. Suy ra $\dfrac{1}{2}d(I,AB).AB=12 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(I,AB).\left|\overrightarrow{AB}\right|=12 \quad (1)$.

Trong đó $d(I,AB)=\dfrac{\left|-1+\dfrac{m}{m^2}+\dfrac{m+1}{m}\right|}{\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{-1}{m^2}\right)^2}}=\dfrac{2|m|}{\sqrt{m^4+1}}$.

Và $\overrightarrow{AB}=\left(-\left(m^2+2m\right);\dfrac{m+2}{m}\right)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left[-\left(m^2+2m\right)\right]^2+\left(\dfrac{m+2}{m}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{m^4(m+2)^2+(m+2)^2}{m^2}}=\sqrt{m^4+1}.\left|\dfrac{m+2}{m}\right|$

Thay vào (1) ta được $\frac{1}{2}.\sqrt{m^4+1}.\left|\frac{m+2}{m}\right|.\frac{2|m|}{\sqrt{m^4+1}}=12 \Leftrightarrow |m+2|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-14 \end{array}\right.$.

Vì $m>0$ nên $m=10$.

Câu 20: Theo giả thiết ta có $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{2i}+a$, trong đó a, a_i là các hệ số thực.

Khi đó $f'(x)=\sum_{i=1}^{n} 2ia_i x^{2i-1}, f''(x)=\sum_{i=2}^{n} 2i(2i-1)a_i x^{2i-2}+2a_1$.

Xét hàm số $g(x)=f'(x)$ có đồ thị là (C). Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của Δ và (C).

Khi đó Δ có hệ số góc là $f''(x_0)=\sum_{i=2}^{n} 2i(2i-1)a_i x_0^{2i-2}+2a_1 \geq 2a_1, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Do đó Δ tiếp xúc với (C) tại điểm $M(0;f'(0))$, với $f'(0)=0$. Hay Δ qua O.

Câu 21: Ta có $y'=\frac{2-m}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$.

Do A là giao điểm của (C_m) và trục Ox nên tọa độ điểm $A(-m;0)$.

Hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại A là $k_1=y'(-m)=\frac{2-m}{(-m+2)^2}=\frac{1}{2-m}, (m\neq 2)$.

Hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại B là $k_2=y'(0)=\frac{2-m}{(0+2)^2}=\frac{2-m}{4}$.

Khi đó, $|k_1+k_2|=\left|\frac{1}{2-m}+\frac{2-m}{4}\right|=\left|\frac{1}{2-m}\right|+\left|\frac{2-m}{4}\right|\geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\left|\frac{1}{2-m}\right|=\left|\frac{2-m}{4}\right| \Leftrightarrow (2-m)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Vậy $|k_1+k_2|_{\min}=1$.

Câu 22: TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ta có: $y'=-\frac{9}{(x-2)^2}<0;\forall \in D$. Gọi $M_o(x_o;y_o)$ là tiếp điểm, suy ra $a=-\frac{9}{(x_o-2)^2}<0$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} a\neq 0 \\ 2a+b\neq 1 \end{cases}$. TCĐ của: $x=2 \Rightarrow M(2;2a+b)$

TCN của: $y=1 \Rightarrow N\left(\frac{1-b}{a};1\right)$. Tâm đối xứng của: $I(2;1)$

Vì ΔIMN cân tại I nên ta có: $IM=IN \Leftrightarrow |2a+b-1|=\left|2-\frac{1-b}{a}\right| \Leftrightarrow \left|a\left(2+\frac{b-1}{a}\right)\right|=\left|2+\frac{b-1}{a}\right|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\left(2+\frac{b-1}{a}\right)=2+\frac{b-1}{a} \\ a\left(2+\frac{b-1}{a}\right)=-\left(2+\frac{b-1}{a}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow a=-1$$

Với $a=-1\Rightarrow -\dfrac{9}{\left(x_o-2\right)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_o=5\\x_o=-1\end{array}\right.$

Với $x_o=5\Rightarrow y_o=4\Rightarrow d:y=-x+9\Rightarrow b=9$

Với $x_o=-1\Rightarrow y_o=-2\Rightarrow d:y=-x-3\Rightarrow b=-3$. Vậy $\left[\begin{array}{l}b=9\\b=-3\end{array}\right.$.

Câu 23: Nhận thấy $y=0$ là một nghiệm của phương trình $y'=2\sqrt{y}\Rightarrow$ loại vì đồ thị có dạng là mộ parabol.

$y'=2\sqrt{y}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\Rightarrow\dfrac{dy}{2\sqrt{y}}=dx\Rightarrow\sqrt{y}=x+C\Rightarrow y=\left(x+C\right)^2$

Thử lại ta được nghiệm $y=\left(x+C\right)^2$.

Mà $f\left(1\right)=0$ nên $C=-1$.

Ta có $y=f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$, $y'=2\left(x-1\right)$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

Theo đề bài, ta có $\left(x_0-1\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0-1=2\\x_0-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.$

Khi $x_0=3$ phương trình tiếp tuyến là $y=4\left(x-3\right)+4=4x-8$.

Khi $x_0=-1$ phương trình tiếp tuyến là $y=-4\left(x+1\right)+4=-4x$.

Câu 24: Ta có: $g\left(x\right)=f\left(x\right)+x\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+1$ và $g\left(1\right)=f\left(1\right)+1=4$.

Khi đó: $\left[f'\left(x\right)+1\right]^2=9x^2+9x.f\left(x\right)\Leftrightarrow\left[g'\left(x\right)\right]^2=9x.g\left(x\right)\ \ (1)$

Do $f'\left(x\right)>-1$ nên $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+1>0$.

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow g'\left(x\right)=3\sqrt{x}.\sqrt{g\left(x\right)}\Leftrightarrow\frac{g'\left(x\right)}{\sqrt{g\left(x\right)}}=3\sqrt{x}\Rightarrow\int\frac{g'\left(x\right)}{\sqrt{g\left(x\right)}}dx=\int3\sqrt{x}dx\Leftrightarrow2\sqrt{g\left(x\right)}=2x^{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}\ \ (2)$$

Với $x=1$: $(2)\Leftrightarrow2\sqrt{g\left(1\right)}=2+\mathrm{C}\Leftrightarrow4=2+\mathrm{C}\Leftrightarrow\mathrm{C}=2$.

Khi đó: $2\sqrt{g\left(x\right)}=2x^{\frac{3}{2}}+2\Leftrightarrow\sqrt{g\left(x\right)}=x^{\frac{3}{2}}+1\Leftrightarrow g\left(x\right)=\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)^2$.

Vậy, hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 4: $k=g'\left(4\right)=54$.

Câu 25: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^2-12x+9;y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3.\end{array}\right.$

Đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi

$$y_{C§}.y_{CT}<0\Leftrightarrow f(1).f(3)<0\Leftrightarrow(m+4).m<0\Leftrightarrow-4<m<0$$

Vì tiếp tuyến tại A và C song song với nhau nên

$f'(x_1)=f'(x_3)\Leftrightarrow3x_1^2-12x_1+9=3x_3^2-12x_3+9\Leftrightarrow(x_1-x_3)(x_1+x_3-4)=0\Leftrightarrow x_1+x_3=4$.

Vì $x_1+x_2+x_3=6$ nên $x_2=2$.

Vì $f(2)=0$ nên $2+m=0$ hay $m=-2$).

Vì $f'(2)=-3$ nên phương trình tiếp tuyến tại $B(2;0)$ là $y=-3(x-2)$ hay $y=-3x+6$.

Câu 26: Vì I là tâm đối xứng của đồ thị (C) nên $I(-1;2)$.

Ta có $y'_{(x)}=\dfrac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y'_{(a)}=\dfrac{1}{(a+1)^2}$.

Vì $M(a;b)\in(C)\Rightarrow M\left(a;\dfrac{2a+1}{a+1}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là đường thẳng $\Delta: y=\dfrac{1}{(a+1)^2}.(x-a)+\dfrac{2a+1}{a+1}$.

Đường thẳng Δ cắt tiệm cận đứng tại $A\left(-1;\dfrac{2a}{a+1}\right)$.

Đường thẳng Δ cắt tiệm cận ngang tại $B(2a+1;2)$.

Suy ra $IA=\dfrac{2}{|a+1|};IB=2|a+1|$ và chu vi tam giác IAB là $C_{\Delta IAB}=IA+IB+AB$.

Ta có $C_{\Delta IAB}=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\ge 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=2\sqrt{4}+\sqrt{2.4}=4+2\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $IA=IB\Leftrightarrow 1=(a+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(0;1)\\M(-2;3)\end{array}\right.$.

Vậy $|2a+b|=1$.

Câu 27: Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc (H). $y'(x_0)=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}$; $y(x_0)=\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$.

Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M là $y=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_0+1)^2}x-y+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{(x_0+1)^2}=0$.

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến bằng 2, tức là

$$\frac{\left|\dfrac{-2}{(x_0+1)^2}-1+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{(x_0+1)^2}\right|}{\sqrt{\dfrac{4}{(x_0+1)^4}+1}}=2\Leftrightarrow |4(x_0+1)|=2\sqrt{4+(x_0+1)^4}$$

$\Leftrightarrow 4(x_0+1)^4-16(x_0+1)^2+16=0\Leftrightarrow (x_0+1)^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\sqrt{2}-1\\x_0=-\sqrt{2}-1\end{array}\right.$.

Vậy $x_M=\sqrt{2}-1$; $x_N=-\sqrt{2}-1\Rightarrow x_M+x_N=-2$.

Câu 28: Có $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $g(3)=f(f(3))=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{6}{5}$.

$g'(x)=f'(f(x)).f'(x)\Rightarrow g'(3)=f'(f(3)).f'(3)=f'\left(\dfrac{3}{2}\right).f'(3)=\dfrac{8}{25}.\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{25}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm $x=3$ là

$y=\frac{1}{25}(x-3)+\frac{6}{5}$ hay $y=\frac{1}{25}x+\frac{27}{25}$.

Câu 29: Ta có được $f(0)=f'(0)=1$. Khi đó:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f(x)-f(0)-3f(3x)+3f(0)+2f(2x)-f(0)}=$$

$$=\frac{2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-9.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)}{3x}+4.\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}}=\frac{2}{1-9+4}=\frac{-1}{2}$$

Câu 30: Ta có $g'(x)=f(4x-6)+4xf'(4x-6)$.

Hệ số góc của d_1 là $k_1=f'(2)$; của d_2 là $k_2=f(2)+8f'(2)$

Theo yêu cầu bài toán ta có

$k_1k_2=-2\Leftrightarrow f'(2)\left[f(2)+8f'(2)\right]=-2\Leftrightarrow 8\left[f'(2)\right]^2+f(2).f'(2)+2=0$

Để tồn tại $f'(2)$ thì $\left[f(2)\right]^2-64\ge 0\Leftrightarrow |f(2)|\ge 8$

Câu 31: Từ đẳng thức $f(3x)+3f(1-3x)=9x^2+3x$, với $x=0$ và $x=\frac{1}{3}$ ta có $\begin{cases}f(0)+3f(1)=0\\f(1)+3f(0)=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=\frac{3}{4}\\f(1)=-\frac{1}{4}\end{cases}$.

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức ta được $3f'(3x)-9f'(1-3x)=18x+3(*)$.

Thay $x=0$ và $x=\frac{1}{3}$ vào ta được $\begin{cases}3f'(0)-9f'(1)=3\\3f'(1)-9f'(0)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(0)-3f'(1)=1\\3f'(0)-f'(1)=-3\end{cases}\begin{cases}f'(0)=-\frac{5}{4}\\f'(1)=-\frac{3}{4}\end{cases}$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 0 là

$y=f'(0)(x-0)+f(0)\Leftrightarrow y=-\frac{5}{4}(x-0)+\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$. Khi đó $a+3b=-\frac{5}{4}+3.\frac{3}{4}=1$.

Câu 32: Đường thẳng d đi qua điểm $M(m;-4)$ và có hệ số góc k có phương trình là: $y=k(x-m)-4$

Từ M kẻ được đúng một tiếp tuyến với đồ thị (C) khi hệ phương trình

$\begin{cases}x^3-6x^2+28=k(x-m)-4 & (1)\\3x^2-12x=k & (2)\end{cases}$ có đúng 1 nghiệm.

Thế vào ta được:

$x^3-6x^2+28=(3x^2-12x)(x-m)-4\Leftrightarrow x^3-6x^2+32=(3x^2-12x)(x-m)$

Hệ phương trình có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi phương trình có đúng 1 nghiệm.

Ta có $\Leftrightarrow(x-4)(x^2-2x-8)=3x(x-4)(x-m)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4 & \\2x^2+(2-3m)x+8=0 & (4)\end{array}\right.$.

Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Phương trình có đúng 1 nghiệm $x = 4$. Khi đó

$$\begin{cases} 2.4^2 + (2-3m).4 + 8 = 0 \\ \Delta = (2-3m)^2 - 4.2.8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3m = -10 \\ \left[\begin{array}{l} 2-3m = 8 \\ 2-3m = -8 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Phương trình vô nghiệm hay $\Delta < 0 \Leftrightarrow (2-3m)^2 - 4.2.8 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < \dfrac{10}{3}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1;0;1;2;3\}$.

Câu 33: Ta có: $\left[x^2 f(2x-1)\right]' = 2xf(2x-1) + 2x^2 f'(2x-1)$

d_1 có hệ số góc là 2020 nên $2f(1) + 2f'(1) = 2020$ (1)

Mặt khác: $\left[xf(2x-1)\right]' = f(2x-1) + 2xf'(2x-1)$

d_2 có hệ số góc là 2021 nên $f(1) + 2f'(1) = 2021$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(1) = -1$.

Câu 34: Ta có: $y' = 3x^2 - \sqrt{3}$ và $y'' = 6x$.

Vì $y'\left(-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 0$ và $y''\left(-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}} < 0$ nên $x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ là điểm cực đại của hàm số đã cho.

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại điểm $x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ là đường thẳng song song với trục hoành.

Vì ba tiếp tuyến đó tạo thành tam giác đều và tiếp tuyến tại điểm $x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ song song với trục hoành nên hai tiếp tuyến còn lại tạo với tia Ox theo chiều dương các góc lần lượt là 60° và 120°. Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến đó lần lượt là $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ và $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

Giả sử tiếp tuyến tại A có hệ số góc là $-\sqrt{3}$, khi đó

$y'(x_A) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 3{x_A}^2 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x_A = 0$.

Giả sử tiếp tuyến tại B có hệ số góc là $\sqrt{3}$, khi đó

$$y'(x_B) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3{x_B}^2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_B = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \\ x_B = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \end{array}\right.$$

Vì tung độ các tiếp điểm đều không âm nên $x_B = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$. Vậy $x_A + x_B = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} \in (-2;-1)$.

Câu 35: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. $y' = \dfrac{4}{(x+3)^2}$.

Gọi A và B là cặp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do tiếp tuyến tại A và B song song với nhau nên

$$y'(x_A) = y'(x_B) \Rightarrow \frac{4}{(x_A+3)^2} = \frac{4}{(x_B+3)^2} \Leftrightarrow (x_A+3)^2 = (x_B+3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = x_B \\ x_A + x_B = -6 \end{array}\right..$$

+) $x_A = x_B$ thì $A \equiv B$

+) $x_A + x_B = -6$.

Gọi $A\left(x_A;\dfrac{x_A-1}{x_A+3}\right);B\left(x_B;\dfrac{x_B-1}{x_B+3}\right)$.

Ta có $AB^2 = \left(x_B-x_A\right)^2+\left(\dfrac{x_B-1}{x_B+3}-\dfrac{x_A-1}{x_A+3}\right)^2 = \left(x_B-x_A\right)^2+\left[\dfrac{4\left(x_B-x_A\right)}{x_Ax_B+3\left(x_A+x_B\right)+9}\right]^2$

$=\left(-2x_A-6\right)^2+\left[\dfrac{4\left(-2x_A-6\right)}{x_A.\left(-x_A-6\right)-9}\right]^2 = 4\left(x_A+3\right)^2+\left[\dfrac{-8\left(x_A+3\right)}{-\left(x_A+3\right)^2}\right]^2 = 4\left(x_A+3\right)^2+\dfrac{64}{\left(x_A+3\right)^2}$

Đặt $t=\left(x_A+3\right)^2$. Do $AB=4\sqrt{2}$ nên $4t+\dfrac{64}{t}=32 \Leftrightarrow t^2-8t+16=0 \Leftrightarrow t=4$

$\Rightarrow \left(x_A+3\right)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A+3=-2 \\ x_A+3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A=-5 \\ x_A=-1 \end{array}\right.$

Với $x_A=-5 \Rightarrow y_A=3 \Rightarrow A\left(-5;3\right),B\left(-1;-1\right)$.

Với $x_A=-1 \Rightarrow y_A=-1 \Rightarrow A\left(-1;-1\right),B\left(-5;3\right)$.

Vậy tồn tại một cặp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$. Ta có $y'=\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm M : $y=\dfrac{1}{\left(x_0+2\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0+3}{x_0+2}$

$\Leftrightarrow x-\left(x_0+2\right)^2y+2x_0^2+6x_0+6=0$ $\left(\Delta\right)$. Theo giả thiết ta có: $d\left(A,\Delta\right)=2d\left(B,\Delta\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|6+4\left(x_0+2\right)^2+2x_0^2+6x_0+6\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}}=\dfrac{2\left|5-\left(x_0+2\right)^2+2x_0^2+6x_0+6\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|6x_0^2+22x_0+28\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}}=2\dfrac{\left|x_0^2+2x_0+7\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+2\right)^4}} \Leftrightarrow \left|6x_0^2+22x_0+28\right|=2\left|x_0^2+2x_0+7\right|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x_0^2+22x_0+28=2x_0^2+4x_0+14 \\ 6x_0^2+22x_0+28=-2x_0^2-4x_0-14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2+9x_0+7=0 \\ 4x_0^2+13x_0+21=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y_0=1$. Với $x_0=-\dfrac{7}{2} \Rightarrow y_0=\dfrac{8}{3}$.

Vậy tồn tại hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Ta có $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c.$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hệ

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(5)=0 \\ f(1)=\dfrac{-8}{3} \\ f(5)=\dfrac{-40}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ 75a+10b+c=0 \\ a+b+c+d=\dfrac{-8}{3} \\ 125a+25b+5c+d=\dfrac{-40}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=-3 \\ c=5 \\ d=-5 \end{cases}$$

Khi đó $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x-5$. Ta có $y'=x^2-6x+5.$

Vì tiếp tuyến cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B thỏa mãn tam giác OAB vuông cân nên tiếp tuyến phải có hệ số góc là 1 hoặc -1.

Vì vậy $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=1 \\ x^2-6x+5=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\pm\sqrt{5}\Rightarrow y=\dfrac{-24\mp 7\sqrt{5}}{3} \\ x=3\pm\sqrt{3}\Rightarrow y=-8\pm 3\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta thấy trong 4 điểm tìm được không có điểm nào nằm trên đường thẳng $y=x$ hoặc $y=-x$ nên ta nhận cả 4 điểm trên.

Vậy có 4 điểm M.

Câu 38: $y=x^4+2x^2+5\Rightarrow y'=4x^3+4x$.

Giả sử các tiếp tuyến tại A,B,C có cùng hệ số góc $k\Rightarrow 4x^3+4x=k \quad (1)$.

Ta có: $x^4+2x^2+5=\dfrac{1}{4}x(4x^3+4x)+x^2+5=x^2+\dfrac{1}{4}kx+5$.

Do đó ba điểm A,B,C thuộc đồ thị hàm số $y=x^2+\dfrac{1}{4}kx+5 \quad (P)$.

Theo giả thiết thì (P) có đỉnh $I(-1;y_0)$ nên $-\dfrac{1}{8}k=-1\Leftrightarrow k=8$.

Khi đó $(P): y=x^2+2x+5$. Vậy $y_0=y(-1)=4$.

Câu 39: Ta có: $f(3)=2; g(3)=2$

Tiếp tuyến tại $A(3;2)$ của đồ thị hàm số $y=g(x)$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ cùng là đường thẳng Δ. Vậy nên $f'(3)=g'(3)=2$

Ta có: $h(x)=\sin(\pi.f(x).g(x))+\cos\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right)$

$$\Rightarrow h'(x)=\cos(\pi.f(x).g(x))(\pi.f(x).g(x))'-\sin\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right).\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right)'$$

$$=\pi\cos(\pi f(x)g(x))\left[f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\right]-\pi.\sin\left(\dfrac{\pi.g(x)}{f(x)}\right)\left(\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x).f(x)}{f^2(x)}\right)$$

$$\Rightarrow h(3)=\pi.\cos(4\pi)\left[2.2+2.2\right]-\pi\sin\left(\dfrac{\pi.2}{2}\right).\left(\dfrac{2.2-2.2}{2^2}\right)=8\pi.$$

Câu 40: Hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm tại $x=a$ suy ra hàm số liên tục tại $x=a$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to a^-}g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x) \Leftrightarrow (a-a)f'(a)=m.a\Leftrightarrow m.a=0\Leftrightarrow a=0$.

Suy ra $g(x)=\begin{cases} xf'(x) & \text{khi } x\le 0 \\ mx & \text{khi } x>0 \end{cases}$, với $m\ne 0$. Hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Ta có $g'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{xf'(x)}{x}=f'(0)$;

$g'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{mx}{x}=m$.

Hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ suy ra $m=f'(0)$.

Tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại $A(0;f(0))$.

Xét hàm số $y=h(x)=f\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)$, ta có

$h'(x)=\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)'.f'\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}\right).f'\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)$.

Theo đề, hệ số góc của tiếp tuyến là $\sqrt{2}$, suy ra $h'(0)=\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}.f'(0)=\sqrt{2}\Leftrightarrow f'(0)=2$.

Ta và ta được $m=2$.

Câu 41: Ta có $y'=-3x^2+3$

Điểm $M\in(C)\Rightarrow M\left(a;-a^3+3a+2\right)$

Gọi đường thẳng d đi qua M hệ số góc k có dạng: $y=k(x-a)-a^3+3a+2$

Khi đó d tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi $\begin{cases} -x^3+3x+2=k(x-a)-a^3+3a+2 \\ -3x^2+3=k \end{cases}$ có nghiệm

Suy ra $-x^3+3x=\left(-3x^2+3\right)(x-a)-a^3+3a+2\Leftrightarrow 2x^3-3ax^2+a^3=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(2x+a)=0\ \ (1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-\dfrac{a}{2} \end{array}\right.$

Để từ M kẻ được đúng 1 tiếp tiếp đến (C) thì (1) có nghiệm duy nhất $a=-\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow a=0$ suy ra điểm $M(0;2)$. Suy ra $a^2+b^2=4$

Câu 42: Gọi điểm $M(a;0)\in Ox$. Khi đó tiếp tuyến (d) đi qua $M(a;0)$ là $y=k(x-a)$.

Điều kiện tiếp xúc của (d) và (C) là

$\begin{cases} -x^3+3x+2=k(x-a) \\ f'(x)=-3x^2+3=k \end{cases}\Rightarrow -x^3+3x+2=\left(-3x^2+3\right)(x-a)\Leftrightarrow x^3-3x-2=\left(3x^2-3\right)(x-a)$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-2\right)-3(x-1)(x+1)(x-a)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-2\right)-3(x+1)\left[x^2-(a+1)x+a\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left\{x^2-x-2-3\left[x^2-(a+1)x+a\right]\right\}=0\Leftrightarrow (x+1)\left[-2x^2+(3a+2)x-(3a+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x+1=0 \\ -2x^2+(3a+2)x-(3a+2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=-1 \\ 2x^2-(3a+2)x+(3a+2)=0\ (1) \end{array}\right.$.

Để (C) có 3 tiếp tuyến thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt và $x \neq -1$.

Do đó $\begin{cases} \Delta=(3a+2)^2-8(3a+2)>0 \\ 2.(-1)^2-(3a+2).(-1)+(3a+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(3a+2)(3a-6)>0 \\ 6a+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>2 \\ a<\dfrac{-2}{3} \end{array}\right. \\ a\neq -1 \end{cases}$.

Vì $f'(-1)=0$ nên để có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau thì $f'(x_1).f'(x_2)=-1$, với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Ta có $-1=f'(x_1).f'(x_2)=(-3x_1^2+3)(-3x_2^2+3)=9(x_1x_2)^2-9(x_1^2+x_2^2)+9$

$\Leftrightarrow -1=9(x_1x_2)^2-9\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+9 \Leftrightarrow -1=9(x_1x_2)^2-9(x_1+x_2)^2+18x_1x_2+9\ (2)$.

Từ phương trình (1) áp dụng định lý vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3a+2}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{3a+2}{2} \end{cases}$.Thay vào (2) ta được

$-1=9.\left(\dfrac{3a+2}{2}\right)^2-9\left(\dfrac{3a+2}{2}\right)^2+18.\dfrac{3a+2}{2}+9 \Leftrightarrow 27a+28=0 \Leftrightarrow a=-\dfrac{28}{27}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

Câu 43: Xét phương trình $\left[f(1+x)\right]^3+2f(1+2x)-21x-3=0$.

Với $x=0 \Rightarrow f^3(1)+2f(1)-3=0 \Leftrightarrow f(1)=1$.

Mặt khác $\left[f(1+x)\right]^3+2f(1+2x)-21x-3=0$

$\Rightarrow 3\left[f(1+x)\right]^2 f'(1+x)+4f'(1+2x)-21=0$

$\Rightarrow 3\left[f(1)\right]^2 f'(1)+4f'(1)=21 \Rightarrow 7f'(1)=21 \Rightarrow f'(1)=3$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x_0=1$ là

$y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=3(x-1)+1 \Leftrightarrow y=3x-2$.

Câu 44: Lấy đạo hàm hai vế phương trình $f^2(-x)=(x^2+2x+4)f(x+2)\ (1)$ ta được:

$-2f(-x).f'(-x)=(2x+2)f(x+2)+(x^2+2x+4)f'(x+2)\ (2)$

Thay $x=0$, $x=-2$ vào (1) ta được: $\begin{cases} f^2(0)=4f(2) \\ f^2(2)=4f(0) \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta được: $f^2(0)-f^2(2)=4f(2)-4f(0)$

$\Leftrightarrow \left[f(0)-f(2)\right]\left[f(0)+f(2)\right]+4\left[f(0)-f(2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[f(0)-f(2)\right]\left[f(0)+f(2)+4\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=f(2) \\ f(0)+f(2)+4=0 \end{array}\right.$

Với $f(0)=f(2)$ suy ra: $f^2(2)=4f(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2)=0 \\ f(2)=4 \end{array}\right.$. Vậy nhận $f(0)=f(2)=4$.

Với $f(0)+f(2)+4=0$ suy ra: $\left[-4-f(2)\right]^2=4f(2) \Leftrightarrow f^2(2)+4f(2)+16=0$

Thay $x=0$, $x=-2$ vào (2) ta được:

$\begin{cases} -2f(0).f'(0)=2f(2)+4f'(2) \\ -2f(2).f'(2)=-2f(0)+4f'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8f'(0)=8+4f'(2) \\ -8f'(2)=-8+4f'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8f'(0)-4f'(2)=8 \\ -4f'(0)-8f'(2)=-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=-2 \\ f'(2)=2 \end{cases}$

PTTT tại $(2;f(2))$: $y=2(x-2)+4 \Leftrightarrow y=2x$.

Câu 45: Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x^2}{m^2}=\dfrac{m}{x} \Leftrightarrow x=m \Rightarrow$ tọa độ giao điểm $A(m;1)$.

Xét $(P): y_1=\dfrac{x^2}{m^2} \Rightarrow y_1'=\dfrac{2x}{m^2}$ và $(H): y_2=\dfrac{m}{x} \Rightarrow y_2'=-\dfrac{m}{x^2}$

Do đó ta có hệ số góc của 2 tiếp tuyến tại A là $k_1=\dfrac{2}{m};k_2=-\dfrac{1}{m}$.

Vì góc giữa hai tiếp tuyến bằng 60^0 nên

$\tan 60^0=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \Leftrightarrow \sqrt{3}=\left|\dfrac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m}}{1-\dfrac{2}{m}.\dfrac{1}{m}}\right|=\sqrt{3} \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\dfrac{8}{7\pm\sqrt{33}}}$.

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn bài ra.

Câu 46: Ta có $y'=3x^2-6x$.

Gọi $M\left(a;a^3-3a^2+2\right)$ thuộc đồ thị (C).

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại M là $y=\left(3a^2-6a\right)(x-a)+a^3-3a^2+2$.

Do $A\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right)\in d \Leftrightarrow \left(3a^2-6a\right)\left(\dfrac{5}{2}-a\right)+a^3-3a^2+2=-\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \left(3a^2-6a\right)\left(\dfrac{5}{2}-a\right)+a^3-3a^2+\dfrac{9}{2}=0$

$\Leftrightarrow 4a^3-21a^2+30a-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ 4a^2-9a+3=0\ (1) \end{array}\right.$.

Do $x_1;x_2(\neq 3)$ nên $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình (1).

Ta có $\begin{cases} 4{x_1}^2-9x_1+3=0 \\ k_1=3{x_1}^2-6x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {x_1}^2=\dfrac{9x_1-3}{4} \\ k_1=3.\dfrac{9x_1-3}{4}-6x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {x_1}^2=\dfrac{9x_1-3}{4} \\ k_1=\dfrac{3x_1-9}{4} \end{cases}$.

Tương tự $k_2 = \dfrac{3x_2 - 9}{4}$ nên $E\left(x_1; k_1\right)$, $F\left(x_2; k_2\right)$ thuộc đường thẳng có phương trình $y = \dfrac{3x - 9}{4} \Leftrightarrow 3x - 4y - 9 = 0$. Khi đó $d\left(O; EF\right) = \dfrac{\left|-9\right|}{\sqrt{3^2 + \left(-4\right)^2}} = \dfrac{9}{5}$.

Câu 47: Đường tròn $\left(T\right): \left(x - 1\right)^2 + y^2 = 2$ có tâm $I\left(1; 0\right)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có $\left(C\right)$: $y = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6$. Điểm uốn $M\left(1; 2\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại A và B có cùng hệ số góc $k \Leftrightarrow A, B$ đối xứng qua $M\left(1; 2\right)$.

Phương trình đường thẳng AB qua M có dạng: $y = a(x - 1) + 2$.

Đường thẳng AB có điểm chung với đường tròn $\left(T\right) \Leftrightarrow d\left(I; AB\right) \le R$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}} \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|a\right| \ge 1.$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 4 = a(x - 1) + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - a - 2 = 0\left(*\right) \end{array}\right.$

Để tồn tại hai điểm A, B thì phương trình $\left(*\right)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1, hay:

$$\begin{cases} \Delta' = 3 + a > 0 \\ -3 - a \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > -3.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $\left(*\right)$, suy ra: $k = y'\left(x_1\right) = y'\left(x_2\right) = 3a + 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{k}{3} - 2\right| \ge 1 \\ \dfrac{k}{3} - 2 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k \ge 9 \\ k \le 3 \end{array}\right. \\ k > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \ge 9 \\ -3 < k \le 3 \end{array}\right..$$

Với $k \ge 9$, ta có 2013 giá trị k nguyên thuộc đoạn $\left[-2021; 2021\right]$.

Với $-3 < k \le 3$, ta có 6 giá trị k nguyên thuộc đoạn $\left[-2021; 2021\right]$.

Vậy tập K gồm 2019 phần tử.

Câu 48: Đặt $f\left(x\right) = 2x^3 - 3x \Rightarrow f'\left(x\right) = 6x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$			$-\frac{1}{\sqrt{2}}$			$\frac{1}{\sqrt{2}}$			$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$	$\sqrt{2}$		$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0 $\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0 $\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=0$ không phải là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ do đó đồ thị hàm số có một tiếp tuyến vuông góc với trục Oy là tiếp tuyến đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right)$.

Câu 49: Hai đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-12x+9=m\sqrt{4-x^2}\,(1) \\ 3x^2-12=\dfrac{-mx}{\sqrt{4-x^2}}\,(2) \end{cases},\left(x\in(-2;2)\right).$$

Từ ta có $m=\dfrac{x^3-12x+9}{\sqrt{4-x^2}}$.

Thay vào ta được: $3x^2-12=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}.\dfrac{x^3-12x+9}{\sqrt{4-x^2}}$

$\Leftrightarrow (3x^2-12)(4-x^2)=-x^4+12x^2-9x$

$\Leftrightarrow 2x^4-12x^2-9x+48=0$.

Ta có $2x^4-12x^2-9x+48=2\left(x^2-3\right)^2+9(2-x)+12>0,\forall x\in(-2;2)$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của tham số m để đồ thị (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

Câu 50: Ta có: $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}=x-2+\dfrac{2}{x-1}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y'=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(4;1)$ là $d: y=k(x-4)+1$.

Hoành độ tiếp điểm của d và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2+\dfrac{2}{x-1}=k(x-4)+1 \\ k=1-\dfrac{2}{(x-1)^2} \end{cases} \quad (1)$$

Ta có: $x-2+\dfrac{2}{x-1}=k(x-4)+1 \Leftrightarrow x-2+\dfrac{2}{x-1}=k(x-1)-3k+1$

$\Leftrightarrow x-2+\dfrac{2}{x-1}=\left[1-\dfrac{2}{(x-1)^2}\right](x-1)-3k+1 \Leftrightarrow x-2+\dfrac{2}{x-1}=x-1-\dfrac{2}{x-1}-3k+1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2-3k}{4}$ thay vào, ta có:

$k=1-2\left(\dfrac{2-3k}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 8-\left(4-12k+9k^2\right)=8k \Leftrightarrow 9k^2-4k-4=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{2\pm2\sqrt{10}}{9}$.

Suy ra $M\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$, $N\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right)$.

Vì M,N thuộc $(P): y=ax^2+bx-8$ nên ta có phương trình $(P): y=18x^2-8x-8$.

I là đỉnh của (P) nên $I\left(\dfrac{2}{9};-\dfrac{80}{9}\right)$; $MN=\dfrac{4\sqrt{10}}{9}$.

Ta có ΔIMN cân tại I. Gọi H là chân đường cao của ΔIMN hạ từ đỉnh I. Ta có $IH=d(I,MN)=d(I,Ox)=\dfrac{80}{9}$.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIMN.

Ta có: $\sin NIM = 2\sin HIM cos HIM = 2.\dfrac{HM}{IM}.\dfrac{IH}{IM}=\dfrac{MN.IH}{IM^2}$.

$$2R=\frac{MN}{\sin NIM}=\frac{IM^2}{IH}=\frac{IH^2+HM^2}{IH}=\frac{\left(\frac{80}{9}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{10}}{9}\right)^2}{\frac{80}{9}}=\frac{161}{18}.$$ Vậy $R=\dfrac{161}{36}$.

Câu 51: Ta có: $y'=3x^2+3ax$.

Do tiếp tuyến của (C) tại M,N có cùng hệ số góc là 3 nên hoành độ M,N là nghiệm phương trình $y'=3 \Leftrightarrow 3x^2+3ax=3 \Leftrightarrow x^2+ax-1=0$.

Chia đa thức y cho đa thức x^2+ax-1 được phần dư là $g(x)=\left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)x+\dfrac{1}{2}a+b$.

Hay $y=\left(x^2+ax-1\right)\left(x+\dfrac{1}{2}a\right)+\left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)x+\dfrac{1}{2}a+b$.

Tọa độ M và N đều thỏa mãn hàm số đề cho, nên ta có: $\begin{cases} y_M=x_M^3+\dfrac{3}{2}ax_M^2+b \\ y_N=x_N^3+\dfrac{3}{2}ax_N^2+b \end{cases}$.

Hay $\begin{cases} y_M=\left(x_M^2+ax_M-1\right)\left(x_M+\dfrac{1}{2}a\right)+\left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)x_M+\dfrac{1}{2}a+b=\left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)x_M+\dfrac{1}{2}a+b \\ y_N=\left(x_N^2+ax_N-1\right)\left(x_N+\dfrac{1}{2}a\right)+\left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)x_N+\dfrac{1}{2}a+b=\left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)x_N+\dfrac{1}{2}a+b \end{cases}$.

Khi đó phương trình đường thẳng MN là $MN: \left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)x-y+\dfrac{1}{2}a+b=0$.

Theo giả thiết $d(O;MN)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{2}a+b\right|}{\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2}a^2\right)^2+1}}=1 \Leftrightarrow ab+b^2=\dfrac{1}{4}a^4-\dfrac{5}{4}a^2+2$. $(*)$.

Từ $(*)$ ta có $P=2a^2+(a+2b)^2=3a^2+4\left(ab+b^2\right)=a^4-2a^2+8=\left(a^2-1\right)^2+7\geq 7$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=\pm 1$. Vậy GTNN cần tìm là 7.

Câu 52: Cách 1

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-m)(x+m-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=4-m \end{array}\right. \Rightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=m & (1) \\ f(x)=4-m & (2) \end{array}\right.$

TH1: $m=4-m \Leftrightarrow m=2$

$f(x)=x^2-4x+4 \Rightarrow g(x)=f^2(x)-4f(x)+4=\left[f(x)-2\right]^2=\left(x^2-4x+2\right)^2$ tiếp xúc với trục Ox.

TH2: $m \neq 4-m \Leftrightarrow m \neq 2$ thì $(1),(2)$ không có nghiệm chung

Nên $g(x)$ tiếp xúc với Ox khi phương trình (1) có nghiệm kép hoặc phương trình (2) có nghiệm kép

(1) có nghiệm kép $\Rightarrow x^2-4x+3m-m^2=0$ có nghiệm kép mà $\Delta'=m^2-3m+4>0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên không thỏa mãn

(2) có nghiệm kép $\Rightarrow x^2-4x+5m-m^2-4=0$ có nghiệm kép, mà ta có:

$\Delta'=m^2-5m+8>0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên không thỏa mãn

Vậy $m=2$ thỏa mãn yêu cầu

Cách 2

$f(x)=x^2-4x+4m-m^2$ nên $f'(x)=2(x-2)$ và $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=4-m \end{array}\right.$.

$g(x)$ tiếp xúc với trục $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} f(f(x))=0 \\ f'(x).f'(f(x))=0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=m \\ f(x)=4-m \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=2 & (f(x)=2) \\ f(2)=-m^2+4m-4=m & (VN) \\ f(2)=-m^2+4m-4=4-m & (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m=2$ thỏa mãn

Câu 53: Ta có: $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2 \Leftrightarrow (xf(x))'=4x^3+3x^2$.

Suy ra: $xf(x)=\int(4x^3+3x^2)dx=x^4+x^3+C$.

Do $f(1)=2$ nên với $x=1 \Rightarrow 1.f(1)=1+1+C \Leftrightarrow C=0$.

Suy ra: $xf(x)=x^4+x^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình là:

$y=f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=16(x-2)+12 \Leftrightarrow y=16x-20$.

Câu 54: Ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t=1-x \Rightarrow 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (2).

Từ và ta có: $\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right).$

Suy ra: $f(1)=\frac{2}{3}; f'(1)=\frac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$y=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{2}{3} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 55: Hàm số $y=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$

Gọi $x_A=m$; $x_B=n$ ($m\neq n$ và m; $n\neq 1$) $\Rightarrow y_A=\frac{m}{m-1}$; $y_B=\frac{n}{n-1}$

Tiếp tuyến tại A song song với tiếp tuyến tại $B \Leftrightarrow -\frac{1}{(m-1)^2}=-\frac{1}{(n-1)^2}$

$\Leftrightarrow (m-1)^2=(n-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=n-1 \\ m-1=-n+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=n \text{ (lo¹i)} \\ m+n=2 \end{array}\right.$

$AB=2\sqrt{2} \Rightarrow AB^2=8 \Leftrightarrow (m-n)^2+\left(\frac{m}{m-1}-\frac{n}{n-1}\right)^2=8$

$\Leftrightarrow (m-n)^2+\frac{(m-n)^2}{\left[mn-(m+n)+1\right]^2}=8 \Leftrightarrow (m+n)^2-4mn+\frac{(m+n)^2-4mn}{\left[mn-(m+n)+1\right]^2}=8 \quad (1)$

Thay $m+n=2$ vào (1) ta được: $4-4mn+\frac{4-4mn}{(mn-1)^2}=8 \Leftrightarrow 4-4mn+\frac{-4(mn-1)}{(mn-1)^2}=8$

$\Leftrightarrow 1-mn-\frac{1}{mn-1}=2 \Leftrightarrow -(mn-1)^2-1=2(mn-1) \Leftrightarrow -\left[(mn)^2-2mn+1\right]-1=2mn-2$

$\Leftrightarrow -(mn)^2+2mn-1-1=2mn-2 \Leftrightarrow -(mn)^2=0 \Leftrightarrow mn=0 \Rightarrow x_Ax_B=0$

Vậy tích $x_Ax_B=0$.

Câu 56: Xét đường thẳng $(\Delta): y=k(x-a)+b$ đi qua M, do vậy nếu (Δ) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=k\left(x-a\right)+b \\ 1-\dfrac{1}{x^2}=k \end{cases},(x\neq 0)\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=kx-ak+b \\ x-\dfrac{1}{x}=kx \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=x-\dfrac{1}{x}-ak+b \\ 1-\dfrac{1}{x^2}=k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{-ak+b}{2} \\ 1-\dfrac{\left(b-ak\right)^2}{4}=k \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{-ak+b}{2} \\ a^2k^2-2\left(ab-2\right)k+b^2-4=0 \quad (1) \end{cases}$$

Qua M có đúng hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến vuông góc với nhau khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt k_1,k_2 thoả mãn $k_1.k_2=-1\Leftrightarrow \dfrac{b^2-4}{a^2}=-1,(a\neq 0)\Leftrightarrow a^2+b^2=4$.

Khi đó M thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ và có bán kính bằng 2.

Câu 57: Gọi $M\in d\Rightarrow M\left(a;2a+1\right)$.

Gọi $A\left(x_0;y_0\right),x_0\neq 1$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d_1 kẻ từ M với (C).

Phương trình tiếp tuyến $d_1: y=y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0\Leftrightarrow y=\dfrac{-4}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

Vì $M\in d_1$ nên $2a+1=\dfrac{-4}{\left(x_0-1\right)^2}\left(a-x_0\right)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

$\Rightarrow \left(2a+1\right)\left(x_0-1\right)^2=-4\left(a-x_0\right)+\left(x_0+3\right)\left(x_0-1\right)$, $\left(x_0\neq 1\right)$.

$\Leftrightarrow a.x_0^2-2\left(a+2\right)x_0+3a+2=0 \quad (1)$

Từ M kẻ đến (C) đúng 1 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ (1) có đúng 1 nghiệm $x_0\neq 1$.

Trường hợp 1: $a=0$

$(1)\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $a=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a\neq 0$, PT có nghiệm kép $x_0\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=\left(a+2\right)^2-a\left(3a+2\right)=0 \\ \dfrac{2\left(a+2\right)}{2a}\neq 1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right. \\ \dfrac{a+2}{a}\neq 1 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right. \text{ thỏa mãn.}$$

Trường hợp 3: $a\neq 0$, PT có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=-2a^2+2a+4>0 \\ a.1^2-2\left(a+2\right).1+3a+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -1<a<2 \\ a=1 \end{cases}\Leftrightarrow a=1 \text{ thỏa mãn.}$$

Kết hợp 3 trường hợp suy ra có 4 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 58: Phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 có dạng $y=f'(1).\left(x-1\right)+f(1)$.

Ta cần tìm $f(1)$ và $f'(1)$. Xét phương trình: $2f\left(2x\right)+f\left(1-2x\right)=12x^2\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. $(*)$

Ta tìm $f(1)$:

Thay $x=0$ vào $(*)$, ta được: $2f(0)+f(1)=0$. (1)

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào $(*)$, ta được: $2f(1)+f(0)=3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(1)=2$.

Ta tìm $f'(1)$:

Đạo hàm hai vế của $(*)$, ta được: $4f'(2x)-2f'(1-2x)=24x \quad \forall x\in\mathbb{R}$. $(**)$

Thay $x=0$ vào $(**)$, ta được: $4f'(0)-2f'(1)=0$. (3)

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào $(**)$, ta được: $4f'(1)-2f'(0)=12$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $f'(1)=4$.

Như vậy, tiếp tuyến (d) có phương trình là: $y=4(x-1)+2 \Leftrightarrow y=4x-2$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với Ox và Oy, ta được $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ và $B(0;-2)$.

$\Rightarrow OA=\frac{1}{2}$, $OB=2$. Vậy $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}$.

Câu 59: Ta có $y'=f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) : $y=\frac{x}{x+1}$ tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ ($x_0\neq-1$) có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Do tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân nên tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=x$ hoặc $y=-x$ Suy ra $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{(x_0+1)^2}=1\\ \frac{1}{(x_0+1)^2}=-1(vn)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=-2\end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ phương trình tiếp tuyến là $y=x$ loại vì A trùng O

Với $x_0=-2$ phương trình tiếp tuyến là $y=x+4$

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn ycbt.

Câu 60: Hàm số được viết lại thành $(x^2-3x+2)m+x^3-x^2+1-y=0$.

Một điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số thì phương trình $({x_0}^2-3x_0+2)m+{x_0}^3-{x_0}^2+1-y_0=0$ phải nghiệm đúng với mọi m, xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}{x_0}^2-3x_0+2=0\\ {x_0}^3-{x_0}^2+1-y_0=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1;y_0=1\\ x_0=2;y_0=5\end{array}\right.$.

Giả sử $A(1;1), B(2;5)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;4)$ khi đó hệ số góc của đường thẳng AB là $k=4$.

Đặt $f(x)=x^3+(m-1)x^2-3mx+2m+1$.

Để trên đồ thị hàm số có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng AB thì hệ số góc tại tiếp điểm phải bằng $k' = -\dfrac{1}{4}$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = -\dfrac{1}{4}$ có nghiệm.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2(m-1)x - 3m$.

Phương trình $f'(x) = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 3x^2 + 2(m-1)x - 3m + \dfrac{1}{4} = 0\,(1)$.

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \dfrac{-7-4\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-7+4\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

Với $\dfrac{-7+4\sqrt{3}}{2} \approx -0.03$ nên các số nguyên dương $m \in [-2020; 2020]$ là $\{1; 2; 3; ...; 2020\}$.

Vậy có 2020 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 61: TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có: $y' = \dfrac{-a-b}{(x-1)^2}$.

Điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ nên $1 = \dfrac{b}{-1} \Leftrightarrow b = -1$.

Tiếp tuyến tại $A(0;1)$ có hệ số góc bằng -3 nên

$y'(0) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-a+1}{1} = -3 \Leftrightarrow a = 4$. Vậy $a + b = 3$.

Câu 62: Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;m)$ hệ số góc k có phương trình là $y = k(x-1) + m$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 1 = k(x-1) + m & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm } x.$$

Thay vào ta có: $x^3 + 3x^2 + 1 = (3x^2 + 6x)(x-1) + m \Leftrightarrow 2x^3 - 6x - 1 = -m$.

Qua điểm $A(1;m)$ kẻ được đúng 3 tiếp tuyến tới đồ thị (C) $\Leftrightarrow$ phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ hai đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 6x - 1$ và $y = -m$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = 2x^3 - 6x - 1$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$ $y=-m$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 63: Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f'(1) = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là:

$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = f(1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C) là: $f(x)=f(1)$.

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f'(-1)=f'(3)=0$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=f(1)$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm có hoành độ lần lượt là a, 1, b với $a<-1$ và $b>3$. Suy ra $b^2>9$ và $a^2>1$. Vậy $a^2+b^2>10$.

Câu 64: Ta có $y'=3x^2-6x$.

Gọi d là tiếp tuyến với (C) và $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

$d: y-y_0=y'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow d: y-\left(x_0^3-3x_0^2\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)(x-x_0)$.

$B(0;b)\in d \Leftrightarrow b-x_0^3+3x_0^2=-x_0\left(3x_0^2-6x_0\right) \Leftrightarrow 2x_0^3-3x_0^2+b=0 \Leftrightarrow b=-2x_0^3+3x_0^2$. (1)

Đặt $f(x)=-2x^3+3x^2$. Ta có $f'(x)=-6x^2+6x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Yêu câu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có duy nhất nghiệm x_0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>1 \\ b<0 \end{array}\right.$.

Vậy có 17 số nguyên $b\in(-10;10)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 65: Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;m)$ có hệ số góc bằng k có dạng $y=k(x-1)+m$.

Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3x^2+1=k(x-1)+m \\ 3x^2+6x=k \end{cases} \Rightarrow -2x^3+6x+1=m\ (*).$$

Để có 3 tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x)=-2x^3+6x+1$.

$g'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Yêu cầu đề bài khi và chỉ khi $-3 < m < 5$.

Suy ra $S = \{-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m.

Câu 66: Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C) và đường thẳng (d):

$x^3 - 3x = k(x+1) + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = k(x+1)$

$\Leftrightarrow (x+1).(x^2 - x - 2) = k(x+1) \Leftrightarrow (x+1).(x^2 - x - 2 - k) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2 - x - 2 - k = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2 - x - 2 - k = 0(*) \end{array}\right.$

Để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M,N,P thì phương trình phải có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq -1$ hay $\begin{cases} \Delta = 9 + 4k > 0 \\ 1 + 1 - 2 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\dfrac{9}{4} \\ k \neq 0 \end{cases}$

Khi đó theo định lý Viet thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = -2 - k \end{cases}$

Hệ số góc tiếp tuyến tại các điểm N,P là $y'(x_1) = 3(x_1^2 - 1); y'(x_2) = 3(x_2^2 - 1)$.

Để tiếp tuyến của (C) tại N, P vuông góc với nhau thì $y'(x_1).y'(x_2) = -1$

$\Leftrightarrow 3(x_1^2 - 1).3(x_2^2 - 1) = -1 \Leftrightarrow (x_1x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = -\dfrac{1}{9}$

$\Leftrightarrow (2+k)^2 - [1 - 2(-2-k)] + 1 = -\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow k^2 + 2k + \dfrac{1}{9} = 0$

$\Leftrightarrow k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$ thoả mãn $\Rightarrow k_1.k_2 = \dfrac{1}{9}$. Vậy tích các giá trị của k là $\dfrac{1}{9}$.

Câu 67: Ta có $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0;a)$ là $(\Delta): y = kx + a$.

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx + a \\ -\dfrac{3}{(x-1)^2} = k \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Từ hệ $(*)$ ta có $\dfrac{x+2}{x-1}=-\dfrac{3x}{(x-1)^2}+a \Leftrightarrow (a-1)x^2-2(2+a)x+2+a=0\ (**)$.

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa $\dfrac{x_1+2}{x_1-1}.\dfrac{x_2+2}{x_2-1}<0$. Ta có $\begin{cases} P=x_1.x_2=\dfrac{2+a}{a-1} \\ S=x_1+x_2=\dfrac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} a\neq 1 \\ \Delta'>0 \\ \dfrac{P+2S+4}{P-S+1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ 3a+6>0 \\ \dfrac{9a+6}{-3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ a>-2 \\ a>-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ a>-\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Do a nguyên thuộc đoạn $[-2018;2018]$ nên $a\in\{0;2;3;4;\ldots;2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ LŨY THỪA
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 7 PHƯƠNG TRÌNH – BPT MŨ LOGARIT CHỨA THAM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để giải phương trình, bất phương trình mũ logarit có chứa tham số, chúng ta thường sử dụng các cách sau:

1. **Phương pháp đưa về cùng cơ số và logarit hóa**
   - Với $a>0$ và $a\neq 1$, ta có: $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
   - Phương pháp logarit hóa: $a^{f(x)}=b\Leftrightarrow f(x)=\log_a b$

     $a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\log_a b$ và $\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$
2. **Phương pháp đặt ẩn phụ kết hợp với phương pháp hàm số**
   - Hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $K\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm thuộc K
   - Hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $K\Rightarrow\forall a,b\in K$ có $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$.
   - Hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $K\Rightarrow\forall a,b\in K$ có $f(a)\geq f(b)\Leftrightarrow a\geq b$.
   - Hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $K\Rightarrow\forall a,b\in K$ có $f(a)\leq f(b)\Leftrightarrow a\leq b$.

   Bước 1: Biến đổi bài toán để dễ dàng cho việc đặt ẩn phụ, tìm điều kiện của x (nếu có)

   Bước 2: Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện chặn (điều kiện biên) cho ẩn phụ mới dựa vào điều kiện ban đầu của x và yêu cầu đề bài.

   Bước 3: Áp dụng phương pháp giải bằng đại số lớp 10 hoặc phương pháp hàm số để thực hiện yêu cầu đề bài.

   Cô lập tham số m chỉ áp dụng được khi tham số m đồng bậc nhau, thường ở dạng bậc nhất.

   - $f(x;m)=0\Leftrightarrow m=g(x)$, khảo sát sự biến thiên của hàm $g(x)$, dựa vào bảng biến thiên để tìm m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
   - $f(x;m)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq h(x)\\ m\leq g(x)\end{array}\right.$. Để bất phương trình luôn đúng $\forall x\in[a;b]$ thì m phải thỏa mãn điều kiện $\left[\begin{array}{l}m\geq max\,h(x)\\ m\leq min\,g(x)\end{array}\right.$.
   - $f(x;m)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq h(x)\\ m\leq g(x)\end{array}\right.$. Để bất phương trình có nghiệm $\forall x\in[a;b]$ thì m phải thỏa mãn điều kiện $\left[\begin{array}{l}m\geq min\,h(x)\\ m\leq max\,g(x)\end{array}\right.$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại duy nhất số thực y thỏa mãn $\log_3\left(2+x+2xy-x^2\right)=\log_{\sqrt{3}} y$?

A. 5 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 2 .

LỜI GIẢI

Chọn B

Ta có $\log_3\left(2+x+2xy-x^2\right)=\log_{\sqrt{3}} y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2xy-2-x+x^2=0\ (*) \\ y>0 \end{cases}$.

Bài toán tương đương là phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm dương y.

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x^2-x-2<0 \Leftrightarrow x\in(-1;2)$.

Trường hợp 2: Phương trình $(*)$ có nghiệm $y_1=y_2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=x+2=0 \\ S=2x>0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Trường hợp 3: Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thỏa $y_1=0<y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ S=2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Vậy $x\in\{0;1;2\}$ thỏa mãn đề bài.

CÂU 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;100)$ để tồn tại các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a\neq 1, b\neq 1$ và $a^{2x}=b^y=(ab)^{x+my}$

A. 0 . **B.** 100 . **C.** 99 . **D.** 98 .

LỜI GIẢI

Chọn A

Đặt $a^{2x}=b^y=(ab)^{x+my}=t \Rightarrow \begin{cases} a=(t)^{\frac{1}{2x}} \\ b=(t)^{\frac{1}{y}} \\ (ab)^{x+my}=t \end{cases} \Rightarrow \left(t^{\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}}\right)^{x+my}=t$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}\right)(x+my)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{my}{2x}+\frac{x}{y}+m=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{2u}+u+m=\dfrac{1}{2} \\ u=\dfrac{x}{y}>0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+2u^2+2mu=u \\ u=\dfrac{x}{y}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2+(2m-1)u+m=0 \\ u=\dfrac{x}{y}>0 \end{cases}$$

Yêu cầu của bài toán được thực hiện khi phương trình (*) có nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\geq 0 \\ p>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2-8m\geq 0 \\ m>0 \\ m<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\left(0;\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right).$$

Không có giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y); y\in\left[0;2021^3\right]$ thỏa mãn phương trình $\log_4\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)=\log_2(y-x)$?

A. 90854. **B.** 90855. **C.** 2021^2. **D.** 2021^2-1.

LỜI GIẢI

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} y-x>0 \\ x\ge -\frac{1}{4} \\ x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}>0 \end{cases}$.

Ta có $\log_4\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)=\log_2(y-x)$

$\Leftrightarrow \log_4\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2=\log_2(y-x)\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)=\log_2(y-x)$

$\Leftrightarrow y-x=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)\Leftrightarrow y=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$.

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{2m+1}{2}(m\in\mathbb{N})\Rightarrow x=m^2+m$; khi đó $y=(m+1)^2$.

Mà $y\in\left[0;2021^3\right]\Rightarrow (m+1)^2\le 2021^3\Rightarrow 0\le m\le 2021\sqrt{2021}-1\approx 90854{,}1$.

Do đó có 90855 giá trị của m, ứng với đó có 90855 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 4. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $2^{x+3}+2^{m-x}<2^{m+3}+1$ có nhiều nhất 20 nghiệm nguyên.

A. 171. **B.** 190. **C.** 153. **D.** 210.

LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có:

$2^{x+3}+2^{m-x}<2^{m+3}+1\Leftrightarrow 2^{m+3}+1-2^{x+3}-2^{m-x}>0$

$\Leftrightarrow 2^{x+3}\left(2^{m-x}-1\right)-\left(2^{m-x}-1\right)>0\Leftrightarrow \left(2^{x+3}-1\right)\left(2^{m-x}-1\right)>0$

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2^{x+3}-1<0 \\ 2^{m-x}-1<0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \\ x>m \end{cases}$

Bất phương trình có nghiệm khi $m<-3$ (loại).

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2^{x+3}-1>0 \\ 2^{m-x}-1>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x<m \end{cases}$

Bất phương trình có nghiệm khi $m>-3$.

Khi đó bất phương trình có nghiệm: $-3<x<m$.

Để bất phương trình có nhiều nhất 20 nghiệm nguyên thì $-3<x<18\Leftrightarrow m\le 18$

Do $m\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow m\in\{1;2;3;...;18\}$

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m là: $1+2+3+...+18=171$.

CÂU 5. Xét các số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2>1$ và $\log_{x^2+y^2}(2x+4y)\geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3x+y$ bằng

A. $5+2\sqrt{10}$. **B.** $5+4\sqrt{5}$. **C.** $5+5\sqrt{2}$. **D.** $10+2\sqrt{5}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có $x^2+y^2>1$.

Khi đó $\log_{x^2+y^2}(2x+4y)\geq 1 \Leftrightarrow \log_{x^2+y^2}(2x+4y)\geq \log_{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow 2x+4y\geq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4\leq 5 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$.

Khi đó $P=3x+y \Leftrightarrow P=3(x-1)+(y-2)+5 \Leftrightarrow P-5=3(x-1)+(y-2)$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có: $\left[3(x-1)+(y-2)\right]^2\leq \left(3^2+1^2\right)\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=50$

$\Rightarrow (P-5)^2=\left[3(x-1)+(y-2)\right]^2\leq \left(3^2+1^2\right)\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=50$.

Vậy $(P-5)^2\leq 50 \Leftrightarrow -5\sqrt{2}\leq P-5\leq 5\sqrt{2} \Leftrightarrow 5-5\sqrt{2}\leq P\leq 5+5\sqrt{2}$

Suy ra $\max P=5+5\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 6. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{2}\right)$ thỏa mãn $27^{12x^2+2xy}=(1+2xy)27^{18x}$.

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $27^{12x^2+2xy}=(1+2xy)27^{18x} \quad (1)$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}1+2xy>0\\ 27^{12x^2-18x+2xy}=1+2xy \quad (2)\end{cases}$$

Với $y=0$, phương trình thành: $27^{12x^2-18x}-1=0 \Leftrightarrow 27^{12x^2-18x}=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ vô nghiệm vì $x\in\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{2}\right)$.

Khi $y<0$, vì $\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{3}{2}$ và $xy>-\dfrac{1}{2}$ nên suy ra $-3<y<-\dfrac{1}{3}$

mà y là số nguyên nên $y\in\{-2;-1\}$.

Với $y=-1$, phương trình thành: $27^{12x^2-20x}-(1-2x)=0$, có nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{2}\right)$ vì:

$g_1(x)=27^{12x^2-20x}-(1-2x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{2}\right]$ và $g_1\left(\dfrac{1}{6}\right).g_1\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$.

Với $y=-2$, phương trình thành: $27^{12x^2-22x}-(1-4x)=0$, có nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{2}\right)$ vì:

$g_2(x)=27^{12x^2-22x}-(1-4x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{2}\right]$ và $g_2\left(\dfrac{1}{6}\right).g_2\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$.

Khi $y \ge 1,$ xét trên $\left[\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$, ta có

$27^{12x^2+2xy}=(1+2xy)27^{18x} \Leftrightarrow 12x^2-18x=\log_{27}(1+2xy)-2xy \Leftrightarrow 12x-18-\frac{\log_{27}(1+2xy)}{x}+2y=0.$

Xét hàm $g(x)=12x-18-\frac{\log_{27}(1+2xy)}{x}+2y$ trên $\left[\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$.

Ta có $g'(x)=12+\frac{\ln(1+2xy)}{x^2\ln 27}-\frac{2y}{x(1+2xy)\ln 27}>12-\frac{1}{3x^2\ln 3}\ge 12-\frac{12}{\ln 3}>0, \forall x\in\left[\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$.

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$. Vì thế phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{6}\right)g(\frac{3}{2})<0.$ Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u)<u$ với mọi $u>0$, ta có

$g(3)=18-\frac{\log_{27}(1+6y)}{3}+2y>18-\frac{6y}{3\ln 27}+2y>0.$

Do đó $g\left(\frac{1}{6}\right)<0 \Leftrightarrow -2\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right)+2y-16<0 \Leftrightarrow 1\le y\le 9$ (do y là số nguyên dương).

Vậy $y\in\{-2;-1;1;2;...;9\}$ hay có 11 giá trị y thỏa đề.

CÂU 7. Phương trình $\log_3(\cot x)=\log_4(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2022\pi)$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 1011. **D.** 2022.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x>0\\ \sin x>0\end{cases} \Rightarrow 0<\cos x<1.$

Đặt $\log_3(\cot x)=\log_4(\cos x)=t \Rightarrow \begin{cases}\cot x=3^t\\ \cos x=4^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cot^2 x=9^t\\ \cos x=4^t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=9^t\\ \cos x=4^t\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{16^t}{1-16^t}=9^t \Leftrightarrow 144^t+16^t-9^t=0 \Leftrightarrow 16^t+\left(\frac{16}{9}\right)^t-1=0.$

Xét hàm số $f(t)=16^t+\left(\frac{16}{9}\right)^t-1$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(t)=16^t.\ln 16+\left(\frac{16}{9}\right)^t.\ln\frac{16}{9}>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y=f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $f\left(\frac{-1}{2}\right)=0 \Rightarrow t=\frac{-1}{2} \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Mà $x\in(0;2022\pi) \Rightarrow 0<\frac{\pi}{3}+k2\pi<2022\pi \Rightarrow \frac{-1}{6}<k<\frac{6065}{6} \Rightarrow k\in\{0;1;2;...;1009;1010\}$

Vậy trên khoảng $(0;2022\pi)$ phương trình đã cho có 1011 nghiệm.

CÂU 8. Có bao nhiêu số nguyên của x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2\log_3(x+y+1)=\log_2(x^2+2x+2y^2+1)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

✍ LỜI GIẢI

Chon A

Đặt $2\log_3(x+y+1)=\log_2(x^2+2x+2y^2+1)=2t \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=3^t \\ x^2+2x+2y^2+1=4^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=3^t \\ (x+1)^2+2y^2=4^t \end{cases}$.

Ta có: $9^t=\left[(x+1)+y\right]^2=\left[1.(x+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right]^2 \le \left(1+\frac{1}{2}\right)\left[(x+1)^2+2y^2\right]=\frac{3}{2}.4^t$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t \le \frac{3}{2} \Rightarrow t \le \frac{1}{2}$.

Lại có $(x+1)^2+2y^2=4^t \Rightarrow (x+1)^2 \le 4^t \le 4^{\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow x\in\{-2;-1;0\}$ (do $x\in\mathbb{Z}$).

Nếu $x=0$ ta có phương trình $2\log_3(y+1)=\log_2(2y^2+1)$. Ta thấy phương trình này có nghiệm $y=0$.

Nếu $x=-1$ ta có phương trình

$2\log_3 y=\log_2 2y^2=2t \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ 2y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow 2.9^t=4^t \Rightarrow t=\log_{\frac{4}{9}}2 \Rightarrow y=3^{\log_{\frac{4}{9}}2}$.

Ta thấy phương trình này có nghiệm $y=3^{\log_{\frac{4}{9}}2}$.

Nếu $x=-2$ ta có phương trình $2\log_3(y-1)=\log_2(2y^2+1)=2t$

$\Rightarrow \begin{cases} y-1=3^t \\ 2y^2+1=4^t \end{cases} \Rightarrow 2.9^t+4.3^t+3=4^t\,(*)$.

Ta có $4^t=2y^2+1\ge 1 \Rightarrow t\ge 0 \Rightarrow 2.9^t>4^t$. Suy ra $VT(*)>4^t$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy có 2 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất năm số nguyên $b\in(-10;10)$ thoả mãn $8^{a^2+b}\le 4^{b-a}+3^{b+5}+15$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 7 **D.** 6.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có: $8^{a^2+b}\le 4^{b-a}+3^{b+5}+15 \Leftrightarrow 8^{a^2}-\frac{4^b}{8^b.4^a}-\frac{3^b}{8^b}.3^5-\frac{15}{8^b}\le 0 \Leftrightarrow 8^{a^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^b\frac{1}{4^a}-\left(\frac{3}{8}\right)^b.3^5-15.\left(\frac{1}{8}\right)^b\le 0$.

Đặt $f(b)=8^{a^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^b\frac{1}{4^a}-\left(\frac{3}{8}\right)^b.3^5-15.\left(\frac{1}{8}\right)^b$.

$\Rightarrow f'(b)=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^b\frac{1}{4^a}-\ln\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^b.3^5-15.\ln\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^b \Rightarrow f'(b)>0,\forall b\in(-10;10)$.

Để tồn tại ít nhất năm số nguyên $b\in(-10;10)$ thì b thoả mãn

$f(-5)\le 0 \Leftrightarrow 8^{a^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\frac{1}{4^a}-\left(\frac{3}{8}\right)^{-5}.3^5-15.\left(\frac{1}{8}\right)^{-5}\le 0$

Dùng Table-Solve suy ra có 5 giá trị nguyên của a.

CÂU 10. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3(2x^2-1)}\ge(x+1)(x-5)$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+2\ge1\\2x^2-1\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x\le-1\vee x\ge1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge1\Rightarrow D=[1;+\infty)$

Ta có $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3(2x^2-1)}\ge(x+1)(x-5)$

$\Leftrightarrow\sqrt{\log_3(x^2+4x+4)}+(x^2+4x+4)\ge\sqrt{\log_3(2x^2-1)}+(2x^2-1)$

Đặt $f(t)=\sqrt{\log_3 t}+t,\ \forall t\ge1\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln3}.\dfrac{1}{2\sqrt{\log_3 t}}+1>0,\ \forall t>1$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Suy ra $f(x^2+4x+4)\ge f(2x^2-1)\Leftrightarrow x^2+4x+4\ge2x^2-1\Leftrightarrow-1\le x\le5$

Vậy có 7 số nguyên x thoả mãn.

CÂU 11. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn phương trình $2021^{x^3-a^{3\log(x+1)}}(x^3+2020)=a^{3\log(x+1)}+2020$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 12. **D.** 8.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Điều kiện xác định: $x>-1$.

Ta có: $2021^{x^3-a^{3\log(x+1)}}(x^3+2020)=a^{3\log(x+1)}+2020$

$\Leftrightarrow 2021^{x^3}(x^3+2020)=2021^{a^{3\log(x+1)}}\left(a^{3\log(x+1)}+2020\right)$

Xét hàm số $f(t)=2021^t(t+2020)$

$f'(t)=2021^t(t+2020)\ln2021+2021^t>0,\forall\,t\in(-1;+\infty)$

Suy ra hàm số $f(t)=2021^t(t+2020)$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

Từ đó $\Leftrightarrow 2021^{x^3}(x^3+2020)=2021^{a^{3\log(x+1)}}\left(a^{3\log(x+1)}+2020\right)\Leftrightarrow x^3=a^{3\log(x+1)}$

Điều kiện: $x^3>0\Leftrightarrow x>0$

Khi đó $x^3=a^{3\log(x+1)}\Leftrightarrow3\log x=3\log(x+1).\log a\Leftrightarrow\log a=\dfrac{\log x}{\log(x+1)}$

Hàm số $y=\dfrac{\log x}{\log(x+1)}$ có tập giá trị $T=(-\infty;1)$

Để phương trình có nghiệm khi $\log a<1\Leftrightarrow0<a<10$.

CÂU 12. Cho hai số thực x, y thỏa mãn hệ thức $2^{2|y|-x^2}=\log_{2|y|+1}x$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-2022;2022]$ để tồn tại duy nhất một số thực x thỏa mãn hệ thức $4y^2=10x^2+mx+1$?

A. 2035. **B.** 2036. **C.** 2034. **D.** 2033.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\2|y|+1>1.\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương $\dfrac{2^{2|y|+1}}{2.2^{x^2}}=\dfrac{\ln x}{\ln\left(2|y|+1\right)}\Leftrightarrow 2^{2|y|+1}.\ln\left(2|y|+1\right)=2^{x^2}\ln x^2$.

Xét hàm $f(t)=2^t.\ln t$ với $t>0$. Ta có $f'(t)=2^t\ln 2.\ln t+2^t.\dfrac{1}{t}>0$ với $t>0$ nên:

$f\left(2|y|+1\right)=f\left(x^2\right)\Leftrightarrow 2|y|+1=x^2$ suy ra $x^2>1\Leftrightarrow x>1$.

Hơn nữa $2|y|+1=x^2\Leftrightarrow 4y^2=\left(x^2-1\right)^2$ nên

$4y^2=10x^2+mx+1\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2=10x^2+mx+1\Leftrightarrow x^3-12x=m$.

Xét hàm $g(x)=x^3-12x$, ta có $g'(x)=3x^2-12$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-11	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $4y^2=10x^2+mx+1$ có một nghiệm duy nhất khi $\left[\begin{array}{l}m\ge -11\\m=-16.\end{array}\right.$

Vì $m\in[-2022;2022]$, ta có 2035 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho phương trình $\ln\left(x^2-11x-5m\right)=\ln\left(x-m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực?

A. Vô số. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 24.

Câu 2: Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $g\left(a;b\right)=a^2+b^2$ với $a;b$ thỏa mãn $\begin{cases} a-2b+8\ge 0 \\ a+b+2\ge 0 \\ 2a-b+4\le 0 \end{cases}$. Khi $m\in\left[0;M\right]$ thì tổng các nghiệm của phương trình $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2+\left|1-m\right|\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$ thuộc khoảng

A. $\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}};2\right)$. **B.** $\left(1;2+\sqrt{3}\right)$.

C. $\left(2+\sqrt{3};2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$. **D.** $\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Câu 3: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại hai số thực x,y thỏa mãn $\log_x y=\log_y x$ và $\log_x\left[m\left(x+y\right)\right]=\log_y\left(x-y\right)+2$.

A. $\left(0;+\infty\right)$. **B.** $\left[1;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Câu 4: Cho tham số thực m, biết rằng phương trình $4^x-\left(m+4\right)2^x+2=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)=4$. Giá trị của m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;5\right)$. **B.** $\left(5;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

Câu 5: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0\left(*\right)$ có hai nghiệm thực $x_1;x_2$ thỏa mãn $\left(x_1+3\right)\left(x_2+3\right)=72$.

A. $m=\dfrac{9}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m=\dfrac{61}{2}$.

Câu 6: Cho phương trình $9^x-2m.3^x+3m-2=0\left(*\right)$ (m là tham số thực). Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho phương trình có hai nghiệm trái dấu là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $3a+4b$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 5.

Câu 7: Có bao nhiêu bộ số thực $\left(x;y\right)$ với $x+y$ là số nguyên dương thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2}\right)=\log_3\left(x+y\right)$

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 8: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $5x+y=4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_3\dfrac{x^2+2y+m}{x+y}+x^2-3x-y+m-1=0$ có nghiệm là

A. 10. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 2.

Câu 9: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm.

A. 20. **B.** 19 . **C.** 9. **D.** 21.

Câu 10: Cho hai số thực $x;y$ thỏa mãn:

$$\log_{\sqrt{3}}\left(y^2+8y+16\right)+\log_2\left[(5-x)(1+x)\right]=2\log_3\frac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2.$$

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\sqrt{x^2+y^2}-m\right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con khác rỗng.

A. 16385 . **B.** 2047 . **C.** 32 . **D.** 16383 .

Câu 11: Cho phương trình $m\ln^2(x+1)-(x+2-m)\ln(x+1)-x-2=0\ (1)$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0<x_1<2<4<x_2$ là khoảng $(a;+\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $(3,7;3,8)$. **B.** $(3,6;3,7)$. **C.** $(3,8;3,9)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

Câu 12: Có bao nhiêu bộ hai số nguyên $(x;y)$ thỏa $1\le x^2+x\le 2020$ và $\log x+\log(x+1)+x^2+x=y$ $+10^y$

A. 8. **B.** 4. **C.** 2 **D.** 0.

Câu 13: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $2\left[x+\ln(x+1)\right]+x^2+1=y+e^y$?

