# CHUYÊN ĐỀ : CÁC BÀI TOÁN VỀ TỨ GIÁC

## MỤC LỤC

# CHỦ ĐỀ 1: TỨ GIÁC

## Dạng 1. Tính số đo góc của tứ giác

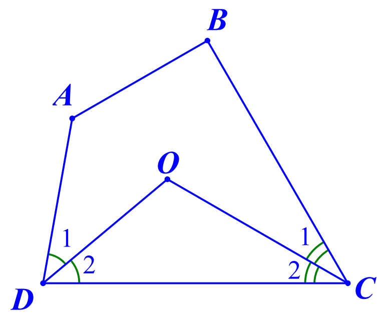
- ***Phương pháp:*** Vân dụng định lý tổng 4 góc của tứ giác, tính chất góc ngoài của tam giác, hai góc bù nhau, phụ nhau
- ***Bài tập vận dụng:***

**Bài 1.1** Cho tứ giác ABCD, $\widehat{A}-\widehat{B}=40°$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{COD}=110°$. Chứng minh rằng $AB\perp BC$.

- ***Tìm cách giải***

Muốn chứng minh $AB\perp BC$ ta chứng minh $\widehat{B}=90°$.

Đã biết hiệu $\widehat{A}-\widehat{B}$ nên cần tính tổng $\widehat{A}+\widehat{B}$.




- ***Lời giải:***

Xét $\Delta COD$ có $\widehat{COD}=180°-\left(\widehat{C_2}+\widehat{D_2}\right)=180°-\dfrac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}$

(vì $\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$; $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$).

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{C}+\widehat{D}=360°-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)$, do đó

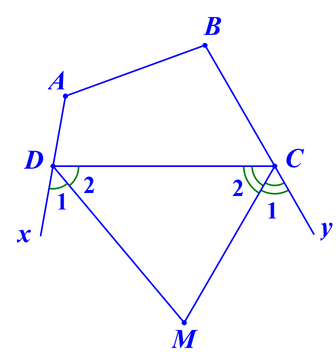
$$\widehat{COD}=180°-\frac{360°-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)}{2}=180°-180°+\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$$

Vậy $\widehat{COD}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$. Theo đề bài $\widehat{COD}=110°$ nên $\widehat{A}+\widehat{B}=220°$.

Mặt khác, $\widehat{A}-\widehat{B}=40°$ nên $\widehat{B}=\left(220°-40°\right):2=90°$. Do đó $AB\perp BC$.

**Bài 1.2** Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A}+\widehat{B}=220°$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K. Tính số đo của góc CKD.

***Lời giải:***




Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{A}+\widehat{B}=360^0-\left(\widehat{C}+\widehat{D}\right)$

$\widehat{CDx}+\widehat{DCy}=\left(180^0-\widehat{D}\right)+\left(180^0-\widehat{C}\right)=360^0-\left(\widehat{C}+\widehat{D}\right)$

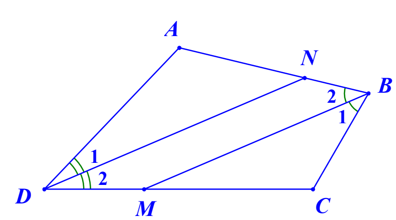
Suy ra: $\widehat{CDx}+\widehat{DCy}=\widehat{A}+\widehat{B}=220°$

$\Rightarrow\dfrac{\widehat{CDx}+\widehat{CDy}}{2}=110°$. Do đó $\widehat{D_2}+\widehat{C_2}=110°$.

Xét $\Delta CKD$ có: $\widehat{CKD}=180°-\left(\widehat{D_2}+\widehat{C_2}\right)=180°-110°=70°$

**Bài 1.3** Tứ giác ABCD có $\widehat{A}=\widehat{C}$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc B và góc D song song với nhau hoặc trùng nhau.

***Lời giải:***




Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{B}+\widehat{D}=360°-\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)=360°-2\widehat{C}$.

Vì $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$, $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$ nên $\widehat{B_1}+\widehat{D_1}=180°-\widehat{C}\Rightarrow\widehat{B_1}+\widehat{D_1}+\widehat{C}=180°$.
(1)

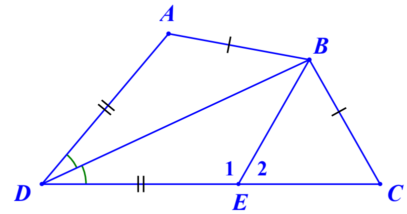
Xét $\Delta BCM$ có $\widehat{B_1}+\widehat{M_1}+\widehat{C}=180°$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{M_1}$. Do đó $DN // BM$.

**Bài 1.4** Tứ giác ABCD có AB = BC và hai cạnh AD, DC không bằng nhau. Đường chéo DB là đường phân giác của góc D. Chứng minh rằng các góc đối của tứ giác này bù nhau.

- ***Tìm cách giải***

Để chứng minh hai góc A và C bù nhau ta tạo ra một góc thứ ba làm trung gian, góc này bằng góc A chẳng hạn. Khi đó chỉ còn phải chứng minh góc này bù với góc C




- ***Lời giải:***

- ***Xét trường hợp*** AD < DC

Trên cạnh DC lấy điểm E sao cho DE = DA

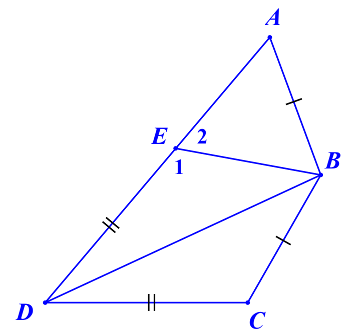
Ta có: $\Delta ADB = \Delta EDB$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = EB$ và $\widehat{A} = \widehat{E_1}$.

Mặt khác, $AB = BC$ nên $BE = BC$.

Vậy $\Delta BEC$ cân $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E_2}$.

Ta có: $\widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 180° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180°$.

Do đó: $\widehat{B} + \widehat{D} = 360° - 180° = 180°$.




- ***Xét trường hợp*** AD > DC

CMTT như trên, ta được: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$; $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$.

**Bài 1.5** Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 110^0, \widehat{B} = 100^0$ Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau ở E. Các đường phân giác của các góc ngoài tại các đỉnh C và D cắt nhau ở F. Tính $\widehat{CED}, \widehat{CFD}$

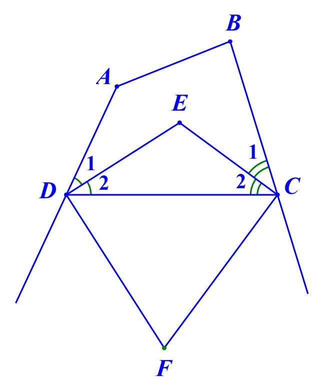
***Lời giải:***

Tứ giác ABCD có $\widehat{C} + \widehat{D} = 360^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 360^0 - 110^0 - 100^0 = 150^0$

nên $\widehat{C_1} + \widehat{D_1} = \dfrac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \dfrac{150^0}{2} = 75^0$.

$\Delta CED$ có $\widehat{CED} = 180^0 - \left(\widehat{C_1} + \widehat{D_1}\right) = 180^0 - 75^0 = 105^0$.

Vì DE và DF là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $DE \perp DF$. Tương tự, $CE \perp CF$



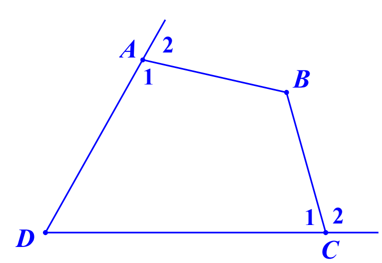

Xét tứ giác CEDF:

Có: $\widehat{F} = 360^0 - \widehat{E} - \widehat{ECF} - \widehat{EDF} = 360^0 - 105^0 - 90^0 - 90^0 = 75^0$

**Bài 1.6** Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh A và C bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh B và D.

***Lời giải:***

Gọi các góc trong của đỉnh A và C là $\widehat{A_1}$ và $\widehat{C_1}$ còn các góc ngoài của đỉnh A và C là $\widehat{A_2}$ và $\widehat{C_2}$.




Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^0$ (hai góc kề bù)

$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^0$ (hai góc kề bù)

Suy ra: $\widehat{A_2} = 180^0 - \widehat{A_1}$ và $\widehat{C_2} = 180^0 - \widehat{C_1}$

$\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{C_2} = 360 - \widehat{A_1} - \widehat{C_1}$ (1)

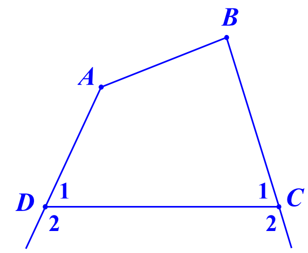
Ta lại có: $\widehat{A_1} + \widehat{B} + \widehat{C_1} + \widehat{D} = 360^0$ (tổng 4 góc tứ giác)

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = 360^0 - \widehat{A_1} - \widehat{C_1}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = \widehat{A_2} + \widehat{C_2}$

**Bài 1.7** Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh còn lại.

***Lời giải:***

- ***Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau***




Gọi $\widehat{C_1}$, $\widehat{D_1}$ là số đo hai góc trong; $\widehat{D_2}$, $\widehat{D_2}$ là số đo hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau là C và D. Ta có:

$\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\left(180°-\widehat{C_1}\right)+\left(180°-\widehat{D_1}\right)=360°-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (1)

Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{A}+\widehat{B}=360°-\left(\widehat{C_1}+\widehat{D_1}\right)$. (2)

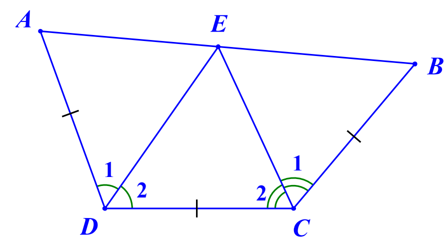
Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{C_2}+\widehat{D_2}=\widehat{A}+\widehat{B}$.

***Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh đối nhau*** (xem VD4)

**Bài 1.8** Cho tứ giác ABCD có $AD=DC=CB$; $\widehat{C}=130°$; $\widehat{D}=110°$. Tính số đo góc A, góc B.

(Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương 2010 )

***Lời giải***




Vẽ đường phân giác của các góc $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$ chúng cắt nhau tại E.

Xét $\Delta ECD$ có $\widehat{CED}=180°-\dfrac{110°+130°}{2}=60°$.

$\Delta ADE=\Delta CDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{CED}=60°$.

$\Delta BCE=\Delta DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEC}=\widehat{DEC}=60°$.

Suy ra $\widehat{AEB}=180°$ do đó ba điểm A, E, B thẳng hàng

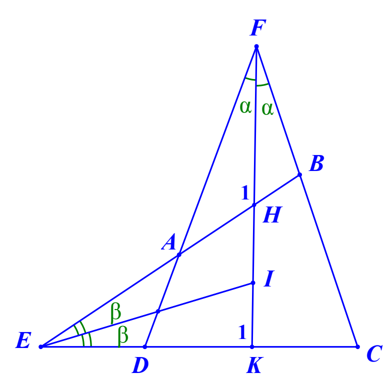
Vậy. Do đó $\widehat{ABC}=360°-(65°+110°+130°)=55°$.

**Bài 1.9** Cho tứ giác ABCD, E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, F là giao điểm của các đường thẳng BC và AD. Các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau ở I. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\widehat{BAD}=130^0, \widehat{BCD}=50^0$ thì IE vuông góc với IF.

b) Góc EIF bằng nửa tổng của một trong hai cặp góc đối của tứ giác ABCD.

***Lời giải***




a) Xem cách giải tổng quát ở câu b

b) Giả sử E và F có vị trí như trên hình bên, các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau tại I. Trước hết ta chứng minh rằng $\widehat{BAD}+\widehat{C}=2\widehat{EIF}$.

Thấy vậy, gọi H và K là giao điểm của FI với AB và CD

Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có:

$\widehat{BAD}=\widehat{H_1}+\alpha,\ \widehat{C}=\widehat{K_1}-\alpha$

nên $\widehat{BAD}+\widehat{C}=\widehat{H_1}+\widehat{K_1}=(\widehat{EIF}+\beta)+(\widehat{EIF}-\beta)=2\widehat{EIF}$

Do đó $\widehat{EIF}=(\widehat{BAD}+\widehat{C}):2$

**Bài tập tự giải**

**Bài 1.** Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B}=100^0, \widehat{D}=80^0$ và $CB=CD$.

a) Nếu $\widehat{A}-\widehat{C}=40^0$, hãy tính các góc chưa biết của tứ giác.

b) Chứng minh $\widehat{BAC}=\widehat{DAC}$.

**Bài 2.** Nêu cách vẽ tứ giác ABCD biết $\widehat{A}=130^0, \widehat{B}=80^0, \widehat{C}=70^0, AB=4cm$ và $CD=5cm$

**Bài 3.** Tứ giác ABCD có $\widehat{A}-\widehat{B}=50^0$. Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau tại I và $\widehat{CID}=115^0$. Tính các góc A và B.

**Bài 4.** Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B}=120^0$, $\widehat{D}=60^0$ và $\frac{\widehat{A}}{\widehat{C}}=\frac{4}{5}$. Tính các góc còn lại.

**Bài 5.** Tính các góc trong và ngoài của tứ giác PQRS, biết: số đo góc ngoài tại đỉnh R và số đo góc P cùng bằng $80^0$, $\widehat{Q}-\widehat{S}=60^0$

## Dạng 2. So sánh các độ dài đoạn thẳng

- ***Lý thuyết:***

  ***Định lý về tứ giác lồi:*** *Nếu tứ giác ABCD là tứ giác lồi khi và chỉ khi hai đường chéo AC và BD cắt nhau*

- ***Bài tập***

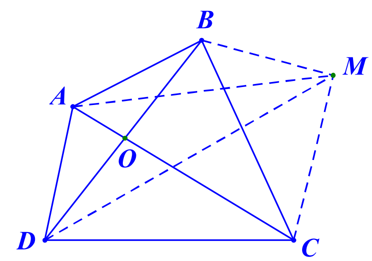
**Bài 2.1** Tứ giác ABCD có tổng hai đường chéo bằng a. Gọi M là một điểm bất kì. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA+MB+MC+MD$.

- ***Tìm cách giải***

Để tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA+MB+MC+MD$ ta phải chứng minh $MA+MB+MC+MD\ge k$ ($k$ là hằng số).

Ghép tổng trên thành hai nhóm $(MA+MC)+(MB+MD)$.

Ta thấy ngay có thể dùng bất đẳng thức tam giác mở rộng.




- ***Trình bày lời giải***

Xét ba điểm M, A, C có $MA+MC\ge AC$ (dấu "=" xảy ra khi $M\in AC$).

Xét ba điểm M, B, D có $MB+MD\ge BD$ (dấu '=' xảy ra khi $M\in BD$).

Do đó: $MA+MB+MC+MD\ge AC+BD=a$.

Vậy $\min(MA+MB+MC+MD)=a$ khi M trùng với giao điểm O của đường chéo AC và BD.

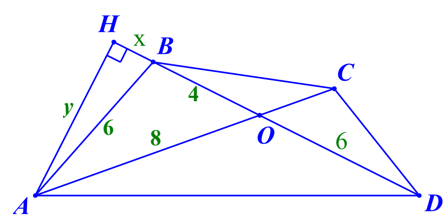
**Bài 2.2** Tứ giác ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo, $AB=6, OA=8$, $OB=4, OD=6$. Tính độ dài AD.

- ***Lời giải:***

  Kẻ AH ⊥ BD. Đặt BH = x, AH = y. Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông ABH và AOH, ta có:

  $$\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ (x+4)^2+y^2=64 \end{cases}$$

  Giải hệ trên ta tìm được: $x=\frac{3}{2}$; $y^2=\frac{135}{2}$




Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông ADH, ta có:

$$AD^2=HD^2+AH^2=11,5^2+\frac{135}{2}=166\Rightarrow AD=\sqrt{166}$$

**Bài 2.3** Cho tứ giác MNPQ. Chứng minh rằng nếu $MN=NQ$ thì $PQ<MP$.

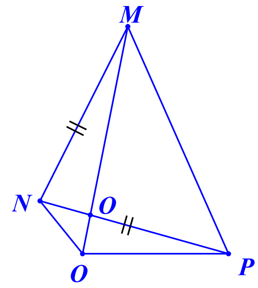
- ***Lời giải:***

Gọi O là giao điểm hai đường chéo MP và NQ

Ta có : MN < MO + ON và $PQ < PO + OQ$ (Bđt tam giác)

suy ra $MN + PQ < MP + NQ$;

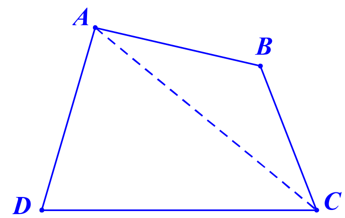
mà $MN = MP$ (gt) nên $PQ < NQ$




**Bài 2.4** Có hay không một tứ giác mà độ dài các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 ?

- ***Lời giải:***

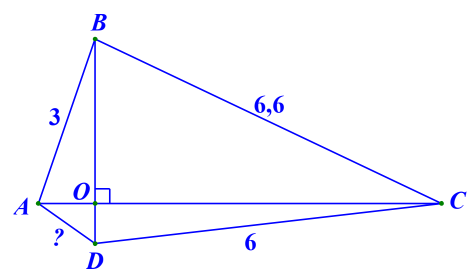
Giả sử tứ giác ABCD có CD là cạnh dài nhất.
Ta sẽ chứng minh CD nhỏ hơn tổng của ba cạnh còn lại (1).
Thật vậy, xét $\Delta ABC$ ta có: $AC < AB + BC$.
Xét $\Delta ADC$ có: $CD < AD + AC$. Do đó $CD < AD + AB + BC$.
Ta thấy nếu các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 thì không thỏa mãn điều kiện (1) nên không có tứ giác nào mà các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10.




**Bài 2.5** Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc. Biết $AB = 3;\ BC = 6,6;\ CD = 6$. Tính độ dài AD.

- ***Lời giải:***

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.
Xét $\Delta AOB$, $\Delta COD$ vuông tại O, ta có:
$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.
Chứng minh tương tự, ta được:
$BC^2 + AD^2 = OB^2 + OC^2 + OD^2 + OA^2$
Do đó: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.



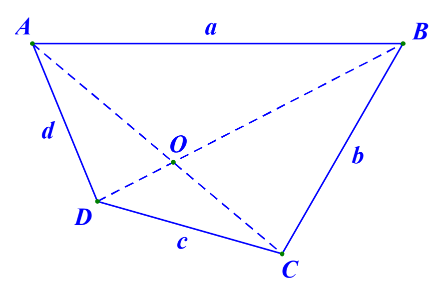

Suy ra: $\Rightarrow 3^2 + 6^2 = 6,6^2 + AD^2 \Rightarrow AD^2 = 9 + 36 - 43,56 = 1,44 \Rightarrow AD = 1,2$

**Bài 2.6** Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi của tứ giác.

- ***Lời giải:***

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD.
Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d.
Vận dụng bất đẳng thức tam giác ta được:
$OA + OB > a;\ OC + OD > c$

Do đó $(OA + OC) + (OB + OD) > a + c$




hay $AC + BD > a + c$. (1)
Chứng minh tương tự, ta được: $AC + BD > d + b$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được: $2(AC + BD) > a + b + c + d \Rightarrow AC + BD > \dfrac{a + b + c + d}{2}$

Xét các $\Delta ABC$ và $\Delta ADC$ ta có: $AC < a + b;\ AC < c + d \Rightarrow 2AC < a + b + c + d$. (3)

Tương tự có: $2BD < a+b+c+d$. (4)

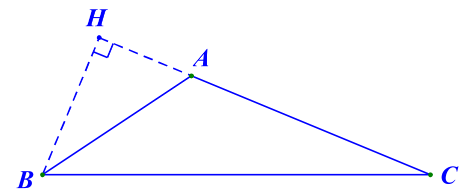
Cộng từng vế của (3) và (4) được: $2(AC+BD) < 2(a+b+c+d) \Rightarrow AC+BD < a+b+c+d$.

Từ các kết quả trên ta được điều phải chứng minh.

***Bài 2.7*** Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bất kì hai điểm nào cũng có khoảng cách lớn hơn 10. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

- Trước hết ta chứng minh một bài toán phụ:

Cho $\Delta ABC$, $\widehat{A} \ge 90^0$. Chứng minh: $BC^2 \ge AB^2 + AC^2$




***Giải***

Vẽ $BH \perp AC$. Vì $\widehat{A} \ge 90^0$ nên H nằm trên tia đối của tia AC.

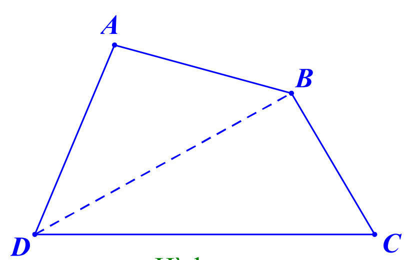
Xét $\Delta HBC$ và $\Delta HBA$ vuông tại H, ta có:

$BC^2 = HB^2 + HC^2 = (AB^2 - HA^2) + (HA + AC)^2$

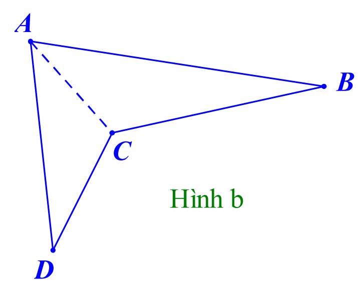
$= AB^2 - HA^2 + HA^2 + AC^2 + 2HA.AC = AB^2 + AC^2 + 2HA.AC$.

Vì $HA.AC \ge 0$ nên $BC^2 \ge AB^2 + AC^2$ ( dấu "=" xảy ra khi $H \equiv A$ tức là khi $\Delta ABC$ vuông).

- Vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho




Hình a




Hình b

***Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lồi*** (h.a)

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$.

Suy ra trong bốn góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng $90°$, giả sử $\widehat{A} \ge 90^0$.

Xét $\Delta ABD$ ta có $BD^2 \ge AB^2 + AD^2 > 10^2 + 10^2 = 200$ suy ra $BD > \sqrt{200}$, do đó $BD > 14$.

***Trường hợp tứ giác ABCD là tứ giác lõm*** (h.b)

Nối CA, Ta có: $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 360°$.

Suy ra trong ba góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng $120°$.

Giả sử $\widehat{ACB} \ge 120°$, do đó $\widehat{ACB}$ là góc tù

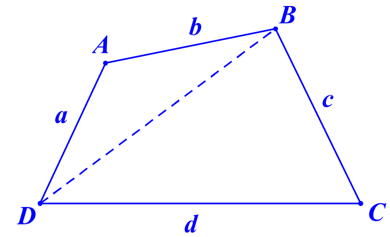
Xét $\Delta ACB$ có $AB^2 \ge AC^2 + BC^2 > 10^2 + 10^2 = 200$.

Suy ra $AB > \sqrt{200} \Rightarrow AC > 14$.

Vậy luôn tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

***Bài 2.8*** Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh là $a$, $b$, $c$, $d$ đều là các số tự nhiên. Biết tổng $S = a+b+c+d$ chia hết cho $a$, cho $b$, cho $c$, cho $d$. Chứng minh rằng tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

- ***Lời giải***




Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không có hai cạnh nào của tứ giác bằng nhau.

Ta có thể giả sử $a < b < c < d$.

Ta có: $a + b + c > BD + c > d$.

Do đó $a + b + c + d > 2d$.

Ta đặt $a + b + c + d = S$ thì $S > 2d$. (*)

Ta có: $S \vdots a \Rightarrow S = ma \left(m \in N\right)$ (1)

$S \vdots b \Rightarrow S = nb \left(n \in N\right)$ (2)

$S \vdots c \Rightarrow S = pc \left(p \in N\right)$ (3)

$S \vdots d \Rightarrow S = qd \left(q \in N\right)$ (4)

Từ (4) và (*) $\Rightarrow qd > 2d$ do đó $q > 2$.

Vì $a < b < c < d$ nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $m > n > p > q > 2$.

Do đó $q \geq 3;\ p \geq 4;\ n \geq 5;\ m \geq 6$.

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{1}{m} = \frac{a}{S};\ \frac{1}{n} = \frac{b}{S};\ \frac{1}{p} = \frac{c}{S};\ \frac{1}{q} = \frac{d}{S}$.

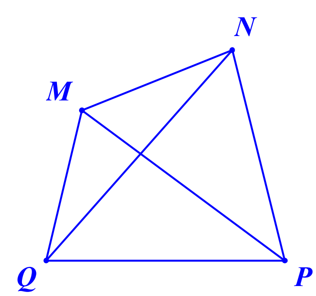
Ta có: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a+b+c+d}{S} = 1$.

Từ đó: $\frac{19}{20} \geq 1$, vô lí.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

***Bài 2.9*** Cho tứ giác MNPQ. Biết chu vi tam giác MNP không lớn hơn chu vi tam giác NPQ, chứng minh $\mathrm{MN} < \mathrm{NQ}$.

- ***Lời giải:***




Ta có: Chu vi $\Delta\mathrm{MNP} : \mathrm{MN} + \mathrm{NP} + \mathrm{MP}$

Chu vi $\mathrm{NPQ} : \mathrm{NP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{NQ}$

Theo giai thiết, ta có $\mathrm{MN} + \mathrm{NP} + \mathrm{MP} \leq \mathrm{NP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{NQ}$

Suy ra MN + MP $\leq$ PQ + NQ (1)

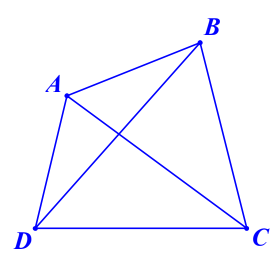
Theo bài 8, ta có: $\mathrm{MN} + \mathrm{PQ} < \mathrm{MP} + \mathrm{NQ}$ (2)

Cộng các bất đẳng thức (1) và (2) theo từng vế, ta có

$2\mathrm{MN} + \mathrm{PQ} + \mathrm{MP} < 2\mathrm{NQ} + \mathrm{MP} + \mathrm{PQ}$. Suy ra $\mathrm{MN} < \mathrm{NQ}$

***Bài 2.10*** So sánh độ dài cạnh AB và đường chéo AC của tứ giác ABCD biết rằng chu vi tam giác ABD nhỏ hơn hoặc bằng chu vi tam giác ACD.

- ***Lời giải:***




Ta có: Chu vi $\mathrm{ABD} = \mathrm{AB} + \mathrm{BD} + \mathrm{AD}$

Chu vi $\mathrm{ACD} = \mathrm{AC} + \mathrm{CD} + \mathrm{AD}$

Theo giả thiết: $\mathrm{AB} + \mathrm{BD} + \mathrm{AD} \leq \mathrm{AC} + \mathrm{CD} + \mathrm{AD}$

$\Rightarrow\ \mathrm{AB} + \mathrm{BD} \leq \mathrm{AC} + \mathrm{CD}$ (1)

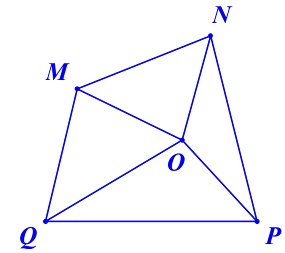
Mặt khác ta có: $\mathrm{AB} + \mathrm{CD} < \mathrm{AC} + \mathrm{BD}$ (2) (kết quả bài 8)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:

$2\mathrm{AB} < 2\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{AB} < \mathrm{AC}$

**Bài 2.11** Lấy trong tứ giác MNPQ một điểm O. Gọi CV là chu vi của tứ giác. Chứng minh $\frac{CV}{2} < OM + ON + OP + OQ < \frac{3.CV}{2}$

- ***Lời giải:***




Ta có $MN < OM + ON < MQ + PQ + NP$

$NP < ON + OP < MN + MQ + PQ$

$PQ < OP + OQ < MQ + MN + NP$

$MQ < OM + OQ < MN + NP + PQ$

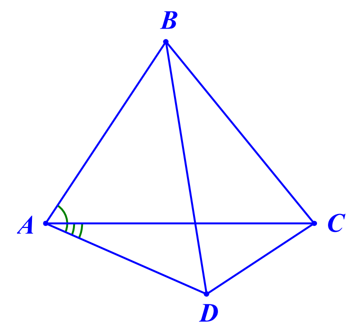
Cộng các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta có

$CV < 2(0M + ON + OP + 0Q) < 3.CV$

Vậy: $\frac{CV}{2} < OM + ON + OP + OQ < \frac{3CV}{2}$

**Bài 2.12** Chứng minh tứ giác ABCD là tứ giác lồi khi và chỉ khi hai đường chéo AC và BD cắt nhau.

- ***Lời giải:***




a) Cho tứ giác ABCD lồi. Cần chứng minh hai đường chéo AC và BD cắt nhau.
Do tứ giác ABCD lồi nên B và C cùng nằm trên nữa mặt phẳng bờ chứa AD.
Giả sử $\widehat{DAB} < \widehat{DAC}$, khi đó tia AB nằm giữa hai tia AD và AC nên AB cắt cạnh DC (Vô lý).
Vậy $\widehat{DAB} > \widehat{DAC}$. Do đó tia AC nằm giữa hai tia AB và AD tức là AC cắt đoạn thẳng BD
Chưng minh tương tự, ta có tia BD cắt đoạn thẳng AC. Vậy hai đường chéo AC và BD cắt nhau.

b) Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau. Cần chứng minh tứ giác ABCD là tứ giác lồi.
Khi AC và BD cắt nhau thì AC là tia nằm trong góc DAB. Do đó AB và AC trên nửa mặt phẳng bờ chứa AD; AD và AC nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa AB.
Chứng minh tương tự, ta có CA và CD cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa BC, CA và CB nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa CD.
Vậy A, B, C, D nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa bất kỳ đường thẳng nào của tứ giác nên tứ giác ABCD là tứ giác lồi.

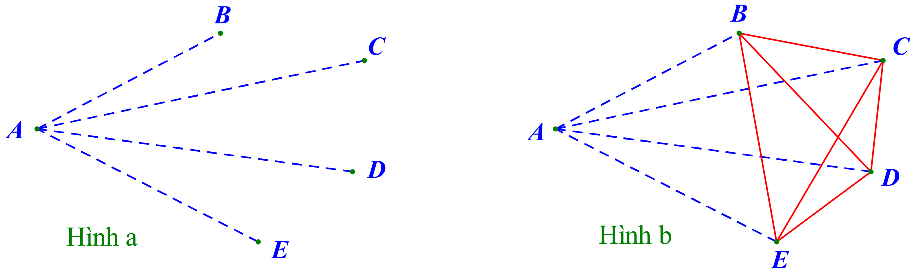
- ***Bài toán giải bằng phương trình tô màu***

**Bài 2.13** Có chín người trong đó bất kì ba người nào cũng có hai người quen nhau. Chứng minh rằng tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

- ***Lời giải***

Coi mỗi người như một điểm, ta có chín điểm A, B, C,…
Nối hai điểm với nhau ta được một đoạn thẳng. Ta tô màu xanh nếu hai người không quen nhau, ta tô màu đỏ nếu hai người quen nhau. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tứ giác có các cạnh và đường chéo cùng tô màu đỏ.

- Trường hợp có một điểm là đầu mút của bốn đoạn thẳng màu xanh AB, AC, AD, AE vẽ nét đứt (hình.a)



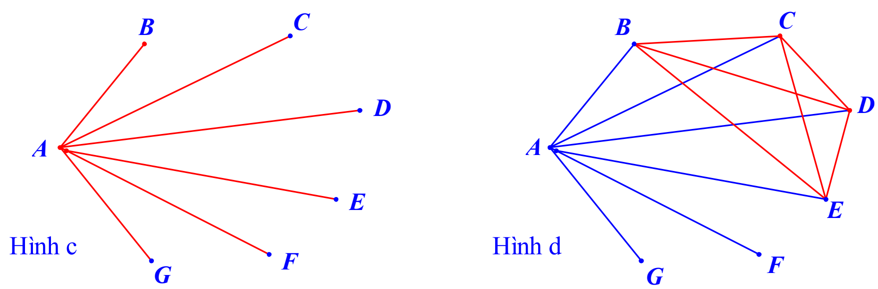

Hình a        Hình b

Xét ΔABC có hai đoạn thẳng AB, AC màu xanh nên đoạn thẳng BC màu đỏ vì bất kì tam giác nào cũng có một đoạn thẳng màu đỏ. Tương tự các đoạn thẳng CD, DE, EB, BD, CE cũng có màu đỏ (vẽ nét liền) (hình.b). Do đó tứ giác BCDE có các cạnh và đường chéo được tô đỏ nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

- Trường hợp mọi điểm đều là đầu mút của nhiều nhất là ba đoạn thẳng màu xanh. Không thể mọi điểm đều là đầu mút của ba đoạn thẳng màu xanh vì khi đó số đoạn thẳng màu xanh là $\frac{9.3}{2} \notin N$.

Như vậy tồn tại một điểm là đầu mút của nhiều nhất là hai đoạn thẳng màu xanh, chẳng hạn đó là điểm A, do đó A là đầu mút của ít nhất là sáu đoạn thẳng màu đỏ, giả sử đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG (h.1.19)

Trong sáu điểm B, C, D, E, F, G tồn tại ba điểm là đỉnh của một tam giác có ba cạnh cùng màu (đây là bài toán cơ bản về phương pháp tô màu) chẳng hạn đó là $\Delta BCD$ (h.1.20).




Hình c        Hình d

Trong $\Delta BCD$ có một cạnh màu đỏ (theo đề bài) nên ba cạnh của $\Delta BCD$ cùng màu đỏ. Khi đó tứ giác ABCD là tứ giác có các cạnh và đường chéo được tô đỏ, nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

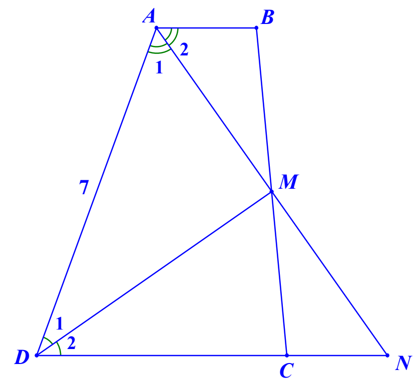
# CHỦ ĐỀ 2: HÌNH THANG – HÌNH THANG CÂN

## Dạng 1. Bài tập về hình thang

**Bài 1.** Cho hình thang ABCD (AB // CD), các tia phân giác của góc A, góc D cắt nhau tại M thuộc cạnh BC. Cho biết AD = 7cm. Chứng minh rằng một trong hai đáy của hình thang có độ dài nhỏ hơn 4CM

- ***Tìm cách giải***

Để chứng minh một cạnh đáy nào đó nhỏ hơn 4cm ta có thể xét tổng của hai cạnh đáy rồi chứng minh tổng này nhỏ hơn 8cm. Khi đó tồn tại một cạnh đáy có độ dài nhỏ hơn




- ***Trình bày lời giải***

Gọi $N$ là giao điểm của tia $AM$ và tia $DC$

Ta có: $AB // CD$ nên $\widehat{A_2} = \widehat{N}$ (so le trong )

Mặt khác: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{N} \Rightarrow \Delta ADN$ cân tại $D$

$\Rightarrow DA = DN.$ $\quad$ (1)

Xét $\Delta ADN$ có $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ nên $DM$ đồng thời là đường trung tuyến : $MA = MN$.

$\Delta ABM = \Delta NCM \ (g.c.g) \Rightarrow AB = CN$

Ta có: $DC + AB = DC + CN = DN = DA = 7cm$. Vậy $AB + CD < 8cm$.

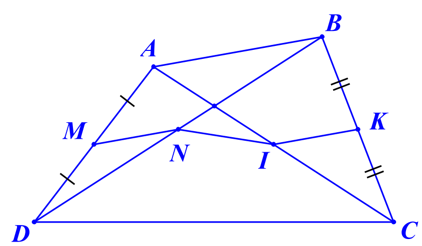
Vậy một trong hai đáy $AB, CD$ phải có độ dài nhỏ hơn $4cm$.

