

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ - GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ

- Biểu thức hữu tỉ là một phân thức hoặc biểu thị một dãy các phép toán: cộng, trừ, nhân chia trên những phân thức.

- Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức nhờ các quy tắc của phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đã học.

2. Giá trị của phân thức

- Giá trị của một phân thức chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu thức khác 0.

- Chú ý: Biểu thức hữu tỉ có hai biến x và y thì giá trị của biểu thức đó chỉ được xác định với các cặp số $(x;y)$ làm cho giá trị của mẫu thức khác 0.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A.CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định của phân thức.

Phương pháp giải: Ta xác định các giá trị của biến để mẫu thức khác 0.

Bài 1: Tìm x để giá trị của mỗi phân thức sau xác định:

a) $\frac{5x}{2x+6}$; b) $\frac{-2}{x^2-4}$; c) $\frac{2x-1}{4x^2+2x}$; d) $\frac{x-2}{x^3+27}$

Bài 2: Tìm x để giá trị của mỗi phân thức sau xác định:

a) $\frac{4a}{3a-8}$; b) $\frac{3b-6}{b^2-2b}$; c) $\frac{3}{x^2+5}$; d) $\frac{2y^2}{y^3-3y+2}$.

Bài 3: Tìm x để giá trị mỗi phân thức sau được xác định:

a) $\frac{x^2-1}{9x^2-16}$; b) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9}$; c) $\frac{3x-4}{2x^2+3x}$; d) $\frac{x+1}{x^3-4x^2+3x}$.

Dạng 2: Biến đổi biểu thức hữu tỷ thành phân thức.

Phương pháp giải: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1. Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi;

Bước 2. Biến đổi cho tới khi được một phân thức có dạng $\frac{A}{B}$ với A và B là các đa thức, B khác đa thức 0.

Bài 4: Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} \text{ với } x \neq 0 \text{ và } x \neq \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } B = \frac{1 + \frac{4}{y-2}}{1 + \frac{2y}{y^2 + 2y + 4}} \text{ với } y \neq \pm 2.$$

Bài 5: Đưa các biểu thức sau thành phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{\frac{x}{4} - 2 + \frac{15}{4x}}{\frac{x}{2} + \frac{6}{x} - \frac{7}{2}} \text{ với } x \neq 0; 3; 4.$$

$$\text{b) } \frac{3y - \frac{1}{9y^2}}{1 + \frac{1}{3y} + \frac{1}{9y^2}} \text{ với } y \neq 0.$$

Bài 6: Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức:

$$\text{a) } M = \frac{4 - \frac{4n}{m} + \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m} - \frac{2}{n}}, m \neq 0, n \neq 0, n \neq 2m.$$

$$\text{b) } N = \frac{1}{3} + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+3}}, x \neq -3.$$

Dạng 3: Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỷ.

Phương pháp giải: Sử dụng kết hợp các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia phân thức đại số đã học để biến đổi.

Bài 7: Thực hiện các phép tính sau:

$$\text{a) } A = (4x^2 - 1) \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} - 1 \right) \text{ với } x \neq \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{3}{x+3} - \frac{9}{x^2 + 6x + 9} \right) : \left(\frac{3}{x^2 - 9} + \frac{1}{3-x} \right) \text{ với } x \neq 0, x \neq \pm 3.$$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \left(\frac{4a+b}{a^2 - 4ab} + \frac{4a-b}{a^2 + 4ab} \right) \cdot \frac{a^2 - 16b^2}{a^2 + b^2} \text{ với } a \neq 0, a \neq \pm 4b;$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{y}{y+2} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3y^2}{4-y^2} \right) \text{ với } y \neq \pm 1; y \neq \pm 2.$$

$$\text{Bài 9: Cho biểu thức } P = \frac{x^2 + 2x}{2x+12} + \frac{x-6}{x} + \frac{108-6x}{2x(x+6)},$$

a) Tìm điều kiện xác định;

b) Rút gọn phân thức;

c) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức P bằng $\frac{3}{2}$;

d) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng $-\frac{9}{2}$;

e) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng 1.