A. 0 . **B.** 7 . **C.** 1 . **D.** 8 .

Câu 14: Tập tất cả giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng một nghiệm là

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $[1;+\infty)$.

C. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\varnothing$.

Câu 15: Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $7^{\left|x^2-4x-5\right|-\log_7 5}=5^{-(y+2)}$ và $2|y-2|-|y|+y^2-y\le 7$?

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** Vô số.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?
$\log_3\left(x^2+2mx+2m^2-1\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right)$.

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 1 . **D.** 4 .

Câu 17: Biết rằng trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2\left(x+y-1\right)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x;y)$ thỏa mãn $3x+4y-m=0$. Khi đó hãy tính tổng tất cả các giá trị m tìm được?

A. 20. **B.** 14. **C.** 46. **D.** 28.

Câu 18: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+3y$.

A. $P_{\min}=\frac{17}{2}$. **B.** $P_{\min}=8$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=\frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Câu 19: Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 36. **B.** 35. **C.** 34. **D.** vô số.

Câu 20: Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x,y nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$?

A. 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** 2017.2020.

Câu 21: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a>1,b>0,c>0$ và bất phương trình $a^{x^2}.(b+4c)^{2x+3}\ge 1$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức $P=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=m,b=n,c=p$. Khi đó, tổng $m+n+p$ bằng

A. $\frac{81}{16}$. **B.** $\frac{57}{20}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{51}{16}$.

Câu 22: Cho bất phương trình

$\log_{3a}11+\left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\right).\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right)\ge 0$. Giá trị thực của tham số a để bất phương trình trên có nghiệm duy nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 23: Trong tất cả các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5)\ge 1$, có bao nhiêu giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0

Câu 24: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases}2020^2\left(2020^{x^2+y^2}-2020^{2x-6y-6}\right)+(x-1)^2+(y+3)^2\le 4\\ e^{(x+1)^2+(y-3)^2}\le\left(x^2+y^2+2x-6y+11-m\right).e^m\end{cases}$$

Tổng của tất cả các phần tử thuộc tập hợp S là

A. 88. **B.** $2\sqrt{10}-2$. **C.** $2\sqrt{10}+2$. **D.** 44.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

A. 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

Câu 26: Cho biểu thức $P=3^{y-2x+1}\left(1+4^{2x-y-1}\right)-2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q=\log_{y+3-2x}3y$. Giá trị nhỏ nhất của y để tồn tại x thỏa mãn đồng thời $P\ge1$ và $Q\ge1$ là số y_0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $4y_0+1$ là số hữu tỷ. **B.** y_0 là số vô tỷ.

C. y_0 là số nguyên dương. **D.** $3y_0+1$ là số tự nhiên chẵn.

Câu 27: Cho bất phương trình $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le0$. Bất phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên $x\in\left[-2019;2019\right]$?

A. 1. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2.

Câu 28: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2+4\right)-\log_2\left(x+2y\right)\le1$ và $2x-y\ge0$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $2.6^{f(x)}+\left(f^2\left(x\right)-1\right).9^{f(x)}-3.4^{f(x)}.m\ge\left(2m^2+2m\right).2^{2f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le2020 & (1)\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm

A. $m\ge-3$. **B.** $-2\le m\le1$. **C.** $-1\le m\le2$. **D.** $m\ge-2$.

Câu 31: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

A. 116. **B.** 115. **C.** 59. **D.** 58.

Câu 32: Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $0 \le x \le 3456$ và $\log_5(5x+10) - y = \dfrac{5^y - x}{2}$?

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \ge \log_3(x+y)$?

A. 28. **B.** 29. **C.** 55. **D.** 56.

Câu 34: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một cặp số thực (x,y) thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \ge 1$ và $x^2+y^2+4x-2y-m=0$. Tính tổng tất cả các phần tử thuộc S

A. 28. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 27.

Câu 35: Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le (x^2+y^2-2x+2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 36: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \ge \log_3(x+y)$?

A. 58. **B.** 116. **C.** 115. **D.** 59.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\dfrac{1}{3};4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x}$?

A. 14. **B.** 27. **C.** 12. **D.** 15.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2 \le x \le 2021$ và $2^y - \log_2(x+2^{y-1}) = 2x - y$?

A. 2020. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 2019.

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\dfrac{1}{2};5\right)$ thỏa mãn $8^{2x^2+xy} = (1+xy).8^{4x}$?

A. 7. **B.** **C.** 6. **D.** 5.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên $y > 5$ để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_{15}(4x+3y+1) = \log_6(x^2-2x+y^2)$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên y để phương trình $2^{x^2+y^2+1} = (x^2+y^2-2x+2)4^x$ có nghiệm thực x?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m với $|m| \le 10$ để phương trình $3^{\log_2(x^2)} - 2(m+6)\cdot 3^{\log_2 x} + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 > 2$?

A. 16. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 43: Cho phương trình $3^{1+\frac{3}{x}}-3.3^{\frac{2}{x}-2\sqrt{x}+1}+(m+2).3^{1+\frac{1}{x}-4\sqrt{x}}-m.3^{1-6\sqrt{x}}=0$. Có nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2021]$ để phương trình có nghiệm?

A. 1345. **B.** 2126. **C.** 1420. **D.** 1944.

Câu 44: Cho phương trình $(x^2-2mx)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm thực x?

A. 4. **B.** 5 . **C.** 2. **D.** 3.

Câu 45: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a.4^x-b.2^x+50=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $9^x-b.3^x+50a=0$ có hai nghiệm x_3,x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3+x_4>x_1+x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=3a+4b$.

A. 109 . **B.** 51 . **C.** 49 . **D.** 87 .

Câu 46: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1}=125-(x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+5y$ là

A. $P_{\min}=125$. **B.** $P_{\min}=57$. **C.** $P_{\min}=43$. **D.** $P_{\min}=25$.

Câu 47: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$(4xy+7y)(2x-1)\left(e^{2xy}=e^{4x+y+7}\right)=\left[2x(2-y)+y+y\right]e^y.$$

A. 6 . **B.** 5 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Câu 48: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình mũ: $4^{x^2-2x+2}-\left(\frac{m}{21}-3\right)2^{x^2-2x+3}+\frac{m}{21}+3=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $(0;3]$ Số phần tử của S là

A. 3 . **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** Vô số.

Câu 49: Có bao nhiêu cặp $(x;y)$ thỏa mãn $10^{\frac{10}{x+y}}=\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)10^{\frac{1}{xy}}$ và $x\in\mathbb{N}^*$, $y>0$.

A. 14 . **B.** 7 . **C.** 21 . **D.** 10 .

Câu 50: Cho phương trình $3^{(x+1)^2}.\log_3\left(x^2+2x+3\right)-9^{|x-m|}.\log_3\left(2|x-m|+2\right)=0$. Gọi S là tập tất cả các giá trị m để phương trình có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

A. -3 . **B.** -2 . **C.** 0. **D.** 3.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C

Ta có $\ln\left(x^2-11x-5m\right)=\ln\left(x-m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-11x-5m>0\\x-m>0\\x^2-11x-5m=x-m\end{cases}$

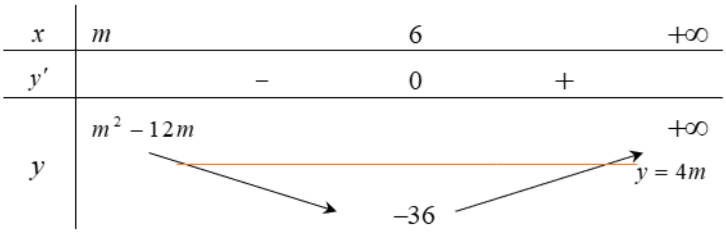
$\Leftrightarrow\begin{cases}x-m>0\\x^2-12x=4m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>m\\x^2-12x=4m\ (*)\end{cases}$

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-12x$ trên khoảng $(m;+\infty)$, ta thấy

$f'\left(x\right)=2x-12$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=6$.

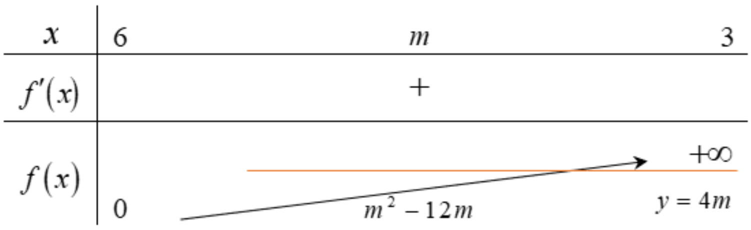
Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=4m$.

Trường hợp 1: $m\le 6$:



Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực khi $4m\ge -36\Leftrightarrow m\ge -9$.
Kết hợp điều kiện $m\le 6$, ta được $-9\le m\le 6$.
Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-9;-8....5;6\right\}$ có 16 giá trị nguyên.

Trường hợp 2: $m>6$:



Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực khi $4m>m^2-12m$

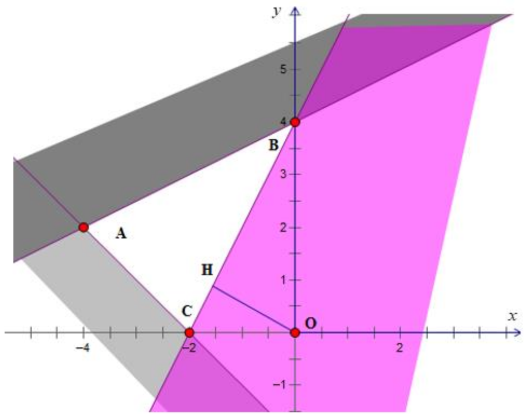
$\Leftrightarrow m^2-16m<0\Leftrightarrow 0<m<16$. Kết hợp điều kiện $m>6$, ta được $6<m<16$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{7;8;\ ....;15\right\}$ có 9 giá trị nguyên.

Vậy có 25 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2: Chọn B

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y+8\ge 0\\x+y+2\ge 0\\2x-y+4\le 0\end{cases}$



Với $\Delta_1 : x-2y+8=0$; $\Delta_2 : x+y+2=0$; $\Delta_3 : 2x-y+4=0; A(-4;2); B(0;4); C(-2;0)$

Miền nghiệm của hệ phương trình là phần giới hạn bởi ΔABC

$\Rightarrow g(a;b)=a^2+b^2=OM^2, M(a;b)\in \Delta ABC$; $OM_{\min}=OH=d(O;BC)=\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow m\in\left[0;\frac{4}{\sqrt{5}}\right]$

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2+|1-m|\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-2+|1-m|=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t\\ x^2-2x-3=\left(2+\sqrt{3}\right)^t\end{cases}$$

$$\Rightarrow |1-m|=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$$

Xét $f(t)=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^t-\left(2+\sqrt{3}\right)^t-1$ có $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\left[\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\ln\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}\right]=t_0$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		t_0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow |1-m|=f(t)$ luôn có nghiệm duy nhất t_1

$\Rightarrow x^2-2x-3-\left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1}=0; \Delta'=4+\left(2+\sqrt{3}\right)^{t_1}>0$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 và $x_1+x_2=2\in\left(1;2+\sqrt{3}\right)$.

Câu 3: Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}0<x,y\neq 1\\ x>y\\ m>0\end{cases}$.

Ta có $\log_x y=\log_y x\Leftrightarrow \log_x y=\frac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_x y=1\\ \log_x y=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\ \text{(loai)}\\ y=x^{-1}\ \text{(nhan)}\end{array}\right.$.

Với $y=\frac{1}{x}\Rightarrow x>\frac{1}{x}\Rightarrow x>1$ (do $x>0$).

Khi đó $\log_x\left[m(x+y)\right]=\log_y(x-y)+2 \Leftrightarrow \log_x\left[m\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]=\log_{\frac{1}{x}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+2$

$\Leftrightarrow \log_x\left[m\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]+\log_x\left(x-\frac{1}{x}\right)=2 \Leftrightarrow \log_x\left[m\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\right]=2$

$\Leftrightarrow m\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=x^2 \Leftrightarrow m=\frac{x^4}{x^4-1} \Leftrightarrow \frac{1}{m}=1-\frac{1}{x^4}$ (*).

Để tồn tại hai số x,y thì phương trình (*) có nghiệm $x>1$.

Với mọi $x>1$ thì $0<1-\frac{1}{x^4}<1$, do đó để thỏa mãn bài ra thì $0<\frac{1}{m}<1 \Leftrightarrow m>1$. Vậy $m>1$.

Câu 4: **Chọn D**

Xét phương trình: $4^x-(m+4)2^x+2=0$ (1)

Đặt $t=2^x\,(t>0)$. Khi đó (1) trở thành: $t^2-(m+4)t+2=0$ (2)

Ta có: (1) có hai nghiệm thực $x_1,x_2 \Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương t_1,t_2

$\Leftrightarrow \begin{cases}(m+4)^2-8\ge 0\\ m+4>0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge -4+2\sqrt{2}$ $(*)$.

Theo Viet ta có $\begin{cases}t_1+t_2=m+4\\ t_1.t_2=2\end{cases}$.

Giả sử $\begin{cases}t_1=2^{x_1}\\ t_2=2^{x_2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\log_2 t_1\\ x_2=\log_2 t_2\end{cases}$. Khi đó từ $t_1.t_2=2 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2 \Leftrightarrow x_1+x_2=1$.

Do đó $(x_1+2)(x_2+2)=4 \Leftrightarrow x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=4 \Leftrightarrow x_1x_2=-2$

$\Rightarrow \log_2 t_1.\log_2 t_2=-2 \Leftrightarrow \log_2 t_1.\log_2\frac{2}{t_1}=-2 \Leftrightarrow \log_2 t_1.(1-\log_2 t_1)=-2$

$\Leftrightarrow (\log_2 t_1)^2-\log_2 t_1-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 t_1=-1\\ \log_2 t_1=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_1=\frac{1}{2}\Rightarrow t_2=4\\ t_1=4\Rightarrow t_2=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow t_1+t_2=\frac{9}{2}$

$\Rightarrow m+4=\frac{9}{2}\Rightarrow m=\frac{1}{2}$ $(\text{tm}(*))$. Vậy $m=\frac{1}{2}\in(-\infty;1)$

Câu 5: **Chọn A**

Đặt $\log_3 x=t$. Phương trình $(*)$ trở thành $t^2-3t+2m-7=0$.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $\Delta=3^2-4(2m-7)>0 \Leftrightarrow 37-8m>0 \Leftrightarrow m<\frac{37}{8}$

Theo vi-ét ta có $t_1+t_2=3 \Leftrightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=3 \Leftrightarrow x_1.x_2=27$.

$(x_1+3)(x_2+3)=72 \Rightarrow 3(x_1+x_2)+x_1.x_2+9=72$

$\Rightarrow x_1+x_2=12$. Kết hợp với $x_1x_2=27 \Rightarrow \begin{cases}x_1=3\\ x_2=9\end{cases}$ (giả sử $x_1<x_2$)

Khi đó $t_1 = 1; t_2 = 2 \Rightarrow t_1.t_2 = 2m - 7 = 2 \Rightarrow m = \frac{9}{2}$.

Thử lại, thấy $m = \frac{9}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Chọn A

Đặt $3^x = t \Rightarrow t > 0$. Phương trình $(*)$ trở thành $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0$.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_1 > 0 > x_2 \left(x_1 > x_2\right)$

$\Leftrightarrow 3^{x_1} > 1 > 3^{x_2} \Leftrightarrow t_1 > 1 > t_2 > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (3m-2) > 0 \\ t_1 + t_2 > 1 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 2m > 1 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \\ 3m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m > \frac{1}{2} \\ 3m - 2 - 2m + 1 < 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 1 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m < 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow 3a + 4b = 6.$$

Câu 7: Chọn B

Đặt $t = \log_2\left(\frac{\left|x^3 + y^3\right|}{x^2 + y^2}\right) = \log_3(x + y)$.

Ta có $\begin{cases} \frac{\left|x^3 + y^3\right|}{x^2 + y^2} = 2^t \\ x + y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x+y|\left|x^2 - xy + y^2\right|}{x^2 + y^2} = 2^t \\ x + y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)}{x^2 + y^2} = 2^t \\ x + y = 3^t \quad (1) \end{cases} \quad (I)$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^t \quad (2)$$

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} \Leftrightarrow \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$

Do đó $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}$. Từ (2) suy ra $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^t \leq \frac{3}{2}$ hay $-1 \leq t \leq \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$

Mặt khác $x + y = 3^t$ (là số nguyên dương nên $x + y \in \{1;2;3;4;5;6\}$

Từ (2) ta có $xy=\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\right)3^{2t}}{3-2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^t}$. Do $\left(3^t\right)^2>\dfrac{4.\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^t\right)3^{2t}}{3-2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^t}\quad \forall t\quad -1\le t\le \dfrac{\ln 2}{\ln 3-\ln 2}$

Nên luôn tồn tại $x,y\ (x\ne y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán với $x+y\in\{1;2;3;4;5;6\}$.Có 12 cặp.

Câu 8: **Chọn B**

$\log_3\dfrac{x^2+2y+m}{x+y}+x^2-3x-y+m-1=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+2y+m\right)+x^2+2y+m=\log_3 3(x+y)+3(x+y)\qquad (1)$

Vì $x,y>0$ nên $x+y>0$. Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\ x^2+2y+m=3x+3y\Leftrightarrow x^2-3x-y+m=0\qquad (*)$

Kết hợp với điều kiện $5x+y=4\Rightarrow y=4-5x$. Vì $x,y>0\Rightarrow 0<x<\dfrac{4}{5}$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow x^2+2x+m-4=0\Leftrightarrow m=-x^2-2x+4,\forall x\in\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$.

Hàm số $y=-x^2-2x+4$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$ (do $-1<0$) nên $\dfrac{44}{25}<-x^2-2x+4<4$.

Do vậy $m\in\{2;3\}$ là các giá trị cần tìm. Vậy tổng tất cả các giá trị m thỏa ycbt là 5.

Câu 9: **Chọn B**

Đặt $\log_5(x-m)=y\Rightarrow x-m=5^y\Leftrightarrow 5^y+m=x$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $5^x+m=y$. Do đó, ta có hệ phương trình sau

$\begin{cases}5^x+m=y\\5^y+m=x\end{cases}\Rightarrow 5^x-5^y=y-x\Leftrightarrow 5^x+x=5^y+y\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=5^t+t$ trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=5^t.\ln 5+1>0\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow x=\log_5(x-m)\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-5^x$ trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=1-5^x\ln 5$; $g'(x)=0\Leftrightarrow 5^x=\dfrac{1}{\ln 5}\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)=x_0$

$\Rightarrow g\left(\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)\right)=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)-\dfrac{1}{\ln 5}\simeq -0{,}917=y_0$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	y_0	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \le \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right) - \frac{1}{\ln 5} \simeq -0,917$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \cap (-20;20)$ nên suy ra $m \in \{-1;-2;...;-19\}$ $\Rightarrow$ có $-1-(-19)+1 = 19$ số nguyên.

Câu 10: Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases} -1 < x < 5 \\ y \ne -4 \end{cases}$.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}\left(y^2+8y+16\right) + \log_2\left[(5-x)(1+x)\right] = 2\log_3 \frac{5+4x-x^2}{3} + \log_2(2y+8)^2$

$\Leftrightarrow \log_{3^{\frac{1}{2}}}(y+4)^2 + \log_2\left[(5-x)(1+x)\right] = 2\left\{\log_3\left[(5-x)(1+x)\right] - \log_3 3\right\} + \left[\log_2 4 + \log_2 (y+4)^2\right]$

$\Leftrightarrow 2\log_3(y+4)^2 + \log_2\left[(5-x)(1+x)\right] = 2\log_3\left[(5-x)(1+x)\right] + \log_2(y+4)^2$

$\Leftrightarrow 2\log_3(y+4)^2 - \log_2(y+4)^2 = 2\log_3\left[(5-x)(1+x)\right] - \log_2\left[(5-x)(1+x)\right]$ (*)

Xét hàm số: $f(t) = 2\log_3 t - \log_2 t$ trên $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(t) = \frac{2}{t.\ln 3} - \frac{1}{t.\ln 2} = \frac{2\ln 2 - \ln 3}{t.\ln 2.\ln 3} > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow f\left((y+4)^2\right) = f\left((5-x)(1+x)\right) \Leftrightarrow (y+4)^2 = (5-x)(1+x) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$

Đặt: $\begin{cases} x = 2+3\cos t \\ y = -4+3\sin t \end{cases}$

$P = \left|\sqrt{x^2+y^2} - m\right| = \left|\sqrt{(2+3\cos t)^2 + (-4+3\sin t)^2} - m\right| = \left|\sqrt{29+12\cos t - 24\sin t} - m\right|$

Ta có: $29 - 12\sqrt{5} \le 29 + 12\cos t - 24\sin t \le 29 + 12\sqrt{5}$

$\Rightarrow -3+2\sqrt{5} \le \sqrt{29+12\cos t - 24\sin t} \le 3+2\sqrt{5}$

$\Rightarrow -3+2\sqrt{5} - m \le \sqrt{29+12\cos t - 24\sin t} - m \le 3+2\sqrt{5} - m \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P_{\max} = \left|-3+2\sqrt{5}-m\right| \\ P_{\max} = \left|3+2\sqrt{5}-m\right| \end{array}\right.$

$P_{\max} \le 10 \Rightarrow \begin{cases} \left|-3+2\sqrt{5}-m\right| \le 10 \\ \left|3+2\sqrt{5}-m\right| \le 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -10 \le -3+2\sqrt{5}-m \le 10 \\ -10 \le 3+2\sqrt{5}-m \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13+2\sqrt{5} \le m \le 7+2\sqrt{5} \\ -7+2\sqrt{5} \le m \le 13+2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow -7+2\sqrt{5} \le m \le 7+2\sqrt{5}$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;...10;11\}$. Do đó số phần tử của S là: 14

$\Rightarrow$ Số tập con khác rỗng của S là $2^{14} - 1 = 16383$.

Câu 11: Chọn A

Theo đề ra ta chọn điều kiện của x là $x > 0 \Rightarrow \ln(x+1) > 0$.

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \ln(x+1) = -1$ (L)

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(x+1) = -1\ (L) \\ \ln(x+1) = \dfrac{x+2}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x+2} = \dfrac{1}{m}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+2}$ với $x > 0$. Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+1} - \ln(x+1) = 0$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1} - \ln(x+1)$ có $g'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} < 0\ \forall x > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow g(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;+\infty)$ $\quad (2)$

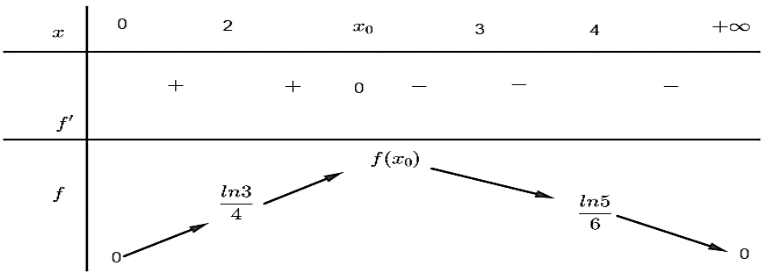
Mặt khác: $g(2)g(3) = \left(\dfrac{4}{3} - \ln 3\right)\left(\dfrac{5}{4} - \ln 4\right) < 0$ và hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$

Suy ra $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (2;3)$ $\quad (3)$.

Từ $(2);(3)$ suy ra $g(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in (2;3)$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in (2;3)$.

Bảng biến thiên



Để (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ thì $0 < \dfrac{1}{m} < \dfrac{\ln 5}{6} \Leftrightarrow m > \dfrac{6}{\ln 5} \Rightarrow a = \dfrac{6}{\ln 5} \approx 3{,}728$

Câu 12: Chọn D

Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log x + \log(x+1) + x^2 + x = y + 10^y$

$\Leftrightarrow \log[x(x+1)] + x^2 + x = y + 10^y \Leftrightarrow \log(x^2+x) + x^2 + x = \log(10^y) + 10^y$

Xét hàm số: $f(t) = \log t + t$ với $t > 0$ $\quad f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 10} + 1 > 0,\ \forall t > 0$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Rightarrow x^2 + x = 10^y$

Vì $1 \le x^2 + x \le 2020$ nên $1 \le 10^y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le y \le \log 2020 \approx 3{,}305$

Mà y chỉ nhận giá trị nguyên nên $y \in \{0;1;2;3\}$.

Với $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Với $y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$ (loại).

Với $y = 2 \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{401}}{2}$ (loại).

Với $y = 3 \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{4001}}{2}$ (loại).

Vậy không có bộ hai số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Chọn C

Ta có $2\left[x+\ln(x+1)\right]+x^2+1=y+e^y \Leftrightarrow \ln(x+1)^2+(x+1)^2=\ln e^y+e^y\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0$ với mọi $t\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(t)=\ln t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow (x+1)^2=e^y \Leftrightarrow y=\ln(x+1)^2$.

Vì x nguyên nên e^y nguyên mà e^y nguyên khi và chỉ khi $y=0$.

Thử lại ta thấy $y=0$ thì $x=0$.

Vậy có duy nhất một cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14: Chọn D

Có: $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.\log_2\left((x-1)^2+2\right)=2^{2|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$, (1)

Xét hàm số $g(t)=2^t.\log_2(t+2), t\ge 0$. Có $g'(t)=2^t\ln 2.\log_2(t+2)+\dfrac{2^t}{(t+2)\ln 2}$.

Dễ thấy, $g'(t)>0\ \forall t\ge 0$ nên hàm số $g(t)=2^t.\log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$, (2)

Từ (1), (2) ta có: $(x-1)^2=2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=2(x-m),\ x\ge m\\ (x-1)^2=-2(x-m),\ x<m\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+2m+1=0,\ x\ge m\quad (3)\\ x^2=2m-1,\ x<m\quad (4)\end{array}\right.$

Trường hợp 1: (3) có nghiệm kép và (4) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m=0\\ 2m-1<0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

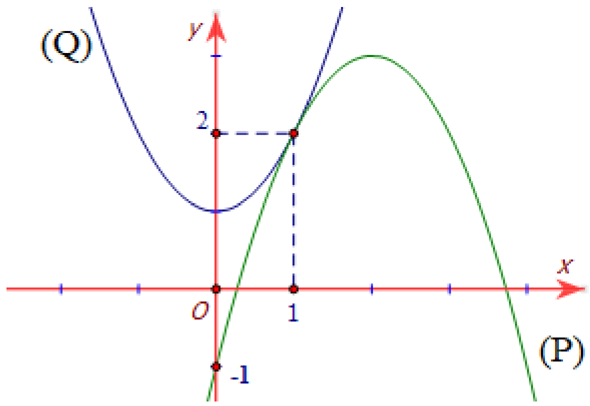
Trường hợp 2: (3) vô nghiệm và (4) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m<0\\ 2m-1=0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Trường hợp 3: (3) và (4) có nghiệm kép trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m=0\\ 2m-1=0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Vậy không có m thỏa yêu cầu của đề bài.

Cách khác: Ta có: $\left[\begin{array}{l}2m=-x^2+4x-1,\ x\ge m\quad (P)\\ 2m=x^2+1,\ x<m\quad (Q)\end{array}\right.$

Đồ thị (P) và (Q) là hai parabol như hình vẽ.



Theo đồ thị thì đường thẳng $y=2m$ luôn có nhiều hơn một điểm chung với (P) và (Q) nên không có giá trị m thỏa yêu cầu của đề bài.

Câu 15: Chọn B

Giải bất phương trình $2|y-2|-|y|+y^2-y\le 7$ (1).

Bảng xét dấu

y	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
y		$-$	0	$+$	|	$+$	

Trường hợp 1: $y<0$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -2(y-2)+y+y^2-y\le 7 \Leftrightarrow y^2-2y-3\le 0 \Leftrightarrow -1\le y\le 3$

Kết hợp điều kiện $y<0$ suy ra $-1\le y<0$ (*)

Trường hợp 2: $0\le y<2$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -2(y-2)-y+y^2-y\le 7 \Leftrightarrow y^2-4y-3\le 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{7}\le y\le 2+\sqrt{7}$

Kết hợp với điều kiện $0\le y<2$ suy ra $0\le y<2$ (**)

Trường hợp 3: $y\ge 2$

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 2(y-2)-y+y^2-y\le 7 \Leftrightarrow y^2-11\le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{11}\le y\le \sqrt{11}$

Kết hợp với điều kiện $y\ge 2$ suy ra $2\le y<\sqrt{11}$ (***)

Từ (*), (**), (***) suy ra tập nghiệm của bất phương trình (1) là $-1\le y\le \sqrt{11}$.

Ta có $7^{|x^2-4x-5|-\log_7 5}=\dfrac{7^{|x^2-4x-5|}}{7^{\log_7 5}}=\dfrac{7^{|x^2-4x-5|}}{5}\ge \dfrac{1}{5}$

Lại có $-1\le y\le \sqrt{11} \Leftrightarrow 1\le y+2\le \sqrt{11}+2 \Leftrightarrow -\sqrt{11}-2\le -(y+2)\le -1 \Rightarrow 5^{-(y+2)}\le 5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

Nên $7^{|x^2-4x-5|-\log_7 5}=5^{-(y+2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{|x^2-4x-5|-\log_7 5}=\dfrac{1}{5} \\ 5^{-(y+2)}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^2-4x-5\right|-\log_7 5=\log_7 \dfrac{1}{5} \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^2-4x-5\right|=0 \\ y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right. \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy có 2 cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đề bài là $(-1;-1)$ và $(5;-1)$.

Câu 16: Chọn A

$\log_3\left(x^2+2mx+2m^2-1\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right)$ $(*)$.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+2mx+2m^2-1>0 \\ x^2+2x+3>0 \\ x^2+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1>0$.

Để bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì trước hết $x^2+2mx+2m^2-1>0$ phải có nghiệm với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$\begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ m^2-\left(2m^2-1\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-m^2<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.(1)$.

Với $x=-1$ thì $(*)$ trở thành

$\log_3\left(2m^2-2m\right)\le 1+\log_2(2).\log_3(4)=\log_3 12$

$\Leftrightarrow 2m^2-2m\le 12 \Leftrightarrow m^2-m-6\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 3\ (2)$

Từ (1), (2) và do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;2;3\}$.

Thử lại:

Với $m=3$ thì $(*)$ trở thành $\log_3\left(x^2+6x+17\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right)$. Tuy nhiên bất phương trình trên không thoả với $x=-\dfrac{1}{2}$ nên chúng ta loại trường hợp này.

Với $m=\pm 2$ thì $(*)$ trở thành $\log_3\left(x^2\pm 4x+7\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right)$.

Bất phương trình trên có nghiệm với mọi $x\in\mathbb{R}$ vì

$\log_3\left(x^2\pm 4x+7\right)\le \log_3\left(3x^2+9\right)=1+\log_3\left(x^2+3\right)\le 1+\log_2\left(x^2+2x+3\right).\log_3\left(x^2+3\right), \forall x\in\mathbb{R}$

Tóm lại $m\in\{-2;2\}$.

Câu 17: Chọn D

Điều kiện xác định $x+y-1>0$.

Xét phương trình $\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2(x+y-1)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le \log_2 4+\log_2(x+y-1)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2\le 4(x+y-1)$ (Khi đó điều kiện xác định $x+y-1>0$ luôn đúng)

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+6\le 0\ (1)$

Cặp (x,y) thỏa mãn BPT (1) thuộc hình tròn có tâm $I(2;2);R=\sqrt{2}$

Cặp (x,y) thỏa mãn PT $3x+4y-m=0$ thuộcđường thẳng d.

Vì trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2(x+y-1)$ chỉ có duy nhất một cặp $(x;y)$ thỏa mãn $3x+4y-m=0$ nên hệ $\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2(x+y-1)\\3x+4y-m=0\end{cases}$ phải có nghiệm duy nhất.

Khi đó đường thẳng d tiếp xúc với hình tròn có tâm $I(2;2);R=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow d(I,d)=R\Leftrightarrow \dfrac{|3.2+4.2-m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{|14-m|}{5}=\sqrt{2}\Leftrightarrow m-14=\pm5\sqrt{2}\Leftrightarrow m=14\pm5\sqrt{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị m tìm được là $14+5\sqrt{2}+14-5\sqrt{2}=28$.

Câu 18: Chọn C

Ta có

$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(xy)\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow xy\ge x+y^2\Leftrightarrow y^2-xy+x\le 0.$

$\Leftrightarrow y^2\le(y-1)x\Rightarrow y>1.$ Suy ra $x\ge\dfrac{y^2}{y-1}\Rightarrow P=x+3y\ge\dfrac{4y^2-3y}{y-1}=f(y)$, trên miền $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(y)=\dfrac{4y^2-8y+3}{(y-1)^2}$, $f'(y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}(l)\\y=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$. Do đó $P_{\min}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=9.$

Câu 19: Chọn A

Bất phương trình đã cho tương đương $\log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}7\left(x^2+2x+2\right)>x^2+6x+5+m\\x^2+6x+5+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+8x+9>m\\x^2+6x+5>-m\end{cases}$ có nghiệm $\forall x\in(1;3)$. (1)

Xét $\begin{cases}f(x)=6x^2+8x+9\\g(x)=x^2+6x+5\end{cases},\forall x\in(1;3)$, ta có $\begin{cases}f'(x)=12x+8>0\\g'(x)=2x+6>0\end{cases},\forall x\in(1;3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)\ge m\\g(1)\ge -m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}23\ge m\\12\ge -m\end{cases}\Leftrightarrow -12\le m\le 23$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-12,-11,-10,...21,22,23\}$. Vậy có 36 giá trị m cần tìm.

Câu 20: Chọn B

Từ giả thiết kết hợp ĐKXĐ của bất phương trình ta có: $1\le y\le 2020;4\le x\le 2020;x,y\in Z$,(1).

Ta có: $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$

$\Leftrightarrow(x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)+(x-3)(y-2)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$ (*).

Xét $f(x)=\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)=\log_2\left(2+\dfrac{7}{x-3}\right)>0,\forall x\in[4;2020]$ (2).

Với $y=1$ thay vào (*) ta được:

$3(x+4)\log_3\left(\frac{2}{3}\right)-(x-3)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$ (luôn đúng $\forall x\in\left[4;2020\right]$do (1) và (2)).

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$. Với $y=2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x\in\left[4;2020\right]$.

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$. Với $3\le y\le 2020\Rightarrow y-2>0$.

Xét $g(y)=\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)=\log_3\left(\frac{y+y}{y+2}\right)>\log_3\left(\frac{y+2}{y+2}\right)=0,\forall y\ge 3$ (3).

Suy ra (*) vô nghiệm (Do (2) và (3)). Vậy có 4034 bộ $(x;y)$.

Câu 21: Chọn D

Ta có

$a^{x^2}.\left(b+4c\right)^{2x+3}\ge 1\Leftrightarrow x^2+\left(2x+3\right)\log_a\left(b+4c\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+2\log_a\left(b+4c\right).x+3\log_a\left(b+4c\right)\ge 0\left(*\right)$

$\left(*\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\log_a^2\left(b+4c\right)-3\log_a\left(b+4c\right)\le 0\Leftrightarrow 0\le\log_a\left(b+4c\right)\le 3\Leftrightarrow 1\le b+4c\le a^3$.

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel cho các số thực a,b và các số thực dương x,y, ta có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}$ với dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$;

và bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương, ta có

$$P=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{16a}{3}+\frac{1}{b}+\frac{4}{4c}\ge\frac{16a}{3}+\frac{9}{b+4c}\ge\frac{16a}{3}+\frac{9}{a^3}$$
$$\ge\frac{16a}{9}+\frac{16a}{9}+\frac{16a}{9}+\frac{9}{a^3}\ge 4\sqrt[4]{\frac{16a}{9}.\frac{16a}{9}.\frac{16a}{9}.\frac{9}{a^3}}=\frac{32}{3}$$
. Suy ra $\min P=\frac{32}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{16a}{9}=\frac{9}{a^3}\\ b+4c=a^3\\ b=2c\\ a>1,b>0,c>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=\frac{9}{8}\\ c=\frac{9}{16}\end{cases}$.

Khi đó $m=\frac{3}{2},n=\frac{9}{8},p=\frac{9}{16}$ và $m+n+p=\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{9}{16}=\frac{51}{16}$.

Câu 22: Chọn B

$$\log_{3a}11+\left(\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt{x^2+3ax+10}+4\right)\right).\log_{3a}\left(x^2+3ax+12\right)\ge 0\quad\left(1\right)$$

Điều kiện $\begin{cases}x^2+3ax+10\ge 0\\ 0<a\ne\frac{1}{3}\end{cases}$. Đặt $t=\sqrt{x^2+3ax+10}$, $t\ge 0$.

$\left(1\right)\Leftrightarrow\log_{3a}11-\left[\log_7\left(t+4\right)\right].\log_{3a}\left(t^2+2\right)\ge 0\quad\left(2\right)$.

$\left(1\right)$ có nghiệm duy nhất suy ra $\left(2\right)$có nghiệm duy nhất.

Vế trái của $\left(2\right)$ là một hàm số liên tục theo biến t trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$.

Điều kiện cần để (2) có nghiệm duy nhất là phương trình

$\log_{3a}11-\left[\log_7(t+4)\right].\log_{3a}\left(t^2+2\right)=0\quad(3)$ có nghiệm duy nhất.

Ta có $(3)\Leftrightarrow 1-\log_7(t+4).\log_{11}\left(t^2+2\right)=0\Leftrightarrow\log_7(t+4).\log_{11}\left(t^2+2\right)=1$.

Đặt $f(t)=\log_7(t+4).\log_{11}\left(t^2+2\right),\ t\geq 0$.

Dễ thấy hàm $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ và $f(3)=1$.

Suy ra phương trình (3) có nghiệm duy nhất $t=3$.

Ta có $t=3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3ax+10}=3\Leftrightarrow x^2+3ax+1=0\quad(4)$.

Phương trình (4) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\Delta=0\Leftrightarrow 9a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{3}$.

So với điều kiện ta nhận $a=\dfrac{2}{3}$. Thử lại với $a=\dfrac{2}{3}$ bất phương trình (1) trở thành

$\log_2 11-\log_7\left(\sqrt{x^2+2x+10}+4\right).\log_2\left(x^2+2x+12\right)\geq 0\quad(5)$. Đặt $u=\sqrt{x^2+2x+10},u\geq 3$.

Khi đó $(3)\Leftrightarrow\log_7(u+4).\log_2\left(u^2+2\right)\leq\log_2 11\quad(6)$.

Vì hàm $h(u)=\log_7(u+4).\log_2\left(u^2+2\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $[3;+\infty)$ và $h(3)=\log_2 11$ nên $(6)\Leftrightarrow h(u)\leq h(3)\Leftrightarrow u\leq 3$.

Kết hợp với $u\geq 3$ suy ra $u=3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+10}=3\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy giá trị a thỏa mãn bài toán là $a=\dfrac{2}{3}\in(0;1)$.

Câu 23: Chọn B

Ta có: $\log_{x^2+y^2+3}(2x+2y+5)\geq 1\Leftrightarrow 2x+2y+5\geq x^2+y^2+3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-2\leq 0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2\leq 4\ \ (1)$.

(1) là hình tròn (C) tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=2$.

Mặt khác $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+3)^2=m(2)$.

Với $m=0$, $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$. Ta thấy $(x;y)=(-2;-3)$ không thỏa mãn bất phương trình (1).

Với $m<0$, không tồn tại cặp $(x;y)$ thỏa mãn (2).

Với $m>0$ thì phương trình (2) là phương trình đường tròn (C') tâm $I_2(-2;-3)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$

Tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hệ (1) và (2) khi và chỉ khi (C) và (C') có một điểm chung duy nhất $\Leftrightarrow$ hình tròn (C) và đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với nhau, hoặc hình tròn (C) nằm trong (C') và tiếp xúc trong với nhau $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}I_1I_2=R_1+R_2\\I_1I_2=R_2-R_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5=\sqrt{m}+2\\5=\sqrt{m}-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\\m=49\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Chọn A

Từ phương trình $2020^2\left(2020^{x^2+y^2}-2020^{2x-6y-6}\right)+(x-1)^2+(y+3)^2\le 4$ ta có

$2020^{x^2+y^2+2}-2020^{2x-6y-6+2}+x^2+y^2-2x+6y+6\le 0$

$\Leftrightarrow 2020^{x^2+y^2+2}+x^2+y^2+2\le 2020^{2x-6y-4}+2x-6y-4$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2020^t+t,\forall t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=2020^t.\ln 2020+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ do đó f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bất phương trình (1) trở thành $f\left(x^2+y^2+2\right)\le f(2x-6y-4)\Leftrightarrow x^2+y^2+2\le 2x-6y-4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2\le 4$. (*)

Ta thấy miền nghiệm của bất phương trình (*) là hình tròn tâm $I_1(1;-3)$ và bán kính $R_1=2$.

Từ phương trình $e^{(x+1)^2+(y-3)^2}\le\left(x^2+y^2+2x-6y+11-m\right).e^m$ ta có

$e^{(x+1)^2+(y-3)^2-m}\le (x+1)^2+(y-3)^2-m+1$ (2)

Xét hàm số $g(t)=e^t-t-1,\forall t\in\mathbb{R}$ có $g'(t)=e^t-1$ do đó ta có bảng biến thiên là

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Suy ra bất phương trình $g(t)\le 0\Leftrightarrow t=0$, do đó bất phương trình (2) trở thành

$(x+1)^2+(y-3)^2-m=0$ (**)

Để hệ phương trình có nghiệm thì phương trình (**) có nghiệm, hay $m\ge 0$.

Nếu $m=0$, phương trình (**) có nghiệm $(-1;3)$ không thỏa mãn (*)

Nếu $m>0$, khi đó tập hợp điểm $M(x,y)$ biểu diễn nghiệm của phương trình nằm trên đường tròn tâm $I_2(-1;3)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$.

Do đó để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì hai đường tròn này phải tiếp nhau hay

$$\left[\begin{array}{l} I_1I_2=R_1+R_2 \\ I_1I_2=\left|R_1-R_2\right| \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{10}=2+\sqrt{m} \\ 2\sqrt{10}=\left|2-\sqrt{m}\right| \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=44-8\sqrt{10} \\ m=44+8\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Do đó tổng các phần tử của m là 88.

Câu 25: Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \\ x,y\in\mathbb{Z} \end{cases}$. Khi đó

$\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)\Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge(x+y)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2 - x > (x+y)^{\log_3 4} - (x+y)\ (1)$

Đặt $t = x + y \Rightarrow t \ge 1$ thì (1) được viết lại là $x^2 - x > t^{\log_3 4} - t\ \ (2)$

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 242 nghiệm t.

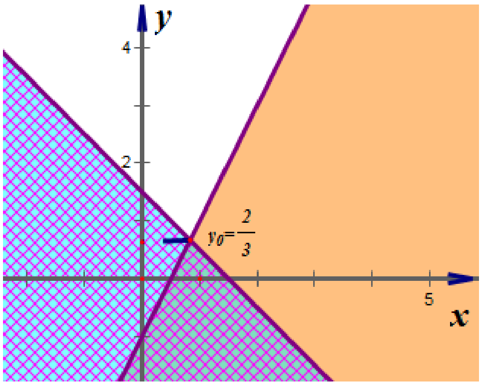
Nhận thấy $f(t) = t^{\log_3 4} - t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2 - x > 243^{\log_3 4} - 243 = 781$ thì sẽ có ít nhất 243 nghiệm nguyên $t \ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2 - x \le 781 \Leftrightarrow -27,4 \le x \le 28,4$.

Mà x nguyên nên $x \in \{-27,-26,...,27,28\}$.

Vậy có tất cả $28 + 28 = 56$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Chọn A



Ta có: $P = 3^{y-2x+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{y-2x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{y-2x+1} \ge 1$

Nhận xét: Nếu $y - 2x + 1 < 0$ thì $3^{y-2x+1} < 1$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^{y-2x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{y-2x+1}$ vậy nên $P < 1$.

Nếu $y - 2x + 1 \ge 0$ thì $3^{y-2x+1} \ge 1$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^{y-2x+1} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{y-2x+1}$ vậy nên $P \ge 1$

Do vậy: $y - 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow P \ge 1 \quad (1)$.

Từ (1) ta có $Q \ge 1 \Rightarrow 3y \ge y + 3 - 2x \Leftrightarrow 2x + 2y - 3 \ge 0 \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ ta được $\begin{cases} y - 2x + 1 \ge 0 \\ 2x + 2y - 3 \ge 0 \end{cases}$. Vậy $y = \frac{2}{3}$.

Câu 27: Chọn A

Điều kiện xác định phương trình: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0 \\ \frac{x}{5} > 0 \\ 8x - 2x^2 - 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 3 \end{array}\right. \\ x > 0 \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Với $x = 1$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{5} + 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm bất phương trình.

Với $x = 3$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow \log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \le 0$ (không xảy ra).

$\Rightarrow x=3$ không là nghiệm của bất phương trình.

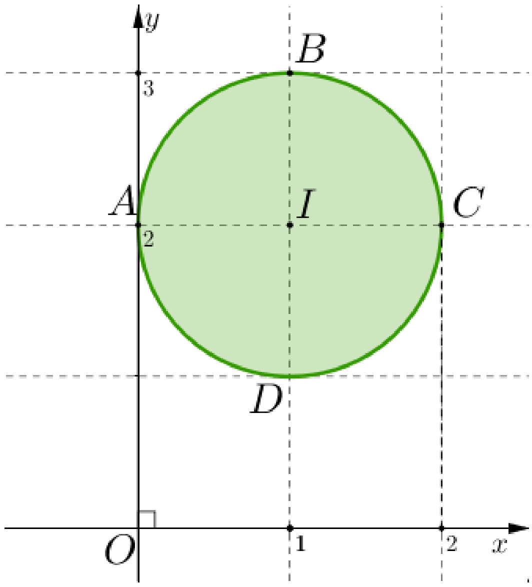
Vậy bất phương trình có một nghiệm nguyên $x\in[-2019;2019]$.

Câu 28: Chọn C

Ta có: $\log_2\left(x^2+y^2+4\right)-\log_2\left(x+2y\right)\le 1\ (1)\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2+4\right)\le \log_2\left(x+2y\right)+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2+4\right)\le \log_2\left(2x+4y\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+4\le 2x+4y\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2\le 1$

Tập hợp những điểm $M(x;y)$ thỏa mãn điều kiện (1) là hình tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R=1$



Từ đó suy ra có 5 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện (1) là: $(1;1)$, $(2;2)$, $(0;2)$, $(1;2)$ và $(1;3)$.

Trong 5 cặp số $(x;y)$ trên thì có 3 cặp số thỏa mãn điều kiện $2x-y\ge 0$ là $(1;1)$, $(1;2)$ và $(2;2)$

Câu 29: Chọn B

Theo bảng biến thiên ta có $f(x)\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Xét bất phương trình $2.6^{f(x)}+\left(f^2(x)-1\right).9^{f(x)}-3.4^{f(x)}.m\ge\left(2m^2+2m\right).2^{2f(x)}$

$\Leftrightarrow 2.6^{f(x)}+\left(f^2(x)-1\right).9^{f(x)}-3.4^{f(x)}.m\ge\left(2m^2+2m\right).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow 2.6^{f(x)}+\left(f^2(x)-1\right).9^{f(x)}\ge\left(2m^2+5m\right).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(f^2(x)-1\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\ge 2m^2+5m$.

Đặt $f(x)=t\Rightarrow t\ge 1$.

Bất phương trình trở thành $2.\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(t^2-1\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\ge 2m^2+5m$. $(*)$

Xét $g(t)=2.\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(t^2-1\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}$, $t\ge 1$.

$g'(t)=2.\ln\frac{3}{2}.\left(\frac{3}{2}\right)^t+2t.\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(t^2-1\right).2\ln\frac{3}{2}.\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}>0\ \ \forall t\ge 1$.

Suy ra $g(t)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right) \Rightarrow g(t) \geq g(1) = 3$.

Để bất phương trình $(*)$ có nghiệm đúng với mọi $t \geq 1$ thì $\min\limits_{t\in\left[1;+\infty\right)} g(t) \geq 2m^2 + 5m$.

Khi đó $3 \geq 2m^2 + 5m \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \dfrac{1}{2}$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3;-2;-1;0\}$.

Câu 30: Chọn D

Điều kiện: $x \geq -1$, với ĐK này ta có $(1) \Leftrightarrow 7^{\sqrt{x+1}}(7^{2x} - 7^2) + 2020(x-1) \leq 0$ (*).

Xét $x > 1$, khi đó ta có $\begin{cases} x-1>0 \\ 7^{2x}-7^2>0 \end{cases}$ do đó $7^{\sqrt{x+1}}(7^{2x}-7^2)+2020(x-1)>0$ nên (*) vô nghiệm, do vậy hệ bất phương trình đã cho không thỏa khi $x > 1$.

Xét $-1 \leq x \leq 1$, khi đó $\begin{cases} x-1\leq 0 \\ 7^{2x}-7^2 \leq 0 \end{cases}$ do đó $7^{\sqrt{x+1}}(7^{2x}-7^2)+2020(x-1) \leq 0$ nên (*) nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1]$. Do vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $x^2-(m+2)x+2m+3 \geq 0$ có nghiệm $x \in [-1;1]$.

Ta có $x^2-(m+2)x+2m+3 \geq 0 \Leftrightarrow m(x-2) \leq x^2-2x+3$, khi xét với $\forall x \in [-1;1]$ ta được

$m(x-2) \leq x^2-2x+3 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ (*).

Đặt hàm số $g(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ ta có $g'(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{3} \\ x = 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$

từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;1]$ như sau

x	- ∞	**-1**		$2-\sqrt{3}$		**1**	+ ∞
g'(x)			+	**0**	-		
g(x)				$2-2\sqrt{3}$			
		-2				**-2**	

Từ bảng biến thiên ta có (*) có nghiệm với $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $m \geq -2$.

Vậy tất cả các giá trị m thỏa mãn bài toán là $m \geq -2$.

Câu 31: Chọn A

Điều kiện : $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y>0 \end{cases}$.

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$. Xét hàm số $f(y) = \log_3(x+y) - \log_4(x^2+y)$.

Tập xác định $\mathrm{D} = (-x;+\infty)$ (do $y > -x \Rightarrow y > -x^2$).

$f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\geq 0,\ \forall x\in D$ (do $x^2+y\geq x+y>0$, $\ln 4>\ln 3$)

$\Rightarrow f$ tăng trên D.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\leq 0$.

Có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f\left(y\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0\Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0 \Leftrightarrow x^2-x-3367<0 \Leftrightarrow -57,5\leq x\leq 58,5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-57,-56,...,58\}$. Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên x thỏa.

Câu 32: Chọn C

Ta có: $\log_5\left(5x+10\right)-y=\dfrac{5^y-x}{2}\Leftrightarrow 2\left[\log_5\left(x+2\right)+1\right]-2y=5^y-x$

$\Leftrightarrow x+2+2\log_5\left(x+2\right)=5^y+2y\Leftrightarrow 5^{\log_5(x+2)}+2\log\left(x+2\right)=5^y+2y$ (1)

Xét hàm số $f\left(t\right)=5^t+2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(t\right)=5^t\ln 5+2>0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f\left(t\right)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) ta có: $f\left(\log_5\left(x+2\right)\right)=f\left(y\right)$, suy ra $\log_5\left(x+2\right)=y$.

Vì $0\leq x\leq 3456$ nên $\log_5 2\leq\log_5\left(x+2\right)\leq\log_5 3458$ suy ra: $\log_5 2\leq y\leq\log_5 3458$.

(tức là $0,43\leq y\leq 5,063$)

Do y là số nguyên nên $y\in\{1;2;3;4;5\}$. Ứng với mỗi giá trị nguyên y, ta có một giá trị nguyên của x thuộc đoạn $\left[0;3456\right]$.

Vậy có 5 cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 33: Chọn D

Do $\begin{cases}x+y>0\\ x\in\mathbb{Z},y\in\mathbb{Z}\end{cases}$ nên $x+y\geq 1$. Đặt $t=x+y$, $\begin{cases}t\geq 1\\ t\in\mathbb{N}\end{cases}$.

Ta có $\log_4\left(t+x^2-x\right)\geq\log_3 t\Leftrightarrow\log_4\left(t+x^2-x\right)-\log_3 t\geq 0$ (1)

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_4\left(t+x^2-x\right)-\log_3 t$, $t\in\left[1;+\infty\right)$

$f'\left(t\right)=\dfrac{1}{\left(t+x^2-x\right)\ln 4}-\dfrac{1}{t\ln 3}<0,\ \forall t\in\left(1;+\infty\right)$

(Do $t+x^2-x\geq t\geq 1,\forall x\in\mathbb{Z}$ nên $0<\dfrac{1}{\left(t+x^2-x\right)}\leq\dfrac{1}{t},\ \forall t\in\left(1;+\infty\right)$)

Hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến và liên tục trên $\left(1;+\infty\right)$.

NX: Với mỗi $x\in\mathbb{Z}$ có không quá 242 giá trị $y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn $(1)\Leftrightarrow$ có không quá 242 giá trị $t\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $f\left(t\right)\geq 0$.

Suy ra $f\left(243\right)<0\Leftrightarrow\log_4\left(243+x^2-x\right)<\log_3 243=5\Leftrightarrow x^2-x-781<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-25\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{1+25\sqrt{5}}{2}$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-27;-26;...;26;27;28\}$.

Vậy có 56 giá trị x thỏa mãn yêu cầu.

Câu 34: Chọn A

Điều kiện xác định $4x+4y-4>0 \Leftrightarrow x+y>1$

Ta có: $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \ge 1 \Leftrightarrow x^2+y^2+2 \le 4x+4y-4 \left(do\, x^2+y^2+2>1\right)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+6 \le 0 \Leftrightarrow x+y \ge \dfrac{x^2+y^2}{4}+\dfrac{3}{2}>1$

Vậy nghiệm của $x^2+y^2-4x-4y+6 \le 0$ luôn thỏa điều kiện xác định

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6 \le 0 \\ x^2+y^2+4x-2y-m=0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6 \le 0 \\ x^2+y^2+4x-2y-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 \le 2 \\ (x+2)^2+(y-1)^2=m+5 \end{cases}$

Ta có: $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ có nghiệm khi và chỉ khi $m+5 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -5$

Trường hợp 1: $m=-5$ ta có

$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2 \le 2 \\ (x+2)^2+(y-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16+1 \le 2 \\ x=-2; y=1 \end{cases}$ (vô lý)

Loại $m=-5$

Trường hợp 2: $m>-5$

Ta có số nghiệm của $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6 \le 0 \\ x^2+y^2+4x-2y-m=0 \end{cases}$ là số điểm chung của hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 2$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 2$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ chỉ có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow$ hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 2$ tâm $I(2;2); R=\sqrt{2}$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ tâm $J(-2;1); R'=\sqrt{m+5}$ tiếp xúc ngoài với nhau hoặc tiếp xúc trong và $R'>R$.

Trường hợp 1: Hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 2$ tâm $I(2;2); R=\sqrt{2}$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ tâm $J(-2;1); R'=\sqrt{m+5}$ tiếp xúc ngoài với nhau

$\Leftrightarrow IJ=R+R' \Leftrightarrow \sqrt{17}=\sqrt{2}+\sqrt{m+5} \Leftrightarrow \sqrt{m+5}=\sqrt{17}-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow m+5=19-2\sqrt{34} \Leftrightarrow m=14-2\sqrt{34}$

Trường hợp 2: Hình tròn $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 2$ tâm $I(2;2); R=\sqrt{2}$ và đường tròn $(x+2)^2+(y-1)^2=m+5$ tâm $J(-2;1); R'=\sqrt{m+5}$ tiếp xúc trong với nhau và $R'>R$

$\Leftrightarrow R'=IJ+R \Leftrightarrow \sqrt{m+5}=\sqrt{17}+\sqrt{2} \Leftrightarrow m+5=19+2\sqrt{34} \Leftrightarrow m=14+2\sqrt{34}$

Vậy $S=\left\{14+2\sqrt{34};14-2\sqrt{34}\right\}$

Câu 35: Chọn D

Ta có: $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}-\left(x^2+y^2-2x+1\right)\le 1\,(*)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1=(x-1)^2+y^2\ge 0$.

Xét hàm số $y=f(t)=2^t-t\Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2-1>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(t)\le f(1)\Leftrightarrow t\le 1$ hay $(x-1)^2+y^2\le 1$ là hình tròn có tâm $I(1;0)$; $R=1$.

Mặt khác $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow (2P-8)x-Py+P-4=0$.

Bài toán trở thành $\dfrac{|3P-12|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}}\le 1 \Leftrightarrow 4P^2-40P+80\le 0\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}$.

Suy ra $\min P=5-\sqrt{5}$.

Câu 36: Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y>0\\ x+y>0\end{cases}$

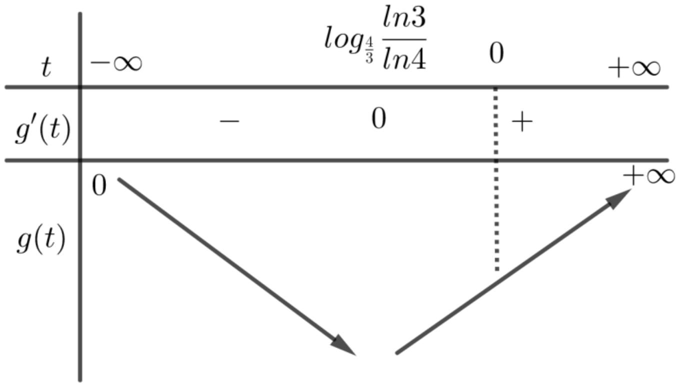
Đặt $t=\log_3(x+y)$. Khi đó $\begin{cases}x+y=3^t\\ x^2+y\ge 4^t\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3^t-x\\ x^2+3^t-x\ge 4^t\end{cases}\Rightarrow x^2-x\ge 4^t-3^t\ (*)$.

Xét hàm số $g(t)=4^t-3^t$; $g'(t)=4^t\ln 4-3^t\ln 3$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow 4^t\ln 4-3^t\ln 3=0\Leftrightarrow t=\log_{\frac{4}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 4}<0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g(t)$:



Với mỗi số nguyên x gọi a là số không âm thỏa mãn $x^2-x\ge 4^a-3^a$, trong đó $x^2-x\ge 0\ \forall x\in\mathbb{Z}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=g(t)$, ta có $4^a-3^a\ge 4^t-3^t\Leftrightarrow a\ge t$.

Mặt khác $y=3^t-x\Rightarrow -x<y=3^t-x\le 3^a-x$.

Theo yêu cầu bài toán ứng với mỗi x nguyên có không quá 728 số nguyên y.

Do đó: $3^a \le 728 \Leftrightarrow a \le \log_3 728$

Khi đó: $x^2 - x \ge 4^a - 3^a \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+4(4^a-3^a)}}{2} \le x \le \frac{1-\sqrt{1+4(4^a-3^a)}}{2}$

$\Rightarrow x \in (-57,4755;\, 58,4755) \Rightarrow x \in [-57;58]$.

Vậy có 116 số nguyên x thỏa mãn bài toán.

Câu 37: **Chọn A**

Cách 1:

Ta có $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} = 1+xy\ (1)$. Suy ra $1+xy>0 \Rightarrow y > \frac{-1}{x}$.

Mà $x \in \left(\frac{1}{3};4\right) \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 4 \Rightarrow -3 < \frac{-1}{x} < \frac{-1}{4}$ nên $y > -3 \Rightarrow y \in \{-2;-1;0;1;2;3...\}$.

$(1) \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy = 0$. Đặt $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy$.

Đạo hàm: $f'(x) = (6x+y-12)27^{3x^2+xy-12x}\ln 27 - y$

$\Rightarrow f''(x) = 6.\ln 27.27^{3x^2+xy-12x} + (6x+y-12)^2\, 27^{3x^2+xy-12x}\ln^2 27 > 0, \forall x,y \in \mathbb{R}$

Suy ra đồ thị hàm số $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy$ là lõm trên $\mathbb{R}$, hay phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của $f(x)=0$.

Mà yêu cầu bài toán là có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3};4\right)$, nên nghiệm còn lại phải thuộc $\left(\frac{1}{3};4\right)$. Hơn nữa

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4) < 0$. Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right) = 27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}} - 1 - \frac{y}{3}$; $f(4) = 27^{4y} - 1 - 4y$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4) = \left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}} - 1 - \frac{y}{3}\right)\left(27^{4y} - 1 - 4y\right) = g(y)$.

Dùng chức năng table của máy tính để tính các giá trị $g(y)$ với $y \in \{-2;-1;0;1;2;3...\}$

(nhập hàm $\left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{X}{3}} - 1 - \frac{X}{3}\right)\left(27^{4X} - 1 - 4X\right)$ và chọn start $X=-2$, end $X=15$, step là 1)

Ta nhận thấy $g(-2);g(-1);g(1);g(2);...;g(12)$ đều nhận giá trị âm, tức là $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4) < 0$. Nên $y \in \{-2;-1;1;2;3;...;12\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y \in \{-2;-1;1;2;3;...;12\}$, hay có 14 giá trị y

Cách 2: CASIO

Ta có: $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{12x} \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} = 1+xy\ (1)$. Suy ra $1+xy>0 \Rightarrow y > \frac{-1}{x}$.

Mà $x \in \left(\frac{1}{3};4\right) \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 4 \Rightarrow -3 < \frac{-1}{x} < \frac{-1}{4}$, nên $y > -3 \Rightarrow y \in \{-2;-1;0;1;2;3...\}$.

$(1) \Leftrightarrow 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy = 0$. Đặt $f(x) = 27^{3x^2+xy-12x} - 1 - xy$.

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right)=27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}}-1-\frac{y}{3}$; $f(4)=27^{4y}-1-4y$

Suy ra $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4)=\left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{y}{3}}-1-\frac{y}{3}\right)\left(27^{4y}-1-4y\right)=g(y)$.

Dùng chức năng table của máy tính để tính các giá trị $g(y)$ với $y\in\{-2;-1;0;1;2;3...\}$

(nhập hàm $\left(27^{\frac{-1}{3}+\frac{X}{3}}-1-\frac{X}{3}\right)\left(27^{4X}-1-4X\right)$ và chọn start $X=-2$, end $X=15$, step là 1)

Ta nhận thấy $g(0)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right).f(4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\frac{1}{3}\right)=0\\ f(4)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\ x=4\end{array}\right.$, nên $y=0$ loại vì $x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$.

Ta nhận thấy $g(-2);g(-1);g(1);g(2);...;g(12)$ đều nhận giá trị âm, tức là $f\left(\frac{1}{3}\right).f(4)<0$. Mà $f(x)$ liên tục trên $\left(\frac{1}{3};4\right)$ nên $f(x)=0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$. Tức là $y\in\{-2;-1;1;2;3;...;12\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ta nhận thấy $g(y)>0$ với $y\geq 13$.

Khi $y\geq 13$ thì $f(x)=27^{3x^2+xy-12x}-1-xy>0$, $\forall x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$ nên loại $y\geq 13$.

Vậy $y\in\{-2;-1;1;2;3;...;12\}$, hay có 14 giá trị *y*.

Câu 38: Chọn B

Đặt $\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=t\Rightarrow x+2^{y-1}=2^t\Leftrightarrow x=2^t-2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y-t=2\left(2^t-2^{y-1}\right)-y\Leftrightarrow 2.2^y+y=2.2^t+t$

Xét hàm số $f(x)=2.2^x+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow y=t$.

Suy ra phương trình $\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=y\Leftrightarrow x+2^{y-1}=2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}$.

$2\leq x\leq 2021\Rightarrow 2\leq 2^{y-1}\leq 2021\Leftrightarrow 1\leq y-1\leq\log_2 2021\Leftrightarrow 2\leq y\leq\log_2 2021+1$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{2;3;4;...;11\}$ có 10 giá trị nguyên của y.

Mà $x=2^{y-1}$ nên với mỗi số nguyên $y\in\{2;3;4;...;11\}$ xác định duy nhất một giá trị nguyên x.

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 39: Chọn C

Ta có: $8^{2x^2+xy}=(1+xy).8^{4x}\Leftrightarrow 8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)=0$.

Xét hàm số $f(x)=8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)$

Áp dụng bất đẳng thức $a^x>x(a-1)+1$ ta có

$f(x)=8^{2x^2+xy-4x}-(1+xy)>7\left(2x^2+xy-4x\right)+1-(1+xy)=14x^2+2x(3y-14)>0$, $\forall y\geq 5$

Do đó $y \le 4$

Với $y \le -2 \Rightarrow xy < -1 \Rightarrow f\left(x\right) > 0$ (loại)

Với $y = -1 \Rightarrow f\left(x\right) = 8^{2x^2-5x} + x - 1$

Ta có $f\left(5\right) > 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f\left(x\right) = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2};5\right) \Rightarrow y = 1$ thỏa mãn

Với $y = 0 \Rightarrow 8^{2x^2} = 8^{4x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\ \left(\text{TM}\right) \end{array}\right. \Rightarrow y = 0$ thỏa mãn

Với $y > 0$ có $f\left(5\right) = 8^{5y+30} - \left(1+5y\right) > 0, \forall y > 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 8^{\frac{y}{2}-\frac{3}{2}} - \left(1+\frac{y}{2}\right) < 0, \forall y = \left\{1;2;3;4\right\} \Rightarrow f\left(x\right) = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2};5\right)$

Vậy $y = \left\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2;\ 3;4\right\}$.

Câu 40: Chọn B

Đặt $\log_{15}\left(4x+3y+1\right) = \log_6\left(x^2-2x+y^2\right) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+1-15^t = 0 \\ \left(x-1\right)^2 + y^2 = 6^t + 1 \end{cases}$ (*).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta: 4x+3y+1-15^t = 0$ và đường tròn $\left(C\right): \left(x-1\right)^2 + y^2 = 6^t + 1$ có điểm chung, với tâm $I\left(1;0\right)$

$\Leftrightarrow d\left(I,\Delta\right) \le R \Leftrightarrow \frac{\left|5-15^t\right|}{5} \le \sqrt{6^t+1} \Leftrightarrow 225^t - 10.15^t - 25.6^t \le 0 \Leftrightarrow 15^t - 6.\left(\frac{2}{5}\right)^t - 10 \le 0$

Xét hàm số $f\left(t\right) = 15^t - 6.\left(\frac{2}{5}\right)^t - 10$. Đạo hàm $f'\left(t\right) = 15^t.\ln 15 - 6.\left(\frac{2}{5}\right)^t \ln\frac{2}{5} > 0, \forall t$

Do vậy: hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó $f\left(t\right) \le 0 \Leftrightarrow t \le 0{,}9341$

Do $\left(x-1\right)^2 + y^2 = 6^t + 1$ nên $\left|y\right| \le \sqrt{6^t+1}$, dẫn đến $\left|y\right| \le 6$. Kết hợp giả thiết ta suy ra $y = 6$.

Thử lại:

Với $y = 6$, hệ (*) trở thành

$\begin{cases} 4x+19-15^t = 0 \\ \left(x-1\right)^2 = 6^t - 35 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{15^t-23}{4}\right)^2 = 6^t - 35 \Leftrightarrow 225^t + 1089 = 46.15^t + 16.6^t$ (**)

Nếu $t < 0$ thì $15^t < 1, 6^t < 1 \Rightarrow 225^t + 1089 > 46.15^t + 16.6^t$.

Nếu $t \ge 1 \Rightarrow 15^t > 6^t$, ta sẽ chứng minh $225^t + 1089 > 62.15^t$.

Thật vậy, ta có $225^t + 1089 - 62.15^t = \left(15^t - 31\right)^2 + 128 > 0$

Dẫn đến $225^t + 1089 > 62.15^t > 46.15^t + 16.6^t$.

Nếu $0 \le t \le 1$ thì $15^t \le 15, 6^t \le 6 \Rightarrow 225^t + 1089 > 46.15^t + 16.6^t$

Vậy (**) vô nghiệm.

Câu 41: Chọn B

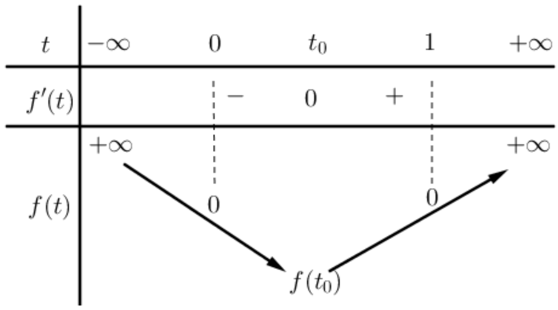
Ta có $2^{x^2+y^2+1} = \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{\left(x-1\right)^2+y^2} = \left(x-1\right)^2 + y^2 + 1$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2\ge 0$, khi đó $2^t=t+1,\ t\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=2^t-t-1,\ t\ge 0$. Có $f'(t)=2^t\ln 2-1=0\Leftrightarrow t=\log_2\dfrac{1}{\ln 2}=t_0\approx 0,5287$.

$f'(t)>0\Leftrightarrow t>t_0$ và $f(0)=f(1)=0$.

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\end{array}\right.$.

Với $t=0\Rightarrow(x-1)^2+y^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

Với $t=1\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1\Rightarrow y^2\le 1\Rightarrow -1\le y\le 1$

Mà y nguyên nên y nhận giá trị -1 hoặc 0 hoặc 1

Với mỗi giá trị $y=-1$ hoặc $y=0$ hoặc $y=1$ luôn có giá trị x thỏa mãn.

Vậy có ba giá trị của y thỏa mãn.

Câu 42: Chọn D

Điều kiện xác định: $x>0.$ Đặt $t=3^{\log_2 x}$ với $t>0.$ Ta có $3^{\log_2\left(x^2\right)}=3^{2\log_2 x}=\left(3^{\log_2 x}\right)^2=t^2.$

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2(m+6)t+m^2-1=0$.

Nhận thấy mỗi giá trị $t>0$ có một và chỉ một giá trị $x>0.$

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt hay $\begin{cases}(m+6)^2-\left(m^2-1\right)>0\\2(m+6)>0\\m^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\dfrac{37}{12};-1\right)\cup(1;+\infty).$

Ta có $x_1x_2>2\Leftrightarrow\log_2(x_1x_2)>1\Leftrightarrow 3^{\log_2(x_1x_2)}>3\Leftrightarrow 3^{\log_2 x_1+\log_2 x_2}>3\Leftrightarrow 3^{\log_2(x_1)}.3^{\log_2(x_2)}>3$

$\Leftrightarrow t_1t_2>3$ hay $m^2-1>3\Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Kết hợp lại, ta được $m>2$ hoặc $-\dfrac{37}{12}<m<-2$.

Vì m nguyên, $|m|\le 10$ nên $m\in\{-3;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Do đó có 9 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43: Chọn A

Điều kiện $x>0$.

Ta có: $3^{1+\frac{3}{x}}-3.3^{\frac{2}{x}-2\sqrt{x}+1}+\left(m+2\right).3^{1+\frac{1}{x}-4\sqrt{x}}-m.3^{1-6\sqrt{x}}=0$

$\Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\right)}-3.3^{2\left(\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\right)}+\left(m+2\right).3^{\frac{1}{x}+2\sqrt{x}}-m=0\ \left(*\right)$.

Đặt $t=3^{\frac{1}{x}+2\sqrt{x}}=3^{\frac{1}{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}}\ge 3^{3\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x}\sqrt{x}}}=3^3=27$.

Khi đó phương trình có dạng: $\Leftrightarrow t^3-3.t^2+\left(m+2\right)t-m=0\ \left(**\right)$.

Ta tìm $m\in\left[-2020;2021\right]$ để phương trình $\left(**\right)$ có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 27.

Ta có: $\left(**\right)\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t^2-2t+m\right)=0\Leftrightarrow t^2-2t+m=0\ \left(t\ge 27\right)$

$\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2=1-m\Leftrightarrow\begin{cases}1-m\ge 0\\ t=1\pm\sqrt{1-m}\end{cases}$.

Vậy để phương trình $\left(**\right)$ có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 27.

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-m\ge 0\\ 1+\sqrt{1-m}\ge 27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\ 1-m\ge 676\end{cases}\Leftrightarrow m\le -675$.

Vì $m\in\left[-2020;2021\right]$ nên có: $2020-675+1=1346$ giá trị m.