**Bài 2.** Cho tứ giác $\text{ABCD}$. Gọi $\text{M}$ là trung điểm $\text{AD, N}$ là trung điểm $\text{BD}$, $\text{I}$ là trung điểm $\text{AC, K}$ là trung điểm $\text{BC}$.

a) Chứng minh $MK \le \dfrac{AB + DC}{2}$.

b) Nếu tứ giác $\text{ABCD}$ là hình thang đáy là $\text{AB}$ và $\text{DC}$

Chứng minh $NI = \dfrac{DC - AB}{2}$.




- ***Lời giải***

a) Ta có $MI = \dfrac{DC}{2}, IK = \dfrac{AB}{2}$ (tính chất đường trung bình của tam giác) nên $MI + IK = \dfrac{DC}{2} + \dfrac{AB}{2}$.

Với ba điểm M, I, K ta có $MK \le MI + IK$ (BĐT tam giác)

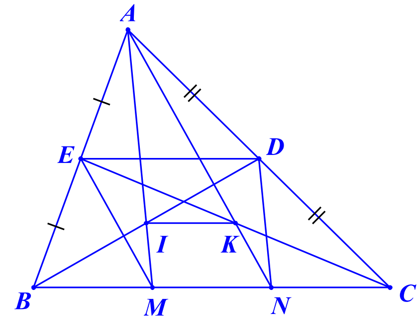
Vậy $MK \le \dfrac{AB + CD}{2}$

b) Nếu tứ giác $\text{ABCD}$ là hình thang, ta có AB // CD. Suy ra M, N, I, K thẳng hàng

Khi đó $NI = MI - MN = \dfrac{DC}{2} - \dfrac{AB}{2} - \dfrac{DC - AB}{2}$

**Bài 3.** Cho tam giác $\text{ABC}$ có $BC = a$, các đường trung tuyến $\text{BD}$, $\text{CE}$. Lấy các điểm $\text{M}, N$ trên cạnh $\text{BC}$ sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD, $K$ là giao điểm của AN và CE. Tính độ dài IK.

- ***Lời giải:***



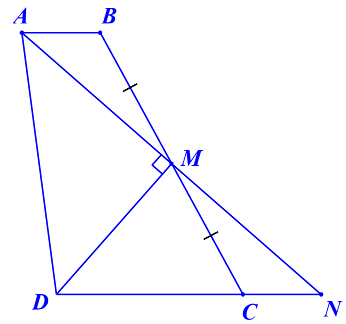

Ta có : DN la đường trung bình của tam giác ACM nên DN // AM.

$\Delta BND$ có $BM = MN$, MI // ND nên I là trung điểm của BD. Tương tự K là trung điểm của $CE$.

Hình thang BEDC có I và K là trung điểm của hai đường chéo nên dễ dàng chứng minh được

$IK = (BC - ED):2 = \left(a - \frac{a}{2}\right):2 = \frac{a}{4}$

***Bài 4.*** Cho hình thang $ABCD$ $(AB \mathbin{//} CD)$. Gọi $M$ là trung điểm của BC. Cho biết $\widehat{AMD} = 90^0$.




a) Chứng minh rằng: *AD = AB + DC.*

b) *DM* là tia phân giác của góc *D.*

- ***Lời giải***

a) Gọi N là giao điểm của AM với DC

Ta có $\Delta ABM = \Delta NCM$ (g-c-g)

Suy ra AM = MN và AB = CN. (1)

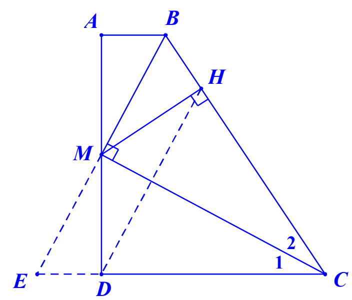
$\Delta AND$ có AD là đường cao và đồng thời là đường trung tuyến nên là tam giác cân tại D. Suy ra AD = DN = DC + CN (2)

Kêt hợp (1) và (1) $\Rightarrow$ AD = AB + DC.

b) Do $\Delta AND$ cân tại D nên AD là đường cao đồng thời là đường phân giác

Hay AD là phân giác của góc D

***Bài 5.*** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $D$. Gọi $M$ là trung điểm của $AD$. Cho biết $MB \perp MC$.




Chứng minh rằng: $BC = AB + CD$.

Vẽ $MH \perp BC$. Chứng minh rằng tứ giác $MBHD$ là hình thang.

- **HD**:

a) Gọi *E* là giao điểm của *BM* với *CD*.

Chứng minh $\Delta MDN = \Delta MAB$

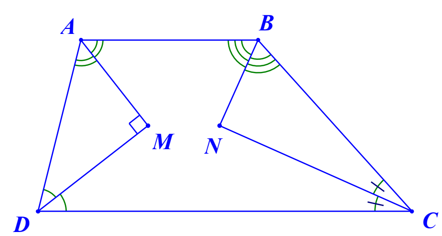
$\Delta CBE$ có *CM* vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân.

$\Rightarrow CB = CE \;\Rightarrow CB = CD + DE \Rightarrow CB = CD + AB$ (vì $AB = DE$).

b) Chứng minh $\Delta HCD$ cân $\Rightarrow CM \perp DH \Rightarrow$ $BM \;//\; DH$ (cùng vuông góc với CM)

$\Rightarrow$ $MBHD$ là hình thang.

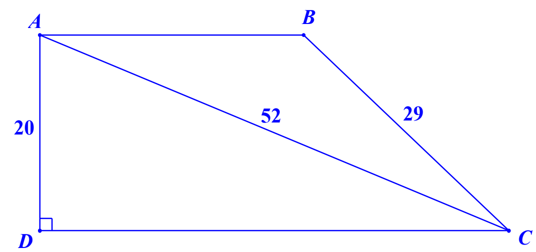
***Bài 6.*** Cho tứ giác $ABCD$. Các tia phân giác của góc $A$, góc $D$ cắt nhau tại $M$. Các tia phân giác của góc $B$, góc $C$ cắt nhau tại $N$. Cho biết $\widehat{AMD} = 90^0$, chứng minh rằng :




a) Tứ giác $ABCD$ là hình thang.

b) Chứng minh $NB \perp NC$.

**Bài 7.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $D$. Cho biết $AD = 20, AC = 52$ và $BC = 29$. Tính độ dài $AB$.




- ***HD***: Kẻ BH $\perp$ DC

  ***ĐS***: AB = 27

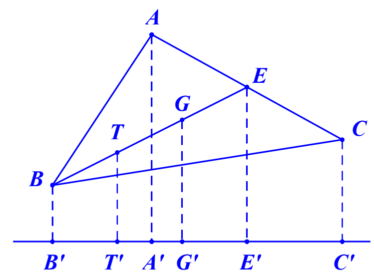
**Bài 8.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Một đường thẳng d không cắt các cạnh của tam giác. Gọi A', B', C', G', lần lượt là hình chiếu của A, B, C, G trên d.
Chứng minh: AA' + BB" + CC' = 3GG'

- ***Lời giải***

Gọi T là trung điểm của BG, T' là hình chiếu của T trên d.
Dựa theo tính đường trung bình của hình thang, ta có

$$GG' = \frac{TT' + EE'}{2} = \frac{\frac{BB' + GG'}{2} + \frac{AA' + CC'}{2}}{2} = \frac{AA' + BB' + CC' + GG'}{4}$$

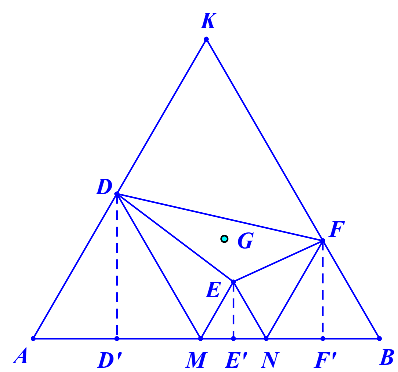
Suy ra $3GC' = AA' + BB' + CC'$




**Bài 9.** Lấy M, N trên đoạn thẳng AB ( M nằm giữa AN). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác AMD, MEN, NFB. Chứng minh khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác DEF đến AB không phụ thuộc vào vị trí của các điểm M, N

- ***Lời giải***

Gọi D', E'. F' lần lượt là hình chiếu của D, E. F trên AB. Tổng các đường cao DD', EE'. FF của ba tam giác đều ADM. MEN, NFB bằng đường cao tam giác đều AKB (không đổi). Goi G là trọng tâm của tam giác DEF ; G' là hình chiếu của G trên AB. Theo bài 8, ta có



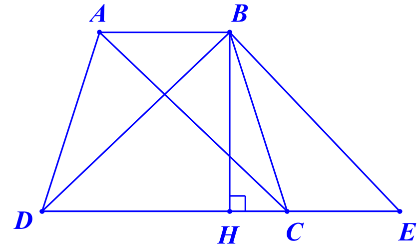

$GG' = \dfrac{DD' + EE' + FF'}{3}$ không đổi. Vậy khoảng cách từ G đến AB không phụ thuộc vào vị trí của M và N

## Dạng 2. *Bài tập về hình thang cân*

**Bài 1.** Một hình thang cân có đường cao bằng nửa tổng hai đáy. Tính góc tạo bởi hai đường chéo hình thang.

- ***Lời giải:***

Xét hình thang cân ABCD $(AB//CD)$, đường cao BH và $BH = \dfrac{AB + CD}{2}$ (1)




Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E.

Ta có $BE = AC, AC = BD$ nên $BE = BD$.

$\Delta$ BDE cân tại B, đường cao BH nên $DH = HE = \dfrac{DE}{2}$ (2)

Ta có $AB = CE$ nên $AB + CD = CE + CD = DE$ (3)

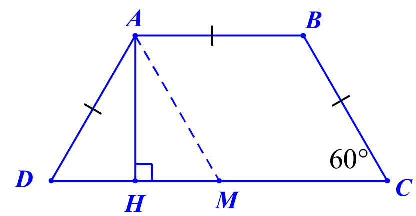
Từ (1),(2), (3) suy ra $BH = DH = HE$.

Các giác BHD, BHE vuông cân tại H nên $\widehat{DBE} = 90^0$.

Ta có $DB \perp BE, AC // BE$ nên $DB \perp AC$

**Bài 2.** Một hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên và góc kề với đáy lớn bằng $60°$. Biết chiều cao của hình thang cân này là $a\sqrt{3}$. Tính chu vi của hình thang cân.

- ***Tìm cách giải***




Ta đã biết hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau. Từ đó ta vẽ thêm hình phụ để tìm sự liên hệ giữa đáy lớn và ba cạnh còn lại. Ta vẽ $AM // BC (M \in CD)$. Mặt khác, đề bài có cho góc $60°$, gợi ý cho ta vận dụng tính chất của tam giác đều để tính độ dài mỗi cạnh theo chiều cao của nó .

- ***Trình bày lời giải***

Ta đặt $AD = AB = BC = x.$

Vẽ $AM // BC (M \in CD)$, ta được $AM = BC = x$ và $MC = AB = x$

$\Delta ADM$ cân, có $\widehat{D} = 60°$ nên là tam giác đều, suy ra: $DM = AD = x.$

Vẽ $AH \perp CD$ thì $AH$ là đường cao của hình thang cân, cũng là đường cao của tam giác đều:

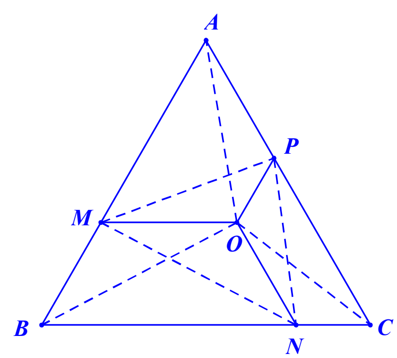
$\Rightarrow AH = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2}$. Vì $AH = a\sqrt{3}$ nên $\dfrac{x\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = 2a.$

Do đó chu vi của hình thang cân là : $2a.5 = 10a.$

***Nhận xét:*** Qua một đỉnh vẽ đường thẳng song song với một cạnh bên của hình thang là một cách vẽ hình phụ để giải bài toán về hình thang.

**Bài 3.** Cho tam giác đều $ABC$, mỗi cạnh có độ dài bằng $a$. Gọi $O$ là một điểm bất kì ở trong tam giác. Trên các cạnh $AB, BC, CA$ lần lượt lấy các điểm $M, N, P$ sao cho $OM // BC; ON // CA$ và $OP // AB$. Xác định vị trí của điểm $O$ để tam giác $MNP$ là tam giác đều. Tính chu vi của tam giác đều đó.

- ***Lời giải***




Tứ giác $MONB$ có $OM // BC$ nên là hình thang. Hình thang này có $\widehat{MBN} = \widehat{ONB} (= \widehat{ACB})$ nên là hình thang cân.

Chứng minh tương tự ta được các tứ giác $ONCP, OMAP$ cũng là hình thang cân.

Suy ra: $MN = OB; NP = OC; MP = OA$.

Do đó $\Delta MNP$ là tam giác đều $\Leftrightarrow MN = NP = PM$.

$\Leftrightarrow OB = OC = OA \Leftrightarrow O$ là giao điểm của ba đường trung trực của $\Delta ABC$.

Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường trung trực cũng là giao điểm của ba đường cao, ba đường trung tuyến.

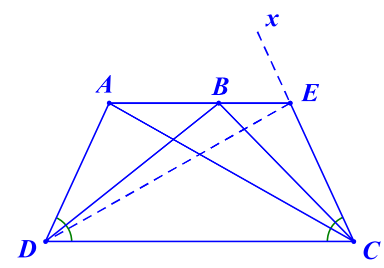
Chiều cao $h$ của tam giác đều cạnh $a$ được tính theo công thức: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow OA = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó chu vi của $\Delta MNP$ là: $\frac{a\sqrt{3}}{3}.3 = a\sqrt{3}$.

**Bài 4.** Cho hình thang $ABCD\ (AB\ //\ CD), \widehat{ADC} > \widehat{BCD}$. Chứng minh rằng : $AC > BD$.

- ***Lời giải***

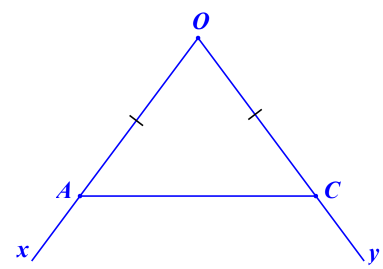
Trên nửa mặt phẳng bờ $CD$ có chứa $A$ vẽ tia $Cx$ sao cho $\widehat{DCx} = \widehat{ADC}$.
Tia $Cx$ cắt tia $AB$ tại $E$.
Khi đó hình thang $AECD$ là hình thang cân.
$\Rightarrow AC = DE$ và $\widehat{DAB} = \widehat{CEB}$.
Xét $\Delta ABD$ có góc $DBE$ là góc ngoài nên
$\widehat{DBE} > \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DBE} > \widehat{CED}$ (vì $\widehat{DAB} = \widehat{CEB}$).
Do đó $\widehat{DBE} > \widehat{DEB} \Rightarrow DE > BD \Rightarrow AC > BD$.



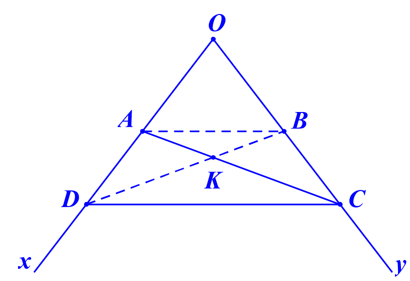

**Bài 5.** Cho góc $xOy$ có số đo lớn hơn $60^0$ nhưng nhỏ hơn $180^0$. Trên cạnh $Ox$ lấy điểm $A$, trên cạnh $Oy$ lấy điểm $C$. Chứng minh rằng: $AC > \frac{OA+OC}{2}$.

- ***Lời giải***

➢ ***Xét trường hợp*** $OA = OC$
$\Delta AOC$ là tam giác cân.
Vì $\widehat{O} > 60^0$ nên $\widehat{A} = \widehat{C} < 60^0 \Rightarrow AC > OA = OC$.
Do đó: $2AC > OA + OC \Rightarrow AC > \frac{OA+OC}{2}$.



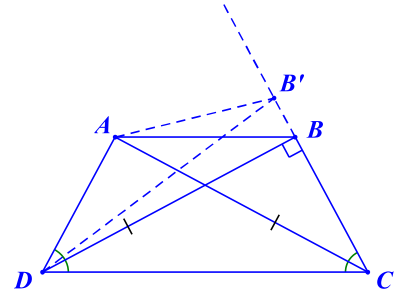

➢ ***Xét trường hợp*** $OA < OC$
Trên tia $Ox$ lấy điểm $D$, trên tia $Oy$ lấy điểm $B$ sao cho
$OB = OA, OD = OC$.
Các $\Delta OAB$ và $\Delta OCD$ cân tại $O$ nên:
$\widehat{OAB} = \widehat{ODC} = \frac{180^0 - \widehat{O}}{2} \Rightarrow AB\ //\ CD$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình thang.
Mặt khác $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$ nên $ABCD$ là hình thang cân
$\Rightarrow AC = BD$.




Gọi $K$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Ta có : $AC = AK + KC; BD = BK + KD$.
$\Rightarrow AC + BD = (AK + BK) + (KC + KD)$ (1).
Vì $AK + BK > AB; KC + KD > CD$ (2).
nên từ (1) và (2) suy ra : $AC + BD > AB + CD$ (3).
Xét $\Delta OAB$ có $\widehat{O} > 60^0$ nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} < 60^0 \Rightarrow AB > OA$.
Tương tự $CD > OC$. Do đó : $AB + CD > OA + OC$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra : $AC + BD > OA + OC$ hay $2AC > OA + OC$. Do đó $AC > \frac{OA+OC}{2}$.

➢ **Xét trường hợp** $OA > OC$: Chứng minh tương tự.

**Bài 6.** Tứ giác $ABCD$ có $AC = BD; \widehat{C} = \widehat{D}$ và $BD \perp BC$. Hỏi tứ giác $ABCD$ có phải là hình thang cân không?




- ***Lời giải***

Qua $A$ vẽ một đường thẳng song song với $CD$ cắt tia $CB$ tại $B'$. Hình thang $AB'CD$ có hai góc ở đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

- Vậy nếu $B'$ trùng với $B$ thì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- Nếu $B'$ không trùng với $B$, ta có: $AC = B'D$.

Mặt khác, $AC = BD$ nên $B'D = BD$.

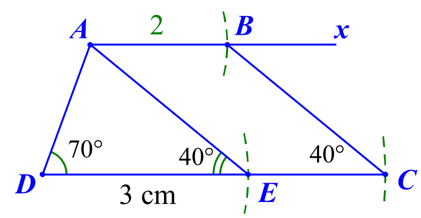
Do đó $\Delta DBB'$ cân $\Rightarrow \widehat{DB'B} = \widehat{DBB'} = 90^0$, vô lí.

Vậy $B'$ trùng với $B$ và tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

## Bài toán dựng hình

**Bài 1.** Dựng hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$ biết: $AB = 2cm, CD = 5cm, \widehat{C} = 40°;\ \widehat{D} = 70°$.

***a) Phân tích***




Giả sử ta đã dựng được hình thang $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Vẽ $AE//BC\left(E \in CD\right)$ ta được

$\widehat{AED} = \widehat{C} = 40°,\ \ EC = AB = 2cm$ và

$DE = DC - EC = 5 - 2 = 3cm.$

- $\Delta ADE$ dựng được ngay $\left(g.c.g\right)$.
- Điểm $C$ thỏa mãn hai điều kiện: $C$ nằm trên tia $DE$ và $C$ cách $D$ là $5cm.$
- Điểm $B$ thỏa mãn hai điều kiện: $B$ nằm trên tia $Ax//DE$ ( hai tia $Ax$ và $DE$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ $AD$ ) và $B$ cách $A$ là $2cm.$

***b) Cách dựng***

- Dựng $\Delta ADE$ sao cho $DE = 3cm; \widehat{D} = 70°;\ \widehat{E} = 40°$
- Dựng tia $Ax//DE$ (hai tia $Ax$ và $DE$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ $AD$ ).
- Trên tia $Ax$ đặt $AB = 2cm.$
- Trên tia $DE$ đặt $DC = 5cm.$
- Nối $BC$ ta được hình thang $ABCD$ phải dựng.

***c) Chứng minh***

Theo cách dựng tứ giác $ABCD$ có $AB//CD$ nên nó là hình thang.

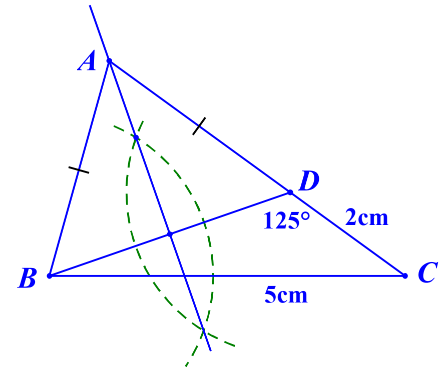
Xét hình thang $ABCE$ có $CE = 5 - 3 = 2\left(cm\right)$;

$AB = 2cm$ nên $AB = CE$ do đó $AE//BC \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{AED} = 40°.$

Như vậy hình thang $ABCD$ có $AB = 2cm; CD = 5cm; \widehat{D} = 70°$ và $\widehat{C} = 40°$

***d) Biện luận:*** Bài toán có một nghiệm hình.

**Bài 2.** Dựng tam giác $ABC$, biết $\widehat{A} = 70°, BC = 5cm$ và $AC - AB = 2cm.$




**a) Phân tích**

Giả sử ta đã dựng được tam giác $ABC$ thỏa mãn đề bài.

Trên tia $AC$ ta lấy điểm $D$ sao cho $AD = AB$.

Khi đó: $DC = AC - AD = AC - AB = 2cm$.

$\Delta ABD$ cân, $\widehat{A} = 70° \Rightarrow \widehat{ADB} = 55° \Rightarrow \widehat{BDC} = 125°$.

- $\Delta DBC$ xác định được $\left(CD = 2cm;\ \widehat{D} = 125°;\ CB = 5cm\right)$.

- Điểm $A$ thỏa mãn hai điều kiện: nằm trên tia $CD$ và $A$ nằm trên đường trung trực của $BD$.

**b) Cách dựng:**

Dựng $\Delta DBC$ sao cho $\widehat{D} = 125°; DC = 2cm$ và $CB = 5cm$.

- Dựng đường trung trực của $BD$ cắt tia $CD$ tại $A$.
- Nối $AB$ ta được $\Delta ABC$ phải dựng.

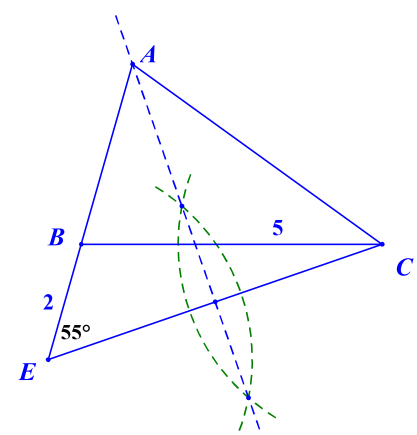
**c) Chứng minh**

$\Delta ABC$ thỏa mãn đề bài vì theo cách dựng, điểm $A$ nằm trên đường trung trực của $BD$ nên $AD = AB$.

Do đó : $AC - AB = AC - AD = DC = 2cm; BC = 5cm$ và $\widehat{ADB} = 180^0 - 125^0 = 55^0$

$\widehat{BAC} = 180^0 - 2.55^0 = 70^0$.

**d) Biện luận:** Bài toán có một nghiệm hình.



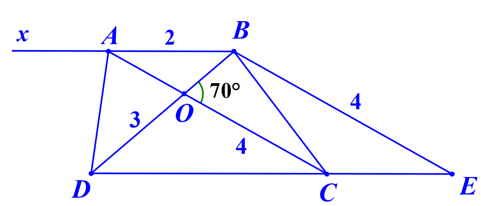

- ***Nhận xét :*** Đề bài có cho đoạn thẳng $2cm$ nhưng trên hình vẽ chưa có đoạn thẳng nào như vậy. Ta đã làm xuất hiện đoạn thẳng $DC = 2cm$ bằng cách trên $AC$ ta đặt $AD = AB$. Khi đó $DC$ chính là hiệu $AC - AB$. Cũng có thể làm xuất hiện đoạn thẳng $2cm$ bằng cách trên tia $AB$ ta đặt $AE = AC$ (h.2.10). Khi đó : $BE = AE - AB = AC - AB = 2cm$.

$\Delta AEC$ cân, có $\widehat{A} = 70^0 \Rightarrow \widehat{E} = \left(180^0 - 70^0\right) : 2 = 55^0$.

$\Delta BEC$ xác định được. Khi đó điểm $A$ thỏa mãn hai điều kiện : $A$ nằm trên tia $EB$ và $A$ nằm trên đường trung trực của $EC$.

**Bài 3.** Dựng hình thang $ABCD\ (AB // CD)$ biết $AD = 2cm; BD = 3cm; AC = 4cm$ và góc nhọn xen giữa hai đường chéo bằng $70^0$.

**a) Phân tích:**




Vẽ $BE // AC$ ($E \in$ tia $DC$), ta được:

$\widehat{DBE} = 110^0$, $BE = AC = 4cm$, $CE = AB = 2cm$.

- $\Delta BDE$ dựng được ngay (c.g.c);
- Điểm $A$ thỏa mãn hai điều kiện: $A$ nằm trên tia $Bx // DE$ và cách $B$ là $2cm$.
- Điểm $C$ thỏa mãn hai điều kiện: $C$ nằm trên tia $ED$ và cách $E$ là $2cm$.

**b) Cách dựng:**

- Dựng $\Delta BDE$ sao cho $\widehat{DBE} = 110^0$, $BD = 3cm$, $BE = 4cm$.

- Dựng tia $Bx // DE$ và trên đó đặt $BA = 2cm$ (hai tia $Bx$ và $ED$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ $BE$).
- Trên tia $ED$ đặt $EC = 2cm$.
- Nối $AD, BC$ ta được hình thang $ABCD$ phải dựng.

***c) Chứng minh:***

Tứ giác $ABCD$ theo cách dựng có $AB // CD$ nên là hình thang.

Xét hình thang $ABEC$ có $AB = EC = 2cm$ nên $AC // BE$ và $AC = BE = 4cm$.

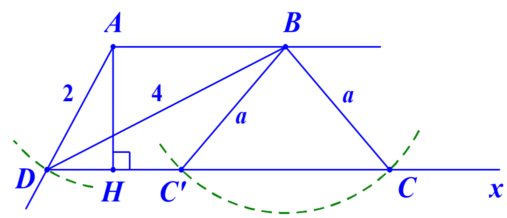
$\widehat{DOC} = \widehat{DBE} = 110^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 70^0$. Hình thang $ABCD$ theo cách dựng có:

$AB = 2cm,\ BD = 3cm,\ AC = 4cm$ và $\widehat{BOC} = 70^0$.

***d) Biện luận:*** Bài toán có một nghiệm hình.

**Bài 4.** Dựng hình thang $ABCD\ (AB // CD)$ biết $\widehat{A} = 120^0, AB = 2cm; BD = 4cm$ và $BC = a$.

- ***Cách dựng:***




- Dựng $\Delta ABD$ sao cho $\widehat{A} = 120^0, AD = 2, DB = 4$.
- Dựng tia $Dx // AB$ (hai tia $Dx$ và $AB$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ $AD$).
- Dựng cung tròn tâm $B$, bán kính $a$ cắt $Dx$ tại $C$
- Nối $BC$ ta được hình thang $ABCD$ phải dựng.

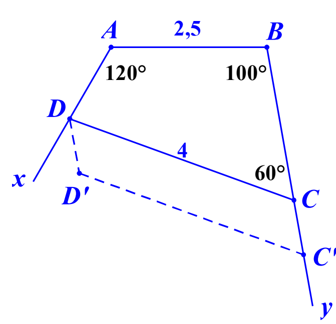
- ***Biện luận:***

Vẽ $AH \perp CD$ thì $\widehat{DAH} = 30^0$. Do đó $DH = \frac{1}{2}AD = 1cm \Rightarrow AH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

- Nếu $a < \sqrt{3}$ thì đường tròn $(B;a)$ không cắt tia $Dx$ nên bài toán không có nghiệm hình.
- Nếu $a = \sqrt{3}$ thì đường tròn $(B;a)$ có chung với tia $Dx$ một điểm, bài toán có một nghiệm hình.
- Nếu $\sqrt{3} < a < 4$ thì đường tròn $(B;a)$ cắt tia $Dx$ tại hai điểm $C$ và $C'$, bài toán có hai nghiệm hình.
- Nếu $a \geq 4$ thì đường tròn $(B;a)$ cắt tia $Dx$ tại một điểm $C \neq D$ nên bài toán có một nghiệm hình.

**Bài 5.** Dựng tứ giác $ABCD$ biết $AB = 2,5cm; CD = 4cm; \widehat{A} = 120^0; \widehat{B} = 100^0$ và $\widehat{C} = 60^0$.

***a) Phân tích:***




Giả sử ta đã dựng được tứ giác $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Ta thấy $AB = 2,5cm$ dựng được ngay.

Trên tia $BC$ lấy điểm $C'$. Vẽ đoạn thẳng $C'D' // CD$ và $C'D' = CD$. Khi đó $\widehat{C'} = \widehat{C} = 60^0$ và $DD' // CC'$.

***b) Cách dựng:***

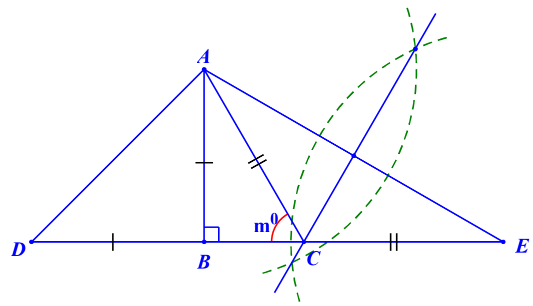
- Dựng $AB = 2,5cm$.
- Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ $AB$ dựng các tia $Ax$ và $By$ sao cho $\widehat{BAx} = 120^0, \widehat{ABy} = 100^0$.
- Trên tia $By$ lấy điểm $C'$.

- Dựng đoạn thẳng $C'D'$ sao cho $\widehat{BC'D'} = 60^0$ và $C'D' = 4\,\text{cm}$.
- Dựng $DD' = BC'\ (D \in Ax)$.
- Dựng $DC\ //\ D'C'\ (C \in By)$.

Tứ giác $ABCD$ là tứ giác phải dựng.

**Bài 6.** Dựng tam giác $ABC$ vuông tại $B$ có chu vi bằng $8cm$ và $\widehat{C} = m^0$.

***a) Phân tích:***




Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn đề bài.
Trên tia đối của tia $BC$ lấy điểm $D$; trên tia đối của tia $CB$ lấy điểm $E$ sao cho $BD = BA, CE = CA$.
Khi đó: $DE = DB + BC + CE = BA + BC + CA = 8cm$.
$\triangle ABD$ vuông cân tại $B$ nên $\widehat{D} = 45^0$.
Góc $ACB$ là góc ngoài của tam giác cân $CAE$ nên $\widehat{ACB} = 2\widehat{E} \Rightarrow \widehat{E} = \dfrac{m^0}{2}$.

- $\Delta ADE$ dựng được (g.c.g).
- Điểm $B$ thỏa mãn hai điều kiện: $B$ nằm trên đoạn thẳng $DE$ và $AB \perp DE$.
- Điểm $C$ thỏa mãn hai điều kiện: $C$ nằm trên đoạn thẳng $DE$ và nằm trên đường trung trực của $AE$ (vì $C$ cách đều hai đầu đoạn thẳng $AE$).

***b) Cách dựng:***

- Dựng $\Delta ADE$ sao cho $DE = 8cm; \widehat{D} = 45^0$ và $\widehat{E} = \dfrac{m^0}{2}$.
- Dựng $AB \perp DE\ (B \in DE)$.
- Dựng đường trung trực của $AE$ cắt $DE$ tại $C$.
- Nối $AC$ ta được $\Delta ABC$ phải dựng.

***c) Chứng minh :***

$\Delta ADB$ vuông tại $B$ có $\widehat{D} = 45^0$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow BA = BD$.
Điểm $C$ nằm trên đường trung trực của $AE$ nên $CA = CE$.

$\Delta ABC$ có $AB + BC + CA = BD + BC + CE = DE = 8cm; \widehat{B} = 90^0$ và $\widehat{ACB} = 2.\widehat{E} = 2.\dfrac{m^o}{2} = m^o$.

***d) Biện luận :***

- Nếu $m \geq 90$ thì bài toán không có nghiệm hình.
- Nếu $0 < m < 90$ thì bài toán có một nghiệm hình.

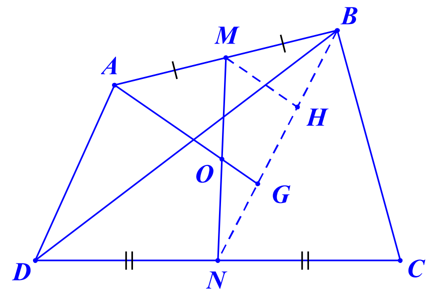
# CHỦ ĐỀ 3: ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

## Dạng 1. Bài tập về đường trung bình của tam giác.

**Bài 1.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $BCD$. Chứng minh rằng $AG$ chia đôi $MN$.

- ***Tìm cách giải***

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta dùng định lý đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba. Gọi $H$ là trung điểm của $BG$ thì ta có thể dùng định lý đường trung bình để chứng minh.




- ***Trình bày lời giải***

Gọi $O$ là giao điểm của $AG$ và $MN$.

Gọi $H$ là trung điểm của $BG$.

Theo tính chất của trọng tâm, ta có: $BH = HG = GN$.

Xét $\Delta ABG$ có $MH$ là đường trung bình $\Rightarrow MH // AG$.

Xét $\Delta HMN$ có $AG // MH$ và $NG = GH$ nên $ON = OM$.

Vậy $AG$ chia đôi $MN$.

***Nhận xét:*** Vẽ thêm trung điểm của một đoạn thẳng là cách vẽ hình phụ thường dùng để vận dụng định lý đường trung bình của tam giác.

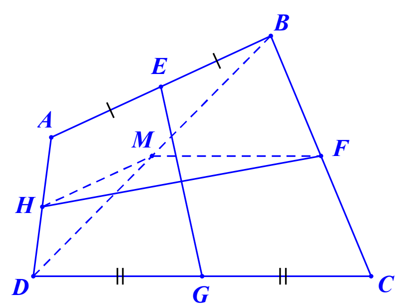
**Bài 2.** Cho tứ giác $ABCD$ có chu vi là $4a$. Gọi $E, F, G, H$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DA$. Chứng minh rằng trong hai đoạn thẳng $EG$ và $HF$ có một đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn $a$.

- ***Tìm cách giải***

Để chứng minh một trong hai đoạn thẳng $EG$ và $HF$ có độ dài không lớn hơn $a$, ta chứng minh tổng của hai đoạn này không lớn hơn $2a$. Khi đó một trong hai đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn $a$.

- ***Trình bày lời giải***

Gọi $M$ là trung điểm của $BD$.




Xét $\Delta ABD$ có $HM$ là đường trung bình nên $HM = \dfrac{AB}{2}$.

Xét $\Delta BDC$ có $MF$ là đường trung bình nên $MF = \dfrac{CD}{2}$.

Xét ba điểm $M, H, F$ có $HF \le MH + MF = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta được: $EG \le \dfrac{AD + BC}{2}$.

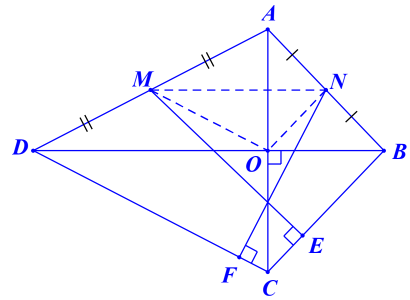
Vậy $HF + EG \le \dfrac{AB + CD + AD + BC}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a$.

Suy ra một trong hai đoạn thẳng $HF, EG$ có độ dài không lớn hơn $a$.

