



**CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA**

**SBÀI 1.**

**CĂN BẬC HAI**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**I. Căn bậc hai số học.**

**1. Định nghĩa:** Với số dương  $a$ , số  $\sqrt{a}$  được gọi là *căn bậc hai số học* của  $a$ .

**2. Tính chất:**

✦ **Tính chất 1.** Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

✦ **Tính chất 2.** Với  $a \geq 0$ , ta có:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

**Nhận xét.** Đây gọi là phương pháp bình phương hai vế.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình:  $2\sqrt{3x} = 12$ .

**Lời giải**

ĐKXD:  $x \geq 0$ .

Ta có:  $2\sqrt{3x} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = 6 \Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12$  (thỏa mãn điều kiện).

**Ví dụ 2.** Tính tổng các giá trị của  $x$  thỏa mãn đẳng thức  $\sqrt{x^2 + 25} = 13$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sqrt{x^2 + 25} = 13 \Leftrightarrow x^2 + 25 = 169$

$$\Leftrightarrow x^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Leftrightarrow x = \pm 12.$$

Vậy tổng các giá trị của  $x$  thỏa mãn đẳng thức đã cho là  $(-12) + 12 = 0$ .

✦ **Tính chất 3.** Với  $a \geq 0$ :

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{a}.$$

**Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

a).  $5x^2 = 80$

b).  $3x^2 = 0,75$ .

**Lời giải**

a).  $5x^2 = 80$

b).  $3x^2 = 0,75$ .

Ta có  $5x^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 = 16$ .

Ta có  $3x^2 = 0,75 \Leftrightarrow x^2 = 0,25$ .

Do đó  $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ .

Do đó  $x = \pm\sqrt{0,25} = \pm 0,5$ .

✦ **Tính chất 4.** Với

$$\sqrt{x} < a \text{ khi } 0 \leq x < a^2.$$

**Ví dụ 4.** Tìm số  $x$  không âm, biết

a).  $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10$ .

b).  $\sqrt{3x} \leq 6$

**Lời giải**

a).  $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10.$

Với  $x \geq 0$  ta có :  $\frac{1}{2}\sqrt{5x} < 10 \Leftrightarrow \sqrt{5x} < 20$

$\Leftrightarrow 5x < 400 \Leftrightarrow x < 80.$

Vậy  $0 \leq x < 80.$

b).  $\sqrt{3x} \leq 6$

Với  $x \geq 0$  ta có :  $\sqrt{3x} \leq 6 \Leftrightarrow 3x \leq 36$

$\Leftrightarrow x \leq 12.$

Vậy  $0 \leq x \leq 12.$

## II. Căn bậc hai.

**1. Định nghĩa:** Căn bậc hai của số không âm  $a$  là số  $x$  sao cho  $x^2 = a.$

### 2. Tính chất:

✦ Số dương  $a$  có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau là số dương kí hiệu là  $\sqrt{a}$  và số âm kí hiệu là  $-\sqrt{a}.$

**Ví dụ 5.** Tìm căn bậc hai số học rồi tìm căn bậc hai của:

a). 121.

b).  $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{121} = 11$  vì  $11 \geq 0$  và  $11^2 = 121.$

Do đó số 121 có hai căn bậc hai là 11 và  $-11.$

b) Ta có  $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$  vì  $\frac{2}{5} \geq 0$  và  $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2.$

Do đó số  $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$  có hai căn bậc hai là  $\frac{2}{5}$  và  $-\frac{2}{5}.$

## III. So sánh các căn bậc hai số học

✦ Với  $a \geq 0; b \geq 0.$  Ta có

$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$

**Ví dụ 6.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh 8 và  $\sqrt{65}.$

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có  $8 = \sqrt{64}.$

Vì  $\sqrt{64} < \sqrt{65}$  nên  $8 < \sqrt{65}.$

**Cách 2:** Vì  $8^2 = 64; (\sqrt{65})^2 = 65$

Nên  $8^2 < (\sqrt{65})^2$ , suy ra  $8 < \sqrt{65}.$

Cách giải này dựa vào tính chất: Nếu  $a > 0, b > 0$  và  $a^2 < b^2$  thì  $a < b$ .

Như vậy, để so sánh hai số dương ta có thể so sánh các bình phương của chúng.

**Ví dụ 7.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh  $\sqrt{15}-1$  và  $\sqrt{10}$ .

**Lời giải**

Ta có  $15 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{15} < \sqrt{16} \Leftrightarrow \sqrt{15}-1 < \sqrt{16}-1 = 4-1 = 3$ .

$$\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$$

Vậy  $\sqrt{15}-1 < \sqrt{10}$ .

**Ví dụ 8.** Với  $a < 0$  thì số nào lớn hơn trong hai số  $\sqrt{-a}$  và  $\sqrt{-2a}$  ?

**Lời giải**

Ta có  $-1 > -2$  nên  $-a < -2a$  (vì  $a < 0$ ).