Câu 44: Chọn A

$\left(x^2-2mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$

Nhân 2 vế với 2:

$\left(2x^2-4mx\right)\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+\left(x^2-4x+m-1\right)\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0$

Đặt: $a=2x^2-4mx$, $b=x^2-4x+m-1\Rightarrow a\left(2^{x^2-4x+m}-2\right)+b\left(2^{2x^2-4mx}-1\right)=0\ \left(*\right)$

Nếu $a\ne 0,b\ne 0$ thì $\frac{2^{b+1}-2}{b}=\frac{2-2^{a+1}}{a}$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.\left(tm\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2mx=0\\ x^2-4x+m-1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2m\\ x^2-4x+m-1=0\ \left(1\right)\end{array}\right.$

Để có 3 nghiệm thực phân biệt thì có nghiệm:

$x=0\Rightarrow m=1$; $x=2m\Rightarrow m=\frac{7\pm\sqrt{65}}{8}$; nghiệm kép $\Rightarrow m=5$

Câu 45: Chọn A

Đặt $u=2^x>0$ thì phương trình trở thành $a.u^2-b.u+50=0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 tương đương phương trình có hai nghiệm phân biệt dương u_1, u_2, nghĩa là $\begin{cases} b^2 - 200a > 0 \\ \dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{50}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 > 200a$.

Đặt $v = 3^x > 0$ thì phương trình trở thành $v^2 - b.v + 50a = 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 tương đương với phương trình có hai nghiệm phân biệt dương v_3, v_4, nghĩa là $\begin{cases} b^2 - 200a > 0 \\ b > 0 \\ 50a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 > 200a$.

Ta có $x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \Leftrightarrow \log_3 v_3 + \log_3 v_4 > \log_2 u_1 + \log_2 u_2 \Leftrightarrow \log_3(v_3v_4) > \log_2(u_1u_2)$

$\Leftrightarrow \log_3(50a) > \log_2\left(\dfrac{50}{a}\right) \Leftrightarrow \log_3 a + \log_2 a > \log_2 50 - \log_3 50 \approx 2{,}08$.

Mặt khác hàm số $f(a) = \log_3 a + \log_2 a$ $(a > 0)$ là hàm số tăng, $f(2) \approx 1{,}63$ và $f(3) \approx 2{,}58$ nên $a \geq 3$. Từ đó ta có $b^2 > 200a \geq 600 \Rightarrow b \geq 25$. Vậy $\min S = 3.3 + 4.25 = 109$.

Câu 46: Chọn C

$\log_5\left[(x+2)(y+1)\right]^{y+1} = 125 - (x-1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\log_5\left[(x+2)(y+1)\right] = 125 - \left[(x+2)-3\right](y+1)$

$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+2)(y+1)\right] = \dfrac{125}{y+1} - \left[(x+2)-3\right] \Leftrightarrow \log_5(x+2) + \log_5(y+1) = \dfrac{125}{y+1} - (x+2) + 3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \dfrac{125}{y+1} - \log_5(y+1) + \log_5 5^3$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \dfrac{125}{y+1} + \log_5(y+1)^{-1} + \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \dfrac{125}{y+1} + \log_5\left(\dfrac{1}{y+1}\right) + \log_5 125$

$\Leftrightarrow \log_5(x+2) + (x+2) = \log_5\left(\dfrac{125}{y+1}\right) + \dfrac{125}{y+1} \qquad (*)$.

Đặt $f(t) = \log_5 t + t$. Tập xác định: $D = (0;+\infty)$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 5} + 1 > 0, \forall t \in D$.

Suy ra $f(t) = \log_5 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow f(x+2) = f\left(\dfrac{125}{y+1}\right) \Leftrightarrow x + 2 = \dfrac{125}{y+1} \Leftrightarrow x = \dfrac{125}{y+1} - 2$.

Ta có: $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{125}{y+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{125}{y+1} > 2 \Leftrightarrow 125 > 2(y+1) \Leftrightarrow y < \dfrac{123}{2}$.

Kết hợp với $y > 0$ ta có $y \in \left(0; \dfrac{123}{2}\right)$. Ta có đánh giá:

$P=x+5y=\dfrac{125}{y+1}-2+5y=\dfrac{125}{y+1}+5(y+1)-7\ge 2\sqrt{\dfrac{125}{y+1}\cdot 5(y+1)}-7=43,\forall y\in\left(0;\dfrac{123}{2}\right)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{125}{y+1}=5(y+1)\Leftrightarrow y=4\in\left(0;\dfrac{123}{2}\right)\Rightarrow x=23$

Vậy $P_{\min}=43$ khi $(x;y)=(23;4)$.

Câu 47: Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow (4x+7)(2xy-y)\left(e^{2xy-y}-e^{4x+7}\right)=(4x+7)-(2xy-y)$

Dễ thấy $x,y\in\mathbb{Z}$ và $y=0$ không là nghiệm của phương trình nên phương trình thành

$e^{2xy-y}-e^{4x+7}=\dfrac{1}{(2xy-y)}-\dfrac{1}{(4x+7)}$. Đặt $a=2xy-y,\ b=(4x+7)$ ta được $e^a-\dfrac{1}{a}=e^b-\dfrac{1}{b}$,

Hàm số $f(t)=e^t-\dfrac{1}{t}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;+\infty)$ nên ta xcets 2 trường hợp sau :

Nếu $a.b>0$ phương trình $e^a-\dfrac{1}{a}=e^b-\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow a=b$ thay lại ta được $y=\dfrac{4x+7}{2x-1}=2+\dfrac{9}{2x-1}$ do $x,y\in\mathbb{Z}$

Nên suy ra $9\,\vdots\,(2x-1)$ do đó $2x-1\in\{\pm1;\pm3;\pm9\}$ giả và thử lại ta được 6 cặp $(x;y)$.

Nếu $a.b\le 0\Rightarrow\begin{cases}a\ge 1\\ b\le -1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a\le -1\\ b\ge 1\end{cases}$.

Trường hợp $\begin{cases}a\ge 1\\ b\le -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^a-e^b\ge e-\dfrac{1}{e}>2\\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\le 1+1=2\end{cases}$ do đó phương trình không xảy ra.

Tương tự trường hợp $\begin{cases}a\le -1\\ b\ge 1\end{cases}$ cũng không xảy ra do đó có 6 cặp $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 48: Chọn C

Ta có: $4^{x^2-2x+2}-\left(\dfrac{m}{21}-3\right)2^{x^2-2x+3}+\dfrac{m}{21}+3=0\Leftrightarrow 4^{x^2-2x+2}-2\left(\dfrac{m}{21}-3\right)2^{x^2-2x+2}+\dfrac{m}{21}+3=0$

Đặt $t=2^{x^2-2x+2}$ $(t\ge 2)$

x	0		1		3
t	4	↘	2	↗	32

Phương trình trở thành: $t^2-2\left(\dfrac{m}{21}-3\right)t+\dfrac{m}{21}+3=0\ (*)$

Để phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left(0;3\right]$ thì có thể xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} 4 \le t_1 \le 32 \\ 2 < t_2 < 4 \end{array}\right.$

Ta có: $t^2 - 2\left(\dfrac{m}{21} - 3\right)t + \dfrac{m}{21} + 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{21} = \dfrac{t^2 + 6t + 3}{2t - 1} = f\left(t\right)$

Khảo sát hàm trên đoạn $\left[2;32\right]$ ta có BBT:

t	2		3		4		32
$f'(t)$							
$f(t)$	19/3	↘	6	↗	43/7	↗	1219/63

Từ bảng biến thiên ta có điều kiện cần tìm là: $\dfrac{43}{7} \le \dfrac{m}{21} < \dfrac{19}{3} \Leftrightarrow 129 \le m < 133$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \left\{129;130;131;132\right\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Trường hợp 2: Phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ 2 < t_2 < 4 \end{array}\right.$.

Thay $t_1 = 2$ vào phương trình $\left(*\right)$ ta được $m = 133$ khi đó có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = \dfrac{14}{3} > 4 \end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 49: Chọn A

$$10^{\frac{10}{x+y}} = \left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow 10^{\frac{10}{x+y}} = \frac{\left(x+y\right)\left(xy+1\right)}{xy}.10^{\frac{1}{xy}} \Leftrightarrow \frac{10}{x+y}.10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1 + \frac{1}{xy}\right).10^{\frac{1}{xy}+1}$$

Xét hàm số $f(t) = t.10^t$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

$f'(t) = 10^t + t.10^t\ln 10 > 0,\quad \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = t.10^t$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$

Do đó: $\dfrac{10}{x+y}.10^{\frac{10}{x+y}} = \left(1 + \dfrac{1}{xy}\right).10^{\frac{1}{xy}+1} \Leftrightarrow \dfrac{10}{x+y} = 1 + \dfrac{1}{xy}$

$\Leftrightarrow 10 = \left(x+y\right)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) \Leftrightarrow 10 - \left(y + \dfrac{1}{y}\right) = x + \dfrac{1}{x}$.

Vì $y + \dfrac{1}{y} \ge 2,\ \forall y > 0$ nên $x + \dfrac{1}{x} \le 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 \le 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15} \le x \le 4 + \sqrt{15}$, $x \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x \in A = \left\{1;2;3;4;5;6;7\right\}$.

Với mỗi số $a > 0$ phương trình $y + \frac{1}{y} = a \Leftrightarrow y^2 - ay + 1 = 0$ (*) có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = a > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm $y > 0$. Vậy có 14 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Chọn A

Ta có: $\Leftrightarrow 3^{(x+1)^2}.\log_3\left[(x+1)^2+2\right] = 3^{2|x-m|}.\log_3\left(2|x-m|+2\right)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t.\log_3(t+2)$ với $t \in [0;+\infty)$

Ta có $f'(t) = 3^t\ln 3.\log_3(t+2) + \frac{3^t}{(t+2)\ln 3} > 0\ \forall t \in [0;+\infty)$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

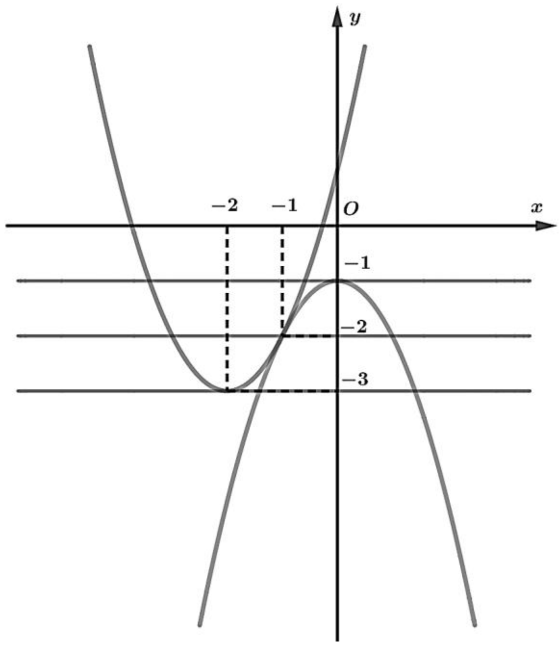
Do đó $\Leftrightarrow f\left((x+1)^2\right) = f\left(2|x-m|\right) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2|x-m|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2m = x^2 + 2x + 1 \\ 2x - 2m = -x^2 - 2x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m = -x^2 - 1 \\ 2m = x^2 + 4x + 1 \end{array}\right.$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(P_1): y = -x^2 - 1$ và đồ thị $(P_2): y = x^2 + 4x + 1$

$-x^2 - 1 = x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$.

Vẽ hai đồ thị (P_1) và (P_2) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy ta được:



Từ đồ thị hàm số ta được $\left[\begin{array}{l} 2m = -1 \\ 2m = -2 \\ 2m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{1}{2} \\ m = -1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$ thỏa yêu cầu bài toán.

Tổng các phần tử của S là $-\frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -3$.

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 8 KỸ NĂNG SỬ DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Như các bạn đã biết, phương pháp sử dụng hàm đặc trưng để giải bài toán VDC logarit thường xuyên xuất hiện trong đề thi của BGD các năm gần đây. Đối với dạng toán về mũ và logarit thì đây là một phương pháp tối ưu nhất.

Các em học sinh cần nắm vững định lý: Cho hàm số $f\left(x\right)$ đơn điệu trên $\left(a;b\right)$. Nếu $f\left(u\right)=f\left(v\right)$ và $u,v\in\left(a;b\right)$ thì khi đó $u=v$.

Nếu $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(a;b\right)$ và $u,v\in\left(a;b\right)$ thì $f\left(u\right)\ge f\left(v\right)\Leftrightarrow u\ge v$.

Nếu $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)$ và $u,v\in\left(a;b\right)$ thì $f\left(u\right)\le f\left(v\right)\Leftrightarrow u\le v$.

Bình luận: Khi giải toán, chúng ta sẽ gặp những bài toán cho sẵn hàm $f\left(x\right)$ đơn điệu và biểu thức hàm đặc trưng dễ thấy. Tuy nhiên, ở mức độ vận dụng và vận dụng cao thì chúng ta phải khéo léo biến đổi để trở thành hàm đặc trưng $f\left(u\right)=f\left(v\right)$ hoặc $f\left(u\right)\ge f\left(v\right)$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại số thực $b\ge a$ thỏa mãn $4^a=2^b+b$ và đoạn $\left[a;b\right]$ chứa không quá 5 số nguyên?

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 11.

LỜI GIẢI

Chọn D

Xét hàm số $f\left(b\right)=2^b+b$ có $f'\left(b\right)=2^b.\ln 2+1>0,\forall b.$

Suy ra hàm số $f\left(b\right)=2^b+b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $4^a=2^b+b$ có nghiệm $b\ge a$ và đoạn $\left[a;b\right]$ chứa không quá 5 số nguyên khi và chỉ khi

$$\begin{cases}2^a+a\le 4^a\\4^a<2^{a+5}+a+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4^a-2^a-a\ge 0\\4^a-32.2^a-a-5<0\end{cases}.$$

Mà $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\left\{-5;-4;...;5\right\}$.

Vậy có 11 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

CÂU 2. Có bao nhiêu số nguyên y thuộc đoạn $\left[-2022;2022\right]$ sao cho tồn tại $x\in\mathbb{R}$ thoả mãn $12.\sqrt[3]{3y+12.2^x}=2^{3x}-3y$

A. 2027. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2028.

LỜI GIẢI

Chọn D

Đặt $t = 2^x;\ t > 0$. Khi đó từ giả thiết ta có phương trình

$12.\sqrt[3]{3y+12t} = t^3 - 3y \Leftrightarrow \left(3y+12t\right) + 12.\sqrt[3]{3y+12t} = t^3 + 12t\ \ (1)$

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^3 + 12t;\ t > 0$ có $f'\left(t\right) = 3t^2 + 12 > 0;\ \forall t > 0$

$\Rightarrow f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó $\left(1\right) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{3y+12t}\right) = f\left(t\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3y+12t} = t \Leftrightarrow 3y = t^3 - 12t$.

Đặt $g\left(t\right) = t^3 - 12t;\ t > 0$ có $g'\left(t\right) = 3t^2 - 12;\ g'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2\ \left(L\right) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$g'\left(t\right)$		$-$	0	$+$	
$g\left(t\right)$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Để tồn tại $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(1\right)$ có nghiệm $t > 0 \Leftrightarrow 3y \ge -16 \Leftrightarrow y \ge -\dfrac{16}{3}$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in \left[-2022;2022\right]$ nên $y \in \left\{-5;-4;-3;....;2022\right\}$. Vậy có 2028 số nguyên y.

CÂU 3. Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình

$\log_{\sqrt{3}}\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) + x\left(x-3\right)^2 = 3^m + 2m - 1$ có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;2\right)$

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) + x\left(x-3\right)^2 = 3^m + 2m - 1$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) + x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 3^m + 2m$

Đặt $t = \log_3\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 3^t$. Khi đó ta có

$2\log_3\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) + x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 3^m + 2m \Leftrightarrow 3^t + 2t = 3^m + 2m$.

Xét hàm số $f\left(u\right) = 3^u + 2u$ là hàm đồng biến $\forall u \in \mathbb{R}$ nên suy ra

$f\left(t\right) = f\left(m\right) \Leftrightarrow t = m \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 3^m$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ trên khoảng $\left(-2;2\right)$ có bbt:

x	-2		1		2
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	-49	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $\left[\begin{array}{l} 0 < 3^m \le 3 \\ 3^m = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \log_3 5 \notin \mathbb{Z} \end{array}\right.$.

Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên dương của m thỏa ycbt.

CÂU 4. Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $2^{x+1} = \log_4\left(x+2+2m\right)+m$ có nghiệm $x \in \left[-1;6\right]$.

A. 30. **B.** 29. **C.** Đáp án khác. **D.** 28.

LỜI GIẢI

Chọn C

Do m là số nguyên dương và $x \in \left[-1;6\right]$. nên $x+2+m>0$.

$2^{x+1} = \log_4\left(x+2+2m\right)+m \Leftrightarrow 2^{x+2}+x+2 = x+2+2m+\log_2\left(x+2+2m\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x+2}+x+2 = 2^{\log_2\left(x+2+2m\right)}+\log_2\left(x+2+2m\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t+t$ với $t \in \mathbb{R}$ có $f\left(t\right)=2^t.\ln 2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y=f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ .Ta có

$$\begin{cases} f\left(t\right)=2^t+t \\ f'\left(t\right)>0 \\ f\left(x+2\right)=f\left(\log_2\left(x+2+2m\right)\right) \end{cases} \Rightarrow x+2=\log_2\left(x+2+2m\right) \Leftrightarrow x+2+2m=2^{x+2} \Leftrightarrow 2m=2^{x+2}-x-2$$

Xét hàm số $g\left(x\right)=-x-2+2^{x+2} \Rightarrow g'\left(x\right)=-1+2^{x+2}.\ln 2>0 \ \forall x \in \left[-1;6\right]$.

Bảng biến thiên

x	-1	6
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	6	248

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $6 \le 2m \le 248 \Leftrightarrow 3 \le m \le 124$. Mà $m>0$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \left\{3;4;...;124\right\}$.

Vậy có 122 giá trị nguyên dương của tham số m thoả mãn phương trình có nghiệm $x \in \left[-1;6\right]$.

CÂU 5. Cho phương trình $\log_2\left(\dfrac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$. Gọi S là tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình. Giá trị của S bằng

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=5$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Điều kiện: $6x+2>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{3}\left(*\right)$.

Khi đó ta có: $\log_2\left(\dfrac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(5^x+3^x\right)+5\left(5^x+3^x\right)=\log_2\left(6x+2\right)+5\left(6x+2\right)\left(1\right)$

Xét hàm số $y=f\left(t\right)=\log_2 t+5t,\ t>0$.

$y'=\dfrac{1}{t\ln 2}+5>0,\ \forall t>0$ nên hàm số đồng biến khi $t>0$,

do đó $\left(1\right) \Leftrightarrow f\left(5^x+3^x\right)=f\left(6x+2\right) \Leftrightarrow 5^x+3^x=6x+2\ \left(2\right)$.

Xét hàm số $g(x)=5^x+3^x-6x-2$ có $g(1)=g(0)=0$ suy ra phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm $x=1,x=0$.

Ta có $g'(x)=5^x\ln 5+3^x\ln 3-6, g''(x)=5^x(\ln 5)^2+3^x(\ln 3)^2>0,\forall x$ nên $g'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm, suy ra $g(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Vậy phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm $x=1,x=0$ suy ra $S=1$.

CÂU 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để bất phương trình $2^{m^2-14}<2^{x^2-2x-3}+\dfrac{x^2-2x-m^2+11}{2^{x-3}}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x.

A. 6. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có:

$$2^{m^2-14}<2^{x^2-2x-3}+\frac{x^2-2x-m^2+11}{2^{x-3}}\Leftrightarrow 2^{x+m^2-17}<2^{x^2-x-6}+x^2-2x-m^2+11$$

$$\Leftrightarrow 2^{x+m^2-17}+x+m^2-17<2^{x^2-x-6}+x^2-x-6 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t\Rightarrow y'=2^t.\ln 2+1>0,\forall t$ suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình $(1)\Leftrightarrow x+m^2-17<x^2-x-6\Leftrightarrow m^2<x^2-2x+11 \quad (2)$

Có $x^2-2x+11=(x-1)^2+10\ge 10,\forall x$.

Suy ra bất phương trình (2) đúng với mọi giá trị thực của x khi và chỉ khi $m^2<10$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$.

Vậy có 7 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán

CÂU 7. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

✍ LỜI GIẢI

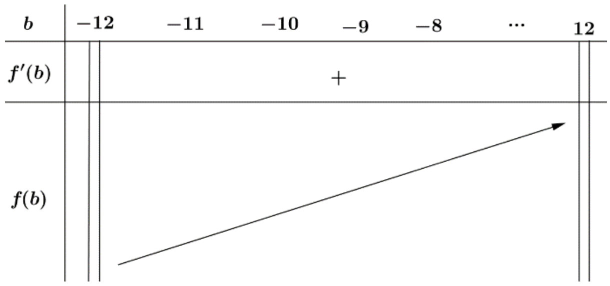
Chọn D

Ta có: $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65 \Leftrightarrow 4^{a^2+b}-3^{b-a}-65\le 0 \Leftrightarrow 4^{a^2}-\dfrac{3^{b-a}}{4^b}-\dfrac{65}{4^b}\le 0\Leftrightarrow 4^{a^2}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\left(\dfrac{1}{4}\right)^b\le 0$.

Xét hàm số $f(b)=4^{a^2}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\left(\dfrac{1}{4}\right)^b$, $b\in(-12;12)$.

Ta có $f'(b)=-\ln\left(\dfrac{3}{4}\right).\left(\dfrac{3}{4}\right)^b.\dfrac{1}{3^a}-65.\ln\left(\dfrac{1}{4}\right).\left(\dfrac{1}{4}\right)^b>0$, $\forall b\in(-12;12)$.

Do đó $f(b)$ đồng biến trên $(-12;12)$. Ta có bảng biến thiên:



Để có ít nhất 4 số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $f(b)\le 0$ thì $f(-8)\le 0 \Leftrightarrow 4^{a^2-8}\le 3^{-8-a}+65$.

Suy ra $4^{a^2-8} \le 65 \Leftrightarrow a^2 \le 8+\log_4 65 \approx 11$. Do $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \left\{-3;-2;...;2;3\right\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của a thoả mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 8. Cho bất phương trình $8^x+3x.4^x+\left(3x^2+2\right)2^x \le \left(m^3-1\right)x^3+2\left(m-1\right)x$. Số các giá trị nguyên của tham số *m* để bất phương trình trên có đúng 5 nghiệm nguyên dương phân biệt là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

LỜI GIẢI

Chọn B

Ta có $8^x+3x.4^x+\left(3x^2+2\right)2^x \le \left(m^3-1\right)x^3+2\left(m-1\right)x$

$\Leftrightarrow 8^x+3x.4^x+3x^2 2^x+2^{x+1} \le m^3x^3-x^3+2mx-2x \Leftrightarrow \left(2^x+x\right)^3+2\left(2^x+x\right) \le \left(mx\right)^3+2mx \left(1\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+2t$, có $f'\left(t\right)=3t^2+2>0$

Nên $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$, khi đó $\left(1\right) \Leftrightarrow 2^x+x \le mx \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{x} \le m-1$, do $x>0$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2^x}{x} \Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{2^x\ln 2.x-2^x}{x^2}$, ta có $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=\log_2 e=x_0<1$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$:

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(x_0\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Do $f\left(1\right)=f\left(2\right)<f\left(5\right)$ nên để bất phương trình có 5 nghiệm nguyên dương:

$\Leftrightarrow \begin{cases} g\left(5\right) \le m-1 \\ g\left(6\right) > m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{37}{5} \le m < \dfrac{35}{3}$.

CÂU 9. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi số nguyên y có đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $7^{x^2-\left|y-3x+2\right|}.\log_{\left(\left|y-3x+2\right|+5\right)}\left(x^2+5\right) \le 1$?

A. 16 . **B.** 17 . **C.** 14 . **D.** 15 .

LỜI GIẢI

Chọn A

Dễ thấy $\left|y-3x+2\right|+5 \ge 5$ và $x^2+5 \ge 5$ với mọi $x;y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $7^{x^2-\left|y-3x+2\right|}.\log_{\left(\left|y-3x+2\right|+5\right)}\left(x^2+5\right) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{7^{x^2+5}}{7^{\left|y-3x+2\right|+5}}.\dfrac{\ln\left(x^2+5\right)}{\ln\left(\left|y-3x+2\right|+5\right)} \le 1$

$\Leftrightarrow 7^{x^2+5}.\ln\left(x^2+5\right) \le 7^{\left|y-3x+2\right|+5}.\ln\left(\left|y-3x+2\right|+5\right) \left(1\right)$

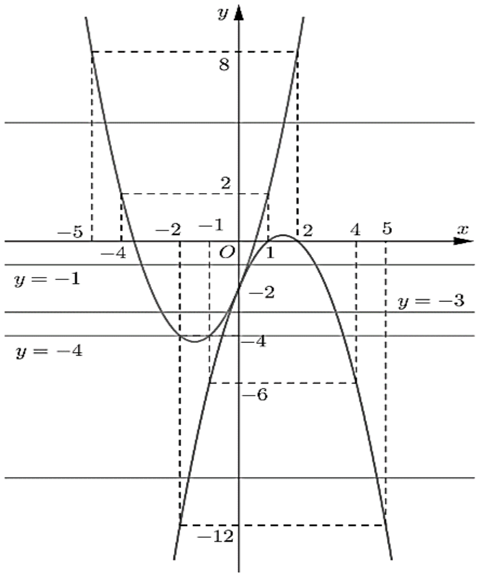
Xét hàm số $f\left(t\right)=7^t.\ln t$ trên $\left[5;+\infty\right)$.

$f'\left(t\right)=7^t.\ln t.\ln 7+7^t.\dfrac{1}{t}>0, \forall t \ge 5 \Rightarrow$ Hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[5;+\infty\right)$.

Do đó $\left(1\right) \Leftrightarrow f\left(x^2+5\right) \le f\left(\left|y-3x+2\right|+5\right) \Leftrightarrow x^2+5 \le \left|y-3x+2\right|+5 \Leftrightarrow x^2 \le \left|y-3x+2\right|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-3x+2 \ge x^2 \\ y-3x+2 \le -x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \ge x^2+3x-2 \\ y \le -x^2+3x-2 \end{array}\right.$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 3x - 2$ và $y = -x^2 + 3x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ:



Dựa vào đồ thị vừa vẽ ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le y < 8 \\ -12 < y \le -6 \\ y = 0 \\ y = -1 \\ y = -3 \\ y = -4 \end{array}\right.$.

Do y nguyên nên $y \in \{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-4;-3;-1;0;2;3;4;5;6;7\}$.

Vậy có 16 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 10. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi giá trị y luôn tồn tại không quá 15 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2021}\left(x + y^2\right) + \log_{2022}\left(y^2 + y + 16\right) \ge \log_2\left(x - y\right)$?

A. 2021. **B.** 4042. **C.** 2020. **D.** 4041.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases} x + y^2 > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y > 0 \\ x > y \end{cases}$.

Ta có bất phương trình $\log_{2021}\left(x + y^2\right) + \log_{2022}\left(y^2 + y + 16\right) - \log_2\left(x - y\right) \ge 0$

Xét $f(x) = \log_{2021}\left(x + y^2\right) + \log_{2022}\left(y^2 + y + 16\right) - \log_2\left(x - y\right)$ với $x > y$, $y \in \mathbb{Z}$.

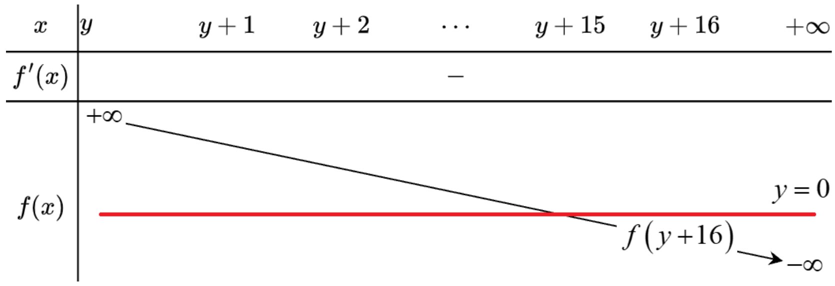
Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{\left(x + y^2\right)\ln 2021} - \dfrac{1}{(x - y)\ln 2} = \dfrac{x(\ln 2 - \ln 2021) - y\ln 2 - y^2\ln 2021}{\left(x + y^2\right).(x - y).\ln 2021.\ln 2}$.

Ta có: $x > y \Rightarrow x(\ln 2 - \ln 2021) < y(\ln 2 - \ln 2021)$

Suy ra $x(\ln 2 - \ln 2021) - y\ln 2 - y^2\ln 2021 < \left(-y^2 - y\right)\ln 2021 < 0, \forall y \in \mathbb{Z}$.

Do đó $f'(x) < 0, \forall x > y, y \in \mathbb{Z}$.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ là:



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(y+16)<0$

$\Leftrightarrow \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)+\log_{2022}\left(y^2+y+16\right)<\log_2 16$

$\Leftrightarrow \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)+\dfrac{\log_{2021}\left(y^2+y+16\right)}{\log_{2021}2022}<4 \Leftrightarrow \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)<\dfrac{4}{1+\log_{2022}2021}\approx 2{,}00$

$\Leftrightarrow y^2+y+16<2021^{\frac{4}{1+\log_{2022}2021}} \Leftrightarrow -2021{,}99\le y\le 2020{,}99$.

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-2021;-2020;...;2020\}$.

Vậy có tất cả 4041 giá trị nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

CÂU 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(m.x^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Điều kiện xác định: $m.x^2+4x+m>0$

Ta biến đổi bất phương trình $\log_5\left(5x^2+5\right)\ge\log_5\left(m.x^2+4x+m\right)$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hệ BPT sau nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}5x^2+5\ge m.x^2+4x+m\\ m.x^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5-m).x^2-4x+5-m\ge 0 & (1)\\ m.x^2+4x+m>0 & (2)\end{cases}\ (*)$$

Xét $m=0$: hệ (*) không nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

Xét $m=5$: hệ (*) không nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

Xét $m\ne 0$; $m\ne 5$

Hệ (*) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}5-m>0\\ \Delta'_{(1)}\le 0\\ m>0\\ \Delta'_{(2)}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ 4-(5-m)^2\le 0\\ m>0\\ 4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 7\\ m\le 3\end{array}\right.\\ m>0\\ \left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 3$

Có 1 giá trị nguyên $m=3$.

CÂU 12. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x\le 2022$ và $3\left(9^y+2y\right)\le x+\log_3(x+1)^3-2$?

A. 3778 **B.** 3776. **C.** 2 **D.** 4044.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

$3\left(9^y+2y\right)\le x+\log_3(x+1)^3-2$

$\Leftrightarrow 3^{2y+1}+3(2y+1)\le(x+1)+3\log_3(x+1)$

$\Leftrightarrow f(2y+1)\le f\left(\log_3(x+1)\right)\ (1)$, với $f(t)\le 3^t+3t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(1)\Leftrightarrow 2y+1\le\log_3(x+1)\Leftrightarrow 3^{2y+1}-1\le x\ (2)$.

Do x,y nguyên dương và $x\le 2022$ nên từ (2) ta có:

$3^{2y+1}-1\le 2022\Rightarrow 1\le y\le\dfrac{\log_3 2023-1}{2}\approx 2{,}97\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=2\end{array}\right.$

Với $y=1$: Ta có $26\le x\le 2022$. Suy ra có 1997 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Với $y=2$: Ta có $242\le x\le 2022$. Suy ra có 1781 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Vậy có 3778 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

CÂU 13. Cho các số thực x, y thỏa mãn $5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T=M+m$.

A. $T=\dfrac{19}{2}$. **B.** $T=\dfrac{21}{2}$. **C.** $T=10$. **D.** $T=15$.

LỜI GIẢI

Đặt $t=x^2-2y$, khi đó giả thiết tương đương với

$$5+16.4^t=\left(5+16^t\right).7^{2-t}\Leftrightarrow\frac{5+4^{t+2}}{7^{t+2}}=\frac{5+4^{2t}}{7^{2t}}.(1)$$

Xét hàm số $f(u)=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(u)=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u\ln\dfrac{1}{7}+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u\ln\dfrac{4}{7}<0$, $\forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(u)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow t+2=2t\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$

Khi đó: $P=\dfrac{3x^2+10x+20}{x^2+2x+3}$

Ta có $P'=\dfrac{-4x^2-22x-10}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

Từ đó suy ra $M=7$, $m=\dfrac{5}{2}$ nên $M+m=\dfrac{19}{2}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le 2020$ và $3^{x+1}+x+1=3^y+y$?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ có nghiệm thực?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 3: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện sau $0 \le y \le 100$ và $x^6+6x^4y+12x^2y^2-19y^3+3x^2-3y=0$?

A. 10. **B.** 100. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 4: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x,y \in [3;48]$ và

$(x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5}$ (1).

A. 46. **B.** 6. **C.** 45. **D.** 5.

Câu 5: Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $1>a>b>\dfrac{1}{4}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $\left(4;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{2};4\right)$. **D.** $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 6: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \le 4y-1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{6(2x+y)}{x}+\ln\dfrac{x+2y}{y}$ là $a+\ln b$. Giá trị của tích $a.b$ là

A. 45. **B.** 81. **C.** 108. **D.** 115.

Câu 7: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1 \le x \le 2020$ và $x+x^2-9^y=3^y$.

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 8: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x,y \in [5;37]$ và $\sqrt{x}=y^2+2y-x+2+\sqrt{y^2+2y+2}$.

A. 32. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 33

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn biểu thức sau $\log_4(x+y+3)=\log_5\left(x^2+y^2+2x+4y+5\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2.2^x+x+\sin^2 y=2^{\cos^2 y}$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y$?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 12: Cho số thực $x,\ y$ thỏa mãn $2^{x^2}-2^y=y-x^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x-2y$.

A. $P=\dfrac{1}{4}$. **B.** $P=\dfrac{3}{4}$. **C.** $P=\dfrac{1}{3}$. **D.** $P=\dfrac{1}{8}$.

Câu 13: Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ trong đó $x,\ y$ không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P=2x+y.$

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 14: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện đề bài $0\le x\le 2020$ và $3\left(9^y+2y\right)=x+\log_3(x+1)^3-2$?

A. 2 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 3 .

Câu 15: Cho $f(x)=2020^x-2020^{-x}$. Gọi m_o là số lớn nhất trong số nguyên m thỏa mãn $f(m+1)+f\left(\dfrac{m}{2020}-2020\right)<0$.

A. $m_o=2018$. **B.** $m_o=2019$. **C.** $m_o=2020$. **D.** $m_o=2021$.

Câu 16: Cho hai số thực $x,\ y$ thoả mãn: $9x^3+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+y^3+6xy+3\left(3x^2+1\right)(x+y-2)$

A. $\dfrac{4\sqrt{6}+36}{9}$. **B.** $\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$. **C.** $\dfrac{36-296\sqrt{15}}{9}$. **D.** $\dfrac{-4\sqrt{6}+36}{9}$.

Câu 17: Cho x,y là các số thực dương thoả mãn bất đẳng thức sau đây $\log\dfrac{x+1}{3y+1}\le 9y^4+6y^3-x^2y^2-2y^2x$ (1). Biết $y\le 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100 . **B.** 1501300 . **C.** 1501400 . **D.** 1501500 .

Câu 18: Cho 2 số thực x,y không âm thỏa mãn: $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$. Giá trị của biểu thức $P=\left|1-2(x+y)\right|$ bằng

A. 3 . **B.** 5 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Câu 19: .Cho $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn biểu thức $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y(*)$.
Biết $0\le x\le 2018$, số cặp $x,\ y$ nguyên thỏa mãn đẳng thức (*) là

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 5 .

Câu 20: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn biểu thức sau đây $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$. Đặt $P=\dfrac{3a+2b+c}{a+b+c}$ và gọi S là tập hợp gồm những giá trị nguyên của P. Số phần tử của tập hợp S là

A. Vô Số. **B.** 5 . **C.** 4 . **D.** 3 .

Câu 21: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $2020^{2019\left(x^2-y+4\right)}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=y-2x$.

A. $\min P = 4$. **B.** $\min P = 2$. **C.** $\min P = 1$. **D.** $\min P = 3$.

Câu 22: Cho $x > y \geq 0$ thỏa mãn $3^{x+y+2xy-2} = \dfrac{2(1-xy)}{x+y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 5y$ là

A. 2. **B.** $\dfrac{9}{5}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{50-8\sqrt{5}}{4\sqrt{5}+1}$.

Câu 23: Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{3} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a\left(\frac{3b-1}{4}\right) + 12\log_{\frac{b}{a}}^2 a - 3$$

A. $\min P = 13$. **B.** $\min P = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $\min P = \sqrt[3]{2}$. **D.** $\min P = 9$.

Câu 24: Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện sau đây $x > -1, y > -3$ và $\log_2\left[(y+3)(x+1)\right] + \dfrac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau đây $P = x + 3y + 10$ thuộc tập nào dưới đây:

A. $[1;3)$. **B.** $[3;4)$. **C.** $[4;5)$. **D.** $[5;6)$.

Câu 25: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $1 < a \leq b \leq a^3$ và $a^x = b^y = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[1;2)$. **B.** $[2;3)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $[4;5)$.

Câu 26: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng.

A. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$. **B.** $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$.

C. $\dfrac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Câu 27: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{16} x = \log_{20} y = \log_{25}\dfrac{2x-y}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{y}{x}$.

A. $T = \dfrac{2}{3}$. **B.** $T = \dfrac{3}{2}$. **C.** $T = -\dfrac{2}{3}$ **D.** $T = -\dfrac{3}{2}$.

Câu 28: Cho số thực $1 \leq x \leq 8$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{\log_2 \dfrac{x}{128}}{\log_2 x + 1} - \log_{\sqrt{2}} x$ lần lượt là a, b. Tính ab.

A. $ab = 5$. **B.** $ab = 35$. **C.** $ab = -7$. **D.** $ab = -35$.

Câu 29: Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{x}\right) = 6x - 4x^2$ và $2x_1 - x_2 = \dfrac{3}{4}\left(a - \sqrt{b}\right)$, $(a, b \in \mathbb{N})$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = -4$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = -6$. **D.** $P = 4$.

Câu 30: Cho phương trình $2\log_3\left(\cot x\right)=\log_2\left(\cos x\right)$. Phương trình có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(0\ ;\ 2020\pi\right)$

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 1009. **D.** 1010.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của y thỏa mãn $5^x=\log_5\left(x+y\right)+y$. Biết rằng $|y|\le 2020$.

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 1010. **D.** 1018.

Câu 32: Cho bất phương trình $\log 10x+\log^2 x+3\ge m.\log 100x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên dương để bất phương trình có nghiệm với mọi x thuộc $\left[1;+\infty\right)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 2.

Câu 33: Cho x, y là các số thực thoả mãn $\log_3\left(x+y\right)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$. Tập giá trị của biểu thức $P=x^3+y^3$ chứa bao nhiêu giá trị nguyên ?

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** Vô số.

Câu 34: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thoả mãn biểu thức $2^{x^2+y^2}=2.2^{y-x}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 35: Tìm m để phương trình

$\left(m-1\right)\log^2_{\frac{1}{2}}\left(x-2\right)^2+4\left(m-5\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-2}\right)+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2};4\right]$.

A. $-3<m\le\frac{7}{3}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in\left\{1\right\}$. **D.** $-3\le m\le\frac{7}{3}$.

Câu 36: Cho x,y thỏa mãn $2^{2x-y+1}+3^{2x-y+1}-5^{2x-y+1}=5^{-2x+y+1}-2^{-2x+y+1}-3^{-2x+y+1}\left(*\right)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x^2-y^2-2x+3y+1$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 37: Có bao nhiêu cặp số $\left(x;y\right)$ thuộc đoạn $\left[1\ ;2020\right]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x+\ln x=y+e^y$?

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 7. **D.** 6.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Cách 1: Tự luận:**

Ta có: $3^{x+1}+x+1=3^{y}+y$

Xét hàm số $f(t)=3^{t}+t\Rightarrow f'(t)=3^{t}.\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow x+1=y\Rightarrow x=y-1$.

Vì $0\le x\le 2020\Leftrightarrow 0\le y-1\le 2020\Leftrightarrow 1\le y\le 2021$.

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{1;2;3;...;2021\}$. Với $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$.

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $3^{x+1}+x+1=3^{y}+y\Leftrightarrow x+1=y\Rightarrow x=y-1$ (tư duy nhanh).

Vì $0\le x\le 2020\Leftrightarrow 0\le y-1\le 2020\Leftrightarrow 1\le y\le 2021$.

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{1;2;3;...;2021\}$. Với $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$.

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2: **Cách 1: Tự luận:**

Phương trình đã cho tương đương: $m+\sqrt{m+2^{x}}=2^{2x}\Leftrightarrow\left(m+2^{x}\right)+\sqrt{m+2^{x}}=2^{2x}+2^{x}\quad(1)$.

Với $\sqrt{m+2^{x}}>0;\ 2^{x}>0$, xét hàm đặc trưng $f(t)=t^{2}+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2^{x}}\right)=f\left(2^{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{m+2^{x}}=2^{x}\Leftrightarrow m=2^{2x}-2^{x}$.

Đặt $a=2^{x}>0$. Xét hàm $g(a)=a^{2}-a$, ta có bảng biến thiên:

a	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(a)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge -\frac{1}{4}$.

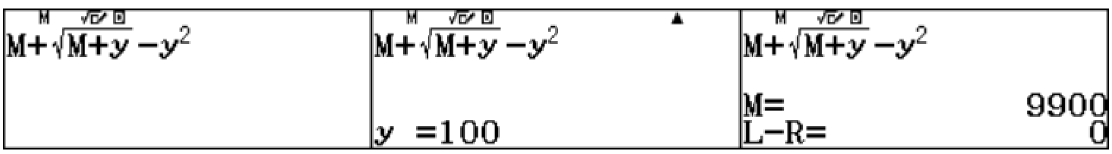
Mà m là số nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m\in\{1;2;3;...;2017\}$.

Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

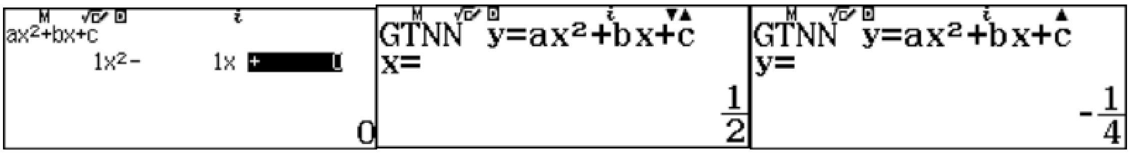
Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^{x}}\right)=2x\Leftrightarrow m+\sqrt{m+2^{x}}=2^{2x}$.

Áp dụng kỹ thuật CALC: Đặt $2^{x}=y=100\Rightarrow m=9900=y^{2}-y=2^{2x}-2^{x}$.



Đặt $a=2^x>0$. Khi đó $m=g(a)=a^2-a$.



Như vậy $m\ge -\dfrac{1}{4}$, mà m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m\in\{1;2;3;...;2017\}$.

Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Cách 1: Tự luận:

Ta có:

$$x^6+6x^4y+12x^2y^2-19y^3+3x^2-3y=0$$

$$\Leftrightarrow x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3-27y^3+3x^2-3y=0$$

$$\Leftrightarrow x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3+3x^2+6y=27y^3+9y$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2y\right)^3+3\left(x^2+2y\right)=(3y)^3+3\cdot 3y \quad (1)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+3t$.

Ta có $f'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy, $(1)\Leftrightarrow f\left(x^2+2y\right)=f(3y)\Leftrightarrow x^2+2y=3y\Leftrightarrow x^2=y$.

Theo đề bài, $0\le y\le 100\Leftrightarrow 0\le x^2\le 100\Leftrightarrow -10\le x\le 10$.

Vì x là số nguyên nên $x\in\{-10;-9;...;9;10\}$. Với mỗi x xác định duy nhất một giá trị $y=x^2$.

Vậy có 21 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có phương trình $x^6+6x^4y+12x^2y^2-19y^3+3x^2-3y=0$.

Áp dụng kỹ thuật CALC $y=0{,}01\Rightarrow x=0{,}1=\sqrt{y}\Rightarrow y=x^2$.

Theo đề bài, $0\le y\le 100\Leftrightarrow 0\le x^2\le 100\Leftrightarrow -10\le x\le 10$.

Vì x là số nguyên nên $x\in\{-10;-9;...;9;10\}$. Với mỗi x xác định duy nhất một giá trị $y=x^2$.

Vậy có 21 cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Cách 1: Tự luận

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{(y+1)+1}=\sqrt{y+1}.\sqrt{(x-2)^2+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(y+1)+1}}{\sqrt{y+1}}=\frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{x-2}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}}=\sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}\ (2).$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{\dfrac{t+1}{t}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có:

$$f'(t)=-\frac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}}<0,\ \forall t>0\ \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } (0;+\infty).$$

Từ (2) $\Leftrightarrow f(y+1)=f\left((x-2)^2\right)\Leftrightarrow y+1=(x-2)^2\Leftrightarrow y=(x-2)^2-1$

Mà $x,y\in[3;48]$ nên $3\le(x-2)^2-1\le 48\Leftrightarrow 4\le(x-2)^2\le 49\Leftrightarrow 2\le x-2\le 7\Leftrightarrow 4\le x\le 9$.

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{4;5;6;7;8;9\}$, với mỗi giá trị của x cho ta một giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có phương trình: $(x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5}$.

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $x=100\to y=9603=x^2-4x+3$.

Mà $x,\,y\in[3;48]$ nên $3\le x^2-4x+3\le 48\Leftrightarrow 4\le x\le 9$.

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{4;5;6;7;8;9\}$, với mỗi giá trị x cho 1 giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 5: **Cách 1: Tự luận**

Đặt $\log_b a=t$. Với điều kiện: $1>a>b>\frac{1}{4}$.

Khi đó $0=\log_b 1<\log_b a<\log_b b=1\Rightarrow t\in(0;1)$

Ta có: $b^2-b+\frac{1}{4}\ge 0\Leftrightarrow b-\frac{1}{4}\le b^2\Rightarrow \log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)\ge\log_a b^2\Rightarrow\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)\ge\frac{2}{t}$.

$\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}=\frac{1}{2(\log_b a-1)}=\frac{1}{2(t-1)}$. Do đó $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}\ge\frac{2}{t}+\frac{1}{2(1-t)}$

Xét hàm $f(t)=\frac{2}{t}+\frac{1}{2(1-t)}$ với $t\in(0;1)$.

$f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{2(1-t)^2}$. Với $t\in(0;1)$, ta có: $f'(t)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Do: $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{2(1-t)}\right)=+\infty;\lim\limits_{t\to 1^-}f(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{2(1-t)}\right)=+\infty.$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)=\frac{2}{t}+\frac{1}{2(1-t)}$ với $t\in(0;1)$ ta có:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$	||	-	0	+	||
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta tìm được $Minf(t)=\frac{9}{2}$ tại $t=\frac{2}{3}$. Vậy $MinP=\frac{9}{2}$.

Cách 2: Tư duy + Casio

Vẫn áp dụng kĩ thuật liên quan đến điều kiện $1>a>b>\frac{1}{4}$.

Nhập cả biểu thức: $P=\log_a\left(b-\dfrac{1}{4}\right)-\log_{\frac{a}{b}}\sqrt{b}$ vào máy tính.

Dùng lệnh CALC đồng thời cả a,b với $1>a>b>\dfrac{1}{4}$ thử nhanh liên tục ta được $\min P=\dfrac{9}{2}$.

Câu 6: **Cách 1: Tự luận**

Ta có $xy\le 4y-1 \Leftrightarrow 4y\ge xy+1\ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow 4y\ge 2\sqrt{xy}$ nên $\sqrt{\dfrac{x}{y}}\le 2\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}\le 4$.

Xét $P=\dfrac{6(2x+y)}{x}+\ln\dfrac{x+2y}{y}=12+6\dfrac{y}{x}+\ln\left(\dfrac{x}{y}+2\right)$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}, 0<t\le 4$. Suy $P=f(t)=12+\dfrac{6}{t}+\ln(t+2)$

Ta có $f'(t)=-\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{t^2-6t-12}{t^2(t+2)}=\dfrac{(t-3)^2-21}{t^2(t+2)}$

Với $0<t\le 4$ thì $-3<t-3\le 1\Rightarrow 0\le (t-3)^2<9$ nên $(t-3)^2-21<0,\forall t\in(0;4]$.

Do đó $f'(t)<0$ với $\forall t\in(0;4]$. Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0;4]$.

Suy ra $f(t)\ge f(4)$ với $\forall t\in(0;4]$ hay $P\ge f(4)=12+\dfrac{6}{4}+\ln 6\Leftrightarrow P\ge\dfrac{27}{2}+\ln 6$.

Vậy $P_{\min}=\dfrac{27}{2}+\ln 6$.

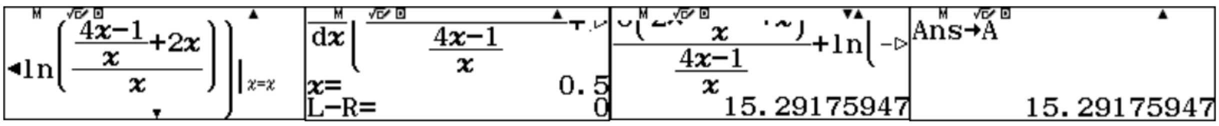
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=4\\ x.y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Khi đó $a=\dfrac{27}{2}, b=6$ nên $a.b=81$. Chọn B.

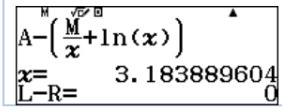
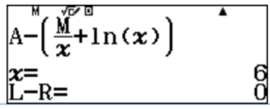
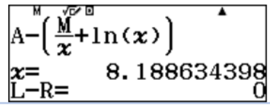
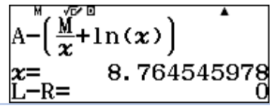
Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có $xy\le 4y-1 \Leftrightarrow x\le\dfrac{4y-1}{y}$ (x,y là số thực dương nên không đổi dấu bất phương trình).

Ta lại có $P=\dfrac{6(2x+y)}{x}+\ln\dfrac{x+2y}{y}\le\dfrac{6\left(2.\dfrac{4y-1}{y}+y\right)}{\dfrac{4y-1}{y}}+\ln\dfrac{\dfrac{4y-1}{y}+2y}{y}$. (Xem y là x trong Casio)



Như vậy ta có $\begin{cases}A=a+\ln b=\dfrac{M}{b}+\ln b\\ M=a.b\Rightarrow a=\dfrac{M}{b}\end{cases}$. Trong đó M là các đáp án

Key $A.\,M=45$.	Key $B.\,M=81$.	Key $C.\,M=108$.	Key $D.\,M=115$.
			

Qua đó nhận thấy key B có $x=b=6$ (đẹp).

Câu 7: **Cách 1: Tự luận:**

Ta có: $x+x^2-9^y=3^y \Leftrightarrow x+x^2=3^y+\left(3^y\right)^2$ (1).

Xét hàm $f\left(t\right)=t+t^2,(t>0)$.

Ta có: $f'\left(t\right)=1+2t>0,\forall t>0 \Rightarrow f\left(t\right)$ là hàm đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Vì vậy, (1) $\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(3^y\right)\Leftrightarrow x=3^y$.

Theo giả thiết, $1\le x\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 3^y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_3 2020$.

Vì y nguyên nên $y\in\left\{0;1;2;3;4;5;6\right\}\Rightarrow x\in\left\{1;3;9;27;81;243;729\right\}$.

Vậy có 7 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $x+x^2-9^y=3^y \Leftrightarrow x+x^2=3^y+\left(3^y\right)^2 \Leftrightarrow x=3^y$.

Theo giả thiết, $1\le x\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 3^y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_3 2020$.

Vì y nguyên nên $y\in\left\{0;1;2;3;4;5;6\right\}\Rightarrow x\in\left\{1;3;9;27;81;243;729\right\}$.

Vậy có 7 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn.

Câu 8: **Cách 1: Tự luận:**

$\sqrt{x}=y^2+2y-x+2+\sqrt{y^2+2y+2} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}=y^2+2y+2+\sqrt{y^2+2y+2}$ (2).

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\sqrt{t}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ ta có:

$f'\left(t\right)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall t>0 \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

(2) $\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(y^2+2y+2\right)\Leftrightarrow x=y^2+2y+2$.

Do $x,y\in\left[5;37\right]$ nên $5\le y^2+2y+2\le 37 \Leftrightarrow 4\le\left(y+1\right)^2\le 36 \Leftrightarrow 2\le y+1\le 6 \Leftrightarrow 1\le y\le 5$

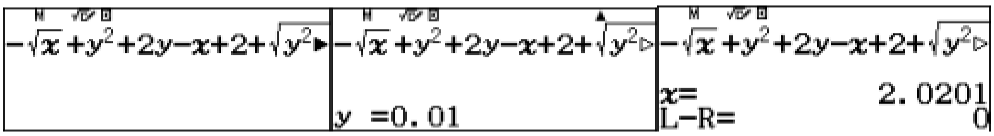
Do $y\in\mathbb{Z}$ và $y\in\left[5;37\right]$ nên $y=5$.

Với giá trị $y=5$ cho ta 1 giá trị $x=37\in\left[5;37\right]$ thoả đề bài.

Vậy có 1 cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thoả bài toán.

Cách 2: Trắc nghiệm

Áp dụng kĩ thuật CALC $y=0.01\to x=2.0201=y^2+2y+2$.



Do $x,y\in\left[5;37\right]$ nên $5\le y^2+2y+2\le 37 \Leftrightarrow 4\le\left(y+1\right)^2\le 36 \Leftrightarrow 2\le y+1\le 6 \Leftrightarrow 1\le y\le 5$

Do $y\in\mathbb{Z}$ và $y\in\left[5;37\right]$ nên $y=5$.

Với giá trị $y=5$ cho ta 1 giá trị $x=37\in\left[5;37\right]$ thoả đề bài.

Vậy có 1 cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thoả bài toán.

Câu 9: **Cách 1: Tự luận**

Ta có: $\log_4\left(x+y+3\right)=\log_5\left(x^2+y^2+2x+4y+5\right)$

$\Leftrightarrow \log_4\left[\left(x+1\right)+\left(y+2\right)\right]=\log_5\left[\left(x+1\right)^2+\left(y+2\right)^2\right]$

Đặt $X=x+1;\ Y=y+2$. Khi đó ta có: $\log_4\left(X+Y\right)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$

Đặt $t=\log_4\left(X+Y\right)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases}X+Y=4^t\\X^2+Y^2=5^t\end{cases}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\left(X+Y\right)^2\le 2(X^2+Y^2)\Leftrightarrow 16^t\le 2.5^t\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{16}{5}}2.$$

Mặt khác: $X^2=5^t-Y^2\le 5^t\le 5^{\log_{\frac{16}{5}}2}\Leftrightarrow -5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\le X\le 5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}$

Vì $X\in\mathbb{Z}\Rightarrow X\in\left\{-1;0;1\right\}$.

Tương tự ta có: $-5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\le Y\le 5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}$.

Trường hợp 1: $X=0$, ta có phương trình $\log_4 Y=\log_5 Y^2\quad\left(1\right)$.

$Y=1$ là nghiệm của phương trình $\left(1\right)$. Do đó $X=0$ thỏa mãn

Suy ra: $x=y=-1$.

Trường hợp 2: $X=-1$, ta có phương trình $\log_4\left(Y-1\right)=\log_5\left(1+Y^2\right)\ \left(2\right)$.

Xét hàm số: $f\left(Y\right)=\log_4\left(Y-1\right)-\log_5\left(1+Y^2\right),\ Y\in\left(1;5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\right]$

Ta có: $f'\left(Y\right)=\dfrac{1}{\left(Y-1\right)\ln 4}-\dfrac{2Y}{\left(1+Y^2\right)\ln 5}>0,\forall Y\in\left(1;5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}\right]$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left(1;\beta\right]$, với $\beta=5^{\frac{1}{2}\log_{\frac{16}{5}}2}$

$\Rightarrow \underset{\left(1;\beta\right]}{Max}\, f\left(Y\right)=f\left(\beta\right)\approx -1,1477689<0$

$\Rightarrow f\left(Y\right)=0$ vô nghiệm. Hay phương trình $\left(2\right)$ vô nghiệm.

Do đó: $X=-1$ (loại)

Trường hợp 3: $X=1$, ta có $\log_4\left(Y+1\right)=\log_5\left(1+Y^2\right)\left(3\right)$.

$Y=0$ là nghiệm của phương trình $\left(3\right)$.

Do đó $X=1$ thỏa.

Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là: $\left[\begin{array}{l} X=0 \\ X=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Cách 2: Dùng đồ thị

Ta có: $\log_4\left(x+y+3\right)=\log_5\left(x^2+y^2+2x+4y+5\right)$

$\Leftrightarrow \log_4\left[\left(x+1\right)+\left(y+2\right)\right]=\log_5\left[\left(x+1\right)^2+\left(y+2\right)^2\right]$

Đặt $X=x+1; Y=y+2$. Khi đó ta có: $\log_4\left(X+Y\right)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$

Đặt $t=\log_4\left(X+Y\right)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$.

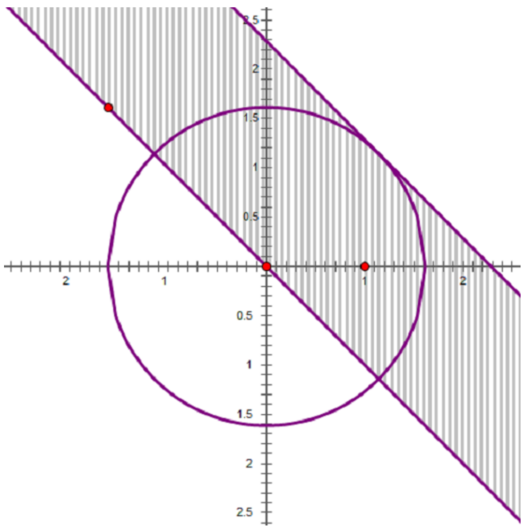
Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} X+Y=4^t \\ X^2+Y^2=5^t \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\left(X+Y\right)^2 \le 2(X^2+Y^2) \Leftrightarrow 16^t \le 2.5^t \Leftrightarrow t \le \log_{\frac{16}{5}} 2.$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} 0 < X+Y = 4^t \le 4^{\log_{\frac{16}{5}} 2} \\ 0 < X^2+Y^2 = 5^t \le {}^{\log_{\frac{16}{5}} 2} \end{cases}$.

Minh họa bằng hình vẽ:



Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\left[\begin{array}{l} X=0 \\ X=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Cách 3: Trắc nghiệm

Ta có: $\log_4\left(x+y+3\right)=\log_5\left(x^2+y^2+2x+4y+5\right)$

$\Leftrightarrow \log_4\left[\left(x+1\right)+\left(y+2\right)\right]=\log_5\left[\left(x+1\right)^2+\left(y+2\right)^2\right]$

Đặt $X=x+1; Y=y+2$. Khi đó ta có: $\log_4\left(X+Y\right)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$

Đặt $t=\log_4\left(X+Y\right)=\log_5\left(X^2+Y^2\right)$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} X+Y=4^t \\ X^2+Y^2=5^t \end{cases}$

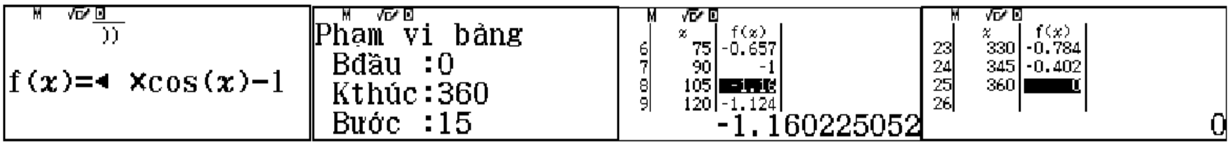
Lượng giác hóa: đặt $\begin{cases} X=\sqrt{5^t}.\cos\alpha \\ Y=\sqrt{5^t}.\sin\alpha \end{cases}, \alpha\in(0;2\pi)$.

Từ đó ta được: $\sqrt{5^t}.\cos\alpha+\sqrt{5^t}.\sin\alpha=4^t \Rightarrow \cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{4^t}{\sqrt{5^t}}=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^t$.

$\Rightarrow t=\log_{\frac{4}{\sqrt{5}}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$.

Ta có: $x=X-1=\sqrt{5^t}.\cos\alpha-1=\sqrt{5^{\log_{\frac{4}{\sqrt{5}}}(\cos\alpha+\sin\alpha)}}.\cos\alpha-1$

Dùng casio, dò bảng và tìm đáp án



Vậy ta thấy x chạy trong khoảng từ $-1,16$ đến $0,3334088261$. Vì theo đề x nguyên nên $x\in\{-1;0\}$.

Câu 10: Cách 1: Tự luận

Ta có: $2.2^x+x+\sin^2 y=2^{\cos^2 y} \Leftrightarrow 2^{x+1}+x+1=2^{\cos^2 y}+\cos^2 y\ (3)$.

Đặt $f(t)=2^t+t \Rightarrow f'(t)=2^t.\ln 2+1>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

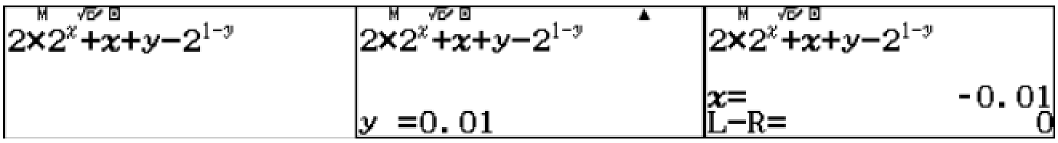
Vì vậy phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x+1)=f(\cos^2 y)\Leftrightarrow x+1=\cos^2 y \Rightarrow x=-\sin^2 y \Rightarrow x\le 0$.

Mà x nguyên dương nên không có giá trị của x thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $2.2^x+x+\sin^2 y=2^{\cos^2 y} \Leftrightarrow 2.2^x+x+y'=2^{1-y'}$ (vì $\sin^2 y+\cos^2 y=1$).

Áp dụng kĩ thuật CALC $y'=0,01 \Rightarrow x=-0,01=-y'=-\sin^2 y \Rightarrow x\le 0$.



Mà x là số nguyên dương. Vậy không có giá trị của x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cách 1: Tự luận:

$\log_2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+x=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2(x+1)+x-1=4^{\sin^4 y+\cos^4 y}-\sin^2 2y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=2^{2(\sin^4 y+\cos^4 y)}-4\sin^2 y.\cos^2 y+2$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=2^{2(\sin^4 y+\cos^4 y)}-4\sin^2 y.\cos^2 y+2(\sin^2 y+\cos^2 y)^2$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=2^{2(\sin^4 y+\cos^4 y)}+2(\sin^4 y+\cos^4 y)$ (2).

Xét hàm số $f(t)=2^t+t, \forall t>0 \Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2+1>0, \forall t>0$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vì vậy (2) $\Leftrightarrow f\left(\log_2(x+1)\right) = f\left(2\left(\sin^4 y + \cos^4 y\right)\right) \Leftrightarrow x+1 = 2^{2\left(\sin^4 y+\cos^4 y\right)}$.

Ta có: $\sin^4 y + \cos^4 y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2y \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $1 \le 2\left(\sin^4 y + \cos^4 y\right) \le 2$

$\Leftrightarrow 2 \le 2^{2\left(\sin^4 y+\cos^4 y\right)} \le 4 \Leftrightarrow 2 \le x+1 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

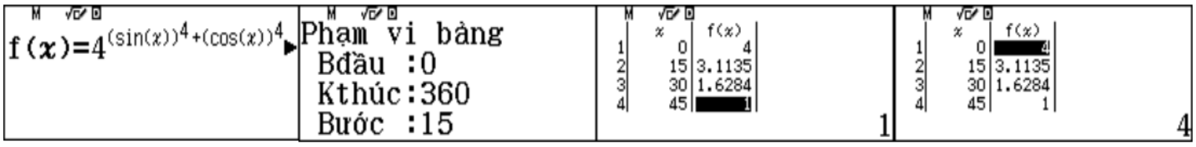
Mà x là số nguyên dương nên $x \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn đề bài.

Cách 2: Trắc nghiệm:

Ta có: $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y+\cos^4 y} - \sin^2 2y$ hay VT $=$ VP (Vế trái $=$ Vế phải).

Đối với dạng hàm lượng giác thì hãy khảo sát:



Ta nhận xét: Hàm lượng giác chỉ dao động từ 1 đến 4.

Suy ra: $1 \le \log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

Mà x là số nguyên dương nên $x \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn đề bài.

Câu 12: **Cách 1: Tự luận:**

Ta có $2^{x^2} - 2^y = y - x^2 \Leftrightarrow 2^{x^2} + x^2 = 2^y + y \Leftrightarrow f\left(x^2\right) = f(y)$, với $f(t) = 2^t + t$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t.\ln 2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

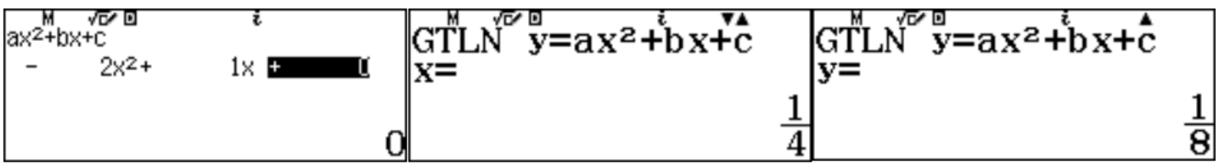
Do đó $f\left(x^2\right) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y$.

$P = x - 2y = x - 2x^2 = -2x^2 + x - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = -\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{8} \le \frac{1}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{16}$.

Cách 2: Trắc nghiệm:

Nhận thấy $y = x^2 \Rightarrow P_{\max} = x - 2x^2$.



Phương trình bậc 2, bậc 3 thì giải tìm min – max cho nhanh nhé!

Thậm chí các bạn vẫn có thể dò bảng câu này!

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{16}$.

Câu 13: Cách 1: Tự luận:

Từ điều kiện để bài và $\dfrac{x+y}{1-xy}>0;\ 1-xy\neq 0\ \Rightarrow x+y>0;\ 1-xy>0.$

Khi đó $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+\left(x+1\right)\left(y+1\right)-2=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x+y\right)+\left(x+y\right)=\log_3\left(1-xy\right)+\left(1-xy\right)$ (1).

Xét hàm số $g\left(t\right)=\log_3 t+t,\ \left(t>0\right)$ có $g'\left(t\right)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0,\ \forall t>0.$

Suy ra $g\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Vậy phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow x+y=1-xy\Rightarrow y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow P=2x+\dfrac{1-x}{1+x}.$

Xét hàm số $f\left(x\right)=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$ với $x\in\left[0;1\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=2+\dfrac{-2}{\left(x+1\right)^2}$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$; $f\left(0\right)=1;\ f\left(1\right)=2\ \Rightarrow \min\limits_{\left[0;1\right]}f\left(x\right)=1.$

Cách 2: Trắc nghiệm:

{3 cách – nhưng giới thiệu 2 cách chính}

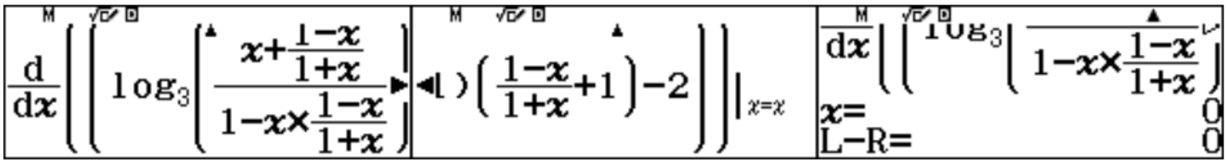
Áp dụng kĩ thuật CALC: cho $x=0.01\Rightarrow y=\dfrac{99}{101}=\dfrac{1-x}{1+x}.$

Cách 1: Ta có $P=2x+\dfrac{1-x}{1+x}$ (dò bảng – tìm min).

Cách 2: Hướng dẫn bên dưới

Từ đó ta có $\log_3\left(\dfrac{x+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-x.\dfrac{1-x}{1+x}}\right)+\left(x+1\right)\left(\dfrac{1-x}{1+x}+1\right)-2=0.$

Đạo hàm hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất tại y bằng bao nhiêu?



Như vậy $x=0\Rightarrow y=1\Rightarrow P_{\max}=2x+y=1.$

Tư duy:

Theo đề ta có $0\le x,y\le 1$ --- chọn tại các giá trị đặc biệt là các dấu bằng “=”.

Như vậy $x=0,\ y=1\Rightarrow P_{\max}=2x+y=1.$

Hãy ghi nhớ giá trị min hay max đều liên quan tới dấu bằng “=”.

Câu 14: Cách 1: Tự luận:

Ta có:

$3\left(9^y+2y\right)=x+\log_3\left(x+1\right)^3-2\Leftrightarrow 3\left(9^y+2y\right)=x+3\log_3\left(x+1\right)-2$

$\Leftrightarrow 3^{2y+1}+3\left(2y+1\right)=\left(x+1\right)+3\log_3\left(x+1\right)$ (*)

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^t+3t$. Ta có: $f'\left(t\right)=3^t.\ln 3+3>0$, $\forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(2y+1) = f(\log_3(x+1))$

$\Leftrightarrow 2y+1 = \log_3(x+1) \Leftrightarrow x = 3^{2y+1} - 1$.

Vì $0 \le x \le 2020$ nên $0 \le 3^{2y+1} - 1 \le 2020 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le y \le \frac{\log_3 2021 - 1}{2}$.

Do y nguyên nên $y \in \{0;1;2\}$.

$\Rightarrow (x;y) \in \{(2;0);(26;1);(242;2)\}$ do đó có 3 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Cách 2: Trắc nghiệm

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $y = 0.01 \to x = ?$ (nhưng hiện số xấu)

Tư duy độc quyền xuất hiện: Đặt: $\begin{cases} y' = 9^y + 2y \\ x' = x + \log_3(x+1)^3 \end{cases} \Rightarrow 3y' = x' - 2$

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $y' = 0.01 \to x' = 2.03 = 3y' + 2 = 3\left(9^y + 2y\right) + 2$

Vì $0 \le x \le 2020$ nên $0 \le 3^{2y+1} - 1 \le 2020 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le y \le \frac{\log_3 2021 - 1}{2}$.

Do y nguyên nên $y \in \{0;1;2\}$.

$\Rightarrow (x;y) \in \{(2;0);(26;1);(242;2)\}$ do đó có 3 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Tư duy:

Ta thấy đề cho đáp án 2-4-5-3, khá ít cặp thỏa mãn thì các bạn chỉ cần thử lần lượt $y = 0 \to x = ?$, $y = 0 \to x = ?$, $y = 0 \to x = ?$, … khi giải ra không được nữa, giới hạn chỉ có nhiêu đó cặp số nguyên. $\to$ Dễ dàng có đáp án.

Câu 15: **Cách 1: Tự luận:**

Ta có: $f(-x) = 2020^{-x} - 2020^{x}; -f(x) = -2020^{x} + 2020^{-x}$

$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0$

$\Leftrightarrow f(m+1) < f\left(-\frac{m}{2020} + 2020\right)$ $(*)$

Xét hàm số: $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Ta có: $f'(x) = \ln 2020\left(2020^x + 2020^{-x}\right) > 0, \forall x$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $(*) \Leftrightarrow m + 1 < -\frac{m}{2020} + 2020 \Leftrightarrow m < \frac{2019.2020}{2021}$.

Vậy $m_o = 2018$.

Cách 2: Trắc nghiệm

!!! Cách kiểm tra tính chẵn lẻ: Ta có: $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$.

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $x = 1 \to f(x) \approx 2019.999505; x = -1 \to f(x) \approx -2019.999505$.

Suy ra: $f(-1) = -f(1)$. Vậy hàm số trên có tính chất chẵn – lẻ.

Ta có: $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0 \Leftrightarrow f(m+1) < f\left(-\frac{m}{2020} + 2020\right)$

Ta lại có: $f\left(x\right)=2020^{x}-2020^{-x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (dò bảng).

$\Leftrightarrow m+1<-\dfrac{m}{2020}+2020 \Leftrightarrow m<\dfrac{2019.2020}{2021}$. Vậy $m_o=2018$.

Câu 16: Cách 1: Tự luận:

Ta có: $9x^{3}+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$

$\Leftrightarrow 27x^{3}+6x-3xy\sqrt{3xy-5}+3\sqrt{3xy-5}=0$

$\Leftrightarrow \left(3x\right)^{3}+2\left(3x\right)=\left(\sqrt{3xy-5}\right)^{3}+2\sqrt{3xy-5}$ (*)

Xét hàm số: $f\left(t\right)=t^{3}+2t$ có $f'\left(t\right)=3t^{2}+2>0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f\left(3x\right)=f\left(\sqrt{3xy-5}\right)\Leftrightarrow 3x=\sqrt{3xy-5}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 9x^{2}=3xy-5\end{cases}$

Với $x=0$ không thoả mãn.
Với $x>0$ thì

$P=x^{3}+y^{3}+6xy+3\left(3x^{2}+1\right)\left(x+y-2\right)=x^{3}+y^{3}+6xy+\left(9x^{2}+3\right)\left(x+y-2\right)$

$=x^{3}+y^{3}+6xy+\left(3xy-2\right)\left(x+y-2\right)=x^{3}+y^{3}+3x^{2}y+3xy^{2}-2\left(x+y\right)+4$

$=\left(x+y\right)^{3}-2\left(x+y\right)+4$

Mà $x+y=x+\dfrac{9x^{2}+5}{3x}=4x+\dfrac{5}{3x}\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Đặt $t=x+y$ thì $t\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=t^{3}-2t+4$ với $t\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Khi đó $g'\left(t\right)=3t^{2}-2>0\ \ \forall t\ge\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Do đó $g\left(t\right)\ge g\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$.