***Nhận xét:*** Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này vẫn là vẽ trung điểm của đoạn thẳng $BD$. Cũng có thể vẽ trung điểm của đoạn thẳng $AC$ thay cho trung điểm của đoạn thẳng $BD$.

**Bài 3.** Cho tứ giác $ABCD$, đường chéo $BD$ là đường trung trực của $AC$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $AB$. Vẽ $ME \perp BC$ và $NF \perp CD\left(E \in BC, F \in CD\right)$. Chứng minh rằng ba đường thẳng $ME, NF$ và $AC$ đồng quy.

- ***Lời giải***




Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

Ta có: $AC \perp BD$ và $OA = OC$.

Xét $\Delta ABD$ có $MN$ là đường trung bình

$\Rightarrow MN // BD$ và $OA \perp MN$ (vì $OA \perp BD$).

Xét $\Delta ABC$ có $ON$ là đường trung bình

$\Rightarrow ON // BC \Rightarrow ON \perp ME$ (vì $ME \perp BC$).

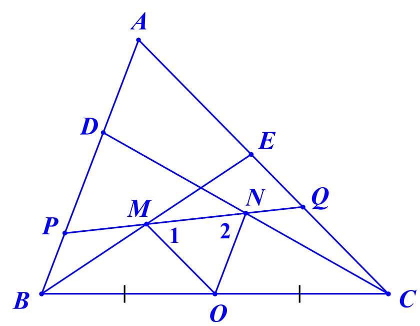
Xét $\Delta ACD$ có $OM$ là đường trung bình

$\Rightarrow OM // CD \Rightarrow OM \perp NF$ (vì $NF \perp CD$).

Xét $\Delta OMN$ có $OA, ME, NF$ là ba đường cao nên chúng đồng quy.

**Bài 4.** Cho tam giác $ABC$. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $D$, trên cạnh $AC$ lấy điểm $E$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $BE$ và $CD$. Đường thẳng $MN$ cắt tia $AB$ và $AC$ lần lượt là tại $P$ và $Q$. Hỏi hai điểm $D$ và $E$ phải có điều kiện gì để tam giác $APQ$ cân tại $A$?

- ***Tìm cách giải***




Gọi $O$ là trung điểm của $BC$.

Xét $\Delta EBC$ có $OM$ là đường trung bình

$\Rightarrow OM // CE$ và $OM = \dfrac{CE}{2}$.

Xét $\Delta DBC$ có $ON$ là đường trung bình

$\Rightarrow ON // BD$ và $ON = \dfrac{BD}{2}$.

Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{AQP}, \widehat{N_1} = \widehat{APQ}$ (so le trong).

$\Delta APQ$ cân tại

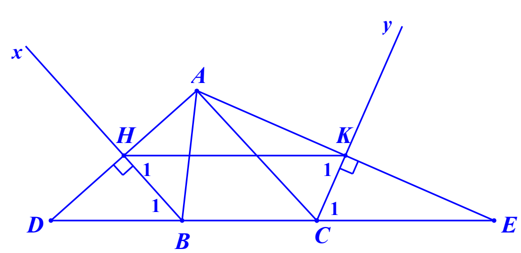
$A \Leftrightarrow \widehat{Q} = \widehat{P} \Leftrightarrow \widehat{N_1} = \widehat{M_1} \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow CE = BD$.

**Bài 5.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $Bx$ và $Cy$ lần lượt là các đường chứa tia phân giác của các góc ngoài tại đỉnh $B$ và $C$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là hình chiếu của $A$ trên $Bx$ và $Cy$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCKH$ là hình thang;

b) Tam giác $ABC$ phải có điều kiện gì để hình thang $BCKH$ là hình thang cân?

- ***Lời giải:***




a) Gọi $D$ và $E$ thứ tự là giao điểm của $AH$ và $AK$ với đường thẳng $BC$.

$\Delta ABD$ có $BH$ vừa là đường phân giác, vừa là đường cao nên là tam giác cân $\Rightarrow HA = HD$.

Tương tự, ta có: $KA = KE$.

Xét $\Delta ADE$ có $HK$ là đường trung bình nên $HK // DE \Rightarrow HK // BC$.

Do đó tứ giác $BCKH$ là hình thang.

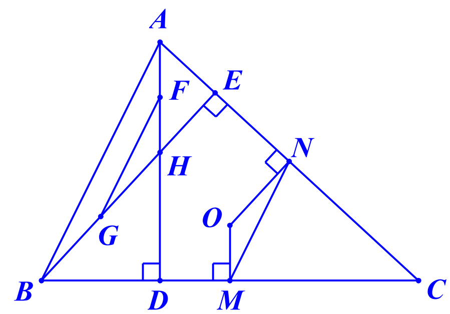
b) Ta có: $\widehat{H_1} = \widehat{B_1}; \widehat{K_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong).

Hình thang $BCKH$ là hình thang cân $\Leftrightarrow \widehat{H_1} = \widehat{K_1} \Leftrightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

$\Leftrightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại $A$.

**Bài 6.** Cho tam giác $ABC$, trực tâm $H$. Gọi $O$ là giao điểm của ba đường trung trực. Chứng minh rằng khoảng cách từ $O$ đến $BC$ bằng nửa độ dài $AH$.

- ***Lời giải:***




Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $CA$.

Gọi $F$ và $G$ lần lượt là trung điểm của $AH$ và $BH$.

Ta có $MN$ là đường trung bình của $\Delta ABC; FG$ là đường trung bình của $\Delta ABH$.

Suy ra $MN // AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$, FG // AB và $FG = \frac{1}{2}AB$.

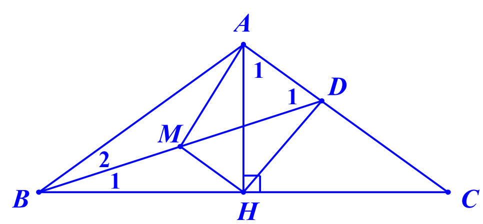
Do đó $MN // FG$ và $MN = FG$. Dễ thấy $OM // AD, ON // BE$.

$\Delta OMN$ và $\Delta HFG$ có: $MN = FG; \widehat{OMN} = \widehat{HFG}; \widehat{ONM} = \widehat{HGF}$ (hai góc có cạnh tương ứng song[2]).

Vậy $\Delta OMN = \Delta HFG(\text{g.c.g}) \Rightarrow OM = HF = \frac{AH}{2}$.

**Bài 7.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, đường cao $AH$ và đường phân giác $BD$. Biết rằng $AH = \frac{1}{2}BD$, tính số đo các góc của tam giác $ABC$

- ***Lời giải***




Gọi $M$ là trung điểm của $BD$ thì: $MD = \frac{1}{2}BD = AH$.

$\Delta ABC$ cân tại $A, AH$ là đường cao nên $HB = HC$.

Ta có $HM$ là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow HM // AC$.

$\Rightarrow$ tứ giác ADHM là hình thang

Hình thang $HMAD$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

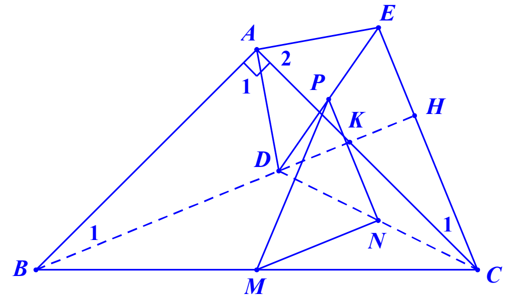
$\Delta ADH = \Delta DAM(c.c.c) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \Leftrightarrow 90° - \widehat{C} = \widehat{B_1} + \widehat{C}$ (Vì $\widehat{D}_1$ là góc ngoài của $\Delta BDC$) (1)

Ta đặt $\widehat{B} = \widehat{C} = x$ thì $(1) \Leftrightarrow 90° - x = \frac{x}{2} + x \Leftrightarrow x = 36°$

Vậy $\Delta ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 36°; \widehat{A} = 108°$.

**Bài 8.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. Lấy điểm $D$ ở trong tam giác. Vẽ tam giác $ADE$ vuông cân tại $A$ sao cho $D$ và $E$ thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ $AC$. Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC, CD$ và $DE$. Tính số đo các góc của tam giác $MNP$.

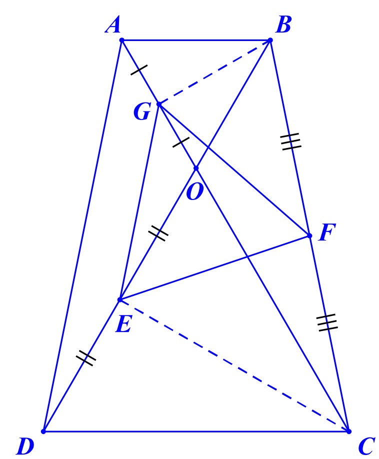
- ***Lời giải***




$\Delta ABD$ và $\Delta ACE$ có:
$AB = AC; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với góc $DAC$);
$AD = AE$.
Do đó $\Delta ABD = \Delta ACE\,(c.g.c)$
$\Rightarrow BD = CE$ và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.
Gọi $H$ và $K$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng $BD$ với $CE$ và $CA$.
Ta có: $\widehat{B_1} + \widehat{BKA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{CKH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H} = 90^\circ$.
Xét $\Delta CBD$ có $MN$ là đường trung bình $\Rightarrow MN // BD$ và $MN = \dfrac{1}{2}BD$
Xét $\Delta CED$ có $NP$ là đường trung bình $\Rightarrow NP // \text{CE}$ và $NP = \dfrac{1}{2}CE$.
Vì $BD = CE$ nên $MN = NP$.
Ta có: $\widehat{MNP} = \widehat{H} = 90^\circ$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).
Do đó $\Delta MNP$ vuông cân tại $N \Rightarrow \widehat{N} = 90^\circ; \widehat{M} = \widehat{P} = 45^\circ$

**Bài 9.** Cho hình thang cân $ABCD\,(AB//CD)$, $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Gọi $G, E, F$ lần lượt là trung điểm của $OA, OD$ và $BC$. Cho biết $\widehat{COD} = 60^\circ$, tính các góc của tam giác $GEF$.

- ***Lời giải***

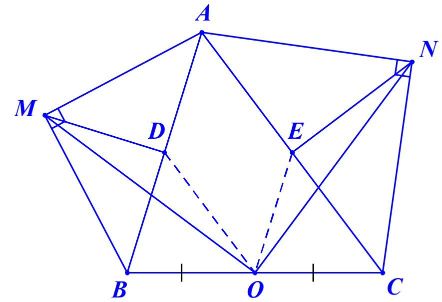



$\Delta ADC$ và $\Delta BCD$ có $AD = BC, AC = BD, CD$ chung.
Do đó $\Delta ADC = \Delta BCD\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \Delta COD$ cân.
Mặt khác $\widehat{COD} = 60^\circ$ nên $\Delta COD$ đều.
Ta có: $OE = ED$ nên $CE$ là đường trung tuyến của tam giác đều, do đó $CE$ cũng là đường cao.
Vậy $CE \perp BD$.
Xét $\Delta EBC$ vuông tại $E$ có $EF$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $EF = \dfrac{1}{2}BC$.

Chứng minh tương tự, ta có: $GF = \dfrac{1}{2}BC$.
Xét $\Delta AOD$ có $EG$ là đường trung bình nên $EG = \dfrac{1}{2}AD \Rightarrow EG = \dfrac{1}{2}BC$ (vì $AD = BC$)
Vậy $EF = FG = EG\left(= \dfrac{1}{2}BC\right) \Rightarrow \Delta GEF$ đều $\Rightarrow \widehat{G} = \widehat{E} = \widehat{F} = 60^\circ$.

**Bài 10.** Cho tam giác $ABC$, góc $A$ nhọn. Vẽ về phía ngoài của tam giác này các tam giác vuông cân $ABM$ và $CAN$ theo thứ tự có cạnh đáy là $AB$ và $AC$. Gọi $O$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh rằng tam giác $OMN$ là tam giác vuông cân.

- ***Lời giải***




Gọi $D$ và $E$ thứ tự là trung điểm của $AB$ và $AC$.

Ta có $OD$ và $OE$ là đường trung bình của $\Delta ABC$ nên $OE // AD$ và $OE = AD$; $OD // AE$ và $OD = AE$.

$\widehat{BDO} = \widehat{BAC}; \widehat{CEO} = \widehat{BAC}$ (đồng vị).

Vì $\Delta MAB$ vuông cân tại $M$ nên $MD \perp AB$ và $\Delta MAD$ vuông cân $\Rightarrow AD = MD$.

Tương tự, $NE \perp AC$ và $\Delta NEA$ vuông cân $\Rightarrow AE = NE$.

$\Delta OMD$ và $\Delta NOE$ có:

$MD = OE\left(= AD\right); \widehat{ODM} = \widehat{OEN}\left(= 90^\circ + \widehat{BAC}\right); OD = NE\left(= AE\right)$.

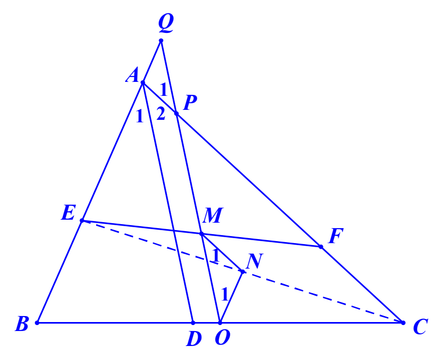
Vậy $\Delta OMD = \Delta NOE\left(c.g.c\right) \Rightarrow OM = ON$ và $\widehat{OMD} = \widehat{NOE}$.

Do đó $\widehat{MON} = \widehat{MOD} + \widehat{DOE} + \widehat{NOE} = \widehat{MOD} + \widehat{BDO} + \widehat{OMD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Vậy $\Delta MON$ vuông cân.

**Bài 11.** Tam giác $ABC, AB < AC$. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $E$, trên cạnh $AC$ lấy điểm $F$ sao cho $BE = CF$. Gọi $M$ là trung điểm của $EF$. Chứng minh rằng khi $E$ và $F$ di động trên $AB, AC$ thì trung điểm $M$ của $EF$ nằm trên một đường thẳng cố định.

- ***Lời giải***




Vẽ đường phân giác $AD$ thì $AD$ là một đường thẳng cố định.

Gọi $O$ là trung điểm của $BC$ thì $O$ là một điểm cố định.

Gọi $P, Q$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng $OM$ với các đường thẳng $AC$ và $AB$.

Xét $\Delta EBC$ có $ON$ là đường trung bình

$\Rightarrow ON // BE$ và $ON = \frac{1}{2}BE$.

Xét $\Delta ECF$ có $MN$ là đường trung bình

$\Rightarrow MN // CF$ và $MN = \frac{1}{2}CF$.

Vì $BE = CF$ nên $ON = MN \Rightarrow \Delta OMN$ cân $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{O_1}$.

Ta có $\widehat{P_1} = \widehat{M_1}\left(= \widehat{P_2}\right); \widehat{Q} = \widehat{O_1} \Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{Q}$.

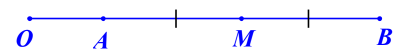
Xét $\Delta APQ$ có $\widehat{BAC}$ là góc ngoài nên $\widehat{BAC} = \widehat{P_1} + \widehat{Q}$.

Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_2} = \widehat{P_1} \Rightarrow OP // AD$.

Vậy $M$ nằm trên một đường thẳng đi qua $O$ và song song với $AD$. Đó là một đường thẳng cố định.

**Bài 12.** Cho đoạn thẳng $AB$ và $n$ điểm $O_1, O_2, ..., O_n$ không nằm giữa $A$ và $B$ sao cho $O_1A + O_2A + ... + O_nA = O_1B + O_2B + ... + O_nB = a$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm $M$ sao cho $O_1M + O_2M + ... + O_nM \le a$.

- **Lời giải**

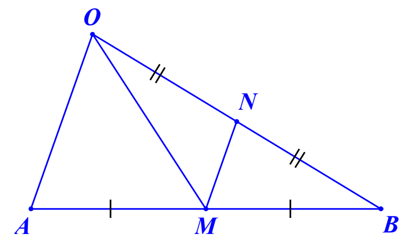



Gọi $M$ là trung điểm của $AB$ và $O$ là một điểm tùy ý không nằm giữa $A$ và $B$.

➢ Trường hợp $O$ nằm trên tia đối của tia $AB$ hay tia đối của tia $BA$

Ta chứng minh được $OM = \dfrac{OA+OB}{2}$. $(1)$

➢ Trường hợp $O$ không thẳng hàng với $A$ và $B$




Gọi $N$ là trung điểm của $OB$, khi đó $MN$ là đường trung bình của $\Delta OAB$, $MN = \dfrac{OA}{2}$.

Xét $\Delta OMN$, ta có: $OM < MN + ON \Rightarrow OM < \dfrac{OA+OB}{2}$. $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra: $OM \le \dfrac{OA+OB}{2}$. $(*)$

Áp dụng hệ thức $(*)$ đối với $n$ điểm $O_1, O_2, \ldots, O_n$ ta có:

$O_1M \le \dfrac{O_1A+O_1B}{2}; O_2M \le \dfrac{O_2A+O_2B}{2}; \ldots; O_nM \le \dfrac{O_nA+O_nB}{2}$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

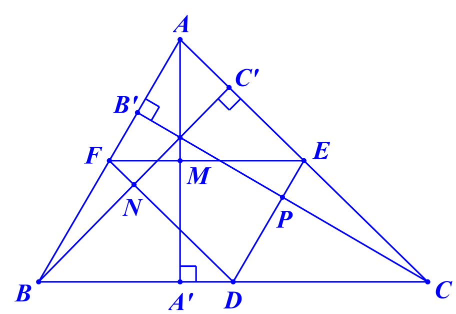
$O_1M + O_2M + \ldots O_nM \le \dfrac{O_1A+O_1B}{2} + \dfrac{O_2A+O_2B}{2} + \ldots + \dfrac{O_nA+O_nB}{2}$

$= \dfrac{O_1A+O_2A+\ldots+O_nA}{2} + \dfrac{O_1B+O_2B+\ldots+O_nB}{2} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = a$.

Như vậy điểm cần tìm chính là trung điểm $M$ của $AB$.

**Bài 13.** Cho tam giác $ABC, \widehat{C} \le \widehat{B} \le \widehat{A}$. Biết trung điểm của ba đường cao thẳng hàng. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông tại $A$.

- **Lời giải**




Vì $AA', BB', CC'$ là ba đường cao của $\Delta ABC$. Gọi $M, N, P$ là trung điểm của các đường cao đó. Gọi $D, E, F$ thứ tự là trung điểm của $BC, CA$ và $AB$.

Ta có: $EF, FD, DE$ là các đường trung bình của $\Delta ABC$

$\Rightarrow EF // BC, FD // CA, DE // AB$.

Vì $M$ là trung điểm của $AA'$ nên $M \in FE$.

Vì $N$ là trung điểm của $BB'$ nên $N \in FD$. Vì $P$ là trung điểm của $CC'$ nên $P \in DE$.

Theo đề bài ra, ba điểm $M, N, P$ thẳng hàng nên các điểm này chỉ có thể nằm trên một trong các cạnh $DE, DF$ hoặc $EF$ của $\Delta DEF$.

➢ Nếu ba điểm $M, N, P$ cùng nằm trên $DE$ thì $N$ trùng với $D$, $M$ trùng với $E$, khi đó $\Delta ABC$ vuông tại $C$, trái với giả thiết góc $C$ là góc nhỏ nhất của $\Delta ABC$

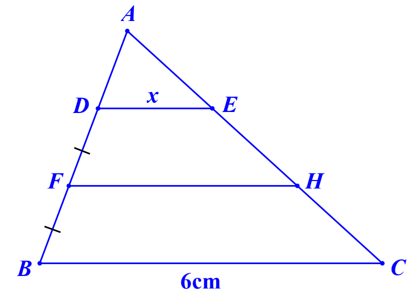
➢ Nếu ba điểm $M, N, P$ cùng nằm trên $DF$ thì cũng lập luận như trên, $\Delta ABC$ vuông tại $B$, trái với giả thiết $\widehat{B} \le \widehat{A}$.

➢ Vậy ba điểm $M, N, P$ cùng nằm trên $EF$.

Lập luận tương tự như trên ta được $\Delta ABC$ vuông tại $A$

## Dạng 2. Bài tập về đường trung bình của hình thang

**Bài 1.** Cho tam giác $ABC$, $BC = 6\,cm$. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $D$ sao cho $AD = \frac{1}{3}AB$. Vẽ $DE // BC\,(E \in AC)$. Tính độ dài $DE$.




- ***Tìm cách giải***

Vì $AD = \frac{1}{2}DB$ nên ta vẽ trung điểm $F$ của $DB$. Từ $F$ vẽ một đường thẳng song song với $BC$ thì $DE$ chính là đường trung bình của một tam giác. Từ đó sẽ tính được độ dài của nó.

- ***Trình bày lời giải***

Gọi $F$ là trung điểm của $DB$. Khi đó: $AD = DF = FB$.
Vẽ $FH // BC\,(H \in AC)$.
Xét $\Delta AFH$ có $DE // FH$ và $AD = DF$ nên $AE = EH$.
Xét hình thang $DECB$ có $FH // BC$ và $DF = FB$ nên $EH = HC$.
Ta đặt $DE = x$.
Ta có $DE$ là đường trung bình của $\Delta AFH \Rightarrow DE = \frac{1}{2}FH \Rightarrow FH = 2x$.
Ta có $FH$ là đường trung bình của hình thang $DECB$
$\Rightarrow FH = \frac{DE + BC}{2} \Rightarrow 2x = \frac{x+6}{2} \Rightarrow x = 2(cm)$. Vậy $DE = 2cm$.

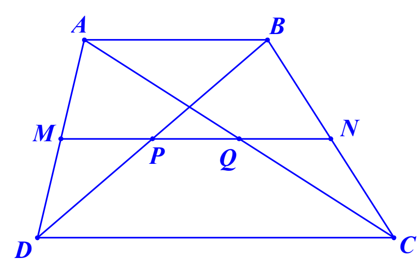
***Nhận xét:*** Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này là ngoài việc vẽ trung điểm của một đoạn thẳng ta còn thêm đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.

**Bài 2.** Cho hình thang $ABCD$, $AB$ là đáy nhỏ. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AD, BC, BD$ và $AC$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $M, N, P, Q$ thẳng hàng;

b) Chứng minh $PQ // CD$ và $PQ = \frac{CD - AB}{2}$;

c) Hình thang $ABCD$ phải có điều kiện gì để $MP = PQ = QN$




- ***Tìm cách giải***

Trong hình vẽ có nhiều đường thẳng cùng đi qua một điểm và cùng song song với một đường thẳng nên có thể vận dụng tiên đề Ơ-clit để chứng minh thẳng hàng.

- ***Trình bày lời giải***

a) Xét $\Delta ABD$ có $MP$ là đường trung bình
$\Rightarrow MP // AB \Rightarrow MP // CD$.
Xét $\Delta ADC$ có $MQ$ là đường trung bình $\Rightarrow MQ // CD$.
Xét hình thang $ABCD$ có $MN$ là đường trung bình $\Rightarrow MN // CD$.
Qua điểm $M$ có các đường thẳng $MP, MQ, MN$ cùng song song với $CD$ nên các đường thẳng này trùng nhau, suy ra bốn điểm $M, N, P, Q$ thẳng hàng.

b) Ta có: $MN // CD$ nên $PQ // CD;\ PQ = MQ - MP = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$.

c) Ta có: $MP = NQ = \frac{AB}{2}.MP = PQ \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$

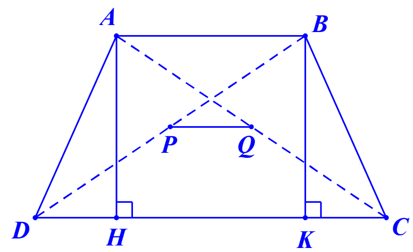
$\Leftrightarrow AB = CD - AB \Leftrightarrow 2AB = CD$ (đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ).

***Nhận xét:*** Đường trung bình $MN$ của hình thang và đoạn thẳng $PQ$ nối trung điểm hai đường chéo có tính chất giống nhau là cùng song song với hai đáy, có tính chất khác nhau là $MN$ bằng nửa tổng hai đáy còn $PQ$ bằng nửa hiệu hai đáy.

**Bài 3.** Cho hình thang cân $ABCD\left(AB<CD\right)$. Vẽ $AH\perp CD$. Chứng minh rằng:

a) $HD$ bằng đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo;
b) $HC$ bằng đường trung bình của hình thang.

- ***Lời giải***



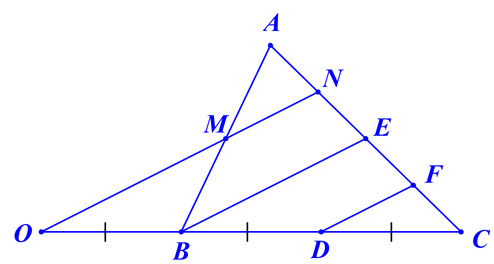

a) Vẽ $BK\perp CD$ ta được $AH//BK$ và $AB//HK\Rightarrow AB=HK$.
$\Delta ADH=\Delta BCK\Rightarrow HD=KC.$
Ta có: $HD+KC=CD-HK\Leftrightarrow 2HD=CD-AB$
$\Leftrightarrow HD=\dfrac{CD-AB}{2}.$
Theo bài 2 thì đoạn thẳng $PQ$ nối trung điểm của hai đường chéo bằng nửa hiệu hai đáy. Vậy $HD=PQ$

b) Ta có: $HC=CD-HD=CD-\dfrac{CD-AB}{2}=\dfrac{CD+AB}{2}.$

Đường trung bình của hình thang bằng nửa tổng hai đáy. Do đó $HC$ bằng độ dài đường trung bình của hình thang.

**Bài 4.** Cho tam giác $ABC$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$. Trên tia đối của tia $BC$ lấy điểm $O$ sao cho $BO=\dfrac{1}{2}BC$. Đường thẳng $OM$ cắt $OC$ tại $N$. Chứng minh rằng: $AN=\dfrac{1}{4}AC$.

- ***Lời giải:***



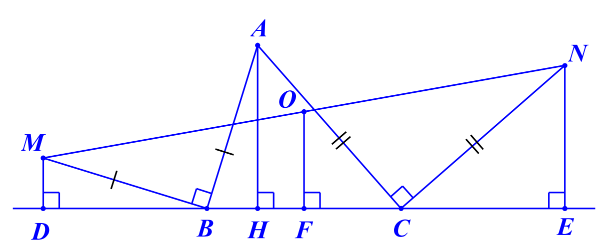

Gọi $D$ là trung điểm của $BC$.
Vẽ $BE//ON, DF//ON\left(E,F\in AC\right)$.
Ta có: $OB=BD=DC=\dfrac{1}{2}BC.$

- Xét $\Delta ABE$ có $MN//BE$ và $MA=MB$ nên $NA=NE$. $\quad(1)$
- Xét hình thang $ONFD$ có $BE//ON$ và $OB=BD$ nên $NE=EF$. $\quad(2)$
- Xét $\Delta CBE$ có $DF//BE$ và $BD=DC$ nên $EF=FC$. $\quad(3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $AN=NE=EF=FC$, do đó $AN=\dfrac{1}{4}AC.$

**Bài 5.** Cho tam giác $ABC$, cạnh $BC$ cố định. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác $ABM$ vuông cân tại $B$, tam giác $CAN$ vuông cân tại $C$. Chứng minh rằng khi $A$ di động trên một nửa mặt phẳng bờ $BC$ thì đường thẳng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định.

- ***Lời giải***




Gọi $O$ là trung điểm của $MN$.
Vẽ $OF\perp BC; AH\perp BC; MD\perp BC$ và $NE\perp BC$.
Ta có: $OF//AH//MD//NE.$
$\Delta BMD=\Delta ABH$ (cạnh huyền – góc nhọn)
$\Rightarrow MD=BH$ và $BD=AH.$ $\quad(1)$

Tương tự, $\Delta CNE=\Delta ACH\Rightarrow NE=CH$ và $CE=AH.$ $\quad(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $BD = CE(= AH)$.
Dễ thấy $OF$ là đường trung bình của hình thang $MDEN$

$\Rightarrow OF = \dfrac{MD + NE}{2} = \dfrac{BH + CH}{2} = \dfrac{BC}{2}$ (không đổi).

Ta có: $FD = FE; BD = CE \Rightarrow FB = FC$.

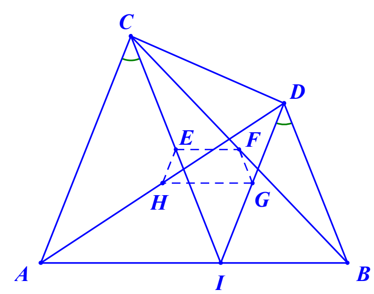
Vậy $O$ nằm trên đường trung trực của $BC$ và cách $BC$ một khoảng không đổi là $\dfrac{BC}{2}$.

Do đó $O$ là một điểm cố định.
Suy ra $MN$ đi qua một điểm cố định là điểm $O$.

**Bài 6.** Cho điểm $M$ nằm giữa hai điểm $A$ và $B$ nhưng không là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ $AB$ vẽ các tam giác $CAM$ và $DBM$ cân tại $C$ và $D$ sao cho $\widehat{C} = \widehat{D}$. Gọi $H$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Chứng minh rằng: $HF = \dfrac{1}{2}CD$.

- ***Tìm hướng giải***

Điều phải chứng minh là $HF = \dfrac{1}{2}CD$ gợi ý cho ta nghĩ đến định lí đường trung bình của tam giác. Ta vẽ đường trung bình $EG$ của $\Delta MCD$ thì $EG = \dfrac{1}{2}CD$. Chỉ còn phải chứng minh $HF = EG$.




- ***Trình bày lời giải***

Gọi $E$ là trung điểm của $CM$, $G$ là trung điểm của $DM$. Khi đó $EG$ là đường trung bình của $\Delta MCD \Rightarrow EG = \dfrac{1}{2}CD.$ $(1)$

$\Delta CAM$ và $\Delta DBM$ cân tại $C$ và $D$ mà $\widehat{C} = \widehat{D}$ nên các góc ở đáy của chúng bằng nhau:
$\widehat{CAM} = \widehat{CMA} = \widehat{DMB} = \widehat{DBM} \Rightarrow CA // DM$ và $CM // DB$ (vì có các cặp góc đồng vị bằng nhau).
Xét $\Delta CMB$ có $EF$ là đường trung bình $\Rightarrow EF // MB$.
Xét $\Delta DAM$ có $HG$ là đường trung bình $\Rightarrow HG // AM$.
Suy ra: $EF // HG$ (vì cùng song song với $AB$). Vậy tứ giác $EFGH$ là hình thang.
Xét hình thang $ACDM$ có $EH$ là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo nên $EH // AC$.
Tương tự, xét hình thang $CDBM$ có: $FG // DB$.
Do đó $\widehat{EHG} = \widehat{CAM}, \widehat{FGH} = \widehat{DBM}$.
Mặt khác $\widehat{CAM} = \widehat{DBM}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{EHG} = \widehat{FGH}$.
Vậy hình thang $EFGH$ là hình thang cân $\Rightarrow HF = EG.$ $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra: $HF = \dfrac{1}{2}CD$.

**Bài 7.** Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng nhau, xen giữa hai cạnh có tổng bằng nhau thì tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

- ***Lời giải***

Vẽ $\Delta ABC$ cân tại $A$. Trên cạnh $AB$ lấy điểm $M$, trên tia đối của tia $CA$ lấy điểm $N$ sao cho $BM = CN$. Như vậy $AB + AC = AM + AN.$ $(1)$

Ta phải chứng minh chu vi $\Delta ABC$ nhỏ hơn chu vi $\Delta AMN$.
Muốn vậy ta phải chứng minh $BC < MN$.
Ta vẽ $MD // NE // BC$ ($D \in AC, E \in$ tia đối của tia $BA$).

Hình thang $MDCB$ là hình thang cân $\Rightarrow MB = DC$, mà $BM = CN$ và $DC = CN$

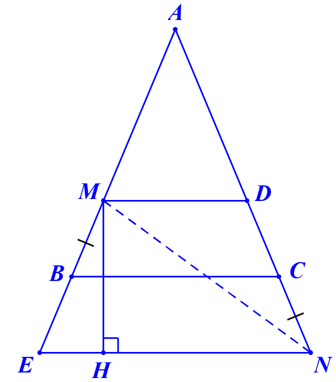
Xét hình thang cân $MDNE$ có $BC // NE$ và $DC = CN$ nên $MB = BE$.

Vậy $BC$ là đường trung bình của hình thang $MDNE$.

Vẽ $MH \perp EN$ thì $HN = BC$ (xem bài 3.12).

Xét $\Delta MHN$ vuông tại $H$ có $HN < MN \Rightarrow BC < MN$. $\quad (2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra chu vi $\Delta ABC$ nhỏ hơn chu vi $\Delta AMN$.




# Chủ đề 3: HÌNH BÌNH HÀNH

## Dạng 1. Bài tập vận dụng tính chất hình bình hành

**Bài 1.** Cho hình bình hành ACBD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AC, BD gặp nhau tại một điểm.

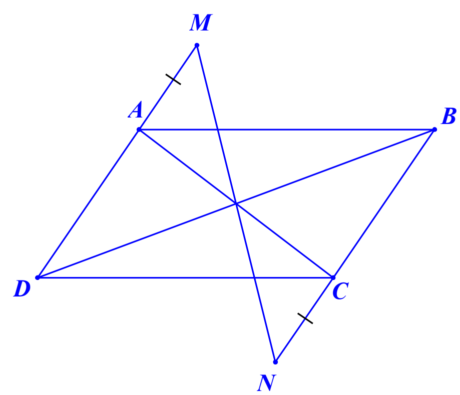
- ***Lời giải***

Tứ giác: AMCN có $AM // CN$ và $AM = CN$ nên là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo MN và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC

Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Vậy các đường thẳng MN, BD và AC cùng đi qua trung điểm O của AC.

**Nhận xét:** Hai hình bình hành AMCD và ABCD có chung đường chéo AC thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung.




**Bài 2.** Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các tam giác đều ABM và AND. Chứng minh rằng tam giác CMN là tam giác đều.

- ***Lời giải***

Ta đặt: $\widehat{ABC} = \alpha$ thì $\widehat{ADC} = \alpha$; $\widehat{BAD} = 180^0 - \alpha$;

$\widehat{MAN} = 360^0 - \left(60^0 + 60^0 + 180^0 - \alpha\right) = 60^0 + \alpha$

$\Delta MAN$ và $\Delta CDN$ có:

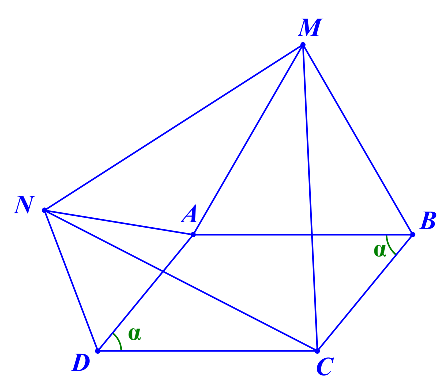
$AM = DC(= AB)$; $\widehat{MAN} = \widehat{CDN}\left(= 60^0 + \alpha\right)$; $AN = DN$

Do đó: $\Delta MAN = \Delta CDN\left(c.g.c\right) \Rightarrow MN = CN.(1)$

Chứng minh tương tự, ta được:

$\Delta MAN = \Delta MBC\left(c.g.c\right) \Rightarrow MN = MC.(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra: $MN = CN = MC$. Vậy $\Delta CMN$ đều.




**Nhận xét:** Việc đặt $\widehat{ABC} = \alpha$ là một kỹ thuật giúp ta tính toán và so sánh góc được nhanh chóng, tiện lợi.