Dạng 4: Tìm x để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp giải: Ta sử dụng các kiến thức sau:

- $\frac{A}{B} > 0$ khi và chỉ khi A và B cùng dấu;

$\frac{A}{B} > 0$ khi và chỉ khi A và B trái dấu.

- Hằng đẳng thức đáng nhớ và chú ý $a^2 \geq 0$ với mọi giá trị của a .

- Với $a; b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$ ta có: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \in U'(a)$.

Bài 10: Cho phân thức $A = \frac{x+2}{x-1}$ với $x \neq 1$;

a) Tìm x để $A > 1$;

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

Bài 11: Cho phân thức $B = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}$ với $x \neq 3$;

a) Tìm x để $B < 0$;

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B \in \mathbb{Z}$.

Bài 12:

a) Tìm x để phân thức $A = \frac{8}{x^2 - 4x + 12}$ đạt giá trị lớn nhất;

b) Tìm x để phân thức $B = -\frac{5}{x^2 + 2x + 11}$ đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định của phân thức.

Bài 1: Tìm x để giá trị của mỗi phân thức sau xác định:

- a) $\frac{5x}{2x+6}$; b) $\frac{-2}{x^2-4}$; c) $\frac{2x-1}{4x^2+2x}$; d) $\frac{x-2}{x^3+27}$

Hướng dẫn

- a) $x \neq -3$ b) $x \neq \pm 2$ c) $x \neq 0; x \neq -\frac{1}{2}$ d) $x \neq 3$

Bài 2: Tìm x để giá trị của mỗi phân thức sau xác định:

- a) $\frac{4a}{3a-8}$; b) $\frac{3b-6}{b^2-2b}$; c) $\frac{3}{x^2+5}$; d) $\frac{2y^2}{y^3-3y+2}$.

Hướng dẫn

- a) $a \neq \frac{8}{3}$ b) $b \neq 0; b \neq 2$ c) $x \in \mathbb{R}$ d) $y \neq 1; y \neq 2$

Bài 3: Tìm x để giá trị mỗi phân thức sau được xác định:

- a) $\frac{x^2-1}{9x^2-16}$; b) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9}$; c) $\frac{3x-4}{2x^2+3x}$; d) $\frac{x+1}{x^3-4x^2+3x}$.

Hướng dẫn

a) $x \neq \pm \frac{4}{3}$ b) $x \neq 3$ c) $x \neq 0; x \neq \frac{-3}{2}$ d) $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 3$.

Dạng 2: Biến đổi biểu thức hữu tỷ thành phân thức.

Bài 4: Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức:

a) $A = \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}}$ với $x \neq 0$ và $x \neq \frac{1}{2}$; b) $B = \frac{1 + \frac{4}{y-2}}{1 + \frac{2y}{y^2 + 2y + 4}}$ với $y \neq \pm 2$.

Hướng dẫn

a) $A = \left(2 + \frac{1}{x}\right) : \left(2 - \frac{1}{x}\right) = \frac{2x+1}{2x-1}$
b) $B = \left(1 + \frac{4}{y-2}\right) : \left(1 + \frac{2y}{y^2 + 2y + 4}\right) = \frac{y+2}{y-2} : \frac{y^2+4y+4}{y^2+2y+4} = \frac{y+2}{y-2} \cdot \frac{y^2+2y+4}{(y+2)^2} = \frac{y^2+2y+4}{y+2}$

Bài 5: Đưa các biểu thức sau thành phân thức:

a) $A = \frac{\frac{x}{4} - 2 + \frac{15}{4x}}{\frac{x}{2} + \frac{6}{x} - \frac{7}{2}}$ với $x \neq 0; 3; 4$. b) $\frac{3y - \frac{1}{9y^2}}{1 + \frac{1}{3y} + \frac{1}{9y^2}}$ với $y \neq 0$.