Do đó  $\sqrt{-a} < \sqrt{-2a}$ .

## B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA

### DẠNG 1. TÌM CĂN BẬC HAI SỐ HỌC CỦA MỘT SỐ

#### 1. Phương pháp.

➤ Căn bậc hai số học của số dương  $a$  là  $\sqrt{a}$  ( giá trị dương của căn bậc hai).

➤ Với  $a \geq 0$ , ta có:

☞ Nếu  $x = \sqrt{a}$  thì  $x \geq 0$  và  $x^2 = a$ .

☞ Nếu  $x \geq 0$  và  $x^2 = a$  thì  $x = \sqrt{a}$ .

#### ★★Nhận xét.

➤ Nếu  $a > 0$  thì các **căn bậc hai** của  $a$  là  $\pm\sqrt{a}$ ; **căn bậc hai số học** của  $a$  là  $\sqrt{a}$ .

➤ Nếu  $a = 0$  thì căn bậc hai của  $a$  và căn bậc hai số học của  $a$  cùng bằng 0.

➤ Nếu  $a < 0$  thì  $a$  không có căn bậc hai và do đó không có căn bậc hai số học.

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 1.** Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng: 64;81;100;196.

**Lời giải**

Ta có:  $8^2 = 64$  nên 8 là căn bậc hai số học của 64.

Từ đó suy ra căn bậc hai của 64 là 8 và -8.

Tương tự căn bậc hai của 64;81;100;196 lần lượt là : 8;9;10;14

**Bài tập 2.** Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

a)  $x^2 = 4,5$ .

b)  $x^2 = 5$ .

c)  $x^2 = 7,5$ .

d)  $x^2 = 9,12$ .

**Lời giải**

a) Nghiệm của phương trình  $x^2 = a$  ( với  $a \geq 0$  ) là các căn bậc hai của  $a$ .

Phương trình  $x^2 = 4,5$  có hai nghiệm là  $x_1 = \sqrt{4,5}$  và  $x_2 = -\sqrt{4,5}$ .

Dùng máy tính ta tìm được  $x_1 \approx 2,121$  và  $x_2 \approx -2,121$ .

b)  $x^2 = 5$  có hai nghiệm  $x = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2,236$ .

c)  $x^2 = 7,5$  có hai nghiệm  $x = \pm\sqrt{7,5} \approx \pm 2,739$ .

d)  $x^2 = 9,12$  có hai nghiệm  $x = \pm\sqrt{9,12} \approx \pm 3,020$ .

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 1.** Tìm căn bậc hai số học của các số sau

- a).12;                      b). 121;                      c).  $\frac{4}{9}$ ;                      d). 0,09.                      e).  $1\frac{40}{81}$   
 f).0;                      g). 64;                      h). -81;                      n).  $\frac{9}{16}$ ;                      m). 0,04.

**Lời giải**

- a) 12 có căn bậc hai số học là:  $\sqrt{12}$                       b). 121 có căn bậc hai số học là:  $\sqrt{121}$   
 c).  $\frac{4}{9}$  có căn bậc hai số học là:  $\sqrt{\frac{4}{9}}$                       d). 0,09 có căn bậc hai số học là: 0,3.  
 e).  $1\frac{40}{81}$  có căn bậc hai số học là:  $\frac{11}{9}$                       f). 0 có căn bậc hai số học là 0  
 g). 64 có căn bậc hai số học là: 8.                      h). -81 không có căn bậc hai số học.  
 k).  $\frac{9}{16}$  có căn bậc hai số học là:  $\frac{3}{4}$                       m). 0,04 có căn bậc hai số học là: 0,02 .

**DẠNG 2. TÌM SỐ CÓ CĂN BẬC HAI SỐ HỌC LÀ MỘT SỐ CHO TRƯỚC**

**1. Phương pháp.**

➤ Với số thực  $a \geq 0$  cho trước ta có  $a^2$  chính là số có căn bậc hai số học bằng  $a$ .

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 3.** Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

- a). 12;                      b). -0,36;                      c).  $2\sqrt{\frac{2}{7}}$ ;                      d).  $\frac{0,2}{\sqrt{3}}$ ;                      e).13;  
 f).  $-\frac{3}{4}$ ;                      g).  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$ ;                      h).  $\frac{0,12}{\sqrt{0,3}}$ ;                      n). -0,49;                      m).  $\frac{-1}{7}$ ;  
 l).  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}$ ;                      r).  $\frac{0,12}{\sqrt{0,7}}$ .