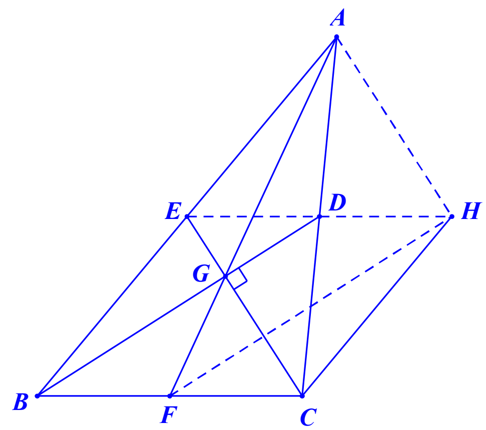
**Bài 3.** Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến vuông góc với nhau thì tổng các bình phương của hai đường trung tuyến này bằng bình phương đường trung tuyến thứ ba.

- **Tìm cách giải**

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta vận dụng định lý Py-ta-go. Muốn vậy phải vẽ đường phụ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng ba đường trung tuyến.

- **Trình bày lời giải**

Giả sử tam giác ABC là tam giác có ha đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Ta phải chứng minh $BD^2 + CE^2 = AF^2$ (AF là đường trung tuyến thứ ba).




Trên tia ED lấy điểm K sao cho D là trung điểm của EK. Tứ giác AKCE có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

$\Rightarrow AK \,//\, CE$ và $AK = CE$.

Ta có: $DE \,//\, BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow DK \parallel BF$ và $DK = BF$.

Vậy tứ giác DKFB là hình bình hành $\Rightarrow KF \,//\, BD$ và $KF = BD$.

Mặt khác, $BD \perp CE$ nên $AK \perp KF$.

Do đó $\Delta KAF$ vuông tại $A \Rightarrow AK^2 + KF^2 = AF^2 \Rightarrow CE^2 + BD^2 = AF^2$.

**Bài 4.** Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác ABD và tam giác ACE vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng hai đường thẳng MA và BC vuông góc với nhau.

- ***Lời giải***

Vẽ hình bình hành DAEF. Khi đó AF đi qua M.

Gọi H là giao điểm của MA với BC.

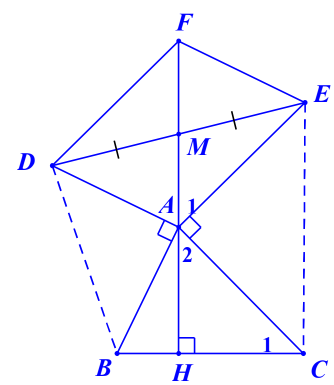
Ta có: $EF = AD = AB$.

$\widehat{AEF} + \widehat{DAE} = 180^0$ mà $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^0$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{BAC}$

$\Delta AEF = \Delta CAB\ (g.c.g) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{A_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{H} = 90^0$.

Do đó: $MA \perp BC$.




**Bài 5.** Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra ngoài hình bình hành các tam giác ABM vuông cân tại A, tam giác BCN vuông cân tại C. Chứng minh rằng tam giác DMN vuông cân.

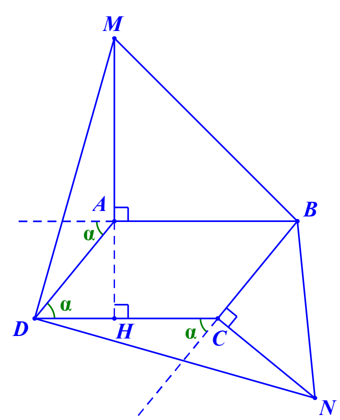
- ***Lời giải***

Ta đặt $\widehat{ADC} = \alpha$ thì $\widehat{DAM} = 90^0 + \alpha$; $\widehat{NCD} = 90^0 + \alpha$.

$\Delta DAM$ và $\Delta NCD$ có:

$AM = CD (= AB)$; $\widehat{DAM} = \widehat{NCD} \left(= 90^0 + \alpha\right)$; $AD = CN\ (= BC)$

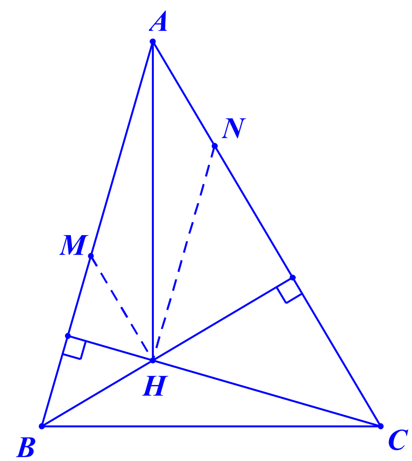
Do đó $\Delta DAM = \Delta NCD (c.g.c) \Rightarrow DM = DN$ (1) và $\widehat{DMA} = \widehat{NDC}$



Kéo dài MA cắt CD tại H. Ta có:
$MA \perp AB \Rightarrow MH \perp CD$
Xét $\Delta MDH$ có $\widehat{DMA} + \widehat{ADM} + \alpha = 90^0 \Rightarrow \widehat{NDC} + \widehat{ADM} + \alpha = 90^0$
Hay $\widehat{MDN} = 90^0$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\Delta DMN$ vuông cân tại D

**Bài 6.** Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Chứng minh rằng chu vi của tam giác ABC lớn hơn $\frac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

- ***Lời giải***

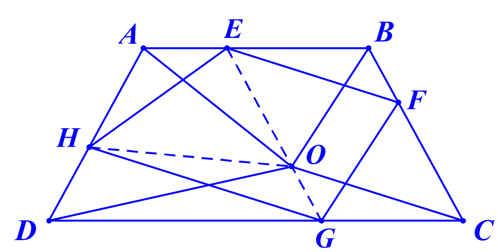



Vẽ $HM \parallel AC (M \in AB), HN \parallel AB (N \in AC)$.
Vì $CH \perp AB$ nên $CH \perp HN$. Vì $BH \perp AC$ nên $BH \perp HM$.
Xét $\Delta HBM$ vuông tại H có $BM > HB$. (1)
Xét $\Delta HCN$ vuông tại H có $CN > HC$. (2)
Xét hình bình hành ANHM có
$AM + AN = AM + MH > HA.$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra:
$BM + CN + AM + AN > HB + HC + HA$
do đó $(MB + AM) + (CN + AN) > HA + HB + HC$
hay $AB + AC > HA + HB + HC.$
Chứng minh tương tự, ta được: $BC + BA > HA + HB + HC$
$CA + CB > HA + HB + HC.$
Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:
$2(AB + BC + CA) > 3(HA + HB + HC)$
Do đó $AB + BC + CA > \frac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

**Bài 7.** Cho hình thang cân $ABCD (AB \parallel CD)$ và một điểm O ở trong hình này. Chứng minh rằng có một tứ giác mà bốn cạnh lần lượt bằng OA, OB, OC, OD và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình thang cân.

- ***Lời giải***

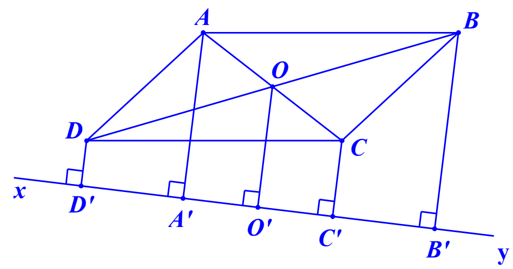
Qua O dựng một đường thẳng song song với BC cắt AB và CD lần lượt tại E và G. Qua O dựng một đường thẳng song song với CD cắt AD tại H.
Qua E dựng một đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.
Khi đó tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.




Thật vậy, các tứ giác AEOH, HOGD là những hình thang cân.
$\Rightarrow OA = EH; OD = HG.$ (1)
Tứ giác EFCO là hình bình hành $\Rightarrow OC = EF$ (2)
và $OE = CF$. Suy ra $OG = BF$
Vậy tứ giác OBFG là hình bình hành $\Rightarrow OB = GF.$(3)
Từ (1), (2), (3) suy ra tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.

**Bài 8.** Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng xy không cắt các cạnh của hình bình hành. Qua các đỉnh A, B, C, D vẽ các đường thẳng vuông góc với xy, cắt xy lần lượt tại $A', B', C', D'$. Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

- ***Lời giải***

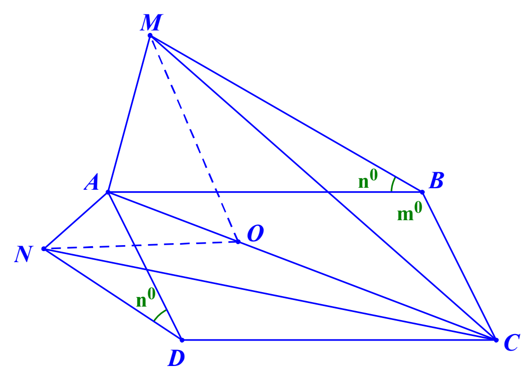



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vẽ $OO' \perp xy$.
Ta có: $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel OO'$.
Xét hình thang $AA'C'C$ có $OA = OC$ và $OO' \parallel AA'$ nên $O'A' = O'C'$.
Do đó $OO'$ là đường trung bình của hình thang $AA'C'C \Rightarrow OO' = \dfrac{AA' + CC'}{2}$ hay $AA' + CC' = 2OO'$.
Xét hình thang $DD'B'B$, cũng chứng minh tương tự, ta có: $BB' + DD' = 2OO'$.
Từ đó suy ra: $AA' + CC' = BB' + DD'$.

**Bài 9.** Cho hình bình hành $ABCD(AD < AB)$. Vẽ ra ngoài hình bình hành tam giác ABM cân tại B và tam giác ADN cân tại D sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ADN}$

a) Chứng minh rằng $CM = CN$;
b) Trên AC lấy một điểm O. Hãy so sánh OM với ON.

- ***Lời giải***




a) Vì ABCD là hình bình hành nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
Ta đặt $\widehat{ABC} = m^0, \widehat{ABM} = n^0$, khi đó
$\widehat{MBC} = \widehat{CDN} = m^0 + n^0$
$\Delta MBC$ và $\Delta CDN$ có:
$MB = CD(= AB); \widehat{MBC} = \widehat{CDN}$ (chứng minh trên);
$BC = DN(= AD)$. Vậy
$\Delta MBC = \Delta CDN(c.g.c) \Rightarrow CM = CN$

b) Các $\Delta ABM$ và $\Delta AND$ là những tam giác cân có góc ở đỉnh bằng nhau mà $AB > AD$ nên $AM > AN$

Xét $\Delta ACM$ và $\Delta CAN$ có $CM = CN$; CA chung và $AM > AN$ nên $\widehat{ACM} > \widehat{ACN}$

Xét $\Delta OCM$ và $\Delta OCN$ có $CM = CN$; CO chung và $\widehat{ACM} > \widehat{ACN}$ nên $OM > ON$

**Bài 10.** Cho tam giác ABC cân tại A, $AB < BC$. Trên tia AB có điểm D, trên tia CA có điểm E sao cho $AD = DE = EC = CB$. Tính các góc của tam giác ABC.

- ***Lời giải***

Vẽ hình bình hành BDEF thì $EF = BD(1); ED = FB$.
Ta có: $AD = CE; AB = AC \Rightarrow BD = EA.(2)$
Từ (1) và (2) suy ra $EF = EA$. Ta có: $\widehat{CEF} = \widehat{DAE}$ (so le trong); $\widehat{DEA} = \widehat{DAE}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân). Suy ra $\widehat{CEF} = \widehat{DEA}$
$\Delta CEF = \Delta DEA($ c.g.c $) \Rightarrow CF = AD$

Từ đó suy ra: $BF = CF = BC \Rightarrow \Delta FBC$ đều. Ta đặt $\widehat{BAC} = m^0, \widehat{ADE} = n^0$.

Vẽ tia Fx là tia đối của tia FC. Vì $\widehat{CFE} = \widehat{DAE}$ nên $\widehat{EFx} = \widehat{BAC} = m^0$.

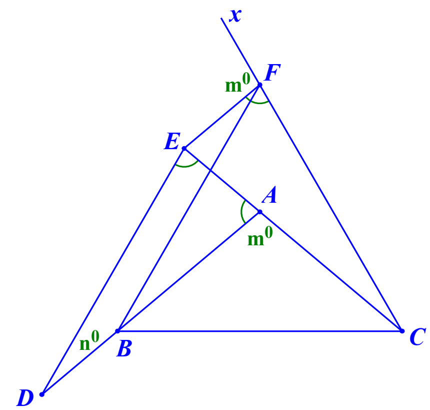
Ta có: $\widehat{BFx} = 120^0$ hay $m^0 + n^0 = 120^0$. (*)

Trong $\Delta CEF$ ta có $\widehat{ECF} = \widehat{D} = n^0$; $\widehat{CFE} = \widehat{CEF} = 60^0 + n^0$.

Do đó:

$n^0 + \left(60^0 + n^0\right) + \left(60 + n^0\right) = 180^0 \Rightarrow 3n^0 = 60^0 \Rightarrow n^0 = 20^0$

Từ (*) $\Rightarrow m^0 = 100^0$. Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^0$




## Dạng 2. Nhận biết hình bình hành

**Bài 1.** Chứng minh rằng trong một tứ giác, đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm của hai cặp cạnh đối diện gặp nhau tại một điểm (định lí Giéc-Gôn, nhà Toán học Pháp).

- ***Lời giải***

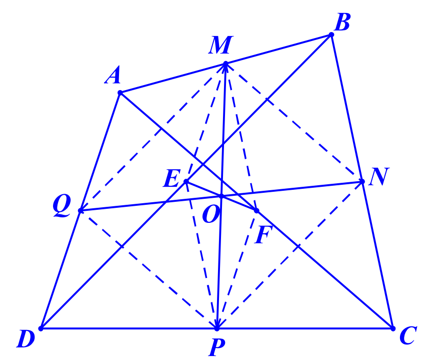
Gọi M, N, P, Q, E. F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC và BD. Ta phải chứng minh MP, NQ và EF cùng đi qua một điểm.

Xét $\Delta ABC$ có MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN \parallel AC$ và $MN = \dfrac{AC}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta có:

$PQ \parallel AC$ và $PQ = \dfrac{AC}{2}$.



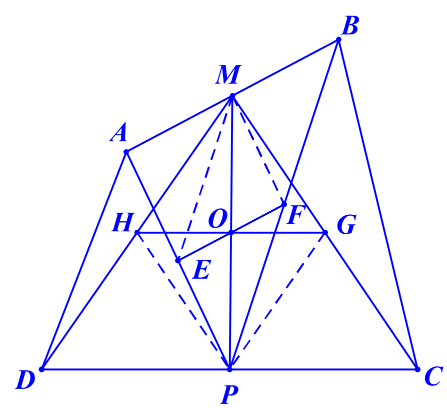

Suy ra $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$. Do đó tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự, ta được tứ giác MEPF là hình bình hành.

Hai hình bình hành MNPQ và MEPF có chung đường chéo MP nên các đường chéo MP, NQ và EF đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

**Bài 2.** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, NB, MC, MD. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, EF, GH đồng quy.

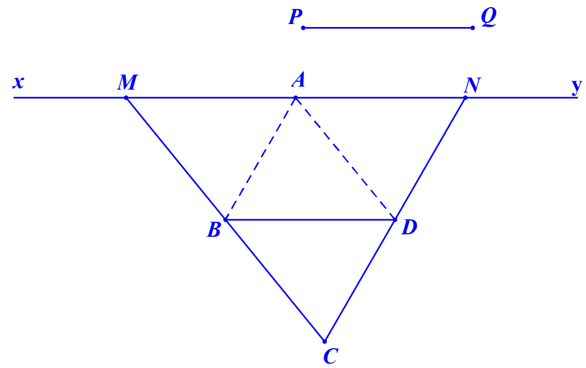
**HD:** Chứng minh tứ giác HEGF là hình bình hành từ đó suy ra MN, EF, GH đồng quy.




**Bài 3.** Cho đoạn thẳng PQ và một điểm A ở ngoài đường thẳng PQ. Vẽ hình hình hành ABCD có đường chéo $BD \,//\, PQ$ và $BD = PQ$. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng BC và CD luôn đi qua một điểm cố định.

- ***Lời giải***

Qua A vẽ đường thẳng $xy\,//\,PQ$
Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia Ay lấy điểm N sao cho $AM = AN = PQ$.
Như vậy các điểm M và N cố định.
Tứ giác AMBD có hai cạnh đối diện song song và bằng nhau nên là hình bình hành
$\Rightarrow BM\,//\,AD$
Mặt khác, $BC\,//\,AD$ nên ba điểm B, M, C thẳng hàng (tiên đề Ơ-clit)

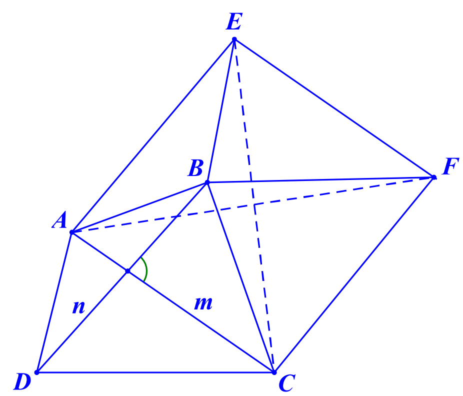



Do đó đường thẳng BC đi qua điểm cố định M.
Chứng minh tương tự, ta được đường thẳng CD đi qua điểm cố định N.

**Bài 4.** Trong tất cả các tứ giác với hai đường chéo có độ dài m và n cho trước và góc xen giữa hai đường chéo có độ lớn $\alpha$ cho trước hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

- ***Lời giải***

Xét tứ giác ABCD có $AC = m, BD = n$ và $\widehat{BOC} = \alpha$
Vẽ hình bình hành ADBE và vẽ hình bình hành CAEF.
Khi đó: $EF = AC = m; CF = AE = BD = n;$
$\widehat{EAC} = \widehat{BOC} = \alpha$
Như vậy hình bình hành CAEF hoàn toàn được xác định, do đó hai đường chéo AF và CE không đổi.
Dễ thấy tứ giác BFCD là hình bình hành $\Rightarrow BF = CD$.
Chu vi tứ giác ABCD là:
$(AB + CD) + (BC + AD) = (AB + BF) + (BC + BE) \geq AF + CE.$



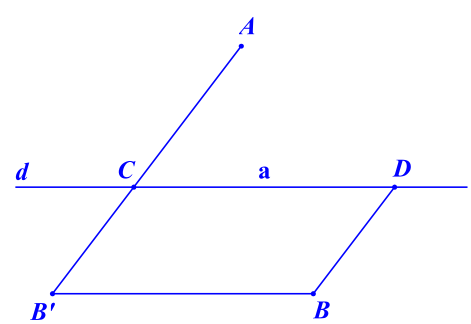

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A, B, C \text{ thẳng hàng} \\ C, B, E \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB\,//\,CD \\ AD\,//\,BC \end{cases} \Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành.
Vậy chu vi của tứ giác ABCD nhỏ nhất khi và chỉ khi ABCD là hình bình hành.

## Dạng 3. *Dựng hình bình hành*

**Bài 1.** Cho trước hai điểm A và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng d. Một đoạn thẳng CD có dộ dài a cho trước nằm trên đường thẳng d. Hãy xác định vị trí của điểm C và D để tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

- ***Lời giải***

Giả sử đã xác định được vị trí của C và $D \in d$ để tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất. Vẽ hình bình hành $CDBB'$ (chú ý CD và $BB'$ ngược chiều nhau).
Khi đó $BB' = CD = a$ (không đổi); $DB = CB'$.
Điểm $B'$ cố định.
Ta có tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC + DB$ nhỏ nhất (vì $CD = a$ không đổi).
$\Leftrightarrow AC + CB'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A, C, B'$ thẳng hàng.



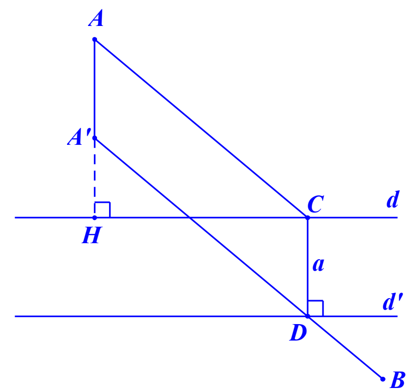

Từ đó ta xác định điểm $C \in d$ như sau:
- Qua B vẽ một đường thẳng song song với d, trên đó lấy $B'$ sao cho $BB' = a$ ($BB'$ ngược chiều với CD)
- Lấy giao điểm C của $B'A$ và d

- Lấy $D \in d$ sao cho $CD = a$ (CD và $BB'$ ngược chiều)

Khi đó tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

**Bài 2.** Hai điểm dân cư A và B ở hai bên một con sông có hai bờ d và $d'$. Chiều rộng con sông bằng a. Hãy tìm địa điểm bắc cầu sao cho quãng đường từ A sang B là ngắn nhất (cầu vuông góc với bờ sông).

- ***Lời giải***




Giả sử đã xác định được vị trí CD của cầu $(C \in d; D \in d')$ sao cho tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

Vẽ hình bình hành $ACDA'$.

Ta có: $AC = A'D, AA' = CD = a$ và $AA' \perp d$.

Khi đó $A'$ là một điểm cố định.

Ta có tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AC + DB$ nhỏ nhất (vì $CD = a$ không đổi)

$\Leftrightarrow A'D + DB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A', D, B$ thẳng hàng.

Từ đó ta xác định vị trí CD của cầu như sau:

- Vẽ $AH \perp d$
- Trên tia AH lấy $A'$ sao cho $AA' = a$
- Lấy giao điểm D của $A'B$ và $d'$.
- Vẽ $DC \perp d \,(C \in d)$.

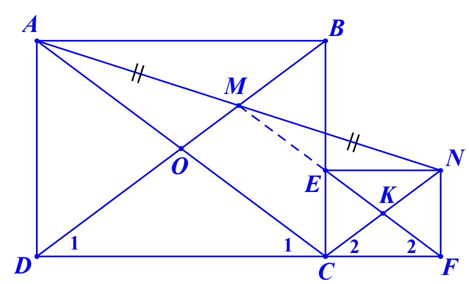
Khi đó $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

# CHỦ ĐỀ 3: HÌNH CHỮ NHẬT

## Dạng 1. Bài tập vận dụng tính chất và dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật

**Bài 1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo $BD$ lấy một điểm $M$. Trên tia $AM$ lấy điểm $N$ sao cho $M$ là trung điểm của $AN$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là hình chiếu của $N$ trên đường thẳng $BC$ và $CD$. Chứng minh rằng ba điểm $M, E, F$ thẳng hàng.

- ***Tìm cách giải***




Xét $\Delta CAN$, đường thẳng $EF$ đi qua trung điểm của $CN$, muốn cho $EF$ đi qua trung điểm $M$ của $AN$ ta cần chứng minh $EF \,//\, AC$.

- ***Trình bày lời giải***

Tứ giác $ENFC$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$ và $K$ là giao điểm của $EF$ và $CN$. Theo tính chất hình chữ nhật, ta có:

$OA = OB = OC = OD;$

$KC = KN = KE = FE.$

Xét $\Delta CAN$ có $OM$ là đường trung bình nên $OM \,//\, CN$. Do đó $BD \,//\, CN.$

$\Delta OCD, \Delta KCF$ cân, suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}, \widehat{C_2} = \widehat{F_2}.$

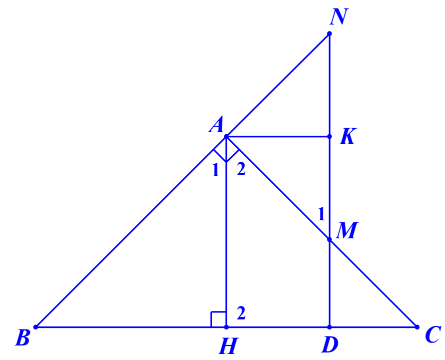
Mặt khác, $\widehat{D_1} = \widehat{C_2}$ (cặp góc đồng vị) nên $\widehat{C_1} = \widehat{F_2}$. Suy ra $AC \,//\, EF$.

Xét $\Delta CAN$ có đường thẳng $EF$ đi qua trung điểm $K$ của $CN$ và $EF \,//\, AC$ nên $EF$ đi qua trung điểm của $AN$, tức là đi qua $M$. Vậy ba điểm $M, E, F$ thẳng hàng.

**Bài 2.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Từ một điểm trên đáy $BC$, vẽ đường thẳng vuông góc với $BC$ cắt các đường thẳng $AC, AB$ lần lượt tại $M$ và $N$. Gọi $H$ và $K$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $MN$. Chứng minh rằng tứ giác $AKDH$ là hình chữ nhật.

- ***Tìm cách giải***

Dễ thấy tứ giác $AKDH$ có hai góc vuông là $\widehat{H} = \widehat{D} = 90°$ nên chỉ cần chứng minh tứ giác này có một góc vuông nữa là thành hình chữ nhật.




- ***Trình bày lời giải***

$\Delta ABC$ cân tại $A, AH$ là đường trung tuyến nên cũng là đường cao, đường phân giác.

Do đó: $\widehat{H_1} = 90°$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Ta có: $AH \parallel DN$ (vì cùng vuông góc với $BC$)

$\Rightarrow \widehat{N} = \widehat{A_1}$ (cặp góc đồng vị); $\widehat{M_1} = \widehat{A_2}$ (cặp góc so le trong).

Do đó $\widehat{N} = \widehat{M_1}$ (vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$).

Vậy $\Delta AMN$ cân tại $A$ mà $AK$ là đường trung tuyến nên $AK$ cũng là đường cao, $\widehat{K} = 90°$.

Tứ giác $AKDH$ có $\widehat{K} = \widehat{H} = \widehat{D} = 90°$ nên nó là hình chữ nhật.

**Bài 3.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. Trên cạnh huyền $BC$ lấy điểm $D$. Vẽ $DH \perp AB, DK \perp AC$. Biết $AB = a$, tính giá trị lớn nhất của tích $DH.DK$.

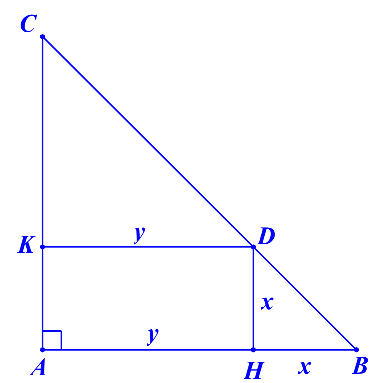
- ***Tìm cách giải***

Ta thấy $DH + DK = AB$ (không đổi). Dựa vào các hằng đẳng thức ta có thể tìm được mối quan hệ giữa tích $DH.DK$ với tổng $DH + DK$. Mối quan hệ này được biểu diễn như sau:

Ta có:

$(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \ge 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy$

$\Leftrightarrow xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$




- ***Trình bày lời giải.***

Tứ giác $AHDK$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Tam giác $HBD$ có $\widehat{H} = 90°; \widehat{B} = 45°$ nên là tam giác vuông cân. Ta đặt: $DH = x, DK = y$ thì $HB = x, AH = y$ và $x + y = a$.

Ta có: $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow D$ là trung điểm của $BC$.

Vậy giá trị lớn nhất của tích $DH.DK$ là $\dfrac{a^2}{4}$ khi $D$ là trung điểm của $BC$.

**Bài 4.** Cho hình thang $ABCD$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$. Trên cạnh $AD$ có một điểm $H$ mà $AH < DH$ và $\widehat{BHC} = 90°$. Chứng minh rằng trên cạnh $AD$ còn một điểm $K$ sao cho $\widehat{BKC} = 90°$.

- ***Tìm cách giải***

Giả sử đã chứng minh được $\widehat{BKC} = 90°$ thì $\Delta BHC$ và $\Delta BKC$ là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền $BC$ nên hai đường trung tuyến ứng với $BC$ phải bằng nhau. Do đó cần chứng minh hai đường trung tuyến này bằng nhau.

- ***Trình bày lời giải***

Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Khi đó $MN$ là đường trung bình của hình thang $ABCD$, suy ra:

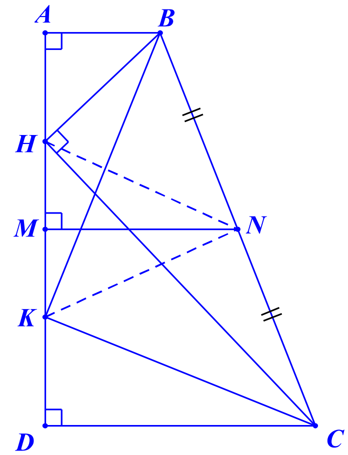
$MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp AD$ (vì $AB \perp AD$)

Trên cạnh $AD$ lấy điểm $K$ sao cho $DK = AH \Rightarrow MK = MH$.

$\Delta NHK$ có $NM$ vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân $\Rightarrow KN = HN$.

Xét $\Delta HBC$ vuông tại $H$ có $HN = \frac{1}{2}BC$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền). Suy ra $KN = \frac{1}{2}BC$ (vì $KN = HN$).

Do đó $\Delta KBC$ vuông tại $K \Rightarrow \widehat{BKC} = 90°$.




**Bài 5.** Cho đường thẳng $xy$. Một điểm $A$ cố định nằm ngoài $xy$ và một điểm $B$ di động trên $xy$. Gọi $O$ là trung điểm của $AB$. Hỏi điểm $O$ di động trên đường nào?

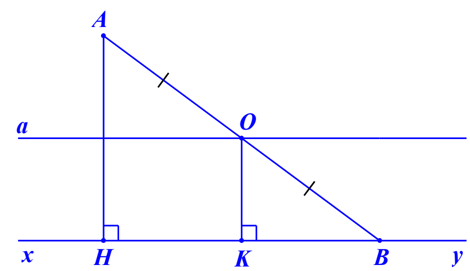
- ***Lời giải***

Vẽ $AH \perp xy, OK \perp xy$.

Ta có: $AH$ là một đoạn thẳng cố định. Xét $\Delta ABH$ có $OK \parallel AH$ và $OA = OB$ nên $KH = KB$.

Vậy $OK$ là đường trung bình suy ra:

$OK = \frac{1}{2}AH$ (không đổi).




Điểm $O$ cách đường thẳng $xy$ cho trước một khoảng không đổi là $\frac{1}{2}AH$ nên điểm $O$ di động trên đường thẳng $a \parallel xy$ và cách $xy$ là $\frac{AH}{2}$ (đường thẳng $a$ và điểm $A$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ $xy$).

**Bài 6.** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$, đường cao $AD$. Gọi $M$ là một điểm bất kì trên cạnh $BC$. Vẽ $ME \perp AB, MF \perp AC$. Tính số đo các góc của tam giác $DEF$.

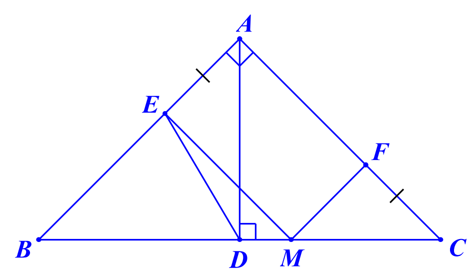
- ***Lời giải***

Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$\Rightarrow AE = MF$

Tam giác $FMC$ vuông tại $F, \widehat{C} = 45°$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow CF = MF$. Do đó $AE = CF$.

Tam giác $ABC$ vuông cân, $AD$ là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác nên




$AD = DC = \frac{1}{2}BC; \widehat{EAD} = \widehat{FCD} = 45°.$

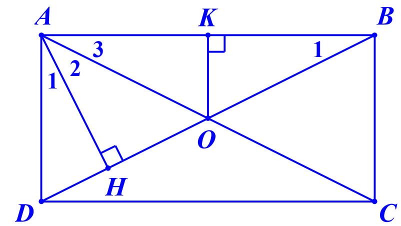
$\Delta EDA = \Delta FDC\,(c.g.c) \Rightarrow DE = DF$ và $\widehat{EDA} = \widehat{FDC}$

Ta có: $\widehat{ADF} + \widehat{FDC} = 90° \Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{EDA} = 90°$ hay $\widehat{EDF} = 90°.$

Do đó $\Delta DEF$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} = 45°; \widehat{EDF} = 90°.$

**Bài 7.** Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AD = \frac{1}{2}AC$ và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

- ***Lời giải***




Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$, ta có $OA = OC$

Vì $AD = \frac{1}{2}AC$ nên $AD = AO$

Vẽ $AH \perp OD, OK \perp AB.$

Xét $\Delta AOD$ cân tại $A, AH$ là đường cao $\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến, cũng là đường phân giác.

Do đó $HO = HD$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vì $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$ nên $\widehat{A_3} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1}$.

$\Delta AOK = \Delta AOH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

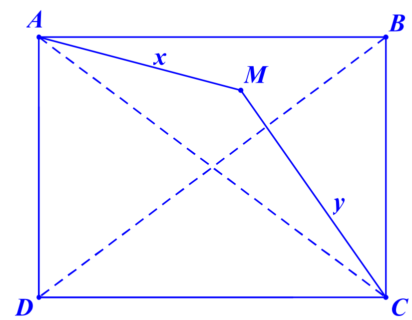
$\Rightarrow OK = OH = \frac{1}{2}OD \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OB \Rightarrow \widehat{B_1} = 30°.$

Xét $\Delta ABH$ vuông tại $H$ có $\widehat{B_1} = 30°$ nên $\widehat{HAB} = 60°$ suy ra $\widehat{DAB} = 90°$.

Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

**Bài 8.** Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 8, BC = 6$. Điểm $M$ nằm trong hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

- ***Lời giải***




$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Ta đặt $MA = x, MC = y$.

Xét ba điểm $M, A, C$ ta có: $MA + MC \ge AC$

do đó $x + y \ge 10 \Rightarrow (x+y)^2 \ge 100$ hay $x^2 + y^2 + 2xy \ge 100.$ (1)

Mặt khác, $(x-y)^2 \ge 0$ hay $x^2 + y^2 - 2xy \ge 0.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2(x^2 + y^2) \ge 100 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 50.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa $A$ và $C$ và $MA = MC \Leftrightarrow M$ là trung điểm của $AC$.

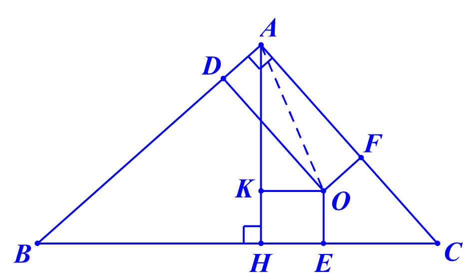
Chứng minh tương tự, ta được: $MB^2 + MD^2 \ge 50$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $BD$.

Vậy $MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 \ge 100.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của tổng $S$ là 100 khi $M$ là giao điểm của hai đường chéo $AC$ và $BD$.

**Bài 9.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Gọi $O$ là một giao điểm bất kì trong tam giác. Vẽ $OD \perp AB, OE \perp BC$ và $OF \perp CA$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = OD^2 + OE^2 + OF^2$

- ***Lời giải***




Vẽ $AH \perp BC, OK \perp AH$..

Tứ giác $ADOF$ và $KOEH$ là hình chữ nhật nên

$OF = AD$ và $OE = KH$.

Xét $\Delta AOD$ vuông tại $D$, ta có

$OD^2 + AD^2 = OA^2 \ge AK^2$.

Do đó

$OD^2 + OF^2 + OE^2 = OD^2 + AD^2 + OE^2 \ge AK^2 + KH^2$

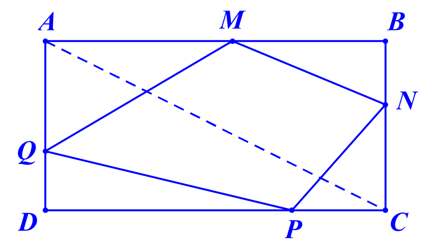
$\ge \frac{(AK + KH)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow O$ nằm giữa $A$ và $H$ và $AK = KH \Leftrightarrow O$ là trung điểm của $AH$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $S$ là $\frac{AH^2}{2}$ khi $O$ là trung điểm của $AH$.