Hướng dẫn

a) $A = \left(\frac{x}{4} - 2 + \frac{15}{4x}\right) : \left(\frac{x}{2} + \frac{6}{x} - \frac{7}{2}\right) = \frac{x^2 - 8x + 15}{4x} : \frac{x^2 - 7x + 12}{2x} = \frac{x-5}{2(x-4)}$
b) $B = \left(3y - \frac{1}{9y^2}\right) : \left(1 + \frac{1}{3y} + \frac{1}{9y^2}\right) = \frac{27y^3 - 1}{9y^2} : \frac{9y^2 + 3y + 1}{9y^2} = 3y - 1$

Bài 6: Biến đổi các biểu thức sau thành phân thức:

a) $M = \frac{4 - \frac{4n}{m} + \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m} - \frac{2}{n}}, m \neq 0, n \neq 0, n \neq 2m$. b) $N = \frac{1}{3} + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+3}}, x \neq -3$.

Hướng dẫn

a) Ta có $M = \frac{(2m-n)^2}{m^2} \cdot \frac{m \cdot n}{n-2m} = \frac{(n-2m)n}{m}$.
b) Ta có $N = \frac{1}{3} + \frac{x(x+3)}{3} = \frac{x^2 + 3x + 1}{3}$

Dạng 3: Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỷ.

Bài 7: Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = (4x^2 - 1) \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} - 1 \right)$ với $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

b) $B = \left(\frac{3}{x+3} - \frac{9}{x^2+6x+9} \right) : \left(\frac{3}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} \right)$ với $x \neq 0, x \neq \pm 3$.

Hướng dẫn

a) $A = (4x^2 - 1) \frac{(2x+1) - (2x-1) - (4x^2 - 1)}{(2x+1)(2x-1)} = 3 - 4x^2$

b) $B = \frac{3}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{-x} = \frac{9-3x}{x+3}$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \left(\frac{4a+b}{a^2-4ab} + \frac{4a-b}{a^2+4ab} \right) \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2}$ với $a \neq 0, a \neq \pm 4b$;

b) $B = \left(\frac{y}{y+2} + 1 \right) : \left(1 - \frac{3y^2}{4-y^2} \right)$ với $y \neq \pm 1; y \neq 2$.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{8(a^2+b^2)}{a(a^2-16b^2)} \cdot \frac{a^2-16b^2}{a^2+b^2} = \frac{8}{a}$

b) $B = \frac{2y+2}{y+2} \cdot \frac{4-y^2}{4-4y^2} = \frac{2-y}{2-2y}$

Bài 9: Cho biểu thức $P = \frac{x^2+2x}{2x+12} + \frac{x-6}{x} + \frac{108-6x}{2x(x+6)}$,

a) Tìm điều kiện xác định;

b) Rút gọn phân thức;

c) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức P bằng $\frac{3}{2}$;

d) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng $-\frac{9}{2}$;

e) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức bằng 1.

Hướng dẫn

a) Tìm được $x \neq -6; x \neq 0$

b) Gọi ý: $x^3 + 4x^2 - 6x + 36 = (x+6)(x^2 - 2x + 6)$

Ta tìm được $P = \frac{x^2 - 2x + 6}{2x}$

c) Ta có $P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases} (TM)$

d) Tương tự câu c) tìm được $x = -6 (KTM)$ hoặc $x = -1 (TM)$

e) $P = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 2 = 0$ (vô nghiệm)

Vì $(x-2)^2 + 2 \geq 2 > 0$ với mọi x. Do vậy $x \in \emptyset$

Dạng 4: Tìm x để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 10: Cho phân thức $A = \frac{x+2}{x-1}$ với $x \neq 1$;

a) Tìm x để $A > 1$;

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $A > 1$ dẫn đến $\frac{3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (TMĐK)

b) Ta có: $A = 1 + \frac{3}{x-1}$ nên $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-1)$ nhận giá trị là Ư(3). Từ đó tìm được $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$

Bài 11: Cho phân thức $B = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}$ với $x \neq 3$;

a) Tìm x để $B < 0$;

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$ nên $B < 0 \Leftrightarrow x < 3$

b) Ta có $B = x + 2 + \frac{8}{x-3}$ nên $B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-3)$ nhận giá trị là Ư(8). Từ đó tìm được $x \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\}$.