Vậy $\min P=\dfrac{36+296\sqrt{15}}{9}$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Bước 1: Phân tích đáp án và dữ kiện đề bài

Bước 2: Phân tích đang cần gì và làm gì

Ta có: $9x^{3}+\left(2-y\sqrt{3xy-5}\right)x+\sqrt{3xy-5}=0$. Cho x giải tìm y

$x=0\to y=\varnothing$	$x=0.4\to y=\dfrac{161}{30}$	$x=0.5\to y=\dfrac{29}{6}$	$x=0.6\to y=\dfrac{206}{45}$	$x=1\to y=\dfrac{14}{3}$

Thay lần lượt x,y vào $P=x^{3}+y^{3}+6xy+3\left(3x^{2}+1\right)(x+y-2)$ để kiểm tra kết quả

$\varnothing$	≈ 184.23	≈ 145.04	≈ 132.46	≈ 184.23

Câu 17: Cách 1: Tự luận:

Ta có phương trình: $\log\dfrac{x+1}{3y+1}\le 9y^{4}+6y^{3}-x^{2}y^{2}-2y^{2}x$

$\Leftrightarrow \log\dfrac{xy+y}{3y^{2}+y}\le\left(9y^{4}+6y^{3}+y^{2}\right)-\left(x^{2}y^{2}+2xy\cdot y+y^{2}\right)$

$\Leftrightarrow \log(xy+y)-\log\left(3y^2+y\right)\le\left(3y^2+y\right)^2-(xy+y)^2$

$\Leftrightarrow \log(xy+y)+(xy+y)^2\le\log\left(3y^2+y\right)+\left(3y^2+y\right)^2$ (*)

Xét hàm $f\left(t\right)=\log t+t^2$ với $t\in\left(0;+\infty\right)$ có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 10}+2t>0\quad\forall t\in(0;+\infty)$.

Suy ra $f\left(t\right)$ là hàm đồng biến trên $t\in\left(0;+\infty\right)$.

(*) $\Leftrightarrow f\left(xy+y\right)\le f\left(3y^2+y\right)\Leftrightarrow xy+y\le 3y^2+y\Leftrightarrow x\le 3y$.

Vì $y\le 1000$ nên ta có các trường hợp sau:

$y=1\Rightarrow x\in\left\{1;2;3\right\}$

$y=2\Rightarrow x\in\left\{1;2;3;4;5;6\right\}$

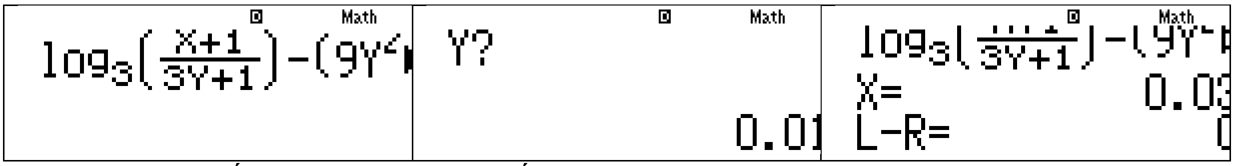
…

$y=1000\Rightarrow x\in\left\{1;2;\ldots\ldots;3000\right\}$.

Vậy số cặp nghiệm thoả mãn điều kiện đề bài là: $3+6+9+\ldots+3000=1501500$.

Cách 2: Trắc nghiệm

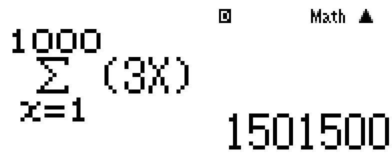
Áp dụng kĩ thuật CALC: cho $y=0,01\to x=0,03=3y$



Đừng quan tâm dấu hãy luôn xử lý tại dấu "=", suy ra $x\le 3y$.

Nhiều bạn thắc mắc làm sao biết x,y mà khẳng định $x\le 3y$, cách xác định dấu đó là hãy quay trở lại phương trình ban đầu cho x,y bất kỳ thì sẽ xét được $x\ge 3y$ hay $x\le 3y$.

Vì $1\le y\le 1000\Rightarrow 1\le x\le 3000$. Sử dụng MTCT tính tổng:



Câu 18: Cách 1: Tự luận

Áp dụng bất đẳng thức AM-AG ta có: $2^{x+\frac{1}{x}}\ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{x}}}=4,\forall x>0$ (1)

Mặt khác ta có: $14-(y-2)\sqrt{y+1}=14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}$.

Đặt $t=\sqrt{y+1}\ge 1$. Xét hàm: $f(t)=-t^3+3t+1`4,t\ge 1$. $f'(t)=-3t^2+3;f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên như sau:

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	16	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow f(t)\le 16 \Rightarrow \log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\le \log_2 16=4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{x} \\ t=\sqrt{1+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$. Vậy: $P=\left|1-2(x+y)\right|=1$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Áp dụng bất đẳng thức AM-AG ta có: $2^{x+\frac{1}{x}}\ge 2^{2\sqrt{x.\frac{1}{x}}}=4,\forall x>0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta lại có: $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]=4 \Leftrightarrow y=0$. Vậy: $P=\left|1-2(x+y)\right|=1$.

Câu 19: **Cách 1: Tự luận**

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1)=2^{3y}+3y$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(\log_2(x+1))=f(3y)\Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow x=2^{3y}-1$

Với $0\le x\le 2018 \Leftrightarrow 1\le 8^y\le 2019 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_8 2019\approx 3,7$.

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Rõ ràng với y nguyên thì x nguyên.

Vậy có 4 cặp số $x,$ y nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Trắc nghiệm

Đặt $8^y=M\to y=\log_8 M\Rightarrow \log_2(2x+2)+x-3\log_8 M-M$

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $M=100\to x=99=M-1=8^y-1$

Với $0\le x\le 2018 \Leftrightarrow 1\le 8^y\le 2019 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_8 2019\approx 3,7$.

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Rõ ràng với y nguyên thì x nguyên.

Vậy có 4 cặp số $x,$ y nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: **Cách 1: Tự luận**

Ta có: $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$

$\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2+c^2+1}+a^2+b^2+c^2+1=2^{2a+2b+2c}+(2a+2b+2c)$

Xét hàm $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có, $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình đã cho có dạng $f\left(a^2+b^2+c^2+1\right)=f\left(2a+2b+2c\right)$.

Suy ra $2a+2b+2c=a^2+b^2+c^2+1\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$ (*)

Ta lại có, $P=\dfrac{3a+2b+c}{a+b+c}\Leftrightarrow (P-3)a+(P-2)b+(P-1)c=0\ (**)$

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ lấy $M(a;b;c)$.

Theo $(*)$ ta có M thuộc mặt cầu tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Theo $(**)$ thì M thuộc mặt phẳng (α) có:

Phương trình $(P-3)x+(P-2)y+(P-1)z=0$.

Tồn tại bộ $(a;b;c)$ khi và chỉ khi tồn tại M (mặt cầu và mặt phẳng có điểm chung).

Suy ra $d(I;(\alpha))\le R$

Hay $\dfrac{|3P-6|}{\sqrt{(P-3)^2+(P-2)^2+(P-1)^2}}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow (3P-6)^2\le 2.\left[(P-3)^2+(P-2)^2+(P-1)^2\right]$

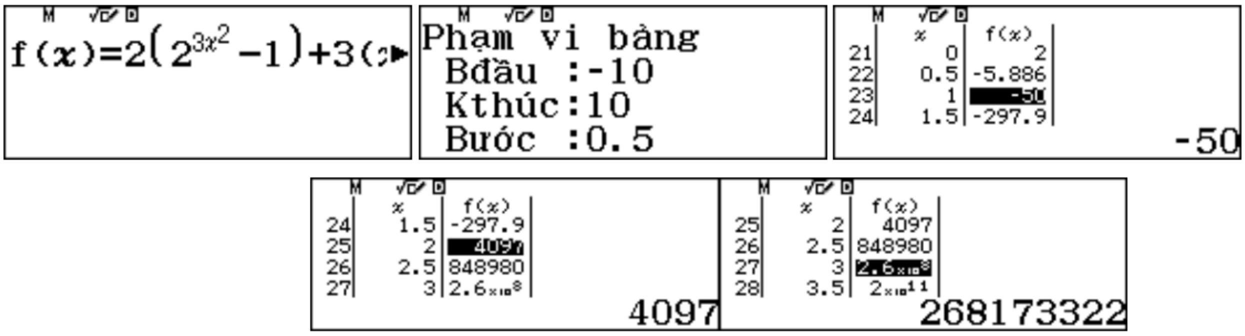
$\Leftrightarrow 3P^2-12P+8\le 0\Leftrightarrow \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le P\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$. Vậy $S=\{1;2;3\}$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Nhận thấy: Quy đổi a,b,c về dạng chung $\Rightarrow$ biến thành 1 ẩn chung là a.

Ta có: $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$

$\Rightarrow 2\left(2^{3a^2}-1\right)+3(a-1)^2=4^{3a}$, dò bảng tìm giá trị nguyên của P.



Vậy chỉ có 3 giá trị a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đối với tại $x=a=0$ (vô lí), còn đối với $x=a=4,...$ (số quá lớn và không nguyên nên loại)

Câu 21: Cách 1: Tự luận

Từ giả thiết $2020^{2019(x^2-y+4)}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}$ suy ra

$2020^{2019\left[(x+2)^2-(4x+y)\right]}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}\Leftrightarrow\dfrac{2020^{2019(x+2)^2}}{2020^{2019(4x+y)}}=\dfrac{4x+y}{(x+2)^2}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2.2020^{2019(x+2)^2}=(4x+y).2020^{2019(4x+y)}.\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=t.2020^{2019t}$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=2020^{2019t}+2019t.2020^{2019t}.\ln 2020>0,\ \forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f\left((x+2)^2\right)=f(4x+y)\Leftrightarrow (x+2)^2=4x+y\Leftrightarrow y=x^2+4$.

Suy ra $P = y - 2x = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \ge 3, \forall x > 0$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 5$. Vậy $\min P = 3$.

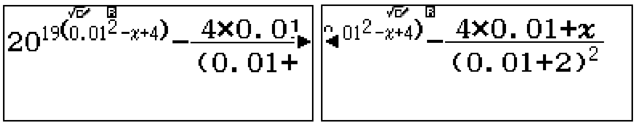
Cách 2: Trắc nghiệm

Ta tối giản $2020 \to 20$ và $2019 \to 19$ để máy tính có thể xử lý được các phép tính.

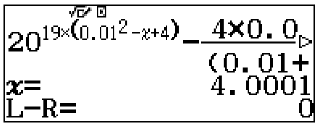
Khi đó giả thiết trở thành $20^{19(x^2-y+4)} = \dfrac{4x+y}{(x+2)^2}$. Cho $x = 0,01$, ta có

$$20^{19(0,01^2-y+4)} = \frac{4.0,01+y}{(0,01+2)^2}.$$

Nhập vào máy tính biểu thức $20^{19(0,01^2-x+4)} - \dfrac{4\times 0,01+x}{(0,01+2)^2}$ như sau

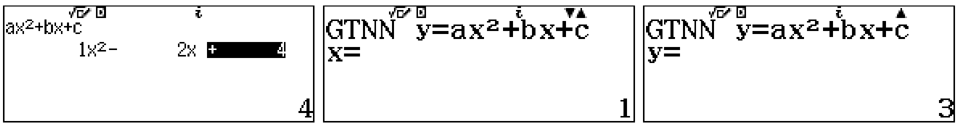


Sau đó sử dụng lệnh SOLVE (SHIFT+CALC) để tìm nghiệm x.



Suy ra $y = 4,0001 = 4 + (0,01)^2 = 4 + x^2$.

Vậy $P = y - 2x = x^2 - 2x + 4$. Sử dụng tính năng giải phương trình bậc hai của máy tính ta tìm được $\min P = 3$ khi $x = 1$.



Câu 22: Cách 1: Tự luận

Điều kiện: $1 - xy > 0$.

Ta có $3^{x+y+2xy-2} = \dfrac{2(1-xy)}{x+y} \Leftrightarrow x + y + 2xy - 2 = \log_3 \dfrac{2-2xy}{x+y}$

$$\Leftrightarrow \log_3(2-2xy) + (2-2xy) = \log_3(x+y) + (x+y) \; (*).$$

Xét hàm số $g(t) = \log_3 t + t, t > 0 \Rightarrow g'(t) = \dfrac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow g(2-2xy) = g(x+y) \Leftrightarrow 2 - 2xy = x + y \Leftrightarrow (2x+1)y = 2 - x \Leftrightarrow y = \dfrac{2-x}{2x+1}$.

Với $1 - xy = 1 - x.\dfrac{2-x}{2x+1} = \dfrac{x^2+1}{2x+1} > 0$ (đúng).

Ta có $P = x + 5y = x + 5.\dfrac{2-x}{2x+1}$. Đặt $f(x) = x + 5.\dfrac{2-x}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{25}{(2x+1)^2}$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Rightarrow (2x+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1 = 5 \\ 2x+1 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Vì $x > 0$ nên ta nhận $x = 2$.

Bảng biến thiên :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min P = 2$ khi $x = 2; y = 0$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Đề cho $x > y \geq 0$, chọn $y = 0$.

Ta có $3^{x+y+2xy-2} = \dfrac{2(1-xy)}{x+y} \Leftrightarrow 3^{x-2} = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow P_{\min} = x + 5y = 2$.

Câu 23: Cách 1: Tự luận

Chúng ta có 2 hướng tiếp cận bài toán như sau:

Hướng thứ nhất: Dùng phương pháp tiếp tuyến để tìm ra hệ số bất định a trong bài toán $3x - 1 \leq ax^3$.

Với mọi $x \in \left(\dfrac{1}{3};1\right)$, đồ thị hàm số $y = 3x - 1$ tiếp xúc đồ thị hàm số $y = ax^3$ tại điểm

$x_0 = \dfrac{3.\dfrac{1}{3} - 1}{4} + \dfrac{3.1 - 1}{4} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $a = 4$.

Do vậy $3x - 1 \leq 4x^3, \forall x \in \left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Ghi chú: Chỗ này trình bày thêm để tránh trường hợp người dùng tài liệu không hiểu vì sao ngay từ khi vào bài ta dùng ngay đoạn $(2b-1)^2(b+1) \geq 0$.

Do đó khi dùng cách tiếp cận này, ta trình bày bài toán theo dạng như sau:

Ta có $(2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow 3b - 1 \leq 4b^3$. Từ điều kiện đề bài ta suy ra $\log_a b > 1$.

Khi đó $P \geq 3\log_a b + \dfrac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3 = \dfrac{3\log_a b.(\log_a b - 3)^2}{(\log_a b - 1)^2} + 9 \geq 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $\min P = 9$.

Hướng thứ hai: Dùng bất đẳng thức Cauchy.

$\forall x \in \left(\dfrac{1}{3};1\right)$, ta có $(3x-1).\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} \underset{Cauchy}{\leq} \dfrac{\left[(3x-1) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right]^3}{27} = x^3 \Rightarrow 3x - 1 \leq 4x^3$.

Áp dụng kết quả trên, ta có $3b - 1 \leq 4b^3$. Từ điều kiện đề bài ta suy ra $\log_a b > 1$.

Khi đó $P \geq 3\log_a b + \dfrac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3 = \dfrac{3\log_a b.(\log_a b - 3)^2}{(\log_a b - 1)^2} + 9 \geq 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $\min P = 9$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Vẫn áp dụng kĩ thuật liên quan đến điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$.

Nhập biểu thức $P = \log_a\left(\frac{3b-1}{4}\right) + 12\log^2_{\frac{b}{a}} a - 3$ vào máy tính.

Dùng lệnh CALC đồng thời cả a, b với $\frac{1}{3} < b < a < 1$ --- thử nhanh liên tục.

Vậy $\min P = 9$.

Câu 24: **Cách 1: Tự luận**

Với điều kiện: $x > -1, y > -3 \Rightarrow x+1 > 0, y+3 > 0$. Ta có:

$$\log_2\left[(y+3)(x+1)\right] + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y+3) + \log_2(x+1) + (y+3) - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y+3) + (y+3) = \log_2\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t \ (t > 0), f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{1}{x+1}$.

Khi đó: $P = x + 3y + 10 = x + 3\left(\frac{1}{x+1} - 3\right) + 10 = x + 1 + \frac{3}{x+1} \ge 2\sqrt{3}$

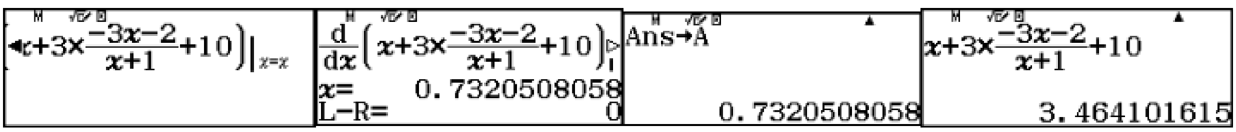
Dấu "=" xảy $\Leftrightarrow P = x + 1 + \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1$, (vì $x > -1$).

Vậy $\min P = 2\sqrt{3}$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $x = 0.01 \to y = \frac{-203}{101} = \frac{-3x-2}{x+1}$.

Ta lại có: $P = x + 3y + 10 = x + 3.\frac{-3x-2}{x+1} + 10$.



Vậy $\min P = 2\sqrt{3}$.

Câu 25: Ta có $a^x = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(1 + \log_a b)$, $b^y = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(1 + \log_b a)$.

$$P = x + 3y = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) + 1 + \log_b a = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\log_a b + \frac{1}{\log_a b}.$$

Đặt $t = \log_a b$, do $1 < a \le b \le a^3 \Rightarrow 1 \le \log_a b \le 3 \Rightarrow t \in [1;3] \Rightarrow P = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}, t \in [1;3]$

$f'(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{t^2}, f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{3} \\ t=-\sqrt{3} \end{array}\right.$. Do $t\in[1;3]\Rightarrow t=\sqrt{3}$.

$f(1)=f(3)=\frac{8}{3}, f(\sqrt{3})=\frac{4+2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(t)=\frac{8}{3}$ khi $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+3y$ là $\frac{8}{3}\in[2;3)$. Chọn **B.**

Câu 26: **Cách 1: Tự luận**

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$$P=\sqrt{\log_3 a}+\sqrt{\log_2 b}=\sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}}+\sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}}=\sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}}+\sqrt{\frac{1-\log_2 a}{\log_3 2}}$$

Đặt $\log_2 a=t \Rightarrow P=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}}+\sqrt{\log_2 3}.\sqrt{1-t}$.

Xét hàm số: $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}}+\sqrt{\log_2 3}.\sqrt{1-t}$ có TXĐ: $D=[0;1]$.

$\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}.\sqrt{\log_2 3}}-\frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}$.

Ta có: $f'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}.\sqrt{\log_2 3}}-\frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t}=\log_2 3.\sqrt{t} \Leftrightarrow t=\frac{1}{1+\log_2^2 3}$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{1+\log_2^2 3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\sqrt{\log_2 3}$	↗	$\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$	↘	$\sqrt{\log_3 2}$

Từ bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của $f(t)$ là: $\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$.

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của biểu thức P là: $\sqrt{\log_2 3+\log_3 2}$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Quy đổi đáp án thành số liệu cụ thể

Đáp án **A.** $P\approx 2,05$	Đáp án **B.** $P\approx 1,49$	Đáp án **C.** $P\approx 1,11$	Đáp án **D.** $P\approx 1,34$

Ta có: $\log_2 a+\log_3 b=1$, cho a tìm b với $a,b>1$ (Theo điều kiện của biểu thức P)

$a=1\to b=3$	$a=1,25\to b\approx 2,1$	$a=1,5\to b\approx 1,57$	$a=1,75\to b\approx 1,24$

$\sqrt{\log_3(A)}+\sqrt{\log_2(B)}$ 1.258952938	$\sqrt{\log_3(A)}+\sqrt{\log_2(B)}$ 1.485277936	$\sqrt{\log_3(A)}+\sqrt{\log_2(B)}$ 1.414211315	$\sqrt{\log_3(A)}+\sqrt{\log_2(B)}$ 1.270793386

Câu 27: Cách 1: Tự luận

Đặt: $\log_{16}x=\log_{20}y=\log_{25}\dfrac{2x-y}{3}=t\Rightarrow x=16^t;y=20^t;\dfrac{2x-y}{3}=25^t$

$\Rightarrow 2.16^t-20^t=3.25^t\Leftrightarrow 2-\left(\dfrac{20}{16}\right)^t=3.\left(\dfrac{25}{16}\right)^t\Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{5}{4}\right)^{2t}+\left(\dfrac{5}{4}\right)^t-2=0\ \ (*)$

Đặt $\left(\dfrac{5}{4}\right)^t=u\quad (u>0)$

Phương trình $(*)\Leftrightarrow 3u^2+u-2=0\ (**)$.

Do $u>0$ nên khi giải phương trình $(**)$ ta chỉ lấy nghiệm $u=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left(\dfrac{5}{4}\right)^t=\dfrac{2}{3}$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $T=\dfrac{y}{x}=\dfrac{20^t}{16^t}=\left(\dfrac{5}{4}\right)^t=\dfrac{2}{3}$.

Đặt: $\log_{16}x=\log_{20}y=\log_{25}\dfrac{2x-y}{3}=t\Rightarrow x=16^t;y=20^t;\dfrac{2x-y}{3}=25^t$

$\Rightarrow 2.16^t-20^t=3.25^t\Rightarrow t\approx -1{,}8\xrightarrow{STO}A\Rightarrow\dfrac{y}{x}=\left(\dfrac{20}{16}\right)^A=\dfrac{2}{3}$.

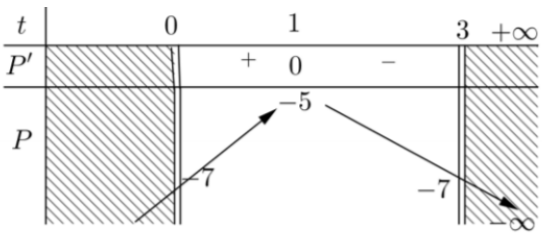
Câu 28: Cách 1: Tự luận

$$P=\frac{\log_2\frac{x}{128}}{\log_2 x+1}-\log_{\sqrt2}x=\frac{\log_2 x-\log_2 128}{\log_2 x+1}-2\log_2 x=\frac{\log_2 x-7}{\log_2 x+1}-2\log_2 x.$$

Đặt $t=\log_2 x$, $0\le t\le 3$.

Ta có $P=\dfrac{t-7}{t+1}-2t$ trên đoạn $[0;3]$. $P'=\dfrac{8}{(t+1)^2}-2$, $P'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Giá trị lớn nhất của biểu thức là $b=-5$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $a=-7$.
Vậy $ab=35$.
Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có $P=\dfrac{\log_2\frac{x}{128}}{\log_2 x+1}-\log_{\sqrt2}x$, $1\le x\le 8$

Dùng chức năng khảo sát hàm trên máy tính CASIO.

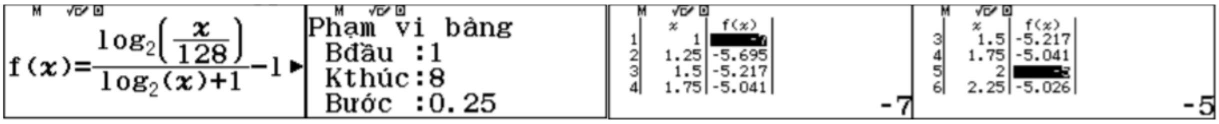
Nhập $f\left(x\right)=\dfrac{\log_2\dfrac{x}{128}}{\log_2 x+1}-\log_{\sqrt{2}} x$.

Star: 1

End: 8

Step: 0,25

Rồi dò bảng



Vậy $ab=35$.

Câu 29: **Cách 1: Tự luận**

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\ne \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{x}\right)=6x-4x^2 \Leftrightarrow \log_2\left(4x^2-4x+1\right)-\log_2 x=6x-4x^2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(4x^2-4x+1\right)+\left(4x^2-4x+1\right)=\log_2 x+\left(2x+1\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(4x^2-4x+1\right)+\left(4x^2-4x+1\right)=\log_2\left(2x\right)+2x \quad \left(*\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_2 t+t$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, \forall t>0$ nên $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

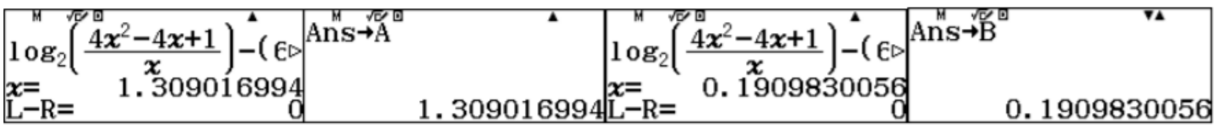
$\left(*\right)\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$.

Do $x_1<x_2$ nên $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$; $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$. Khi đó $2x_1-x_2=\dfrac{3-3\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)$.

Vậy $a=1;\ b=5 \Rightarrow P=a+b=6$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $\log_2\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{x}\right)=6x-4x^2$, giải phương trình trên lưu lần lượt váo A, **B.**



Ta lại có: $2x_1-x_2=\dfrac{3}{4}\left(a-\sqrt{b}\right)$, $\left(a,b\in\mathbb{N}\right)\Leftrightarrow 2B-A=\dfrac{3}{4}\left(a-\sqrt{b}\right),\left(a,b\in\mathbb{N}\right)$.

Như vậy ta có hệ phương trình

$\begin{cases} 2B-A=\dfrac{3}{4}\left(a-\sqrt{b}\right) \\ P=a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M=\dfrac{3}{4}\left(a-\sqrt{b}\right) \\ a=P-b \end{cases} \Leftrightarrow M=\dfrac{3}{4}\left(P-b-\sqrt{b}\right), M=2B-A$.

SHIFT SOLVE giá trị b được kết quả đẹp thì chọn khoanh.

Câu 30: **Cách 1: Tự luận**

Điều kiện $\sin x > 0, \cos x > 0$.

Đặt $u = 2\log_3\left(\cot x\right) = \log_2\left(\cos x\right)$ ta có $\begin{cases} \cot^2 x = 3^u \\ \cos x = 2^u \end{cases}$.

Vì $\cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$ nên suy ra

$$3^u = \dfrac{\left(2^u\right)^2}{1-\left(2^u\right)^2} \Leftrightarrow \left(2^u\right)^2 = 3^u\left(1-\left(2^u\right)^2\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0 \quad (1).$$

Xét hàm số $f\left(u\right) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0$, $f'\left(u\right) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^u \ln\dfrac{4}{3} + 4^u \ln 4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$

Suy ra $f\left(u\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f\left(u\right) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm. Dễ thấy $f\left(-1\right) = 0$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $u = -1$.

Với $u = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cot^2 x = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Đối chiếu điều kiện ta được $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in \left(0\ ;\ 2020\pi\right)$ nên $-\dfrac{1}{6} < k < \dfrac{6059}{6}$.

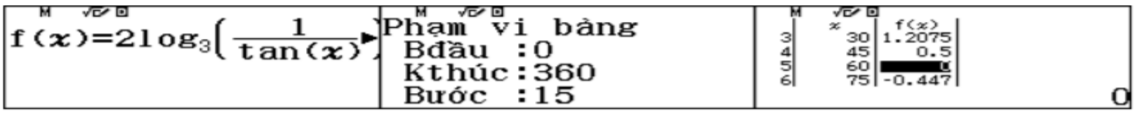
Do $k \in \mathbb{Z}$ ta chọn $k \in \left\{0,1,2,...,1009\right\}$.

Vậy phương trình có 1010 nghiệm thuộc khoảng $\left(0\ ;\ 2020\pi\right)$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Gặp dạng lượng giác thì chúng ta dò bảng.

Xử lý trên một vòng tròn lượng giác, rồi nhân số vòng tròn sẽ tìm được đáp số.



Như vậy, một vòng tròn $\left(360° = 2\pi\right)$ thì chỉ có một nghiệm $\Rightarrow 1010$ vòng nghĩa là có 1010 nghiệm. **Chọn D.**

Câu 31: **Cách 1: Tự luận**

Điều kiện $x + y > 0$. Đặt $\log_5\left(x+y\right) = t \Leftrightarrow x + y = 5^t$

Khi đó $\begin{cases} 5^x = t + y \\ 5^t = x + y \end{cases} \Leftrightarrow 5^t + t = 5^x + x$

Xét hàm số $f\left(u\right) = 5^u + u \Rightarrow f'\left(u\right) = 5^u.\ln 5 + 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $u \in \mathbb{R}$

Ta có: $f\left(t\right) = f\left(x\right) \Rightarrow t = x$. Khi đó: $5^x = x + y \Leftrightarrow y = 5^x - x$

Đặt $g\left(x\right) = 5^x - x \Rightarrow g'\left(x\right) = 5^x.\ln 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5\left(\ln 5\right)$

$g'\left(0\right) = \ln 5 - 1 > 0$

t	$-\infty$		$-\log_5(\ln 5)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{\ln 5}+\log_5(\ln 5)$	$\nearrow$	

Để phương trình có nghiệm thì $y \geq \frac{1}{\ln 5}+\log_5(\ln 5) \approx 0{,}917$

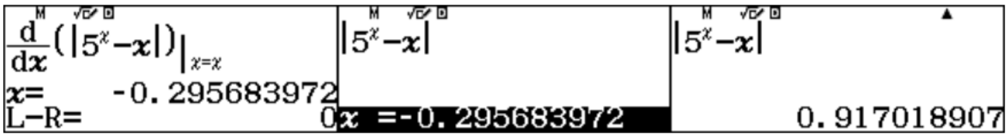
Mà $|y| \leq 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2: Trắc nghiệm

Đặt $\log_5(x+y)=t \Leftrightarrow x+y=5^t \Rightarrow \begin{cases} 5^x = t+y \\ 5^t = x+y \end{cases} \Leftrightarrow 5^t+t=5^x+x$

Áp dụng kỹ thuật CALC: Cho $x=0.01 \Rightarrow t=0.01=x \Leftrightarrow x+y=5^x \Leftrightarrow y=5^x-x.$

Ta lại có: $|y| \leq 2020 \Leftrightarrow |5^x-x| \leq 2020.$ Bấm đạo hàm tìm cực trị.



Để phương trình có nghiệm thì $y \geq \frac{1}{\ln 5}+\log_5(\ln 5) \approx 0{,}917$

Mà $|y| \leq 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 32: Cách 1: Tự luận

Tập xác định: $D=[1;+\infty)$

Ta có: $\log 10x+\log^2 x+3 \geq m\log 100x \Leftrightarrow m \leq \frac{\log 10x+\log^2 x+3}{\log 100x}=\frac{\log x+\log^2 x+4}{\log x+2}$

Đặt $t=\log x,\ x \geq 1 \Rightarrow t \geq 0,$ bất phương trình trở thành: $m \leq \frac{t^2+t+4}{t+2},(t \geq 0)(2)$

Để bất phương trình ban đầu có nghiệm $\forall x \in [1;+\infty)$ thì bất phương trình (2) có nghiệm $\forall t \in [0;+\infty).$

Xét $f(t)=\frac{t^2+t+4}{t+2}$ trên $[0;+\infty).$

Trên $[0;+\infty)$ ta có: $f'(t)=\frac{t^2+4t-2}{(t+2)^2},\ f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{6}\ (tm) \\ x=-2-\sqrt{6}\ (l) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

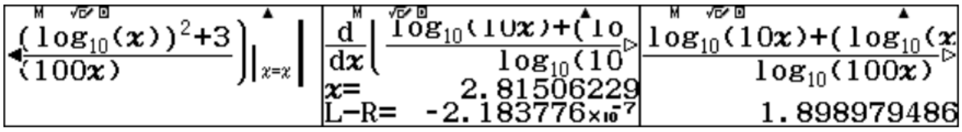
t	0		$-2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	$-3+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình (2) có nghiệm trên $\forall x \in [0;+\infty) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \le -3+2\sqrt{6}$

Mà m nguyên dương nên $m=1$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương thỏa mãn.

Cách 2: Trắc nghiệm

Cô lập m nhanh: $m \le \dfrac{\log 10x + \log^2 x + 3}{\log 100x}$. Dò bảng hoặc đạo hàm tại x.



Vậy $m \le \min\limits_{[0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \le 1.89$. Mà m nguyên dương nên $m=1$.

Câu 33: Cách 1: Tự luận

Điều kiện $x+y>0; x^2+y^2>0$

Ta đặt $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t$. Ta có $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} (1)$

Vì $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \le 2.4^t \Rightarrow t \le \log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,85$.

Ta có $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \Rightarrow xy = \dfrac{9^t-4^t}{2}$.

Khi đó $P = x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 27^t - 3.3^t.\dfrac{9^t-4^t}{2} = -\dfrac{1}{2}.27^t + \dfrac{3}{2}.12^t = f(t)$

Xét $f(t) = -\dfrac{1}{2}.27^t + \dfrac{3}{2}.12^t$ với $t \le \log_{\frac{9}{4}} 2$ có $f'(t) = -\dfrac{1}{2}.27^t.\ln 27 + \dfrac{3}{2}.12^t.\ln 12$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.27^t.\ln 27 = \dfrac{3}{2}.12^t.\ln 12 \Leftrightarrow \left(\dfrac{27}{12}\right)^t = 3.\dfrac{\ln 12}{\ln 17} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{27}{12}}\left(3.\dfrac{\ln 12}{\ln 27}\right) \approx 1,006 (L)$

$f'(0) = \dfrac{1}{2}.\ln 27 + \dfrac{3}{2}.\ln 12 > 0$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\log_{\frac{9}{4}} 2$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0 ↗	$f\left(\log_{\frac{9}{4}} 2\right) \approx 4,18$.

Gọi T là tập giá trị của P. Đặt $f\left(\log_{\frac{9}{4}} 2\right) = \alpha$ Từ bảng biến thiên ta có

$\begin{cases} T = (0;\alpha] \\ P \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \{1;2;3;4\} \in T$ nên suy ra tập giá trị của P có chứa 4 giá trị nguyên.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta đặt $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t$. Ta có $\begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases}$

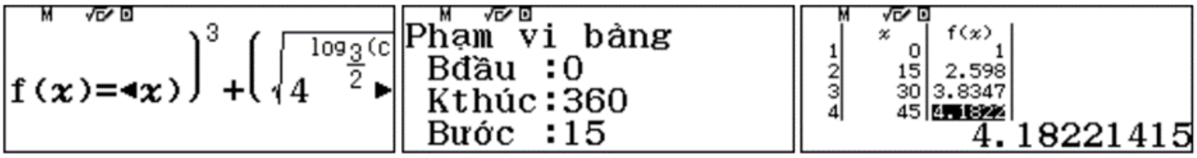
Lượng giác hoá: Đặt $\begin{cases} x=\sqrt{4^t}.\cos(\alpha) \\ y=\sqrt{4^t}.\sin(\alpha) \end{cases},(\alpha)\in(0;2\pi)$

Từ đó ta được : $\sqrt{4^t}.\cos(\alpha)+\sqrt{4^t}.\sin(\alpha)=3^t \Rightarrow \cos(\alpha)+\sin(\alpha)=\dfrac{3^t}{\sqrt{4^t}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t$

$\Rightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}\left(\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right)$

Ta có : $\begin{cases} x=\sqrt{4^t}.\cos(\alpha)=\sqrt{4^{\log_{\frac{3}{2}}(\cos(\alpha)+\sin(\alpha))}}.\cos(\alpha) \\ y=\sqrt{4^t}.\sin(\alpha)=\sqrt{4^{\log_{\frac{3}{2}}(\cos(\alpha)+\sin(\alpha))}}.\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow P=x^3+y^3$

Dò bảng để tìm đáp số :



Ta thấy x chạy trong khoảng từ 1 đến 4,18. Theo đề bài x nguyên nên $x\in\{1;2;3;4\}$.

Câu 34: **Cách 1: Tự luận**

Ta có : $2^{x^2+y^2}=2.2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2}=2^{y-x+1} \Leftrightarrow x^2+y^2=y-x+1 \Leftrightarrow y^2-y=-x^2-x+1(*)$

Hướng 1 :

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm $x\in\mathbb{Z}$ để phương trình (*) có nghiệm y dương.

Xét hàm số $f(y)=y^2-y$ trên $(0,+\infty)$

$f'(y)=2y-1,\ f'(y)=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}.$

Bảng biến thiên :

y	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

Phương trình (*) có nghiệm y dương $\Leftrightarrow -x^2-x+1\ge -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{6}}{2}\le x\le \dfrac{-1+\sqrt{6}}{2}$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-1;0\}$

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.

Hướng 2 :

Yêu cầu bài toán được thoả

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z}; y>0 \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} \end{cases} V \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{3}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

Trường hợp 1 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \dfrac{-1-\sqrt{6}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

Ta chọn $x \in \{-1;0\}$

Trường hợp 2 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{3}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \dfrac{-1-\sqrt{6}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{3}{2} - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2}; y > 0 \end{cases},$$

không tồn tại $x \in \mathbb{Z}$ để $y > 0$

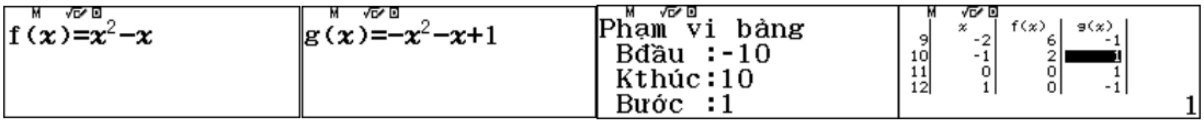
Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.

Cách 2: Trắc nghiệm

Vẫn như kỹ thuật ở trên – xử lý bảng đồng thời 2 giá trị x, y

Ta có : $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} = 2^{y-x+1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y - x + 1 \Leftrightarrow y^2 - y = -x^2 - x + 1$.

Dò bảng đồng thời x, y



Vậy chỉ có hai số nguyên x tồn tại số thực dương y.

Câu 35: Cách 1: Tự luận:

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\dfrac{5}{2};4\right]$ nên $t \in [-1;1]$.

Ta có phương trình: $4(m-1)t^2 - 4(m-5)t + 4m - 4 = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m\left(t^2 - t + 1\right) = t^2 - 5t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$$

Xét $f(t) = \dfrac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$, với $t \in [-1;1]$, ta có: $f'(t) = \dfrac{4t^2 - 4}{\left(t^2 - t + 1\right)^2} = \dfrac{-4\left(1 - t^2\right)}{\left(t^2 - t + 1\right)^2} \le 0, \ \forall t \in [-1;1]$

Suy ra, hàm số nghịch biến đoạn $[-1;1]$.

Phương trình (1) có nghiệm khi đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1;1] \Leftrightarrow f(1) \le m \le f(-1) \Leftrightarrow -3 \le m \le \dfrac{7}{3}$.

Cách 2: Trắc nghiệm

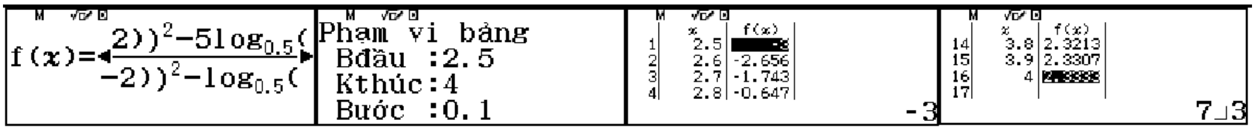
Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]$ nên $t\in[-1;1]$.

Ta có phương trình: $4(m-1)t^2-4(m-5)t+4m-4=0\ \ (1)$

Áp dụng kĩ thuật CALC:

Cho $t=100\to m=\dfrac{9501}{9901}=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}=\dfrac{\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)-5\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1}{\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1}$.

Nhập cả biểu thức vào bảng giá trị, trên đoạn $\left[\frac{5}{2};4\right]$ và kiểm tra kết quả đúng nhất.



Vậy: $-3\le m\le\frac{7}{3}$.

Câu 36: Cách 1: Tự luận

Phương trình $(*)\Leftrightarrow 2^{2x-y+1}+3^{2x-y+1}+2^{-2x+y+1}+3^{-2x+y+1}=5^{-2x+y+1}+5^{2x-y+1}$

Đặt $2x-y=a$, phương trình trở thành $2\left(2^a+2^{-a}\right)+3\left(3^a+3^{-a}\right)=5\left(5^a+5^{-a}\right)$

Nhận thấy nếu a là nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=x^t+x^{-t}, x>1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có $f'(x)=tx^{t-1}\left(1-x^{-2t}\right)$, do $x>1$ nên $1-x^{-2t}>0$

$\Rightarrow$ hàm số này đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a+2^{-a}\le 3^a+3^{-a}\le 5^a+5^{-a}, \forall a\ge 0$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $a=0$.

Suy ra $2\left(2^a+2^{-a}\right)+3\left(3^a+3^{-a}\right)\le 5\left(5^a+5^{-a}\right)$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=0$ hay $2x-y=0\Leftrightarrow 2x=y$.

Khi đó $P=2x^2-y^2-2x+3y+1=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3\le 3$

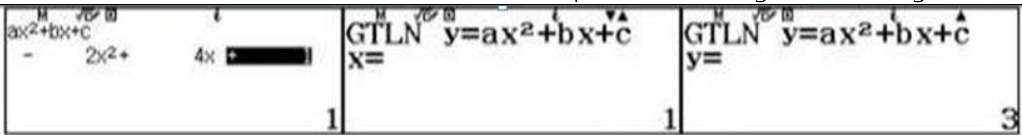
Dấu "=" xảy ra khi $x=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x=1$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có $2^{2x-y+1}+3^{2x-y+1}-5^{2x-y+1}=5^{-2x+y+1}-2^{-2x+y+1}-3^{-2x+y+1}$

Áp dụng kĩ thuật CALC: Cho $y=0.01\to x=0.005\Leftrightarrow 2x=y$.

Khi đó $P_{\max}=2x^2-y^2-2x+3y+1=-2x^2+4x+1$



Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x=1$.

Câu 37: Cách 1: Tự luận

Xét hàm số $f(t)=t+e^t \Rightarrow f'(t)=1+e^t>0$, $\forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (1).

Ta lại có: $x+\ln x=y+e^y \Leftrightarrow f(\ln x)=f(y)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\ln x=y \Leftrightarrow x=e^y$.

Để $1\le x\le 2020$ thì $1\le e^y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \ln 2020$.

Mà y nguyên và $y\in[1;2020]$ nên $y\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Với mỗi giá trị $y\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$ ta có một giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1;2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

Cách 2: Trắc nghiệm

Ta có: $x+\ln x=y+e^y$. Đặt $M=\ln x \to x=e^M \Rightarrow e^M+M=e^y+y \Rightarrow x=e^y$.

Để $1\le x\le 2020$ thì $1\le e^y\le 2020 \Leftrightarrow 0\le y\le \ln 2020$.

Mà y nguyên và $y\in[1;\,2020]$ nên $y\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Với mỗi giá trị $y\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$ ta có một giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1;2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn.

CHƯƠNG 3

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ 9 CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN NÂNG CAO

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương pháp đổi biến số

Bài toán: Giả sử ta cần tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x)=g\left[u(x)\right].u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số

- **Bước 1:** Đặt $u=u(x)\Rightarrow du=u'(x)dx$
- **Bước 2:** Đổi cận: $\begin{cases} x=a\to u=u(a) \\ x=b\to u=u(b) \end{cases}$
- **Bước 3:** Khi đó $I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

Bài toán: Tính tích phân $I=\int_a^b u(x).v'(x)dx$

- Đặt $\begin{cases} u=u(x) \\ dv=v'(x)dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=u'(x)dx \\ v=v(x) \end{cases}$.
- Khi đó $I=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

Chú ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và $\int_a^b vdu$ dễ tính hơn $\int_a^b udv$.

3. Tích phân các hàm số đặc biệt

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[-a;a\right]$, khi đó đặc biệt $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx$
  - Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

- Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ và $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{a} f(x)dx$ với $0 < b \neq 1$.

- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$

Hệ quả: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a+b-x) = f(x)$ thì $\int_{a}^{b} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_{a}^{b} f(x)dx$

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;\pi)$ thỏa mãn $f'(x) = f(x).\cot x + 2x.\sin x$. Biết $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\frac{\pi^2}{36}$. **B.** $\frac{\pi^2}{72}$. **C.** $\frac{\pi^2}{54}$. **D.** $\frac{\pi^2}{80}$.

LỜI GIẢI

Chọn B

$f'(x) = f(x).\cot x + 2x.\sin x \Leftrightarrow \sin x.f'(x) - f(x).\cos x + 2x.\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x.f'(x) - f(x).\cos x = 2x.\sin^2 x \Leftrightarrow \frac{\sin x.f'(x) - f(x).\cos x}{\sin^2 x} = 2x$

$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.f'(x) - f(x).\cos x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2x.dx \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)' dx = x^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sin x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1} - \frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{72}$

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} e^{3x}\left(4f(x) + f'(x)\right) = 2\sqrt{f(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}, \forall x \geq 0$ và $f(0) = 1$. Tính $I = \int_{0}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{11}{24}$. **B.** $I = -\frac{1}{12}$. **C.** $I = \frac{209}{640}$. **D.** $I = \frac{201}{640}$.

LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có $e^{3x}\left(4f(x) + f'(x)\right) = 2\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow 2e^{2x}\sqrt{f(x)} + e^{2x}\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow \left(e^{2x}\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{e^x}$

Do đó $e^{2x}\sqrt{f(x)}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{1}{e^x}$, tức $e^{2x}\sqrt{f(x)}=-\dfrac{1}{e^x}+C$

Thay $x=0$ vào ta được $C=2$. Tìm được $f(x)=\left(\dfrac{2}{e^{2x}}-\dfrac{1}{e^{3x}}\right)^2$

$$I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{2}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{3x}}\right)^2 dx=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{4}{e^{4x}}-\frac{4}{e^{5x}}+\frac{1}{e^{6x}}\right)dx=\frac{209}{640}.$$

CÂU 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\ln(x+1)+2(x+1)^2 f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tính $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

✍ LỜI GIẢI

Ta có $\ln(x+1)+2(x+1)^2 f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\ln(x+1)}{2(x+1)^2}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)^2}\mathrm{d}x\ (*)$$

Tính $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $u=\dfrac{1}{2}-x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=0.$

$$\Rightarrow I_1=-\int_{\frac{1}{2}}^{0} f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Tính $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}}$. Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0; x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{6}.$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}x}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Tính $I_3=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)^2}\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{2(x+1)^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}\\ v=-\dfrac{1}{2(x+1)}\end{cases}.$

$$\Rightarrow I_3=-\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{2(x+1)^2}=-\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2(x+1)}\bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{6}.$$

Từ $(*)\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}.$

CÂU 4. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có các hệ số nguyên. Biết $5f\left(x\right)-\left(f'\left(x\right)\right)^2=x^2+x+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{11}{6}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Theo bài ra ta có $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\Rightarrow f'\left(x\right)=2ax+b$

Thay vào $5f\left(x\right)-\left(f'\left(x\right)\right)^2=x^2+x+4,\forall x\in\mathbb{R}$ ta được

$5\left(ax^2+bx+c\right)-\left(2ax+b\right)^2=x^2+x+4$

$\Leftrightarrow\left(5a-4a^2\right)x^2+\left(5b-4ab\right)x+5c-b^2=x^2+x+4$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5a-4a^2=1\\5b-4ab=1\\5c-b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=1\\a=\frac{1}{4}\end{array}\right.\\\left(5-4a\right)b=1\\5c=b^2+4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}\\\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=\frac{1}{4}\\c=\frac{13}{16}\end{cases}\end{array}\right.$$

Giả thiết suy ra $a=b=c=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+x+1$ và $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{11}{6}$.

CÂU 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;3\right]$. Biết rằng $\int\limits_0^3\frac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{f\left(x\right)+1}dx=\frac{4}{3}$ và $f\left(0\right)=3,f\left(3\right)=8$. Giá trị của $f\left(2\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{50}{9}$. **B.** 3. **C.** $\frac{55}{9}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^3\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)+1}}dx=2.\sqrt{f\left(x\right)+1}\Big|_0^3=2$.

Ta đi tìm số $k\in R$ sao cho: $\int\limits_0^3\frac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{f\left(x\right)+1}dx-2k\int\limits_0^3\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)+1}}dx+k^2.\int\limits_0^3 dx=0\ \left(1\right)$.

$\left(1\right)\Rightarrow\frac{4}{3}-4k+3k^2=0\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$.

Khi đó $\left(1\right)\Leftrightarrow\int\limits_0^3\frac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{f\left(x\right)+1}dx-\int\limits_0^3\frac{4f'\left(x\right)}{3\sqrt{f\left(x\right)+1}}dx+\int\limits_0^3\frac{4}{9}dx=0$

$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} - \frac{2}{3} \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2}{3}\ (2)$.

Lấy nguyên hàm hai vế của (2) ta được:

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} dx = \int \frac{2}{3} dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1} = \frac{2x}{3} + C \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{2} \right)^2 - 1$.

Theo đề bài ta có $f(0) = 3 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x}{3} + 2 \right)^2 - 1$.

Vậy $f(2) = \frac{55}{9}$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, đồng biến trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn các điều kiện: $f(0) = \sqrt{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $4.f^2(x).[f'(x)]^2 = \left(\frac{3x^2+2x}{3} \right)^2 (2 + f^2(x))^3$, $\forall x \in [0;1]$. Tính $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $\sqrt{2}(\sqrt{17}-1)$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{2}(1-\sqrt{17})$. **D.** $2\sqrt{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có : $4.f^2(x).[f'(x)]^2 = \left(\frac{3x^2+2x}{3} \right)^2 [2 + f^2(x)]^3 \Rightarrow \frac{2f(x).f'(x)}{\sqrt{(2+f^2(x))^3}} = \frac{3x^2+2x}{3}, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra: $\int \frac{2f(x).f'(x)}{\sqrt{(2+f^2(x))^3}} \mathrm{d}x = \int \frac{3x^2+2x}{3} \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(2+f^2(x))}{\sqrt{(2+f^2(x))^3}} = \int \frac{3x^2+2x}{3} \mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{2+f^2(x)}} = \frac{x^3+x^2}{3} + C$.

Theo giả thiết $f(0) = \sqrt{2}$ suy ra $-\frac{2}{\sqrt{\left(2+(\sqrt{2})^2\right)}} = C \Leftrightarrow C = -1$.

Với $C = -1$ thì $-\frac{2}{\sqrt{2+f^2(x)}} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} - 1 \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2+f^2(1)}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 \Leftrightarrow f(1) = \sqrt{34}$.

Vậy $\int_0^1 f'(x)dx = \sqrt{2}(\sqrt{17}-1)$.

CÂU 7. Cho $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2+4}$.

Biết $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{\pi}{m}$. Khi đó giá trị của m là

A. $m = 10$. **B.** $m = 20$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 25$.

LỜI GIẢI

Chọn B

Hàm số $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ nên ta có:

$$\int_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}\ (1)$$

Đặt $K=\int_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)dx=2\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(-x)dx$

Đặt $-x=t\Rightarrow dx=-dt;\ f(-x)=f(t)$, $x=-2\Rightarrow t=2;\ x=2\Rightarrow t=-2$

Do đó $\int_{-2}^{2}f(-x)dx=\int_{2}^{-2}f(t).(-dt)=\int_{-2}^{2}f(t)dt=\int_{-2}^{2}f(x)dx$

$$\Rightarrow K=2\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(-x)dx=2\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(x)dx=5\int_{-2}^{2}f(x)dx\ (2)$$

Đặt $J=\int_{-2}^{2}\dfrac{dx}{x^2+4}$; $x=2\tan\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$,

Ta có: $dx=d(2\tan\alpha)=\dfrac{2d\alpha}{\cos^2\alpha}=2\left(1+\tan^2\alpha\right)d\alpha$.

$x=-2\Rightarrow\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$; Với $x=2\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Do đó $J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\left(1+\tan^2\alpha\right)}{4\tan^2\alpha+4}d\alpha=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{d\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4}\ (3)$

Từ (1), (2) và (3), ta có $K=J\Rightarrow5\int_{-2}^{2}f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\int_{-2}^{2}f(x)dx=\dfrac{\pi}{20}$

Mà theo giả thiết, $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\dfrac{\pi}{m}$ nên $\dfrac{\pi}{m}=\dfrac{\pi}{20}\Rightarrow m=20$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{x-x^2}$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_{0}^{2}xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{5}$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{10}$. **D.** $-\dfrac{1}{10}$.

LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{x-x^2}$, $\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow\begin{cases}2f(0)+3f(1)=0\\2f(1)+3f(0)=0\end{cases}\Rightarrow f(1)=f(0)=0$. **Nhận xét:** $\int_{0}^{1}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow5\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left[2f(x)+3f(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\Rightarrow\int_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{40}$$

Nên $\int_0^2 xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 2tf'(t)2\mathrm{d}t = 4\int_0^1 t\,\mathrm{d}\left(f(t)\right) = 4tf(t)\Big|_0^1 - 4\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 4f(1) - 4.\frac{\pi}{40} = -\frac{\pi}{10}$

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 5$ và $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{10}{9}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** $-\frac{10}{9}$. **D.** $-\frac{11}{4}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Theo giả thiết, ta có $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Ta có $\frac{1}{2} = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 0 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\int_0^1 \frac{x^2}{2}.f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = -1.$

Ta có $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 5$

$\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = -1 \Leftrightarrow 10\int_0^1 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = 10(-1) \Leftrightarrow \int_0^1 2\left(5x^2\right).f'(x)\mathrm{d}x = -10.$

$\int_0^1 \left(-5x^2\right)^2 \mathrm{d}x = 5$

Từ đó, ta có $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 2\left(5x^2\right).f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(5x^2\right)^2 \mathrm{d}x = 5 - 10 + 5.$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 5x^2\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -5x^2 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + C$

Mà $f(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{5}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{5}{3}$

Khi đó: $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}$.

Vậy: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{5x^3}{9} + \frac{5x}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{9}$.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$.

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, cho $x=2$, ta có $f(2)=1$.

Ta có $I=\int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$. Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ dv=\frac{f'(x)}{f(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(3x^2-6x)dx \\ v=\ln f(x) \end{cases}$.

Khi đó, ta có

$$I=(x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\ln f(x)dx=-3\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln f(x)dx=-3J.$$

$$J=\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln f(x)dx \overset{x=2-t}{=} \int\limits_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln f(2-t)d(2-t)$$

Suy ra

$$2J=\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)dx+\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(2-x)dx=\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)f(2-x)dx$$

$$=\int\limits_0^2\left[x^2-2x\right]\ln e^{2x^2-4x}dx=\int\limits_0^2(x^2-2x)(2x^2-4x)dx=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}.$$ Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}$.

CÂU 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f'(x)+f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Giả sử $f(2)=a$, $f(-3)=b$. Tính $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=b-a$. **B.** $T=a+b$. **C.** $T=-a-b$. **D.** $T=a-b$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Với $\forall x\in\mathbb{R}$, thay x bởi $-x$ vào biểu thức $2f'(x)+f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (1), ta được

$2f'(-x)+f'(x)=\frac{2|-x|}{(-x)^6+(-x)^2+1}$ hay $2f'(-x)+f'(x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (2).

Nhân hai vế của (1) với 2 sau đó trừ theo vế cho (2), ta được $f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Xét tích phân $I=\int\limits_{-3}^2 f'(x)dx=\int\limits_{-3}^2\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}dx$. Đặt $u=-x \Rightarrow du=-dx$.

Đổi cận: $x=-3\Rightarrow u=3$ và $x=2\Rightarrow u=-2$.

Khi đó

$$I=\int\limits_3^{-2}\frac{2}{3}.\frac{|-u|}{(-u)^6+(-u)^2+1}(-du)=\int\limits_{-2}^3\frac{2}{3}.\frac{|u|}{u^6+u^2+1}du=\int\limits_{-2}^3\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}dx=\int\limits_{-2}^3 f'(x)dx.$$

Vì $I=\int\limits_{-3}^{2} f'(x)\mathrm{d}x = f(2)-f(-3)$ và $I=\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x = f(3)-f(-2)$.

Do đó: $f(2)-f(-3)=f(3)-f(-2) \Leftrightarrow f(-2)-f(3)=f(-3)-f(2)=b-a$.

CÂU 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thoả mãn đẳng thức sau $4xf\left(x^2\right)+2f(2x+1)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** –1. **C.** 27. **D.** 1.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $4xf\left(x^2\right)+2f(2x+1)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'(x), \forall x\in\mathbb{R}.(*)$

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{0} 2f(2x+1)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(4x^5+8x^3+10x^2+30x+12\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{0} xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^{0} f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)+\int\limits_{-1}^{0} f(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=\frac{-7}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^{0}+\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{1}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int\limits_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u=\frac{-7}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^{0}+\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{-7}{3}-f(-1)+\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(-1)=-\frac{7}{3}+\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Ta có: $4xf\left(x^2\right)+2f(2x+1)=4x^5+8x^3+10x^2+30x+12-xf'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} 4xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1} 2f(2x+1)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(4x^5+8x^3+10x^2+30x+12\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1} xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^{1} f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)+\int\limits_{-1}^{1} f(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=\frac{92}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^{1}+\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\int\limits_{1}^{1} f(v)\mathrm{d}v+\int\limits_{-1}^{3} f(h)\mathrm{d}h=\frac{92}{3}-xf(x)\Big|_{-1}^{1}+\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{92}{3}-f(1)-f(-1)+\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{92}{3}-f(1)-f(-1) \qquad (2)$$

Từ $(1),(2)$ ta có được $\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{92}{3}-f(1)+\frac{7}{3}-\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x=33-f(1)=27$.

Thay $x=0$ vào $(*)$ ta có được $f(1)=6 \Rightarrow \int\limits_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x=27$.

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Đặt $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$, biết $g(0)=2, g(1)=6$, tính tích phân $\int\limits_0^1 \frac{6x-f(x)}{e^x}\mathrm{d}x$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2+2ax+b,\ f''\left(x\right)=6x+2a,\ f'''\left(x\right)=6$.

Do $g\left(x\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)+f''\left(x\right)\ \left(1\right)$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $g\left(x\right)=f\left(x\right)+g'\left(x\right)-f'''\left(x\right)$

$\Rightarrow 6x-f\left(x\right)=g'\left(x\right)-6-g\left(x\right)+6x$.

$$\Rightarrow \frac{6x-f\left(x\right)}{e^x}=\frac{g'\left(x\right)-6-\left(g\left(x\right)-6x\right)}{e^x}$$

$$\Rightarrow \frac{6x-f\left(x\right)}{e^x}=\frac{\left(g'\left(x\right)-6\right)e^x-\left(g\left(x\right)-6x\right)e^x}{e^{2x}}=\left(\frac{g\left(x\right)-6x}{e^x}\right)'$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{6x-f\left(x\right)}{e^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{g\left(x\right)-6x}{e^x}\right)'\mathrm{d}x=\left.\frac{g\left(x\right)-6x}{e^x}\right|_0^1=\frac{g\left(1\right)-6}{e^1}-\frac{g\left(0\right)-0}{e^0}=-2$$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=-1$ và $xf\left(1-x^3\right)+f'(x)=x^7+x-2, x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{-5}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{-2}{3}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(x)-f(x)=e^x\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$, tính $f(2)$.

A. $\frac{e^2}{2}$. **B.** $3e^2$. **C.** e^2. **D.** $2e^2$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f\left(x^2+4x+3\right)=x+2$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Tích phân $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{112}{3}$. **B.** $\frac{56}{3}$. **C.** $\frac{14}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=5$ và $\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{11}{4}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x$, $\forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ bằng

A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{15}{6}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\left(x^3+x\right)f\left(x^3\right)+\left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right)=4x^4-3x^3+4x^2-3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $f\left(x^2+4x\right)=-2x^2-7x+1, \forall x\in[0;+\infty)$. Biết $f(5)=-8$, tính $I=\int\limits_0^5 x.f'(x)dx$.

A. $I=-\frac{68}{3}$. **B.** $I=-\frac{35}{3}$. **C.** $I=-\frac{52}{3}$. **D.** $I=-\frac{62}{3}$.

Câu 8: Cho $f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(2\right)=16,\ \int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B.** 28. **C.** 36. **D.** 16.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=2x+1$ và $f\left(1\right)=-3$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$. Biết $\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)\ln x$ và $f\left(2\right)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính $I=\int\limits_1^2 \dfrac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{7}{4}$. **B.** $I=\dfrac{7}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn các điều kiện: $\int\limits_1^4 \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2$; $\int\limits_1^2 xf\left(x\right)e^{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$; $f\left(2\right)=0$. Giá trị $f\left(1\right)$ bằng

A. $-\dfrac{8}{3\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}}{6}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Câu 12: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên tập số thực thỏa mãn $xf'(x)-f(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Hãy tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $\dfrac{-5}{6}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x^2f'(x)+(3x-\dfrac{1}{x})f(x)=f'(x)+16x^2-8,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và $f(2)=8$. Khi đó giá trị $f(3)$ bằng

A. $\dfrac{20}{3}$. **B.** 12. **C.** 288. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_1^4 \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$; $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 1$.

Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 4$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 x\cdot f'(x)\cdot \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = 8$ và $f(3) = \ln 3$. Tính $\mathrm{I} = \int_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $\mathrm{I} = 1$. **B.** $\mathrm{I} = 11$. **C.** $\mathrm{I} = 8 - \ln 3$. **D.** $\mathrm{I} = 8 + \ln 3$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(0\right) = 0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right) + x^2 f\left(x\right) = f\left(3 - x\right) + x^2 f\left(3 - x\right)$.

Biết $\int\limits_{-1}^{4} x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 19: Cho các hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'\left(0\right).f'\left(2\right) \neq 0$ và $g\left(x\right).f'\left(x\right) = x\left(x - 2\right)e^x$. Tính $I = \int\limits_0^2 f\left(x\right).g'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = -4$. **B.** $I = e - 2$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 2 - e$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm và dương trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thỏa mãn $f\left(x\right) - 3xf^3\left(x\right) = 4xf'\left(x\right)$, $f\left(1\right) = 1$. Khi đó $f\left(4\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 4.

Câu 21: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và $2f\left(x\right) + 3f\left(-x\right) = \frac{1}{x^2 + 4}$, $\forall x \in \left[-2;2\right]$.

Tính $I = \int\limits_{-2}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{\pi}{10}$. **B.** $I = -\frac{\pi}{10}$. **C.** $I = -\frac{\pi}{20}$. **D.** $I = \frac{\pi}{20}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$, $f\left(x\right) \neq -1, \forall x \in \left[1;2\right]$.

Biết $f'\left(x\right)\left[f\left(x\right) + 2\right]^2 = \left[f\left(x\right) + 1\right]^4\left(x - 1\right)^2$ và $f\left(1\right) = -2$. Tính $I = \int_1^2 xf\left(x\right)dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=0$ và $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2, \forall x\in[1;4]$. Đặt $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<I<4$. **B.** $4<I<8$. **C.** $8<I<12$. **D.** $12<I<16$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$ và $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x), \forall x\in[1;2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\frac{4}{3}$. **B.** $\ln\frac{3}{4}$. **C.** $\ln 3$. **D.** 0.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\sin x.f(\cos x)+\cos x.f(\sin x)=\sin x-\sin^3 x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{6}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $4f(1)=g(1)$ và:

$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2020x=(x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2021x^2 \end{cases}$ $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$. Tính $I=\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Câu 27: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(x).f(3-x)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=3$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$, biết $a,b\in\mathbb{Z}$ và $(a,b)=1$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=8$. **B.** $P=7$. **C.** $P=3$. **D.** $P=9$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $I=\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{e-1}{e}$. **B.** $I=\dfrac{1-e}{e}$. **C.** $I=\dfrac{e}{1-e}$. **D.** $I=\dfrac{e}{e-1}$.

Câu 30: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;2021]$. Giả sử rằng với mọi $x\in[0;2021]$, ta có $f(x)>0$ và $f(x)f(2021-x)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{2021}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $\dfrac{2021}{2}$. **B.** $\dfrac{2021}{3}$. **C.** 2021. **D.** 4042.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}, f(x)>0, \forall x\in\mathrm{R}$ và $\int\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1411}{30}$. **B.** $\dfrac{114}{30}$. **C.** $\dfrac{141}{30}$. **D.** $-\dfrac{1411}{30}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(4;+\infty)$ và thỏa mãn đẳng thức $f(x)+(x^2-7x+12)f'(x)=\dfrac{(x^3-6x^2+9x)}{\sqrt{x^2+9}}$ với mọi $x\in(4;+\infty)$. Giá trị $f(5)$ của bằng

A. $f(5)=\sqrt{34}-5$. **B.** $f(5)=2\sqrt{34}+10$. **C.** $f(5)=2\sqrt{34}-10$. **D.** $f(5)=\sqrt{34}+5$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=6x^2+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. 1. **B.** $\pm\sqrt{3}$. **C.** ±1. **D.** 3.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=2021x^{2020}+3x^2-4, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2^{2021}. **B.** 0. **C.** 2^{2020}. **D.** 2^{2022}.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f(0)=1$, $f(x)>0, \forall x\in[0;+\infty)$ và $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{2f'(x)+1}=1, \forall x\in[0;+\infty)$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{3}{5}$. **B.** $I=\dfrac{5}{3}$. **C.** $I=\dfrac{1}{3}$. **D.** $I=\dfrac{2}{5}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\dfrac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{14}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{32}{5}$. **C.** $I=-\dfrac{16}{3}$. **D.** $I=-\dfrac{16}{5}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=e^2$ và $2\sin 2x\left[f(x)+e^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right]+f'(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và thoả mãn $f\left(x^3+2x-1\right)=2x-3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{11}{2}$. **B.** $I=\dfrac{11}{2}$. **C.** $I=\dfrac{7}{3}$. **D.** $I=-\dfrac{7}{3}$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $6x.f\left(x^2\right)+5f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$

Tính $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi}{32}$. **D.** $\dfrac{\pi}{16}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và đạt cực trị tại điểm $x=-2$. Tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung là đường thẳng d có phương trình $3x+y-2021=0$. Tích phân $I=\int\limits_{0}^{\ln 3}\left[x-1+f''\left(e^x-3\right)\right].e^x\mathrm{d}x$ bằng

A. $-1+3\ln 3$. **B.** $-7+3\ln 3$. **C.** $7-3\ln 3$. **D.** $-3+3\ln 3$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $f(2x)-xf\left(x^2\right)=5x-2x^3-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}xf'(x)dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=5$.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn: $2f(4-x)-3f(x)=-x^2-6x+16\ \forall x\in[0;4]$. Tính $I=\int\limits_{0}^{4}x.f(x)dx$.

A. $\dfrac{64}{3}$. **B.** 128. **C.** $\dfrac{128}{3}$. **D.** $\dfrac{320}{3}$.

Câu 44: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ thoả mãn $f\left(1\right)=3$ và $x\left(6-f'\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+2$ với $x>0$. Giá trị tích phân $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{3}{2}+\ln 2$. **B.** $3-2\ln 2$. **C.** $\frac{5}{2}+2\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}-2\ln 2$.

Câu 45: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=-1$ và $f'\left(x\right)=x\left(6+12x+e^{-x}\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng.

A. $3e$. **B.** $3e^{-1}$. **C.** $4-3e^{-1}$. **D.** $-3e^{-1}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(2\sin x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{-10}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Biết $f\left(1\right)=1$ và $f(x)=xf'(x)+\ln x$ $;\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ giá trị của $f\left(e\right)$ bằng:

A. 2. **B.** e. **C.** $\frac{1}{e}$. **D.** 1.

Câu 48: Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Khi đó, giá trị $\int\limits_{-3}^3 \frac{f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 13.

Câu 49: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2=4\left[2x^2+1-f\left(x\right)\right]$ với mọi x thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ và $f\left(1\right)=2$. Tính $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right).\mathrm{d}x$

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn: $f'\left(x\right)=f'\left(2-x\right)$ với $\forall x\in\left[0;2\right]$. Biết rằng $f\left(0\right)=2003, f\left(2\right)=2021$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f\left(2\cos x\right)\mathrm{d}x$.

A. -2012. **B.** 4024. **C.** -4024 **D.** 2012.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Cách 1: Phương pháp tự luận:**

Từ $xf\left(1-x^3\right)+f'\left(x\right)=x^7+x-2,x\in\mathbb{R}$ suy ra $x^2f\left(1-x^3\right)+xf'\left(x\right)=x^8+x^2-2x,x\in\mathbb{R}$

Do đó $\int\limits_0^1 x^2f\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^8+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1-x^3$ ta có $\mathrm{d}t=-3x^2\mathrm{d}x$ do đó ta được

$\int\limits_0^1 x^2f\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\limits_1^0 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Vậy ta có $\int\limits_0^1 x^2f\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^8+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-5}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\left(xf\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)=\frac{-5}{9}$

$\Leftrightarrow\frac{-2}{3}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{9}-\left[f\left(1\right)-0.f\left(0\right)\right]=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{-2}{3}$. Vậy $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$.

Cách 2: Phương pháp chọn hàm đại diện

Từ đẳng thức $xf\left(1-x^3\right)+f'\left(x\right)=x^7+x-2,x\in\mathbb{R}$ suy ra chọn đặt hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số bậc 2 dạng $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Ta có $xf\left(1-x^3\right)+f'(x)=x^7+x-2$.

Do đó $x\left[a\left(1-x^3\right)^2+b\left(1-x^3\right)+c\right]+2ax+b=x^7+x-2$

$\Leftrightarrow x\left[ax^6-\left(2a+b\right)x^3+\left(a+b+c\right)\right]+2ax+b=x^7+x-2$

$\Leftrightarrow ax^7-\left(2a+b\right)x^4+\left(3a+b+c\right)x+b=x^7+x-2\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\3a+b+c=1\\b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=0\end{cases}$.

Do vậy $f(x)=x^2-2x$ thỏa mãn $f(1)=-1$, từ đó ta có $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{-2}{3}$.

Câu 2: Từ giả thiết ta có

$$e^xf'\left(x\right)-f\left(x\right)\left(e^x\right)'=e^{2x}\Leftrightarrow\frac{f'\left(x\right)e^x-\left(e^x\right)'f\left(x\right)}{e^{2x}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(x\right)}{e^x}\right)'=1\Rightarrow\frac{f\left(x\right)}{e^x}=x+C..$$

Từ $f\left(0\right)=0$, thay vào ta có $C=0$. Vậy $f\left(x\right)=xe^x$. Vậy $f\left(2\right)=2e^2$.

Câu 3: Ta có: $f\left(x^2+4x+3\right)=x+2=\sqrt{\left(x+2\right)^2}=\sqrt{\left(x^2+4x+3\right)+1}$.

Suy ra $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}$. Do đó $\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\sqrt{x+1}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{2}{3}\left(8-1\right)=\frac{14}{3}$.

Câu 4: Ta có $\int\limits_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\Rightarrow 3=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)=\left(x^2f\left(x\right)\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=4-\int\limits_0^1 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int\limits_0^1 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int\limits_0^1\left(f'\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}x-10\int\limits_0^1 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x+25\int\limits_0^1 x^4\mathrm{d}x=5-10.1+25.\frac{1}{5}=0$

$\Rightarrow\int\limits_0^1\left(f'\left(x\right)-5x^2\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\left(f'\left(x\right)\right)^2-10x^2f'\left(x\right)+25x^4\right)\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=5x^2\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{5x^3}{3}+C$ mà $f\left(1\right)=4\Rightarrow C=\frac{7}{3}$. Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{5x^3}{3}+\frac{7}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{4}$

Câu 5: Xét phương trình $2xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=2x$, vì $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\left(0;+\infty\right)$ nên liên tục trên khoảng này.

Chia cả hai vế cho $2\sqrt{x}$, ta được $\sqrt{x}\cdot f'\left(x\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f\left(x\right)=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\sqrt{x}.f\left(x\right)\right]'=\sqrt{x}$

Lấy tích phân từ 1 tới 4 cả hai vế ta được $\int\limits_1^4\left(\sqrt{x}.f\left(x\right)\right)'\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}.f\left(x\right)\right)\Big|_1^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4\Rightarrow 2f\left(4\right)-f\left(1\right)=\frac{14}{3}\Rightarrow f\left(4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}+1\right)=\frac{17}{6}$ (vì $f\left(1\right)=1$).