**Bài 10.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, đường chéo $AC = d$. Trên các cạnh $AB, BC, CD$ và $DA$ lần lượt lấy các điểm $M, N, P, Q$. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$

- ***Lời giải***




Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên
$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$.
Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có:
$MN^2 = BM^2 + BN^2; NP^2 = CN^2 + CP^2;$
$PQ^2 = DP^2 + DQ^2; QM^2 = AQ^2 + AM^2.$
Do đó: $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$
$= \left(AM^2 + BM^2\right) + \left(BN^2 + CN^2\right) + \left(CP^2 + DP^2\right) + \left(DQ^2 + AQ^2\right)$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi $a = b$), ta được:

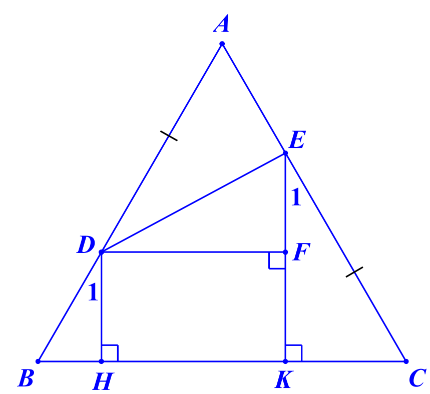
$$S \geq \frac{(AM + BM)^2}{2} + \frac{(BN + CN)^2}{2} + \frac{(CP + DP)^2}{2} + \frac{(DQ + AQ)^2}{2}$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} + \frac{CD^2}{2} + \frac{AD^2}{2} = \frac{2\left(AB^2 + BC^2\right)}{2} = AC^2 = d^2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $S$ là $d^2$ khi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh hình chữ nhật.

**Bài 11.** Cho tam giác đều $ABC$ cạnh $a$. Trên các cạnh $AB, AC$ lần lượt lấy các điểm $D$ và $E$ sao cho $AD = CE$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài $DE$.

- ***Lời giải***




Vẽ $DH \perp BC, EK \perp BC$ và $DF \perp EK$
Tứ giác $DFKH$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.
Suy ra $DF = HK$.
$\Delta HBD$ vuông tại $H$ có $\widehat{B} = 60°$ nên
$\widehat{D_1} = 30° \Rightarrow BH = \frac{1}{2}BD.$
$\Delta KCE$ vuông tại $K$ có $\widehat{C} = 60°$ nên
$\widehat{E_1} = 30° \Rightarrow CK = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}AD.$

Ta có: $DE \geq DF = HK = BC - (BH + KC) = BC - \left(\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AD\right) = BC - \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $DE$ là $\frac{a}{2}$ khi $D$ và $E$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AC$.

## Dạng 2. *Tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông*

**Bài 1.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Trên cạnh huyền $BC$ lấy một điểm $M$. Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC$ và $AH \perp BC$. Tính số đo của góc $DHE$.

- ***Lời giải***

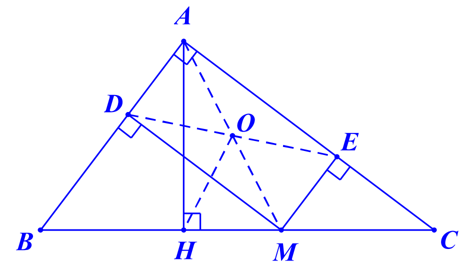
Tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật nên $AM = DE$.
Gọi $O$ là giao điểm của $AM$ và $DE$, ta có:

$OA = OM = OD = OE.$

Xét $\Delta AHM$ vuông tại $H$, ta có: $HO = \frac{1}{2}AM$

$\Rightarrow HO = \frac{1}{2}DE.$

Xét $\Delta HDE$ có $HO$ là đường trung tuyến ứng với cạnh $DE$ mà $HO = \frac{1}{2}DE$ nên $\Delta HDE$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{DHE} = 90°.$




**Bài 2.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$, đường trung tuyến $AD$. Vẽ $HE \perp AB, HF \perp AC$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $HB$ và $HC$.

a) Chứng minh rằng $EM // FN // AD$;

b) Tam giác $ABC$ phải có thêm điều kiện gì thì ba đường thẳng $EM, FN.AD$ là ba đường thẳng song song cách đều.

- ***Lời giải***

**a)** Tứ giác $AFHE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow OA = OF = OH = OE.$

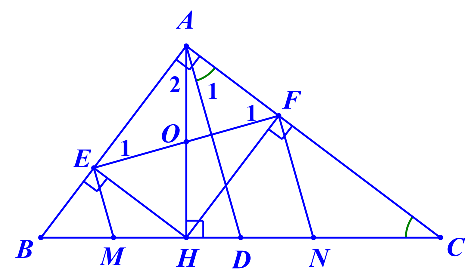
Xét $\Delta ABC$ vuông tại $A$ có $AD$ là đường trung tuyến nên $AD = DB = DC.$

$\Delta DAC$ cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}.$

Mặt khác, $\widehat{C} = \widehat{A_2}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$);

$\widehat{A_2} = \widehat{E_1}$ (hai góc ở đáy của tam giác cân)

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}.$




Gọi $K$ là giao điểm của $AD$ và $EF$.

Xét $\Delta AEF$ vuông tại $A$ có $\widehat{E_1} + \widehat{F_1} = 90° \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{F_1} = 90° \Rightarrow \widehat{K} = 90°$.

Do đó: $AD \perp EF$, (1)

Ta có: $\Delta OEM = \Delta OHM\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OHM} = 90° \Rightarrow EM \perp EF$. (2)

Chứng minh tương tự, ta được: $FN \perp EF$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $EM // FN // AD$ (vì cùng vuông góc với $EF$).

**b)** Ba đường thẳng $EM, FN$ và $AD$ là ba đường thẳng song song cách đều

$\Leftrightarrow KF = KE \Leftrightarrow K \equiv O \Leftrightarrow AD \equiv AH \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân.

**Bài 3.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A\,(AB < AC)$, đường cao $AH$. Trên cạnh $AC$ lấy điểm $D$ sao cho $AD = AB$. Gọi $M$ là trung điểm của $BD$. Chứng minh rằng tia $HM$ là tia phân giác của góc $AHC$.

- ***Lời giải***

Vẽ $DE \perp BC, DF \perp AH$.

$\Delta HAB$ và $\Delta FDA$ có: $\widehat{H} = \widehat{F} = 90°$; $AB = AD$;

$\widehat{HAB} = \widehat{FDA}$ (cùng phụ với $\widehat{FAD}$).

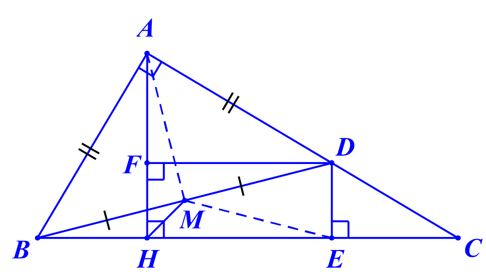
Do đó $\Delta HAB = \Delta FDA$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow AH = FD.$ (1)

Tứ giác $FDEH$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow HE = FD.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = HE.$



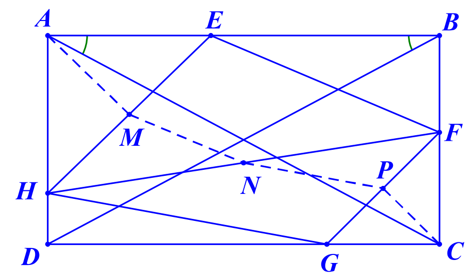
Ta có $AM = EM = \frac{1}{2}BD.$

$\Delta AHM = \Delta EHM\left(c.c.c\right) \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{EHM}.$

Do đó tia $HM$ là tia phân giác của góc $AHC$

**Bài 4.** Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 15, BC = 8$. Trên các cạnh $AB, BC, CD, DA$ lần lượt lấy các điểm $E, F, G, H$. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $EFGH$.

- ***Lời giải***




Gọi $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $HE, HF$ và $FG$

Theo tính chất đường trung bình của tam giác, tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có:

$EF = 2MN; FG = 2CP; GH = 2NP; HE = 2AM.$

Do đó chu vi của hình tứ giác $EFGH$ là:

$EF + FG + GH + HE = 2\left(AM + MN + NP + PC\right).$

Xét các điểm $A, M, \text{N}, \text{P}, \text{C}$, ta có:

$\text{AM} + \text{MN} + \text{NP} + \text{PC} \geq AC$ (không đổi).

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow AC = 17.$

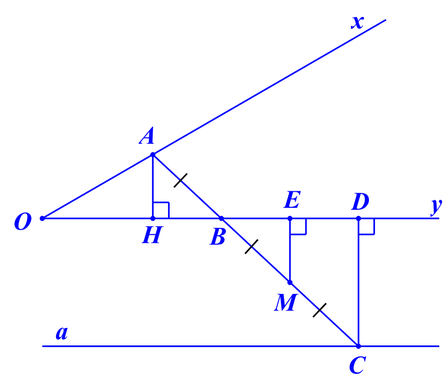
Vậy chu vi của tứ giác $EFGH \geq 2.17 = 34$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M, N, P$ nằm trên $AC$ theo thứ tự đó $\Leftrightarrow EF \,//\, AC \,//\, HG$ và $HE \,//\, BD \,//\, FG$).

Do đó giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $EFGH$ là 34.

## Dạng 3. *Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước*

**Bài 1.** Cho góc $xOy$ có số đo bằng $30°$. Điểm $A$ cố định trên tia $Ox$ sao cho $OA = 2cm$. Lấy điểm $B$ bất kì trên tia $Oy$. Trên tia đối của tia $BA$ lấy điểm $C$ sao cho $BC = 2BA$. Hỏi khi điểm $B$ di động trên tia $Oy$ thì điểm $C$ di động trên đường nào?

- ***Lời giải***




Gọi $M$ là trung điểm của $BC$.

Vẽ $AH \perp Oy, MD \perp Oy$ và $CE \perp Oy.$

Xét $\Delta AOH$ vuông tại $H$, có $\widehat{O} = 30°$ nên

$AH = \frac{1}{2}OA = 1cm.$

$\Delta MDB = \Delta AHB \Rightarrow MD = AH = 1cm.$

Xét $\Delta BCE$, dễ thấy $MD$ là đường trung bình nên

$CE = 2MD = 2cm.$

Điểm $C$ cách $Oy$ một khoảng là $2cm$ nên $C$ di động trên đường thẳng $a \,//\, Oy$ và cách $Oy$ là $2cm$.

**Bài 2.** Cho góc $xOy$ có số đo bằng $45°$. Điểm $A$ cố định trên tia $Ox$ sao cho $OA = 3\sqrt{2}cm$. Lấy điểm $B$ bất kì trên tia $Oy$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $OAB$. Hỏi khi điểm $B$ di động trên tia $Oy$ thì điểm $G$ di động trên đường nào?

- ***Lời giải***

Gọi $M$ là trung điểm của $OB$.

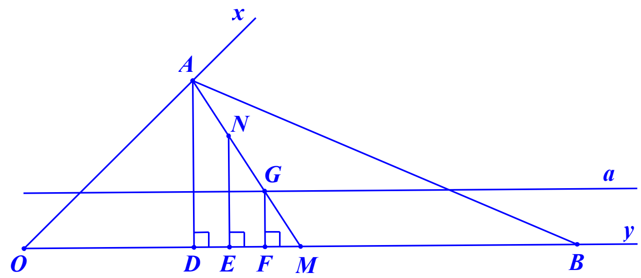
Khi đó $G \in AM$ và $AG = 2GM$.

Gọi $N$ là trung điểm của $AG$, ta được $AN = NG = GM$.

Vẽ $AD, NE, GF$ cùng vuông góc với $Oy$.

Ba đường thẳng $AD, NE$ và $GF$ là ba đường thẳng song song cách đều nên

$DE = EF = FM$.
Ta đặt $FG = x$ thì $EN = 2x$ và
$EN = \dfrac{FG + AD}{2}$. Do đó
$2x = \dfrac{x + AD}{2} \Rightarrow AD = 3x$.
Xét $\Delta DOA$ vuông cân tại $D \Rightarrow OA^2 = 2DA^2$.

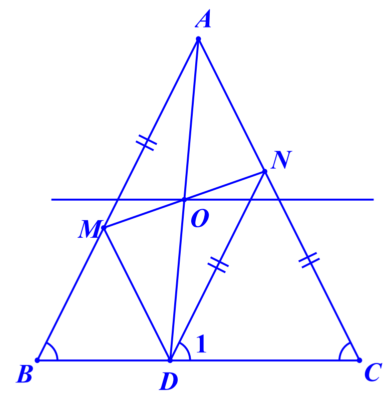



Do đó $2DA^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow DA = 3(cm) \Rightarrow FG = 1cm.$
Điểm $G$ cách $Oy$ một khoảng không đổi là $1cm$ nên điểm $G$ di động trên đường thẳng $a \,//\, Oy$ và cách $Oy$ là $1cm$.

**Bài 3.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Trên các cạnh $AB$ và $AC$ lần lượt lấy các điểm $M$ và $N$ sao cho $AM = CN$. Gọi $O$ là trung điểm của $MN$. Hỏi điểm $O$ di động trên đường nào?

- ***Lời giải***

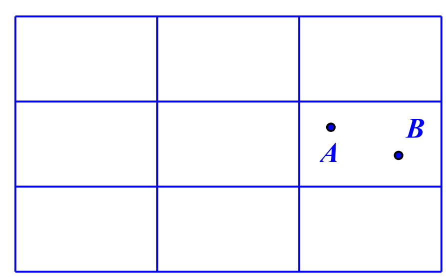
Vẽ $ND \,//\, AB \left(D \in BC\right)$.
Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{B}$ (cặp góc đồng vị) mà $\widehat{B} = \widehat{C}$
Nên $\widehat{D_1} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta NDC$ cân. Do đó $ND = NC$
Mặt khác, $AM = NC$ nên $ND = AM$.
Suy ra tứ giác $ANDM$ là hình bình hành, trung điểm $O$ của $MN$ cũng là trung điểm $O$ của $AD$.
Ta có điểm $A$ và $BC$ cố định, theo ví dụ 5, thì điểm $O$ di động trên đường thẳng $a \,//\, BC$ và cách $BC$ một khoảng $\dfrac{AH}{2}$ ($AH$ là đường cao của $\Delta ABC$).




**Bài 4.** Bên trong hình chữ nhật kích thước $3 \times 6$ cho 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong số 10 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn $2,3$.

- ***Lời giải***

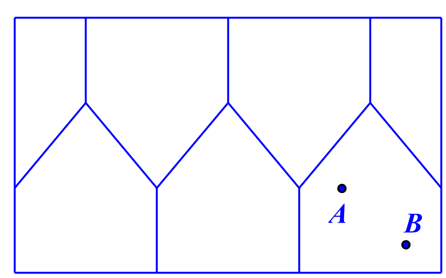
Chia hình chữ nhật có kích thước $3 \times 6$ thành 9 hình chữ nhật nhỏ có kích thước $1 \times 2$. Có 10 điểm nằm trong 9 phần nên tồn tại hai điểm chẳng hạn $A$ và $B$ thuộc cùng một phần.
Dễ thấy $AB \le$ độ dài đường chéo của mỗi hình chữ nhật nhỏ, tức là $AB \le \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 2,3$




**Bài 5.** Bên trong hình chữ nhật có kích thước $3 \times 6$ cho 8 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai trong số 8 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn $2,3$.

- ***Lời giải***

Chia hình chữ nhật có kích thước $3 \times 6$ thành 7 phần như hình 5.24. Có 8 điểm nằm trong 7 phần nên tồn tại hai điểm chẳng hạn $A$ và $B$ thuộc cùng một phần.
Dễ thấy $AB \le \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 2,3$

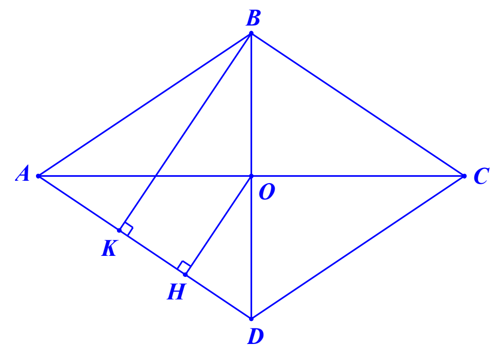


# CHỦ ĐỀ 6: HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

## Dạng 1. Bài tập vận dụng tính chất và dấu hiệu nhận biết hình thoi

**Bài 1.** Cho hình thoi $ABCD$, độ dài mỗi cạnh là $13cm$. Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ $OH \perp AD$. Biết $OH = 6cm$, tính tỉ số của hai đường chéo $BD$ và $AC$.

- **Lời giải**




Vẽ $BK \perp AD$.

Xét $\Delta BKD$ có $OH \parallel BK$ (vì cùng vuông góc với $AD$)

và $OB = OD$ nên $KH = HD$.

Vậy $OH$ là đường trung bình của $\Delta BKD$

Suy ra $OH = \frac{1}{2}BK$, do đó $BK = 12cm$.

Xét $\Delta ABK$ vuông tại $K$, có

$AK^2 = AB^2 - BK^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow AK = 5cm$

do đó $KD = 8cm$.

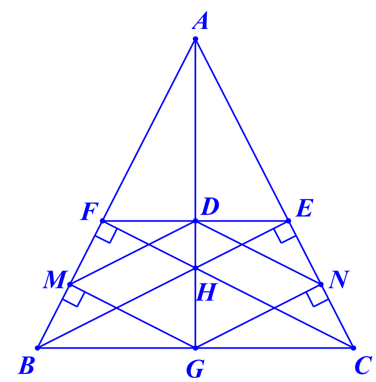
Xét $\Delta BKD$ vuông tại $K$ có $BD^2 = BK^2 + KD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$.

Xét $\Delta AOH$ vuông tại $H$ có $OA^2 = OH^2 + AH^2 = 6^2 + 9^2 = 117 \Rightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 117 \Rightarrow AC^2 = 468$.

Do đó: $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{208}{468} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{2}{3}$.

**Bài 2.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, hai đường cao $BE$ và $CF$ cắt nhau tại $H$. Đường thẳng $AH$ cắt $EF$ tại $D$, cắt $BC$ tại $G$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là hình chiếu của $G$ trên $AB$ và $AC$. Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.

- **Lời giải**




$\Delta ABE = \Delta ACF$ (c.h, g.nh) $\Rightarrow AE = AF$ và $BE = CF$.

Vì $H$ là trực tâm của $\triangle ABC$ nên $AH$ là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó $GB = GC$ và $DE = DF$.

Xét $\Delta EBC$ có $GN \parallel BE$ (cùng vuông góc với $AC$) và $GB = GC$ nên $NE = NC$.

Chứng minh tương tự, ta được: $MF = MB$.

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $DM \parallel GN$ và $DM = GN$ nên tứ giác $DNGM$ là hình bình hành.

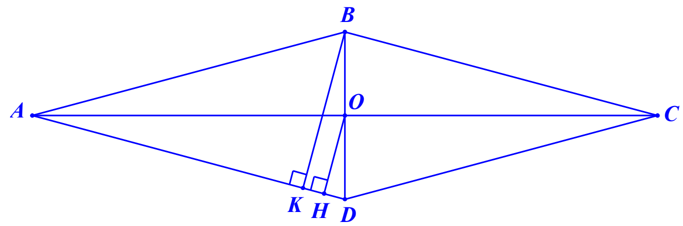
Mặt khác, $DM = DN$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ của hai cạnh bằng nhau) nên $DNGM$ là hình thoi.

**Bài 3.** Một hình thoi có góc nhọn bằng $30^0$. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến mỗi cạnh bằng $h$. Tính độ dài mỗi cạnh của hình thoi.

- **Lời giải:** Giả sử $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{A} = 30^0$. Hai đường chéo cắt nhau tại $O$.

Vẽ $OH \perp AD$, $BK \perp AD$ thì $OH \parallel BK$ và $OH$ là đường trung bình của tam giác

$BKD \Rightarrow OH = \frac{1}{2}BK.$ (1)




Xét $\Delta ABK$ vuông tại K,

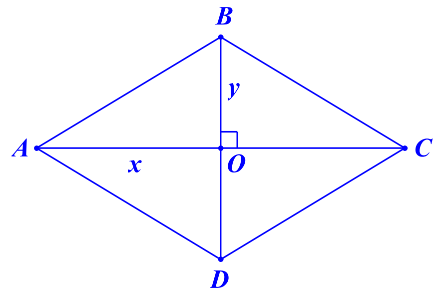
$\widehat{A} = 30^0 \Rightarrow BK = \frac{1}{2}AB.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Rightarrow OH = \frac{1}{4}AB$ do đó $AB = 4OH = 4.h.$

**Bài 4.** Cho hình thoi $ABCD$, chu vi bằng $8cm$. Tìm giá trị lớn nhất của tích hai đường chéo.

- ***Lời giải***

Gọi $O$ là giao điểm của hai đường chéo.




Ta đặt $OA = x, OB = y$ thì $AC = 2x, BD = 2y.$

Ta có: $AB = 8:4 = 2cm$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Từ bất đẳng thức $x^2 + y^2 \ge 2xy$ suy ra $xy \le \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

Do đó: $AC.BD = 2x.2y = 4xy \le 8.$

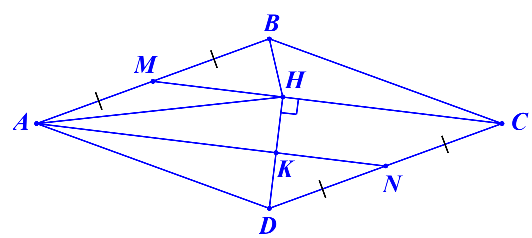
Vậy giá trị lớn nhất của tích $AC.BD$ là $8(cm^2)$ khi $x = y$

$\Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

**Bài 5.** Cho hình thoi $ABCD$, $\widehat{A} = 40^0$. Gọi $M$ là trung điểm của $AB$. Vẽ $DH \perp CM$. Tính số đo của góc $MHB$.

- ***Lời giải***

Gọi $N$ là trung điểm của $CD$.




Ta có $AM \parallel CN$ và $AM = CN$ nên tứ giác $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN \parallel CM$.

Mặt khác, $DH \perp CM$ nên $DH \perp AN$ tại $K$.

Xét $\Delta HCD$ có $KN \parallel CH$ và $NC = ND$ nên $KH = KD$.

$\Delta HAD$ Có $AK$ vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\Delta HAD$ cân $\Rightarrow AH = AD.$

Mặt khác, $AB = AD$ nên $AH = AB \Rightarrow \Delta ABH$ cân.

Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AHD}$ và $\widehat{ABH} = \widehat{AHB}$.

Xét tứ giác $ABHD$ có $\widehat{ADH} + \widehat{DHA} + \widehat{BHA} + \widehat{ABH} = 360^0 - \widehat{A}$

$\Rightarrow 2(\widehat{DHA} + \widehat{BHA}) = 360^0 - 40^0 \Rightarrow 2\widehat{BHD} = 320^0 \Rightarrow \widehat{BHD} = 160^0$.

Mặt khác, $\widehat{DHM} = 90^0$ nên $\widehat{MHB} = 160^0 - 90^0 = 70^0$.

**Bài 6.** Cho hình thoi $ABCD$. Trên nửa mặt phẳng bờ $BD$ có chứa điểm $C$, vẽ hình bình hành $BDEF$ có $DE = DC$. Chứng minh rằng $C$ là trực tâm của tam giác $AEF$.

- ***Lời giải***

Ta có $AC \perp DB$ mà $DB \parallel EF$ nên $AC \perp EF$. (1)

Vẽ điểm $M$ sao cho $D$ là trung điểm của $EM$.

Xét $\Delta CEM$ có $CD$ là đường trung tuyến mà $CD = \frac{1}{2}EM$ nên $\Delta CEM$ vuông tại $C$ $\Rightarrow CM \perp CE$

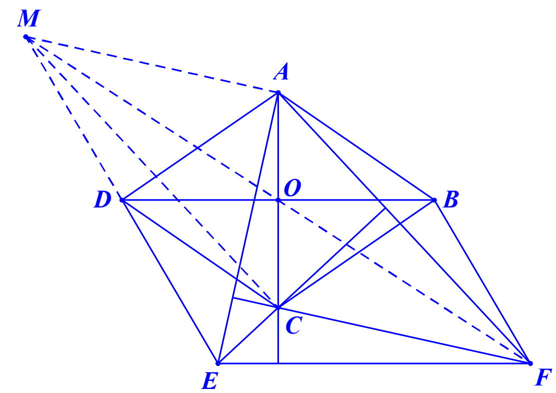
Tứ giác $MDFB$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

$\Rightarrow DB$ và $MF$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác, $O$ là trung điểm của $DB$ nên $O$ là trung điểm của $MF$.

Tứ giác $AMCF$ có $OA = OC, OM = OF$ nên là hình bình hành $\Rightarrow CM \parallel AF$

$\Rightarrow CE \perp AF$. (2)

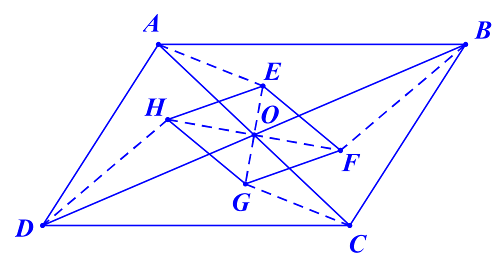



Xét ΔAEF có $AC$ và $EC$ là hai đường cao cắt nhau tại $C$ nên $C$ là trực tâm.

***Nhận xét:*** Nếu vẽ hình bình hành $DBEF$ về phía điểm $A$ thì kết luận của bài toán vẫn đúng.

**Bài 7.** Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại $O$. Gọi $E, F, G, H$ lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác $AOB, BOC, COD$ và $DOA$. Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

- ***Lời giải***




Ta có $OE \perp OH, OG \perp OH$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù)

$\Rightarrow E, O, G$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được $H, O, F$ thẳng hàng.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{ACG}$ (một nửa của hai góc bằng nhau)

$\Delta AOE = \Delta COG$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OG$.

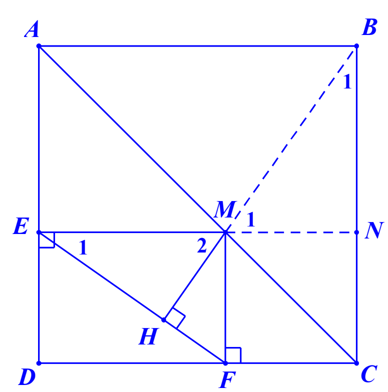
Chứng minh tương tự, ta được $OF = OH$.

Tứ giác $EFGH$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi.

## Dạng 2. *Bài tập vận dụng tính chất và dấu hiệu nhận biết hình vuông*

**Bài 1.** Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm $M$ trên đường chéo $AC$. Vẽ $ME \perp AD$, $MF \perp CD$ và $MH \perp EF$. Chứng minh rằng khi điểm $M$ di động trên $AC$ thì đường thẳng $MH$ luôn đi qua một điểm cố định.

- ***Tìm cách giải***




Vẽ hình chính xác ta thấy đường thẳng $MH$ đi qua một điểm cố định là điểm $B$. Vì thế ta sẽ chứng minh ba điểm $H, M, B$ thẳng hàng bằng cách chứng minh $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.

- ***Lời giải***

Gọi N là giao điểm của đường thẳng $EM$ và $BC$.

Khi đó $BN = AE$; $AE = ME$ (vì ΔAEM vuông cân) suy ra $BN = ME$.

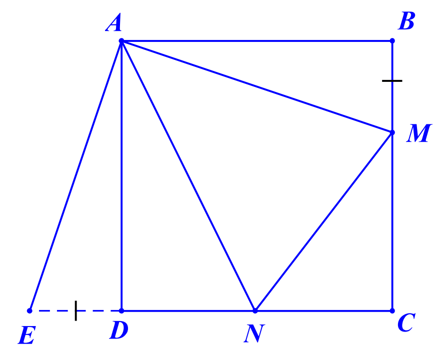
Chứng minh tương tự, ta được: $MN = MF$.

Nối $MB$ ta được: $\Delta BMN = \Delta EFM$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$. Từ đó ba điểm $H, M, B$ thẳng hàng.

Vậy đường thẳng $MH$ luôn đi qua một điểm cố định là điểm $B$.

**Bài 2.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $M$, trên cạnh $CD$ lấy điểm $N$ sao cho chu vi các tam giác $CMN$ bằng $2a$. Chứng minh rằng góc $MAN$ có số đo không đổi.




- ***Tìm cách giải***

Vẽ hình chính xác ta luôn thấy $\widehat{MAN} = 45^0$. Vì vậy ta vẽ hình phụ tạo ra góc $90^0$ rồi chứng minh $\widehat{MAN}$ bằng nửa góc vuông đó.

- ***Lời giải***

Trên tia đối của tia $DC$ lấy điểm $E$ sao cho $DE = BM$.

$\triangle BAM = \triangle DAE$ (c.g.c) suy ra $AM = AE$ và $\widehat{BAM} = \widehat{DAE}$.

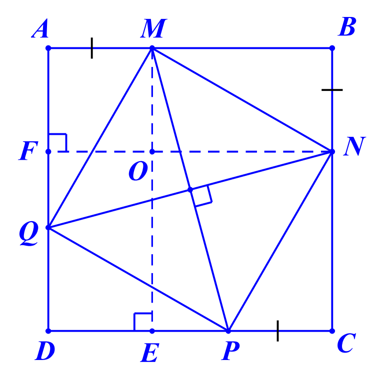
Ta có: $\widehat{BAM} + \widehat{DAM} = 90^0$.

$\Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{DAM} = 90^0$ hay $\widehat{EAM} = 90^0$.

Theo đề bài, $CM + CN + MN = 2a$ mà $CM + CN + MB + ND = 2a$ nên $MN = MB + ND$ hay $MN = DE + ND = EN$.

$\triangle MAN = \triangle EAN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MAN} + \widehat{EAN} = \dfrac{\widehat{EAM}}{2} = 45^0$. Vậy, góc $MAN$ có số đo không đổi.

**Bài 3.** Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh $AB, BC, CD$ lần lượt lấy các điểm $M, N, P$ sao cho $AM = BN = CP$. Qua $N$ vẽ một đường thẳng vuông góc với $MP$ cắt $AD$ tại $Q$. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.




- ***Tìm cách giải***

Từ giả thiết ta nghĩ đến việc chứng minh các tam giác bằng nhau để suy ra bốn cạnh của tứ giác $MNPQ$ bằng nhau, ta được tứ giác này là hình thoi. Sau đó chứng minh hai đường chéo bằng nhau để được hình vuông.

- ***Trình bày lời giải***

Vẽ $ME \perp CD$, $NF \perp AD$.

Gọi $O$ là giao điểm của $ME$ và $NF$.

Ta có: $AB = BC = CD = DA$ mà $AM = BN = CP$ nên $BM = CN = DP$.

Dễ thấy tứ giác $AMOF$ là hình vuông.

$\Delta EMP$ và $\Delta FNQ$ có:

$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^0$; $ME = NF$ (bằng cạnh hình vuông);

$\widehat{EMP} = \widehat{FNQ}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Delta EMB = \Delta FNQ$ (g.c.g) $\Rightarrow MP = NQ$ và $EP = FQ$.

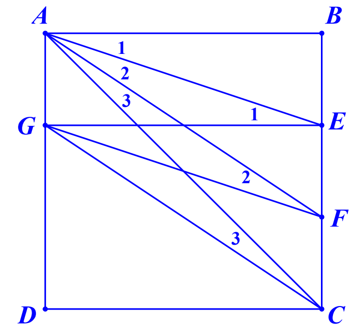
Ta có: $DE = AM = AF \Rightarrow DP = AQ$ do đó $DQ = CP$.

Các tam giác $BNM, CPN, DQP$ và $AMQ$ bằng nhau suy ra $MN = NP = PQ = QM$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thoi. Hình thoi này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

**Bài 4.** Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh $BC$ lấy các điểm $E$ và $F$ sao cho $BE = EF = FC$. Trên cạnh $AD$ lấy điểm $G$ sao cho $AG = \frac{1}{3}AD$. Tính tổng: $\widehat{AEG} + \widehat{AFG} + \widehat{ACG}$

- ***Lời giải***




Các tứ giác $ABEG, AEFG, AFCG$ là hình bình hành nên:

$AB \parallel EG, AE \parallel GF, AF \parallel CG$

Suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}; \widehat{F_2} = \widehat{A_2}; \widehat{C_3} = \widehat{A_3}$

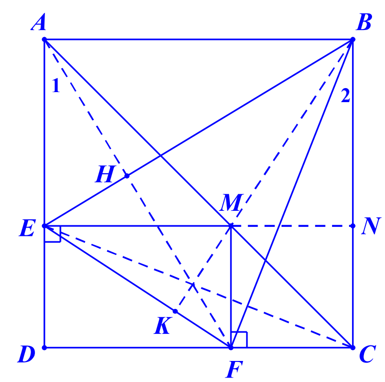
Do đó: $\widehat{E_1} + \widehat{F_2} + \widehat{C_3} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{BAC} = 45^0$.

**Bài 5.** Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường chéo $AC$ lấy một điểm $M$. Vẽ $ME \perp AD$, $MF \perp CD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng $AF, CE$ và $BM$ đồng quy.

- ***Tìm cách giải***

Muốn chứng minh $AF, CE$ và $BM$ đồng quy ta chứng minh chúng là các đường thẳng chứa đường cao của $\Delta BEF$

- ***Lời giải***




Tứ giác $MEDF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow ME = DF; MF = DE$

$\triangle ADC$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ACD} = 45^0$.

Do đó $\Delta AEM$ và $\Delta CFM$ vuông cân $\Rightarrow AE = ME \Rightarrow AE = DF$

$CF = MF \Rightarrow DE = CF$.

$\Delta ABE = \Delta DAF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{H} = 90^0$

($H$ là giao điểm của $BE$ và $CF$).

Chứng minh tương tự, ta được $CE \perp BF$.

Gọi $N$ là giao điểm của $EM$ với $BC$; $K$ là giao điểm của $BM$ với $EF$.

Ta có $MF = MN$ (vì $M$ nằm trên tia phân giác của góc $C$).

$ME = BN (= AE)$

$\Delta MFE = \Delta NMB$ (g.c.g) $\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{NMB}$

Ta có: $\widehat{NMB} + \widehat{FMK} = 90^0$ ( vì $\widehat{NMF} = 90^0$ ) $\Rightarrow \widehat{MFE} + \widehat{FMK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{K} = 90^0 \Rightarrow BM \perp EF$

Vậy ba đường thẳng $AF, CE$ và $BM$ là ba đường cao của $\Delta BEF$ nên chúng đồng quy.

**Bài 6.** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Vẽ ra phía ngoài tam giác này các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$. Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng $AH, DE$ và $FG$ đồng quy;

b) Ba đường thẳng $AH, BF$ và $CD$ đồng quy.

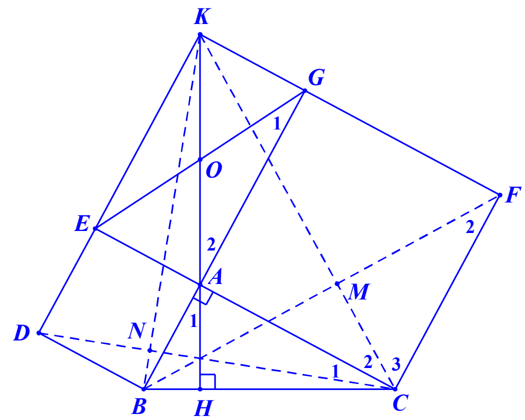
- ***Lời giải***

a) Gọi $K$ là giao điểm của hai đường thẳng $DE$ và $FG$.

Tứ giác $AGKE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi $O$ là giao điểm của $AH$ và $EG$.

$\Delta AEG = \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{G_1} = \widehat{C_1}$.




Ta lại có: $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$);

Và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{G_1} = \widehat{A_2}$.

Do đó $\Delta OAG$ cân $\Rightarrow OG = OA$

Cmtt, ta được $OE = OA \Rightarrow OG = OE$

Xét hình chữ nhật $AGKE$ có $O$ là trung điểm của đường chéo $EG$ nên đường chéo $AK$ phải đi qua $O$ hay đường thẳng $AH$ đi qua $K$.