Bài 12:

a) Tìm x để phân thức $A = \frac{8}{x^2 - 4x + 12}$ đạt giá trị lớn nhất;

b) Tìm x để phân thức $B = -\frac{5}{x^2 + 2x + 11}$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a) Ta có $x^2 - 4x + 12 = (x-2)^2 + 8 \geq 8$ hay $\frac{1}{x^2 - 4x + 12} \leq \frac{1}{8}$ dẫn đến $M \leq 1$. Từ đó tìm được giá trị lớn nhất của $M = 1$ khi $x = 2$.

b) Tương tự ta có $x^2 + 2x + 11 = (x+1)^2 + 10 \geq 10$ hay $\frac{1}{x^2 + 2x + 11} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow N \geq -\frac{1}{2}$

Giá trị nhỏ nhất của $N = -\frac{1}{2}$ khi $x = -1$

Chú ý : Ở bài 12. Ta dựa vào lập luận

- Nếu $M \geq a \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{M} \leq \frac{1}{a}$;

- Nếu $0 \leq M \leq a \Leftrightarrow \frac{1}{M} \geq \frac{1}{a}$

B.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định của phân thức.

Bài 1: Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a) $\frac{x^2 - 4}{9x^2 - 16}$

b) $\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

d) $\frac{5x - 3}{2x^2 - x}$

Bài 2: Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a) $\frac{1}{x^2 + y^2}$

b) $\frac{x^2y + 2x}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\frac{5x + y}{x^2 + 6x + 10}$

d) $\frac{x + y}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2}$

Bài 3: Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$

b) $\frac{2}{(x + 1)(x - 3)}$

c) $\frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

d) $\frac{4}{x^2 + y^2 - 2x + 2}$

Dạng 2: Biến đổi biểu thức hữu tỷ thành phân thức.

Bài 4: Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{5x}{10}$

b) $\frac{4xy}{2y} (y \neq 0)$

c) $\frac{21x^2y^3}{6xy} (xy \neq 0)$

d) $\frac{2x + 2y}{4}$

e) $\frac{5x - 5y}{3x - 3y} (x \neq y)$

f) $\frac{-15x(x - y)}{3(y - x)} (x \neq y)$

Bài 5: Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{x^2 - 16}{4x - x^2} (x \neq 0, x \neq 4)$

b) $\frac{x^2 + 4x + 3}{2x + 6} (x \neq -3)$

c) $\frac{15x(x + y)^3}{5y(x + y)^2} (y(x + y) \neq 0)$

d) $\frac{x^2 - xy}{3xy - 3y^2} (x \neq y, y \neq 0)$

Bài 6: Rút gọn, rồi tính giá trị các phân thức sau:

a) $A = \frac{(2x^2 + 2x)(x - 2)^2}{(x^3 - 4x)(x + 1)}$ với $x = \frac{1}{2}$

b) $B = \frac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^3 + y^3}$ với $x = -5, y = 10$

Dạng 3: Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỷ.

Bài 7: Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{x-5}{5} + \frac{1-x}{5}$$

$$b) \frac{x-y}{8} + \frac{2y}{8}$$

$$c) \frac{x^2-x}{xy} + \frac{1-4x}{xy}$$

$$d) \frac{5xy^2-x^2y}{3xy} + \frac{4xy^2+x^2y}{3xy}$$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{2x+4}{10} + \frac{2-x}{15}$$

$$b) \frac{3x}{10} + \frac{2x-1}{15} + \frac{2-x}{20}$$

$$c) \frac{x+1}{2x-2} + \frac{x^2+3}{2-2x^2}$$

$$d) \frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x-4x^2}$$

Bài 9: Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2}$$

$$b) \frac{2x^2-10xy}{2xy} + \frac{5y-x}{y} + \frac{x+2y}{x}$$

$$c) \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{-3x}{x^2-y^2}$$

$$d) x+y + \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

Dạng 4: Tìm x để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 10: Tìm các giá trị nguyên của biến số x để biểu thức đã cho cũng có giá trị nguyên:

$$a) \frac{x^3-x^2+2}{x-1}$$

$$b) \frac{x^3-2x^2+4}{x-2}$$

$$c) \frac{2x^3+x^2+2x+2}{2x+1}$$

Bài 11: Tìm giá trị của biến x để:

$$a) P = \frac{1}{x^2+2x+6} \text{ đạt giá trị lớn nhất}$$

$$b) Q = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định của phân thức

Bài 1: Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a) $\frac{x^2 - 4}{9x^2 - 16}$ điều kiện xác định $x \neq \pm \frac{4}{3}$ b) $\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$ điều kiện xác định $x \neq 2$

c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ điều kiện xác định $x \neq \pm 1$ d) $\frac{5x - 3}{2x^2 - x}$ điều kiện xác định $x \neq \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