Vậy $f\left(4\right)=\frac{17}{6}$.

Câu 6: Ta có: $\left(x^3+x\right)f\left(x^3\right)+\left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right)=4x^4-3x^3+4x^2-3x$

$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)x.f\left(x^3\right)+\left(x^2+1\right)f\left(1-x^2\right)=\left(x^2+1\right)\left(4x^2-3x\right)$

$\Leftrightarrow x.f\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=4x^2-3x\Leftrightarrow x^2.f\left(x^3\right)+x.f\left(1-x^2\right)=4x^3-3x^2$.

$\Rightarrow\int\limits_{-1}^0 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^0 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x=-2$. (1)

Xét $\int\limits_{-1}^0 x^2f\left(x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^0 f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Xét $\int\limits_{-1}^0 xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 f\left(1-x^2\right)\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -2 \ (2)$.

Ta lại có $\int_0^1 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int_0^1 xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2)\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_1^0 f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$

(3). Từ (2) và (3) suy ra $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -6$.

Câu 7: Ta có $f(x^2+4x) = -2x^2 - 7x + 1 \Leftrightarrow (2x+4)f(x^2+4x) = (-2x^2-7x+1)(2x+4)$.

Lấy tích phân cận chạy từ $0 \to 1$ hai vế ta được:

$\int_0^1 (2x+4)f(x^2+4x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (-2x^2-7x+1)(2x+4)\mathrm{d}x = -\frac{52}{3}$.

Xét $\int_0^1 (2x+4)f(x^2+4x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} t = x^2+4x \Rightarrow \mathrm{d}t = (2x+4)\mathrm{d}x \\ x = 0 \to t = 0, x = 1 \to t = 5 \end{cases}$.

Khi đó ta có $\int_0^1 (2x+4)f(x^2+4x)\mathrm{d}x = \int_0^5 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{52}{3}$.

Xét $I = \int_0^5 x.f'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -40 - \left(-\frac{52}{3}\right) = -\frac{68}{3}$.

Câu 8: Ta có $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x) = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Xét $I = \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow I = \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(2) - 4 = 32 - 4 = 28$. Vậy $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = 28$.

Câu 9: Ta có $2f(x) + xf'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow f(x) + f(x) + xf'(x) = 2x + 1$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 [f(x) + xf'(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+1)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 [x.f(x)]'\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 - xf(x)\Big|_0^1 = 2 - (-3) = 5$.

Câu 10: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \ln x \end{cases}$.

Khi đó, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \left(f(x)\ln x\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)\ln x\mathrm{d}x = \left(f(x)\ln x\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{x^2}\Big|_1^2$.

Mà $f(2) = \frac{1}{\ln 2}$ và $\ln 1 = 0$ nên $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \left(f(2)\ln 2 - f(1)\ln 1\right) - \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)$.

Vậy $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{7}{4}$.

Câu 11: Ta có

$$1 = \int_1^4 \frac{e^x}{2\sqrt{x}} f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^4 e^x \mathrm{d}\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right) = e^x f\left(\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 - \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right).e^x\mathrm{d}x = e^4 f(2) - ef(1) - \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right).e^x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 1 = -ef(1) - \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right).e^x\mathrm{d}x \ (1)$$

Mặt khác: $1 = \int_1^2 2xf(x)e^{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 f\left(\sqrt{x^2}\right)e^{x^2}\mathrm{d}\left(x^2\right) = \int_1^4 f\left(\sqrt{t}\right)e^t\mathrm{dt} \Rightarrow \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)e^x\mathrm{d}x = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $1 = -ef(1) - 1 \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{e}$.

Câu 12: Theo giả thiết: $xf'(x) - f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 1$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x + c$.

hay $f(x) = x^2 + cx$, mà $f(1) = 2$ nên $c = 1$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 + x)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$.

Câu 13: Từ đề bài ta có

$$x^2 f'(x) + (3x - \frac{1}{x})f(x) = f'(x) + 16x^2 - 8 \Leftrightarrow (x^2 - 1)f'(x) + (3x - \frac{1}{x})f(x) = 16x^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x)f'(x) + (3x^2 - 1)f(x) = 16x^3 - 8x \Leftrightarrow \left[(x^3 - x)f(x)\right]' = 16x^3 - 8x.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $(x^3 - x)f(x) = 4x^4 - 4x^2 + c$.

$\Rightarrow 6f(2) = 48 + c \Leftrightarrow c = 0$. Vậy $f(3) = 12$.

Câu 14: Ta có

$$\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(xf(x)\right)'\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2.f(2) - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 6 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

Theo giả thiết $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x = 3 \Leftrightarrow 6 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 4 \Rightarrow t = 2$.

Theo giả thiết $2 = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Ta có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3 - 1 = 2$.

Câu 15: Xét $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{dx} = 1$, đặt $t = \cos^2 x$. Khi đó $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$;

$\tan x\mathrm{dx} = \frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{dx} = \frac{-1}{2}.\frac{\mathrm{dt}}{t}$. Do vậy $I_1 = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}$. Suy ra $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} = 2I_1 = 2$.

Xét $I_2 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{dx}$, đặt $t = \ln^2 x$. Khi đó $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1; x = \mathrm{e}^2 \Rightarrow t = 4$;

$\frac{\mathrm{dx}}{x.\ln x} = \frac{1}{2}.\frac{\mathrm{dt}}{t}$. Do vậy $I_2 = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{dt}$. Suy ra $\int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{dt} = 2I_2 = 2$.

Xét $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}\mathrm{dx}$, đặt $t = 2x$. Khi đó $x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = 2 \Rightarrow t = 4$; $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Do vậy

$I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{dt} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}\mathrm{dt} + \int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{dt} = 2 + 2 = 4$.

Câu 16: Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^{f(x)} \end{cases}$ khi đó $\int_0^3 x \cdot f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^3 - \int_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 8 = 3 \cdot \mathrm{e}^{f(3)} - \int_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = 3.\mathrm{e}^{\ln 3} - 8 = 9 - 8 = 1$.

Câu 17: Ta có: $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$ nên $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\left[f(x)\right] = \left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$. Suy ra: $I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Mặt khác, ta có:

$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$. Vậy $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

Câu 18: Ta có $f\left(x\right)+x^2f\left(x\right)=f\left(3-x\right)+x^2f\left(3-x\right)$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)+x^2f\left(x\right)-f\left(3-x\right)-x^2f\left(3-x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(1+x^2\right)f\left(x\right)-\left(1+x^2\right)f\left(3-x\right)=0\Leftrightarrow\left(1+x^2\right)\left(f\left(x\right)-f\left(3-x\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+1=0\ \ (vn)\\ f\left(x\right)-f\left(3-x\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow f\left(3-x\right)=f\left(x\right)$.

Cách 1: Sử dụng công thức giải nhanh:

Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ và thỏa mãn điều kiện $f\left(x\right)=f\left(a+b-x\right),\forall x\in\left[a;b\right]$. Thì ta có: $\int\limits_a^b x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Do đó: $\int\limits_{-1}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2.2}{-1+4}=\frac{4}{3}$.

Cách 2: Đổi biến trực tiếp

Đặt $t=3-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ và $x=-1\Rightarrow t=4;\ x=4\Rightarrow t=-1$.

Khi đó: $2=\int\limits_{-1}^{4} x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4}\left(3-t\right).f\left(3-t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{4}\left(3-x\right).f\left(3-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4}\left(3-x\right).f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $4=\int\limits_{-1}^{4} x.f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{4}\left(3-x\right).f\left(x\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_{-1}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_{-1}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 19: Đặt $h\left(x\right)=g\left(x\right).f'\left(x\right)=x\left(x-2\right)e^x$.

Ta có $h\left(0\right)=g\left(0\right).f'\left(0\right)=0$ mà $f'\left(0\right)\neq 0$ nên $g\left(0\right)=0$.

Tương tự $h\left(2\right)=g\left(2\right).f'\left(2\right)=0$ mà $f'\left(2\right)\neq 0$ nên $g\left(2\right)=0$.

Ta có $I=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}\left(\mathrm{g}\left(x\right)\right)=f\left(x\right).g\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 g\left(x\right)\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)$

$=f\left(2\right).g\left(2\right)-f\left(0\right).g\left(0\right)-\int\limits_0^2 g\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2 x\left(x-2\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đặt $u=x\left(x-2\right)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ ta có $\mathrm{d}u=\left(2x-2\right)\mathrm{d}x$, chọn $v=\mathrm{e}^x$.

Khi đó

$$\int\limits_0^2 x\left(x-2\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\left(x-2\right)\mathrm{e}^x\Big|_0^2-\int\limits_0^2\left(2x-2\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\int\limits_0^2\left(2x-2\right)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$$

$$=-(2x-2)e^x\Big|_0^2+\int_0^2 e^x d(2x-2)=-2e^2-2+2\int_0^2 e^x dx=-2e^2-2+2e^x\Big|_0^2=-4.$$

Suy ra $I=-\int_0^2 x(x-2)e^x dx=4$.

Câu 20: Ta có $f(x)-3xf^3(x)=4xf'(x)\Leftrightarrow f^2(x)-4xf'(x)f(x)=3xf^4(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}f^2(x)-2\sqrt{x}f'(x)f(x)}{f^4(x)}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{x}}{f^2(x)}\right)'=\frac{3}{2}\int\sqrt{x}\,dx\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{f^2(x)}=x\sqrt{x}+C\ (*)$$

Thay $x=1$ vào (*), ta có $\frac{1}{f^2(1)}=1+C\Rightarrow C=0$

$(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{f^2(x)}=x\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(4)=\frac{1}{2}$.

Câu 21: Ta có $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{x^2+4}$, $\forall x\in[-2;2]$, suy ra $2\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(-x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx$ (1).

Xét $3\int_{-2}^{2}f(-x)dx$. Đặt $t=-x\Rightarrow dt=-dx$. Ta có $3\int_{-2}^{2}f(-x)dx=3\int_{2}^{-2}f(t)(-dt)=3\int_{-2}^{2}f(x)dx$ (2).

Thay (2) vào (1), ta được $5\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx\Rightarrow I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx$.

Đặt $x=2\tan t\Rightarrow dx=2(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}\\ x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

Khi đó $I=\frac{1}{5}.\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\tan^2 t+4}2(1+\tan^2 t)dt=\frac{1}{10}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{20}$.

Câu 22: Ta có: $f'(x)[f(x)+2]^2=[f(x)+1]^4(x-1)^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)[f(x)+2]^2}{[f(x)+1]^4}=(x-1)^2$.

$$\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)[f(x)+2]^2}{[f(x)+1]^4}dx=\int(x-1)^2dx\ (1)$$

Xét $I=\int\frac{f'(x)[f(x)+2]^2}{[f(x)+1]^4}dx$: đặt $t=f(x)+1$ khi đó:

$I=\int \frac{(t+1)^2}{t^4}dt \Leftrightarrow \int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3t^3}+C$.

Thay vào (1) ta được: $-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3t^3}+C=\frac{x^3}{3}-x^2+x$

Hay $-\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{\left[f(x)+1\right]^2}-\frac{1}{3\left[f(x)+1\right]^3}+C=\frac{x^3}{3}-x^2+x$

Vì $f(1)=-2$ nên $C=0$, suy ra $-\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{\left[f(x)+1\right]^2}-\frac{1}{3\left[f(x)+1\right]^3}=\frac{x^3}{3}-x^2+x$.

Đồng nhất hai vế, suy ra: $-\frac{1}{f(x)+1}=x \Leftrightarrow f(x)=-1-\frac{1}{x}$.

Khi đó: $I=\int_1^2 x\left(-1-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2(-x-1)\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}$.

Câu 23: Ta có:

$x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow x\left[1+2f(x)\right]=\left[f'(x)\right]^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x\left[1+2f(x)\right]}=f'(x)$ (vì $f(x)$ đồng biến) $\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$, $\forall x\in[1;4]$

Nguyên hàm hai vế, ta được: $\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$

Với $f(1)=0 \Rightarrow c=\frac{1}{3}$. Suy ra $\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)^2-1}{2}$

Vậy $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}\right)^2-1}{2}=\frac{1403}{90}=15,5(8)$.

Câu 24: Từ giả thiết, ta có $f(x)+xf'(x)=\left(2x^3+x^2\right)f^2(x)\Rightarrow \frac{f(x)+xf'(x)}{[xf(x)]^2}=2x+1$

$\Rightarrow\left[\frac{1}{xf(x)}\right]'=-2x-1\Rightarrow \frac{1}{xf(x)}=\int(-2x-1)dx \Rightarrow \frac{1}{xf(x)}=-x^2-x+C$.

$f(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow xf(x)=-\frac{1}{x(x+1)}$

$\Rightarrow \int_1^2 xf(x)dx=\int_1^2\frac{-1}{x(x+1)}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx=\ln\frac{x+1}{x}\Big|_1^2=\ln\frac{3}{4}$.

Câu 25: Ta có $\sin x-\sin^3 x=\sin x\left(1-\sin^2 x\right)=\sin x.\cos^2 x$.

Do đó, từ giả thiết ta được

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}(\cos x)\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-\int_1^0 t^2\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow 2I=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\Leftrightarrow I=\frac{1}{6}.$$

Câu 26: $\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2020x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2021x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f'(x)=-2020\\ \dfrac{x}{x+1}g'(x)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=2021\end{cases}$

Lấy vế cộng vế hai phương trình trên ta được:

$$\left(\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right)-\left(\frac{x+1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x+1}g(x)\right)'-\left(\frac{x+1}{x}f(x)\right)'=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right)'=1.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)=x+C.$$

Do $4f(1)=g(1)$ nên ta có $C+1=0\Leftrightarrow C=-1$. Suy ra $\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)=x-1$.

Do đó: $I=\displaystyle\int_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}$.

Câu 27: Đặt $t=3-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $I=\displaystyle\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $0=\displaystyle\int_0^3\left[\frac{f(3-x)-f(x)}{(1+f(x))(1+f(3-x))}\right]\mathrm{d}x$, do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;3]$. Suy ra $f(3-x)=f(x)$, trên đoạn $[0;3]$.

Mà $f(x).f(3-x)=1\Rightarrow f(x)=1$. Vậy $I=\displaystyle\int_0^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

Câu 28: Đặt $I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = 1$.

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x.\cos x\mathrm{d}x = 2\sin^2 x.\cot x\mathrm{d}x = 2t.\cot x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\Rightarrow I_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(t\right).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x = 2I_1 = 2.$$

Đặt $I_2 = \int\limits_{1}^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 3$, Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 16 \Rightarrow t = 4$.

$$I_2 = \int\limits_{1}^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{4} \frac{f\left(t\right)}{t^2}2t\mathrm{d}t = 2\int\limits_{1}^{4} \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f\left(4x\right)}{4x}\mathrm{d}\left(4x\right) = 2\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I_2 = \frac{3}{2}$.

Khi đó, ta có: $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow a = 7, b = 2$.

Vậy $P = a + b = 9$.

Câu 29: Ta có $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow f'(x).e^{\frac{x^2}{2}} + xf(x).e^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{-x^2}.e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left(f(x).e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = 2x.e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow f(x).e^{\frac{x^2}{2}} = \int 2x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -2\int e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$$

Khi đó ta có $f(x).e^{\frac{x^2}{2}} = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + C$.

Với $x = 0$ ta được $f(0).e^0 = -2e^0 + C \Leftrightarrow f(0) = -2 + C$ mà $f(0) = -2 \Rightarrow C = 0$.

Suy ra $f(x).e^{\frac{x^2}{2}} = -2e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} \Leftrightarrow f(x) = -2e^{-x^2}$.

Khi đó ta có: $I = \int\limits_{0}^{1} xf\left(x\right)\mathrm{d}x = -2\int\limits_{0}^{1} x.e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}\mathrm{d}\left(-x^2\right) = e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e}$.

Câu 30: Ta có: $I=\int\limits_0^{2021}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{1}{f\left(2021-x\right)}}=\int\limits_0^{2021}\dfrac{f\left(2021-x\right)}{f\left(2021-x\right)+1}\mathrm{d}x$.

Đặt: $2021-x=t$ thì $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Khi $x=0$ thì $t=2021$, khi $x=2021$ thì $t=0$.

Ta được: $I=-\int\limits_{2021}^{0}\dfrac{f\left(t\right)}{f\left(t\right)+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{2021}\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)+1}\mathrm{d}x$.

Do đó: $2I=\int\limits_0^{2021}\dfrac{1}{f\left(x\right)+1}\mathrm{d}x+\int\limits_0^{2021}\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2021}\mathrm{d}x=2021$. Vậy: $I=\dfrac{2021}{2}$.

Câu 31: Tính $\int\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x$ ta đặt $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=t\Rightarrow 1+f^2\left(x\right)=t^2\Leftrightarrow 2f\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow f\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$

Thay vào ta được $\int\dfrac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{t\mathrm{d}t}{t}=\int\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{1+f^2\left(x\right)}+C$.

Do đó $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}+C=x^2+x$; $f\left(0\right)=2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}+C=0\Leftrightarrow C=-3$.

Ta có $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}-3=x^2+x\Rightarrow\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=x^2+x+3\Leftrightarrow f^2\left(x\right)=\left(x^2+x+3\right)^2-1$.

Suy ra $\int\limits_1^2 f^2\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2[\left(x^2+x+3\right)^2-1]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x^4+x^2+9+2x^3+6x^2+6x-1\right)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_1^2\left(x^4+2x^3+7x^2+6x+8\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{7x^3}{3}+3x^2+8x\right)\right|_1^2=\dfrac{1411}{30}$.

Vậy $\int\limits_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1411}{30}$.

Câu 32: Ta có

$f\left(x\right)+(x^2-7x+12)f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x^3-6x^2+9x\right)}{\sqrt{x^2+9}}$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)+\left(x-3\right)\left(x-4\right)f'\left(x\right)=\dfrac{x\left(x-3\right)^2}{\sqrt{x^2+9}}\Rightarrow\dfrac{1}{\left(x-3\right)^2}.f\left(x\right)+\dfrac{x-4}{x-3}.f'\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

$\Rightarrow\left[\dfrac{x-4}{x-3}.f\left(x\right)\right]'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\Rightarrow\dfrac{x-4}{x-3}.f\left(x\right)=\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+9}+C\quad(*)$

Vì hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục với mọi $x\in\left(4;+\infty\right)$ và thỏa mãn $\left(*\right)$ vớ i $x\in\left(4;+\infty\right)$ nên ta thay $x=4$ vào $\left(*\right)$ ta được $C=-5$.

Suy ra $\frac{x-4}{x-3}.f(x)=\sqrt{x^2+9}-5\ \Rightarrow \frac{1}{2}f(5)=\sqrt{34}-5 \Rightarrow f(5)=2\sqrt{34}-10.$

Câu 33: Ta có: $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=6x^2+2$

$\Rightarrow \left[f(x).f'(x)\right]'=6x^2+2 \Leftrightarrow f(x).f'(x)=\int(6x^2+2)\mathrm{d}x=2x^3+2x+C$

Mà $f(0)=0$ nên thay $x=0$ ta được: $C=0$. Suy ra $f(x).f'(x)=2x^3+2x$.

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\int\limits_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(2x^3+2x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\frac{3}{2} \Leftrightarrow f^2(1)=3 \Rightarrow f(1)=\pm\sqrt{3}$.

Câu 34: Từ giải thiết $f(x)+f(-x)=2021x^{2020}+3x^2-4,\forall x\in\mathbb{R}$.

Lấy tích phân hai vế từ -2 đến 2 ta được:

$\int\limits_{-2}^{2}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}\left(2021x^{2020}+3x^2-4\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{2}f(-x)\mathrm{d}x=\left.\left(x^{2021}+x^3-4x\right)\right|_{-2}^{2} \Leftrightarrow I+\int\limits_{-2}^{2}f(-x)\mathrm{d}x=2^{2022}.$

Xét $J=\int\limits_{-2}^{2}f(-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x$ ta có $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=-2$.

Do đó $J=\int\limits_{2}^{-2}-f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=I$.

Vậy $2I=2^{2022}\Rightarrow I=2^{2021}$.

Câu 35:

Ta có: $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{2f'(x)+1}=1\Leftrightarrow 2f'(x)+1+f(x)=2f(x)f'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow 2f'(x)+1=2f(x)f'(x)\Rightarrow 2f(x)+x=f^2(x)+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $C=1$. Do đó $2f(x)+x=f^2(x)+1\Leftrightarrow\left[f(x)-1\right]^2=x$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}+1$ vì $f(x)>0,\forall x\in[0;+\infty)$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{3}$.

Câu 36: **Cách 1:**

Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, cho $x=2$, ta có $f(2)=1$. Ta có $I=\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$

Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ dv=\frac{f'(x)}{f(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(3x^2-6x)dx \\ v=\ln f(x) \end{cases}$ (do $f(x)>0, \forall x\in[0;2]$).

Khi đó, ta có

$$I=(x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^2-\int_0^2(3x^2-6x)\ln f(x)dx=-3\int_0^2(x^2-2x)\ln f(x)dx=-3J.$$

$$J=\int_0^2(x^2-2x)\ln f(x)dx.$$

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$; đổi cận: $x=2\Rightarrow t=0; x=0\Rightarrow t=2$

$$J=\int_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln f(2-t)d(2-t)$$

$$=\int_2^0\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]\ln f(2-x)d(2-x)=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(2-x)dx.$$

Suy ra $2J=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)dx+\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(2-x)dx=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln f(x)f(2-x)dx$

$$=\int_0^2\left[x^2-2x\right]\ln e^{2x^2-4x}dx=\int_0^2(x^2-2x)(2x^2-4x)dx=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}.$$ Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}$.

Cách 2: Từ giả thiết ta có $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}=e^{x^2-2x}.e^{(2-x)^2-2(2-x)}$ nên ta có thể chọn $f(x)=e^{x^2-2x}$.

$$I=\int_0^2\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx=\int_0^2\frac{(x^3-3x^2).(2x-2)e^{x^2-2x}}{e^{x^2-2x}}dx=\int_0^2(x^3-3x^2).(2x-2)dx=-\frac{16}{5}.$$

Câu 37: $2\sin 2x\left[f(x)+e^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right]+f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sin 2x.f(x)+2\sin 2x.e^{\cos 2x}\sqrt{f(x)}+f'(x)=0$ (1)

Do hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ nên chia hai vế phương trình (1) cho $2\sqrt{f(x)}$ ta được $\sin 2x.\sqrt{f(x)}+\sin 2x.e^{\cos 2x}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=0$ (2).

Nhân hai vế của phương trình (2) với $e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}$ ta được:

$$\sin 2x.e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}=-\sin 2x.e^{\frac{1}{2}\cos 2x}\Leftrightarrow\left(e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}\right)'=-\sin 2x.e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=\int\left(-\sin 2x.e^{\frac{1}{2}\cos 2x}\right)\mathrm{dx}\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=e^{\frac{1}{2}\cos 2x}+C\ (3).$$

Trong đẳng thức (3) cho $x=0$ ta được $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{f(0)}=e^{\frac{1}{2}}+C\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{e^2}=e^{\frac{1}{2}}+C\Leftrightarrow C=0$.

$$(3)\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}\sqrt{f(x)}=e^{\frac{1}{2}\cos 2x}\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=e^{\cos 2x}\Leftrightarrow f(x)=e^{2\cos 2x}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=e^{2\cos\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{e}\simeq 0.367\in(0;1).$$

Câu 38: Đặt $x=t^3+2t-1$, ta có $\mathrm{d}x=\left(3t^2+2\right)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-1\Leftrightarrow t^3+2t-1=-1\Leftrightarrow t^3+2t=0\Leftrightarrow t=0$.

$x=2\Leftrightarrow t^3+2t-1=2\Leftrightarrow t^3+2t-3=0\Leftrightarrow t=1$.

Lúc đó ta có $I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f\left(t^3+2t-1\right).\left(3t^2+2\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}(2t-3).\left(3t^2+2\right)\mathrm{d}t$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(6t^3-9t^2+4t-6\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{3t^4}{2}-3t^3+2t^2-6t\right)\right|_0^1=-\frac{11}{2}.$$

Câu 39:

Ta có $6x.f\left(x^2\right)+5f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$

$$\Leftrightarrow 3.\int\limits_0^1 2x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x+5\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 3A+5B=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\,(*)$$
.

$A=\int\limits_0^1 2x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$; $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=1$.

$A=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

$B=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x; x=0\Rightarrow t=1, x=1\Rightarrow t=0$.

$B=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 3\int_0^1 f(x)dx+5\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\Leftrightarrow 8.\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$.

Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=cost dt,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2t}{2}dt=\frac{1}{2}.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{32}$.

Câu 40: Ta có $I=\int_0^{\ln 3}\left[x-1+f''\left(e^x-3\right)\right].e^x dx=\int_0^{\ln 3}(x-1).e^x dx+\int_0^{\ln 3}f''\left(e^x-3\right).e^x dx$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$I_1=\int_0^{\ln 3}(x-1).e^x dx=(x-1).e^x\Big|_0^{\ln 3}-\int_0^{\ln 3}e^x dx=3(-1+\ln 3)+1-e^x\Big|_0^{\ln 3}=-4+3\ln 3$.

Xét $I_2=\int_0^{\ln 3}f''\left(e^x-3\right).e^x dx$. Đặt $t=e^x-3\Rightarrow dt=e^x.dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=-2$.

$x=\ln 3\Rightarrow t=0$. Suy ra $I_2=\int_{-2}^0 f''(t).dt=f'(t)\Big|_{-2}^0=f'(0)-f'(-2)$.

Vì $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và đạt cực trị tại điểm $x=-2$ nên $f'(-2)=0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung có hoành độ $x=0$.

Phương trình của đường thẳng d có dạng $3x+y-2021=0\Leftrightarrow y=-3x+2021$.

d là tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với trục tung $\Rightarrow f'(0)=-3$.

$\Rightarrow I_2=-3-0=-3$. Vậy $I=I_1+I_2=-7+3\ln 3$.

Câu 41: Theo giả thiết: $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x$ nên $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

Mặt khác: $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$.

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=-\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ (Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$).

nên $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$. Vậy $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}$

Câu 42: Lấy tích phân hai vế với cận dưới bằng 0, cận trên bằng 1 của đẳng thức

$f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1$ ta được: $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 xf(x^2)\mathrm{d}x = 1$. (1)

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$;

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow x\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$; đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 xf(x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Thay vào (1) ta được $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 \Rightarrow \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Đồng thời thay $x = 1$ vào biểu thức $f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1$ ta có $f(2) = 3$.

Xét $I = \int\limits_1^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = xf(x)\big|_1^2 - \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Câu 43: Ta có: $2\int\limits_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 (-x^2 - 6x + 16)\mathrm{d}x = -\dfrac{16}{3}$.

Đặt $t = 4 - x$, có $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t;\ x = 0 \Rightarrow t = 4;\ x = 4 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó $2\int\limits_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x = -2\int\limits_4^0 f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2\int\limits_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{16}{3}$. Từ đó $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}$.

Từ giả thiết ta có $2x.f(4-x) - 3x.f(x) = -x^3 - 6x^2 + 16x\ \forall x \in [0;4]$

Suy ra $2\int\limits_0^4 x.f(4-x)\mathrm{d}x - 3\int\limits_0^4 x.f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^4 (-x^3 - 6x^2 + 16x)\mathrm{d}x = -64$ (1).

Đặt $t = 4 - x$, có $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t;\ x = 0 \Rightarrow t = 4;\ x = 4 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó $2\int\limits_0^4 x.f(4-x)\mathrm{d}x = -2\int\limits_4^0 (4-t).f(t)\mathrm{d}t = 8\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}t - 2\int\limits_0^4 t.f(t)\mathrm{d}t = \frac{128}{3} - 2I$.

Thế vào (1) ta có: $\frac{128}{3} - 5I = -64 \Rightarrow I = \frac{64}{3}$.

Câu 44: Ta có $x(6 - f'(x)) = f(x) + 2 \Leftrightarrow f(x) + x.f'(x) = 6x - 2 \Leftrightarrow (x.f(x))' = 6x - 2$.

Suy ra $x.f(x) = \int(6x-2)\mathrm{d}x = 3x^2 - 2x + C$.

Thay $x = 1$ vào ta được: $1.f(1) = 1 + C \Rightarrow 3 = 1 + C \Rightarrow C = 2$.

Do đó: $x.f(x) = 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f(x) = 3x - 2 + \frac{2}{x}$.

$\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(3x - 2 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{3x^2}{2} - 2x + 2\ln x\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{2} + 2\ln 2$.

Câu 45: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = x - 1 \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = f(0) - \int\limits_0^1 x(x-1)\left(6 + 12x + e^{-x}\right)\mathrm{d}x = 3e^{-1}$.

Câu 46: Thay $x = 0$ ta được $f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - f(0) = 2 - 3 = -1$.

Ta có: $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x$

Từ hệ thức đề ra: $\int\limits_0^2 [f(x) + f(2-x)]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3} \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Ta có : $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(2\sin x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 t.f'(t)dt = \frac{1}{2}\left[t.f(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(t)dt\right] = \frac{1}{2}\left[2.(-1) - \frac{4}{3}\right] = -\frac{5}{3}$

Câu 47: Ta có: $f(x) = xf'(x) + \ln x \Leftrightarrow -\ln x = f'(x).x - f(x).(x)' \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2} = \frac{f'(x).x - f(x).(x)'}{x^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{-\ln x}{x^2}$. Lấy tích phân cận từ 1 đến e cả 2 vế ta được:

$\int\limits_1^e \frac{-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \left(\frac{f(x)}{x}\right)'\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{2}{e} - 1 = \frac{f(x)}{x}\Big|_1^e = \frac{f(e)}{e} - \frac{f(1)}{1} \Rightarrow f(e) = 2$.

Câu 48: Ta có: $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $I=\int\limits_{-3}^{0}\frac{f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, đổi cận $x=-3\Rightarrow t=3$; $x=0\Rightarrow t=0$.

$$\Rightarrow I=-\int\limits_{3}^{0}\frac{f\left(-t\right)}{2^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{3}\frac{f\left(t\right)}{\frac{1}{2^t}+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{3}\frac{2^t f\left(t\right)}{2^t+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{3}\frac{2^x f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-3}^{3}\frac{f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{0}\frac{f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{3}\frac{f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}\frac{2^x f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{3}\frac{f\left(x\right)}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

$$=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=3+9=12.$$

Câu 49: Theo giả thiết ta có $\left[f'\left(x\right)\right]^2=4\left[2x^2+1-f\left(x\right)\right]\Rightarrow\left[f'\left(x\right)\right]^2+4f\left(x\right)=8x^2+4\quad(*)$.

Lấy tích phân hai vế của biểu thức $(*)$ ta được

$$\int\limits_{0}^{1}\left(\left[f'\left(x\right)\right]^2+4f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(8x^2+4\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x+4\left(xf\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_{0}^{1}x.f'\left(x\right).\mathrm{d}x\right)=\frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-4\int\limits_{0}^{1}x.f'\left(x\right).\mathrm{d}x+\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x-4\int\limits_{0}^{1}x.f'\left(x\right).\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}4x^2\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f'\left(x\right)-2x\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'\left(x\right)=2x\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+C.$$

Vì $f\left(1\right)=2\Rightarrow C=1\Rightarrow f\left(x\right)=x^2+1$. Vậy $\int\limits_{0}^{1}x.f\left(x\right).\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}x.\left(x^2+1\right).\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 50: Ta có $f'\left(x\right)=f'\left(2-x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=-f\left(2-x\right)+C\Rightarrow C=f\left(0\right)+f\left(2\right)=4024$.

Do đó $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=4042$.

Ta có $\begin{cases}\int\limits_{0}^{2}\left[f\left(x\right)+f\left(2-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}4042\mathrm{d}x=8084\\ f'\left(x\right)=f'\left(2-x\right)\Rightarrow\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}f\left(2-x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=4024$.

Khi đó $I=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(2\cos x\right)\mathrm{d}\left(2\cos x\right)=-\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{0}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=2012$.

CHƯƠNG 4 SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 10 CÁC BÀI TOÁN SỐ PHỨC NÂNG CAO

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Một số bất đẳng thức thường dùng trong bài toán cực trị số phức

- Cho các số phức z_1, z_2 thì ta có: $|z_1|+|z_2| \ge |z_1+z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_1 \ne 0, \forall k \in \mathbb{R}, k \ge 0, z_2 = kz_1 \end{array}\right.$

- Cho các số phức z_1, z_2 thì ta có: $|z_1+z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$. Đẳng thức xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_1 \ne 0, \forall k \in \mathbb{R}, k \ge 0, z_2 = kz_1 \end{array}\right.$

- Bất đẳng thức Cauchy – Schwars: Cho các số thực a, b, x, y thì ta có $ax+by \le \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$. Đăng thức xảy ra khi $ay = bx$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-\left(a-3\right)z+a^2+a=0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

LỜI GIẢI

Chọn B

Ta có $\Delta = \left(a-3\right)^2-4\left(a^2+a\right)=-3a^2-10a+9$.

Trường hợp 1: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5-2\sqrt{13}}{3} \le a \le \dfrac{-5+2\sqrt{13}}{3}$. Khi đó z_1, z_2 là 2 nghiệm thực

Theo Viet $\begin{cases} z_1+z_2=a-3 \\ z_1.z_2=a^2+a \end{cases} \Rightarrow |z_1-z_2| = \sqrt{\left(z_1+z_2\right)^2-4z_1.z_2} = \sqrt{-3a^2-10a+9}$.

Từ đó ta có

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |a-3| = \sqrt{-3a^2-10a+9} \Leftrightarrow \left(a-3\right)^2=-3a^2-10a+9 \Leftrightarrow 4a^2+4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right. (TM)$

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \dfrac{-5+2\sqrt{13}}{3} \\ a < \dfrac{-5-2\sqrt{13}}{3} \end{array}\right.$.

Khi đó $z_{1,2}=\dfrac{a-3\pm i\sqrt{3a^2+10a-9}}{2}\Rightarrow z_1-z_2=i\sqrt{3a^2+10a-9}\Rightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{3a^2+10a-9}$.

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow |a-3|=\sqrt{3a^2+10a-9}\Leftrightarrow (a-3)^2=3a^2+10a-9$

$\Leftrightarrow a^2+8a-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=-9\end{array}\right.(TM)$

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

CÂU 2. Biết phương trình $z^2+mz+m^2-2=0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1,z_2. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1,z_2 và $z_0=i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6

LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $\Delta=m^2-4(m^2-2)=-3m^2+8$

Trường hợp 1: $\Delta>0\Leftrightarrow -3m^2+8>0\Leftrightarrow \dfrac{-2\sqrt6}{3}<m<\dfrac{2\sqrt6}{3}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt là z_1,z_2.

Vì $A,B\in Ox$ nên $AB=|z_1-z_2|=\sqrt{(z_1-z_2)^2}=\sqrt{(z_1+z_2)^2-4z_1z_2}=\sqrt{-3m^2+8}$.

Mặt khác, ta có $C(0;1)\Rightarrow d(C;AB)=1$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C;AB)=\dfrac{\sqrt{-3m^2+8}}{2}=1\Leftrightarrow \boxed{m=\pm\dfrac{2\sqrt3}{3}}(n)$.

Trường hợp 2: $\Delta<0\Leftrightarrow -3m^2+8<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{2\sqrt6}{3}\\m<\dfrac{-2\sqrt6}{3}\end{array}\right.$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức liên hợp là $z_{1,2}=\dfrac{-m+i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Ta có: $AB=|z_1-z_2|=\left|i\sqrt{|\Delta|}\right|=\sqrt{|-3m^2+8|}=\sqrt{3m^2-8}$ và $C(0;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là $x+\dfrac{m}{2}=0$ nên $d(C;AB)=\dfrac{|m|}{2}$.

Do đó, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C;AB)=\dfrac{|m|\sqrt{3m^2-8}}{4}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2=4\\m^2=-\dfrac{4}{3}\text{(VN)}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm2$.

Vậy có 4 giá trị thực của tham số m thỏa mãn đề bài.

CÂU 3. Trong tập số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+2m-2=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 3. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 2.

LỜI GIẢI

Chọn B

Xét phương trình $z^2-2(m-1)z+2m-2=0$, ta có: $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.(2m-2)=m^2-4m+3$.

Trường hợp 1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-4m+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=2(m-1) \\ z_1z_2=2m-2 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có: $|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow z_1=-z_2 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Rightarrow 2(m-1)=0 \Leftrightarrow m=1$.

Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow 1<m<3$

Phương trình luôn có hai nghiệm phức z_1, z_2 luôn thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$.

Do đó $S=\{2\}$. Vậy tổng các phần tử của tập S là 1.

CÂU 4. Trên tập các số phức, xét phương trình $z^2-mz+m+8=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1,z_2 phân biệt thỏa mãn $\left|z_1\left(z_1^2+mz_2\right)\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2|$?

A. 12. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 11.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có $\Delta=m^2-4m-32$ là biệt thức của phương trình.

Trường hợp 1: Xét $\Delta>0 \Leftrightarrow m^2-4m-32>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>8 \\ m<-4 \end{array}\right.$ khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Ta có $z_1^2=mz_1-m-8$ suy ra $z_1^2+mz_2=m(z_1+z_2)-m-8=m^2-m-8$ do đó:

$\left|z_1\left(z_1^2+mz_2\right)\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2| \Leftrightarrow \left|m^2-m-8\right||z_1|=\left(m^2-m-8\right)|z_2|$ (*).

Nếu $z_1.z_2=0$ thì $m+8=0 \Rightarrow m=-8$ không thỏa mãn. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-8>0 \\ |z_1|=|z_2| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-8>0 \\ z_1=-z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-8>0 \\ m=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Xét $\Delta<0 \Leftrightarrow -4<m<8$ khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt và $|z_1|=|z_2|$, ta có $\left|z_1\left(z_1^2+mz_2\right)\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2| \Leftrightarrow \left|m^2-m-8\right||z_1|=\left(m^2-m-8\right)|z_2|$

$\Leftrightarrow m^2-m-8\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge \dfrac{1+\sqrt{33}}{2} \\ m\le \dfrac{1-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện ta được $m\in\{-3;4;5;6;7\}$.

Vậy có tất cả là 5 số nguyên cần tìm.

CÂU 5. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-6z+m=0$ (1) (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(0;20)$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$?

A. 20. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta = 9 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 9$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 9$. Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và $z_1 = \overline{z_1}$, $z_2 = \overline{z_2}$. Nên $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1{}^2 = z_2{}^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \\ z_1 = -z_2 \end{array}\right.$

Với $z_1 = z_2$, không thoả mãn yêu cầu phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt, nên loại.

Với $z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0$ không thỏa mãn, do theo Vi-ét, ta có $z_1 + z_2 = 6$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 9$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 và $z_2 = \overline{z_1}$, $z_1 = \overline{z_2}$. Yêu cầu $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1z_2 = z_1z_2$ luôn đúng với $m > 9$.

Vậy trong khoảng $(0;20)$ có 10 số m_0 thoả mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 5 + 7i| = \sqrt{197}$. Giá trị lớn nhất của $|z - 4 - 7i| + |z - 6 + 21i|$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $\left(20;\sqrt{197}\right)$. **B.** $[30;40]$. **C.** $\left[\sqrt{197};2\sqrt{394}\right]$ **D.** $\left(2\sqrt{394};40\right)$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Suy ra, $M \in (C):(x-5)^2 + (y+7)^2 = 197$ có tâm $I(5;-7)$

Gọi $A(4;7), B(6;-21)$. Ta thấy $A, B \in (C)$

Mặt khác, $AB = 2\sqrt{197} = 2R \Rightarrow AB$ là đường kính của đường tròn (C).

$M \in (C): MA^2 + MB^2 = AB^2 = 788$

Ta có: $(MA + MB)^2 \leq 2\left(MA^2 + MB^2\right) = 2.788 = 1576 \Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{1576} = 2\sqrt{394}$

Ta có: $|z - 4 - 7i| + |z - 6 + 21i| = MA + MB \leq 2\sqrt{394}$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z - 4 - 7i| + |z - 6 + 21i|$ bằng $2\sqrt{394} \approx 39,69$.

Dấu "=" xảy ra khi $MA = MB$

CÂU 6. Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z| = |w| = 1$, $|z + w| = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |zw + 2i(z + w) - 4|$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{1 + 5\sqrt{2}}{4}$ **C.** $5 - 2\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{5}$

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có $|z + w| = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = |z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w$

$\Rightarrow z\overline{w} + \overline{z}w = 0 \Rightarrow z\overline{w}$ là số thuần ảo. Hay $z\overline{w} = ki$, $k \in \mathbb{R}$. Do đó, $z = \dfrac{ki}{\overline{w}}$.

Mặt khác, $|z + w| = \sqrt{2} \Rightarrow \left|\dfrac{ki}{\overline{w}} + w\right| = \sqrt{2} \Rightarrow |ki + w\overline{w}| = \sqrt{2}|\overline{w}| \Rightarrow |ki + 1| = \sqrt{2}$ (do $|w| = |\overline{w}| = 1$)

$\Rightarrow \sqrt{k^2 + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow k = \pm 1$.

Vậy $z = \pm\dfrac{i}{\overline{w}}$. Do vai trò bình đẳng của z và w nên ta chỉ cần xét trường hợp $z = \dfrac{i}{\overline{w}}$.

Khi đó

$P = \left|iw^2 + (2i - 2)w - 4\right| = \left|w^2 + (2 + 2i)w + 4i\right| = \left|(w + 1 + i)^2 + 2i\right|$.

Đặt $u = w + 1 + i \Rightarrow w = u - 1 - i \Rightarrow |w| = |u - 1 - i| = 1$ và $z_0 = -1 - i$.

Ta có $P^2 = \left|u^2+2i\right|^2 = \left|u^2+z_0^2\right|^2 = \left(u^2+z_0^2\right)\left(\overline{u}^2+\overline{z}_0^2\right) = |u|^4 + \left|z_0\right|^4 + \left(u\cdot\overline{z}_0 + z_0\cdot\overline{u}\right)^2 - 2\left|u.z_0\right|^2$

$= |u|^4 - 4|u|^2 + 4 + \left(u.\overline{z_0} + z_0\cdot\overline{u}\right)^2$.

Mà $\left(u+z_0\right)\left(\overline{u}+\overline{z_0}\right) = \left|u+z_0\right|^2 = 1 \Rightarrow u\cdot\overline{z_0} + z_0\cdot\overline{u} = 1 - |u|^2 - \left|z_0\right|^2 = -|u|^2 - 1$.

Suy ra $P^2 = |u|^4 - 4|u|^2 + 4 + \left(|u|^2+1\right)^2 = 2|u|^4 - 2|u|^2 + 5 = 2\left(|u|^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} \ge \dfrac{9}{2} \Rightarrow P \ge \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 8. Xét hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $\left|z_1+2z_2\right| = 2$ và $\left|2z_1 - 3z_2 - 7i\right| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|z_1 - 2i\right| + \left|z_2 + i\right|$ là

A. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Đặt $w_1 = z_1 - 2i;\ w_2 = z_2 + i$. Suy ra $z_1 = w_1 + 2i;\ z_2 = w_2 - i$.

Khi đó $\left|z_1+2z_2\right| = 2 \Leftrightarrow \left|w_1 + 2i + 2\left(w_2 - i\right)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|w_1 + 2w_2\right| = 2 \Leftrightarrow \left|w_1+2w_2\right|^2 = 4$

$\Leftrightarrow \left(w_1+2w_2\right).\overline{\left(w_1+2w_2\right)} = 4 \Leftrightarrow \left(w_1+2w_2\right).\left(\overline{w_1} + 2\overline{w_2}\right) = 4 \Leftrightarrow \left|w_1\right|^2 + 4\left|w_2\right|^2 + 2w_1\overline{w_2} + 2\overline{w_1}w_2 = 4$

$\Leftrightarrow 3\left|w_1\right|^2 + 12\left|w_2\right|^2 + 6w_1\overline{w_2} + 6\overline{w_1}w_2 = 12 \quad (1)$.

Tương tự: $\left|2z_1 - 3z_2 - 7i\right| = 4 \Leftrightarrow \left|2\left(w_1+2i\right) - 3\left(w_2 - i\right) - 7i\right| = 4 \Leftrightarrow \left|2w_1 - 3w_2\right| = 4$

$\Leftrightarrow \left|2w_1 - 3w_2\right|^2 = 16 \Leftrightarrow 4\left|w_1\right|^2 + 9\left|w_2\right|^2 - 6w_1\overline{w_2} - 6\overline{w_1}w_2 = 16 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\left|w_1\right|^2 + 3\left|w_2\right|^2 = 4$.

Do đó: $P = \left|w_1\right| + \left|w_2\right| = 1.\left|w_1\right| + \sqrt{3}.\left|w_2\right|.\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le \sqrt{\left(\left|w_1\right|^2 + 3\left|w_2\right|^2\right)\left(1^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \sqrt{4.\dfrac{4}{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ khi $\left|w_1\right| = \sqrt{3}; \left|w_2\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

CÂU 9. Xét các số phức z và w thỏa mãn $\left(3-i\right)|z| = \dfrac{z}{w-1} + 1 - i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |w+i|$

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

LỜI GIẢI

Chọn D

Ta có: $\dfrac{z}{w-1} = \left(3-i\right)|z| - \left(1-i\right) \Leftrightarrow \dfrac{z}{w-1} = \left(3|z| - 1\right) + \left(1 - |z|\right)i$, đặt $|z| = a > 0$.

Khi đó $\dfrac{z}{w-1} = \left(3a-1\right) + \left(1-a\right)i \Rightarrow \left|\dfrac{z}{w-1}\right| = \sqrt{10a^2 - 8a + 2}$

Suy ra $|w-1| = \dfrac{|z|}{\sqrt{10a^2-8a+2}} = \dfrac{a}{\sqrt{10a^2-8a+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10 - \dfrac{8}{a} + \dfrac{2}{a^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{1}{a} - 2\right)^2 + 2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Mặt khác: $T=|w+i|=|w-1+1+i|\le|w-1|+\sqrt{2}=\dfrac{a}{\sqrt{10a^2-8a+2}}+\sqrt{2}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $z=\dfrac{i}{2};w=\dfrac{3+i}{2}$

Lưu ý: Ở đây sử dụng BĐT $|z+w|\le|z|+|w|$. Dấu "=" xảy ra khi $z=kw(k>0)$

CÂU 10. Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2$ và $|w|=1$. Khi $|iz+w-3+4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z+w|$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

✍ LỜI GIẢI

Ta có $|iz|=|z|=2$.

$\begin{cases}\left||iz|-|w|\right|\le|iz+w|\ (1)\\ |iz+w|\le|iz|+|w|\ (2)\end{cases}\Leftrightarrow 1\le|iz+w|\le 3\ (3)$. Dấu "=" ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $w=k.(iz),k<0$; dấu "=" ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $w=h.(iz),h>0$.

Ta lại có $|iz+w-3+4i|\ge\left||iz+w|-|-3+4i|\right|\Leftrightarrow|iz+w-3+4i|\ge\left||iz+w|-5\right|$. Từ (3) suy ra

$|iz+w-3+4i|\ge 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}|iz+w|=3\\ w=h.(iz),h>0\\ iz+w=l.(-3+4i),l<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h=\dfrac{1}{2}\\ l=-\dfrac{3}{5}\\ z=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i\\ w=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i\end{cases}$.

Vậy $Min|iz+w-3+4i|=2$ và $|z+w|=\sqrt{5}$.

CÂU 11. Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=|w|=1$. Khi $|z-2w-3-4i|$ đạt giá trị lớn nhất thì $|z-w|$ bằng

A. $5\sqrt{5}$. **B.** 8. **C.** 3 **D.** 2.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D

Giả sử $z=a+bi,\ w=c+di,a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$|z|=|w|=1\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\ c^2+d^2=1\end{cases}$

$|z-2w-3-4i|=|a-2c-3+(b-2d-4)i|=\sqrt{(a-2c-3)^2+(b-2d-4)^2}$

$|z-2w-3-4i|=\sqrt{(a-2c-3)^2+(b-2d-4)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{4(c^2+d^2)}+\sqrt{3^2+4^2}=8$.

Dấu " =" xảy ra khi $\begin{cases}a^2+b^2=1,c^2+d^2=1\\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{-2c}{-2d}=\dfrac{-3}{-4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1,c^2+d^2=1\\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{-2c}{-2d}=\dfrac{-3}{-4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{5},b=\dfrac{4}{5}\\ c=\dfrac{-3}{5},d=\dfrac{-5}{5}\end{cases}$.

Do đó $|z-w|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{8}{5}\right)^2}=2$

CÂU 12. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $\left|z-3i+4\right|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2+7-24i\right|$ nằm trong khoảng nào?

A. $\left(0;1009\right)$. **B.** $\left(1009;2018\right)$. **C.** $\left(2018;4036\right)$. **D.** $\left(4036;+\infty\right)$.

✍ **LỜI GIẢI**

Chọn B

Ta có $1=\left|z-3i+4\right|\ge\left|\left|z\right|-\left|3i-4\right|\right|=\left|\left|z\right|-5\right|\Rightarrow -1\le\left|z\right|-5\le 1\Rightarrow 4\le\left|z\right|\le 6$.

Đặt $z_0=4-3i\Rightarrow\left|z_0\right|=5, {z_0}^2=7-24i$.

Ta có $A=\left|z^2+7-24i\right|^2=\left|z^2+{z_o}^2\right|^2=\left(z^2+{z_o}^2\right)\left(\overline{z}^2+\overline{z_o}^2\right)=\left|z\right|^4+\left|z_o\right|^4+\left(z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}\right)^2-2\left|z.z_o\right|^2$

Mà $\left(z+z_o\right)\left(\overline{z}+\overline{z_o}\right)=1\Rightarrow z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}=1-\left|z\right|^2-\left|z_o\right|^2$

Suy ra $A=\left|z\right|^4+\left|z_o\right|^4+\left(1-\left|z\right|^2-\left|\overline{z_o}\right|^2\right)^2-2\left|z.z_o\right|^2=2\left|z\right|^4-2\left|z\right|^2+1201$.

Hàm số $y=2t^4-2t^2+1201$ đồng biến trên $\left[4;6\right]$ nên $A\ge 2.4^4-2.4^2+1201=1681$.

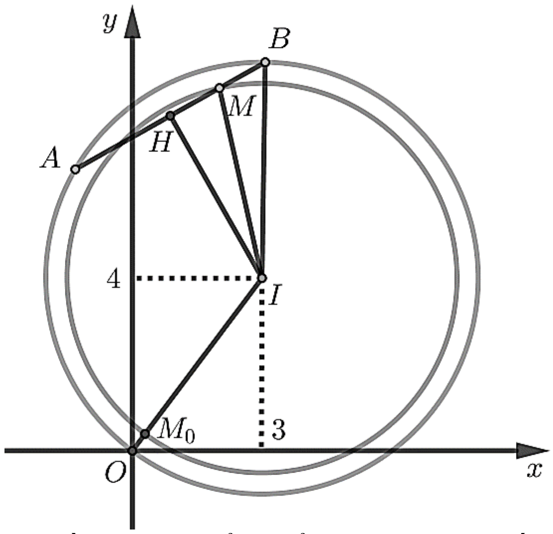
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\left|z\right|=4\\ \left|z+4-3i\right|=1\end{cases}$. Do đó $\left|z^2+7-24i\right|$ nằm trong khoảng $\left(1009;2018\right)$.

CÂU 13. Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $\left(z-6\right)\left(8-i\overline{z}\right)$ là số thực. Biết rằng $\left|z_1-z_2\right|=6$ Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1+3z_2\right|$ bằng

A. $-5+\sqrt{73}$. **B.** $5+\sqrt{21}$ **C.** $20-2\sqrt{73}$ **D.** $20-4\sqrt{21}$

✍ **LỜI GIẢI**

Chon C



Đặt $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1,z_2.

Suy ra $AB=\left|z_1-z_2\right|=4$.

Ta có:

$\left(z-6\right)\left(8-i\overline{z}\right)=\left(x+yi-6\right)\left(8-i\left(x-yi\right)\right)=\left(x+yi-6\right)\left(8-ix-y\right)$

$=8x-x^2i-xy+8yi+xy-y^2i-48+6xi+6y$

Do $\left(z-6\right)\left(8-i\overline{z}\right)$ là số thực nên ta được $x^2+y^2-6x-8y=0$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I\left(3;4\right)$ bán kính $r=5$.

Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB.

Ta có $HA = HB = \frac{AB}{2} = 3$ và $MA = \frac{3}{4}AB = \frac{9}{2} \Rightarrow HM = MA - HA = \frac{3}{2}$.

Từ đó $HI^2 = R^2 - HB^2 = 16$, $IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

Ta có $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1 + 3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $OM_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5 - \frac{\sqrt{73}}{2}$. Vậy $|z_1 + 3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20 - 2\sqrt{73}$.

CÂU 14. Xét các số phức $z,$ w thỏa mãn $|z| = 2$ và $|i.\overline{w}| = 1$. Khi $|iz + w + 3 - 4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - \mathrm{w}|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Cách 1:

Ta có $|iz + w + 3 - 4i| \ge |3 - 4i| - |iz + w| \ge 5 - (|iz| + |w|) \ge 5 - (2 + 1) = 2$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} w = k_1(3 - 4i)\ khi\ (k_1 < 0) \\ i.z = k_2(3 - 4i)\ khi\ (k_2 < 0) \end{cases}$ và $\begin{cases} |w| = |i\overline{w}| = 1 \\ |iz| = |z| = 2 \end{cases}$.

Giải hệ trên suy ra $k_2 = -\frac{2}{5}$; $k_1 = -\frac{1}{5}$.Hay $\begin{cases} w = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \\ iz = \frac{-2}{5}(3 - 4i) \end{cases} \Rightarrow -z = \frac{-2i}{5}(3 - 4i) \Rightarrow z = -\frac{8}{5} - \frac{6}{5}i$

Khi đó $z - w = -1 - 2i \Rightarrow |z - \mathrm{w}| = \sqrt{5}$.

Cách 2:

Trong mặt phẳng Oxy:

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức $iz \Rightarrow OM = 2 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm O bán kính $R_1 = 2$.

Gọi N là điểm biểu diễn của số phức $w \Rightarrow ON = 1 \Rightarrow N$ thuộc đường tròn (C_2) tâm O bán kính $R_2 = 1$.

Gọi $E(3;-4)$. Khi đó $A = |iz + w + 3 - 4i| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OE}|$.

Ta thấy A đạt giá trị nhỏ nhất khi $M,\ N,\ E$ thẳng hàng và $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$

Đường thẳng OE có phương trình là $y = \frac{-4}{3}x$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_1) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + \left(\dfrac{-4}{3}x\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ 25x^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{-8}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{8}{5} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy $M\left(-\dfrac{6}{5};\dfrac{8}{5}\right)$ (Vì $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$).

Tọa độ giao điểm của đường thẳng OE và đường tròn (C_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ x^2 + \left(\dfrac{-4}{3}x\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-4}{3}x \\ 25x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{-4}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $N\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$ (Vì $\overrightarrow{ON}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OE}$).

Do đó: $w = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$ và $i.z = -\dfrac{6}{5} + \dfrac{8}{5}i \Leftrightarrow z = -\dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}i$. Vậy $|z - \mathrm{w}| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$.

CÂU 15. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 + 2i| = 1$ và $|w - 1 + 2i| = |w - 3i|$. Khi $|z - w| + |w - 3 + 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z + 2w|$.

A. $2\sqrt{13}$. **B.** 7. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{61}$.

✍ LỜI GIẢI

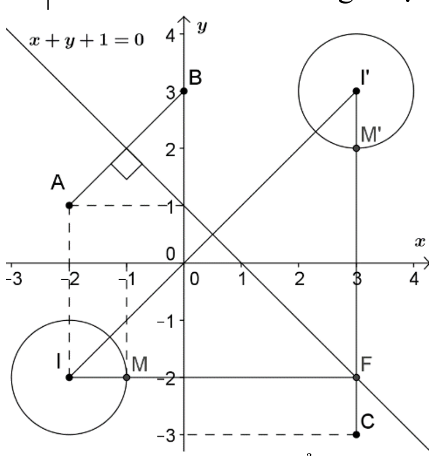
Chọn D

Giả sử điểm biểu diễn của z, w lần lượt là M, F.

Do $|z + 2 + 2i| = 1$ nên M nằm trên đường tròn (C) tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R = 1$.

Gọi $A(1;-2), B(0;3)$. Do $|w - 1 + 2i| = |w - 3i|$ nên F nằm trên đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Gọi $C(3;-3)$. Khi đó $|z - w| + |w - 3 + 3i| = MF + FC$. Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của tổng hai đoạn thẳng này.



Giả sử (C') là đường tròn đối xứng với (C) qua đường thẳng d. Suy ra (C') có tâm $I'(3;3)$, bán kính

$R' = R = 1$. Khi đó ứng với mỗi $M \in (C)$ luôn tồn tại $M' \in (C')$ sao cho $MF = M'F$.

Suy ra $|z-w| + |w-3+3i| = MF + FC = M'F + FC$ đạt giá trị nhỏ nhất khi I', M', F, C thẳng hàng.

Khi đó F là giao điểm của d và $I'C$ với $I'C: x = 3$. Suy ra $F(3;-2)$.

Tương ứng ta có M là giao điểm của đường thẳng IF và đường tròn (C), M nằm giữa I, F.

Suy ra $M(-1;-2)$.

Do đó $|z-w| + |w-3+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = -1-2i, w = 3-2i$.

Suy ra $z + 2w = 5 - 6i \Rightarrow |z + 2w| = \sqrt{61}$.

CÂU 16. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \dfrac{z+3}{z+1}$ có phần thực bằng 2. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|3z_1 - 4z_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - 3i|^2 - |z_2 - 4i|^2$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 32.

LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $w = \dfrac{z+3}{z+1} = \dfrac{(z+3)(\overline{z}+1)}{(z+1)(\overline{z}+1)} = \dfrac{|z|^2 + 4x + 3 - 2iy}{|z|^2 + 2x + 1}$

$\Rightarrow w$ có phần thực là $\dfrac{|z|^2 + 4x + 3}{|z|^2 + 2x + 1} = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$P = |z_1 - 3i|^2 - |z_2 - 4i|^2 = (z_1 - 3i)(\overline{z_1} + 3i) - (z_2 - 4i)(\overline{z_2} + 4i) = i\left(3z_1 - 4z_2 - \overline{3z_1 - 4z_2}\right)$

$P = i\left(3z_1 - 4z_2 - \overline{3z_1 - 4z_2}\right) \le |i|\left(|3z_1 - 4z_2| + \left|\overline{3z_1 - 4z_2}\right|\right) = 4$

CÂU 17. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|iz - 1 + i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + 1 + 2i|$ có dạng $a + \sqrt{b}$. Khi đó $a^2 + b$ có giá trị là

A. 18. **B.** 15. **C.** 19. **D.** 17.

LỜI GIẢI

Chọn B

Đặt $w = iz - 1 + i \Rightarrow |w| = 2$. Với $w_1 = iz_1 - 1 + i$; $w_2 = iz_2 - 1 + i$ thì $|w_1| = 2$; $|w_2| = 2$.

Ta có: $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |i(z_1 - z_2)| = \sqrt{2}|i| \Leftrightarrow |w_1 - w_2| = \sqrt{2}$.

Mặt khác, $|w_1 - w_2|^2 + |w_1 + w_2|^2 = (w_1 - w_2)\overline{(w_1 - w_2)} + (w_1 + w_2)\overline{(w_1 + w_2)}$

$= (w_1 - w_2)(\overline{w_1} - \overline{w_2}) + (w_1 + w_2)(\overline{w_1} + \overline{w_2}) = 2(w_1.\overline{w_1} + w_2.\overline{w_2}) = 2\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right)$.

Do đó $|w_1 + w_2|^2 = 2\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) - |w_1 - w_2|^2 \Rightarrow |w_1 + w_2| = \sqrt{14}$.

Ta có $P = |z_1 + z_2 + 1 + 2i| = |i|.|z_1 + z_2 + 1 + 2i| = |iz_1 + iz_2 - 2 + i|$

$= |w_1 + 1 - i + w_2 + 1 - i - 2 + i| = |w_1 + w_2 - i|$.

Lại có: $P = |w_1 + w_2 - i| \le |w_1 + w_2| + |i| \Leftrightarrow P \le \sqrt{14} + 1$.

Suy ra $\max P = 1 + \sqrt{14}$. Do đó $a = 1$, $b = 14$.

Vậy $a^2 + b = 15$.

CÂU 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|=8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

LỜI GIẢI

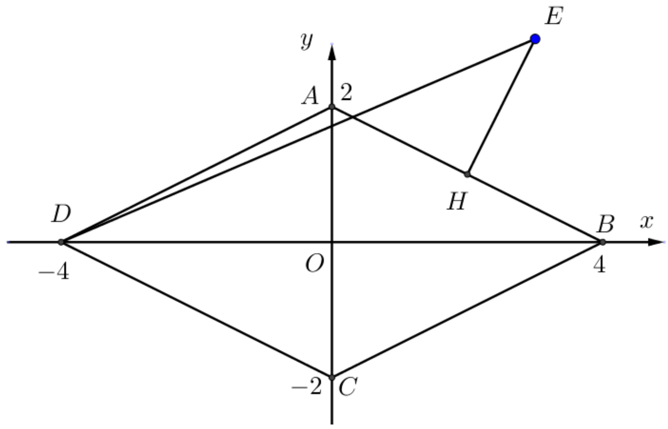
Chọn D

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|=8\Leftrightarrow 2|x|+4|y|=8\Leftrightarrow |x|+2|y|=4$.

Trong mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức z. Khi đó tập hợp điểm M là hình bình hành $ABCD$ với $A(0;2)$, $B(4;0)$, $C(0;-2)$, $D(-4;0)$.

$P=|z-3-3i|=EM$ với $E(3;3)$.



$\min P=EH=d\left(E,AB\right)=\sqrt{5}$ với H là hình chiếu vuông góc của E lên đoạn AB.

$\max P=ED=\sqrt{58}$. Vậy $M+m=\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

CÂU 19. Cho số phức $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thoả mãn $|z+\overline{z}-2|+3|z-\overline{z}+4i|\le 6$ và $|z-1-i|\le|z+3+i|$. Gọi M,m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+3y+5$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\dfrac{33}{5}$. **B.** $\dfrac{17}{5}$. **C.** $-\dfrac{13}{5}$, **D.** $\dfrac{22}{5}$.

LỜI GIẢI

Chọn D

Gọi $z=x+yi;\quad x;y\in\mathbb{R}$.

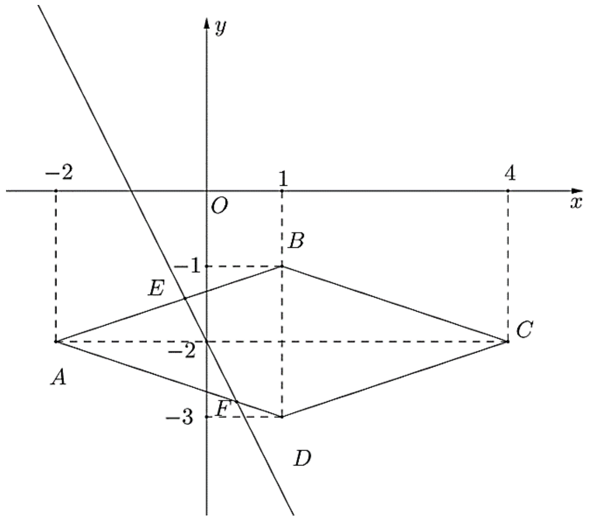
Xét $|z+\overline{z}-2|+3|z-\overline{z}+4i|\le 6\Leftrightarrow|x-1|+|3y+6|\le 3.\qquad(1)$

Tập hợp những điểm biểu diễn $z=x+yi;\quad x;y\in\mathbb{R}$. thỏa mãn (1) là miền trong (tính cả biên) của hình thoi $ABCD$ với $A(-2;-2)$; $B(1;-1)$; $C(4;-2)$; $D(1;-3)$ tạo bởi 4 đường thẳng $|x-1|+|3y+6|\le 3$.

Ta có: $|z-1-i|\le|z+3+i|\Leftrightarrow 2x+y+2\ge 0$

Tập hợp những điểm biểu diễn z thỏa mãn (2) là nữa mặt phẳng chứa điểm O (kể cả bờ đường thẳng $2x+y+2=0$).

Suy ra tập hợp những điểm biểu diễn $z=x+yi;\quad x;y\in\mathbb{R}$. thỏa mãn (1) và (2) là miền trong (tính cả biên) của ngũ giác $EBCDF$ với $E\left(\dfrac{-2}{7};\dfrac{-10}{7}\right)$; $B(1;-1)$; $C(4;-2)$; $D(1;-3)$; $F\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{-14}{5}\right)$



Biểu thức $P=2x+3y+5$ sẽ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền trong (tính cả biên) của ngũ giác $EBCDF$ khi $(x;y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $E\left(\frac{-2}{7};\frac{-10}{7}\right)$; $B(1;-1)$; $C(4;-2)$; $D(1;-3)$; $F\left(\frac{2}{5};\frac{-14}{5}\right)$.

Ta có:

$(x;y)$	$E\left(\frac{-2}{7};\frac{-10}{7}\right)$	$B(1;-1)$	$C(4;-2)$	$D(1;-3)$	$F\left(\frac{2}{5};\frac{-14}{5}\right)$
P	$\frac{1}{7}$	4	7	-2	$\frac{-13}{5}$

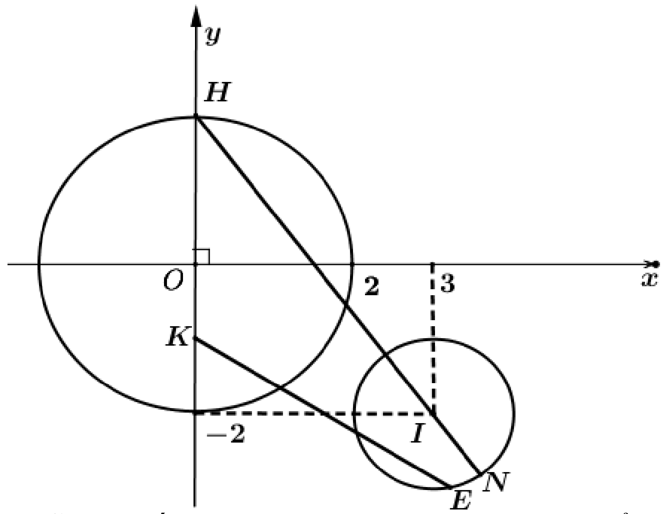
Suy ra $M=7;m=-\frac{13}{5}\Rightarrow M+m=\frac{22}{5}$.

CÂU 20. Cho các số phức z,w thỏa mãn $|z|=2$, $|w-3+2i|=1$ khi đó $\left|z^2-2zw-4\right|$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 16. **B.** 24. **C.** $4+4\sqrt{13}$. **D.** 20.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+iy\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, E là điểm biểu diễn của số phức w. Từ giả thiết suy ra M thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=2$; E thuộc đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $R_2=1$;

Ta có: $P=\left|z^2-2zw-4\right|=\left|z^2-2zw-|z|^2\right|=\left|z^2-2zw-z.\bar{z}\right|=|z|.\left|z-2w-\bar{z}\right|$

$=2.\left|z-2w-\bar{z}\right|=2.\left|2y-2w\right|=4\left|y-w\right|=4KE\geq HN\ \Rightarrow P\geq 4\left(HI+R_2\right)\Leftrightarrow P\geq 24$

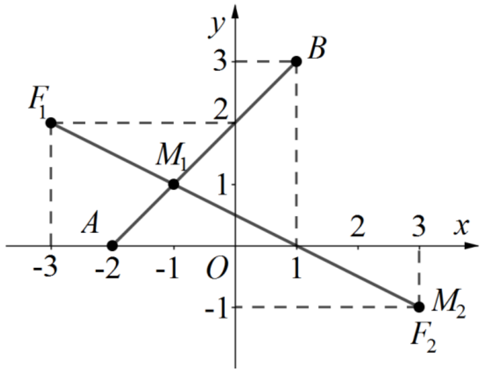
Trong đó $K(0;y)$, $-2\leq y\leq 2$, $H(0;2), N$ là giao điểm của đường tròn (I) và đường thẳng IH $x_N>3$.

CÂU 21. Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$.
B. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=\sqrt{2}$.
C. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$.
D. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=\sqrt{3}$.

LỜI GIẢI

Chọn C



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, $F_1(-3;2)$, $F_2(3;-1)$, $A(-2;0)$ và $B(1;3)$.

Ta có $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$ và $F_1F_2=3\sqrt{5}\Rightarrow MF_1+MF_2=F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đoạn thẳng F_1F_2.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy:

$M=P_{\max}=M_2A+M_2B=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$.

$m=P_{\min}=M_1A+M_1B=AB=3\sqrt{2}$.

Vậy $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$.

CÂU 22. Cho z_1 và z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z-4-3i}{z+4+3i}$ là số thuần ảo và $|z_1-z_2|=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2+3-3i|$

A. $5+3\sqrt{2}$. **B.** $3+3\sqrt{2}$. **C.** $6+3\sqrt{2}$. **D.** $4+3\sqrt{2}$.

LỜI GIẢI

Chọn C

Gọi số phức $z=x+yi$. ĐK: $x\neq -4$ và $y\neq -3$.

Ta có: $\dfrac{z-4-3i}{z+4+3i}=\dfrac{x-4+(y-3)i}{x+4+(y+3)i}=\dfrac{x^2-16+y^2-9}{(x+4)^2+(y+3)^2}+\dfrac{-6x+8y}{(x+4)^2+(y+3)^2}.i$.

Để $\dfrac{z-4-3i}{z+4+3i}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2-25}{(x+4)^2+(y+3)^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-25=0$

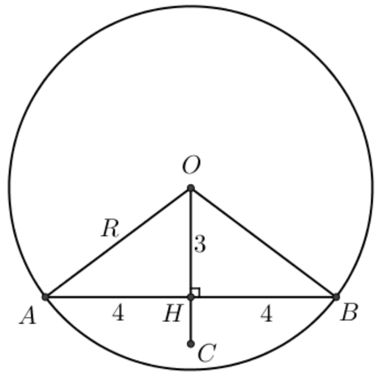
Suy ra điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=5$.

Gọi $z_1=x_1+y_1.i$ có điểm biểu diễn $A(x_1;y_1)$; $z_2=x_2+y_2.i$ có điểm biểu diễn $B(x_2;y_2)$ và $z_3=3-3i$ có điểm biểu diễn $C(3;-3)$.

Ta có: $\left|z_1 - z_2\right| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2} = 8 \Leftrightarrow AB = 8$.

Xét $T = \left|z_1 + z_2 + 3 - 3i\right| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow AH = 4$ và $OH \perp AB \Rightarrow OH = 3$.



Suy ra: $T = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = \left|2.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OC}\right| \le \left|2.\overrightarrow{OH}\right| + \left|\overrightarrow{OC}\right| = 2.OH + OC$

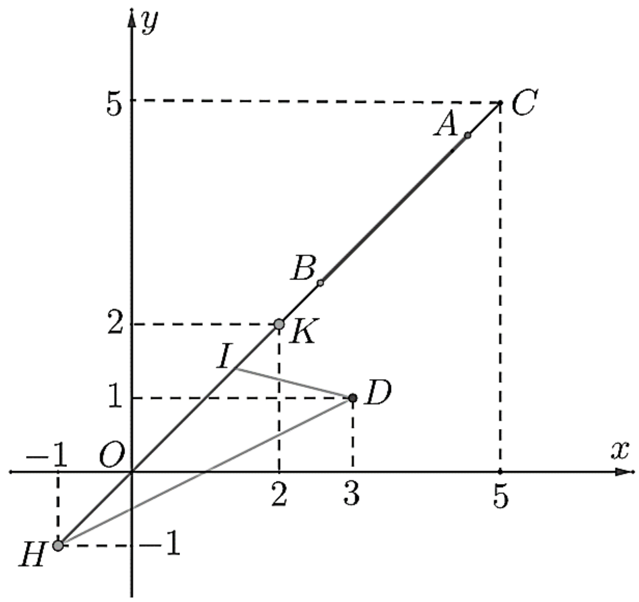
$\Rightarrow T \le 6 + 3\sqrt{2}$. Dấu " = " xảy ra khi $\overrightarrow{OH}$ cùng hướng $\overrightarrow{OC}$.

CÂU 23. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1 - z_2 - 1 - i\right| = 2\sqrt{2}$ và $\left|z_2\right| + \left|z_1 - 6 - 6i\right| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|3z_2 - z_1 - 5 - i\right|$ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

LỜI GIẢI

Chọn D



Ta có $\left|z_2 - \left(z_1 - 1 - i\right)\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|z_2\right| + \left|\left(z_1 - 1 - i\right) - 5 - 5i\right| = 3\sqrt{2}$.