Vậy ba đường thẳng $AH, DE, FG$ đồng quy.

b) $\Delta BCF$ và $\Delta KAC$ có:

$BC = KA$ (cùng bằng $EG$); $\widehat{BCF} = \widehat{KAC}$

(vì $90^0 + \widehat{C_1} = 90^0 + \widehat{A_2}$); $CF = AC$

Do đó $\Delta BCF = \Delta KAC \Rightarrow \widehat{F}_2 = \widehat{C}_2$

Gọi $M$ là giao điểm của $BF$ và $KC$.

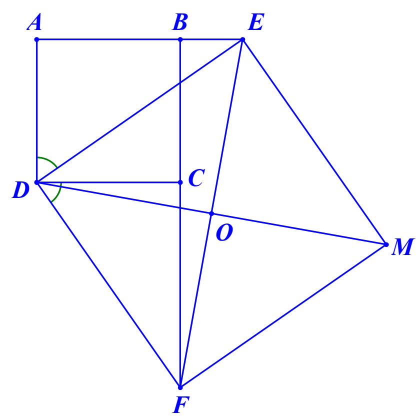
Ta có $\widehat{C_2} + \widehat{C_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{F_2} + \widehat{C_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{M} = 90^0$. Vậy $BF \perp KC$

Chứng minh tương tự, ta được $CD \perp KB$

Xét $\Delta KBC$ có các đường thẳng $AH, BF, CD$ chứa ba đường cao nên chúng đồng quy.

**Bài 7.** Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia $BA$ lấy điểm $E$. Trên tia đối của tia $CB$ lấy điểm $F$ sao cho $AE = CF$. Gọi $O$ là trung điểm của $EF$. Vẽ điểm $M$ sao cho $O$ là trung điểm của $DM$. Chứng minh rằng tứ giác $DEMF$ là hình vuông.

- ***Lời giải***




$\Delta ADE = \Delta CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = DF$ và $\widehat{ADE} = \widehat{CDF}$.

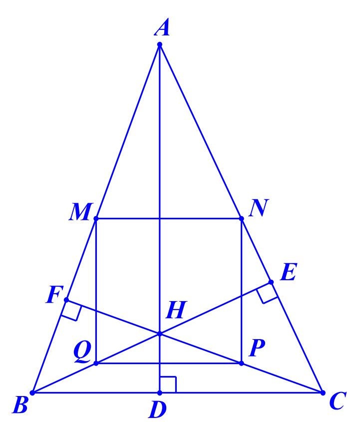
Ta có $\widehat{ADE} + \widehat{CDF} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CDF} + \widehat{CDE} = 90^0$ hay $\widehat{EDF} = 90^0$.

Tứ giác $DEMF$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành này có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi. Hình thoi này có $\widehat{EDF} = 90^0$ nên là hình vuông.

**Bài 8.** Cho tam giác $ABC$, $\widehat{A} = 45^0$. Vẽ ba đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC, HB$ và $HC$. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

- ***Lời giải***




$\Delta FAC$ vuông tại $F$, $\widehat{A} = 45^0$ nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow AF = FC$

$\Delta AFH$ và $\Delta CFB$ có: $\Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{CFB} = 90^0; AF = FC$;

$\widehat{FAH} = \widehat{FCB}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó $\Delta AFH = \Delta CFB$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = BC$

Vận dụng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có: $MQ = \frac{1}{2}AH; MN = \frac{1}{2}BC$

mà $AH = BC$ nên $MQ = MN$

Hình bình hành $MNPQ$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Chứng minh $\widehat{M} = 90^0$ suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

**Bài 9.** Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các hình vuông có một cạnh là cạnh của hình bình hành. Gọi $E, F, G, H$ lần lượt là tâm (tức là giao điểm của hai đường chéo) của các hình vuông vẽ trên các cạnh $AB, BC, CD$ và $DA$. Chứng minh rằng: $EG = HF$ và $EG \perp HF$.

- ***Lời giải***

Ta đặt $\widehat{B} = \alpha (\alpha \le 90^0)$

Khi đó $\widehat{EBF} = \widehat{GCF} = 90^0 + \alpha$

$\Delta EFB = \Delta GFC$ (c.g.c) $\Rightarrow EF = GF$ và $\widehat{EFB} = \widehat{GFC}$.

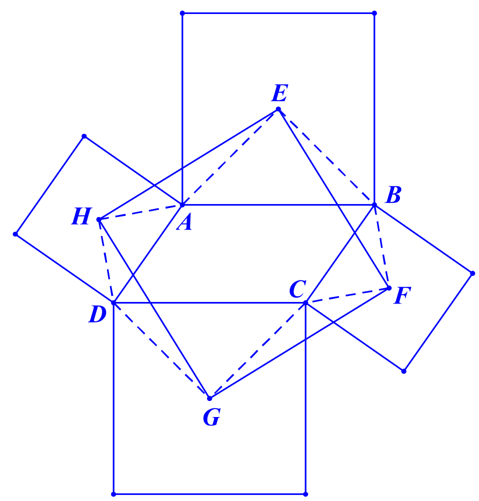
Ta có $\widehat{CFE} + \widehat{EFB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CFE} + \widehat{GFC} = 90^0$ hay $\widehat{EFG} = 90^0$

Chứng minh tương tự, ta được $FG = GH = HE$

Tứ giác $EFGH$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

Hình thoi này có $\widehat{EFG} = 90^0$ nên là hình vuông, suy ra $EG = HF$ và $EG \perp HF$.




**Bài 10.** Một bàn cờ hình vuông có kích thước $6 \times 6$. Có thể dùng $9$ mảnh gỗ hình chữ nhật có kích thước $1 \times 4$ để ghép kín bàn cờ được không?

- ***Lời giải***

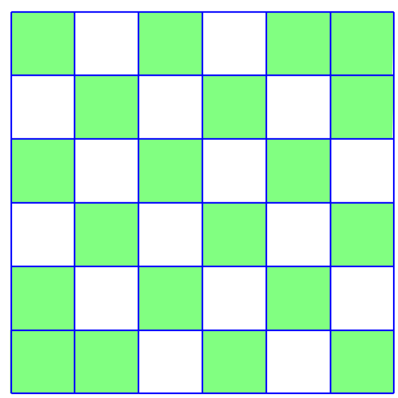
Tô màu bàn cờ như hình vẽ. Lúc này trên bàn cờ có $20$ ô đen và $16$ ô trắng.

Mỗi mảnh gỗ $1 \times 4$ khi đặt lên bàn cờ che lấp được $2$ ô đen và $2$ ô trắng.

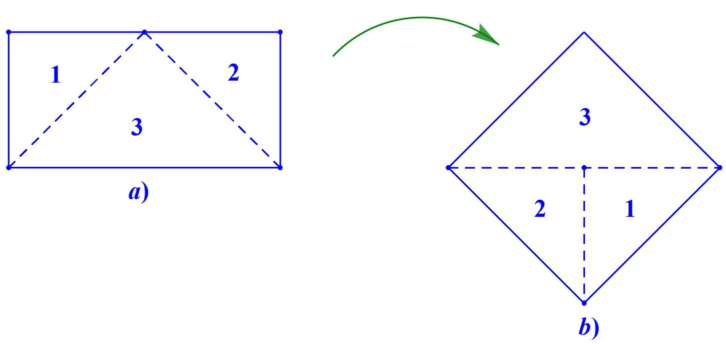
Do đó $9$ mảnh gỗ $1 \times 4$ chỉ che lấp được $18$ ô đen.

Như vậy với mọi cách đặt $9$ mảnh gỗ lên bàn cờ bao giờ cũng còn thừa hai ô đen không được che lấp.

Vậy không thể dùng $9$ mảnh gỗ $1 \times 4$ để lấp kín bàn cờ.



**Bài 11.** Một hình chữ nhật có kích thước $3 \times 6$. Hãy chia hình chữ nhật này thành nhiều phần (hình tam giác, tứ giác) để ghép lại thành một hình vuông (số phần được chia ra càng ít càng tốt).



# CHỦ ĐỀ 7: ĐỐI XỨNG TRỤC – ĐỐI XỨNG TÂM

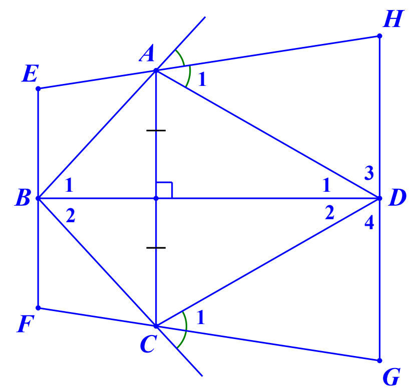
## Dạng 1. Bài tập vận dụng đối xứng trục

**Bài 1.** Cho tam giác ABD. Vẽ điểm C đối xứng với A qua BD. Vẽ các đường phân giác ngoài tại các đỉnh A, B, C, D của tứ giác ABCD chúng cắt nhau tạo thành tứ giác EFGH.

a) Xác định dạng của tứ giác EFGH;

b) Chứng minh rằng BD là trục đối xứng của tứ giác EFGH.

- ***Lời giải***




**a)** Vì C đối xứng với A qua BD nên $\Delta ABD$ đối xứng với $\Delta CBD$ qua BD.

Do đó $\Delta ABD = \Delta CBD$, suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}; \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$; $BA = BC$ và $DA = DC$.

Ta có BD và BE là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh B nên $BD \perp BE$.

Chứng minh tương tự, ta được: $BD \perp DH$.

Suy ra EF // HG $\Rightarrow$ Tứ giác EFGH là hình thang.

Ta có $\widehat{D_3} = \widehat{D_4}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Suy ra $\widehat{H} = \widehat{G}$

Hình thang EFGH có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

**b)** $\Delta ADH = \Delta CDG (g.c.g) \Rightarrow DH = DG$.

Chứng minh tương tự, ta được: $BE = BF$.

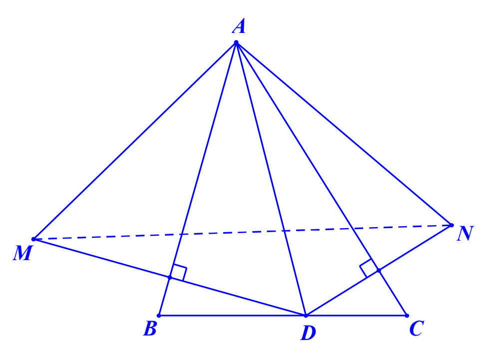
Đường thẳng BD đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân nên là trục đối xứng của hình thang cân EFGH.

**Bài 2.** Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D là điểm nằm giữa B và C. Vẽ các điểm M và N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC.

a) Chứng minh rằng góc MAN luôn có số đo không đổi;

b) Xác định vị trí của D để MN có độ dài ngắn nhất.

- ***Lời giải***




**a)** Các đoạn thẳng AM và AN đối xứng với AD lần lượt qua AB và AC nên:

$AM = AD; AN = AD; \widehat{A_1} = \widehat{A_2}; \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$.

Ta có:

$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{NAD} = 2\left(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}\right) = 2\widehat{BAC}$ (không đổi).

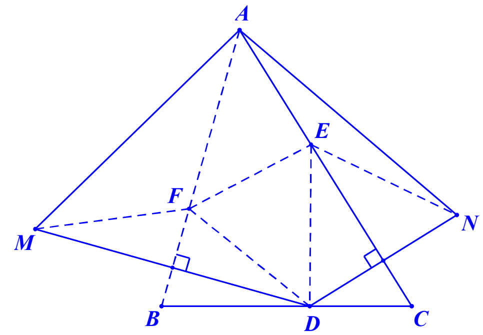
**b)** Xét $\Delta AMN$ có $AM = AN$ (cùng bằng AD) nên là tam giác cân. Tam giác cân này có góc MAN không đổi nên cạnh đáy MN ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ cạnh bên AM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AD ngắn nhất (vì $AM = AD$)

$\Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow$ D là hình chiếu của A trên BC.

**Bài 3.** Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Xác định vị trí của D, E, F để chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

- ***Lời giải***

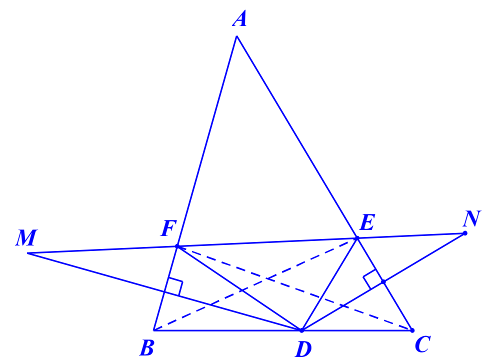



Vẽ điểm M đối xứng với D qua AB và vẽ điểm N đối xứng với D qua AC. Khi đó $MF = DF; EN = ED$.

Chu vi $\Delta DEF = DF + FE + ED = MF + FE + EN$

Chu vi $\Delta DEF$ nhỏ nhất khi độ dài đường gấp khúc MFEN ngắn nhất. Muốn vậy bốn điểm M, F, E, N phải thẳng hàng theo thứ tự đó.

Do đó ta phải tìm điểm D trên BC sao cho MN nhỏ nhất.




Theo kết quả bài 2, để MN nhỏ nhất thì D là hình chiếu của A trên BC. Khi đó E và F lần lượt là giao điểm của MN với AC và AB

Ta chứng minh với cách xác định D, E, F như vậy thì chu vi $\Delta DEF$ nhỏ nhất.

Thật vậy, khi $AD \perp BC$ thì chu vi $\Delta DEF$ bằng MN và MN nhỏ nhất. (1)

Khi D, E, F ở những vị trí khác thì chu vi $\Delta DEF$ bằng độ dài đường gấp khúc MFEN do đó lớn hơn MN (2)

***Chú ý***: Ta có nhận xét điểm E là chân đường cao vẽ từ đỉnh B, điểm F là chân đường cao vẽ từ đỉnh C của $\Delta ABC$.

Thật vậy, xét $\Delta DEF$ có các đường BF và CE lần lượt là các đường phân giác ngoài tại đỉnh F và E. Hai đường thẳng này cắt nhau tại A nên tia DA là tia phân giác của góc EDF.

Ta có: $DC \perp DA$ nên DC là tia phân giác ngoài tại đỉnh D của $\Delta DEF$.

Mặt khác, EC là đường phân giác ngoài tại đỉnh E.

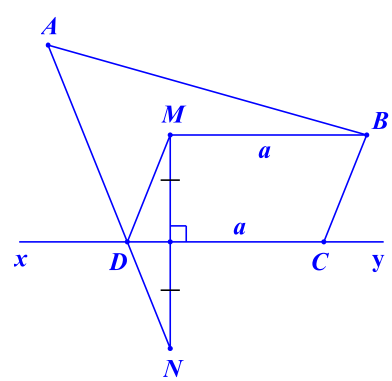
Điểm C là giao điểm của hai đường phân giác ngoài nên FC là đường phân giác trong. Kết hợp với FB là đường phân giác, suy ra $FC \perp FB$ hay $CF \perp AB$.

Chứng minh tương tự, ta được $BE \perp AC$.

Như vậy ba điểm D, E, F có thể xác định bởi chân của ba đường cao của tam giác.

**Bài 4.** Cho hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ xy. Hãy tìm trên xy hai điểm C và D sao cho $CD = a$ cho trước và chu vi tứ giác ABCD là nhỏ nhất.

- ***Lời giải***




Giả sử đã dựng được hai điểm C và D $\in xy$ sao cho $CD = a$ và chu vi tứ giác ABCD nhỏ nhất.

Vẽ hình bình hành BMDC (điểm M ở phía gần A).

Khi đó $BM = CD = a$ và $DM = BC$

Vẽ điểm N đối xứng với điểm M qua xy, điểm N là một điểm cố định và $DN = DM$.

Ta có $AB + BC + CD + DA$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow BC + DA$ nhỏ nhất (vì AB và CD không đổi)

$\Leftrightarrow DM + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DN + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D nằm giữa A và N.

Từ đó ta xác định điểm D như sau:

- Qua B vẽ một đường thẳng song song với xy và trên đó lấy điểm M sao cho $BM = a$ (điểm M ở phía gần A);
- Vẽ điểm N đối xứng với M qua xy;
- Lấy giao điểm D của AN với xy;
- Lấy điểm $C \in xy$ sao cho $DC = MB = a$ (DC và MB cùng chiều).

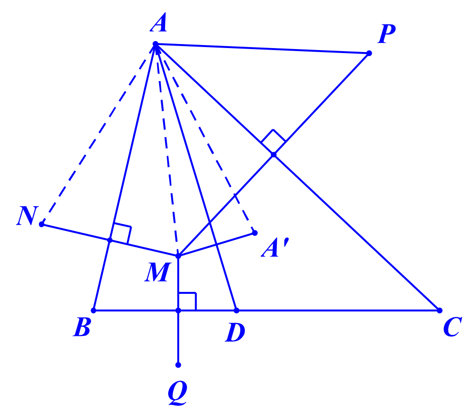
Khi đó tổng $AB + BC + CD + DA$ nhỏ nhất.

**Bài 5.** Cho tam giác ABC, đường phân giác AD và một điểm M ở trong tam giác. Vẽ các điểm $N, P, A'$ đối xứng với M lần lượt qua AB, AC và AD.

a) Chứng minh rằng N và P đối xứng qua $AA'$;

b) Gọi $B', C'$ là các điểm đối xứng với M lần lượt qua các đường phân giác của góc B, góc C. Chứng minh rằng ba đường thẳng $AA', BB', CC'$ đồng quy.

- ***Lời giải***




**a)** • AN đối xứng với AM qua AB

$\Rightarrow AN = AM$ và $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$. (1)

• AP đối xứng với AM qua AC

$\Rightarrow AP = AM$ và $\widehat{MAC} = \widehat{PAC}$. (2)

• $AA'$ đối xứng với AM qua AD nên $\widehat{MAD} = \widehat{A'AD}$.

Mặt khác, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{MAB} = \widehat{CAA'}$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{MAB} = \widehat{CAA'}$.

Ta có $\widehat{A'AP} = \widehat{A'AC} + \widehat{PAC} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC}$.

Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{A'AN} = \widehat{BAC}$, suy ra: $\widehat{A'AP} = \widehat{A'AN}$.

$\Delta ANP$ cân tại A có $AA'$ là đường phân giác nên $AA'$ cũng là đường trung trực của NP $\Rightarrow$ N và P đối xứng qua $AA'$.

**b)** Gọi Q là điểm đối xứng của M qua BC.

Chứng minh tương tự như trên ta được $BB'$ là đường trung trực của NQ và $CC'$ là đường trung trực của PQ.

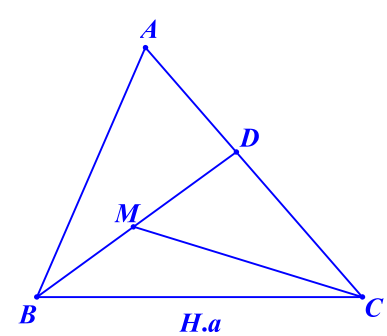
Vậy $AA', BB', CC'$ là ba đường trung trực của $\Delta NPQ$ nên chúng đồng quy.

**Bài 6.** Cho tứ giác ABCD và một điểm M nằm giữa A và B. Chứng minh rằng $MC + MD$ nhỏ hơn số lớn nhất trong hai tổng $AC + AD; BC + BD$.

- ***Lời giải***

**Trước hết ta chứng minh bài toán phụ:**

Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác (hoặc ở trên một cạnh nhưng không trùng với các đỉnh của tam giác). Chứng minh rằng $MB + MC < AB + AC$ (h.7.15).




Thật vậy, xét $\Delta ABD$, ta có $BD < AB + AD$ hay $MB + MD < AB + AD$. (1)

Xét $\Delta MCD$ có $MC < DC + MD$. (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được:

$MB + MD + MC < AB + AD + DC + MD \Rightarrow MB + MC < AB + AC$

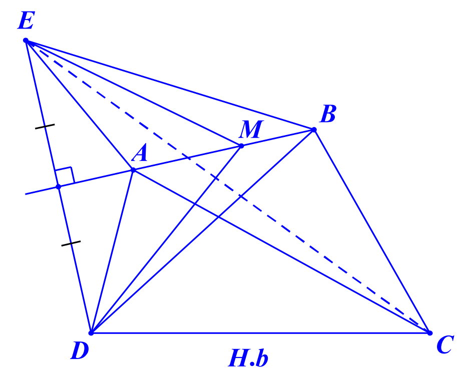
Bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu điểm M nằm trên một cạnh nhưng không trùng với đỉnh của tam giác.

Bây giờ ta vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho.

Vẽ điểm E đối xứng với D qua đường thẳng AB (h.7.16).

Khi đó $AE = AD; ME = MD$ và $BE = BD$.

Vì điểm M nằm giữa A và B nên hoặc điểm M nằm trong $\Delta BEC$ hoặc điểm M nằm trong $\Delta AEC$ hoặc điểm M nằm trên cạnh EC.




Ta có $\left[\begin{array}{l} ME + MC < AE + AC \\ ME + MC < BE + BC \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} MD + MC < AD + AC \\ MD + MC < BD + BC \end{array}\right.$.

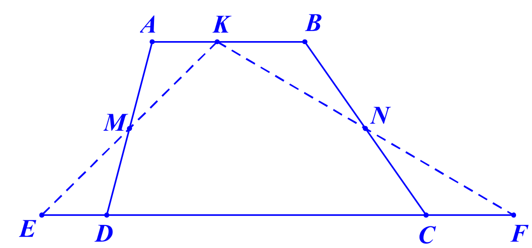
Do đó $MD + MC < \max\{AD + AC; BD + BC\}$.

## Dạng 2. Bài tập vận dụng đối xứng tâm

**Bài 1.** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Trên đáy AB lấy điểm K tùy ý. Vẽ điểm E đối xứng với K qua trung điểm M của AD. Vẽ điểm F đối xứng với K qua trung điểm N của BC. Chứng minh rằng EF có độ dài không đổi.

- ***Tìm cách giải***

Ta thấy: $EF = ED + DC + CF$ mà CD không đổi nên muốn chứng minh EF không đổi ta cần chứng minh $ED + CF$ không đổi.




- ***Trình bày lời giải***

DE và AK đối xứng nhau qua M nên DE = AK và DE // AK do đó DE // AB.

Mặt khác, DC // AB suy ra ba điểm E, D, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được: BK = CF và ba điểm D, C, F thẳng hàng.

Ta có $EF = ED + DC + CF = AK + DC + BK = AB + CD$ (không đổi).

***Nhận xét:*** Khi điểm K di động trên cả đường thẳng AB thì độ dài của đoạn thẳng EF vẫn không đổi.

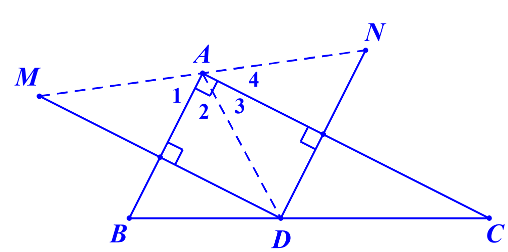
**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$, điểm D thuộc cạnh huyền BC. Vẽ điểm M và điểm N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC. Chứng minh rằng:

a) M và N đối xứng qua A;

b) Xác định vị trí của điểm D để MN ngắn nhất, dài nhất.

- ***Tìm cách giải***

Muốn chứng minh hai điểm M và N đối xứng qua A, ta chứng minh $AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 180°$.




- ***Trình bày lời giải***

a) AM đối xứng với AD qua AB nên $AM = AD$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. (1)

AN đối xứng với AD qua AC nên $AN = AD$ và $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 2\left(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}\right) = 2\widehat{BAC} = 2.90° = 180°$.

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng.

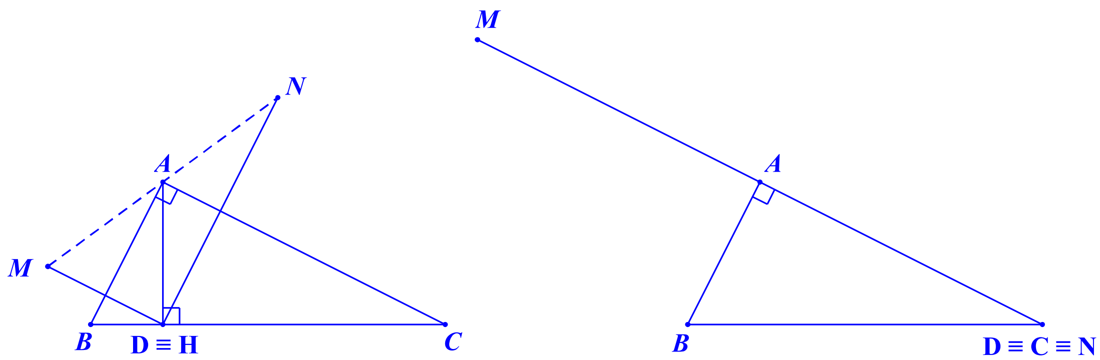
Từ đó suy ra M và N đối xứng qua A và $MN = 2AD$.

b) Vẽ $AH \perp BC$, ta có $AD \geq AH$, do đó $MN \geq 2AH$.

Vậy MN ngắn nhất là bằng $2AH$ khi $D \equiv H$ (h.7.7).

Dựa vào quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta có $AD \leq AC$ suy ra $MN = 2AD \leq 2AC$.

Do đó MN dài nhất là bằng $2AC$ khi $D \equiv C$ (h.7.8).




H. a　　　　H. b

***Bài 3.*** Cho tam giác ABC và O là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi $A', B', C'$ lần lượt là các điểm đối xứng với O qua D, E, F. Chứng minh rằng ba đường thẳng $AA', BB', CC'$ đồng quy.

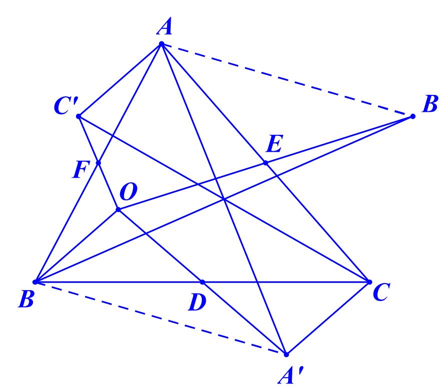
- ***Lời giải***

Ta có $AC'$ và BO đối xứng nhau qua F nên $AC' = BO$ và $AC'$ // BO. (1)

BO và CA′ đối xứng nhau qua D nên BO $= CA'$ và BO // CA′

Từ (1) và (2) suy ra: $AC' = CA'$ và $AC'$ // CA′, do đó tứ giác $ACA'C'$ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta được tứ giác $ABA'B'$ là hình bình hành. Hai hình bình hành $ACA'C'$ và $ABA'B'$ có chung đường chéo $AA'$ nên các đường chéo $AA', BB', CC'$ đồng quy.

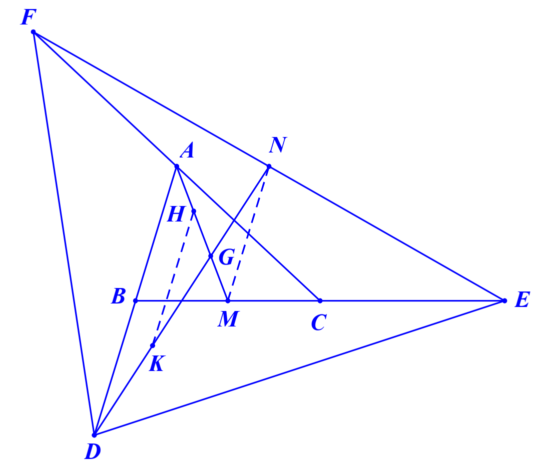



***Bài 4.*** Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D đối xứng với A qua điểm B. Vẽ điểm E đối xứng với B qua C. Vẽ điểm F đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác DEF có cùng một trọng tâm.

- ***Lời giải***

Vẽ đường trung tuyến AM của tam giác ABC và đường trung tuyến DN của tam giác DEF. Gọi G là giao điểm của hai đường trung tuyến này. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của GA và GD.

Xét $\Delta FCE$ có AN là đường trung bình $\Rightarrow$ AN // CE và $AN = \frac{1}{2}CE$ do đó AN // BM và




$AN = BM$, dẫn tới ANMB là hình bình hành

$\Rightarrow$ MN // AB và $MN = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác, HK là đường trung bình của $\Delta GAD$ nên HK // AD và $HK = \frac{1}{2}AD$.

Từ đó MN // HK và $MN = HK$.

Suy ra MNHK là hình bình hành, hai đường chéo HM và NK cắt nhau tại G nên G là trung điểm của mỗi đường.

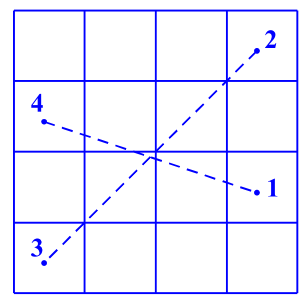
Do đó $GM = GH = HA \Rightarrow$ G là trọng tâm của $\Delta ABC$.

$GN = GK = KD \Rightarrow$ G là trọng tâm của $\Delta DEF$.

Vậy $\Delta ABC$ và $\Delta DEF$ có cùng một trọng tâm.

**Bài 5.** Cho một hình vuông gồm $4\times4$ ô vuông. Trong mỗi ô viết một trong các số 1, 2, 3, 4. Chứng minh rằng tồn tại một hình bình hành có đỉnh là tâm của bốn ô vuông sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện là bằng nhau.

- ***Lời giải***




Hình vuông có $4\times4=16$ ô vuông, chia thành 8 cặp đối xứng nhau qua tâm hình vuông. Xét các cặp hai số ở hai ô đối xứng qua tâm đó.

Tổng hai số của mỗi cặp nhỏ nhất là $1+1=2$, lớn nhất là $4+4=8$.

Có 7 tổng (là 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) mà có 8 cặp số nên phải có hai cặp có tổng bằng nhau.

Vị trí của 4 số trong hai cặp này là đỉnh của một hình bình hành phải tìm (trường hợp đặc biệt: 4 số này nằm trong 4 ô có tâm thẳng hàng, ta nói hình bình hành "suy biến" thành đoạn thẳng).

# Chủ đề 8.HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN TRONG CHƯƠNG TỨ GIÁC

## A. Kiến thức cần nhớ

*Nhiều bài toán trong chương tứ giác cần phải vẽ hình phụ thì mới giải được. Vẽ hình phụ để tạo thêm sự liên kết giữa giả thiết và kết luận từ đó dễ tìm ra cách giải. Một số cách vẽ hình phụ thường dùng trong chương này là:*

1. *Nếu đề bài có hình thang thì từ một đỉnh có thể vẽ thêm một đường thẳng:*
   + *song song với một cạnh bên;*
   + *song song với một đường chéo;*
   + *vuông góc với đáy.*
2. *Khi vẽ như vậy, một đoạn thẳng đã được dời song song với chính nó từ vị trí này đến một vị trí khác thuận lợi hơn trong việc liên kết với các yếu tố khác, từ đó giải được bài toán.*

3. *Vẽ thêm hình bình hành để chứng minh hai đường thẳng song song, chứng minh quan hệ về độ dài, chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng, tính số đo góc,...*
4. *Vẽ thêm trung điểm của đoạn thẳng để vận dụng định lý đường trung bình của tam giác, của hình thang, định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông. Cũng có thể vẽ thêm đường thẳng song song để tạo ra đường trung bình của tam giác, hình thang.*
5. *Dùng định lý đường trung bình có thể chứng minh các quan hệ song song, thẳng hàng, các quan hệ về độ dài,...*
6. *Vẽ điểm đối xứng với một điểm cho trước qua một đường thẳng hoặc qua một điểm. Nhờ cách vẽ này ta cũng có thể dời một đoạn thẳng, một góc từ vị trí này sang vị trí khác thuận lợi cho việc chứng minh.*

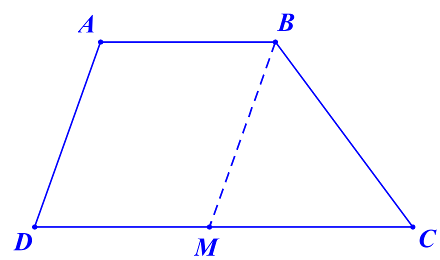
## B. Bài tập vận dụng

### I. Vẽ thêm đường thẳng song song hoặc vuông góc

**Bài 1.1** Chứng minh rằng trong một hình thang tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai cạnh đáy.

- ***Tìm cách giải***

Xét hình thang *ABCD (AB // CD)*, ta phải chứng minh *AD + BC > CD – AB*. Điều phải chứng minh rất gần với bất đẳng thức tam giác. Điều này gợi ý cho ta vẽ hình phụ để có *AD + BC* là tổng các độ dài hai cạnh của một tam giác.




- ***Trình bày lời giải***

Vẽ $BM // AD \left(M \in CD\right)$ ta được $DM = AB$ và $BM = AD$.

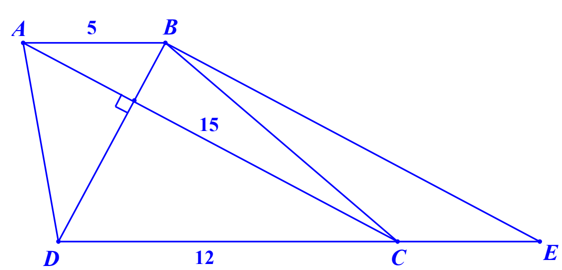
Xét $\Delta BMC$ có $BM + BC > MC \Rightarrow AD + BC > DC - DM$ hay $AD + BC > CD - AB$ (đpcm).

Trường hợp hai cạnh bên song song thì hai đáy bằng nhau, bài toán hiển nhiên đúng.

**Bài 1.2** Cho hình thang *ABCD (AB // CD)*, hai đường chéo vuông góc với nhau.
Biết *AB* = 5cm, *CD* = 12cm và *AC* = 15cm. Tính độ dài *BD*.

- ***Tìm cách giải***

Ba đoạn thẳng *AB, AC* và *CD* đã biết độ dài nhưng ba đoạn thẳng này không phải ba cạnh của một tam giác nên không tiện sử dụng. Ta sẽ dời song song đường chéo *AC* đến vị trí *BE* thì tam giác *BDE* vuông tại *B* biết độ dài hai cạnh, dễ dàng tính được độ dài cạnh thứ ba *BD*.




- ***Trình bày lời giải***

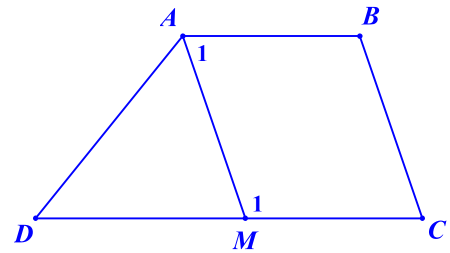
Vẽ $BE // AC \left(E \in tia\ DC\right)$. Khi đó: *BE* = *AC* = 15cm; *CE* = *AB* = 5cm.

Ta có: $BE \perp BD$ (vì $AC \perp BD$).

Xét $\Delta BDE$ vuông tại *B* có $BD = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ (cm).

**Bài 1.3** Cho hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng tổng hai góc kề đáy lớn nhỏ hơn tổng hai góc kề đáy nhỏ.

- ***Lời giải***




Xét hình thang $ABCD$ có $AB//CD$ và $AB < CD$. Ta phải chứng minh: $\widehat{A}+\widehat{B} > \widehat{C}+\widehat{D}$.

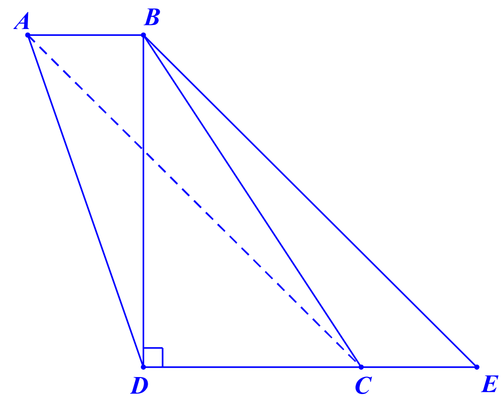
Vẽ $AM//BC\left(M \in CD\right)$ khi đó $\widehat{B}=\widehat{M_1}$ và $\widehat{C}=\widehat{A_1}$.