Bài 2: Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a) $\frac{1}{x^2 + y^2}$ điều kiện xác định $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ b) $\frac{x^2 y + 2x}{x^2 - 2x + 1}$ điều kiện xác định $x \neq 1$

c) $\frac{5x + y}{x^2 + 6x + 10}$ điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

d) $\frac{x + y}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2}$ điều kiện xác định $\begin{cases} x \neq -3 \\ y \neq 2 \end{cases}$

Bài 3: Tìm điều kiện xác định của phân thức:

a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$ điều kiện xác định $x \neq \pm 1$ b) $\frac{2}{(x + 1)(x - 3)}$ điều kiện xác định $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

c) $\frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$ điều kiện xác định $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

d) $\frac{4}{x^2 + y^2 - 2x + 2}$ điều kiện xác định $x^2 + y^2 - 2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$)

Dạng 2: Biến đổi biểu thức hữu tỷ thành phân thức.

Bài 4: Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{5x}{10} = \frac{x}{2}$

b) $\frac{4xy}{2y} (y \neq 0) = 2x$

c) $\frac{21x^2 y^3}{6xy} (xy \neq 0) = \frac{7}{2} xy^2$

d) $\frac{2x + 2y}{4} = \frac{x + y}{2}$

e) $\frac{5x - 5y}{3x - 3y} (x \neq y) = \frac{5}{3}$

f) $\frac{-15x(x - y)}{3(y - x)} (x \neq y)$

= 5

Bài 5: Rút gọn các phân thức sau:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 16}{4x - x^2} \quad (x \neq 0, x \neq 4) \quad \text{b)}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{2x + 6} \quad (x \neq -3)$$

$$= \frac{(x-4)(x+4)}{x(4-x)} = \frac{-(x+4)}{x}$$

$$= \frac{(x+1)(x+3)}{2(x+3)} = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{c) } \frac{15x(x+y)^3}{5y(x+y)^2} \quad (y, (x+y) \neq 0)$$

$$= \frac{3x(x+y)}{y}$$

$$\text{d) } \frac{x^2 - xy}{3xy - 3y^2} \quad (x \neq y, y \neq 0)$$

$$= \frac{x(x-y)}{3y(x-y)} = \frac{x}{3y}$$

Bài 6: Rút gọn, rồi tính giá trị các phân thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{(2x^2 + 2x)(x-2)^2}{(x^3 - 4x)(x+1)} \quad \text{với } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } A = \frac{(2x^2 + 2x)(x-2)^2}{(x^3 - 4x)(x+1)} = \frac{2x(x+2)(x-2)^2}{x(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{2(x-2)}{x+1}$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{2\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2 \cdot \frac{-3}{2}}{\frac{3}{2}} = -2$$

$$\text{b) } B = \frac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^3 + y^3} \quad \text{với } x = -5, y = 10$$

$$\text{Ta có } B = \frac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^3 + y^3} = \frac{x(x^2 - xy + y^2)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)} = \frac{x}{x+y}$$

$$\text{Thay } x = -5, y = 10 \text{ vào biểu thức B ta có: } B = \frac{-5}{-5+10} = -1$$

Dạng 3: Thực hiện phép tính với các biểu thức hữu tỷ.