Đặt $A\left(z_1 - 1 - i\right), B\left(z_2\right), C\left(5;5\right) \Rightarrow OC = 5\sqrt{2}$

Khi đó giả thiết tương đương $AB = 2\sqrt{2}, OB + AC = 3\sqrt{2}$.

Suy ra $OC = OB + BA + AC \Leftrightarrow B, A$ thuộc đoạn OC và $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng.

Ta có $P = \left|3z_2 - \left(z_1 - 1 - i\right) - 6 - 2i\right| = \left|3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OD}\right|$ với $D\left(3;1\right)$.

Gọi $3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Rightarrow I$ thuộc đoạn HK với $H\left(-1;-1\right), K\left(2;2\right)$

$\Rightarrow P = \left|2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OD}\right| = 2DI$. Do đó $P_{\max} = 2DH = 4\sqrt{5}$.

CÂU 24. Cho hai số phức z,w phân biệt thỏa mãn $|z|=|w|=4$ và $(z-i)(\overline{w}+i)$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$ bằng

A. 8. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{14}$.

LỜI GIẢI

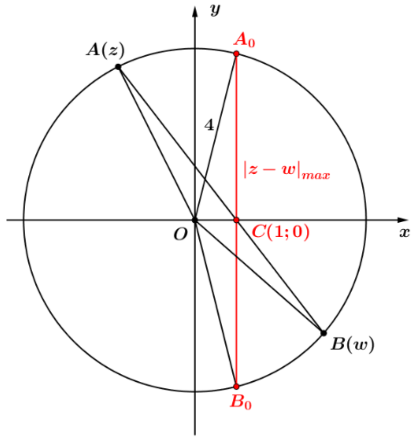
Chọn C

Cách 1: Đầu tiên ta đặt ẩn như sau: $\begin{cases} a=z-i \\ b=w-i \end{cases}$ thì khi đó ta có: $|a+i|+|b+i|=4$

$(z-i)(\overline{w}+i)=(a+bi-i)(c-di+i)=(ac+bd-b-d+1)+(a-c-ad+bc)i$

Mà do $(z-i)(\overline{w}+i)$ là số thực nên suy ra $a-c-ad+bc=0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b-1}{d-1}$. Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z,w và điểm $C(0;1)$

Từ đó ta suy ra với hệ thức trên ta có được A,C,B thẳng hàng. Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Ta suy ra $|z-w|_{\max}=AB_{\max}=2\sqrt{4^2-1^2}=2\sqrt{15}$.

Cách 2: Sử dụng cách thuần đại số

Ta có:

$(z-i)(\overline{w}+i)=(z-i)\overline{(\overline{w}+i)}=(z-i)(w-i)\in R \Rightarrow z-i=k(w-i)\Leftrightarrow (k-1)i=kw-z \quad (k\neq 1)$

Suy ra: $|k-1|^2=|kw-z|^2\geq (|kw|-|z|)^2=16(|k|-1)^2$. Mà vì $k\neq 1$ nên suy ra $k<0$

Do đó $(k-1)^2=|kw-z|^2=k^2|w|^2+|z|^2-k(z\overline{w}+\overline{z}w)\Leftrightarrow -k(z\overline{w}+\overline{z}w)=-15(k^2+1)-2k$

Tiếp theo, ta nhận thấy: $-15(k+1)^2=-15k^2-30k-15\leq 0 \Leftrightarrow -15(k^2+1)-2k\leq 28k$ nên suy ra $-k(z\overline{w}+\overline{z}w)\leq 28k \Leftrightarrow -(z\overline{w}+\overline{z}w)\geq 28 \quad (k<0)$.

Từ đó ta có được: $|z-w|^2=32-(z\overline{w}+\overline{z}w)\geq 32+28=60 \Leftrightarrow |z-w|\geq 2\sqrt{15}$.

CÂU 25. Cho các số phức u,v thỏa mãn $|u|=|v|=5$ và $i(u-1)(\overline{v}-1)$ là số thực. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $|u+v|$ bằng

A. 14. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 18.

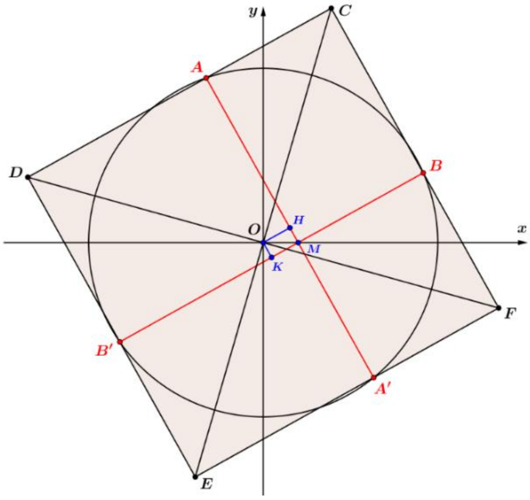
LỜI GIẢI

Chọn A

Cách 1: Đầu tiên, ta gọi $A(a_1;a_2),B(b_1;b_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn của u,v khi đó ta có:

$\begin{cases} u-1=(a_1-1)++a_2i \\ i(\overline{v-1})=b_2+(b_1-1)i \end{cases}$. Thế nên $i(u-1)(\overline{v-1})$ là số thực chỉ khi $(a_1-1)(b_1-1)+a_2b_2=0$

Điều này dẫn đến $MA\perp MB$ với $M(1;0)$. Từ đó ta có hình vẽ như sau:



Dựng hình chữ nhật $MACB$ khi đó được $|u+v|=|(u+(v-1))+1|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}|$

Dựng các điểm A',B',H,H' và hình chữ nhật $CDEF$ như hình trên

Ta có O cách đều CD và EF ; O cách đều DF và EC nên O là tâm $CDEF$

Do đó $OC=\sqrt{AH^2+BK^2}=\sqrt{(OA^2-OH^2)+(OB^2-OK^2)}=\sqrt{2OA^2-OM^2}=7$

Từ và cùng với $|\overrightarrow{OM}|=1$ ta được $6=OC-OM\le|u+v|=|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}|\le OC+OM=8$

Thử lại ta thấy dấu bằng có xảy ra nên ta suy ra tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $|u+v|$ là 14

Cách 2: Ta có: $i(u-1)(\overline{v-1})\in R\Rightarrow i(u-1)(\overline{v-1})=\overline{i(u-1)(\overline{v-1})}$

$\Leftrightarrow i(u-1)(\overline{v}-1)=\overline{i(u-1)(\overline{v-1})}=-i(\overline{u}-1)(v-1)\Leftrightarrow u\overline{v}+\overline{u}v-u-\overline{v}-\overline{u}-v+2=0$

$\Leftrightarrow (u+v)(\overline{u}+\overline{v})-u^2-v^2-(u+v)-(\overline{u}+\overline{v})+2=0$

$\Leftrightarrow (u+v)(\overline{u}+\overline{v})-(u+v)-(\overline{u}+\overline{v})+1=u^2+v^2-1\Leftrightarrow((u+v)-1)((\overline{u}+\overline{v})-1)=49$

$\Leftrightarrow |u+v-1|^2=49\Leftrightarrow|u+v-1|=7$. Đặt $z=u+v$ khi đó ta có $|z-1|=7$ tức số phức z nằm trên đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=7$

Suy ra biểu thức cần tìm min và max đó là $|z|$ với $\begin{cases} |z|_{\min}=|OI-R|=R-OI=7-1=6 \\ |z|_{\max}=|OI+R|=R+OI=7+1=8 \end{cases}$

Thử lại ta thấy dấu bằng có xảy ra nên ta suy ra tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $|u+v|$ là 14

Cách 3: Khi $i(u-1)(\overline{v-1})$ là số thực thì $(u-1)(\overline{v-1})=\dfrac{u-1}{v-1}|v-1|^2$ là số thuần ảo.

Khi đó $u-1=-ki(v-1)\ (k\in\mathbb{R},k\ne0)\Leftrightarrow u+kiv=ki+1\Leftrightarrow|u+kiv|^2=|ki+1|=k^2+1$

$\Leftrightarrow |u|^2+k^2|v|^2+ki(v\overline{u}-\overline{v}u)=k^2+1\Leftrightarrow 24(k^2+1)+ki(v\overline{u}-\overline{v}u)=0\Leftrightarrow-(v\overline{u}-\overline{v}u)^2=576\left(\dfrac{k^2+1}{k}\right)^2$

$\Rightarrow 4v\overline{u}.\overline{v}u-(v\overline{u}+\overline{v}u)^2=576\left(\dfrac{k^2+1}{k}\right)^2\Leftrightarrow(v\overline{u}+\overline{v}u)^2=2500-576\left(\dfrac{k^2+1}{k}\right)^2\le2500-576.4=196$

Suy ra: $-14 \le v\bar{u} + \bar{v}u \le 14 \Rightarrow |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + \left(v\bar{u} + \bar{v}u\right) = 50 + \left(v\bar{u} + \bar{v}u\right) \in [50-14; 50+14]$

$\Rightarrow |u+v| \in [6;8]$ suy ra tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $|u+v|$ là 14.

CÂU 26. Gọi S là tập tất cả số phức z thỏa mãn $|z-1-i| = 1$ và T là tập tất cả các số phức w thỏa mãn $|w-2+i| = 2$. Xét số thực a và số phức u sao cho tồn tại các số phức $z_1, z_2 \in S$ và $w_1, w_2 \in T$ thỏa mãn $(u-z_1)\overline{(u-z_2)} = (u-w_1)\overline{(u-w_2)} = a + 2022$. Giá trị nhỏ nhất của $|u+2-i|$ bằng

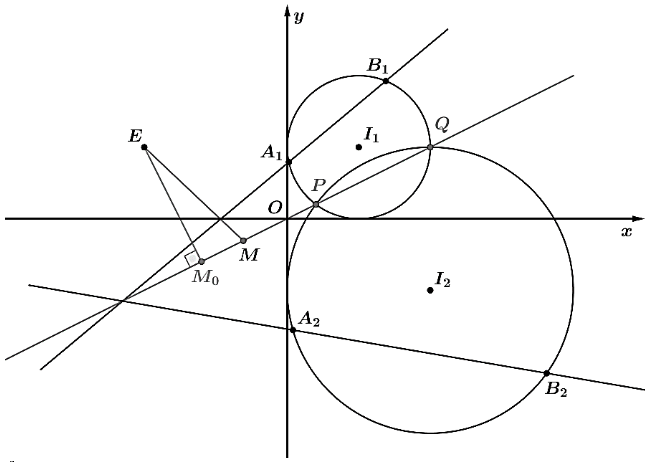
A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **B.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ **D.** $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn C

Do $(u-z_1)\overline{(u-z_2)}, (u-w_1)\overline{(u-w_2)}$ là các số thực nên $\dfrac{u-z_1}{u-z_2}, \dfrac{u-w_1}{u-w_2}$ cũng là các số thực.

Gọi $M(u), A_1(z_1), B_1(z_2), A_2(z_2), B_2(w_2)$ là các điểm biểu diễn số phức thuộc tập S, T sao cho thỏa mãn đề bài. Cùng với, ta suy ra 2 bộ ba điểm thẳng hàng lần lượt là M, A_1, B_1 và M, A_2, B_2. Từ đó ta có hình vẽ như sau:



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của hai đường tròn như hình trên.

Điểm $M(u)$ phải thỏa đồng thời hai bộ thẳng hàng lần lượt là M, A_1, B_1 và M, A_2, B_2 nên suy ra phương tích của hai bộ này của lần lượt hai đường tròn phải bằng nhau tức từ điểm M phải vẽ được 2 tiếp tuyến tới đường tròn $(I_1;1)$ với tiếp điểm là X, Y và 2 tiếp tuyến tới đường tròn $(I_2;2)$ với tiếp điểm là Z, T sao cho $MX = MY = MZ = MT$. Từ đó ta suy ra M sẽ thuộc đường thẳng PQ tức trục đẳng phương của hai đường tròn như hình.

Ta có hai đường tròn $(I_1;1)$ và $(I_2;2)$ lần lượt có phương trình là: $\begin{cases}(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4\end{cases}$.

Thực hiện phép trừ theo vế của hai phương trình đường tròn trên ta suy ra phương trình đường thẳng PQ có dạng là $(PQ): x - 2y = 0$.

Như vậy tập hợp điểm $M(u)$ sẽ nằm trên đường thẳng (PQ). Cùng với điểm $E(-2;1)$, ta suyra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|u+2-i|$ chính là giá trị nhỏ nhất của đoạn ME với

$ME \ge M_0E = d(E;(PQ)) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_0$.

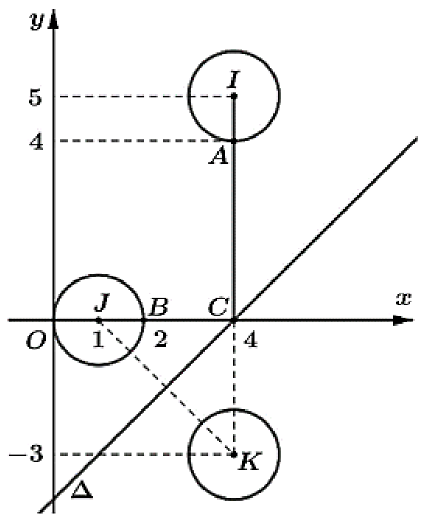
Ghi chú: đối với các trường hợp mà hai đường tròn của số phức z, w không cắt nhau hoặc tiếp xúc nhau thì quỹ tích điểm $M(u)$ cũng được xác định.

CÂU 27. Xét các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-4-5i|=|z_2-1|=1$ và $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i|$. Tính $M=|z_1+z_2|$ khi biểu thức $P=|z-z_1|+|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M=\sqrt{41}$. **B.** $M=6$. **C.** $M=2\sqrt{5}$. **D.** $M=2\sqrt{13}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn D



Ta có: $|z_1-4-5i|=1 \Rightarrow$ tập hợp điểm A biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C_1) có tâm $I(4;5)$, bán kính $R_1=1$.

$|z_2-1|=1 \Rightarrow$ tập hợp điểm B biểu diễn số phức z_2 là đường tròn (C_2) có tâm $J(1;0)$, bán kính $R_2=1$.

Đặt $z=a+bi \quad (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i| \Leftrightarrow a^2+(-b+4)^2=(a-8)^2+(b+4)^2 \Leftrightarrow a-b=4$.

Suy ra tập hợp điểm C biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng $\Delta: x-y=4$.

Khi đó: $P=|z-z_1|+|z-z_2|=CA+CB$.

Gọi K là điểm đối xứng của J qua đường thẳng Δ, khi đó ta tìm được $K(4;-3)$, suy ra phương trình đường thẳng $IK: x=4$.

Do đó: $P_{\min}$ khi và chỉ khi $C=IK\cap\Delta$; $A=CI\cap(C_1)$ (A ở giữa CI); $B=CJ\cap(C_2)$ (B ở giữa CJ).

Suy ra: $\begin{cases}A(4;4)\\B(2;0)\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}z_1=4+4i\\z_2=2\end{cases} \longrightarrow M=|z_1+z_2|=2\sqrt{13}$.

CÂU 28. Cho các số phức z và w thỏa mãn $|z-4|=1$ và $|iw-2|=1$. Khi $|z+2w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|iz+w|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{2}-3$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $4\sqrt{2}+3$.

✍ LỜI GIẢI

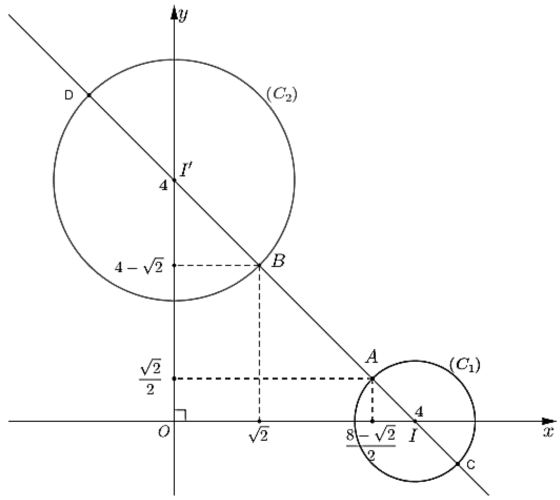
Chọn C

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z và B là điểm biểu diễn số phức $-2w$.

Ta có:

$|z-4|=1 \Rightarrow A$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$, bán kính $R=1$.

$|iw-2|=1 \Leftrightarrow |-w-2i|=1 \Leftrightarrow |-2w-4i|=2 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn (C') có tâm $I'(0;4)$, bán kính $R'=2$.



Lại có: $|z+2w| = |z-(-2w)| = AB$ và $II' = 4\sqrt{2} > R + R' = 3 \Longrightarrow$ Hai đường tròn (C_1) và (C_2) không có điểm chung $\Rightarrow AB_{\min}$ khi điểm A có tung độ dương và điểm B có hoành độ dương, với A là giao điểm của (C_1) và đường thẳng II', B là giao điểm của (C_2) và đường thẳng II'.

$\Rightarrow A\left(\dfrac{8-\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow z = \dfrac{8-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$;

$B\left(\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right) \Rightarrow -2w = \sqrt{2} + \left(4-\sqrt{2}\right)i \Rightarrow w = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}i$

Vậy $|iz+w| = \sqrt{6}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho số phức $z=a+bi$, $z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1-i}{\overline{z}}$ là số thực và $|z-3i|-|z-3-2i|=2$. Đặt $T=a^2+b^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $T\in(4;8)$. **B.** $T\in(8;9)$. **C.** $T\in(11;14)$. **D.** $T\in(17;20)$.

Câu 2: Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=1,|z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

A. $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

Câu 3: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z|=2$, $|w-3+2i|=1$. Giá trị lớn nhất của $\left|z^2-2wz-4\right|$ bằng

A. $16\sqrt{2}$. **B.** $18\sqrt{2}$. **C.** 8. **D.** 24.

Câu 4: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z-2w|=4$ và $|3z+w|=5$. Khi $|5z-3w+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính giá trị $|z-w+1|$.

A. $\dfrac{17\sqrt{2}}{7}$. **B.** 4 . **C.** 2 . **D.** $\dfrac{\sqrt{170}}{7}$.

Câu 5: Tìm các số phức z thõa mãn $|z-(1-i)|=|\overline{z}+(2+i)|$ và $|z+2-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $z=\dfrac{1}{2}$. **C.** $z=-\dfrac{1}{2}i$. **D.** $z=\dfrac{1}{2}i$.

Câu 6: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn hiệu bình phương phần thực và phần ảo bằng $\dfrac{1}{2}$ và $\left(\sqrt{3}z-|z|\right)i=\sqrt{2}\left(|z|-1\right)-z+i$.

A. 1. **B.** 2 . **C.** 4 . **D.** 3 .

Câu 7: Cho hai số phức z_1,z_2 sao cho $|z_1|=2$, $|z_2-6i|=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3|z_1-4|+2|z_2-9-6i|+6|z_1-z_2|$?

A. 8 . **B.** 36. **C.** 10 . **D.** 24.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn: $\begin{cases}|z-1-2i|\le 1\\ |z-1+2i|\ge|z+3-2i|\end{cases}$.

Gọi S là diện tích phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn của số phức z . Tính S .

A. $S=\pi$. **B.** $S=2\pi$. **C.** $S=\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $S=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+5i|=2\sqrt{5}$. Biết rằng số phức $w=\left(2-i^{2021}\right)\left(\overline{z}-3i\right)+2021$ có tập hợp các điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C). Tính bán kính của (C).

A. 20π . **B.** 100π . **C.** 220π . **D.** 36π .

Câu 10: Cho hai số phức z_1 ; z_2 thỏa mãn: $\begin{cases} |z_1 - z_2 - 9 - 12i| = 3 \\ |z_1 - 3 - 20i| = 7 - |z_2| \end{cases}$. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 2z_2 + 12 - 15i|$. Tính $M^2 - m^2$.

A. 450. **B.** 675. **C.** 451. **D.** 225.

Câu 11: Gọi z_1, z_2 là hai trong số các số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ là một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

A. 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 12: Biết số phức z thỏa mãn $2|z - i| \le |z - \bar{z} - 3i|$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn cho số phức z có diện tích là

A. $\frac{5\sqrt{5}}{12}$. **B.** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{5\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Câu 13: Xét các số phức z thoả mãn $\frac{z - 2 + i}{(z + \bar{z})i + 2}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $2z$ là parabol có toạ độ đỉnh $I(a;b)$. Tính $S = a + b$?

A. 0. **B.** -1. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 14: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} |1 - 2z_1| = |z_1 - \overline{z_1} + i| \\ |z_2| = |z_2 - 5 + 5i| \end{cases}$. Với $z_2 = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thì biểu thức $P = |z_1 - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của $2a + 3b$ là

A. $2a + 3b = 0$. **B.** $2a + 3b = 1$. **C.** $2a + 3b = 3$. **D.** $2a + 3b = 2$.

Câu 15: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4 - m)z^2 - 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.

A. $m = -1$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = \pm 3$ **D.** $m = \pm 1$.

Câu 16: Cho phương trình $z^3 - (m+1)z^2 + (m + 1 + mi)z - 1 - mi = 0$ trong đó $z \in \mathbb{C}$, m là tham số thực. Số giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phức phân biệt sao cho các điểm biểu diễn của các nghiệm trên mặt phẳng phức tạo thành một tam giác cân là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;2)$, $C(3;-1)$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3. Tìm mô đun của số phức z thỏa mãn $|z + 46 - 40i| = \sqrt{929}$ và $P = 3|z - z_1|^2 + 5|z - z_2|^2 - 7|z - z_3|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $|z| = \sqrt{129}$. **B.** $|z| = 2\sqrt{29}$. **C.** $|z| = 3\sqrt{929}$. **D.** $|z| = \sqrt{929}$.

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \le 2$ và $M = \max\left|z + \frac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-1 < M < 2$. **B.** $2 < M < \frac{7}{2}$. **C.** $1 < M < \frac{5}{2}$. **D.** $M^3 + M^2 + M < 3$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m(m\neq 0)$ để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn
$$\begin{cases}|z+1-2i|=2\\|z-2-2i|=|m|\\\left|z-2m-\left(m^2+m-2\right)i\right|=\left|z-2m+2+\left(m^2+m+2\right)i\right|\end{cases}.$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 20: Chọn hai số phức trong các số phức có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|\le 5\left|1-\sqrt{3}i\right|-|z-2+4i|$. Xác suất để trong hai số chọn được có ít nhất một số phức có phần thực lớn hơn 2 là

A. $\frac{27}{110}$. **B.** $\frac{34}{55}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 21: Cho số phức z không phải là số thực và $\frac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$ là số thực. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|=\left|z^2\right|$

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 22: Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m để có tất cả bốn số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z|=m$ và $3\left|z+\bar{z}\right|+4\left|z-\bar{z}\right|=20$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 23: Cho hai số phức u,v thỏa mãn $|u|=|v|=10$ và $|3u-4v|=50$. Tính $M=|4u+3v|$.

A. 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.

Câu 24: Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2|z|$, gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w=z_1+z_2$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $|w|=2\sqrt{2}$. **B.** $|w|=2$. **C.** $|w|=\sqrt{2}$. **D.** $|w|=1+\sqrt{2}$.

Câu 25: Xét các số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $4\left(z-\bar{z}\right)-15i=i\left(z+\bar{z}-1\right)^2$ và $|2z-1+i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+b$

A. $P=0$. **B.** $P=\frac{19}{4}$. **C.** $P=\frac{19}{8}$. **D.** $P=2$.

Câu 26: Xét số phức z thỏa $2|z-1|+3|z-i|\ge 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $\frac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$.

Câu 27: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m-1)z+m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $\left|z_0\right|^3=3\left|\overline{z_0}\right|+2$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 8. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 28: Trong tập số phức, cho phương trình $2z^2+2(m-1)z+m^2-3m-2=0,\ m\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $[0;2021]$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$?

A. 2016. **B.** 202 **C.** 202 **D.** 2017.

Câu 29: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa $|iz_1-1|=1$ và $|\overline{z_2}+i|=2$. Khi biểu thức $P=|2z_1+3z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z_1-2z_2|$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Khi $|z^2-wz-4|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z|+|w|$ bằng

A. $2+\sqrt{5}$. **B.** $2(1+\sqrt{5})$. **C.** $1+\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}-2$.

Câu 31: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Câu 32: Trên tập hợp các số phức, xét Phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=7$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 33: Có bao nhiêu số nguyên m để tồn tại 2 số phức z thoả mãn $|z-m+i|=|z-1+2mi|$ và $|z|=\dfrac{3}{2}$

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 34: Có bao nhiêu số phức z có phần thực và phần ảo đều là các số nguyên thỏa mãn đồng thời $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$ và $|z|\le 10$?

A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 35: Cho hai số phức z_1 ; z_2 thỏa mãn $|z_1|=24$ và $z_1^2+(z_2+1-2i)^2=z_1z_2+(1-2i)z_1$. Biết $|z_1-z_2-1+2i|=a$ với a là một số nguyên dương. Hỏi a có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 8. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 16.

Câu 36: Cho hai số phức z, w thoả mãn $|z+2w|=3$, $|2z+3w|=5$ và $|z+3w|=4$. Tính giá trị của biểu thức $P=z.\overline{w}+\overline{z}.w$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 37: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=\sqrt{39}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Khi đó $|z_1+z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $2\sqrt{39}$. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 38: Biết tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=\dfrac{3+iz}{1+z}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một đường thẳng. Khi đó mô đun của z bằng?

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 39: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\frac{1+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng 2. Modul của z thuộc tập nào dưới đây

A. $\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\left\{\sqrt{2};2\right\}$. **D.** $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 40: Cho số phức z thỏa mãn $(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 0. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 42: Gọi (C) là đường cong trong mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}+\left|z-\bar{z}\right|^2=1$ và H là hình phẳng giới hạn bởi (C). Diện tích của hình phẳng H bằng

A. $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$. **B.** $\pi\sqrt{5}$. **C.** $2\pi\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

Câu 43: Có bao nhiêu số thực dương m để tồn tại duy nhất một số thực z thoả mãn $|z-1-i|\le 2$ và $|z+2+3i|=m$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 44: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, số phức $\frac{1+iz}{4+z}$ có tập hợp các điểm biểu diễn là một đường thẳng. Môđun của z bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|=4$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=2z-1-3i$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $I(3;-3),R=64$. **B.** $I(-3;3),R=8$. **C.** $I(3;-3),R=8$. **D.** $I(3;-3),R=2\sqrt{2}$.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 47: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+73=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}-|z_1|.|z_2|$ bằng

A. -213. **B.** -110. **C.** -37. **D.** -183.

Câu 48: Cho các số thực b,c sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ thỏa mãn $\left|z_1-3+3i\right|=\sqrt{2}$ và $(z_1+2i)(z_2-2)$ là số thuần ảo. Khi đó $b+c$ bằng:

A. -1. **B.** 12. **C.** 4. **D.** -12.

Câu 49: Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ là số thực. Biết rằng $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1+3z_2\right|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Câu 50: Giả sử z_1,z_2 là 2 trong các số phức z thỏa mãn $|z+1+i|=2$ và $|z_1|+|z_2|=|z_1-z_2|$. Khi $P=|z_1-2z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì số phức z_1 có tích phần thực, phần ảo bằng

A. 0 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $-\dfrac{9}{8}$ **D.** $-\dfrac{3}{2}$

Câu 51: Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=5$ và $|z_2+6-8i|-|z_1+6-8i|=|z_1|+|z_2|$. Khi đó $|z_1+2z_2-3i|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{25}{2}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{157}$. **D.** $3\sqrt{34}$.

Câu 52: Xét các số phức $z;w$ thỏa mãn $|z-2|^2+|z-2i|^2=6$ và $|w-3-2i|=|w+3+6i|$. Khi $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính $|z|$.

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 53: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=6$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-3i|$. Giá trị của $M+m$ bằng.

A. $2+2\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}+\sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{2}+2\sqrt{10}$. **D.** $2+\sqrt{34}$.

Câu 54: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\le|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}+1$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 55: Cho các số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R},-4\le y\le 15)$ và w thỏa $|w-4-3i|=2$. Các số phức z,z^2,z^3 lần lượt có các điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ tạo thành một tam giác vuông. Gọi $m=\min|z-w|,M=max|z-w|$. Khi đó $m+M^2$ bằng

A. 224. **B.** 226. **C.** 227. **D.** 225.

Câu 56: Xét hai số phức z,w thỏa mãn $|z-1-2i|=|z-2+i|$ và $|w-2+3i|=|w-4-i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-i|+|w+3-i|+|z-w|$ bằng $\dfrac{2}{5}\sqrt{abc}$ với a,b,c là các số nguyên tố. Tính giá trị của $a+b+c$.

A. 22. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 57: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z}{3-4i}+1-i\right|=1$ sao cho $|z-3-8i|$ đạt giá trị lớn nhất tại $z_1=x_1+iy_1$ và đạt giá trị nhỏ nhất tại $z_2=x_2+iy_2$. Giá trị của $x_1+x_2+y_1y_2$ bằng

A. 44. **B.** 55. **C.** 25. **D.** 46.

Câu 58: Xét ba số phức z,z_1,z_2 thoả mãn $|z-i|=|z+1|$, $\left|z_1-3\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}$ và $\left|z_2-4\sqrt{5}i\right|=2\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|\sqrt{5}z-z_1\right|+\left|\sqrt{5}z-z_2\right|$ bằng

A. $4\sqrt{5}$. **B.** $10\sqrt{5}$. **C.** $7\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 59: Xét các số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}+2\right|+\left|z-\overline{z}\right|=6$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-2i|$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{53}+3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{53}+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{53}+\sqrt{5}$.

Câu 60: Với các số phức z_1, z_2, $z_3=iz_2$ thay đổi thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=5$ thì giá trị lớn nhất của $\min\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|tz_2+(1-t)z_3-z_1\right|$ có dạng $a+\frac{b}{\sqrt{c}}$, ở đó a, b là các số nguyên dương, c là số nguyên tố. Giá trị của $a+b+c$ là

A. 15. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Câu 61: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2-wz-4\right|$ bằng

A. 4. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** 8. **D.** $2\left(\sqrt{29}-5\right)$.

Câu 62: Với hai số phức z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn $|z_1+1-2i|=|z_1-5+2i|$ và $|z_2+3-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1+3+i|+|z_1-z_2|$ bằng

A. $5\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{10}+2$. **C.** $3\sqrt{10}-2$. **D.** $\sqrt{85}-2$.

Câu 63: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases}\max\{|z|;|z-1-i|\}\le 1\\ |w+1+2i|\le|w-2-i|\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-w|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $2\sqrt{2}-1$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 64: Cho $z\in\mathbb{C}$ thỏa mãn $\begin{cases}|z-1-2i|\le 1\\ |z-1-2i|\le 2\end{cases}$. Giá trị $S=\min|z|+\max|z|$ bằng:

A. $3\sqrt{5}-1$. **B.** $\sqrt{5}+2$. **C.** $2\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{2}+\sqrt{5}-1$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Vì $\frac{1-i}{\bar{z}}$ là số thực với $z=a+bi$ nên tồn tại số thực $k\left(k\neq 0\right)$ sao cho:

$\bar{z}=k\left(1-i\right)\Leftrightarrow a-bi=k-ki\Leftrightarrow\begin{cases}a=k\\-b=-k\end{cases}\Rightarrow a=b\quad(1).$

$\left|z-3i\right|-\left|z-3-2i\right|=2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+\left(b-3\right)^2}-\sqrt{\left(a-3\right)^2+\left(b-2\right)^2}=2\ (2).$

Thế (1) vào (2) ta được:

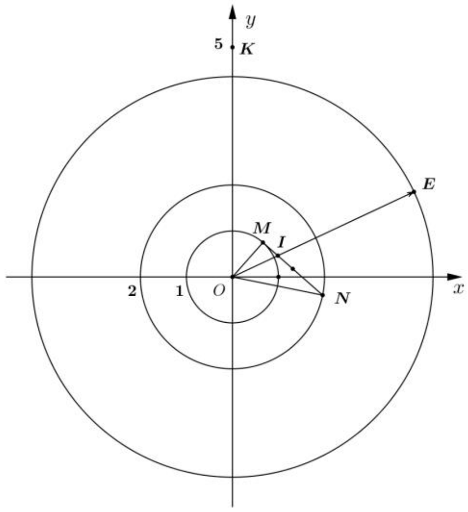
$\sqrt{b^2+\left(b-3\right)^2}-\sqrt{\left(b-3\right)^2+\left(b-2\right)^2}=2\Leftrightarrow\sqrt{b^2+\left(b-3\right)^2}=2+\sqrt{\left(b-3\right)^2+\left(b-2\right)^2}$

$\Leftrightarrow 2b^2-6b+9=4+2b^2-10b+13+4\sqrt{2b^2-10b+13}\Leftrightarrow 4b-8=4\sqrt{2b^2-10b+13}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b-2\geq 0\\\left(b-2\right)^2=\left(2b^2-10b+13\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq 2\\b^2-6b+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq 2\\b=3\end{cases}\Leftrightarrow b=3\Rightarrow a=3.$

$\Rightarrow T=3^2+3^2=18.$

Câu 2:



Giả sử M,N,K lần lượt là các điểm biểu điễn $z_1,z_2,z_3=5i$.

Theo giả thiết ta có $M\in\left(C_1\right)$ tâm $O\left(0;0\right)$ và bán kính $r_1=1$.

$N\in\left(C_2\right)$ tâm $O\left(0;0\right)$ và bán kính $r_2=2$ và $MN=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{3}$.

Đặt $T=\left|3z_1+z_2-5i\right|=\left|3\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OK}\right|$

Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IN}=-3\overrightarrow{IM}\Rightarrow IN=3IM,I\in MN$

Ta có ΔOMN vuông tại M, suy ra $OI^2=OM^2+IM^2=1+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{19}{14}\Rightarrow OI=\frac{\sqrt{19}}{4}.$

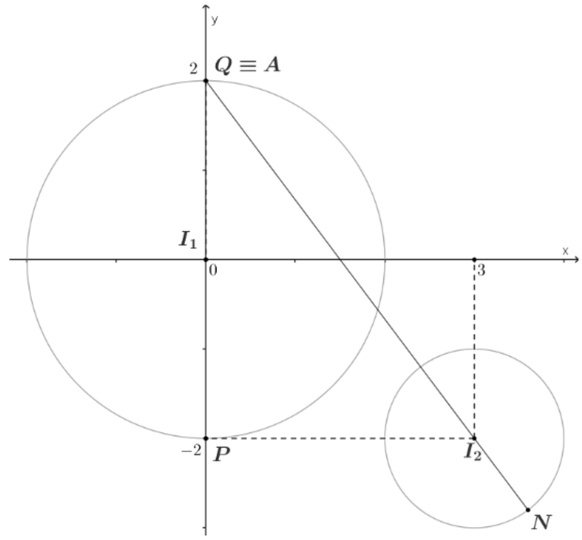
Suy ra I thuộc đường tròn $\left(C_3\right)$ tâm O bán kính $r_3=\frac{\sqrt{19}}{4}.$

Khi đó $T=\left|3z_1+z_2-5i\right|=\left|3\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OK}\right|=\left|4\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OK}\right|=\left|\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OK}\right|=KE$

Với $\overrightarrow{OE}=4\overrightarrow{OI}$ suy ra E thuộc đường tròn (C_4) tâm $O(0,0)$ bán kính $r_4=\sqrt{19}$.

Suy ra $T_{\max}=KE_{\max}=KO+r_4=5+\sqrt{19}$.

Câu 3:



Giả sử $\begin{cases} z=a+bi \\ \mathrm{w}=c+di \end{cases},(a,b,c,d\in\mathbb{R})$

Theo bài ra ta có: $|z|=2\Rightarrow|a+bi|=2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2\Leftrightarrow a^2+b^2=4$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I_1(0;0)$, bán kính $R_1=2$.

$|w-3+2i|=1\Rightarrow|c+di-3+2i|=1\Leftrightarrow|(c-3)+(d+2)i|=1\Leftrightarrow(c-3)^2+(d+2)^2=1$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I_2(3;-2)$, bán kính $R_2=1$.

Đặt $T=\left|z^2-2wz-4\right|$, ta có: $T=\left|z^2-2wz-z\bar{z}\right|$

$=|z|\left|z-\bar{z}-2w\right|=2|a+bi-a+bi-2w|=4|bi-\mathrm{w}|$.

Gọi $A(0;b)$ là điểm biểu diễn số phức bi; N là điểm biểu diễn số phức w.

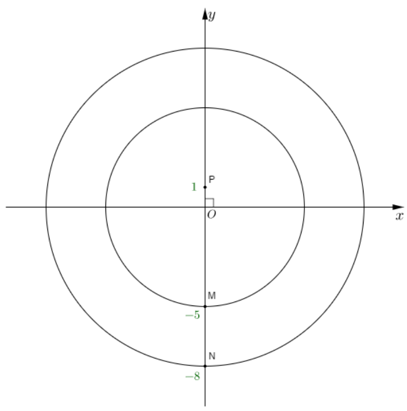
Khi đó $T=4|bi-\mathrm{w}|=4.\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON}\right|=4AN\Rightarrow T_{\max}=4AN_{\max}$.

Do $a^2+b^2=4\Rightarrow-2\le b\le2$. Suy ra tập hợp A là đoạn PQ với $P(0;-2)$, $Q(0;2)$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $AN_{\max}\Leftrightarrow A\equiv Q$

$AN_{\max}=QI_2+R_2=5+1=6$. Vậy $T_{\max}=4AN_{\max}=4.6=24$.

Câu 4:



Đặt $w_1 = 2z - 4w, w_2 = -3z - w$.

Gọi $M, N, P(0;1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn w_1, w_2, i.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}|w_1| = 2|z-2w| = 8\\ |w_2| = |-3z-w| = 5\end{cases}$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn w_1 là đường tròn tâm O, bán kính $R_1 = 8$, tập hợp các điểm N biểu diễn w_2 là đường tròn tâm O, bán kính $R_2 = 5$.

Ta có $A = |5z - 3w + i| = |w_1 - w_2 + i| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{OP}| \geq |\overrightarrow{NM}| - |\overrightarrow{OP}| \geq 8 - 5 - 1 = 2$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{NM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}\\ NM \min\end{cases} \Leftrightarrow M(0;-8), N(0;-5) \Leftrightarrow \begin{cases}w_1 = 2z - 4w = -8i\\ w_2 = -3z - w = -5i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z = \dfrac{6i}{7}\\ w = \dfrac{17i}{7}\end{cases}$

$\Leftrightarrow |z - w + 1| = \left|\dfrac{6i}{7} - \dfrac{17i}{7} + 1\right| = \dfrac{\sqrt{170}}{7}$.

Vậy khi $A = |5z - 3w + i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z - w + 1| = \dfrac{\sqrt{170}}{7}$.

Câu 5:

Gọi $z = x + yi(x, y \in R)$; $|z - (1-i)| = |\bar{z} + (2+i)|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (1-y)^2 \Leftrightarrow 6x - 4y + 3 = 0 (d)$

Giả sử $M(x;y)$ biểu diễn số phức z, $M \in d$. $A(-2;1)$ biểu diễn số phức $z_1 = -2 + i$

MA nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A lên d.

$\Leftrightarrow \begin{cases}4(-2-x) + 6(1-y) = 0\\ 6x - 4y + 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x + 6y = -2\\ 6x - 4y + 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -\dfrac{1}{2}\\ y = 0\end{cases}$. Vậy số phức $z = -\dfrac{1}{2}$

Câu 6: Ta có $(\sqrt{3}z - |z|)i = \sqrt{2}(|z| - 1) - z + i \Leftrightarrow z(1 + \sqrt{3}i) = \sqrt{2}(|z| - 1) + (|z| + 1)i$

$\Rightarrow 2|z| = \sqrt{2(|z|-1)^2 + (|z|+1)^2}$.

Đặt $|z| = t$, $t \geq 0$, phương trình trở thành: $2t = \sqrt{2(t-1)^2 + (t+1)^2}$

$\Leftrightarrow 4t^2 = 2(t-1)^2 + (t+1)^2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = -3\end{array}\right. \Rightarrow t = 1$.

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, kết hợp giả thiết ta có hệ phương trình $\begin{cases}x^2 + y^2 = 1\\ x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \dfrac{3}{4}\\ y^2 = \dfrac{1}{4}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \end{array} \right. .$$

Thử lại ta thấy chỉ có số phức $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ thỏa mãn đề.

Vậy có 1 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Gọi $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ $(x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ và hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ trong mặt phẳng phức lần lượt biểu diễn số phức z_1 và z_2.

Ta có $|z_1| = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4$ và $|z_2 - 6i| = 3 \Leftrightarrow |x_2 + (y_2 - 6)i| = 3 \Leftrightarrow x_2^2 + (y_2 - 6)^2 = 9$.

Ta xét các biểu thức

$$3|z_1 - 4| = 3|x_1 - 4 + y_1 i| = 3\sqrt{(x_1 - 4)^2 + y_1^2} = 3\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 + 16}$$

$$= 3\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 + 16 + 3(x_1^2 + y_1^2) - 12} = 6\sqrt{x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2}$$

$= 6\sqrt{(x_1 - 1)^2 + y_1^2} = 6MA$, với điểm $A(1;0)$.

$$2|z_2 - 9 - 6i| = 2|x_2 - 9 + (y_2 - 6)i| = 2\sqrt{(x_2 - 9)^2 + (y_2 - 6)^2} = 2\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - 18x_2 - 12y_2 + 177}$$

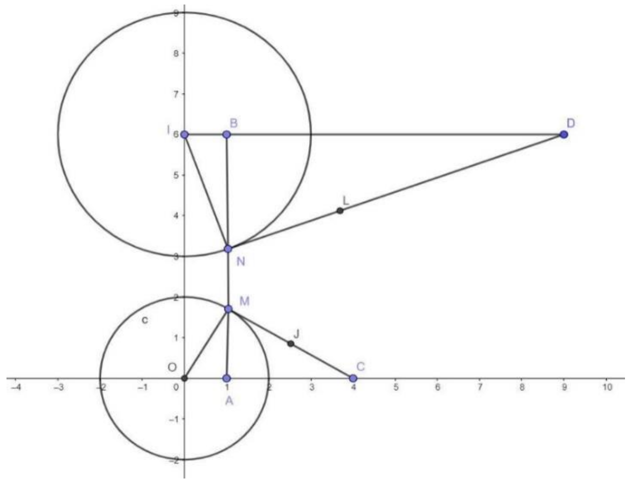
$$= 2\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - 18x_2 - 12y_2 + 177 + 8\left[x_2^2 + (y_2 - 6)^2\right] - 72} = 6\sqrt{x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 - 12y_2 + 36}$$

$= 6\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 6)^2} = 6NB$, với điểm $B(1;6)$.

$6|z_1 - z_2| = 6\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 6MN$ và $\overrightarrow{AB} = (0;6) \Rightarrow AB = 6$.

Lúc đó $P = 3|z_1 - 4| + 2|z_2 - 9 - 6i| + 6|z_1 - z_2| = 6AM + 6NB + 6MN$

$= 6(AM + MN + NB) \geq 6AB = 36$. Vậy $P_{\min} = 36$. Dấu $"="$ xảy ra khi A, M, N, B thẳng hàng.



Câu 8: Giả sử $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Khi đó $\left|z-1-2i\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\left(x-1\right)+\left(y-2\right)i\right|\le 1$

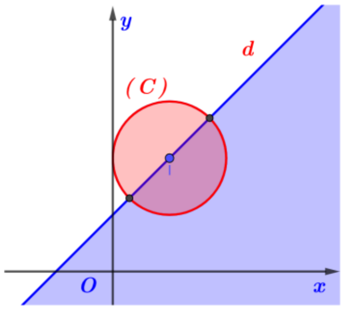
$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2}\le 1\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2\le 1$

Và $\left|z-1+2i\right|\ge\left|z+3-2i\right|\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2}\ge\sqrt{\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2}$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2\ge\left(x+3\right)^2+\left(y-2\right)^2\Leftrightarrow y\ge x+1$.

Gọi $\left(T\right)$ là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d:y=x+1$, không chứa gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$.

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn đề là nửa hình tròn $\left(C\right)$ tâm $I\left(1;2\right)$, bán kính $R=1$ và thuộc $\left(T\right)$.



Vì đường thẳng d đi qua tâm $I\left(1;2\right)$ của hình tròn $\left(C\right)$ nên diện tích cần tìm là một nửa diện tích hình tròn $\left(C\right)$. Do đó $S=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 9: Đặt $w=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\left|z-2+5i\right|=2\sqrt{5}\Rightarrow\left|\overline{z-2+5i}\right|=2\sqrt{5}\Rightarrow\left|\bar{z}-2-5i\right|=2\sqrt{5}$.

Mà $w=\left(2-i^{2021}\right)\left(\bar{z}-3i\right)+2021=\left(2-i\right)\left(\bar{z}-2-5i+2i+2\right)+2021$

$\Leftrightarrow w=\left(2-i\right)\left(\bar{z}-2-5i\right)+\left(2-i\right)\left(2i+2\right)+2021\Leftrightarrow w-2027-2i=\left(2-i\right)\left(\bar{z}-2-5i\right)$.

Suy ra: $\left|w-2027-2i\right|=\left|\left(2-i\right)\left(\bar{z}-2-5i\right)\right|\Leftrightarrow\left|w-2027-2i\right|=\left|2-i\right|\left|\bar{z}-2-5i\right|$

$\Leftrightarrow\left|w-2027-2i\right|=\sqrt{5}.2\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|w-2027-2i\right|=10\Leftrightarrow\left(x-2027\right)^2+\left(y-2\right)^2=100$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn w thuộc đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(2027;2\right)$ và bán kính $R=10$.

Vậy bán kính của $\left(C\right)$ là $R=10$.

Câu 10: Đặt $w=z_1-9-12i$.

Ta có: $\begin{cases}\left|z_1-z_2-9-12i\right|=3\\ \left|z_1-3-20i\right|=7-\left|z_2\right|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|w-z_2\right|=3\\ \left|w+6-8i\right|+\left|z_2\right|=7.\end{cases}$

Gọi A, B là điểm biểu diễn của w, z_2 $\Rightarrow\begin{cases}AB=3\\ AM+OB=7\end{cases}$ với $M\left(-6;8\right)$

$\Rightarrow AB+AM+OB=10=OM\ \Rightarrow A$, B nằm trên đoạn OM

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OM}\\ \overrightarrow{OB}=y\overrightarrow{OM}\end{cases}$ với x, $y\in\left[0;1\right]$.

$\Rightarrow \begin{cases} w = -6x + 8xi \\ z_2 = -6y + 8yi \end{cases}$ với x , $y \in [0;1]$.

Khi đó $P = |z_1 + 2z_2 + 12 - 15i| = |w + 2z_2 + 21 - 3i|$

$= \sqrt{(-6x - 12y + 21)^2 + (8x + 16y - 3)^2} = \sqrt{[-6(x + 2y) + 21]^2 + [8(x + 2y) - 3]^2}$.

Đặt $t = x + 2y$ $(0 \le t \le 3)$.

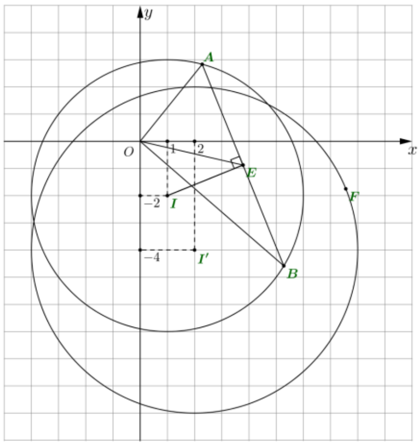
$P = \sqrt{(-6t + 21)^2 + (8t - 3)^2} = \sqrt{100t^2 - 300t + 450}$

Khảo sát hàm số $f(t) = 100t^2 - 300t + 450$ trên đoạn $[0;3]$ ta được $\max\limits_{[0;3]} f(t) = f(0) = 450$ và

$\min\limits_{[0;3]} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 225 \Rightarrow \begin{cases} P_{\max} = M = \sqrt{450} \\ P_{\min} = m = 15 \end{cases}$.

Vậy $M^2 - m^2 = 225$.

Câu 11:



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .

Do z_1, z_2 thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ nên A, B thuộc đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 5$.

Mà $|z_1 - z_2| = 8$ suy ra $AB = 8$.

Gọi E là trung điểm của AB. Ta có $IE = \sqrt{IA^2 - EA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Như vậy khi A, B thay đổi trên (C) và thỏa mãn $AB = 8$ thì E thay đổi trên đường tròn (C_1) tâm I bán kính $R_1 = IE = 3$.

Gọi F là điểm biểu diễn số phức w. Ta có $w = z_1 + z_2 \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$.

Suy ra F là ảnh của E qua phép vị tự V tâm O tỉ số $k = 2$.

Do đó khi E chạy trên đường tròn (C_1) thì F sẽ chạy trên đường tròn (C_1') là ảnh của (C_1) qua phép vị tự V tâm O tỉ số $k = 2$.

Gọi I' và R_1' lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C_1').

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OI'} = 2\overrightarrow{OI} \\ R_1' = 2R_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I'(2;-4) \\ R_1' = 6 \end{cases}$.

Vậy tập hợp điểm F biểu diễn số phức w là đường tròn có bán kính bằng 6.

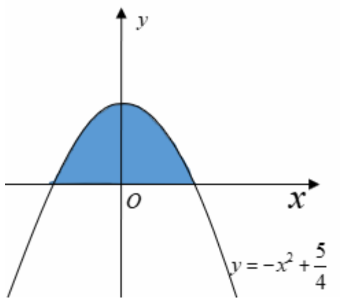
Câu 12: Gọi $z = x + yi\left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có: $2\left|z-i\right| \le \left|z-\bar{z}-3i\right| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2} \le \sqrt{\left(2y-3\right)^2} \Leftrightarrow 4\left[x^2+\left(y-1\right)^2\right] \le \left(2y-3\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-8y+4 \le 4y^2-12y+9 \Leftrightarrow 4y \le -4x^2+5 \Leftrightarrow y \le -x^2+\frac{5}{4}\ \left(1\right)$.

Số phức $z-\bar{z}=2yi$ có phần ảo không âm $\Leftrightarrow y \ge 0\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta suy ra phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn cho số phức z là hình phẳng giới hạn bởi Parabol $\left(P\right): y=-x^2+\frac{5}{4}$ và trục hoành.



Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P\right)$ và trục hoành là $-x^2+\frac{5}{4}=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi S là diện tích cần tìm $\Rightarrow S=2.\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(-x^2+\frac{5}{4}\right)dx=2.\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

Câu 13: Giả sử $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó $\frac{z-2+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+2}=\frac{x-2+\left(y+1\right)i}{2+2xi}=\frac{\left[x-2+\left(y+1\right)i\right]\left(1-xi\right)}{2\left(1+x^2\right)}$

$=\frac{x-2+x\left(y+1\right)+\left[-x\left(x-2\right)+y+1\right]i}{2\left(1+x^2\right)}$.

$\frac{z-1+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+1}$ là số thực $\Leftrightarrow -x\left(x-2\right)+y+1=0 \Leftrightarrow y=x^2-2x-1 \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{2}.4x^2-2.2x-2$.

Số phức $2z$ có điểm biểu diễn $M\left(2x;2y\right)$

$\Rightarrow$ quỹ tích các điểm M là parabol có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2-2x-2$.

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $2z$ là parabol có toạ độ đỉnh $I\left(2;-4\right)$

$\Rightarrow S=2+\left(-4\right)=-2$.

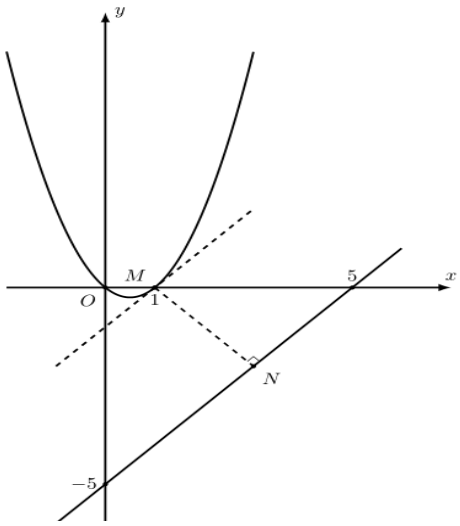
Câu 14: Đặt $z_1=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn hình học của hai số phức z_1,z_2.

Ta có $M\left(x;y\right),N\left(a;b\right)$ và

$\begin{cases}\left|1-2z_1\right|=\left|z_1-\bar{z}_1+i\right|\\ \left|z_2\right|=\left|z_2-5+5i\right|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(2x-1\right)^2+4y^2=\left(2y+1\right)^2\\ a^2+b^2=\left(a-5\right)^2+\left(b+5\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x^2-x\\ b=a-5\end{cases}$.

Khi đó bài toán trở thành tìm M trên parabol $(P): y = x^2 - x$ và N trên đường thẳng $d: y = x - 5$ sao cho $P = |z_1 - z_2| = MN$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Khi đó M là điểm trên parabol (P) sao cho tiếp tuyến với parabol tại M có hệ số góc bằng 1.

Ta có $y'(1) = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra $M(1;0)$.

Khi đó điểm N là hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng $d: y = x - 5$.

Đường thẳng MN qua M và vuông góc với đường thẳng (d).

Ta có $MN: y = -x + 1$.

$N = MN \cap d$ nên tọa độ điểm N thỏa hệ $\begin{cases} y = x - 5 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$.

Khi đó $N(3;-2)$ hay $z_2 = 3 - 2i$.

Vậy $2a + 3b = 2.3 + 3.(-2) = 0$.

Câu 15: Ta có: $z^4 + (4 - m)z^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -4 \quad (1) \\ z^2 = m \quad (2) \end{array}\right.$

Ta có: $|z^n| = |z|^n$.

$z_1; z_2$ là nghiệm của phương trình (1). Ta có: $|z_1| = |z_2| = \sqrt{|-4|} = 2$.

$z_3; z_4$ là nghiệm của phương trình (2). Ta có: $|z_3| = |z_4| = \sqrt{|m|}$.

Theo đề ra ta có: $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{|m|} + 4 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{|m|} = 1 \Leftrightarrow |m| = 1$.

Kết luận $m = \pm 1$.

Câu 16: Xét phương trình:

$$z^3 - (m+1)z^2 + (m + 1 + mi)z - 1 - mi = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z^2 - mz + 1 + mi = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z^2 - i^2 - (mz - mi) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ (z - i)(z + i - m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = i \\ z = m - i \end{array}\right..$$

Đặt $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(m;-1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các nghiệm $z=1$, $z=i$, $z=m-i$ trên mặt phẳng phức. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(m-1;-1)$, $\overrightarrow{BC}=(m;-2)$

$AB=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{m^2+4}$, $AC=\sqrt{(m-1)^2+1}$.

Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay $m\neq 2$.

Tam giác ABC cân $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC=AB \\ BC=AB \\ AC=BC \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{(m-1)^2+1}=\sqrt{2} \\ \sqrt{m^2+4}=\sqrt{2} \\ \sqrt{(m-1)^2+1}=\sqrt{m^2+4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m=0 \\ -2m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $m\neq 2$ ta được $m\in\{0;-1\}$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn đề.

Câu 17: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Khi đó,

$|z+46-40i|=\sqrt{929}\Leftrightarrow (x+46)^2+(y-40)^2=929$.

Tập hợp điểm M nằm trên đường tròn (C) tâm $H(-46;40)$ bán kính $R=\sqrt{929}$.

$P=3|z-z_1|^2+5|z-z_2|^2-7|z-z_3|^2 \Leftrightarrow P=3MA^2+5MB^2-7MC^2$

Gọi I là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+5\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)-7\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}-7\overrightarrow{OC} \Longrightarrow$ Tọa độ điểm $I(-23;20)$

Khi đó: $P=3\overrightarrow{MA}^2+5\overrightarrow{MB}^2-7\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+5\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2-7\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)^2$

$=IM^2-2\overrightarrow{IM}\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+5IB^2-7IC^2=IM^2+3IA^2+5IB^2-7IC^2$.

Do đó, P đạt giá trị nhỏ nhất khi IM đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận thấy $I(-23;20)$ thuộc đường tròn (C) suy ra IM đạt giá trị nhỏ nhất khi M trùng I.

Suy ra $z=-23+20i$. Vậy $|z|=\sqrt{929}$.

Câu 18: Ta có: $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3=z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow z^3+\frac{1}{z^3}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$\Leftrightarrow \left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|=\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\Leftrightarrow \left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\leq 2$

Mặt khác, $\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\geq\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$

$\Longrightarrow \left|\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|^3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\leq 2$ $(*)$. Đặt $t=\left|z+\frac{1}{z}\right|$, $(t\geq 0)$

Bất phương trình $(*)$ trở thành: $t^3-3t-2\le 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2\le 0 \Leftrightarrow t\le 2 \Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|\le 2$

$\Rightarrow M=2$. Dấu bằng xảy ra khi $z=1$ hoặc $z=-1$.

Câu 19: Đặt hệ $(*)\begin{cases}|z+1-2i|=2 & (1)\\ |z-2-2i|=|m| & (2)\\ \left|z-2m-(m^2+m-2)i\right|=\left|z-2m+2+(m^2+m+2)i\right| & (3)\end{cases}$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa yêu cầu.

Từ (1) ta có M thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(-1;2)$, bán kính $R=2$.

Từ (2) ta có M thuộc đường tròn (C_2) tâm $I_2(2;2)$, bán kính $R=|m|$ với $m\ne 0$.

Đặt $A(2m;m^2+m-2)$, $B(2m-2;-m^2-m-2)$.

Ta có $(3)\Leftrightarrow MA=MB$ nên tập hợp M là đường trung trực d của đoạn AB.

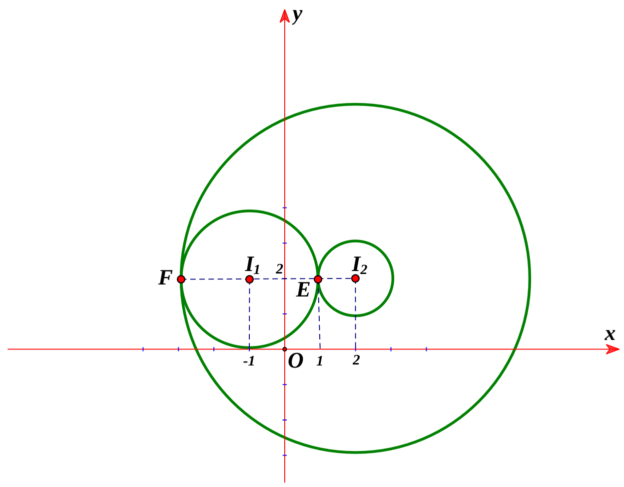
Đường trung trực d có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-2;-2m^2-2m)$ hay $\overrightarrow{n'}=(1;m^2+m)$ và đi qua trung điểm $I(2m-1;-2)$ của AB

⇨ d có phương trình là $x+(m^2+m)y+2m^2+1=0$.

Tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn hệ $(*)$

⇔ tồn tại duy nhất M là điểm chung của (C_1), (C_2) và d

⇔ (C_1) tiếp xúc (C_2) và d là tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2)



(C_1) tiếp xúc (C_2) ⇔ $\left[\begin{array}{l}I_1I_2=R_1+R_2\\ I_1I_2=|R_1-R_2|\end{array}\right.$ ⇔ $\left[\begin{array}{l}3=2+|m|\\ 3=|2-|m||\end{array}\right.$ ⇔ $\left[\begin{array}{l}m=\pm 1\\ m=\pm 5\end{array}\right.$ (4)

Quan sát đồ thị ta thấy (C_1) tiếp xúc (C_2) tại $E(1;2)$ hoặc $F(-3;2)$ và $I_1I_2 // Ox$ nên d là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại $E(1;2)$ hoặc $F(-3;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}d//Oy\\ E\in d\end{cases}\\ \begin{cases}d//Oy\\ F\in d\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m^2+m=0\\ 1+2m^2+1=0\ \ (vn)\end{cases}\\ \begin{cases}m^2+m=0\\ -3+2m^2+1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}m=0;m=-1\\ m=\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow m=-1\ \ (5)$$

Từ (4) và (5) ta nhận được $m=-1$ thỏa yêu cầu đề bài.

Vậy có một giá trị nguyên của m.

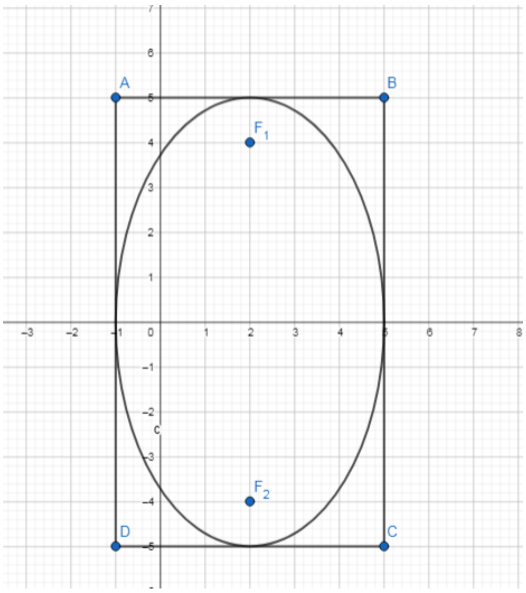
Câu 20: Giả sử số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng $z=x+yi, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$. Ta có:

$|z-2-4i|\le 5|1-\sqrt{3}i|-|z-2+4i| \Leftrightarrow |z-2-4i|+|z-2+4i|\le 10$

$\Leftrightarrow |z-(2+4i)|+|z-(2-4i)|\le 10$

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z và $F_1(2;4), F_2(2;-4)$ lần lượt biểu diễn cho các số phức $2+4i; 2-4i$. Khi đó ta có: $|z-(2+4i)|+|z-(2-4i)|\le 10 \Leftrightarrow MF_1+MF_2\le 10$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một hình Elip nhận $F_1(2;4), F_2(2;-4)$ là các tiêu điểm, tiêu cự $F_1F_2=2c=8$, trục lớn có độ dài là $2a=10$ và trục bé có độ dài là $2b=6$. Như hình vẽ sau:



$M(x,y)$ thuộc hình elip nói trên và $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ nên có 45 điểm thỏa mãn. Cụ thể như sau:

x	$-1;\ 5$	$0\ ;\ 4$	$1;3$	2
y	0	$0;\pm1;\pm2;\pm3$	$0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4$	$0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm5$

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử chọn hai số phức trong các số phức có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|\le 5|1-\sqrt{3}i|-|z-2+4i|$. Ta có $n(\Omega)=C_{45}^2$.

Gọi A là biến cố: "Trong hai số chọn được ít nhất một số phức có phần thực lớn hơn 2".

$\overline{A}$ là biến cố: "Trong hai số chọn không có số phức có phần thực lớn hơn 2". Ta có $n(\overline{A})=C_{28}^2$

Suy ra $P(\overline{A})=\dfrac{C_{28}^2}{C_{45}^2}=\dfrac{21}{55}$. Vậy $P(A)=1-\dfrac{21}{55}=\dfrac{34}{55}$.

Câu 21: Ta có $w=\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{w}=w\Leftrightarrow \dfrac{\overline{z}^2-2\overline{z}+4}{\overline{z}^2+2\overline{z}+4}=\dfrac{z^2-2z+4}{z^2+2z+4}$.

$\Leftrightarrow 4(z-\overline{z})(4-z.\overline{z})=0\Leftrightarrow z.\overline{z}=4$.

$|z|^2 = 4\ (1)$. Gọi $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4(2)$.

Mà $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2| \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2\ (3)$. Từ $(2),(3)$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) \in \{(0;2);(0;-2);(2;0);(-2;0)\}$. Vì $z \notin \mathbb{R} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2i \\ z = -2i \end{array}\right.$.

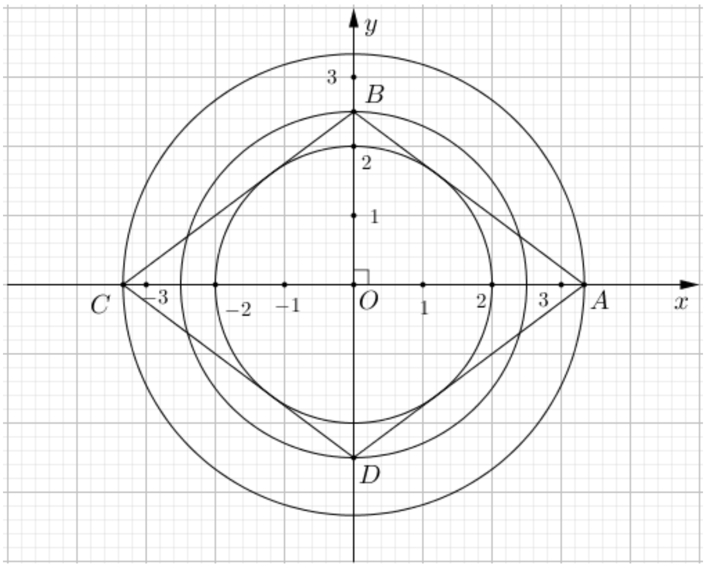
Câu 22: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = m \\ 3|x + yi + x - yi| + 4|x + yi - x + yi| = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m^2 \\ 6|x| + 8|y| = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x| + 4|y| = 10(1) \\ x^2 + y^2 = m^2(2) \end{cases}$

Tập hợp các điểm M thỏa mãn (1) là hình thoi $ABCD$ với $A\left(\frac{10}{3};0\right), B\left(0;\frac{5}{2}\right)$, $C\left(-\frac{10}{3};0\right), D\left(0;-\frac{5}{2}\right)$.

Tập hợp các điểm M thỏa mãn (2) là đường tròn (C) tâm $O(0;0), R = m\ (m > 0)$.



Có đúng 4 số phức thỏa mãn đề khi và chỉ khi (C) có đúng 4 điểm chung với các cạnh hình thoi.

Trường hợp 1: (C) là đường tròn nội tiếp hình thoi.

Khi đó ta có $R = d(O, AB) \Leftrightarrow m = 2$.

Trường hợp 2: (C) nằm giữa hai đường tròn: đường tròn đường kính BD và đường tròn đường kính AC. Khi đó ta có $\frac{BD}{2} < R < \frac{AC}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{10}{3}$. Do m nguyên dương nên $m = 3$.

Vậy có tất cả 2 số nguyên thỏa mãn.

Câu 23: Ta có $|z|^2 = z.\bar{z}$. Đặt $T = |3u - 4v|$.

Khi đó $T^2 = (3u - 4v)(3\bar{u} - 4\bar{v}) = 9|u|^2 + 16|v|^2 - 12(u\bar{v} + v\bar{u})$.

Tương tự ta có $M^2 = (4u + 3v)(4\bar{u} + 3\bar{v}) = 16|u|^2 + 9|v|^2 + 12(u\bar{v} + v\bar{u})$.

Do đó $M^2+T^2=25\left(|u|^2+|v|^2\right)=5000$.

Suy ra $M^2=5000-T^2=5000-50^2=2500$.
Vậy $M=50$.

Câu 24: Gọi $z=x+yi\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$

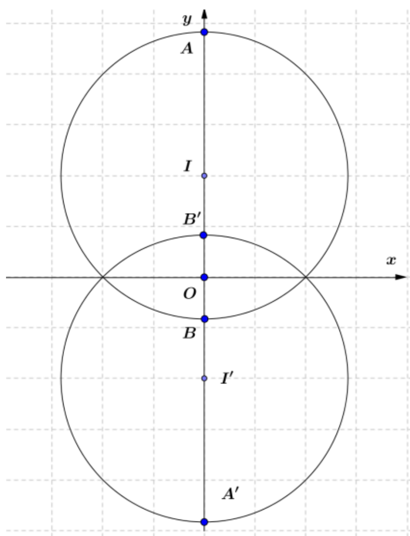
Ta có $\left|z^2+1\right|=2|z|\Leftrightarrow\left|x^2-y^2+1+2xyi\right|=2|x+yi|\Leftrightarrow\left(x^2-y^2+1\right)^2+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2-6y^2+1=0\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+1=4y^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2-1=2y\\x^2+y^2-1=-2y\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2-2y-1=0\\x^2+y^2+2y-1=0\end{array}\right.$.

Khi đó điểm biểu diễn số phức z thuộc đường tròn $(C):x^2+(y-1)^2=2$ có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$ hoặc $(C'):x^2+(y+1)^2=2$ có tâm $I'(0;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{2}$.

Với $A\left(0;1+\sqrt{2}\right)$, $B\left(0;1-\sqrt{2}\right)$, $A'\left(0;-1-\sqrt{2}\right)$, $B'\left(0;-1+\sqrt{2}\right)$ thuộc các đường tròn như hình vẽ



Suy ra $\max|z|=1+\sqrt{2}\Rightarrow z_1=\pm\left(\sqrt{2}+1\right)i$ và $\min|z|=\sqrt{2}-1\Rightarrow z_2=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)i$.

Vậy $\left|z_1+z_2\right|=2\sqrt{2}$ hoặc $\left|z_1+z_2\right|=2$ nên giá trị nhỏ nhất của $|w|=2$.

Câu 25: $4\left(z-\bar{z}\right)-15i=i\left(z+\bar{z}-1\right)^2\Leftrightarrow4\left(a+bi-a+bi\right)-15i=i\left(a+bi+a-bi-1\right)^2$.

$\Leftrightarrow8bi-15i=i\left(2a-1\right)^2\Leftrightarrow8b-15=\left(2a-1\right)^2$ với $8b-15\ge0\Leftrightarrow b\ge\frac{15}{8}$.

Ta có $\left|2z-1+i\right|=\left|2a+2bi-1+i\right|=\left|\left(2a-1\right)+\left(2b+1\right)i\right|=\sqrt{\left(2a-1\right)^2+\left(2b+1\right)^2}$

$=\sqrt{8b-15+4b^2+4b+1}=\sqrt{4b^2+12b-14}$.

Xét $g(b)=4b^2+12b-14$ có $g'(b)=8b+12>0, \forall b\ge\frac{15}{8}$ nên hàm số $g(b)=4b^2+12b-14$ luôn đồng biến trên $\left[\frac{15}{8};+\infty\right)$ $\Rightarrow g(b)\ge g\left(\frac{15}{8}\right)=\frac{361}{16}\Rightarrow |2z-1+i|\ge\sqrt{\frac{361}{16}}=\frac{\sqrt{361}}{4}$

$\Rightarrow |2z-1+i|$ có GTNN bằng $\frac{\sqrt{361}}{4}$ khi $b=\frac{15}{8}$ mà $8b-15=(2a-1)^2$ nên $a=\frac{1}{2}$.

Vậy $P=a+b=\frac{1}{2}+\frac{15}{8}=\frac{19}{8}$

Câu 26: Xét các điểm $A(1;0)$, $B(0;1)$ và $M(x;y)$ với M là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức. Ta có:

$2|z-1|+3|z-i|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}+3\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2MA+3MB$.

Ta có: $2MA+3MB=2(MA+MB)+MB\ge 2\sqrt{2}+MB\ge 2\sqrt{2}$.

Suy ra $2|z-1|+3|z-i|\ge 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn AB và $MB=0$ $\Leftrightarrow M\equiv B\Leftrightarrow M(0;1)$. Khi đó $|z|=1$.

Câu 27:

Do $|z_0|=|\overline{z_0}|$ nên $|z_0|^3=3|\overline{z_0}|+2\Leftrightarrow |z_0|^3-3|z_0|-2=0\Leftrightarrow |z_0|=2$

$\Delta'=(m-1)^2-m^2+5m=3m+1$.

Trường hợp 1: Nếu $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 3m+1\ge 0\Leftrightarrow m\ge-\frac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm thực

Khi đó $|z_0|=2\Leftrightarrow z_0=\pm 2$.

Thay $z_0=2$ vào phương trình ta được: $m^2-9m+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=8\end{array}\right.$ (TM).

Thay $z_0=-2$ vào phương trình ta được: $m^2-m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=1\end{array}\right.$ (TM).

Trường hợp 2: Nếu $\Delta'<0\Leftrightarrow 3m+1<0\Leftrightarrow m<-\frac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_2=\overline{z_1}, |z_1|=|z_2|=2$. Khi đó $z_1.z_2=|z_1|^2=m^2-5m=4\Leftrightarrow m=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$.

Vậy $S=\{0;1;8\}$. Suy ra tổng là 9.