Ta có: $\widehat{A} > \widehat{A_1}=\widehat{C}; \widehat{M_1} > \widehat{D}$ (tính chất góc ngoài của $\Delta ADM$)

$\Rightarrow \widehat{B} > \widehat{D}$. Do đó $\widehat{A}+\widehat{B} > \widehat{C}+\widehat{D}$

**Bài 1.4** Cho hình thang $ABCD$ $(AB$ // $CD)$, $BD \perp CD$. Cho biết $AB + CD = BD = a$. Tính độ dài $AC$.

- ***Lời giải***




Vẽ $BE//AC,\ E \in CD$. Ta được $CE = AB$ và $BE = AC$.

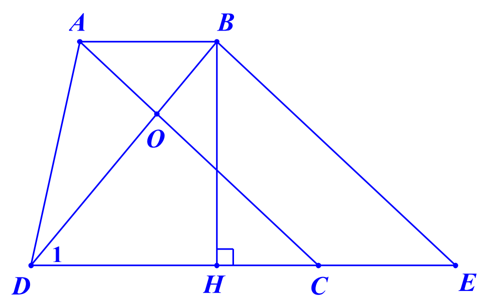
Ta có: $AB + CD = CE + CD = DE$.

Vì $AB + CD = a$ nên $DE = a$.

Tam giác $BDE$ vuông cân $\Rightarrow BE = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

**Bài 1.5** Cho hình thang cân $ABCD$ (AB // CD), đường cao bằng $h$ và tổng hai đáy bằng $2h$. Tính góc xen giữa hai đường chéo.

- ***Lời giải***




Qua B vẽ $BE//AC(\in G$ đường thẳng $CD)$, ta được $BE = AC$ và $CE = AB$.

Do đó $DE = DC + CE = DC + AB = 2h$.

Ta có: $BD = AC$ (hai đường chéo của hình thang cân) mà $BE = AC$ nên $BD = BE$.

$\Delta BDE$ cân tại $B$, $BH$ là đường cao nên cũng là đường trung tuyến, suy ra $DH = HE = h; BH = h$. Do đó các tam giác $HBD$, $HBE$ vuông cân

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E} = 45^o \Rightarrow \Delta BDE$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{COD} = \widehat{EBD} = 90^O$.

**Bài 1.6** Chứng minh rằng trong một hình thang thì tổng các bình phương của hai đường chéo bằng tổng các bình phương của hai cạnh bên cộng với hai lần tích của hai cạnh đáy.

- ***Lời giải***

- Trường hợp hình thang có hai góc kề một đáy cùng tù, hai góc kề đáy kia cùng nhọn

Vẽ $AH \perp CD, BK \perp CD$ thì $HK = AB$

Ta có: $AC^2 - HC^2 = AD^2 - DH^2\left(= AH^2\right);\ BD^2 - KD^2 = BC^2 - KC^2 = \left(= BK^2\right)$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên ta được:

$\left(AC^2 - HC^2\right) + \left(BD^2 - KD^2\right) = \left(AD^2 + BC^2\right) - DH^2 - CK^2$

$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = \left(AD^2 + BC^2\right) + \left(CH^2 - CK^2\right) + \left(DK^2 - DH^2\right)$

$= AD^2 + BC^2 + (CH - CK)(CH + CK) + (DK - DH)(DK + DH)$

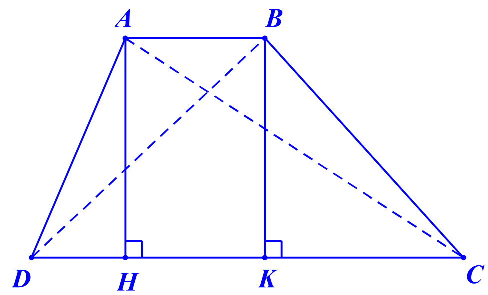
$= AD^2 + BC^2 + HK(CH + CK) + HK(DK + DH)$

$= AD^2 + BC^2 + HK(CH + CK + DK + DH)$

$= AD^2 + BC^2 + HK(CD + CD)$

$= AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$

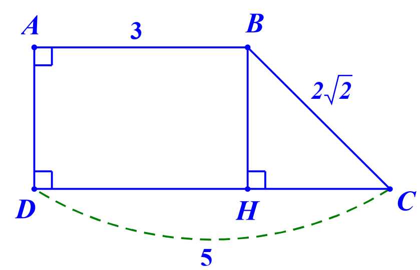
• Trường hợp mỗi đáy có một góc tù (hoặc một góc vuông), một góc nhọn: Cũng chứng minh tương tự.




**Bài 1.7** Hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^O$ Biết $AB$ = 3cm; $BC = 2\sqrt{2}$ cm và $CD$ = 5cm. Chứng minh rằng $\widehat{B} = 3\widehat{C}$.

- ***Tìm cách giải***

Nếu dời song song đoạn thẳng *AD* tới vị trí *BH* thì được $\Delta BHC$ vuông tại *H*. Ta dễ dàng tính được *HC* = *HB*, do đó tính được góc *C*, góc *B*.




- ***Trình bày lời giải***

Vẽ $BH \perp CD$ $\left(H \in CD\right)$ thì *BH* // *AD*, do đó *DH* = *AB* = 3cm suy ra: *HC* = 5 – 3 = 2 (cm).

Xét $\Delta BHC$ vuông tại *H*, áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2} = 2$ (cm).

Vậy $\Delta HBC$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{C} = 45^O$ do đó $\widehat{ABC} = 135^O$ suy ra $\widehat{ABC} = 3\widehat{C}$.

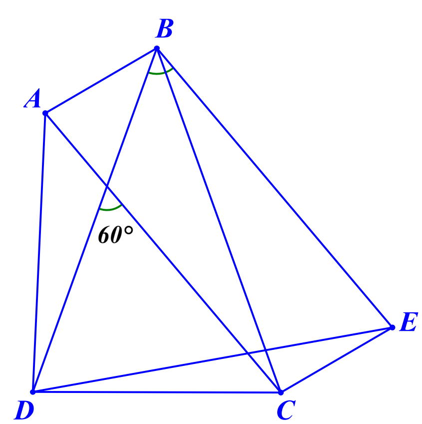
## II. Vẽ thêm hình bình hành

**Bài 2.1** Cho tứ giác *ABCD*, hai đường chéo cắt nhau tại *O*. Cho biết $\widehat{AOB} = 60^o$ và *AC* = *BD* = a. Chứng minh rằng $AB + CD \geq a$.

- ***Tìm cách giải***

Từ điều phải chứng minh ta thấy cần vận dụng bất đẳng thức tam giác. Do đó cần vẽ hình phụ để tạo ra một tam giác có hai cạnh lần lượt bằng *AB, CD* và cạnh thứ ba bằng đường chéo *AC*.

Nếu vẽ thêm hình bình hành *ABEC* thì các yêu cầu trên được thoả mãn.




- ***Trình bày lời giải***

Vẽ hình bình hành *ABEC*, ta được *BE* // *AC*

suy ra $\widehat{DBE} = \widehat{AOB} = 60^0$

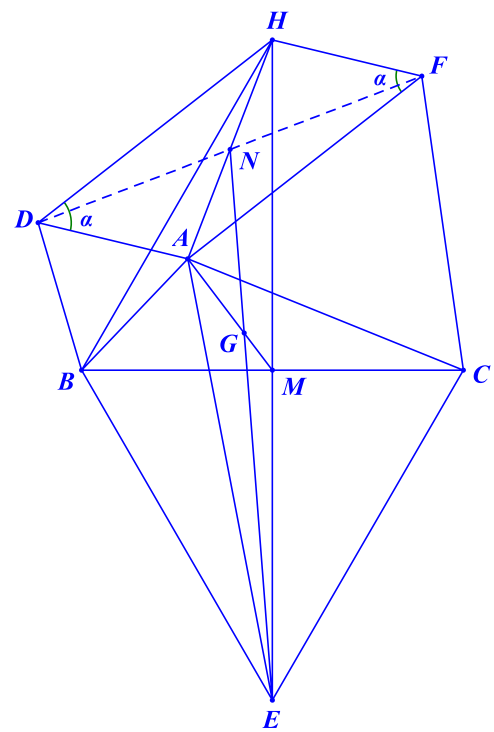
*BE* = *AC* = a; *AB* = *CE*.

Tam giác *BDE* là tam giác đều $\Rightarrow DE = a$ .

Xét ba điểm *C, D, E* ta có: $CE + CD \geq DE$ hay $AB + CD \geq a$ (dấu "=" xảy ra khi điểm *C* nằm giữa *D* và *E* hay *DC // AB*. Khi đó tứ giác *ABCD* là hình thang cân).

**Bài 2.2** Cho tam giác *ABC*. Dựng ra ngoài tam giác này các tam giác đều *ABD, BCE, CAF*. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác *DEF* trùng với trọng tâm của tam giác *ABC*.

- ***Lời giải***




Vẽ hình bình hành *DAFH*.

Gọi *N* là giao điểm của hai đường chéo *DF* và *AH, M* là giao điểm của *EH* và *BC*.

Ta có $NA = NH$, $ND = NF$.

Ta đặt $\widehat{DAH} = \widehat{AFH} = \alpha$ thì $\widehat{BDH} = \widehat{HFC} = \alpha + 60^O$ .

$\widehat{DAF} = 180^O = \alpha;$

$\widehat{\text{BAC}} = 360^O - \widehat{BAD} - \widehat{CAF} - \widehat{DAF}$

$= 360^0 - 60^0 - 60^0 - \left(180^0 - \alpha\right) = \alpha + 60^0$

$\Delta BDH$ và $\Delta HFC$ có: $BD = HF$ (=$AD$), $\widehat{BDH} = \widehat{HFC}$ (chứng minh trên); $DH = FC\left(= AF\right)$.

Do đó $\Delta BDH = \Delta HFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow HB = HC.$ $(1)$ Chứng minh tương tự, ta được $\Delta BAC = \Delta HFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BC = HC.$ $(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $HB = HC = BC$ .

Tứ giác *BHCE* có các cặp cạnh đối bằng nhau (cùng bằng *BC*) nên là hình bình hành $\Rightarrow MB = MC$ và $MH = ME$.

• Xét $\Delta AEH$ có *AM* và *AN* là hai đường trung tuyến nên giao điểm *G* của chúng là trọng tâm

$\Rightarrow EG = \dfrac{2}{3}EN$ và $AG = \dfrac{2}{3}AM$ .

• Xét $\Delta ABC$ có *AM* là đường trung tuyến mà $AG = \dfrac{2}{3}AM$ nên G là trọng tâm của $\Delta ABC$.

• Xét $\Delta EDF$ có *EN* là đường trung tuyến mà $EG = \dfrac{2}{3}EN$ nên G là trọng tâm của AEDF.

Vậy $\Delta ABC$ và $\Delta EDF$ có cùng trọng tâm *G*.

**Bài 2.3** Cho tam giác đều *ABC*. Trên cạnh *BC* lấy điểm *M*. Qua *M* vẽ một đường thẳng vuông góc với *AB* cắt *AB* tại *H*, cắt đường thẳng vuông góc với *AC* vẽ từ C tại điểm *K*. Gọi *N* là trung điểm của *BM*. Chứng minh rằng tam giác *ANK* có số đo các góc tỉ lệ với 1, 2, 3.

- ***Lời giải***

$\Delta HBM$ vuông tại *H* có $\widehat{ABC} = 60^o$ nên: $\widehat{HMB} = 30^o$

$\Delta CAK$ vuông tại *C* có $\widehat{ACB} = 60^o$ nên: $\widehat{KCM} = 30^o$

Suy ra: $\widehat{KMC} = \widehat{KCM}$ (cùng nằm $\widehat{HMB}$)

Do đó $\Delta KMC$ cân $\Rightarrow KC = KM$. .

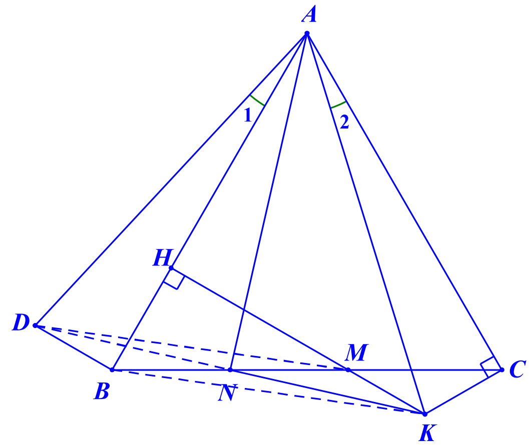
Vẽ hình bình hành $BKMD \Rightarrow BD // KM$ và $BD = KM$ .

Do đó $BD \perp AB$ (vì $KM \perp AB$) và $BD = KC$ (vì cùng bằng *KM*).

$\Delta ABD = \Delta ACK \ (c.g.c) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ và $AD = AK$ .

Tam giác *ADK* cân, *AN* là đường trung tuyến nên là đường cao, đường phân giác

$\Rightarrow AN \perp DK, \widehat{AHK} = 90^O$




Ta có $A_2 + \widehat{BAK} = \widehat{BAC} = 60^O \Rightarrow A_1 + \widehat{BAK} = 60^O$

hay $\widehat{DAK} = 60^O \Rightarrow \widehat{NAK} = 60^O : 2 = 30^O$

Do đó $\widehat{AKN} = 90^O - 30^O = 60^O$

Xét ΔANK có $\widehat{NAK} : \widehat{NKA} : \widehat{ANK} = 30^O : 60^O : 90^O = 1:2:3$

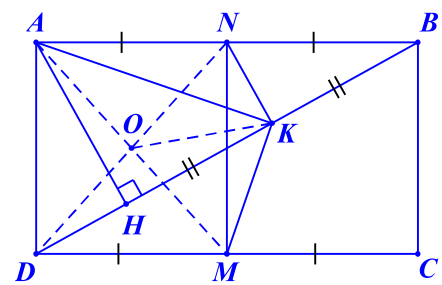
### III. Vẽ thêm trung điểm - Tạo đường trung bình

**Bài 4.1** Cho hình chữ nhật *ABCD*. Vẽ $AH \perp BD$. Gọi *K* và *M* lần lượt là trung điểm của *BH* và *CD*. Tính số đo của góc *AKM*.

- ***Tìm cách giải***

Bài toán có cho hai trung điểm *K* và *M* nhưng chưa thể vận dụng trực tiếp được.

Ta vẽ thêm trung điểm *N* của *AB* để vận dụng định lý đường trung bình của hình chữ nhật, đường trung bình của tam giác.




- ***Trình bày lời giải***

Gọi *N* là trung điểm cửa *AB* thì *MN* là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow MN // AD$ .

Mặt khác, *AN // DM* nên tứ giác *ANMD* là hình bình hành. Hình bình hành này có $\widehat{D} = 90^o$ nên là hình chữ nhật. Suy ra hai đường chéo *AM* và *DN* cắt nhau tại trung điểm *O* của mỗi đường:

*OA = OM = ON = OD.*

Xét Δ*ABH* có *NK* là đường trung bình nên $NK // AH \Rightarrow NK \perp BD$ (vì $AH \perp BD$). Do đó Δ*KDN* vuông tại *K*.

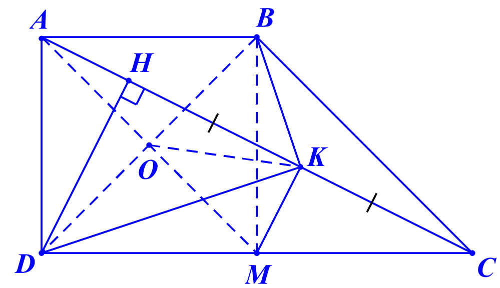
Xét Δ*KDN* có *KO* là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $KO = \frac{1}{2} DN$

$\Rightarrow KO = \frac{1}{2} AM = OA = OM$

Vậy Δ*KAM* vuông tại $K \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^O$

**Bài 4.2** Cho hình thang $ABCD(AB // CD)$, $\hat{A} = 90^o, AB = \frac{1}{2} CD$. Vẽ $DH \perp AC$. Gọi *K* là trung điểm của *HC*. Tính số đo của góc *BKD*.

- ***Lời giải***




Gọi $M$ là trung điểm của $CD$.

Xét $\Delta HCD$ có $KM$ là đường hung bình nên $KM // HD$ do đó $KM \perp AC$ (vì $HD \perp AC$).

Tứ giác $ADMB$ có $AB // MD$ và $AB = DM\left(=\frac{1}{2}CD\right)$ nên $ABMD$ là hình bình hành.

Hình bình hành này có $\widehat{A} = 90^o$ nên là hình chữ nhật.

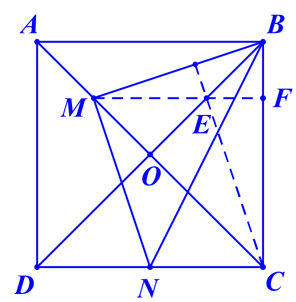
Suy ra $AM = BD$ và $OA = OM = OB = OD$.

Xét $\Delta KAM$ vuông tại $K$ có $KO$ là đường trung tuyến nên $KO = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BD$.

Xét $\Delta KBD$ có $KO$ là đường trung tuyến mà $KO = \frac{1}{2}BD$ nên ΔKBD vuông tại K, do đó $\widehat{BKD} = 90^o$

**Bài 4.3** Cho hình vuông $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại $O$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $OA$ và $CD$. Chứng minh rằng tam giác $MNB$ vuông cân.

- ***Lời giải***




Gọi $E$ là trung điểm của $OB$ thì $ME$ là đường trung bình của $\Delta AOB \Rightarrow ME // AB$ và $ME = \frac{1}{2}AB$.

Do đó $ME // NC$ và $ME = NC$.

Tứ giác $MECN$ là hình bình hành $\Rightarrow CE // MN$ và $CE = MN$.

Ta có: $ME \perp BC$ tại $F$ (vì $AB \perp BC$), $\mathrm{BO} \perp AC$ (tính chất đường chéo hình vuông).

Xét $\Delta MBC$ có $E$ là trực tâm nên $CE \perp MB$ do đó $MN \perp MB$. (1)

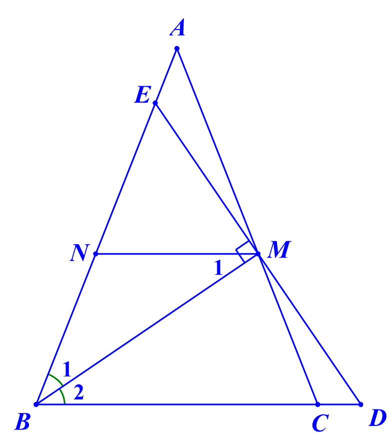
$\Delta MAB$ và $\Delta EBC$ có: $AB = BC$; $\widehat{MAB} = \widehat{EBC} = 45^0$; $MA = EB$ (vì OA = OB)

Vậy $\Delta MAB = \Delta EBC$ (c.g.c)$\Rightarrow MB = EC \Rightarrow MB = MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AMNB$ vuông cân.

**Bài 4.4** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, đường phân giác $BM$. Từ $M$ vẽ một đường thẳng vuông góc với $BM$ cắt đường thẳng $BC$ tại $D$. Chứng minh rằng: $BD = 2CM$.

- ***Lời giải***




Gọi E là giao điểm của đường thẳng $DM$ với $AB$. Tam giác $BDE$ có $BM$ vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân, do đó $BD = BE$ và $MD = ME$.

Gọi N là trung điểm của BE thì MN là đường trung bình của $\Delta EBD \Rightarrow MN // BD$

$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{B}_2$, do đó $\widehat{M_1} = \widehat{B}_1\left(= \widehat{B}_2\right)$

$\Rightarrow \Delta NBM$ cân $\Rightarrow BN = MN$.

Tứ giác $BCMN$ là hình thang cân$\Rightarrow BN = CM$

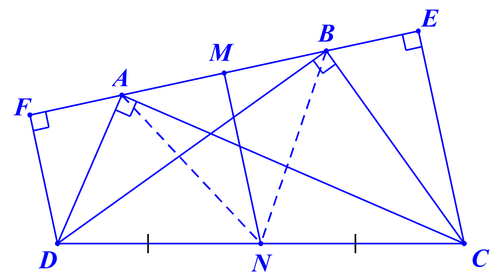
$\Rightarrow MN = CM$

Xét $\Delta MBE$ vuông tại $M$ có $MN$ là đường trung tuyến nên $MN = \frac{1}{2}BE$.

$\Rightarrow BE = 2MN \Rightarrow BD = 2CM$

**Bài 4.5** Cho tứ giác $ABCD, \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^o$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là hình chiếu của $C$ và $D$ trên đường thẳng $AB$. Chứng minh rằng $AF = BE$.

- ***Lời giải***




Ta có: $CE//DF$ (cùng vuông góc với $AB$). Tứ giác $FECD$ là hình thang.

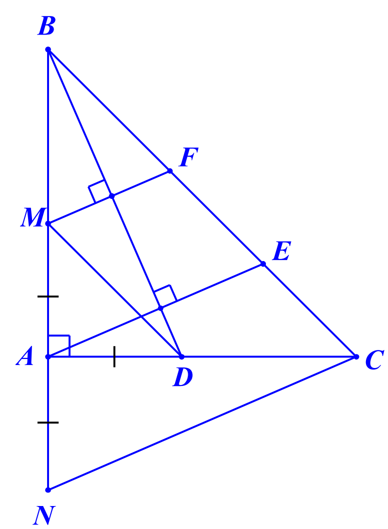
Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $EF$ và $CD$, $MN$ là đường trung bình của hình thang $CEFD$. Do đó $MN//CE \Rightarrow MN \perp EF$.

Ta có: $AN = BN = \frac{1}{2}CD$ (tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông) $\Rightarrow \Delta NAB$ cân

Mặt khác, NM là đường cao nên cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow MA = MB$ dẫn tới $AF = BE$.

**Bài 4.6** Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$. Trên các cạnh $AB$ và $AC$ lần lượt lấy các điểm $M$ và $D$ sao cho $AM = AD$. Từ $A$ và $M$ vẽ các đường thẳng vuông góc với $BD$ chúng cắt $BC$ lần lượt tại $E$ và $F$. Chứng minh rằng: $AE = \frac{BD + MF}{2}$

- ***Lời giải***




Trên tia đối của tia $AB$ lấy điểm $N$ sao cho: $AN = AM$.

$\Delta ACN = \Delta ABD$ (c.g.c) $\Rightarrow$ CN = BD và $\widehat{ACN} = \widehat{ABD}$ mà

$\widehat{CAE} = \widehat{ABD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAE}$)

nên $\widehat{ACN} = \widehat{CAE} \Rightarrow AE//CN$

Do đó $MF//CN$ (vì cùng song song với $AE$).

Xét hình thang $MFCN$ có $AE//CN$ và $AM = AN$ nên $EF = EC$.

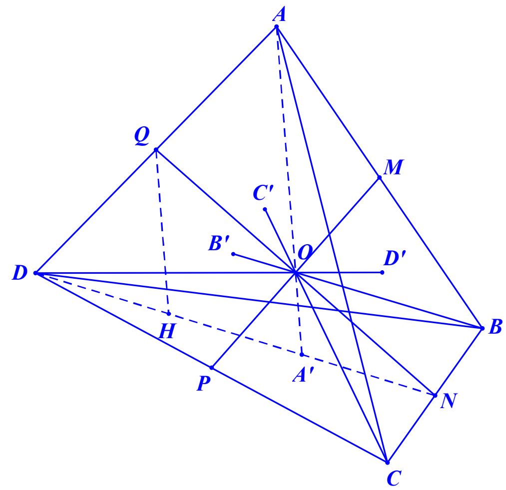
Suy ra $AE = \frac{MF + CN}{2} = \frac{MF + BD}{2}$

**Bài 4.7** Cho tứ giác ABCD. Gọi $A', B', C', D'$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BCD, CDA, DAB, ABC$. Chứng minh rằng:

a) Các đường thẳng $AA', BB', CC', DD'$ cùng đi qua một điểm;
b) Điểm này chia $AA', BB', CC', DD'$ theo cùng một tỉ số.

- ***Lời giải***

a) Gọi $M, N, P, Q, E, F$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CD, DA, AC$ và $BD$. Theo định lý Giéc-gôn (bài 4.8) thì ba đường thẳng $MP, NQ, EF$ đồng quy tại điểm $O$ là trung điểm của mỗi đoạn thẳng đó.




Gọi giao điểm của $AO$ với $DN$ là $G$. Vẽ $QH\,//\,AG$.

Xét $\Delta NQH$ ta được $NG = GH$

Xét $\Delta ADG$ ta được $GH = HD$

Vậy $NG = GH = HD \Rightarrow HG = \frac{1}{3}DN$. (1)

Vì $A'$ là trọng tâm của $ABCD$ nên $A' \in DN$ và $NA' = \frac{1}{3}DN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $G \equiv A'$ do đó $AA'$ đi qua $O$.

Chứng minh tương tự, các đường thẳng $BB', CC', DD'$ đều đi qua $O$.

Suy ra $AA', BB', CC', DD'$ đồng quy tại $O$.

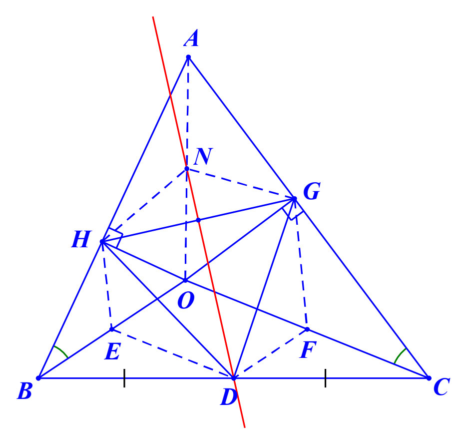
b) Ta có: $OA' = \frac{1}{2}QH$ mà $QH = \frac{1}{2}AA'$ nên $OA' = \frac{1}{4}AA'$. Suy ra: $OA' = \frac{1}{3}OA$ hay $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh tương tự, ta được $\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{1}{3}$.

***Bài 4.8*** Cho tam giác $ABC$ và một điểm $O$ nằm trong tam giác sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$. Vẽ $OH \perp AB, OK \perp AC$. Chứng minh rằng đường trung trực của $HK$ đi qua một điểm cố định.

- ***Lời giải***

Gọi $E, F, M$ lần lượt là trung điểm của $OB, OC, BC$. Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có:




$EH = EB = EO = \frac{1}{2}OB; FK = FC = FO = \frac{1}{2}OC.$

Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có tứ giác $OFME$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{OEM} = \widehat{OFM}$ (1)

Mặt khác, $\widehat{HEO} = 2\widehat{ABO}; \widehat{KFO} = 2\widehat{ACO}$

mà $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ nên $\widehat{HEO} = \widehat{KFO}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{HEM} = \widehat{MFK}$.

$\Delta HEM$ và $\Delta MFK$ có: $HE = MF\left(=\frac{1}{2}OB\right)$; $\widehat{HEM} = \widehat{MFK}$ (chứng minh trên); $EM = FK\left(=OC\right)$

Do đó $\Delta HEM = \Delta MFK$ (c.g.c) $\Rightarrow MH = MK$ (3)

Gọi $N$ là trung điểm của $OA$, ta có: $NH = NK\left(=\frac{1}{2}OA\right)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra *MN* là đường trung trực của *HK*.

Vậy đường trung trực của *HK* đi qua điểm cố định *M* là trung điểm của *BC*.

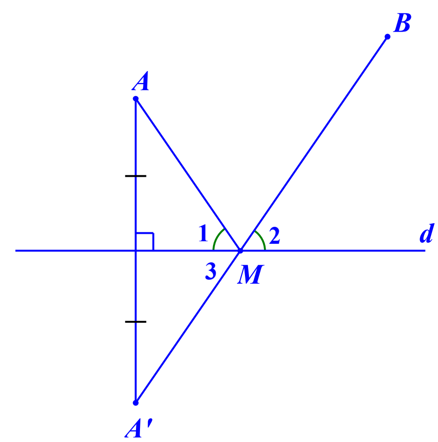
## IV. Vẽ thêm hình đối xứng

**Bài 4.1** Cho hai điểm *A* và *B* thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *d*. Tìm trên *d* một điểm *M* sao cho hai tia *MA, MB* tạo với đường thẳng *d* hai góc nhọn bằng nhau.

- ***Tìm cách giải***

Giả sử đã tìm được điểm $M \in d$ sao cho $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Vẽ điểm $A'$ đối xứng với *A* qua *d* thì $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$ suy ra $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$ (cùng bằng $\widehat{M}_1$). Do đó ba điểm *A', M, B* thẳng hàng.



- ***Trình bày lời giải***

- Vẽ điểm $A'$ đối xứng với *A* qua *d*;
- Vẽ đoạn thẳng $A'B$ cắt đường thẳng *d* tại *M*;
- Vẽ đoạn thẳng *MA* ta được $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Thật vậy, do $A'$ đối xứng với *A* qua *d* nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$.

Mặt khác, $\widehat{M}_2 = \widehat{M}_3$. (đối đỉnh) nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

**Bài 4.2** Cho góc *xOy* có số đo bằng $60^o$ và một điểm *A* ở trong góc đó sao cho *A* cách *Ox* là 2cm và cách *Oy* là lcm.

a) Tìm một điểm *B* trên *Ox* và một điểm *C* trên *Oy* sao cho chu vi tam giác *ABC* nhỏ nhất;

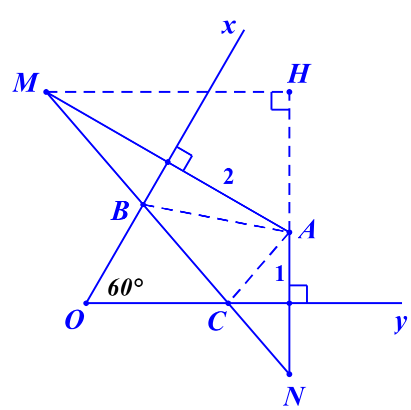
b) Tính độ dài nhỏ nhất của chu vi tam giác *ABC*.

- ***Lời giải***

a) Vẽ điểm *M* đối xứng *A* qua *Ox*.

Vẽ điểm *N* đối xứng *A* qua *Oy*. Hai điểm *M* và *N* là hai điểm cố định.

Đoạn thẳng *MN* cắt *Ox* tại *B*, cắt *Oy* tại *C*. Khi đó chu vi $\Delta ABC$ là nhỏ nhất.



Thật vậy, vì *M* đối xứng với *A* qua *Ox* nên *AB* = *MB*.

Vì *N* đối xứng với *A* qua *Oy* nên *CN* = *CA*.

Chu vi $\Delta ABC = AB + BC + CA = MB + BC + CN = MN$.

Do đó chu vi $\Delta AMN$ nhỏ nhất là bằng *MN*.

b) Vẽ $MH \perp AN$, ta có: $\widehat{MAH} = \widehat{O} = 60^o$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow \widehat{AMH} = 30^o$.

Xét $\Delta AMH$ vuông tại *H*, $\widehat{AMH} = 30^o$ nên $AH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}.4 = 2$ cm.

Xét $\Delta HMN$ vuông tại *H*, ta có:

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 = MH^2 + \left(HA + AN\right)^2 = MH^2 + HA^2 + AN^2 + 2HA.AN$$

$$= \left(MH^2 + HA^2\right) + AN^2 + 2HA.AN = AM^2 + AN^2 + 2HA.AN = 4^2 + 2^2 + 2.2.2 = 28 \Rightarrow MN = \sqrt{28} \approx 5,3$$

Vậy độ dài nhỏ nhất của chu vi $\Delta ABC$ là 5,3 cm.

# *CHỦ ĐỀ 8: TOÁN QUỸ TÍCH*

## *A. Kiến thức cần nhớ*

***1. Định nghĩa:*** *Quỹ tích của những điểm có tính chất T nào đó là tập hợp tất cả những điểm có tính chất T đó.*

***2. Các quỹ tích cơ bản***

- *Quỹ tích các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng đó. (1).*
- *Quỹ tích các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó. (2).*
- *Quỹ tích các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h. (3)*
- *Quỹ tích những điểm cách một điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn tâm O, bán kính R. (4).*

***3. Cách giải bài toán tìm quỹ tích các điểm có chung tính chất T nào đó***

*a) Phần thuận: Chứng minh rằng nếu điểm M có tính chất T thì điểm M thuộc một hình H nào đó.*

*b) Phần đảo: Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc hình H thì điểm M có tính chất T.*

*c) Kết luận: Quỹ tích của điểm M là hình H.*

***d) Một số lưu ý khi giải bài toán tìm quỹ tích.***

***a) Tìm hiểu đề bài***

- *Cần xét xem:*
- *Yếu tố nào cố định ( vì trong các quỹ tích cơ bản đều có nói đến yếu tố cố định như điểm, đoạn thẳng, góc,….).*
- *Yếu tố nào không đổi ( thường là khoảng cách không đổi, góc có số đo không đổi,…);*
- *Quan hệ nào không đổi ( ví dụ điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng, cách đều hai cạnh của một góc,…);*
- *Yếu tố nào chuyển động ( điểm nào có vị trí thay đổi, liên quan đến điểm phải tìm quỹ tích như thế nào?).*

***b) Dự đoán quỹ tích.***

- *Vẽ nháp vài vị trí của điểm cần tìm quỹ tích ( thường là vẽ ba vị trí).*
- *Nếu ba điểm này thẳng hàng thì ta dự đoán quỹ tích là đường thẳng ( đường thẳng song song, đường trung trực, tia phân giác,…).*
- *Nếu ba điểm không thẳng hàng thì quỹ tích có thể là đường tròn.*

***c) Giới hạn quỹ tích***

*Có nhiều bài toán quỹ tích cần tìm chỉ là một phần của hình H, phần còn lại không thỏa mãn điều kiện của bài toán, ta phải loại trừ phần này. Làm như vậy gọi là tìm giới hạn của quỹ tích.Việc tìm giới hạn của quỹ tích thường làm sau phần thuận, trước phần đảo.*

## *B. Bài tập áp dụng*

### *I. Quỹ tích là đường thẳng song song*

***Bài 2.1*** Cho tam giác ABC và D là một điểm di động trên cạnh BC. Vẽ DE//AB, DF//AC $\left(E \in AC, F \in AB\right)$. Gọi M là trung điểm của EF. Tìm quỹ tích của điểm M.

- ***Lời giải***

***a) Phần thuận***

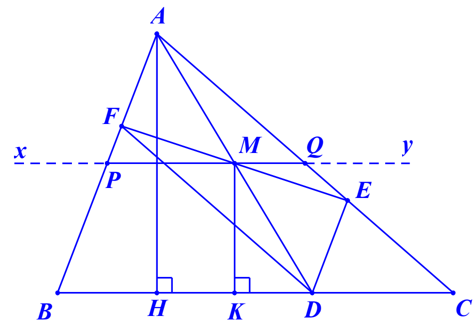
Tứ giác AEDF có DE//AF, DF//AE nên là hình bình hành.

Suy ra AD và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy trung điểm M của EF cũng là trung điểm của AD.

Vẽ $MK \perp BC,\ AH \perp BC$.

Do AH cố định nên AH có độ dài không đổi.

Xét $\Delta AHD$ có $MK$ là đường trung bình, $MK = \frac{1}{2}AH$ (không đổi). Điểm M cách đường thẳng $BC$ cố định một khoảng $\frac{1}{2}AH$ không đổi nên điểm $M$ nằm trên đường thẳng $xy//BC$ và cách $BC$ một khoảng $\frac{1}{2}AH$.




($xy$ nằm trên nửa mặt phẳng bờ $BC$ có chứa $A$).

***Giới hạn:*** Khi điểm D di động tới điểm B thì điểm M di động tới trung điểm P của AB. Khi điểm D di động tới điểm C thì điểm M di động tới trung điểm Q của AC. Vậy M chỉ nằm trên đường trung bình PQ của tam giác ABC.

***b) Phần đảo***

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng PQ. Vẽ tia AM cắt BC tại D. Vẽ DE // AB, DF // AC $\left(E \in AC,\ F \in AB\right)$. Ta phải chứng minh M là trung điểm của EF.

Thật vậy, xét tam giác ABC có PQ // BC và PA = PB nên MA = MD.