Bài 7: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{x-5}{5} + \frac{1-x}{5} = \frac{-4}{5}$$

$$\text{b) } \frac{x-y}{8} + \frac{2y}{8} = \frac{x+y}{8}$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - x}{xy} + \frac{1 - 4x}{xy} = \frac{x^2 - 5x + 1}{xy}$$

$$d) \frac{5xy^2 - x^2y}{3xy} + \frac{4xy^2 + x^2y}{3xy} = \frac{xy(5y-x)}{3xy} + \frac{xy(4y+x)}{3xy} = \frac{5y-x}{3} + \frac{4y+x}{3} = 3y$$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{2x+4}{10} + \frac{2-x}{15} = \frac{x+2}{5} + \frac{2-x}{15} = \frac{3(x+2)}{15} + \frac{2-x}{15} = \frac{2x+8}{15}$$

$$b) \frac{3x}{10} + \frac{2x-1}{15} + \frac{2-x}{20} = \frac{18x}{60} + \frac{4(2x-1)}{60} + \frac{3(2-x)}{60} = \frac{23x+2}{60}$$

$$c) \frac{x+1}{2x-2} + \frac{x^2+3}{2-2x^2} = \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{x^2+3}{2(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+3}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x+4}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$d) \frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x-4x^2} = \frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x(1-2x)} = \frac{-(2x-1)^2}{2x(2x-1)} + \frac{4x^2}{2x(2x-1)} + \frac{1}{2x(2x-1)}$$

$$= \frac{4x}{2x(2x-1)} = \frac{2}{2x-1}$$

Bài 9: Thực hiện phép tính:

$a) \frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2}$ $= \frac{x^2}{x(x^2-4)} + \frac{6}{3(2-x)} + \frac{1}{x+2}$ $= \frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2}$ $= \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$ $= \frac{-6}{(x+2)(x-2)}$	$b) \frac{2x^2-10xy}{2xy} + \frac{5y-x}{y} + \frac{x+2y}{x}$ $= \frac{x-5y}{y} + \frac{5y-x}{y} + \frac{x+2y}{x} = \frac{x+2y}{x}$
$c) \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{-3x}{x^2-y^2}$ $= \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} + \frac{(x-y)}{(x+y)(x-y)} + \frac{-3}{(x+y)(x-y)}$	$d) x+y + \frac{x^2+y^2}{x+y}$ $= \frac{(x+y)^2}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{x+y}$

$= \frac{3x-3y-3}{(x-y)(x+y)}$	$= \frac{2x^2 + 2y^2 + 2xy}{x+y}$
--------------------------------	-----------------------------------

Dạng 4: Tìm x để giá trị của một phân thức đã cho thỏa mãn điều kiện cho trước.

Bài 10: Tìm các giá trị nguyên của biến số x để biểu thức đã cho cũng có giá trị nguyên:

a) $\frac{x^3 - x^2 + 2}{x-1} = \frac{x^2(x-1)+2}{x-1} = x^2 + \frac{2}{x-1}$. Do $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức nhận giá trị nguyên thì $x-1 \in U(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$. Ta có bảng giá trị:

$x-1$	-2	-1	1	2
x	-1	0	2	3

Vậy $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$ thì biểu thức có giá trị nguyên.

b) $\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x-2} = \frac{x^2(x-2)+4}{x-2} = x^2 + \frac{4}{x-2}$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức nhận giá trị nguyên thì $x-2 \in U(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Ta có bảng giá trị:

$x-2$	-4	-2	-1	1	2	4
x	-2	-1	0	2	3	6

Vậy $x \in \{-2, -1, 0, 2, 3, 6\}$ thì biểu thức có giá trị nguyên.

c) $\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{2x+1} = \frac{x^2(2x+1) + (2x+1) + 1}{2x+1} = x^2 + 1 + \frac{1}{2x+1}$

Do $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức nhận giá trị nguyên thì $2x+1 \in U(1) = \{\pm 1\}$.

$x-2$	-1	1
x	1	3

Vậy $x \in \{1, 3\}$ thì biểu thức có giá trị nguyên.

Bài 11: Tìm giá trị của biến x để:

a) $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6} = \frac{1}{(x+1)^2 + 5}$

Để $P_{\max}$ thì $(x+1)^2 + 5 \min$ mà $(x+1)^2 + 5 \geq 5$ Do đó $\max P = \frac{1}{5}$ khi $x = -1$

b) $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$ĐS: \min Q = \frac{3}{4} \text{ khi } x = 1.$$

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====