Câu 28: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Trường hợp 1: $\Delta>0\Leftrightarrow -m^2+4m+5>0\Leftrightarrow \begin{cases} m<5\\ m>-1\end{cases}$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-(m-1)\\ z_1z_2=m^2-3m-2\end{cases}$

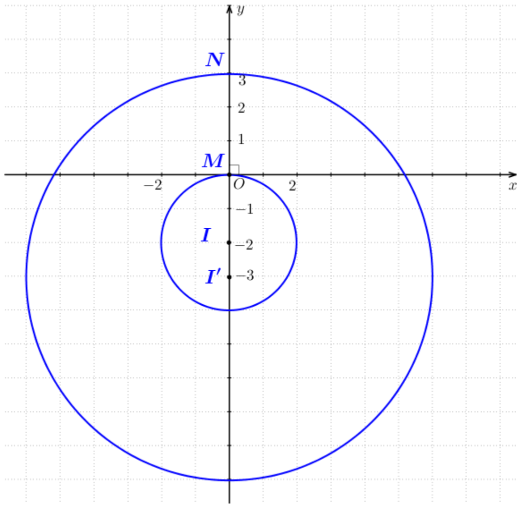
Theo đề bài ta có: $|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0\Rightarrow -(m-1)=0\Leftrightarrow m=1$

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$

Phương trình luôn có 2 nghiệm phức z_1, z_2 luôn thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$.

Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 29:



Ta có: $|iz_1 - 1| = 1 \Leftrightarrow |i|\left|z_1 - \frac{1}{i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_1 + i| = 1 \Leftrightarrow |2z_1 + 2i| = 2$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $2z_1 \Rightarrow$ Tập hợp M thuộc đường tròn tâm $I(0\,;-2)$, $R = 2$.

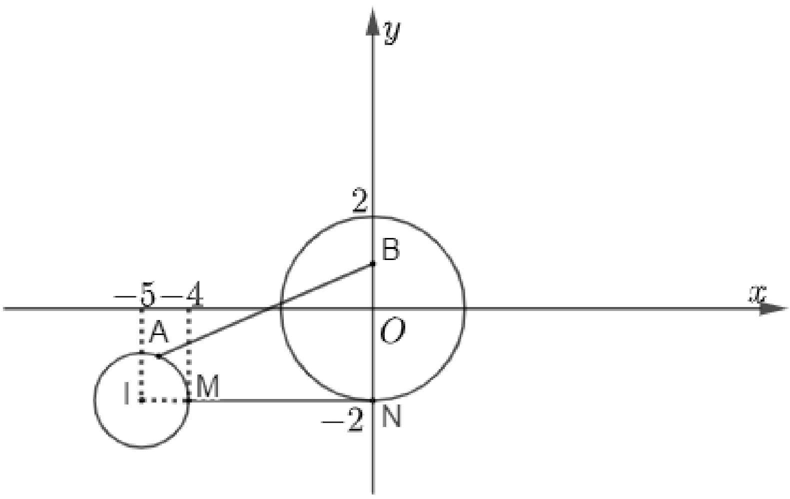
Ta có: $|\overline{z_2} + i| = 2 \Leftrightarrow |z_2 - i| = 2 \Leftrightarrow |-3z_2 + 3i| = 6$, Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$.

$\Rightarrow$ Tập hợp N thuộc đường tròn tâm $I'(0;-3)$, $R' = 6$. Suy ra: $P = |2z_1 + 3z_2| = MN$

$\Rightarrow P_{\min} \Leftrightarrow MN_{\min} \Leftrightarrow M,N,I,I'$ thẳng hàng (M nằm giữa N và I) $MN = 3$ và $\overrightarrow{IM} = -2\overrightarrow{II'}$, M là trung điểm của NI'. Từ đó ta tính được $M(0;0)$, $N(0;3)$.

$\Rightarrow 2z_1 = 0, -3z_2 = 3i$. Khi đó, $z_1 - 2z_2 = 2i$. Vậy $|z_1 - 2z_2| = 2$.

Câu 30:



Ta có: $|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |i|.\left|w + \frac{-2+5i}{i}\right| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$.

Ta có: $T=\left|z^2-wz-4\right|=\left|z^2-wz-|z|^2\right|=\left|z^2-wz-z.\bar{z}\right|=|z|.\left|z-w-\bar{z}\right|=2\left|z-w-\bar{z}\right|$.

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$, suy ra $z-\bar{z}=2bi$. Vì $|z|=2\Rightarrow -2\le b\le 2$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của w, $2bi$ nên:

A thuộc đường tròn tâm $I(-5;-2)$; $R=1$, B thuộc trục Oy và $-4\le x_B\le 4$

$\Rightarrow T=2AB\ge 2MN=2.4=8$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$A\equiv M(-4;-2)\Rightarrow w=-4-2i\Rightarrow |w|=2\sqrt{5}$ và $B\equiv N(0;-2)\Rightarrow 2bi=-2i\Rightarrow b=-1\Rightarrow z=a-i$

$\Rightarrow |z|=2\Rightarrow a^2+1=4\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}\Rightarrow z=\pm\sqrt{3}-i\Rightarrow |z|=2$. Vậy $|z|+|w|=2+2\sqrt{5}$.

$\left|z_1+z_2\right|=\left|\frac{2}{13}+\frac{75}{13}i\right|=\frac{\sqrt{5629}}{13}$.

Câu 31: Áp dụng bất đẳng thức mô-đun ta có

$$|z+i\bar{w}-6-8i|\ge|6+8i|-|z+i\bar{w}|\ge 10-|z|-|i\bar{w}|=7.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại các số thực $k\ge 0$ và $m\ge 0$ sao cho $\begin{cases} z+i\bar{w}=k(6+8i)\\ z=mi\bar{w}\\ |z|=1;|w|=2\end{cases}$

Với $z=mi\bar{w}\Rightarrow |z|=|m|\cdot|w|\Rightarrow m=\frac{1}{2}\Rightarrow i\bar{w}=2z$.

Với $z+i\bar{w}=k(6+8i)\Leftrightarrow 3z=k(6+8i)\Rightarrow 3|z|=10|k|\Rightarrow k=\frac{3}{10}$.

Suy ra $z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ và $\bar{w}=\frac{2}{i}z=-2iz=\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$.

Vậy khi $|z+i\bar{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|z-w|=\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 32: Ta có: $\Delta'=2m+1$

Trường hợp 1: $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{-1}{2}$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm thực z_0 thỏa mãn $|z_0|=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_0=7\\ z_0=-7\end{array}\right.$

Với $z_0=7$ thay vào phương trình ta có $49-14(m+1)+m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=7+\sqrt{14}\,(n)\\ m=7-\sqrt{14}\,(n)\end{array}\right.$

Với $z_0=-7$ thay vào phương trình ta có $49+14(m+1)+m^2=0\,(VN)$

Trường hợp 2: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<\frac{-1}{2}$. Khi đó phương trình có 2 nghiệm phức là z_0 và $\overline{z_0}$

$$\left|z_0\right|^2=49 \Leftrightarrow z_0.\overline{z_0}=49 \Leftrightarrow m^2=49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7(l) \\ m=-7(n) \end{array}\right.$$

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 33: Chọn A

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \left|(a-m)+(b+1)i\right|=\left|(a-1)+(b+2m)i\right| \\ \left|a+bi\right|=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-m)^2+(b+1)^2=(a-1)^2+(b+2m)^2 \\ a^2+b^2=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-2)a+(4m-2)b-3m^2=0 & (1) \\ a^2+b^2=\dfrac{9}{4} & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình đường thẳng, phương trình (2) là phương trình đường tròn tâm O bán kính $R=\dfrac{3}{2}$.

Để tồn tại số phức z thoả mãn đề bài thì đường thẳng có phương trình (1) phải cắt đường tròn có phương trình (2)

Nghĩa là $d\left(O,(1)\right)\le R \Leftrightarrow \dfrac{\left|-3m^2\right|}{\sqrt{(2m-2)^2+(4m-2)^2}}\le\dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow m^2\le\sqrt{(m-1)^2+(2m-1)^2} \Leftrightarrow m^4\le 5m^2-6m+2 \Leftrightarrow (m-1)^2\left(m^2+2m-2\right)\le 0$$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{3}\le m\le -1+\sqrt{3}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

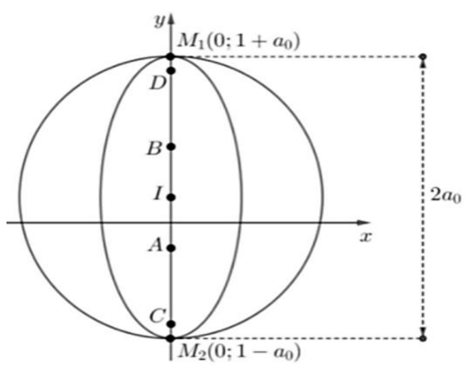
Câu 34: Chọn A

Xét $M(z),A(0;-1),B(0;3),C(0;-4),D(0;6)\Rightarrow |z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$

$\Leftrightarrow MA+MB=MC+MD$.

Theo bất đẳng thức tam giác có: $MC+MD\ge CD=10$. Do đó đặt $MA+MB=MC+MD=2a_0\ (a_0\ge 5)$.

Khi đó M cùng thuộc hai elip $(E_1),(E_2)$ có cùng độ dài trục lớn $2a_0$ và tâm của hai elip này trùng nhau tại điểm $I(0;1)$ là trung điểm. Do đó $M=(E_1)\cap(E_2)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;1+a_0) \\ M(0;1-a_0) \end{array}\right.$



Trường hợp 1: Nếu $M(0;1+a_0) \Rightarrow |z| \le 10 \Leftrightarrow |1+a_0| \le 10 \Leftrightarrow 5 \le a_0 \le 9$. Trường hợp này có 5 điểm.

Trường hợp 2: Nếu $M(0;1-a_0) \Rightarrow |z| \le 10 \Leftrightarrow |1-a_0| \le 10 \Leftrightarrow 5 \le a_0 \le 11$. Trường hợp này có 7 điểm.

Vậy có tất cả là 12 số phức thỏa mãn.

Câu 35: Chọn D

Đặt $z_3 = z_2 + 1 - 2i$, ta có $z_1^2 + (z_2+1-2i)^2 = z_1z_2 + (1-2i)z_1$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + (z_2+1-2i)^2 = z_1(z_2+1-2i) \Leftrightarrow z_1^2 + {z_3}^2 = z_1z_3 \Leftrightarrow \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2 - \frac{z_3}{z_1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_3}{z_1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow z_3 = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} z_1.$$

Khi đó $a = |z_1 - z_2 - 1 + 2i| = |z_1 - z_3| = \left|z_1 - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} z_1\right| = |z_1|\left|1 - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right| = 24\left|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 24$.

Do $a = 2^3.3$ nên số ước nguyên của a là $2.(3+1)(1+1) = 16$.

Câu 36: Chọn B

Ta có $|z+2w| = 3 \Leftrightarrow |z+2w|^2 = 9 \Leftrightarrow (z+2w)(\bar{z}+2\bar{w}) = 9 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|\mathrm{w}|^2 = 9(1)$.

Tương tự:

$$|2z+3w| = 5 \Leftrightarrow |2z+3w|^2 = 25 \Leftrightarrow (2z+3w)(2\bar{z}+3\bar{w}) = 25 \Leftrightarrow 4|z|^2 + 6P + 9|\mathrm{w}|^2 = 25(2)$$

$$|z+3w| = 4 \Leftrightarrow |z+3w|^2 = 16 \Leftrightarrow (z+3w)(\bar{z}+3\bar{w}) = 16 \Leftrightarrow |z|^2 + 3P + 9|\mathrm{w}|^2 = 16(3)$$

Giải hệ phương $(1),(2),(3)$ ta được $P = 2$.

Câu 37: Chọn C

Gọi A và B lần lượt là điểm biểu diễn của z_1 và z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Khi đó: $OA = OB = \sqrt{39}$ và $AB = 2\sqrt{3}$.

Nhận xét: ΔOAB cân tại O. Khi đó: $|z_1 + z_2| = 2OC = 2\sqrt{OA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{39-3} = 12$ với C là trung điểm cạnh AB.

Câu 38: Chọn A

Ta có: $w = \frac{3+iz}{1+z} \Leftrightarrow w + w.z = 3 + iz \Leftrightarrow (w-i)z = 3 - w \Leftrightarrow |w-i|.|z| = |3-w|$.

Nếu $|z| = k \ne 1$ thì tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn Apollonius.

Nếu $|z| = 1$ thì tập hợp biểu diễn số phức w là đường thẳng.

Vậy $|z| = 1$ thỏa đề.

Câu 39: Chọn B

Đặt $w = x + iy; |z| = a$; điều kiện: $z \ne -1$

Từ $w = \frac{1+iz}{1+z} \Leftrightarrow (w-i)z = 1 - w \Leftrightarrow z = \frac{1-w}{w-i} \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{1-w}{w-i}\right| \Leftrightarrow a^2 = \frac{(x-1)^2 + y^2}{x^2 + (y-1)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+\dfrac{2x}{a^2-1}-\dfrac{2a^2y}{a^2-1}+1=0$

Theo giả thiết quỹ tích w là đường tròn bán kính bằng 2, ta có

$\sqrt{\left(\dfrac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)^2-1}=2 \Leftrightarrow 4a^4-10a^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2} \\ a=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$ đáp án B

Câu 40: Chọn C

Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$

Ta có:

$(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)=\left[(x+3)+(y-1)i\right]\left[(x+1)+(-y+3)i\right]$

$=(x+3)(x+1)-(-y+3)(y-1)+\left[(x+3)(-y+3)+(x+1)(y-1)\right]i$

Vì $(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực nên

$(x+3)(-y+3)+(x+1)(y-1)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+8=0 \Leftrightarrow x-y+4=0$

Do đó tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $\Delta: x-y+4=0$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng Δ là:

$d(O,\Delta)=\dfrac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

Câu 41: Chọn D

Gọi điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w=x+yi,(x,y\in R)$.

$\Rightarrow x+yi=2\bar{z}-2+3i \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y-3}{2}i$.

Khi đó $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=\left(\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y-3}{2}i-2+i\right)\left(\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y-3}{2}i-2-i\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left[x+2-(y-3)i-4+2i\right]\left[x+2+(y-3)i-4-2i\right]$

$=\dfrac{1}{4}\left[x-2-(y-5)i\right]\left[x-2+(y-5)i\right]=\dfrac{1}{4}\left[(x-2)^2-(y-5)^2i^2\right]=\dfrac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right]$.

Từ giả thiết, suy ra $\dfrac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right]=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=100$.

$\Longrightarrow$ tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $c=10$.

Vậy $a+b+c=2+5+10=17$.

Câu 42: Chọn D

Đặt $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $z.\bar{z}+|z-\bar{z}|^2=1 \Leftrightarrow (x+yi)(x-yi)+|x+yi-(x-yi)|^2=1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4y^2=1 \Leftrightarrow x^2+5y^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{5}}=1$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z là elip có $a=1$; $b=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Suy ra diện tích hình phẳng H là $S=\pi ab=\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$.

Câu 43: Chọn A

Đặt $z=x+yi\quad (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $|z-1-i|\le 2\Leftrightarrow |x+yi-1-i|\le 2\Leftrightarrow |(x-1)+(y-1)i|\le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\le 2\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\le 4\quad (1)$

$\Rightarrow$ Tập hợp số phức cần tìm là hình tròn tâm $I(1;1),R_1=2$

Mặt khác $|z+2+3i|=m\Leftrightarrow |(x+2)+(y+3)i|=m$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}=m\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=m^2\quad (2)$

$\Rightarrow$ Tập hợp số phức cần tìm là đường tròn tâm $J(-2;-3),R_2=m$

Do đó để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn và khi

$\left[\begin{array}{l} IJ=|R_1+R_2| \\ IJ=|R_1-R_2| \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |m+2|=\sqrt{13} \\ |m-2|=\sqrt{13} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2\pm\sqrt{13} \\ m=2\pm\sqrt{13} \end{array}\right.$

Vì $m>0$ nên $m=\sqrt{13}\pm 2$.

Câu 44: Chọn C

Ta có $w=\dfrac{1+iz}{4+z}\Leftrightarrow w(4+z)=1+iz\Leftrightarrow z(w-i)=1-4w\Rightarrow |z||w-1|=|1-4w|$.

Đặt $|z|=r(r\ge 0),\mathrm{w}=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$r\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(1-4x)^2+16y^2}\Leftrightarrow r^2\left(x^2+(y-1)^2\right)=(1-4x)^2+16y^2$

$\Leftrightarrow (16-r^2)z^2+(16-r^2)y^2-8x+2x^2y+1-r^2=0(*)$

Vì tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường thẳng nên $(*)$ phải là phương trình bậc nhất đối với $x,y\Leftrightarrow 16-r^2=0\Rightarrow r=4$.

Câu 45: Chọn C

Gọi $\mathrm{w}=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $w=2z-1-3i\Leftrightarrow w-3+3i=2(z-2)\Rightarrow |w-3+3i|=2|z-2|\Leftrightarrow |w-3+3i|=8.$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}=8\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2=64\Rightarrow I(3;-3),R=8.$ Vậy $I(3;-3),R=8.$.

Câu 46: Chọn D

Gọi điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $\mathrm{w}=x+yi,(x,y\in R)$.

$\Rightarrow x+yi=2\bar{z}-2+3i\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y-3}{2}i$.

Khi đó $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=\left(\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y-3}{2}i-2+i\right)\left(\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{y-3}{2}i-2-i\right)$

$=\frac{1}{4}\left[x+2-(y-3)i-4+2i\right]\left[x+2+(y-3)i-4-2i\right]$

$=\frac{1}{4}\left[x-2-(y-5)i\right]\left[x-2+(y-5)i\right]=\frac{1}{4}\left[(x-2)^2-(y-5)^2 i^2\right]=\frac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right].$

Từ giả thiết, suy ra $\frac{1}{4}\left[(x-2)^2+(y-5)^2\right]=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=100$.

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $c=10$. Vậy $a+b+c=2+5+10=17$.

Câu 47: Chọn D

Do z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+73=0$.

Suy ra $\begin{cases} z_1+z_2=6 \\ z_1.z_2=73 \end{cases}$. Ta có:

$$z_1^2+z_2^2-|z_1|.|z_2|=(z_1+z_2)^2-2z_1.z_2-|z_1|.|z_2|$$
$$=(z_1+z_2)^2-2z_1.z_2-|z_1.z_2|=36-2.73-|73|=-183.$$

Câu 48: Chọn C

Trường hợp 1: Nếu các nghiệm của phương trình là các số thực $x;y$ thì

$|z_1-3+3i|=|(x-3)+3i|=\sqrt{(x-3)^2+9}>\sqrt{2}$ mâu thuẫn với giả thiết.

Trường hợp 2: Các nghiệm phức của phương trình không là các số thực, khi đó với $z_1=x+yi \Rightarrow z_2=\overline{z_1}=x-yi$.

Khi đó giả thiết môđun tương đương với $|z_1-3+3i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2=2 \quad (1)$. Và $(z_1+2i)(z_2-2)=\left[x+(y+2)i\right].\left[(x-2)-yi\right]=x.(x-2)+y.(y+2)+\left[(x-2).(y+2)-xy\right].i$ là một số thuần ảo khi và chỉ khi phần thực bằng 0 tức

$x.(x-2)+y.(y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y=0 \quad (2)$.

Giải hệ gồm (1) và (2): $\begin{cases} (x-3)^2+(y+3)^2=2 \\ x^2+y^2-2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow z_1=2-2\mathrm{i}\,;\ z_2=2+2\mathrm{i}$.

Vì vậy theo Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-b=(2-2\mathrm{i})+(2+2\mathrm{i})=4 \\ z_1.z_2=c=(2-2\mathrm{i}).(2+2\mathrm{i})=8 \end{cases} \Rightarrow b+c=-4+8=4$.

Câu 49: Chọn C

Đặt

$z=x+yi \Rightarrow (z-6)(8+\overline{z}i)=(x-6+yi)(8-y-xi)=(x-6)(8-y)+xy+\left(-x(x-6)+y(8-y)\right)i$

là một số thực khi và chỉ khi phần ảo bằng 0 tức:

$-x(x-6)+y(8-y)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-8y=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25 \Leftrightarrow |z-3-4i|=5$.

Đặt ẩn phụ cho đơn giản: $u=z-3-4i \Rightarrow \begin{cases} |u_1|=|u_2|=5 \\ |z_1-z_2|=|(u_1+3+4i)-(u_2+3+4i)|=|u_1-u_2|=4 \end{cases}$

Khi đó $\left|z_1+3z_2\right|=\left|\left(u_1+3+4i\right)+3\left(u_2+3+4i\right)\right|=\left|u_1+3u_2+4\left(3+4i\right)\right|$

Gọi $A\left(u_1\right),B\left(u_2\right)$ khi đó $\left|u_1\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|=5,\left|u_2\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=5$ và

$\left|u_1-u_2\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2\right|=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=25+25-2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=16\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=17$.

Vì vậy

$\left|u_1+3u_2\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=\overrightarrow{OA}^2+9\overrightarrow{OB}^2+6\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=25+9.25+6.17=352\Rightarrow\left|u_1+3u_2\right|=4\sqrt{22}$.

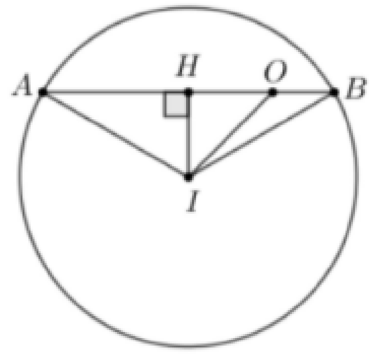
Dùng bất đẳng thức môđun $|a+b|\ge|a|-|b|$ có:

$\left|u_1+3u_2+4\left(3+4i\right)\right|\ge\left|4\left(3+4i\right)\right|-\left|u_1+3u_2\right|=20-4\sqrt{22}$.

Câu 50: Chọn D

Ta có: $\left|z+1+i\right|=2\Leftrightarrow\left|z-\left(-1-i\right)\right|=2\Rightarrow M\left(z\right)$ thuộc đường tròn có tâm $I\left(-1;-1\right),R=2$

Và gọi $A\left(z_1\right),B\left(z_2\right)\Rightarrow\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\left|z_1-z_2\right|\Leftrightarrow OA+OB=AB\Leftrightarrow O$ thuộc đoạn AB



Khi đó $P^2=\left|z_1-2z_2\right|^2=\left(\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right)^2=\overrightarrow{OA}^2+4\overrightarrow{OB}^2-4.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA^2+4OB^2+4OA.OB.$

Mặt khác $OA.OB=\left(HA+OH\right)\left(HB-OH\right)=\left(HA+OH\right)\left(HA-OH\right)=HA^2-OH^2$

$=HA^2-\left(OI^2-IH^2\right)=\left(HA^2+IH^2\right)-OI^2=IA^2-OI^2=R^2-OI^2=4-2=2$

Do đó: $P^2=OA^2+4OB^2+8\ge2\sqrt{OA^2.4OB^2}+8=16$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}OA^2=4OB^2\\OA.OB=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}OA=2\\OB=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|z_1\right|=2\\\left|z_2\right|=1\end{cases}$

Đặt $z_1=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\begin{cases}\left|z_1+1+i\right|=2\\\left|z_1\right|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2=4\\x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-1\\x^2+y^2=4\end{cases}$

Suy ra $xy=\dfrac{\left(x+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)}{2}=\dfrac{\left(-1\right)^2-4}{2}=-\dfrac{3}{2}$

Chọn đáp án D

Câu 51: Chọn C

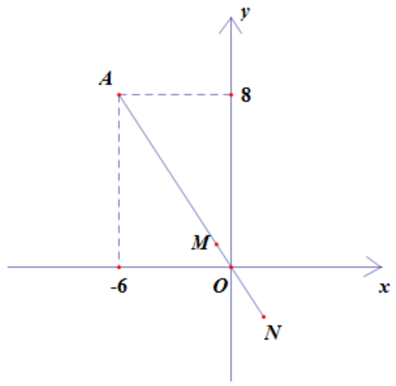
Gọi $A\left(-6;8\right),M\left(z_1\right),N\left(z_2\right)$, theo giả thiết $\left|z_1-z_2\right|=5\Leftrightarrow MN=5$ và

$\left|z_2+6-8i\right|-\left|z_1+6-8i\right|=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\Leftrightarrow\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\left|z_2+6-8i\right|-\left|-z_1+-6+8i\right|\le\left|z_1-z_2\right|=5$ mà

$\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\ge\left|z_1-z_2\right|=5$ nên

$|z_2+6-8i|-|z_1+6-8i|=|z_1|+|z_2|=|z_1-z_2|=5 \Leftrightarrow AN-AM=MN=OM+ON=5$

Như vậy A,M,O,N phải là bốn điểm thẳng hàng và có vị trí như hình vẽ



Đường thẳng OA có phương trình $y=-\frac{4}{3}x$ mà $N\in OA \Rightarrow N\left(x;-\frac{4}{3}x\right)$;

$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{OA}=(-3;4) \Rightarrow M\left(x-3;-\frac{4}{3}x+4\right)$. Ta có $\begin{cases} x_M \le x_O \\ x_N \ge x_O \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 3$.

Khi đó: $|z_1+2z_2-3i|=\sqrt{(x-3+2x)^2+\left(-\frac{4}{3}x+4-\frac{8}{3}x-3\right)^2}=\sqrt{(3x-3)^2+(-4x+1)^2}$

$=\sqrt{25x^2-26x+10}\le \max\limits_{[0;3]}\sqrt{25x^2-26x+10}=\sqrt{157}$.

Câu 52: Chọn D

Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$ và M là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có $|z-2|^2+|z-2i|^2=6 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=6 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;1)$ bán kính $R=1$.

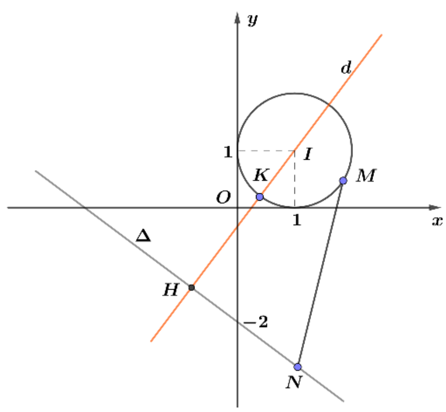
Gọi $w=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và N là điểm biểu diễn số phức w.

Ta có $|w-3-2i|=|w+3+6i| \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(b+6)^2} \Leftrightarrow 3a+4b+8=0$.

Suy ra N thuộc đường thẳng $\Delta: 3x+4y+8=0$.

Gọi d đi qua I và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y+8=0$, suy ra $d: 4x-3y-1=0$.

Gọi $H=d\cap\Delta \Rightarrow H\left(-\frac{4}{5};-\frac{7}{5}\right) \Rightarrow IH=3$.



Gọi K là giao điểm của đoạn IH và (C). Ta có $IH = 3; IK = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IH} \Rightarrow K\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Mặt khác, ta có $|z-w| = MN$.

Vì M thay đổi thuộc đường tròn (C) và N thay đổi thuộc đường thẳng Δ nên suy ra $MN \geq KH$.

Do đó $|z-w|_{\min} = HK = 2$ khi $M \equiv K, N \equiv H$, suy ra $M\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Vậy $|z| = OM = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 53: Chọn C

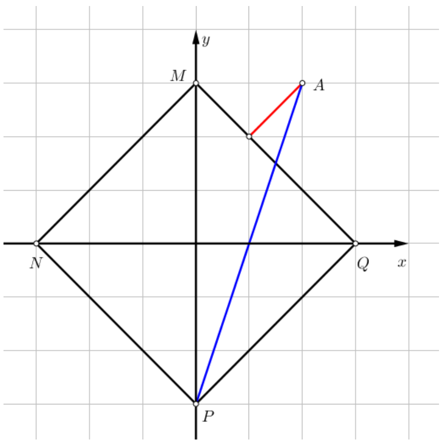
Đặt $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$. Khi đó ta có:

$|z+\bar{z}| + |z-\bar{z}| = 6 \Leftrightarrow |a+bi+a-bi| + |a+bi-a+bi| = 6 \Leftrightarrow 2|a| + 2|b| = 6 \Leftrightarrow |a|+|b| = 3$.

$P = |z-2-3i| = \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2}$.

Gọi $I(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z và $A(2;3)$. Ta cần tìm max và min của IA.

Với I là điểm thuộc cạnh của hình vuông có 4 đỉnh là $(-3;0)$, $(3;0)$, $(0;-3)$ và $(0;3)$.



Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy

$IA_{\min} = d(A, MQ)$, phương trình $MQ: x+y-3=0$ nên $IA_{\min} = \frac{|2+3-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = m$.

$IA_{\max} = AP = \sqrt{(2-0)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{10} = M$.

Do đó $M + m = \sqrt{2} + 2\sqrt{10}$.

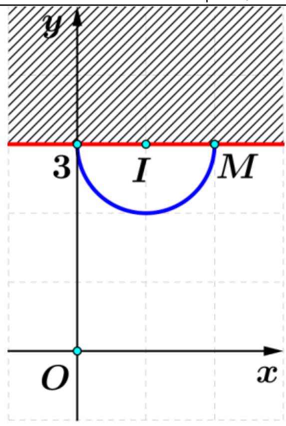
Câu 54: Chọn B

Đặt $u = z-2 \Leftrightarrow z = u+2$

Ta có $\begin{cases} |z-2i| \leq |z-4i| \\ |z-3-3i| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u+2-2i| \leq |u+2-4i| \\ |u-1-3i| = 1 \end{cases}$, với $u = x+yi; x,y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ tập hợp các điểm M biểu diễn số phức u chính là giao giữa nửa đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R = 1$ với là đường thẳng $y = 3$ thì $P_{\max}$



Dựa vào hình vẽ, ta có $M(2;3), P_{\max} = \sqrt{13}$.

Câu 55: Chọn C

Gọi điểm biểu diễn của w là K thì từ $|w-4-3i|=2$ ta có K thuộc đường tròn tâm $J(4;3)$, bán kính $R=2$.

Gọi $A(x;y)$, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của z, z^2, z^3, khi đó $|z-w| = AK$.

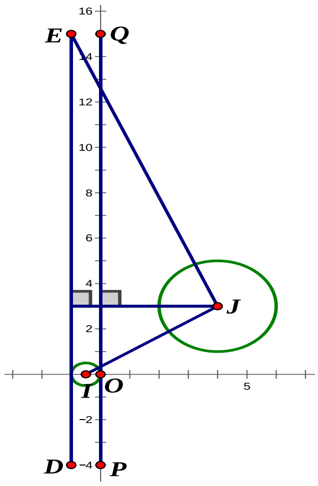
Ta có $AB = |z^2 - z| = |z||z-1|$, $AC = |z^3 - z| = |z||z^2-1|$, $BC = |z^3 - z^2| = |z|^2|z-1|$

Từ đề ta có tam giác ABC vuông nên $\left[\begin{array}{l} AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ AB^2 + BC^2 = AC^2 \\ AC^2 + BC^2 = AB^2 \end{array}\right.$ và $|z| \neq 0, |z| \neq 1$

Trường hợp 1: $B^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 1 + |z+1|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow 1 + (x+1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x = -1$.

Do $-4 \le y \le 15$ nên A thuộc đoạn DE với $D(-1;-4), E(-1;15)$.

Khi đó $M_1 = \max AK = JE + R = 15$, $m_1 = \min AK = d(J, DE) - R = 3$.



Trường hợp 2: $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 1 + |z|^2 = |z+1|^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x = 0$.

Do $-4 \le y \le 15$ nên A thuộc đoạn PQ với $P(0;-4), Q(0;15)$.

Khi đó $M_2 = \max AK = JQ + R = 4\sqrt{10} + 2$, $m_1 = \min AK = d(J, \text{PQ}) = 2$.

Trường hợp 3: $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow |z+1|^2 + |z|^2 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. Suy ra A thuộc đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$, bán kính $R_1=\frac{1}{2}$ và bỏ các điểm $(-1;0),(0;0)$

Khi đó $M_3=\max AK=IJ+R+R_1=\frac{3\sqrt{13}+5}{2}$, $m_3=\min AK=IJ-R-R_1=\frac{3\sqrt{13}-5}{2}$.

Vậy $m=\min\{m_1,m_2,m_3\}=\min\left\{3;2;\frac{3\sqrt{13}-5}{2}\right\}=2$

$M=\max\{M_1;M_2;M_3\}=\max\left\{15;\sqrt{10}+2;\frac{3\sqrt{13}+5}{2}\right\}=15$.

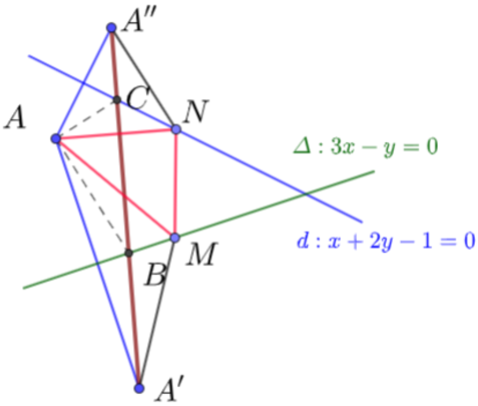
Suy ra $m+M^2=227$.

Chú ý: Nếu vẽ được chính xác hình vẽ thì có thể suy ra ngay $M=JE=15, m=d(I,PQ)-R=2$.

Câu 56: Chọn B

Gọi $z=x+iy,(x,y\in\mathbb{R})$, $w=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$; M,N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z,w. Khi đó, $M\in\Delta:x-3y=0; N\in d:x+2y-1=0$ vì

$|z-1-2i|=|z-2+i|\Leftrightarrow x-3y=0$ và $|w-2+3i|=|w-4-i|\Leftrightarrow a+2b-1=0$.



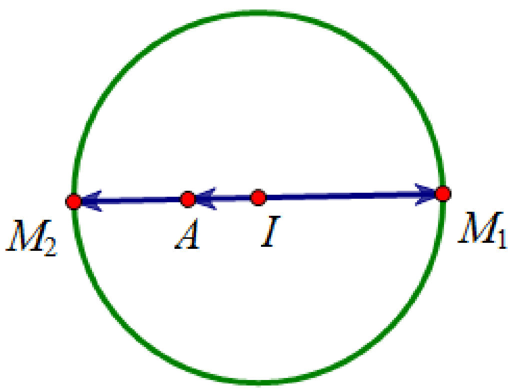
Ta có $T=|z+3-i|+|w+3-i|+|z-w|=AM+AN+MN$ với $A(-3;1)$.

Gọi $A'=Đ_\Delta(A)=(-1,8;-2,6)$ và $A''=Đ_d(A)=(-2,2;2,6)$, thì

$T=AM+AN+MN=A'M+A''N+MN\ge A'A''=\frac{2}{5}\sqrt{170}=\frac{2}{5}\sqrt{2\times5\times17}=\frac{2}{5}\sqrt{abc}$.

Vậy $a+b+c=2+5+17=24$.

Câu 57: Chọn D



Ta có $\left|\frac{z}{3-4i}+1-i\right|=1 \Leftrightarrow |z-1-7i|=5$. Điều này có nghĩa tập hợp các điểm biểu diễn cho các số thức $z=x+iy$ là đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-7)^2=25$ có tâm $I(1;7)$ và bán kính $R=5$.

$P=|z-3-8i|=MA$ là khoảng cách giữa M và $A(3;8)$. Ta có $AI=\sqrt{5}$ và $\overrightarrow{IA}=(2;1)$.

Ta có $\left||z-1-7i|-|-2-i|\right| \le P \le |z-1-7i|+|-2-i| \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}$.

$$P_{\max}=M_1A=5+\sqrt{5}=M_1I+IA \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \in (C) \\ \overrightarrow{AM_1}=(\sqrt{5}+1)\overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow M_1\left(1-2\sqrt{5};7-\sqrt{5}\right)$$

$$P_{\min}=AM_2=5-\sqrt{5}=IM_2-IA \Leftrightarrow \begin{cases} M_2 \in (C) \\ \overrightarrow{AM_2}=(\sqrt{5}-1)\overrightarrow{IA} \end{cases} \Leftrightarrow M_2\left(1+2\sqrt{5};7+\sqrt{5}\right)$$

Vậy $x_1+x_2+y_1y_2=\left(1-2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}\right)+\left(7-\sqrt{5}\right)\left(7+\sqrt{5}\right)=2+44=46$.

Câu 58: Chọn A

Gọi M,M_1,M_2 lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $\sqrt{5}z,z_1$ và z_2.

Ta có $|z-i|=|z+1| \Leftrightarrow \left|\sqrt{5}z-\sqrt{5}i\right|=\left|\sqrt{5}z+\sqrt{5}\right| \Leftrightarrow MA=MB$ với $A\left(0;\sqrt{5}\right)$ và $B\left(-\sqrt{5};0\right)$.

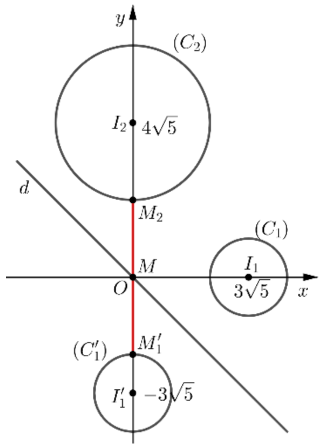
$\Leftrightarrow M \in d$ với d là đường trung trực của AB.

d qua $I\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ là trung điểm AB và nhận $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{5};-\sqrt{5}\right)$ làm VTPT $\Rightarrow d:x+y=0$.

$\left|z_1-3\sqrt{5}\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow M_1 \in (C_1)$ với (C_1) là đường tròn tâm $I_1\left(3\sqrt{5};0\right)$, bán kính $R_1=\sqrt{5}$.

$\left|z_2-4\sqrt{5}i\right|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow M_1 \in (C_2)$ với (C_2) là đường tròn tâm $I_2\left(0;4\sqrt{5}\right)$, bán kính $R_2=2\sqrt{5}$.

Khi đó $T=\left|\sqrt{5}z-z_1\right|+\left|\sqrt{5}z-z_2\right|=MM_1+MM_2$.



Lấy đối xứng M_1 qua d, ta được $M_1' \in (C_1')$ với (C_1') là đường tròn tâm $I_1'\left(0;-3\sqrt{5}\right)$, bán kính $R_1'=\sqrt{5}$.

Khi đó $MM_1'+MM_2 \ge M_1'M_2 \ge \left|I_1'I_2-R_1'-R_2\right|=4\sqrt{5}$.

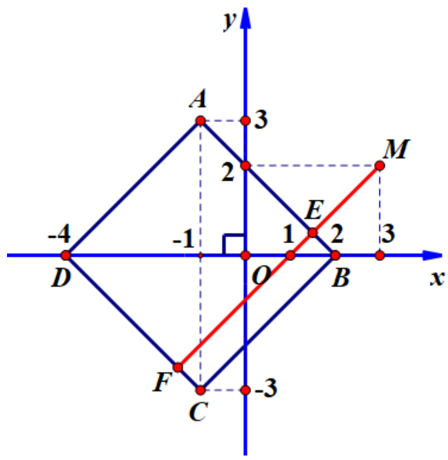
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O(0;0), M_2\left(0;2\sqrt{5}\right), M_1\left(2\sqrt{5};0\right)$.

Hay $z=0, z_2=2\sqrt{5}i, z_1=2\sqrt{5}$.

Câu 59: Chọn A

Giả sử $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ khi đó ta có $z+\bar{z}=2x$ và $z-\bar{z}=2y$ do đó từ giả thiết bài toán ta được $|z+\bar{z}+2|+|z-\bar{z}|=6\Leftrightarrow|2x+2|+|2y|=6\Leftrightarrow|x+1|+|y|=3$.

Từ đây ta có bốn trường hợp sau $(I):\begin{cases}x\ge -1, y\ge 0\\ x+y=2\end{cases}$ $(II):\begin{cases}x\le -1, y\le 0\\ x+y=-4\end{cases}$ $(III):\begin{cases}x\ge -1, y\le 0\\ x-y=2\end{cases}$ và $(IV):\begin{cases}x\le -1, y\ge 0\\ x-y=-4\end{cases}$. Hình biểu diễn của (I) là đoạn AB, của (II) là đoạn CD, của (III) là đoạn BC và của (IV) là đoạn AD. Với $ABCD$ là hình vuông như hình vẽ.

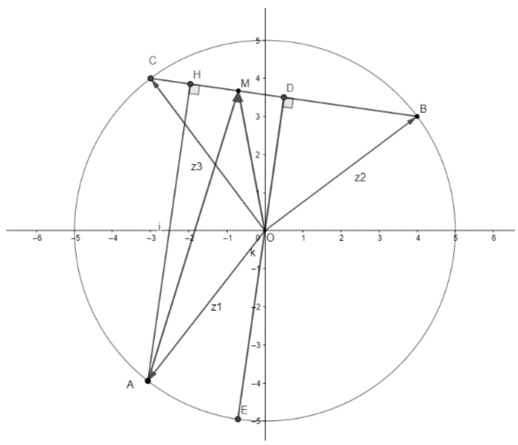


Đặt $M(3;2)$ khi đó $P=|z-3-2i|=MN$ với N là điểm thuộc cạnh của hình vuông $ABCD$.

Dựng đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB cắt AB tại E và cắt CD tại F. Từ hình vẽ ta có $\max P+\min P=ME+MD=d(M,AB)+MD=\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{53}$.

Hay $M+m=\dfrac{2\sqrt{53}+3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 60: Chọn B



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2,z_3 là đường tròn tâm O bán kính $R=5$.

Gọi các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3 lần lượt là A, B, C.

Ta có ΔOBC là tam giác vuông cân tại O và $|z_3-z_2|=BC=5\sqrt{2}$.

Số phức $tz_2 + (1-t)z_3$ được biểu diễn bởi điểm M thuộc đường thẳng BC.

Do đó, ta có $\left|tz_2 + (1-t)z_3 - z_1\right| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right| = AM$.

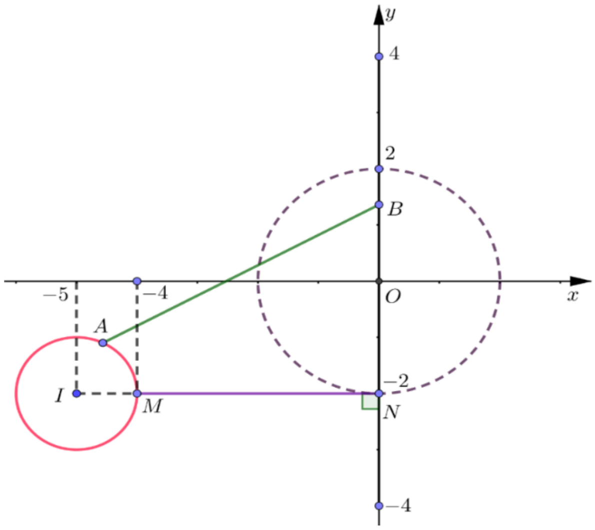
Gọi H là hình chiếu của A lên BC ta có $AM \geq AH$.

$\Rightarrow \min\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|tz_2 + (1-t)z_3 - z_1\right| = \min AM = AH$.

Khi đó $\max\left\{\min\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|tz_2 + (1-t)z_3 - z_1\right|\right\} = \max\{AH\} = ED = R + OD = 5 + \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

Vậy ta có $a = 5, b = 5, c = 2$.

Câu 61: Chọn C



Ta có: $|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |i|\cdot\left|w + \dfrac{-2+5i}{i}\right| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$.

Ta có: $T = \left|z^2 - wz - 4\right| = \left|z^2 - wz - |z|^2\right| = \left|z^2 - wz - z\cdot\overline{z}\right| = |z|\cdot\left|z - \overline{z} - w\right| = 2\left|z - \overline{z} - w\right|$ $(*)$

Đặt $z = a + bi$. Suy ra: $z - \overline{z} = 2bi$. Vì $|z| = 2$ nên $-4 \leq 2b \leq 4$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của w và $2bi$. Suy ra:

+ A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-5;-2)$, bán kính $R = 1$.

+ B thuộc trục Oy và $-4 \leq x_B \leq 4$.

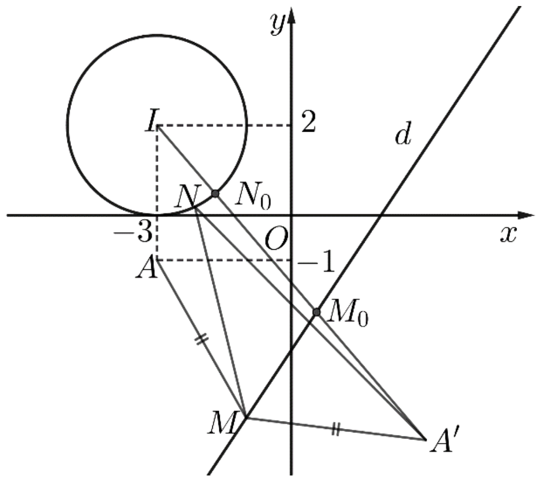
Từ $(*)$ suy ra: $T = 2AB \geq 2MN = 2\cdot 4 = 8$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv M(-4;-2) \Rightarrow w = -4 - 2i$ và

$B \equiv N(0;-2) \Rightarrow 2bi = -2i \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = a - i \Rightarrow a^2 + 1 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \Rightarrow z = \pm\sqrt{3} - i$.

Vậy $\left|z^2 - wz - 4\right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 62: Chọn D



Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ với x_1, y_1 là các số thực.

Từ $|z_1 + 1 - 2i| = |z_1 - 5 + 2i|$ suy ra $\sqrt{(x_1+1)^2 + (y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-5)^2 + (y_1+2)^2}$

$\Leftrightarrow 3x_1 - 2y_1 - 6 = 0$.

Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z_1 trên mặt phẳng phức là đường thẳng $d: 3x - 2y - 6 = 0$.

Do $|z_2 + 3 - 2i| = 2$ nên tập hợp các điểm N biểu diễn cho số phức z_2 là đường tròn (C) tâm $I(-3;2)$, bán kính $R = 2$.

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + 3 + i| + |z_1 - z_2| = AM + MN$ trong đó điểm $A(-3;-1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d, ta tìm được $A'(3;-5)$.

Có $P = AM + MN = A'M + MN \geq A'N \geq A'N_0 = A'I - IN_0 = A'I - R$ với N_0 là một trong hai giao điểm của $A'I$ với đường tròn (C), N_0 ở giữa I và A'. Khi đó, M_0 là giao điểm của $A'I$ và d.

Vậy biểu thức $P = AM + MN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $A'I - R$ và bằng $\sqrt{85} - 2$.

Cách 2:

$P = |z_1 + 3 + i| + |z_1 - z_2| = |z_1 + 3 + i| + |z_1 + 3 - 2i - (z_2 + 3 - 2i)|$.

$P \geq |z_1 + 3 + i| + |z_1 + 3 - 2i| - |z_2 + 3 - 2i|$.

$P \geq |z_1 + 3 + i| + |z_1 + 3 - 2i| - 2$.

Đặt $z_1 = x_1 + y_1 i$ với x_1, y_1 là các số thực.

Từ $|z_1 + 1 - 2i| = |z_1 - 5 + 2i|$ suy ra $\sqrt{(x_1+1)^2 + (y_1-2)^2} = \sqrt{(x_1-5)^2 + (y_1+2)^2}$

$\Leftrightarrow 3x_1 - 2y_1 - 6 = 0$.

$P \geq \sqrt{(x_1+3)^2 + (y_1+1)^2} + \sqrt{(x_1+3)^2 + (y_1-2)^2} - 2$.

Thay $y_1 = \dfrac{3x_1 - 6}{2}$ ta có $P \geq \sqrt{\dfrac{13}{4}x_1^2 + 13} + \sqrt{\dfrac{13}{4}x_1^2 - 9x_1 + 34} - 2$

$$P \ge \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}x_1\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{2}x_1\right)^2 + \left(\frac{19}{\sqrt{13}}\right)^2} - 2$$

$$P \ge \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}x_1 + \frac{9}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{13}}{2}x_1\right)^2 + \left(\sqrt{13} + \frac{19}{\sqrt{13}}\right)^2} - 2 = \sqrt{85} - 2.$$

$$P_{\min} = \sqrt{85} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\sqrt{13}}{2}x_1}{\dfrac{9}{\sqrt{13}} - \dfrac{\sqrt{13}}{2}x_1} = \dfrac{\sqrt{13}}{\dfrac{19}{\sqrt{13}}} \\ \dfrac{x_2+3}{x_1+3} = \dfrac{y_2-2}{y_1-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{16}; y_1 = \dfrac{-69}{32} \\ \dfrac{x_2+3}{\dfrac{57}{16}} = \dfrac{y_2-2}{\dfrac{-133}{32}} \end{cases} (*)$$

Từ suy ra: $\dfrac{x_2+3}{3} = \dfrac{y_2-2}{-\dfrac{7}{2}} = t > 0 \Rightarrow x_2 + 3 = 3t; y_2 - 2 = \dfrac{-7}{2}t.$

Có $\sqrt{(x_2+3)^2 + (y_2-2)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9t^2 + \dfrac{49}{4}t^2} = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{\sqrt{85}}$ do $t > 0.$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{-255 + 12\sqrt{85}}{85};\ y_2 = \dfrac{170 - 14\sqrt{85}}{85}.$

Câu 63: Chọn A

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z, w trên mặt phẳng phức.

Đặt $z = a + bi$ và $w = x + yi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $\max\{|z|; |z-1-i|\} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \le 1 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 \le 1 \end{cases}.$

Do đó M nằm trong miền giao của hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính 1 và hình tròn tâm $I(1;1)$, bán kính 1.

Ta có $|w+1+2i| \le |w-2-i| \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 \le (x-2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x + y \le 0$.

Do đó N nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $y = -x$ và chứa điểm $(-1;-1)$.

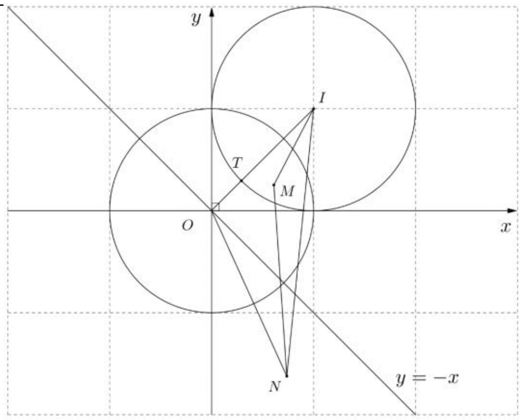
Gọi T là giao điểm của IO và đường tròn tâm I, bán kính 1.

Ta thấy $IM \le IT < IO \le IN$.

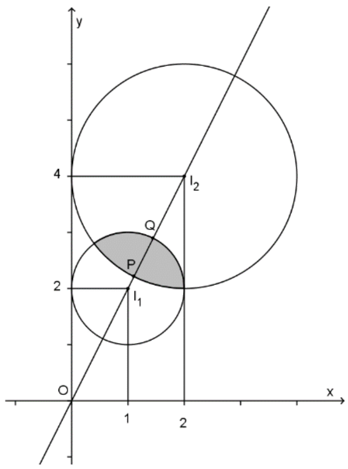
Theo bất đẳng thức tam giác $|z - w| = MN \ge IN - IM \ge IO - IT = \sqrt{2} - 1$.

Đẳng thức xảy ra khi M trùng T, N trùng O.

Vậy $\min|z - w| = \sqrt{2} - 1$.



Câu 64: Chọn A



Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ trên mặt phẳng phức.

Ta có: $\begin{cases} |z-1-2i| \le 1 \\ |z-1-2i| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 1 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 \le 4 \end{cases}$

Do đó M thuộc phần chung của hai hình tròn $(I_1;1)$ và $(I_2;2)$, với $I_1(1;2)$ và $I_2(2;4)$.

Phương trình đường thẳng I_1I_2 là $y = 2x$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $|z|$ lớn nhất khi $M \equiv Q$ và $|z|$ nhỏ nhất khi $M \equiv P$, trong đó P; Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ với các đường tròn $(I_2;2)$ và $(I_1;1)$ sao cho P; Q nằm giữa I_1 và I_2.

Dễ thấy $P\left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}; 4 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$; $Q\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}; 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Vậy $S = \min|z| + \max|z| = OP + OQ = 3\sqrt{5} - 1$.

CHƯƠNG 5

TỔ HỢP – XÁC SUẤT

CHỦ ĐỀ 11 CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT NÂNG CAO

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Xác suất của biến cố (định nghĩa cổ điển)

- Giả sử phép thử *T* có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của *T* là đồng khả năng. Nếu *A* là một biến cố liên quan với phép thử *T* và Ω_A là một tập hợp các kết quả thuận lợi cho *A* thì xác suất của *A* là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức: $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.
- Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta có các bước để tính xác suất của một biến cố như sau:

  Bước 1: Xác định không gian mẫu Ω rồi tính số phần tử của Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử *T*.

  Bước 2: Xác định tập con *A* mô tả biến cố *A* rồi tính số phần tử của *A*, tức là đếm số kết quả thuận loại cho *A*.

  Bước 3: Lấy kết quả của bước 2 chia cho bước 1.
- **Nhận xét:** Việc tính số kết quả có thể (bước 1) thường dễ dàng hơn nhiều so với việc tính số kết quả thuận lợi cho *A* (bước 1). Để giải quyết tốt các bài toàn xác suất ta cần nắm chắc phần tổ hợp trước.
- **Chú ý 1:**

  Từ định nghĩa, suy ra $0\le P(A)\le 1, P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$.

  Các kí hiệu $n(\Omega);n(A)$ được hiểu tương đương với $|\Omega|;|\Omega_A|$ là số phần tử của không gian mẫu và của tập hợp thuận lợi cho biến cố *A*.

2. Các quy tắc tính xác suất

- **Quy tắc cộng** (áp dụng cho các biến cố xung khắc)

  Nếu hai biến cố *A*, *B* xung khắc nhau thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

  Nếu các biến cố $A_1,A_2,A_3,...A_n$ xung khắc nhau thì:

  $$P(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$
- **Quy tắc nhân** (áp dụng cho các biến cố độc lập)

  Nếu *A* và *B* là hai biến cố độc lập thì $P(AB)=P(A).P(B)$

  Nếu có *n* biến cố $A_1,A_2,A_3,...A_n$ là độc lập thì $P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1).P(A_2)...P(A_n)$.

- **Chú ý 2:**

Nếu *A* và *B* độc lập thì *A* và $\overline{B}$ độc lập, *B* và $\overline{A}$ độc lập, $\overline{B}$ và $\overline{A}$ độc lập.

Do đó nếu *A* và *B* độc lập thì ta còn có các đẳng thức: $P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right).P\left(\overline{B}\right)$

$$P\left(\overline{A}B\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(B\right)$$

$$P\left(\overline{AB}\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{B}\right)$$

3. Xác suất của biến cố đối

- Xác suất của biến cố $\overline{A}$ của biến cố A được tính bởi $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

CÂU 1. Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam vào 12 ghế thành một hàng ngang. Tính xác suất để không có bất kỳ hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau

A. $\frac{7}{99}$. **B.** $\frac{1}{132}$. **C.** $\frac{7}{264}$. **D.** $\frac{7}{11880}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Xếp 12 học sinh vào 12 ghế có $12!$ cách xếp ta có số phần tử của không gian mẫu là $12!\Rightarrow n\left(\Omega\right)=12!$

Gọi A là biến cố "Xếp 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam vào 12 ghế không có bất kì hai học sinh nam nào ngồi cạnh nhau"

Xếp 7 học sinh nữ có $7!$ cách xếp

Xếp 5 học sinh nam vào 8 vị trí gồm 2 vị trí đầu cuối và 6 vị trí giữa các học sinh nữ

Chọn 5 vị trí từ 8 vị trí là $8C5$

$\Rightarrow$ Số cách xếp 5 nam là $8C5.5!$

$$\Rightarrow n\left(A\right)=7!.8C5.5!\Rightarrow p\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\frac{7!8C5.5!}{12!}=\frac{7}{99}$$

CÂU 2. Có 3 quyển sách Văn học khác nhau, 4 quyển sách Toán học khác nhau và 7 quyển sách Tiếng anh khác nhau được xếp lên một kệ ngang. Tính xác suất để hai cuốn sách cùng môn không ở cạnh nhau.

A. $\frac{5}{8008}$. **B.** $\frac{19}{12012}$. **C.** $\frac{19}{1202}$. **D.** $\frac{19}{1012}$.

LỜI GIẢI

Chọn B

Xếp 7 quyển sách Tiếng anh thành một hàng ngang có $7!$ cách xếp.

Khi đó có 6 khoảng trống giữa 7 quyển sách trên.

Xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Giữa mỗi khoảng trống xếp đúng 1 quyển sách Văn hoặc Toán.

Chọn 6 quyển sách Văn hoặc Toán xếp vào 6 khoảng trống thì có A_7^6 cách.

Xếp quyển sách còn lại vào một trong hai đầu của hàng sách đã xếp thì có 2 cách.

Vậy trường hợp này có $7!.A_7^6.2$ cách.

Trường hợp 2: Có đúng một khoảng trống xếp 1 quyển Văn và 1 quyển Toán cạnh nhau, những khoảng trống còn lại xếp đúng một quyển Văn hoặc Toán.

Chọn một quyển Văn và một quyển Toán thì có 3.4 cách.

Xếp hai quyển sách đã chọn theo một thứ tự nào đó thì có 2 cách.

Xếp hai quyển sách trên vào một trong 6 khoảng trống thì có 6 cách.

Xếp 5 quyển sách còn lại vào 5 khoảng trống còn lại thì có $5!$ cách.

Vậy trường hợp này có $7!.3.4.2.6.5!$ cách.

Suy ra số cách xếp thỏa mãn đề bài là: $7!.A_7^6.2+7!.3.4.2.6.5!$ cách.

Xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{7!.A_7^6.2 + 7!.3.4.2.6.5!}{14!} = \dfrac{19}{12012}$.

CÂU 3. Gọi T là tập hợp gồm các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau. Lấy từ T ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để lấy được một số chẵn chứa các chữ số 2, 3, 4 sao cho chữ số 2 đứng trước chữ số 3 và chữ số 3 đứng trước chữ số 4.

A. $\dfrac{65}{1944}$. **B.** $\dfrac{40}{1701}$. **C.** $\dfrac{25}{1512}$. **D.** $\dfrac{50}{1701}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Gọi số có 7 chữ số đôi một khác nhau là a, $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_5a_7}$, $a_1 \neq 0$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.A_9^6 = 544320$.

Gọi A là biến số cần tính xác suất.

Ta có $a_7 \in \{0;4;6;8\}$.

Trường hợp 1: $a_7 = 0$

Xếp các chữ số 2, 3, 4 vào số a có C_6^3 cách, xếp 3 chữ số còn lại của số a có A_6^3 cách.

Vậy trường hợp 1 có $C_6^3.A_6^3 = 2400$ số.

Trường hợp 2: $a_7 = 4$

Nếu $a_1 = 2$ thì có 5 cách xếp chữ số 3, các chữ số còn lại có A_7^4 cách.

Nếu $a_1 \neq 2$ thì a_1 có 6 cách chọn $\left(a_1 \notin \{0;2;3;4\}\right)$, xếp các chữ số 2, 3 có C_5^2 cách, các chữ số còn lại có A_6^3 cách.

Vậy trường hợp 2 có $5.A_7^4 + 6.C_5^2.A_6^3 = 11400$ số.

Trường hợp 3: $a_7 \in \{6;8\}$

a_7 có 2 cách chọn.

Nếu $a_1 = 2$ thì có C_5^2 cách xếp các chữ số 3, 4, các chữ số còn lại có A_6^3 cách.

Nếu $a_1 \neq 2$ thì a_1 có 5 cách chọn $\left(a_1 \notin \{0;2;3;4;a_7\}\right)$, xếp các chữ số 2, 3, 4 có C_5^3 cách, các chữ số còn lại có A_5^2 cách.

Vậy trường hợp 3 có $2\left(C_5^2.A_6^3 + 5.C_5^3.A_5^2\right) = 4400$ số.

Do đó $n(A) = 2400 + 11400 + 4400 = 18200$. Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{18200}{544320} = \dfrac{65}{1944}$.

CÂU 4. Thầy giáo có 30 câu hỏi trắc nghiệm khách quan. Trong đó có 12 câu hỏi mức nhận biết, 8 câu hỏi mức thông hiểu, 6 câu hỏi mức vận dụng và 4 câu hỏi mức vận dụng cao. Thầy giáo muốn tạo đề kiểm tra 15 phút gồm 10 câu hỏi được chọn từ 30 câu hỏi nói trên. Tính xác suất để học sinh chọn được một đề kiểm tra có đủ bốn mức độ với 4 câu nhận biết và không quá 2 câu vận dụng cao.

A. $\dfrac{6561720}{30045015}$. **B.** $\dfrac{4}{60697}$. **C.** $\dfrac{6}{60697}$. **D.** $\dfrac{88}{667}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Ta có: $n\left(\Omega\right) = C_{30}^{10} = 30045015$

Gọi A là biến cố chọn được đề thỏa yêu cầu. Khi đó xảy ra các khả năng sau:

Trường hợp 1: Chọn được đề có một câu vận dụng cao, số cách chọn là

$C_{12}^4.C_4^1.\left(C_8^4.C_6^1 + C_8^3.C_6^2 + C_8^2.C_6^3 + C_8^1.C_6^4\right) = 3841200$.

Trường hợp 2: Chọn được đề có hai câu vận dụng cao, số cách chọn là.

$C_{12}^4.C_4^2.\left(C_8^3.C_6^1+C_8^2.C_6^2+C_8^1.C_6^3\right)=2720520$.

Suy ra $n\left(A\right)=3841200+2720520=6561720$. Vậy $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{6561720}{30045015}$.

CÂU 5. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số được lấy từ các chữ số $1;2;3;4;5$, trong đó chữ số 3 có mặt đúng ba lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Xác suất để số lấy được chia hết cho 3 là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn A

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

Chọn 3 vị trí để dặt 3 chữ số 3 vào: có C_5^3 cách.

2 vị trí còn lại được lấy từ 4 chữ số còn lại: có A_4^2 cách.

Nên ta có số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=C_5^3.A_4^2=120$.

Để số đó chia hết cho 3 thì $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\,\vdots\,3$

Do chữ số 3 xuất hiện 3 lần nên ta có 4 trường hợp cho 2 chữ số còn lại là $\left(1;5\right);\left(2;4\right);\left(1;2\right);\left(4;5\right)$. Mỗi trường hợp có: $C_5^3.2!=20$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{20.4}{120}=\dfrac{2}{3}$.

CÂU 6. Từ 12 học sinh gồm 5 học sinh giỏi, 4 học sinh khá và 3 học sinh trung bình. Giáo viên muốn thành lập 4 nhóm làm 4 bài tập lớn khác nhau, mỗi nhóm 3 học sinh. Xác suất để nhóm nào cũng có học sinh giỏi và học sinh khá bằng

A. $\dfrac{6}{385}$. **B.** $\dfrac{36}{385}$. **C.** $\dfrac{3}{770}$. **D.** $\dfrac{1}{6160}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Ta có: $n\left(\Omega\right)=C_{12}^3.C_9^3.C_6^3.C_3^3$

Gọi A là biến cố từ 12 học sinh lập 4 nhóm khác nhau, mỗi nhóm 3 học sinh và nhóm nào cũng có học sinh giỏi và học sinh khá

Ta mô tả $n\left(A\right)$ như sau:

Số cách chia 4 học sinh khá cho 4 nhóm, có $4!$ cách.

Số cách chia 5 học sinh giỏi cho 4 nhóm, có $C_5^2.4.3!$ cách (vì 5 học sinh giỏi mà chỉ có 4 nhóm nên sẽ có một nhóm có 2 học sinh giỏi. Vì vậy ta chọn 2 học sinh giỏi trong 5 học sinh giỏi và chọn 1 nhóm trong 4 nhóm cho 2 học sinh giỏi vừa chọn. Còn lại 3 học sinh giỏi sắp xếp vào 3 nhóm còn lại).

Bây giờ đã có một nhóm đủ 4 học sinh. Thế thì 3 học sinh trung bình cho vào 3 nhóm còn lại, có 3! cách. Ta có: $n\left(A\right)=4!\times C_5^2.4.3!\times 3!\Rightarrow P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{36}{385}$

CÂU 7. Một nhóm 10 học sinh gồm 6 nam trong đó có Quang và 4 nữ trong đó có Huyền được xếp ngẫu nhiên vào 10 ghế trên một hàng ngang để dự lễ sơ kết năm học. Xác suất để xếp được giữa 2 bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Quang không ngồi cạnh Huyền là

A. $\dfrac{109}{30240}$. **B.** $\dfrac{1}{280}$. **C.** $\dfrac{1}{5040}$. **D.** $\dfrac{109}{60480}$.

✍ LỜI GIẢI

Chọn B

Ta có: $n(\Omega)=10!$.

Giả sử các ghế được đánh số từ 1 đến 10.

Để có cách xếp sao cho giữa 2 bạn nữ có đúng 2 bạn nam thì các bạn nữ phải ngồi ở các ghế đánh số 1, 4, 7, 10. Có tất cả số cách xếp chỗ ngồi loại này là: $6!.4!$ cách.

Ta tính số cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho Huyền và Quang ngồi cạnh nhau

Nếu Huyền ngồi ở ghế 1 hoặc 10 thì có 1 cách xếp chỗ ngồi cho Quang. Nếu Huyền ngồi ở ghế 4 hoặc 7 thì có 2 cách xếp chỗ ngồi cho Quang.

Do đó, số cách xếp chỗ ngồi cho Quang và Huyền ngồi liền nhau là $2+2.2=6$.

Suy ra, số cách xếp chỗ ngồi cho 10 người sao cho Quang và Huyền ngồi liền nhau là $6.3!.5!$.

Gọi A là biến cố "Giữa 2 bạn nữ gần nhau có đúng 2 bạn nam, đồng thời Quang không ngồi cạnh Huyền".

$n(A)=4!.6!-6.3!.5!=12960 \Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{12960}{10!}=\dfrac{1}{280}$. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{1}{280}$.

CÂU 8. Ban chỉ đạo phòng chống dịch Covid-19 của sở Y tế tỉnh X có 9 người, trong đó có 4 bác sĩ. Chia ngẫu nhiên Ban đó thành ba tổ, mỗi tổ 3 người để đi kiểm tra công tác phòng dịch ở các địa phương. Trong mỗi tổ, chọn ngẫu nhiên

A. $\dfrac{1}{42}$. **B.** $\dfrac{1}{14}$. **C.** $\dfrac{1}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{21}$.

LỜI GIẢI

Chọn D

Chọn 3 người vào nhóm A và có một tổ trưởng: $C_9^3.3$ cách.

Chọn 3 người vào nhóm B và có một tổ trưởng: $C_6^3.3$ cách.

3 người còn lại vào nhóm C và có một tổ trưởng: $C_3^3.3$ cách.

Ta có số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_9^3.3.C_6^3.3.C_3^3.3=45360.$

Gọi M là biến cố thỏa mãn bài toán.

Chọn nhóm có 2 bác sĩ mà có 1 tổ trưởng là bác sĩ: $C_4^2.C_5^1.2$ cách.

Chọn nhóm có 1 bác sĩ và bác sĩ là tổ trưởng có: $C_2^1.C_4^2$ cách.

1 bác sĩ còn lại và 2 người còn lại vào nhóm có 1 cách.

Chọn một trong 3 nhóm A,B,C có 2 bác sĩ có C_3^1 cách.

$\Rightarrow n(M)=C_4^2,C_5^1.2.C_2^1.C_4^2.C_3^1=2160 \Rightarrow P(M)=\dfrac{2160}{45360}=\dfrac{1}{21}$.

CÂU 9. Gọi *A* là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập *A*, tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 11 và chữ số hàng đơn vị bằng 6.

A. $\dfrac{409}{45000}$. **B.** $\dfrac{459}{45000}$. **C.** $\dfrac{817}{90000}$. **D.** $\dfrac{1}{100}$.

LỜI GIẢI

Chọn A

Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $99999-10000+1=90000$

Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 11 và chữ số hàng đơn vị bằng 6 là: $\overline{abcd6}$

Ta có $\overline{abcd6}=10.\overline{abcd}+6=11.\overline{abcd}-\overline{abcd}+6$ chia hết cho 11 khi và chỉ khi $\overline{abcd}-6$ chia hết cho 11.

Đặt $\overline{abcd}-6=11h \Leftrightarrow \overline{abcd}=6+11h$. Khi đó ta được: $\overline{abcd}=11h+6 \Rightarrow 1000\le 11h+6\le 9999$

$\Leftrightarrow \dfrac{994}{11}\le h\le \dfrac{9993}{11} \Leftrightarrow t\in\{91, 92,..., 908\}$ suy ra số cách chọn ra h sao cho số $\overline{abcd6}$ chia hết cho 11 và chữ số hàng đơn vị bằng 6 là 818. Vậy xác suất cần tìm là: $\dfrac{1286}{90000}=\dfrac{409}{45000}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Có 6 học sinh gồm 1 học sinh lớp 10, 2 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh đó thành một hàng ngang. Xác suất để học sinh lớp 10 đứng xen kẽ giữa 2 học sinh lớp 12 bằng

A. $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

Câu 2: Từ 30 câu hỏi trắc nghiệm gồm 15 câu dễ, 9 câu trung bình và 6 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Số đề kiểm tra có thể lập được là:

A. 27730143. **B.** 27731043. **C.** 27737049. **D.** 27730749.

Câu 3: Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X gồm các số tự nhiên bé hơn 10^{10} và có tổng các chữ số bằng 2. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 2000.

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{12}{55}$. **C.** $\frac{16}{45}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 4: Giải bóng chuyền VTV Cup có 16 đội tham gia, trong đó có 12 đôi nước ngoài và 4 đội Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành bốn bảng đấu A, B, C, D mỗi bảng có 4 đội. Tính xác suất để 4 đội Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau.

A. $\frac{391}{455}$. **B.** $\frac{8}{1365}$. **C.** $\frac{32}{1365}$. **D.** $\frac{64}{455}$.

Câu 5: Có 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Rút ngẫu nhiên cùng một lúc 3 tấm thẻ. Tính xác suất sao cho bất kì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị.

A. $\frac{17}{25}$. **B.** $\frac{27}{52}$. **C.** $\frac{1771}{2600}$. **D.** $\frac{253}{325}$.

Câu 6: Chọn ngẫu nhiên 3 số tự nhiên từ 101 đến 200. Tính xác suất để 3 số được chọn lập thành một cấp số cộng.

A. $\frac{1}{66}$. **B.** $\frac{3}{100}$. **C.** $\frac{2}{33}$. **D.** $\frac{1}{33}$.

Câu 7: Từ các số $0,1,2,..,8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau mà có 3 chữ số chẵn, 2 số lẻ và hai số $2,3$ không đồng thời có mặt.

A. 4392. **B.** 6336. **C.** 1944. **D.** 4350.

Câu 8: Cho đa giác đều (H) có 20 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của (H). Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác mà không có cạnh nào là cạnh của (H).

A. $\frac{625}{969}$. **B.** $\frac{545}{969}$. **C.** $\frac{455}{969}$. **D.** $\frac{541}{969}$.

Câu 9: Từ tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số $\overline{abcd}$ sao cho $a \le b \le c \le d$.

A. 495. **B.** 309. **C.** 1534. **D.** 876.

Câu 10: Có 2021 hộp quà được đánh số từ 1 đến 2021. Lấy ngẫu nhiên 8 hộp để tặng 3 người. Tính xác suất để các số ghi trên hộp lấy ra đó không những có cả số chia hết cho 8 mà còn có cả số chia hết cho 3.

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\simeq 0,83$. **C.** $\simeq 0,38$. **D.** $\simeq 0,63$.

Câu 11: Tờ tiền VN được gọi là may mắn nếu mệnh giá và sê-ri thỏa mãn điều kiện:
1. Tờ bạc có mệnh giá 10000 VNĐ
2. 2 chữ cái in hoa không trùng nhau
3. Tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.
Hỏi có bao nhiêu tờ tiền may mắn ?

A. 313041850. **B.** 3130419500 **C.** 313419500. **D.** 313041950.

Câu 12: Cho đa giác 30 đỉnh nội tiếp đường tròn, gọi S là tập hợp các đường thẳng đi qua 2 trong số 30 đỉnh đã cho. Chọn hai đường thẳng bất kì từ tập S. Tính xác suất để chọn được hai đường thẳng mà giao điểm của chúng nằm bên trong đường tròn.

A. $\frac{7}{25}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{9}{31}$.

Câu 13: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Xác suất để số được chọn có chứa ít nhất một trong hai chữ số 1 hoặc 2 bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{15}$. **C.** $\frac{3}{50}$. **D.** $\frac{47}{50}$.

Câu 14: Cho tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số phân biệt sao cho các chữ số $1,2,3,4,5$ xuất hiện theo thứ tự giảm dần từ trái qua phải và chữ số 9 luôn đứng trước chữ số 1?