Tứ giác AEDF là hình bình hành nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Do M là trung điểm của AD nên M là trung điểm của EF.

***c) Kết luận***

Vậy quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của tam giác ABC.

***Nhận xét:*** Điểm M là trung điểm của EF. Đây là *tính chất ban đầu* của điểm M, chưa phải *tính chất cơ bản* theo các quỹ tích (1), (2), (3), (4). Dó đó chưa thể vận dụng để trả lời điểm M nằm trên hình nào.

Ta đã giải quyết vấn đề này bằng cách biến đổi tính chất ban đầu của điểm M lần lượt như sau

M là trung điểm của EF ( tính chất ban đầu)

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AD ( tính chất T’)

$\Rightarrow$ M cách đường thẳng BC cố định một khoảng không đổi bằng $\frac{AH}{2}$ ( đây mới là tính chất cơ bản của điểm M)

$\Rightarrow$ M nằm trên đường thẳng xy // BC và cách BC một khoảng $\frac{AH}{2}$.

Như vậy ta phải chuyển *tính chất ban đầu* của điểm M qua các tính chất trung gian đến *tính chất cơ bản* của điểm M rồi theo các quỹ tích cơ bản trả lời điểm M nằm trên hình nào.

***Bài 2.2*** Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định trên tia Ox sao cho OA = a. Điểm B di động trên tia Oy. Vẽ vào trong góc vuông này tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm quỹ tích của điểm C.

- ***Lời giải***

**a) Phần thuận**

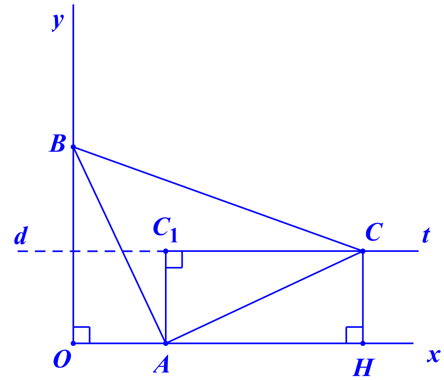
Vẽ $CH \perp Ox$ ta được $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$).

$\Delta HAC = \Delta OBA$ ( cạnh huyền, góc nhọn ) $\Rightarrow CH = OA = a$.

Điểm C cách đường thẳng O$x$ một khoảng bằng a nên C nằm trên đường thẳng $d//Ox$ và cách $Ox$ một khoảng a cho trước.

***Giới hạn:*** Nếu B trùng với O thì C trùng với $C_1$ ($C_1 \in d$ và $C_1A \perp OA$). Nếu B ra xa vô cùng thì điểm C cũng ra xa vô cùng.

Vậy điểm C nằm trên tia $C_1t$ của đường thẳng d




**b) Phần đảo**

Lấy điểm C bất kì trên tai $C_1t$. Vẽ đoạn thẳng AC.

Từ A vẽ $AB \perp AC\,(B \in Oy)$. Ta phải chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A.

Thật vậy, vẽ $CH \perp Ox$.

$\Delta HAC$ và $\Delta OBA$ có :

$\widehat{H} = \widehat{O} = 90°; HC = OA = a; \widehat{C_1} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$).

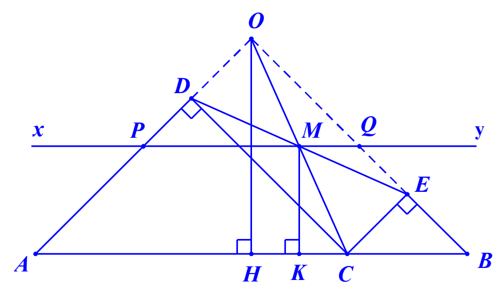
Dó đó $\Delta HAC = \Delta OBA$ (g.c.g) $AC = AB$.

Vậy $\Delta ABC$ vuông tại A.

**c) Kết luận:** Vậy quỹ tích của điểm C là tia $C_1t // Ox$ và cách O*x* một khoảng bằng a.

***Bài 2.3*** Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác DAC và EBC vuông cân tại D và E. Gọi M là trung điểm của DE. Tìm quỹ tích của điểm M khi điểm C di động giữa A và B.

- ***Lời giải***




**a) Phần thuận**

Gọi O là giao điểm của hai tia AD và BE.
Như vậy O là một điểm cố định.
Xét $\Delta AOB$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 45°$ nên $\widehat{AOB} = 90°$.
Tứ giác OECD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.
Hai đường chéo DE và OC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên trung điểm M của DE cũng là trung điểm của OC.

Vẽ $OH \perp AB, MK \perp AB$ thì MK là đường trung bình của $\Delta OHC$, suy ra $MK = \frac{1}{2}OH$.

Điểm M cách đường thẳng AB cho trước một khoảng là $\frac{OH}{2}$ nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy // AB$ và cách AB là $\frac{OH}{2}$.

***Giới hạn:*** Khi điểm C di động dần tới A thì điểm M dần tới trung điểm P của OA. Khi điểm C di động dần tới B thì điểm M dần tới trung điểm Q của OB. Vậy điểm M chỉ di động trên đường trung bình PQ của $\Delta OAB$ (trừ hai điểm P và Q).

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng PQ (M không trùng với P, Q). Vẽ tia OM cắt AB tại C. Vẽ $CD \perp OA, CE \perp OB$. Ta phải chứng minh các $\Delta DAC, \Delta EBC$ vuông cân và M là trung điểm của DE.

Thật vậy, xét $\Delta OAB$ có $OP = PA, PQ // AB$ nên $MO = MC$.

Xét $\Delta DAC$ vuông tại D có $\widehat{A} = 45°$ nên là tam giác vuông cân tại D.

Tương tự, $\Delta EBC$ vuông cân tại E.

Tứ giác OECD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác, M là trung điểm của OC nên M cũng là trung điểm của DE.

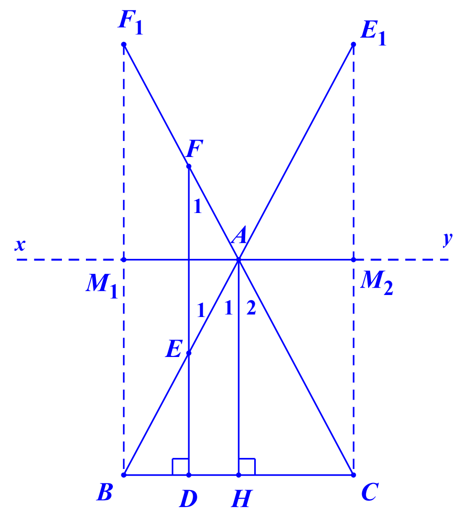
**c) Kết luận**

Vậy quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của tam giác OAB trừ hai điểm P và Q.

***Bài 2.4*** Cho tam giác ABC cân tại A. Một điểm D di động trên đáy BC. Đường thẳng vuông góc với BC vẽ từ D cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm của EF. Tìm quỹ tích của điểm M.

- ***Lời giải***

**a) Phần thuận**




Vẽ $AH \perp BC$ thì $AH // DE$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (tính chất của tam giác cân).

Ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$ (cặp góc so le trong); $\widehat{F_1} = \widehat{A_2}$ (cặp góc đồng vị).

Vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$. Suy ra $\Delta AEF$ cân.

Ta có: $ME = MF \Rightarrow AM \perp EF$.

Tứ giác AHDM có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow MD = AH$ (không đổi).

Điểm M cách đường thẳng BC cho trước một khoảng bằng AH nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy // BC$ và cách BC một khoảng bằng AH.

***Giới hạn:*** Khi điểm D trùng với B thì E trùng với B và điểm F trùng với $F_1$ ($F_1$ nằm trên tia CA và $AF_1 = AC$). Khi đó điểm M trùng với $M_1$ ($M_1$ là giao điểm của $xy$ với $BF_1$). Tương tự, khi điểm D trùng với C thì điểm M trùng với $M_2$. Vậy M chỉ nằm trên đoạn thẳng $M_1M_2$ của đường thẳng $xy$.

**b) Phần đảo**

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng $M_1M_2$. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt BC, AB, AC lần lượt tại D, E, F. Ta phải chứng minh M là trung điểm của EF.

Thật vậy, tứ giác AHDM có hai cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành. Hình bình hành này có $\widehat{H} = 90°$ nên là hình chữ nhật, suy ra $\widehat{M} = 90°$.

Ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$, $\widehat{F_1} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1}$. Do đó $\Delta AEF$ cân.

Vì AM là đường cao nên cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow ME = MF$.

**c) Kết luận**

Vậy quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng $M_1M_2$ của đường thẳng $xy // BC$ và cách BC một khoảng AH.

### *II. Quỹ tích là đường trung trực và đường thẳng vuông góc*

***Bài 3.1*** Cho góc vuông xOy, điểm A cố định trên tia Ox, điểm B di động trên tia Oy. Vẽ hình chữ nhật AOBC. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AB và OC. Tìm quỹ tích điểm M.

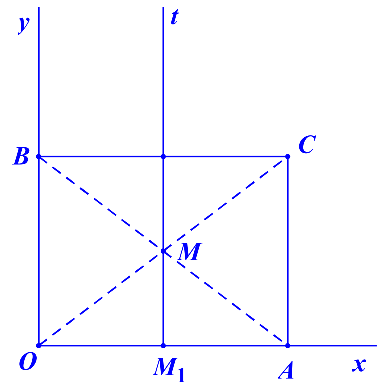
- ***Lời giải***

**a) *Phần thuận***

M là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật nên MO = MA.

Điểm M cách đều hai đầu của đoạn thẳng OA cố định nên M nằm trên đường trung trực của OA.

***Giới hạn:*** Khi điểm B tiến dần tới điểm O thì điểm C tiến dần đến điểm A. Khi đó điểm M tiến dần đến $M_1$ là trung điểm của OA. Khi điểm B ra xa vô tận thì điểm M cũng ra xa vô tận. Vậy M nằm trên tia $M_1t$ thuộc đường trung trực của OA, tia này nằm trong góc xOy, trừ điểm $M_1$.




***b) Phần đảo***

Lấy điểm M bất kì trên tia $M_1t$. Vẽ tia AM cắt tia Oy tại B. Vẽ hình chữ nhật AOBC. Ta phải chứng minh M là giao điểm của hai đường chéo.

Thật vậy, xét $\Delta AOB$ có $M_1t//OB$ ( vì cùng vuông góc với OA).

Mặt khác, $M_1O = M_1A$ nên MA= MB. Vậy M là trung điểm của AB

$\Rightarrow$ M cũng là trung điểm của OC (vì AOBC là hình chữ nhật).

***c) Kết luận***

Vậy quỹ tích của điểm M là tia $M_1t$ thuộc đường trung trực của OA, tia này nằm trong góc xOy, trừ điểm $M_1$.

***Bài 3.2*** Cho góc vuông xOy và một điểm A ở trong góc đó. Một góc vuông đỉnh A quay quanh A, một cạnh cắt Ox tại B, cạnh kia cắt Oy tại C. Gọi M là trung điểm của BC. Tìm quỹ tích của điểm M.

- ***Lời giải***

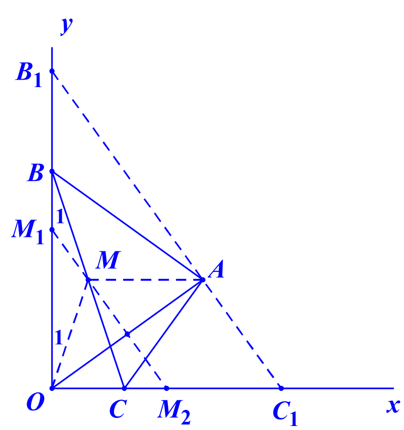
**a) Phần thuận**

Vẽ các đoạn thẳng MO, MA ta được:

$MO = MA = \frac{1}{2}BC$.

Điểm M cách đều hai đầu của đoạn thẳng OA cố định nên điểm M nằm trên đường trung trực của OA.

***Giới hạn:*** Khi điểm C di động tới điểm O thì điểm B di động tới $B_1$ ($AB_1 \perp AO$), khi đó điểm M di động tới $M_1$ là trung điểm của $OB_1$.




Khi B di động dần tới O thì điểm C di động tới $C_1$ ($AC_1 \perp AO$), khi đó điểm M di động tới $M_2$ là trung điểm của $OC_1$. Vậy điểm M chỉ di động trên đoạn thẳng $M_1M_2$.

**b) Phần đảo**

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng $M_1M_2$. Trên tia Ox lấy điểm B ($B \neq O$) sao cho $MB = MA$. Tia BM cắt Oy tại điểm C. Ta phải chứng minh $\Delta ABC$ vuông tại A và M là trung điểm của BC.

Thật vậy, ta có: $MB = MA$ mà $MO = MA$ (vì M nằm trên đường trung trực của OA) nên $MB = MO$. (1) $\Rightarrow \Delta MOB$ cân $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{O_1}$.

Xét $\Delta OBC$ vuông tại O có $\widehat{B_1}+\widehat{BCO}=90° \Rightarrow \widehat{O_1}+\widehat{BCO}=90°$

$\Rightarrow \widehat{MOC}=\widehat{MCO}$ (vì cùng phụ với $\widehat{O_1}$) $\Rightarrow \Delta MOC$ cân $\Rightarrow MO=MC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MB=MC$. Vậy M là trung điểm của BC.

Xét $\Delta ABC$ có $MA=MB=MC$ nên $MA=\frac{1}{2}BC$ $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

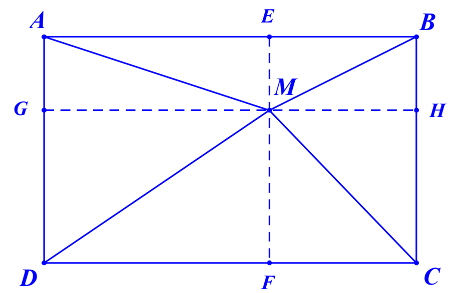
**c) Kết luận:** Quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng $M_1M_2$ thuộc đường trung trực của OA.

***Bài 3.3*** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là một điểm ở trong hình chữ nhật hoặc trên các cạnh của nó

*1)* Chứng minh rằng $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$;

*2)* Tìm quỹ tích của điểm M nếu $MA+MC=MB+MD$.

- ***Lời giải***

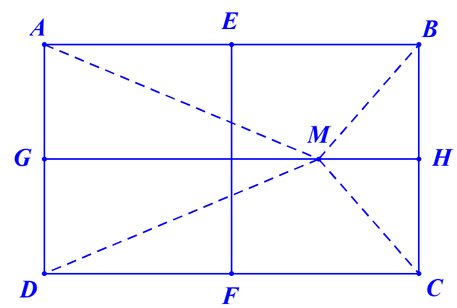



**1)** Chứng minh $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. (1)

Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với hai cặp cạnh đối của hình chữ nhật rồi dùng định lý Py-ta-go để chứng minh.

**2)** Tìm quỹ tích của điểm M

**a) Phần thuận**




Ta có: $MA+MC=MB+MD$ (2)

Suy ra $(MA+MC)^2=(MB+MD)^2$

$\Rightarrow MA^2+MC^2+2MA.MC=MB^2+MD^2+2MB.MD$

$\Rightarrow 2MA.MC=2MB.MD$ (3)

Từ (1) và (3) ta có:

$\Rightarrow MA^2+MC^2-2MA.MC=MB^2+MD^2-2MB.MD$

$\Rightarrow (MA-MC)^2=(MB-MD)^2$

Suy ra $MA-MC=MB-MD$ (4) hoặc $MA-MC=MD-MB$ (5)

- Từ (2) và (4) ta có: $\begin{cases} MA+MC=MB+MD \\ MA-MC=MB-MD \end{cases}$

Do đó: $2MA=2MB \Rightarrow MA=MB$.

Vậy điểm M nằm trên đường trung trực của AB.

- Từ (2) và (5) ta có; $\begin{cases} MA+MC=MB+MD \\ MA-MC=MD-MB \end{cases}$.

Do đó: $2MA=2MD \Rightarrow MA=MD$

Vậy điểm M nằm trên đường trung trực của AD.

***Giới hạn:*** Vì M nằm trong hình chữ nhật hoặc trên các cạnh của nó nên M nằm trên hai đoạn thẳng EF và GH nối trung điểm hai cặp cạnh đối diện của hình chữ nhật.

**b) Phần đảo**

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng GH.

Khi đó $MA=MD;\ MB=MC$.

Vậy $MA + MC = MB + MD$. Nếu $M \in EF$ ta cũng có kết quả trên.

**c) Kết luận:** Quỹ tích của điểm M là hai đoạn thẳng EF và GH nối các trung điểm của hai cặp cạnh đối diện của hình chữ nhật.

***Bài 3.4*** Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tia $Bx \perp BC$ và trên đó lấy một điểm D. Vẽ tam giác đều CDM (M và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ CD). Tìm quỹ tích của điểm M khi D di động trên tia Bx.

- ***Lời giải***

**a) Phần thuận**

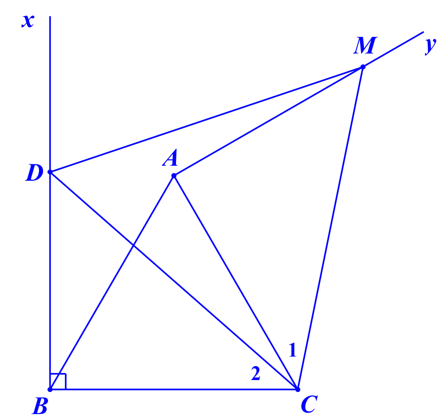
$\Delta MAC$ và $\Delta DBC$ có: $MC = DC$ ; $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (vì cùng cộng với ACD cho $60°$); $CA = CB$.

Vậy $\Delta MAC = \Delta DBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{DBC} = 90°$. Suy ra $MA \perp AC$ tại A.

Do đó điểm M nằm trên một đường thẳng đi qua A và vuông góc với AC.

***Giới hạn:*** Khi điểm D trùng với B thì điểm M trùng với A. Khi điểm D ra xa vô cùng thì điểm M cũng ra xa vô cùng. Vậy điểm M chỉ nằm trên tia Ay.




**b) Phần đảo**

Lấy điểm M bất kì trên tia Ay. Vẽ đoạn thẳng MC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho CD = CM. Ta phải chứng minh $\Delta MCD$ đều.

Thật vậy, $\Delta MAC$ và $\Delta DBC$ có: $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°; CM = CD; CA = CB$.

Do đó $\Delta MAC = \Delta DBC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{BCA} = 60°$.

$\Delta MCD$ cân có $\widehat{MCD} = 60°$ nên là tam giác đều.

**c) Kết luận.**

Quỹ tích của điểm M là tia $Ay \perp AC$ (tia Ay nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B).

### *III. Quỹ tích là tia phân giác*

***Bài 3.1*** Cho góc vuông xOy. Điểm A cố định trên tia Ox sao cho OA = 2cm. Điểm B di động trên tia Oy. Vẽ tam giác ABM vuông cân tại M trong đó M và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Tìm quỹ tích của điểm M.

- ***Lời giải***

***a) Phần thuận***

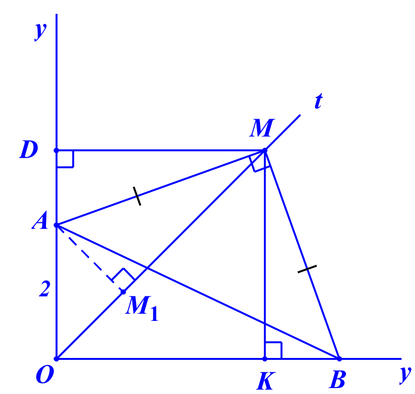
Vẽ $MH \perp Ox, MK \perp Oy$ ta được $\widehat{HMK} = 90°$.

Mặt khác, $\widehat{AMB} = 90°$ nên $\widehat{HMK} = \widehat{KMB}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

$\Delta HMA = \Delta KMB$ ( cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $MH = MK$.

Điểm M nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc đó nên điểm M nằm trên tia phân giác Ot của góc xOy.



***Giới hạn:*** Khi điểm B trùng với điểm O thì điểm M trùng với điểm $M_1$ ($M_1$ nằm trên tia Ot và $OM_1 = \sqrt{2}$ cm).

Khi điểm B ra xa vô cùng thì điểm M ra xa vô cùng. Vậy M nằm trên tia $M_1t$.

***b) Phần đảo***

Lấy điểm M bất kì trên tia $M_1t$. Từ M vẽ một đường thẳng vuông góc với MA cắt tia Oy tại B. Ta phải chứng minh $\Delta ABM$ vuông cân tại M.

Thật vậy, vẽ $MH \perp Ox$, $MK \perp Oy$ ta có $MH = MK$ và $\widehat{HMK} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{HMA} = \widehat{KMB}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

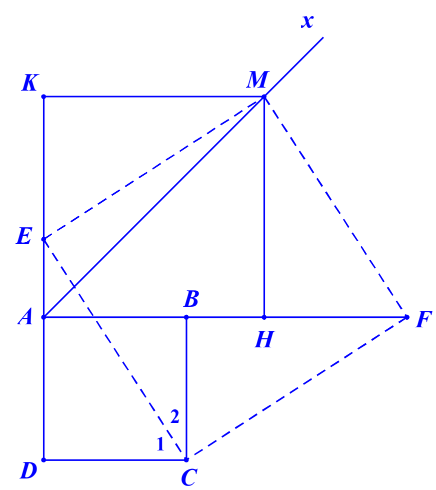
Do đó $\Delta HMA = \Delta KMB$ (g.c.g) $\Rightarrow MA = MB$.

$\Delta ABM$ vuông tại M có $MA = MB$ nên là tam giác vuông cân.

***c) Kết luận:*** Vậy quỹ tích của điểm M là tia $M_1t$ nằm trên tia phân giác của góc xOy.

***Bài 3.2*** Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E di động. Trên tia đối của tia BS lấy điểm F di động sao cho DE = BF. Vẽ hình bình hành ECFM. Hỏi điểm M di động trên đường nào?

- ***Lời giải***




Ta có: $\Delta DCE = \Delta BCF$ (c.g.c) $\Rightarrow CE = CF$ và $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Ta có: $\widehat{C_1} + \widehat{BCE} = 90° \Rightarrow \widehat{C_2} + \widehat{BCE} = 90°$.

Hình bình hành ECFM có $CE = CF$ và $\widehat{ECF} = 90°$ nên ECFM là hình vuông $\Rightarrow ME = MF$.

Vẽ $MH \perp AB$, $MK \perp AD$ ta được $\widehat{MHK} = 90°$.

Mặt khác, $\widehat{EMF} = 90°$ nên $\widehat{HMF} = \widehat{KME}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

Suy ra $\Delta HMF = \Delta KME$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow MH = MK$.

Điểm M nằm trong góc vuông EAB và cách đều hai cạnh của góc này nên M nằm trên tia phân giác Ax của góc EAB.

***Lưu ý:*** Bài toán không hỏi quỹ tích của điểm M, mà chỉ hỏi điểm M nằm trên đường nào do đó trong lời giải chỉ trình bày nội dung của phần thuận.

***Bài 3.3*** Cho ta giác ABC vuông tại A. Dọi D và E lần lượt là các điểm di động trên hai cạnh AB và BC sao cho BD = BE. Từ E vẽ một đường thẳng vuông góc với DE cắt AC tại F. Gọi M là trung điểm của DF. Tìm quỹ tích của điểm M.

- ***Lời giải***

***a) Phần thuận***

Xét $\Delta EDF$ vuông tại E có EM là đường trung tuyến nên $EM = \frac{1}{2}DF = DM$.

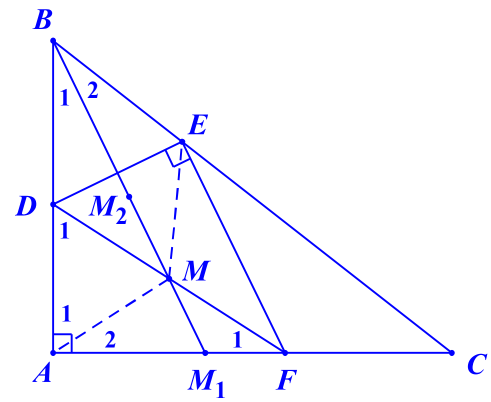
$\Delta BDM = \Delta BEM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Vậy điểm M nằm trên tia phân giác Bx của góc B.

***Giới hạn:***

- Khi điểm D trùng với A thì điểm M trùng với điểm $M_1$ ($M_1$ là giao điểm của tia Bx với AC)
- Khi điểm D trùng với B thì điểm M trùng với điểm $M_2$ ($M_2$ là trung điểm của $BM_1$).

**b) Phần đảo**




Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng $M_1M_2$.

Lấy điểm D trên cạnh AB sao cho MD = MA. (1)

Lấy điểm E trên cạnh BC sao cho BE = BD.

Tia DM cắt cạnh AC tại F.

Ta phải chứng minh M là trung điểm của DF và $EF \perp DE$

Thật vậy, $\Delta BMD = \Delta BME$ (c.g.c) $\Rightarrow MD = ME$. (2)

$\Delta MAD$ cân $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{A_1}$.

Ta có: $\widehat{D_1} + \widehat{F_1} = 90°$; $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90°$ mà $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{F_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow MF = MA$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $MD = ME = MF$.

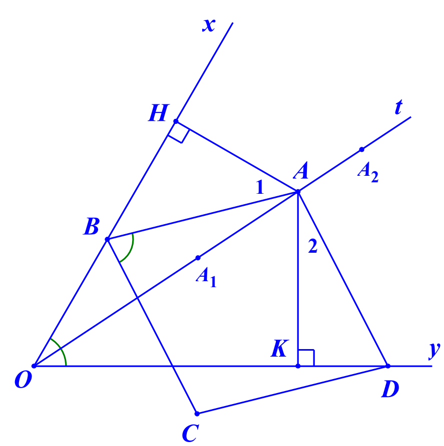
Vậy M là trung điểm của DF và $\Delta DEF$ vuông tại E $\Rightarrow EF \perp DE$.

**c) Kết luận:** Vậy quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng $M_1M_2$ của tia phân giác của góc B.

***Bài 3.4*** Cho góc xOy có số đo bằng $60°$. Một hình thoi ABCD có cạnh bằng a, $\widehat{B} = 60°$, đỉnh B di động trên tia Ox, đỉnh D di động trên tia Oy, hai điểm A và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BD. Tìm quỹ tích của điểm A.

- **Lời giải**

**a) Phần thuận**




Vẽ $AH \perp$ Ox, AK $\perp$ Oy. Khi đó

$\widehat{HAK} = 180° - 60° = 120°$

Mặt khác, $\widehat{BAD} = 180° - 60° = 120°$

Nên $\widehat{HAK} = \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

$\Delta HAB = \Delta KAD$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow AH = AK$

Điểm A nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc xOy nên A nằm trên tia phân giác $Ot$ của góc xOy.

***Giới hạn:*** Khi điểm B trùng với O hoặc khi D trùng với O thì điểm A trùng với $A_1$ ($A_1 \in Ot$ và cách O một khoảng $OA_1 = a$). Khi $AB \perp$ Ox thì AD $\perp$ Oy, điểm A trùng với $A_2$ ($A_2 \in Ot$ và cách O một khoảng $OA_2 = 2a$).

**b) Phần đảo**

Lấy điểm A bất kì trên đoạn thẳng $A_1A_2$. Vẽ $AH \perp$ Ox, AK $\perp$ Oy thì $AH = AK$ (tính chất tia phân giác). Trên đoạn thẳng HO lấy điểm B, trên tia Ky lấy điểm D sao cho AD = AB = a. Vẽ hình bình hành ABCD, ta phải chứng minh ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{B} = 60°$.

Thật vậy, hình bình hành ABCD có AB = AD = a nên đó là hình thoi cạnh a.

$\Delta HAB = \Delta KAD$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

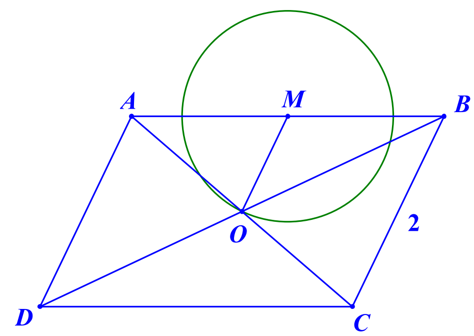
$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{HAK} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Do đó $\widehat{B} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

**c) Kết luận:** Vậy quỹ tích của điểm A là đoạn thẳng $A_1A_2$ thuộc tia phân giác Ot của góc xOy.

## *IV. Quỹ tích là đường tròn*

***Bài 4.1*** Cho hình bình hành ABCD, cạnh AB cố định, BC = 2cm. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo.

- ***Lời giải***




a) Phần thuận

Gọi M là trung điểm của AB.

Do AB cố định nên M là điểm cố định.

O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành

$\Rightarrow OA = OC$.

Vậy OM là đường trung bình của $\Delta ABC$

$\Rightarrow OM = \frac{1}{2}BC = 1cm.$

Điểm O cách điểm M cố định một khoảng 1 cm nên điểm O nằm trên đường tròn tâm M, bánh kính 1 cm.

***Giới hạn:*** Vì ba điểm O, A, B không thẳng hàng nên điểm O nằm trên đường tròn tâm M, bán kính 1cm trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng AB.

**b) Phần đảo**

Lấy điểm O bất kì trên đường tròn tâm M, bán kính 1cm thì OM = 1cm

Vẽ điểm C đối xứng với A qua O, xẽ điểm D đối xứng với B qua O. Ta phải chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành và BC = 2cm.

Thật vậy, tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

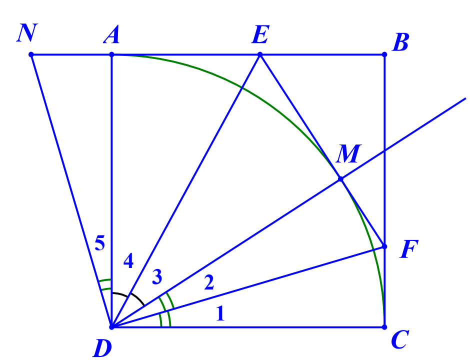
OM là đường trung bình của tam giác ABC nên $\Rightarrow OM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2.1 = 2cm.$

**c) Kết luận**

Quỹ tích của điểm O là đường tròn tâm M bán kính 1cm trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng AB.

***Bài 4.2*** Cho hình vuông ABCD cạnh 4cm. Tia Dx nằm giữa hai tia DA và DC. Vẽ tia phân giác của góc ADx cắt AB tại E, tia phân giác của góc CDx cắt BC tại F. Tia Dx cắt EF tại M. Hỏi khi tia Dx quay quanh D từ vị trí DA đến vị trí DC thì điểm M di động trên đường nào?

- ***Lời giải***




Ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}, \widehat{D_3} = \widehat{D_4}$

$\Rightarrow \widehat{D_2} + \widehat{D_3} = \widehat{D_1} + \widehat{D_4} = 90^\circ : 2 = 45^\circ$

Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = CF$.

$\Delta ADN = \Delta CDF$ (c.g.c)

$\Rightarrow DN = DF$ và $\widehat{D_5} = \widehat{D_1}$.

Do đó $\widehat{D_4} + \widehat{D_5} = \widehat{D_4} + \widehat{D_1} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{NDE} = \widehat{FDE} = 45^\circ$.

$\Delta NDE = \Delta FDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NED} = \widehat{FED}$

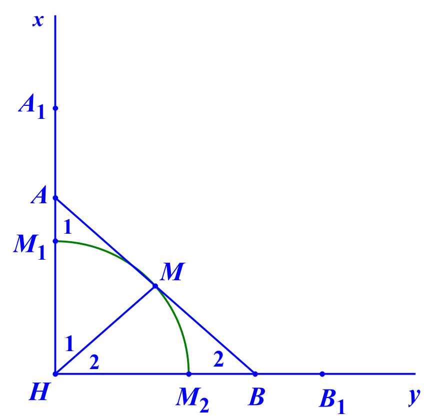
Do đó $\Delta DAE = \Delta DME$ (c.g.c) $\Rightarrow DM = DA = 4cm$.

Điểm M cách điểm D cho trước một khoảng không đổi là 4cm nên điểm M nằm trên đường tròn tâm D, bán kính 4cm.

***Bài 4.3*** Cho góc vuông xOy. Một đoạn thẳng AB = 2a không đổi, có $A \in Ox$ và $b \in Oy$. Tìm quỹ tích trung điểm M của AB.

- ***Lời giải***

**a) Phần thuận**




Vẽ đoạn thẳng OM ta có: $OM = \frac{1}{2}AB = a$ (tính chất trung tuyến của tam giác vuông).

Điểm M cách điểm O cho trước một khoảng a cho trước nên M nằm trên đường tròn tâm O, bán kính a.

***Giới hạn:***

- Khi điểm B di động tới O thì A tới điểm $A_1 \in Ox$ và $OA_1 = 2a$. Khi đó điểm M di động tới $M_1$ là trung điểm của $OA_1$.
- Khi điểm A di động tới O thì B tới điểm $B_1 \in Oy$ và $OB_1 = 2a$. Khi đó điểm M di động tới $M_2$ là trung điểm của $OB_1$.

Vậy M nằm trên cung $M_1M_2$ của đường tròn tâm O, bán kính a.

**b) Phần đảo**

Lấy điểm M bất kì trên cung $M_1M_2$.

Trên tia Ox lấy điểm A sao cho MA = MO (1)

Tia AM cắt tia Oy tại B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB và AB = 2a.

Thật vậy, vì MA = MO nên $\Delta MOA$ nên $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{O_1}$.

Xét $\Delta AOB$ vuông tại O có $\widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 90° \Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{B_2} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{B_2}$ (cùng phụ với $\widehat{O_1}$)

Do đó $\Delta MOB$ cân $MB = MO$. (2)

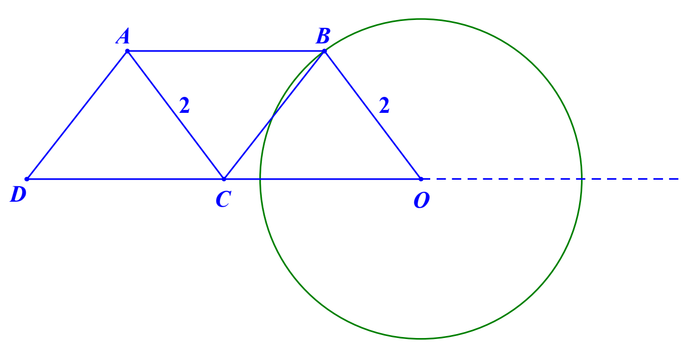
Từ (1), và (2) suy ra: $MA = MB = MO = a$. Do đó: $AB = 2a$

**c) Kết luận:** Quỹ tích của điểm M là cung $M_1M_2$ của đường tròn tâm O, bán kính a

***Bài 4.4*** Cho hình bình hành ABCD cạnh CD cố định, AC = 2cm. Tìm quỹ tích của đỉnh B.

- ***Lời giải***

**a) Phần thuận**




Gọi O là điểm đối xứng với D qua C thì O là một điểm cố định.

Tứ giác ABOC có AB // OC; AB = OC (vì cùng bằng CD) nên ABOC là hình bình hành $\Rightarrow OB = AC = 2cm$.

Điểm B cách điểm O cố định một khoảng 2cm nên điểm B nằm trên đường tròn tâm O bán kính 2cm.

***Giới hạn:*** Vì B, C, D không thẳng hàng nên B nằm trên đường tròn tâm O, bán kính 2 cm trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng CD.

**b) Phần đảo**

Lấy điểm B bất kì trên đường tròn tâm O bán kính 2cm (trừ các giao điểm của đường tròn này với đường thẳng CD). Suy ra OB = 2cm. Vẽ hình bình hành ABCD. Ta phải chứng minh hình bình hành có AC = 2cm.

Thật vậy, $AB//CD$ và $AB = CD \Rightarrow AB//CO$ và $AB = CO$.

Do đó tứ giác ABOC là hình bình hành, suy ra AC = OB = 2cm.

**c) Kết luận:** Vậy quỹ tích của điểm B là đường tròn tâm O bán kính 2cm.