A. 2250. **B.** 2520. **C.** 420. **D.** 3024.

Câu 15: Cho một bảng hình chữ nhật kích thước 10×9 gồm 90 ô vuông đơn vị. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật được tạo bởi các ô vuông đơn vị của bảng. Xác suất để hình được chọn là hình vuông là

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{2}{15}$. **C.** $\frac{3}{10}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 16: Thầy giáo yêu cầu 3 bạn An, Bình, Lâm lần lượt lên bảng viết ngẫu nhiên một số có 2 chữ số mà chỉ dùng các chữ số $0;1;8;9$. Tính xác suất tổng 3 số ba bạn viết là một số chia hết cho 3

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $\frac{2}{9}$

Câu 17: Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ được xếp chỗ ngồi ngẫu nhiên vào một dãy gồm 9 ghế. Xác suất để mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam là

A. $11{,}9\%$. **B.** $58{,}33\%$. **C.** $60{,}71\%$. **D.** $6{,}94\%$.

Câu 18: Có 200 cái kẹo, chia cho 5 người sao cho ai cũng có kẹo. Xác suất để mỗi người có ít nhất 10 kẹo gần đúng với đáp án nào sau đây?

A. $0{,}711$. **B.** $0{,}277$. **C.** $0{,}432$. **D.** $0{,}355$.

Câu 19: Bạn An chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Tìm xác suất sao cho số của An lớn hơn số của Bình.

A. $\frac{47}{72}$. **B.** $\frac{37}{56}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{49}{72}$.

Câu 20: Cho đa giác đều 2020 đỉnh nội tiếp đường tròn (C). Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 đỉnh trong 2020 tạo thành 1 tam giác và chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 đỉnh trong

2020 đỉnh tạo thành 1 tứ giác. Gọi x là xác suất chọn được tam giác vuông cân, y là xác suất chọn được hình chữ nhật. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$.

A. $\frac{x}{y}=\frac{2017}{1009}$. **B.** $\frac{x}{y}=2017$. **C.** $\frac{x}{y}=\frac{1009}{2017}$. **D.** $\frac{x}{y}=\frac{2020}{2021}$.

Câu 21: Gọi S là tập các số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để lấy được số có mặt đồng thời bốn chữ số $4;5;6;7$ và bốn chữ số đó đôi một không kề nhau.

A. $\frac{5}{63}$. **B.** $\frac{89}{1134}$. **C.** $\frac{17}{252}$. **D.** $\frac{85}{1134}$.

Câu 22: Số tập con có ba phần tử của tập $\left\{2^1;2^2;...;2^{2020}\right\}$ sao cho ba phần tử đó có thể xếp thành một cấp số nhân tăng bằng

A. 1017072 **B.** 2039190. **C.** 1018081. **D.** 1019090.

Câu 23: Có bao nhiêu xâu kí tự độ dài 2021 mà mỗi ký tự thuộc tập hợp $\left\{1;2;3\right\}$, trong đó số ký tự 1 xuất hiện chẵn lần?

A. $\frac{3^{2021}-1}{2}$. **B.** $\frac{3^{2021}+1}{2}$. **C.** $3^{2021}-1$. **D.** $3^{2021}+1$.

Câu 24: Người ta dùng 100 số nguyên dương đầu tiên để đánh số cho 100 tấm thẻ (mỗi thẻ đánh một số). Chọn ngẫu nhiên bốn thẻ trong 100 thẻ đó. Xác suất để chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho 9 gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $0,536$. **B.** $0,464$. **C.** $0,489$. **D.** $0,511$.

Câu 25: Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 đồng thời số đó chia hết cho 9?

A. 10000. **B.** 9999. **C.** 100000. **D.** 99999.

Câu 26: Một bảng vuông gồm 100×100 ô vuông. Chọn ngẫu nhiên một ô hình chữ nhật. Tính xác suất để ô được chọn là hình vuông (trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân)

A. $0,0134$. **B.** $0,0133$. **C.** $0,0136$. **D.** $0,0132$

Câu 27: Cho tập hợp $X=\left\{1;2;3;4;...;100\right\}$ hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 7 số bất kì khác nhau sao cho hiệu của 2 số bất kì trong 7 số đó có trị tuyệt đối không nhỏ hơn 4?

A. C_{82}^7 **B.** C_{100}^7 **C.** C_{100}^7-97 **D.** C_{93}^7

Câu 28: Có 30 quả cầu được đánh số từ 1 đến 30. Bạn Minh chọn ngẫu nhiên ra 10 quả cầu. Tính xác suất để trong 10 quả cầu lấy ra có 5 quả cầu mang số chẵn, 5 quả cầu mang số lẻ trong đó có đúng một quả cầu mang số chẵn và một quả cầu mang số lẻ chia hết cho 3.

A. $\frac{5040}{95381}$. **B.** $\frac{3500}{95381}$. **C.** $\frac{1001}{3335}$. **D.** $\frac{5031}{95381}$.

Câu 29: Gọi S là tập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Xác suất để chọn được số có 4 chữ số viết theo thứ tự tăng dần và không có hai số nào liên tiếp nhau là:

A. $\frac{1}{36}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{63}$. **D.** $\frac{5}{1512}$.

Câu 30: Cho tập hợp $A=\left\{1;2;3;4;5;6;7\right\}$. Gọi B là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ A. Chọn thứ tự 2 số thuộc tập B. Tính xác suất để 2 số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 5.

A. $\frac{1440}{5873}$. **B.** $\frac{2880}{5873}$. **C.** $\frac{480}{5873}$. **D.** $\frac{720}{5873}$.

Câu 31: Xếp ngẫu nhiên 5 học sinh lớp Toán, 2 học sinh lớp Văn và 2 học sinh lớp Hóa vào 9 ghế quanh một bàn tròn (mỗi học sinh ngồi đúng một ghế). Tính xác suất để 5 học sinh lớp Toán ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{1}{126}$. **B.** $\frac{5}{126}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{1}{14}$.

Câu 32: Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có một đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú hoạ một câu trả lời. Xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1là

A. $0,7759$. **B.** $0,5256$. **C.** $0,5652$. **D.** $0,7959$.

Câu 33: Trong hộp có m bóng đỏ và n bóng xanh đôi một khác nhau. Ta lấy lần lượt ra ngoài ngẫu nhiên không hoàn lại một lần một quả bóng. Xác suất để lần cuối lấy được bóng màu đỏ là

A. $\frac{m}{m+n}$. **B.** $\frac{n}{m+n}$. **C.** $\frac{1}{(m+n-1)!}$. **D.** $\frac{m!}{(m+n)!}$.

Câu 34: Bộ mã ASCII là bảng mã dùng một dãy gồm 8 kí hiệu là 0 hoặc 1 để mã hóa cho một kí tự. Lấy ngẫu nhiên 1 dãy 8 kí hiệu trong bảng mã này. Xác suất để dãy lấy ra có nhiều nhất 6 kí hiệu là 1 là

A. $\frac{255}{256}$. **B.** $\frac{219}{256}$. **C.** $\frac{9}{256}$. **D.** $\frac{247}{256}$.

Câu 35: Đặt 5 quân cờ lên một bàn cờ vua, mỗi ô vuông trên bàn cờ chỉ chứa nhiều nhất một quân cờ. Xác suất để không hàng, không cột nào có nhiều hơn một quân cờ là:

A. $\frac{7}{17019}$. **B.** $\frac{560}{5763}$. **C.** $\frac{35}{1891}$. **D.** $\frac{280}{5763}$.

Câu 36: Từ các đỉnh của một đa giác đều 20 cạnh chọn 4 đỉnh bất kì để tạo thành một tứ giác lồi. Xác suất để tứ giác được chọn là một hình thang mà không phải là hình chữ nhật là

A. $\frac{3}{19}$. **B.** $\frac{21}{323}$. **C.** $\frac{48}{323}$. **D.** $\frac{54}{323}$.

Câu 37: Cho một đa giác đều 45 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác cân mà không phải là tam giác đều.

A. $P=\frac{63}{496}$. **B.** $P=\frac{3}{43}$. **C.** $P=\frac{65}{496}$. **D.** $P=\frac{5}{43}$.

Câu 38: Cho tập $A=\{0;1;2;...9\}$. Từ tập A lấy 1 số tự nhiên gồm có 7 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để số lấy được tạo thành là số chẵn trong đó các số $3;4;5$ đứng liền với nhau và $7;9$ đứng liền với nhau.

A. $\frac{23}{9720}$. **B.** $\frac{17}{6840}$. **C.** $\frac{23}{4860}$. **D.** $\frac{23}{3240}$.

Câu 39: Cho tập hợp $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Hai bạn A, B mỗi người chọn ngẫu nhiên một tập con của S. Xác suất để tập con mà A và B chọn được có đúng 3 phần tử chung là:

A. $\frac{889}{1024}$. **B.** $\frac{135}{1024}$. **C.** $\frac{605}{2048}$. **D.** $\frac{1443}{2048}$.

Câu 40: Cho E là tập các số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập E. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

A. $\frac{9}{28}$. **B.** $\frac{17}{56}$. **C.** $\frac{37}{112}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

Câu 41: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có năm chữ số chia hết cho 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Xác suất để số được chọn chia hết cho 3 là.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1902}{5712}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{6667}{20000}$.

Câu 42: Xếp 32 chiếc ghế giống nhau vào 3 phòng khác nhau được đánh số I,II,III từ trước sao cho phòng I có ít nhất 11 chiếc ghế,phòng II có ít nhất 7 chiếc ghế và phòng III có ít nhất 5 chiếc ghế. Có bao nhiêu cách thực hiện?

A. 54. **B.** 56. **C.** 57. **D.** 55.

Câu 43: Có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 5 gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây?

A. $0,09$. **B.** $0,07$. **C.** $0,18$. **D.** $0,5$.

Câu 44: Cắm hết 6 bông hoa giống nhau và 3 lọ khác nhau. Tính xác suất để có lọ chứa 3 bông hoa.

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{14}$. **D.** $\frac{15}{28}$.

Câu 45: Cho tập hợp $A=\left\{0;1;2;3;4;5;6;7,8\right\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn là một số chẵn và chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho 5.

A. $\frac{215}{1792}$. **B.** $\frac{211}{1792}$. **C.** $\frac{217}{1792}$. **D.** $\frac{205}{1792}$.

Câu 46: Có hai chiế chộp, mỗi hộp chứa 7 viên bi xanh, 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp thứ nhất bỏ sang hộp thứ hai, sau đó lấy ngẫu nhiên ở hộp thứ hai 5 viên bi. Tính xác xuất để lấy được 5 viên bi ở hộp thứ hai có đủ hai mầu.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{231232}{435323}$. **C.** $\frac{633269}{649740}$. **D.** $\frac{11}{13}$.

Câu 47: Cho đa giác lồi có 14 đỉnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong X một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

A. $\frac{11}{26}$. **B.** $\frac{15}{26}$. **C.** $\frac{5}{13}$. **D.** $\frac{8}{13}$.

Câu 48: Gọi S là tập hợp các ước số nguyên dương của số 34034175. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử thuộc S. Tính xác suất lấy được hai phần tử là hai số không chia hết cho 7.

A. $\frac{7}{195}$. **B.** $P=\frac{7}{267}$. **C.** $P=\frac{7}{276}$. **D.** $P=\frac{7}{159}$.

Câu 49: Từ các chữ số $0,1,2,3,4,5$, hãy lập số có 10 chữ số. Tính xác suất để số đó có số 3 lặp lại hai lần, số 4 lặp lại ba lần, số 5 lặp lại hai lần và các chữ số khác có mặt đúng một lần.

A. $\frac{7}{1296}$. **B.** $\frac{9}{2592}$. **C.** $\frac{5}{2592}$. **D.** $\frac{7}{2592}$.

Câu 50: Gọi T là tập hợp gồm các số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau. Lấy từ T ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để lấy được một số chẵn chứa các chữ số 2, 3, 4 sao cho chữ số 2 đứng trước chữ số 3 và chữ số 3 đứng trước chữ số 4.

A. $\frac{65}{1944}$. **B.** $\frac{40}{1701}$. **C.** $\frac{25}{1512}$. **D.** $\frac{50}{1701}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành một hàng ngang nên $n(\Omega)=6!$.

Gọi A là biến cố: "Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành một hàng ngang sao cho học sinh lớp 10 đứng xen kẽ giữa 2 học sinh lớp 12".

Xếp 1 học sinh lớp 10 vào đầu tiên thì có 1 cách.

Lấy 2 học sinh lớp 12 và xếp đứng 2 bên học sinh lớp 10 thì có $C_3^2.2$ cách.

Nhóm 3 học sinh trên thành một nhóm, xếp nhóm này và 3 học sinh còn lại thành một hàng ngang thì có $4!$ cách.

Suy ra: $n(A)=C_3^2.2.4!=144$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{5}$.

Câu 2: Số đề kiểm tra có 10 câu tùy ý từ 30 câu hỏi trắc nghiệm là: C_{30}^{10}

Số đề kiểm tra có 10 câu chỉ toàn câu dễ từ 30 câu hỏi trắc nghiệm là: C_{15}^{10}

Không có đề kiểm tra có 10 câu mà toàn câu trung bình và khó, vì số lượng các câu này bé hơn 10

Số đề kiểm tra 10 câu chỉ có hai loại câu dễ và trung bình là: $C_{24}^{10}-C_{15}^{10}$ (phải trừ trường hợp chỉ có 10 câu dễ đã đếm ở trên)

Số đề kiểm tra 10 câu chỉ có hai loại câu dễ và khó là: $C_{21}^{10}-C_{15}^{10}$ (phải trừ trường hợp chỉ có 10 câu dễ đã đếm ở trên)

Số đề kiểm tra 10 câu chỉ có hai loại câu trung bình và khó là: C_{15}^{10}.

Số đề kiểm tra 10 câu hỏi đủ cả 3 loại dễ, khó, và trung bình là:

Câu 3: Số 10^{10} gồm có 1 chữ số 1 và 10 chữ số 0 nên tập hợp X gồm các số tự nhiên có không quá 10 chữ số.

Ta có thể xem mỗi số thuộc tập X là một dãy số gồm 10 chữ số $a_1a_2a_2...a_{10}$ (các chữ số a_i có thể bằng 0).

Vì tổng các chữ số bằng 2 nên ta có hai trường hợp.

Trường hợp 1: Mỗi số là một dãy số gồm 2 chữ số 1 và 8 chữ số 0.

Trường hợp 2: Mỗi số là một dãy số gồm 1 chữ số 2 và 9 chữ số 0.

Khi đó ta có $n(\Omega)=C_{10}^2+C_{10}^1=55$.

Gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 2000".

Số đó thuộc trường hợp 1 có tất cả: $C_6^2=15$.

Số đó thuộc trường hợp 2 có tất cả: $C_7^1=7$.

Do đó $n(A)=15+7=22$. Xác suất là $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 4: Số cách chia 16 đội thành 4 bảng mỗi bảng có 4 đội một cách ngẫu nhiên là $n(\Omega)=C_{16}^4.C_{12}^4.C_8^4.C_4^4=63063000$.

Gọi biến cố A: " 4 đội Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau."

Có $4!$ cách chia 4 đội Việt Nam vào 4 bảng, mỗi bảng có 1 đội.

12 đội còn lại chia đều cho 4 bảng sẽ có $C_{12}^{3}.C_{9}^{3}.C_{6}^{3}.C_{3}^{3}$ cách.

Do đó $n\left(A\right)=4!.C_{12}^{3}.C_{9}^{3}.C_{6}^{3}.C_{3}^{3}=8870400$

Vậy $P\left(A\right)=\dfrac{8870400}{63063000}=\dfrac{64}{455}$.

Câu 5: Để bất kì 2 trong 3 tấm thẻ lấy ra đó có 2 số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị thì phải rút được 3 thẻ sao cho trong đó không có 2 thẻ nào là 2 số tự nhiên liên tiếp.

Số phần từ của không gian mẫu (số cách rút 3 thẻ bất kì trong 26 thẻ): C_{26}^{3}

Đếm số cách rút 3 thẻ mà trong 3 thẻ đó có đúng 2 số tự nhiên liên tiếp:

Chọn các bộ 2 số tự nhiên liên tiếp: $\left(1;2\right),\left(2;3\right),...,\left(25;26\right)$.

Nếu chọn 2 thẻ $\left(1;2\right)$ và $\left(25;26\right)$ thì có 2 cách, thẻ còn lại không được là 3 hoặc 24. Vậy ở trường hợp này có tất cả $2\left(26-3\right)=46$ cách.

Nếu chọn 2 thẻ là $\left(2;3\right),...,\left(24;25\right)$ thì có 23 cách, thẻ còn lại có $26-4=22$ cách. Vậy ở trường hợp này có $23.22=506$ cách.

Vậy tổng số cách rút 3 thẻ mà trong 3 thẻ đó có đúng 2 số tự nhiên liên tiếp: $46+506=552$ cách.

Đếm số cách rút 3 thẻ mà 3 thẻ đó là 3 số tự nhiên liên tiếp:

Là các bộ số $\left(1;2;3\right),\left(2;3;4\right),...,\left(24;25;26\right)$. Vậy trường hợp này có 24 cách.

Do đó tổng số cách rút 3 thẻ để bất kì 2 trong 3 tấm thẻ lấy ra đó có 2 số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị là: $C_{26}^{3}-552-24=2024$ cách.

Xác xuất cần tìm: $\dfrac{2024}{C_{26}^{3}}=\dfrac{253}{325}$.

Câu 6: Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=C_{100}^{3}$.

Gọi a,b,c là 3 số theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Khi đó $a+c=2b$, do vậy a,c cùng tính chẵn hoặc lẻ. (Khi chọn hai số a và c khác nhau cùng chẵn hoặc cùng lẻ trong các số từ 101 đến 200 thì luôn tồn tại số b trong các số từ 101 đến 200 mà a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng).

Gọi A là biến cố: "3 Số được chọn là các số tự nhiên từ 101 đến 200 lập thành cấp số cộng".

Ta có: $n\left(A\right)=C_{50}^{2}+C_{50}^{2}$ (vì có 50 số chẵn và 50 số lẻ từ 101 đến 200).

Vậy xác suất cần tính là: $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{2C_{50}^{2}}{C_{100}^{3}}=\dfrac{1}{66}$.

Câu 7: **Trường hợp 1:** $\overline{abcde}$ kể cả số 0 đứng đầu **và** có 3 số chẵn, 2 số lẻ

Chọn 3 số chẵn trong 5 số chẵn $0;2;4;6;8$ có C_{5}^{3} cách

Chọn 2 số lẻ trong 4 số lẻ $1;3;5;7$ có C_{4}^{2} cách

Xếp 5 số trên vào 5 vị trí có: $5!$ cách

Trường hợp 2: $\overline{0bcde}$ mà có 3 số chẵn, 2 số lẻ

Chọn 2 số chẵn trong 4 số chẵn $0;2;4;6;8$ có C_{4}^{2} cách

Chọn 2 số lẻ trong 4 số lẻ $1;3;5;7$ có C_4^2 cách

Xếp 4 số trên vào 4 vị trí có: $4!$ cách

Vậy th1 và th2 có: $C_5^3.C_4^2.5!-C_4^2.C_4^2.4!=6336$ (số)

Trường hợp 3: $\overline{abcde}$ kể cả số 0 đứng đầu mà có 3 số chẵn, 2 số lẻ và hai số $2,3$ đồng thời có mặt

Chọn 2 số chẵn trong 4 số chẵn $0;4;6;8$ có C_4^2 cách

Chọn 1 số lẻ trong 3 số lẻ $1;5;7$ có C_3^1 cách

Xếp 5 số trên vào 5 vị trí có: $5!$ cách

Trường hợp 4: $\overline{0bcde}$ mà có 3 số chẵn, 2 số lẻ và hai số $2,3$ đồng thời có mặt

Chọn 1 số chẵn trong 3 số chẵn $4;6;8$ có C_3^1 cách

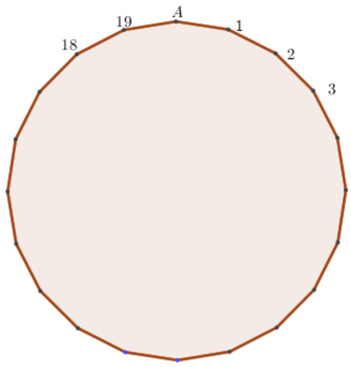
Chọn 1 số lẻ trong 3 số lẻ $1;5;7$ có C_3^1 cách

Xếp 4 số trên vào 4 vị trí có: $4!$ cách

Vậy th3 và th4 ta có: $C_4^2.C_3^1.5!-C_3^1.C_3^1.4!=1944$ (số)

Vậy kết quả bài toán: $6336-1944=4392$.

Câu 8:



Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{20}^4=4845$.

Gọi biến cố E " Tứ giác tạo thành không có cạnh nào là cạnh của (H)".

Gọi tứ giác mà không có cạnh nào là cạnh của (H) là $ABCD$.

Chọn A có 20 cách.
Ta đánh số thứ tự các đỉnh của đa giác đều (H) như hình vẽ (từ 1 đến 19, sau khi đã chọn A).

Gọi b,c,d lần lượt là số thứ tự của B,C,D. Ta có:
$b\ge 2$, để AB là đường chéo (B không kề A).
$b+1<c$, để BC là đường chéo (C không kề B).
$c+1<d$, để CD là đường chéo (D không kề C).
$d\le 18$, để DA là đường chéo (A không kề D).

$\Rightarrow 2 \le b < c - 1 < d - 2 \le 16$.

Có C_{15}^3 cách chọn b, c, d, suy ra có $20.C_{15}^3$ tứ giác $ABCD$, tuy nhiên mỗi tứ giác được xác định như vậy đã được tính 4 lần, do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố E là: $n(E) = \dfrac{20.C_{15}^3}{4} = 5.C_{15}^3$

Vậy xác suất cần tìm là: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{5.C_{15}^3}{4845} = \dfrac{455}{969}$.

Câu 9: Ta đánh số thứ tự các đỉnh của đa giác đều (H) như hình vẽ (từ 1 đến 19, sau khi đã chọn A).

Ta có $a \le b \le c \le d \Leftrightarrow \begin{cases} a \le b \\ b \le c \\ c \le d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b + 1 \\ b < c + 1 \\ c < d + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le a < b + 1 < c + 2 < d + 3 \le 12$

Có C_{12}^4 cách chọn bộ $a, b+1, c+2, d+3$

Mỗi bộ đó ứng với 1 bộ a, b, c, d thỏa mãn $a \le b \le c \le d$

Vậy có $C_{12}^4 = 495$ số thỏa mãn bài ra

Câu 10: Hộp có số chia hết cho 8 có dạng $8n, (n \in \mathbb{N})$,

$\Rightarrow 1 \le 8n \le 2021 \Rightarrow n \in \{1, 2, ..., 252\}$ vậy có 252 hộp có số chia hết 8.

Hộp có số chia hết cho 3 có dạng $3m, (m \in \mathbb{N})$, $\Rightarrow 1 \le 3m \le 2021 \Rightarrow m \in \{1, 2, ..., 673\}$ vậy có 673 hộp có số chia hết 3.

Trong đó sẽ có hộp mang số chia hết cho 8 và 3 có dạng $24p, (p \in \mathbb{N})$,

$\Rightarrow 1 \le 24p \le 2021 \Rightarrow p \in \{1, 2, ..., 84\}$ vậy có 84 hộp có số chia hết 24.

Số hôp mang số không chia hết cho cả 3 và 8 là 1180 hộp.

Gọi X là biến cố " Trong 8 hộp được chọn thì có số chia hết cho 8 thì không có số chia hết cho 3 hoặc có số chia hết cho 3 thì không có số chia hết cho 3 hoặc không có số chia hết cho cả 8 lẫn 3 rồi sau đó đem chia cho 3 người là"

Số phần tử của X là $n(X) = \left(C_{168+1180}^8 + C_{589+1180}^8 - C_{1180}^8\right) A_8^3$

Số cách chọn 8 hộp để chia 3 người là : $n(\Omega) = C_{2021}^8 . A_8^3$

Xác suất biến cố thỏa mã yêu cầu bài toán là: $P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 1 - \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} \simeq 0,63$

Câu 11: Giả sử dãy số may mắn có dạng: $\overline{abcd(9-e)(9-f)(9-g)(9-h)}$

$(a, b, c, d, e, f, g, h \in \{0; 1; .....; 8; 9\})$

Ta có $a + b + c + d = 36 - (e + f + g + h)$

$\Leftrightarrow a + b + c + d + e + f + g + h = 36 \ (*)$.

Ta cần tìm số nghiệm tự nhiên của $(*)$, theo nguyên lý bù trừ số nghiệm của $(*)$ là:

$n = C_8^0 C_{43}^7 - C_8^1 C_{33}^7 + C_8^2 C_{23}^7 - C_8^3 C_{13}^7 = 4816030$ (nghiệm).

Vậy số tiền may mắn là $T = 26.25.n = 3130419500$ (tờ tiền)

Câu 12: Số phần tử của tập S là: $n(S)=C_{30}^2=435$.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{435}^2$.

Gọi A là biến cố "hai đường thẳng được chọn mà giao điểm của chúng nằm bên trong đường tròn".

Để hai đường thẳng được chọn có giao điểm nằm bên trong đường tròn thì hai đường thẳng đó là hai đường chéo của một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh trong 30 đỉnh của đa giác đã cho. Vậy số cách chọn hai đường thẳng mà có giao điểm nằm bên trong đường tròn là:

$n(A)=C_{30}^4$.

Vậy $P(A)=\dfrac{C_{30}^4}{C_{435}^2}=\dfrac{9}{31}$.

Câu 13: Ta có số phần tử của tập S là: $5.A_5^3=300$.

$\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=300$.

Gọi A là biến cố: " Số được chọn từ tập S có chứa ít nhất một trong hai chữ số 1 hoặc 2 ".

$\Rightarrow$ $\overline{A}$ là biến cố: " Số được chọn từ tập S không có mặt cả hai chữ số 1 và 2 ".

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số $0;\ 3;\ 4;\ 5$ là: $3.3!=18$. Do đó $n(\overline{A})=18$.

Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=1-\dfrac{18}{300}=\dfrac{47}{50}$.

Câu 14: Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ là số cần tìm.

Chọn 3 vị trí và xếp 3 số $6,7,8$ vào: A_9^3 cách.

Chọn vị trí cho chữ số 9 (trừ vị trí còn lại ở cuối): 5 cách.

Xếp 5 số $1,2,3,4,5$ theo thứ tự giảm dần vào 5 vị trí còn lại: 1 cách.

Vậy có $A_9^3.5.1=2520$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15: Giả sử hình chữ nhật tạo thành từ 11 đường thẳng song song $a_1,a_2,...,a_{11}$ và 10 đường thẳng $b_1,b_2,...,b_{10}$ vuông góc với 11 đường thẳng đã cho.

Mỗi hình chữ nhật tạo thành từ việc chọn hai đường thẳng trong 11 đường thẳng $a_1,a_2,...,a_{11}$ và hai đường thẳng trong 10 đường thẳng $b_1,b_2,...,b_{10}$.

Do đó số hình chữ nhật là $C_{11}^2\times C_{10}^2=2475$ hình.

Số hình vuông có cạnh bằng x là $(11-x)(10-x)$, với $1\le x\le 9$.

Do đó số hình vuông là $\sum\limits_{x=1}^{9}(11-x)(10-x)=330$. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{330}{2475}=\dfrac{2}{15}$.

Câu 16: Gọi M là tập hợp các số có hai chữ số được lập từ các chữ số $0;1;8;9$

$\Rightarrow$ $n(M)=3.4=12$

Gọi A lần lượt là tập hợp các số chia hết cho 3 từ tập $M \Rightarrow A=\{18;81;90;99\}$

Gọi B lần lượt là tập hợp các số chia hết cho 3 dư 1 từ tập $M \Rightarrow B=\{19;10;91;88\}$

Gọi C lần lượt là tập hợp các số chia hết cho 3 dư 2 từ tập $M \Rightarrow C=\{11;80;89;98\}$

Phép thử ba bạn An, Bình, Lâm lần lượt lên bảng viết ngẫu nhiên một số có 2 chữ số mà chỉ dùng các chữ số $0;1;8;9$ có không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=12^3$

Gọi E là biến cố " tổng 3 số ba bạn viết là một số chia hết cho 3 "

Tổng 3 số ba bạn viết là một số chia hết cho 3 khi ba số thuộc một trong 3 tập hợp A,B,C hoặc mỗi số thuộc một tập trong 3 tập A,B,C $\Rightarrow$ $n\left(E\right)=4^3.3+4^3.3!$

Xác suất tổng 3 số ba bạn viết là một số chia hết cho 3 : $P\left(E\right)=\dfrac{4^3.3+4^3.3!}{12^3}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 17: Số cách xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh vào 9 ghế là: $n\left(\Omega\right)=9!$

Gọi A là biến cố: " Mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam"

Xếp thứ tự 6 học sinh nam có $6!$ cách

Xếp thứ tự 3 học sinh nữ vào giữa các học sinh nam có A_5^3 cách $\Rightarrow n\left(A\right)=6!.A_5^3$

Xác suất biến cố A là: $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{6!A_5^3}{9!}=\dfrac{5}{42}=11,9\%$.

Câu 18: Không gian mẫu: Xếp 200 cái kẹo thành một hàng ngang. 200 cái kẹo tạo ra 199 khoảng trống ở giữa.

Đặt vào 4 vách ngăn sẽ chia số kẹo thành 5 phần sao cho phần nào cũng có kẹo. Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n\left(\Omega\right)=C_{199}^4$

Gọi A là biến cố "mỗi người có ít nhất 10 kẹo."

Chia trước cho mỗi người 9 kẹo, còn lại 155 cái. Bài toán đưa về chia 155 kẹo cho 5 người sao cho ai cũng có kẹo.

Xếp 155 cái kẹo thành một hàng ngang. 155 cái kẹo tạo ra 154 khoảng trống ở giữa.

Đặt vào 4 vách ngăn sẽ chia số kẹo thành 5 phần sao cho phần nào cũng có kẹo. Do đó số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n\left(A\right)=C_{154}^4$.

Xác suất của biến cố A là: $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{C_{154}^4}{C_{199}^4}\approx 0,355$

Câu 19: Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: An chọn được số 9.

Trong trường hợp này số của An chắc chắn lớn hơn số của Bình.

Xác suất An chọn được số 9 là $\dfrac{C_8^2}{C_9^3}=\dfrac{1}{3}$.

Trường hợp 2. An không chọn được số 9.

Xác suất để An không chọn được số 9 là $\dfrac{C_8^3}{C_9^3}=\dfrac{2}{3}$.

Trong trường hợp này An chọn số cùng tập với Bình nên xác suất An chọn được số lớn hơn cũng bằng xác suất Bình chọn được số lớn hơn.

Ta tính xác suất để 2 bạn chọn được cùng số:

Số cách chọn của hai bạn là: $C_8^3.C_8^3$

Số cách để An chọn được ba số bất kỳ là C_8^3; Ứng với mỗi cách chọn của An thì Bình chỉ có một cách chọn để giống An nên số cách hai người chọn được số giống nhau là C_8^3

Vậy, xác suất để 2 bạn chọn được cùng số là $\frac{C_8^3}{C_8^3.C_8^3}=\frac{3!}{8.7.6}=\frac{1}{56}$ nên xác suất để An chọn được số lớn hơn là: $\frac{1-\frac{1}{56}}{2}=\frac{55}{112}$. Do đó xác suất trong trường hợp này là $\frac{2}{3}.\frac{55}{112}=\frac{55}{168}$.

Vậy, xác suất cần tìm là $\frac{1}{3}+\frac{55}{168}=\frac{37}{56}$.

Câu 20: Đa giác đều 2020 đỉnh nội tiếp đường tròn (C) có 1010 đường kính.

Chọn 3 đỉnh trong 2020 đỉnh của đa giác đều tạo thành 1 tam giác có C_{2020}^3 cách

Để chọn được 1 tam giác vuông cân, ta chọn như sau:

Chọn 1 đường kính trong 1010 đường kính có 1010 cách

1 đường kính chia đường tròn (C) thành 2 nửa đường tròn, mỗi nửa đường tròn có 1009 đỉnh của đa giác đều (trừ 2 đỉnh thuộc đường kính). Ta chọn 1 đỉnh nằm chính giữa 1 nửa đường tròn với 1 đường kính đã chọn tạo thành 1 tam giác vuông cân. Từ đó ta có 2 cách chọn 1 đỉnh nằm chính giữa 2 nửa đường tròn.

Do đó số tam giác vuông cân tạo thành là: $1010.2=2020$

Xác suất chọn tam giác vuông cân là: $x=\frac{2020}{C_{2020}^3}$

Chọn 4 đỉnh trong 2020 đỉnh của đa giác đều tạo thành 1 tứ giác có C_{2020}^4 cách

Để chọn được 1 hình chữ nhật, ta chọn 2 đường kính trong 1010 đường kính có C_{1010}^2 cách

Khi đó xác suất chọn hình chữ nhật là: $y=\frac{C_{1010}^2}{C_{2020}^4}$

Vậy $\frac{x}{y}=\frac{2020}{C_{2020}^3}:\frac{C_{1010}^2}{C_{2020}^4}=\frac{4}{1009}.\frac{2017}{4}=\frac{2017}{1009}$

Câu 21: Lập số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau.Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2...a_9}$.

Chữ số a_1 có 9 cách chọn. Có A_9^8 cách chọn các chữ số còn lại.

Vậy lập được $9.A_9^8$ số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau.

Lập số tự nhiên có 9 chữ số đôi một khác nhau có mặt đồng thời bốn chữ số $4;5;6;7$ và bốn chữ số đó đôi một không kề nhau.

Trường hợp 1: Lấy 5 chữ số trong 6 chữ số $0,1,2,3,8,9$ có C_6^5 cách.

Xếp 5 chữ số trên thành một hàng ngang có $5!$ cách.

Ta có 6 khoảng trống từ cách xếp trên nên có A_6^4 cách xếp chữ số $4;5;6;7$. Vậy có $C_6^5.5!A_6^4$ số.

Trường hợp 2: Chữ số 0 đứng đầu.

Lấy 4 chữ số trong 5 chữ số $1,2,3,8,9$ có C_5^4 cách.

Xếp 4 chữ số trên thành một hàng ngang (sau chữ số 0) có $4!$ cách.

Ta có 5 khoảng trống từ cách xếp trên nên có A_5^4 cách xếp chữ số $4;5;6;7$. Vậy có $C_5^4.4!.A_5^4$ số.

Ta có $C_6^5.5!A_6^4 - C_5^4.4!.A_5^4 = 244800$. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{244800}{9.A_9^8} = \dfrac{85}{1134}$.

Câu 22: **Cách 1**

Gọi $\left\{2^a;2^b;2^c\right\}$ là một tập con thỏa mãn bài toán. Ta có:

$2^a < 2^b < 2^c \Leftrightarrow a < b < c;\ a,b,c \in \left\{1;2;...;2020\right\}$

$2^a;2^b;2^c$ lập thành cấp số nhân tăng $\Leftrightarrow a;b;c$ lập thành cấp số cộng tăng $\Leftrightarrow a + c = 2b$

Thấy rằng $a + c = 2b$ thì nếu $a \ne c$ ta có b sẽ khác cả a và c.

Nói cách khác, ycbt $\Leftrightarrow$ lấy được hai số a,c cùng tính chẵn, lẻ.

Vậy có $C_{1010}^2 + C_{1010}^2 = 1019090$ tập con thỏa mãn bài toán.

Cách 2

Các tập con có ba phần tử thỏa mãn bài toán gồm các tập:

$\left\{2^1;2^2;2^3\right\},\left\{2^1;2^3;2^5\right\},...,\left\{2^1;2^{1010};2^{2019}\right\} \Rightarrow$ có 1009 tập

$\left\{2^2;2^3;2^4\right\},\left\{2^2;2^4;2^6\right\},...,\left\{2^2;2^{1011};2^{2020}\right\} \Rightarrow$ có 1009 tập

$\left\{2^3;2^4;2^5\right\},\left\{2^3;2^5;2^7\right\},...,\left\{2^3;2^{1011};2^{2019}\right\} \Rightarrow$ có 1008 tập

$\left\{2^4;2^5;2^6\right\},\left\{2^4;2^6;2^8\right\},...,\left\{2^4;2^{1012};2^{2020}\right\} \Rightarrow$ có 1008 tập

…

$\left\{2^{2017};2^{2018};2^{2019}\right\} \Rightarrow$ có 1 tập

$\left\{2^{2018};2^{2019};2^{2020}\right\} \Rightarrow$ có 1 tập

$\Rightarrow$ có $2\left(1+2+3+...+1009\right) = 1019090$ tập con thỏa mãn bài toán.

Câu 23: **Cách 1:**

Xét bài toán tổng quát : Có bao nhiêu xâu kí tự có độ dài n mà mỗi kí tự thuộc tập hợp $\left\{1;2;3\right\}$ trong đó số kí tự 1 xuất hiện chẵn lần.

Giải

Ký hiệu M_n là tập hợp tất cả các xâu có n kí tự được lập từ các số thuộc tập $\left\{1;2;3\right\}$.

A_n, B_n là tập hợp tất cả các xâu có n kí tự được lập từ các số thuộc tập $\left\{1;2;3\right\}$ theo thứ tự chứa một số chẵn các chữ số 1, một số lẻ các chữ số 1.

Dễ thấy A_n, B_n rời nhau và $M_n = A_n \cup B_n \Rightarrow \left|A_n\right| = \left|B_n\right| = \dfrac{1}{2}\left|M_n\right| = \dfrac{3^n}{2}$.

Lấy 1 phần tử của M_{n+1} bỏ đi 1 kí tự cuối ta được một phần tử của M_n, ngược lại lấy 1 phần tử x của M_n

Nếu $x \in A_n$ thì có hai cách để thêm vào chữ số cuối để được phần tử của A_{n+1}.

Nếu $x \in B_n$ thì có 1 cách để thêm vào chữ số cuối để tạo ra 1 phần tử của A_{n+1}.

Suy ra: $\left|A_{n+1}\right| = 2\left|A_n\right| + \left|B_n\right| = \left|A_n\right| + \left[\left|A_n\right| + \left|B_n\right|\right] = \left|A_n\right| + 3^n$

Từ $\left|A_1\right| = 2, \left|A_{n+1}\right| = \left|A_n\right| + 3^n$.

Khi đó: $\left|A_2\right| = 2 + 3^1; \left|A_3\right| = 2 + 3^1 + 3^2;..;\left|A_n\right| = 2 + 3^1 + .. + 3^n = \dfrac{3^n - 1}{2} + 1 = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

Xét bài toán cụ thể với $n=2021$ ta có: $\left|A_{2021}\right|=\dfrac{3^{2021}-1}{2}$.

Cách 2:

Trường hợp 1: 0 số 1 có $C_{2021}^{0}.2^{2021}$.

Trường hợp 2: 2 số 1 có $C_{2021}^{2}.2^{2019}$.

…

Trường hợp 1010: 2020 số 1 có $C_{2021}^{2020}.2$.

Vậy có: $C_{2021}^{0}.2^{2021}+C_{2021}^{2}.2^{2019}+..+C_{2021}^{2020}=\dfrac{\left(2+1\right)^{2021}+\left(2-1\right)^{2021}}{2}=\dfrac{3^{2021}+1}{2}$.

Câu 24: Ta có $n(\Omega)=C_{100}^{4}$.

Xét $1\le n=3k\le 100, n\in N^{*}\Rightarrow k\in\left\{1,2,...,33\right\}$, nên trong 100 số nguyên dương đầu tiên có 33 số chia hết cho 3.

Gọi A là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 100 và chia hết cho 9 $\Rightarrow A=\left\{9,18,27,36,45,54,63,72,81,90,99\right\}\Rightarrow n(A)=11$.

Gọi B là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 100 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 $\Rightarrow n(B)=33-11=22$.

Gọi C là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 100 và không chia hết cho 3 $\Rightarrow n(C)=100-33=67$.

Gọi M là biến cố: "chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ chia hết cho 9 "

$\Rightarrow \overline{M}$ là biến cố: chọn được bốn thẻ sao cho tích của các số ghi trên bốn thẻ không chia hết cho 9 ". Để tích 4 số không chia hết cho 9 xảy ra hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: 4 số thuộc tập C, có C_{67}^{4} (cách)

Trường hợp 2: 3 số thuộc tập C, 1 số thuộc tập B có $C_{24}^{1}.C_{67}^{3}$ (cách)

Câu 25: **Cách 1:** Dễ thấy 100071 là số tự nhiên nhỏ nhất có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 đồng thời số đó chia hết cho 9.

Dễ thấy 999981 là số tự nhiên lớn nhất có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 đồng thời số đó chia hết cho 9.

Do cứ cách đúng 90 số lại có 1 số tự nhiên có 6 chữ số mà chữ số tận cùng là chữ số 1 và đồng thời số đó chia hết cho 9 nên số số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$\dfrac{999981-100071}{90}+1=10000$ số.

Cách 2: Đặt số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcde1}=\overline{A1}=9.\overline{B9}=9.(10\text{B}+9)$

Do $100000<9.\overline{B9}=9(10B+9)<999999\Leftrightarrow\dfrac{99919}{90}<B<\dfrac{111102}{10}$

Từ đó B nhận các giá trị nguyên liên tiếp từ 1111 đến 11110 hay có 10000 số thỏa mãn yêu cầu.

Nên $P(\overline{M})=\dfrac{C_{67}^{4}+C_{22}^{1}.C_{67}^{3}}{C_{100}^{4}}\Rightarrow P(M)=1-P(\overline{M})=1-\dfrac{C_{67}^{4}+C_{22}^{1}.C_{67}^{3}}{C_{100}^{4}}\approx 0,536$.

Câu 26: Giả sử bảng vuông gồm 100×100 ô vuông được xác định bởi các đường thẳng $x=0$, $x=1$, $x=2$, …, $x=100$ và $y=0$, $y=1$, $y=2$, …, $y=100$ trong hệ trục tọa độ Oxy.

Mỗi hình chữ nhật được tạo bởi 2 đường thẳng khác nhau $x=a,\ x=b\ (0\le a,\ b\le 100)$ và hai đường thẳng khác nhau $y=c$, $y=d$ $(0\le c,d\le 100)$ nên có $C_{101}^2.C_{101}^2$ hình chữ nhật.

Suy ra không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega)=C_{101}^2.C_{101}^2$.

Gọi A là biến cố "ô được chọn là hình vuông ".

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: ô được chọn có kích thước 1×1: có $100.100=100^2$ hình vuông.

Trường hợp 2: ô được chọn có kích thước 2×2: mỗi ô được tạo thành bởi 2 đường thẳng khác nhau $x=a,x=b\ (0\le a<b\le 100)$ và hai đường thẳng khác nhau $y=c$, $y=d\ (0\le c<d\le 100)$ sao cho $b-a=d-c=2 \Rightarrow$ có $99.99=99^2$ hình vuông.

Tương tự:

Trường hợp 3: ô được chọn có kích thước 3×3: có $98.98=98^2$ hình vuông.

…

Trường hợp 100: ô được chọn có kích thước 100×100 : có $1.1=1^2$ hình vuông.

Suy ra không gian thuận lợi cho biến cố A có số phần tử là

$$n(\Omega_A)=100^2+99^2+98^2+...+1^2=\frac{100.(100+1)(2.100+1)}{6}=338350.$$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(\Omega_A)}{n(\Omega)}=\dfrac{338350}{C_{101}^2.C_{101}^2}=\dfrac{67}{5050}\approx 0{,}0133$.

Câu 27: Các số được chọn ra luôn xếp được theo thứ tự tăng dần

Giả sử 7 số được chọn là $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7$. Theo giả thiết vì hiệu của hai số bất kì không nhỏ hơn 4 nên $1\le a_1<a_2-3<a_3-6<a_4-9<a_5-12<a_6-15<a_7-18\le 82$.

Đặt $x_1=a_1;x_2=a_2-3;x_3=a_3-6;x_4=a_4-9;x_5=a_5-12;x_6=a_6-15;x_7=a_7-18$ trong đó $1\le x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7\le 82$.

Vậy bài toán trở thành chọn ra 7 số bất kì trong 82 số phân biệt: C_{82}^7

Câu 28: Không gian mẫu: C_{30}^{10}

Từ 1 đến 30 có 15 số chẵn và 15 số lẻ.

Từ 1 đến 30 có 5 số chẵn và 5 số lẻ chia hết cho 3: $\{3;6;9;12;15;18;21;24;27;30\}$

Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán.

Lấy 1 quả cầu chia hết cho 3 và là số chẵn: C_5^1

Lấy 1 quả cầu chia hết cho 3 và là số lẻ: C_5^1

Lấy 4 quả cầu mang số chẵn và không chia hết cho 3: C_{10}^4

Lấy 4 quả cầu mang số lẻ và không chia hết cho 3: C_{10}^4

Số kết quả thuận lợi của biến cố A: $C_5^1.C_5^1.C_{10}^4.C_{10}^4$

Vậy $P(A)=\dfrac{C_5^1.C_5^1.C_{10}^4.C_{10}^4}{C_{30}^{10}}=\dfrac{3500}{95381}$

Câu 29: Ta có số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là:

$|S|=9.A_9^3=n(\Omega)$.

Gọi A là biến cố chọn được số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcd}$ trong đó $1 \le a < b-1 < c-2 < d-3 \le 6$. Việc chon 4 chữ số a,b,c,d thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng với việc chọn 4 chữ số $a,\, b-1,\, c-2,\, d-3$ theo thứ tự tăng dần từ chữ số 1 đến 6, tương ứng ta có C_6^4 cách.

Suy ra $n(A) = C_6^4$. Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_6^4}{9.A_9^3} = \dfrac{5}{1512}$.

Câu 30: Chọn 4 số khác nhau và xếp có thứ tự từ tập hợp có 7 chữ số, có $A_7^4 = 840$ số.

Do đó số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 840.839 = 704760$.

Gọi biến cố C: " Hai số được chọn có đúng một số có mặt chứ sỗ 5 ".

Trong các số thuộc tập B có $4!C_6^3 = 480$ số luôn có mặt chữ số 5.

Trong tập B có $A_6^4 = 360$ số không có mặt chữ số 5.

Khi đó số phần tử của biến cố C là $n(C) = 2!C_{480}^1.C_{360}^1 = 345600$.

Vậy $P(C) = \dfrac{345600}{704760} = \dfrac{2880}{5873}$.

Câu 31: Không gian mẫu là $n(\Omega) = (9-1)! = 8! = 40320$.

Gọi A là biến cố " 5 học sinh lớp Toán ngồi cạnh nhau".

Sắp xếp thứ thự 5 học sinh lớp Toán: có $5! = 120$ cách.

Sắp xếp vòng tròn 5 phần tử gồm 4 học sinh còn lại và nhóm 5 học sinh lớp Toán (coi như 1 phần tử): có $4! = 24$ cách.

Do đó $n(A) = 120.24 = 2880$.

Vậy xác suất để 5 học sinh lớp Toán ngồi cạnh nhau là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2880}{40320} = \dfrac{1}{14}$.

Câu 32: Ta có xác suất để học sinh trả lời câu đúng là $\dfrac{1}{4}$ và xác suất trả lời câu sai là $\dfrac{3}{4}$.

Gọi x là số câu trả lời đúng, khi đó số câu trả lời sai là $10-x$.

Số điểm học sinh này đạt được là $5x - 2(10-x) = 7x - 20$

Nên học sinh này nhận điểm dưới 1 khi $7x - 20 < 1 \Leftrightarrow x < 3$

Mà x nguyên nên x nhận các giá trị $0;1;2$

Gọi Ai $(i = 0;1;2)$ là biến cố " Học sinh trả lời đúng i câu".

A là biến cố " Học sinh nhận điểm dưới 1 ".

Suy ra $A = A_o \cup A_1 \cup A_2$ và $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$

Mà $P(A_i) = C_{10}^i.\left(\dfrac{1}{4}\right)^i.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-i}$ nên $P(A) = \sum\limits_{i=0}^{2} C_{10}^i.\left(\dfrac{1}{4}\right)^i.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-i} = 0{,}5256$.

Câu 33: Coi việc bốc lần lượt cũng giống như lấy một lúc $m+n-1$ quả sau đó lấy nốt quả bóng cuối cùng.

Không gian mẫu là $n_\Omega = (m+n)!$.

A: "lần cuối lấy được bóng màu đỏ"

Bốc quả bóng đỏ ở lần cuối: m cách.

Bốc $m+n-1$ quả bóng đầu tiên: $(m+n-1)!$ cách.

Vậy có $m(m+n-1)!$ cách.

Do đó xác suất để lần cuối lấy được bóng đỏ là $\frac{n_A}{n_\Omega}=\frac{m(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{m}{m+n}$.

Câu 34: Số cách chọn 1 dãy 8 kí hiệu trong bảng mã là: $n(\Omega)=2^8$.

Gọi A là biến cố " lấy ra có nhiều nhất 6 kí hiệu là 1 ".

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "lấy ra có hơn 6 kí hiệu là 1".

$n(\overline{A})=C_8^7.C_1^1+C_8^8=9$

Xác suất để dãy lấy ra có nhiều nhất 6 kí hiệu 1 là: $P=1-\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=1-\frac{9}{256}=\frac{247}{256}$.

Câu 35: Bàn cờ vua có $8.8=64$ ô vuông.

Gọi A là biến cố: "Không hàng, không cột nào có nhiều hơn một quân cờ"

Cách 1:

Chọn một ô cho quân cờ đầu tiên có 64 cách, một ô cho quân thứ 2 có 63 cách,…

$n(\Omega)=64.63.62.61.60$

Chọn 1 ô cho quân cờ đầu tiên có 64 cách, khi đó nó sẽ nằm ở 1 hàng và một cột, quân cờ tiếp theo sẽ còn $7.7=49$ ô còn lại có thể đặt vào,…Cứ tiếp tục như vậy.

Do đó $n(A)=64.49.36.25.16$

$\Rightarrow P(A)=\frac{64.49.36.25.16}{64.63.62.61.60}=\frac{280}{5763}$.

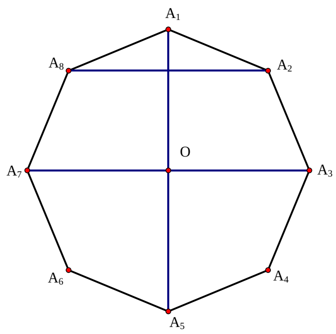
Cách 2:

Chọn 5 ô trong 64 ô để đặt 5 quân cờ. $n(\Omega)=C_{64}^5$

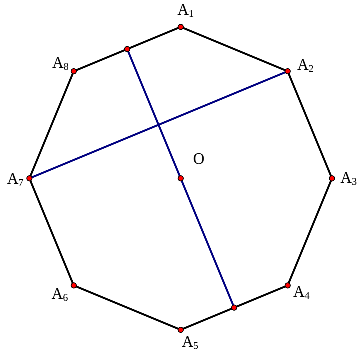
Chọn 5 hàng trong 8 hàng để đặt mỗi quân cờ vào một hàng, có C_8^5 cách. Công việc còn lại là xếp 5 quân cờ sao cho không có cột nào có nhiều hơn một quân cờ, nếu coi 5 hàng là 1 hàng thì công việc trở thành xếp có thứ tự 5 quân cờ vào 8 vị trí, có A_8^5 cách.

Do đó: $n(A)=C_8^5.A_8^5 \Rightarrow P(A)=\frac{C_8^5.A_8^5}{C_{64}^5}=\frac{280}{5763}$.

Câu 36: Số phần tử của không gian mẫu là $C_{20}^4=4845$.



Số hình thang cân có trục đối xứng đi qua các đỉnh của đa giác là $10C_9^2$.



Số hình thang cân có trục đối xứng không đi qua đỉnh của đa giác là $10C_{10}^2$.

Cứ 2 trục đối xứng qua đỉnh của đa giác thí xác định một hình chữ nhật, do vậy số hình chữ nhật được tạo thành là C_{10}^2.

Khi hai trục đối xứng của đa giác vuông góc với nhau thì ta chỉ xác định được một hình chữ nhật.

Khi đó số hình thang cân mà không phải là hình chữ nhật là $10C_9^2+10C_{10}^2-2C_{10}^2=720$

Vậy xác suất cần tính là $\dfrac{720}{4845}=\dfrac{48}{323}$.

Câu 37: Gọi O là tâm đối xứng của đa giác đều. Xét một đỉnh A bất kì của đa giác đều đó.

Khi đó có 22 cặp đỉnh đối xứng với nhau qua đường thẳng O**A.** Hay có 22 tam giác cân nhận A làm đỉnh.

Như vậy với mỗi đỉnh của đa giác đều có 22 tam giác cân (kể cả đều) nhận nó làm đỉnh của tam giác cân. Số tam giác đều có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác là: $\dfrac{45}{3}=15$.

Chú ý rằng mọi tam giác đều thì đều là tam giác cân tại 3 đỉnh. Nên trong số các tam giác cân đã đếm thì số tam giác đều được đếm 3 lần.

Vậy số tam giác cân mà không đều nhận các đỉnh của đa giác làm đỉnh là:

$45.22-3.15=945$

Số tam giác được tạo thành từ các đỉnh của đa giác đều là: $C_{45}^3=14190$

Vậy xác suất lấy được 3 đỉnh tạo thành một tam giác cân mà không phải tam giác đều là:

$P=\dfrac{63}{496}$.

Câu 38: Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)=9.A_9^6$

Trường hợp 1: $\overline{abcdef4}$ (số tận cùng là số 4 kể cả số 0 đứng đầu)

Xếp 2 số $3,5$ vào 2 vị trí e,f có $2!$ cách. Chọn 2 số trong 5 số $0;1;2;6;8$ có C_5^2 cách

Xếp 3 "nhóm" gồm 1 nhóm có 2 số $7,9$ và 2 số trong 5 số $0;1;2;6;8$ ta có: $2!.3!$ cách

Vậy có: $C_5^2.2!.3!.2=240$ (số)

Trường hợp 2: $\overline{0bcdef4}$

Xếp 2 số $3,5$ vào 2 vị trí e,f có $2!$ cách. Chọn 1 số trong 4 số $1;2;6;8$ có 4 cách

Xếp 2 "nhóm" gồm 1 nhóm có 2 số $7,9$ và 1 số trong 4 số $1;2;6;8$ ta có: $2!.2!$ cách

Vậy có: $C_4^1.2!.2!.2=32$ (số)

Trường hợp 3: $\overline{abcdefg}, g\in\{0;2;6;8\}$: có 4 cách

Hoán vị 3 số $3,4,5$ có $3!$ cách. Hoán vị 2 số $7,9$ có $2!$ cách

Chọn 1 số trong 4 số có 4 cách. Xếp 3 " nhóm " trên có $3!$ cách

Vậy có $4.2!.3!.3!.4 = 1152$ (số)

Trường hợp 4: $\overline{0bcdefg}, g \in \{2;6;8\}$: có 3 cách

Hoán vị 3 số $3,4,5$ có $3!$ cách. Hoán vị 2 số $7,9$ có $2!$ cách

Xếp 2 nhóm trên có $2!$ cách. Vậy có: $3.3!.2!.2! = 72$ (số)

Vậy $n(A) = 240 - 32 + 1152 - 72 = 1288$. Vậy $p(A) = \dfrac{1288}{9.A_9^6} = \dfrac{23}{9720}$.

Câu 39: Vì S có 6 phần tử nên số tập con của S là $2^6 = 64$. Mỗi bạn A và B có 64 cách chọn tập con, do vậy số phần tử của không gian mẫu là 64^2.

Ta tìm số cách chọn tập con thoả mãn yêu cầu.

Vì tập con của A và B chọn được có chung 3 phần tử nên các tập con này phải có ít nhất 3 phần tử.

Giả sử tập con của A và B gồm $x;y(x,y \ge 3)$ phần tử, khi đó:

A có C_6^x cách chọn tập con, lúc này S còn $(6-x)$ phần tử.

Chọn ra 3 phần tử gọi là a, b, c có trong tập con gồm x phần tử của A (để làm 3 phần tử chung với tập con mà B chọn) có C_x^3 cách;

Lúc này tập con mà B chọn đã có 3 phần tử chung với tập con của A là a, b, c ta cần chọn thêm $(y-3)$ phần tử khác trong $(6-x)$ phần tử còn lại sau khi A đã chọn tập con, có C_{6-x}^{y-3} cách.

Vậy có tất cả $C_6^x C_x^3 C_{6-x}^{y-3}$ cách.

Ta có điều kiện: $\begin{cases} x,y \ge 3 \\ y-3 \le 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 6 \\ 3 \le y \le 9-x \end{cases}$.

Khi đó số cách chọn tập con thỏa mãn điều kiện của bài toán là:

$$\sum_{y=3}^{6} C_6^3.C_3^3.C_3^{y-3} + \sum_{y=3}^{5} C_6^4.C_4^3.C_2^{y-3} + \sum_{y=3}^{4} C_6^5.C_5^3.C_1^{y-3} + \sum_{y=3}^{3} C_6^6.C_6^3.C_0^{y-3} = 160 + 240 + 120 + 20 = 540$$

Xác suất cần tính bằng $\dfrac{540}{64^2} = \dfrac{135}{1024}$

Câu 40: Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 8.8.7.6 = 2688$.

Đặt $A = \{0,\ 3,\ 6\}$, $B = \{1,\ 4,\ 7\}$, $C = \{2,\ 5,\ 8\}$.

Gọi x là một thuộc tập E và x chia hết cho 3.

Trường hợp 1: x có hai chữ số thuộc tập B, hai chữ số thuộc tập C. Số các số là $C_3^2.C_3^2.4! = 216$.

Trường hợp 2: x có một chữ số thuộc tập A, ba chữ số còn lại cùng thuộc tập B hoặc cùng thuộc tập C. Số các số là $2(3.4! - 3!) = 132$.

Trường hợp 3: x có hai chữ số thuộc tập A, một chữ số thuộc tập B và một chữ số thuộc tập C. Số các số x là $3.3.C_3^2.4! - 3.3.2.3! = 540$.

Gọi M là biến cố "Số được chọn chia hết cho 3''. Xác suất xảy ra biến cố M là $P(M) = \dfrac{216 + 132 + 540}{2688} = \dfrac{37}{112}$.

Câu 41: Giả sử số có năm chữ số có dạng $\overline{abcde}$.

Vì chia hết cho 5 nên e có hai cách chọn là chữ số 0 và 5

a có chín cách chọn vì $a \neq 0$

các vị trí b,c,d mỗi vị trí có mười cách chọn

Suy số phần tử tập S là $2.9.10^3 = 18000$ phần tử $\Rightarrow n(\Omega) = 18000$.

Số có năm chữ số bé nhất chia hết cho 5 là 10000 và lớn nhất là 99995.

Gọi B là biến cố: "một số lấy từ tập S và chia hết cho 3", khi đó số được lấy này phải chia hết cho 15. (vì vừa chia hết cho 3, vừa chia hết cho 5 và các số 3 và 5 đều là số nguyên tố).

Số có năm chữ số bé nhất chia hết cho 15 là 10005 và lớn nhất là 99990.

Vì chi hết cho 15 nên các số trong tập B này có thể xem như một cấp số cộng với $u_1 = 10005, u_n = 99990, d = 15, \Rightarrow n = \dfrac{99990 - 10005}{15} + 1 = 6000$

Hay $\Rightarrow n(B) = 6000$. Vậy $\Rightarrow P_B = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{6000}{18000} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 42: Gọi x,y,z lần lượt là số ghế cho vào phòng I,II,III

Ta có $\begin{cases} x+y+z=32 \\ x \geq 11 \\ y \geq 7 \\ z \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-10)+(y-6)+(z-4)=12 \\ x-10 \geq 1 \\ y-6 \geq 1 \\ z-4 \geq 1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a = x-10 \geq 1 \\ b = y-6 \geq 1 \\ c = z-4 \geq 1 \end{cases}$

Từ đó ta có: $\begin{cases} a+b+c=12 \\ a,b,c \geq 1 \end{cases}$

Đây chính là bài toán chia 12 kẹo cho 3 đứa trẻ sao cho mỗi đứa có ít nhất 1 cái kẹo,nên số cách chia là: $C_{12-1}^{3-1} = C_{11}^2 = 55$

Câu 43: Chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ trong 50 tấm thẻ nên $n(\Omega) = C_{50}^{10}$.

Từ 1 đến 50 có 25 số chẵn và 25 số lẻ.

Đặt

$$X = \{5;15;25;35;45\}$$
$$Y = \{10;20;30;40;50\}$$

Gọi *A*: "Chọn 10 tấm thẻ có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 5".

Trường hợp 1: 2 tấm thẻ chia hết cho 5 mang số lẻ.

Lấy 2 tấm thẻ mang số thuộc X có C_5^2 cách.

Lấy 3 tấm thẻ mang số lẻ từ 20 số lẻ còn lại (không thuộc X) có C_{20}^3 cách.

Lấy 5 tấm thẻ mang số chẵn từ 20 số chẵn (không thuộc Y) có C_{20}^5 cách.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố *A* là: $C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5$.

Trường hợp 2: 2 tấm thẻ chia hết cho 5 mang số chẵn.

Tương tự như trường hợp 1, suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố *A* là: $C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5$.

Trường hợp 3: 2 tấm thẻ chia hết cho 5 gồm 1 thẻ mang số lẻ và 1 thẻ mang số chẵn.

Lấy 1 tấm thẻ mang số thuộc X và 1 tấm thẻ mang số thuộc Y có $C_5^1C_5^1$ cách.

Lấy 4 tấm thẻ mang số lẻ từ 20 số lẻ còn lại (không thuộc X) có C_{20}^4.

Lấy 4 tấm thẻ mang số chẵn từ 20 số chẵn còn lại (không thuộc Y) có C_{20}^4.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $C_5^1.C_5^1.C_{20}^4.C_{20}^4$.

Khi đó: $n\left(A\right)=2.C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5+C_5^1.C_5^1.C_{20}^4.C_{20}^4$

Vậy $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{2.C_5^2.C_{20}^3.C_{20}^5+C_5^1.C_5^1.C_{20}^4.C_{20}^4}{C_{50}^{10}}\approx 0{,}09$.

Câu 44: Gọi x,y,z lần lượt là số bông hoa cắm vào ba lọ khác nhau, khi đó $x+y+z=6$ hay $\left(x+1\right)+\left(y+1\right)+\left(z+1\right)=9$. Do đó ta có thể xem bài toán như là chia 9 cây kẹo cho 3 học sinh khác nhau các em đều phải có kẹo. Do đó số phần tử không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=C_8^2=28$

Gọi A là biến cố “có lọ cắm ba bông hoa”. Để tính số phần tử của A ta có hai trường hợp

Trường hợp 1: Số bông hoa cắm ở các lọ là 3; 3; 0

Số cách cắm hoa là $C_3^1=3$

Trường hợp 2: Số bông hoa cắm ở các lọ là 3; 2; 1

Số cách cắm hoa là $3!=6$. Suy ra $n\left(A\right)=9$

Xác suất biến cố A là $p\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$.

Câu 45: Gọi số cần tìm của tập S có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Khi đó

Số cách chọn chữ số a_1 có 8 cách chọn vì $a_1\neq 0$.

Số cách chọn thứ tự cho $a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6$ trong tập $A\setminus\ a_1$ có A_8^5 cách.

Do đó tập S có $8.A_8^5=53760$ phần tử.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{53760}^1=53760$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn là một số chẵn và chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho 5". Suy ra $a_3\in\left\{0;5\right\}$. Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố X như sau:

Trường hợp 1. Với $a_3=0$: chữ số $a_6=\left\{2,4,6,8\right\}$ có 4 cách chọn, a_1 có 7 cách chọn, ba chữ số còn lại có A_6^3 cách chọn. Do đó trong tường hợp này có $4.7.A_6^3$ số.

Trường hợp 2. Với $\begin{cases}a_3=5\\a_6=0\end{cases}$**:** Bốn chữ số còn lại có A_7^4 cách chọn. Do đó trong tường hợp này có A_7^4 số.

Trường hợp 3. Với $\begin{cases}a_3=5\\a_6\neq 0\end{cases}$**:** chữ số a_6 có 4 cách chọn, a_1 có 6 cách chọn, ba chữ số còn lại có A_6^3 cách chọn. Do đó trong tường hợp này có $4.6.A_6^3$ số.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $n(X)=4.7.{A_6}^3+{A_7}^4+4.6.{A_6}^3=6450$.

Vậy xác suất cần tính $P\left(X\right)=\dfrac{n(X)}{n(\Omega)}=\dfrac{6450}{53760}=\dfrac{215}{1792}$.

Câu 46: Không gian mẫu của phép thử là $n\left(\Omega\right)=C_{15}^2.C_{17}^5=649740$

Gọi biến cố A “lấy được 5 viên ở hộp thứ hai có đủ hai mầu”.

Trường hợp 1: Lấy được ở hộp thứ nhất 2 viên xanh sẽ có C_7^2 cách lấy. Khi đó hộp thứ hai sẽ có 9 viên xanh và 8 viên đỏ nên có $C_{17}^5 - C_9^5 - C_8^5$ cách lấy hai viên đủ hai mầu.

$\Rightarrow C_7^2.\left(C_{17}^5 - C_9^5 - C_8^5\right) = 131313$ (cách)

Trường hợp 2: TH2: Lấy được ở hộp thứ nhất 2 viên đỏ sẽ có C_8^2 cách lấy. Khi đó hộp thứ hai sẽ có 7 viên xanh và 10 viên đỏ nên có $C_{17}^5 - C_7^5 - C_{10}^5$ cách lấy hai viên đủ hai mầu.

$\Rightarrow C_8^2.\left(C_{17}^5 - C_7^5 - C_{10}^5\right) = 165620$ (cách)

Trường hợp 3: TH3: Lấy được ở hộp thứ nhất 1 viên xanh và 1 viên đỏ sẽ có $C_7^1.C_8^1$ cách lấy. Khi đó hộp thứ hai sẽ có 8 viên xanh và 9 viên đỏ nên có $C_{17}^5 - C_8^5 - C_9^5$ cách lấy hai viên đủ hai mầu.

$\Rightarrow C_7^1.C_8^1.\left(C_{17}^5 - C_8^5 - C_9^5\right) = 336336$ (cách)

Do đó $n\left(A\right) = 633269$. Vậy $P\left(A\right) = \dfrac{633269}{649740}$

Câu 47: Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^3 = 364$.

Gọi A là biến cố: "Tam giác được chọn trong X không có cạnh nào là cạnh của đa giác"

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Tam giác được chọn trong X có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác"

Trường hợp 1: Nếu tam giác được chọn có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác thì có 14 tam giác thỏa mãn.

Trường hợp 1: Nếu tam giác được chọn có đúng một cạnh là cạnh của đa giác thì có 14.10=140 tam giác thỏa mãn.

Do đó $n(\overline{A}) = 14 + 140 = 154$. Suy ra số phần tử của biến cố A là: $n(A) = n(\Omega) - n(\overline{A}) = 210$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{15}{26}$.

Câu 48: Ta có $34034175 = 7^5.3^4.5^2$. Mỗi ước nguyên dương của số 34034175 là một số có dạng $7^i.3^j.5^k$, trong đó $i \in \left\{0;1;2;3;4;5\right\}$, $j \in \left\{0;1;2;3;4\right\}$, $k \in \left\{0;1;2\right\}$.

Số ước nguyên dương bằng số bộ $\left(i;j;k\right)$ được chọn từ 3 tập trên. Suy ra số cách chọn bộ $\left(i;j;k\right)$ từ 3 tập trên là 6.5.3 = 90(cách) nên số phần tử của S là 90.

Có C_{90}^2 cách chọn ngẫu nhiên hai phần tử thuộc S.

Mỗi ước nguyên dương không chia hết cho 7 của số 34034175 là một số có dạng $7^0.3^j.5^k$

Suy ra số các ước của 34034175 không chia hết cho 7 trong tập S là 5.3 = 15.

Do đó có C_{15}^2 cách lấy hai phần tử thuộc S mà không chia hết cho 7.

Suy ra xác suất lấy được hai số không chia hết cho 7 trong S là $P = \dfrac{C_{15}^2}{C_{90}^2} = \dfrac{7}{267}$

Câu 49: Gọi số 10 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$

Số phần tử không gian mẫu $n\left(\Omega\right) = 5.6^9 = 50388480$ (số).

Cách 1: Gọi A: " Số đó có số 3 lặp lại hai lần, số 4 lặp lại ba lần, số 5 lặp lại hai lần và các chữ số khác có mặt đúng một lần." $n\left(A\right) = \dfrac{10!}{2!.3!.2!.1!.1!.1!} - \dfrac{9!}{2!.3!.2!1!.1!} = 136080$ (số).

Xác suất cần tìm là: $p\left(A\right) = \dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{136080}{50388480} = \dfrac{7}{2592}$.

Cách 2: Gọi A: " Số đó có số 3 lặp lại hai lần, số 4 lặp lại ba lần, số 5 lặp lại hai lần và các chữ số khác có mặt đúng một lần."

Trường hợp 1: $a_1 = 3$

Số cách xếp số 3 còn lại là C_9^1. Số cách xếp số 4 là C_8^3. Số cách xếp số 5 là C_5^2

Số cách xếp các số còn lại : $3!$. Có : $C_9^1.C_8^3.C_5^2.3!$ cách xếp.

Trường hợp 2: $a_1 = 4$

Số cách xếp hai số 4 còn lại là C_9^2. Số cách xếp số 3 là C_7^2. Số cách xếp số 5 là C_5^2

Số cách xếp các số còn lại : $3!$ Có : $C_9^2.C_7^2.C_5^2.3!$ cách xếp.

Trường hợp 3: : $a_1 = 5$

Số cách xếp số 5 còn lại là C_9^1. Số cách xếp số 3 là C_8^2. Số cách xếp số 4 là C_6^3

Số cách xếp các số còn lại : $3!$ Có : $C_9^1.C_8^2.C_6^3.3!$ cách xếp.

Trường hợp 4: : $a_1 \notin \{3;4;5\}$: a_1 có 2 cách chọn.

Số cách xếp số 3 còn lại là C_9^2. Số cách xếp số 4 là C_7^3. Số cách xếp số 5 là C_5^2

Số cách xếp các số còn lại : $3!$ Có : $C_9^1.C_8^3.C_5^2.3!$ cách xếp.

$n(A) = C_9^1.C_8^3.C_5^2.3! + C_9^2.C_7^2.C_5^2.3! + C_9^1.C_8^2.C_6^3.3! + C_9^1.C_8^3.C_5^2.3! = 136080$ (số).

Xác suất cần tìm là: $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{136080}{50388480} = \dfrac{7}{2592}$.

Câu 50: **Cách 1:**

Gọi số có 7 chữ số đôi một khác nhau là a, $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_5a_7}$, $a_1 \neq 0$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.A_9^6 = 544320$. Gọi A là biến số cần tính xác suất.

Ta có $a_7 \in \{0;4;6;8\}$.

Trường hợp 1: $a_7 = 0$

Xếp các chữ số 2, 3, 4 vào số a có C_6^3 cách, xếp 3 chữ số còn lại của số a có A_6^3 cách.

Vậy trường hợp 1: có $C_6^3.A_6^3 = 2400$ số.

Trường hợp 2: $a_7 = 4$

Nếu $a_1 = 2$ thì có 5 cách xếp chữ số 3, các chữ số còn lại có A_7^4 cách.

Nếu $a_1 \neq 2$ thì a_1 có 6 cách chọn $\left(a_1 \notin \{0;2;3;4\}\right)$, xếp các chữ số 2, 3 có C_5^2 cách, các chữ số còn lại có A_6^3 cách. Vậy trường hợp 2 có $5.A_7^4 + 6.C_5^2.A_6^3 = 11400$ số.

Trường hợp 3: $a_7 \in \{6;8\}$. a_7 có 2 cách chọn.

Nếu $a_1 = 2$ thì có C_5^2 cách xếp các chữ số 3, 4, các chữ số còn lại có A_6^3 cách.

Nếu $a_1 \neq 2$ thì a_1 có 5 cách chọn $\left(a_1 \notin \{0;2;3;4;a_7\}\right)$, xếp các chữ số 2, 3, 4 có C_5^3 cách, các chữ số còn lại có A_5^2 cách. Vậy trường hợp 3 có $2\left(C_5^2.A_6^3 + 5.C_5^3.A_5^2\right) = 4400$ số.

Do đó $n(A) = 2400 + 11400 + 4400 = 18200$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{18200}{544320} = \dfrac{65}{1944}$.

TÀI LIỆU LUYỆN THI ĐẠI HỌC NĂM 2023

PHAN NHẬT LINH

Chuyên luyện thi THPT Quốc Gia 10,11,12

Điện thoại/Zalo: 0817.098.716 – Email: linh.phannhat241289@gmail.com

Facebook: fb.com/nhatlinh.phan.1401/

CHỊU TRÁCH NHIỆM NỘI DUNG

PHAN NHẬT LINH

BIÊN TẬP

PHAN NHẬT LINH

THIẾT KẾ BÌA

PHAN NHẬT LINH

CHINH PHỤC VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO GIẢI TÍCH