**Lời giải**

- a). Số có căn bậc hai số học bằng 12 là 144.  
 b). Vì  $-0,36 < 0$  nên không tồn tại số nào có căn bậc hai số học bằng  $-0,36$ ;  
 c). Tương tự, số có căn bậc hai số học bằng  $2\sqrt{\frac{2}{7}}$  là  $\frac{8}{7}$ .  
 d). Số có căn bậc hai số học bằng  $\frac{0,2}{\sqrt{3}}$  và  $\frac{0,04}{3}$ .  
 e). Số có căn bậc hai số học bằng 13 là 169.  
 f). Vì  $-\frac{3}{4} < 0$  nên không tồn tại  
 g). Số có căn bậc hai số học bằng  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$  là  $\frac{1}{10}$ .  
 h). Số có căn bậc hai số học bằng  $\frac{0,12}{\sqrt{0,3}}$  là  $\frac{0,144}{3}$   
 n). Vì  $-0,49 < 0$  nên không tồn tại số nào có căn bậc hai số học là  $-0,49$  .  
 m). Không tồn tại số nào có căn bậc hai số học bằng  $\frac{-1}{7}$

l). Số có căn bậc hai số học bằng  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}$  là  $\frac{1}{10}$

r). Số có căn bậc hai số học bằng  $\frac{0,12}{\sqrt{0,7}}$  là  $\frac{0,12}{7}$

**DẠNG 3. SO SÁNH HAI SỐ**

**1. Phương pháp.**

✦ Áp dụng: Với  $a \geq 0, b \geq 0$  ta có:  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 4.** So sánh:

a). 3 và  $\sqrt{5}$

b). 8 và  $\sqrt{63}$

c). 9 và  $\sqrt{79}$

**Lời giải**

a) Ta có  $3 = \sqrt{9}$  và  $9 > 5 \Rightarrow \sqrt{9} > \sqrt{5}$ . Vậy  $3 > \sqrt{5}$ .

b) Ta có  $8 = \sqrt{64}$  và  $64 > 63 \Rightarrow \sqrt{64} > \sqrt{63}$ . Vậy  $8 > \sqrt{63}$ .

c) Ta có  $9 = \sqrt{81}$  và  $81 > 79 \Rightarrow \sqrt{81} > \sqrt{79}$ . Vậy  $9 > \sqrt{79}$ .

**Bài tập 5.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh:

a).  $\sqrt{26} + 3$  và  $\sqrt{63}$ ;

b).  $\frac{1}{2}$  và  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

**Lời giải**

a).  $\sqrt{26} + 3 > \sqrt{63}$

b).  $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{1}{2}$ .

**Bài tập 6.** So sánh các số sau

a). 5 và  $\sqrt{17} + 1$ .

b). 3 và  $\sqrt{15} - 1$

c).  $1 - \sqrt{3}$  và  $\sqrt{0,2}$

**Lời giải**

a). 5 và  $\sqrt{17} + 1$ .

Ta có  $5 = 4 + 1 = \sqrt{16} + 1$ .

Mà  $\sqrt{16} < \sqrt{17}$  (Do  $16 < 17$ ) nên  $5 < \sqrt{17} + 1$

b). Tương tự câu b,  $3 = 4 - 1 = \sqrt{16} - 1$ .

Vì  $\sqrt{16} > \sqrt{15}$  (vì  $16 > 15$ ) nên  $3 > \sqrt{15} - 1$

c). Ta có  $1 - \sqrt{3} = \sqrt{1} - \sqrt{3} < 0$  mà  $0 < \sqrt{0,2}$  nên  $1 - \sqrt{3} < \sqrt{0,2}$

**Bài tập 7.** So sánh các số sau

a).  $\sqrt{7} + \sqrt{15}$  và 7

b).  $3\sqrt{26}$  và 15

c).  $\sqrt{2} + \sqrt{11}$  và  $\sqrt{3} + 5$

d). -30 và  $-5\sqrt{35}$

e).  $\frac{30 - 2\sqrt{45}}{4}$  và  $\sqrt{17}$

f).  $\sqrt{15} + \sqrt{24}$  và  $\sqrt{101} - 1$

g).  $\frac{17 - 2\sqrt{15}}{6}$  và  $\sqrt{2}$

**Lời giải**

a). Ta có:  $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3; \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4 \Rightarrow 7 + \sqrt{15} < 3 + 4 = 7$

b). Ta có:  $\sqrt{26} > \sqrt{25} = 5 \Rightarrow 3.\sqrt{26} > 3.5 \Rightarrow 3.\sqrt{26} > 15$

c). Ta có:  $\sqrt{2} < \sqrt{3}; \sqrt{11} < \sqrt{25} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 5$

d). Ta có:  $\sqrt{35} < \sqrt{36} = 6 \Leftrightarrow 5.\sqrt{35} < 5.\sqrt{36} = 30 \Leftrightarrow -5.\sqrt{35} > -30$

e). Ta có:  $\frac{30 - 2\sqrt{45}}{4} < \frac{30 - 2\sqrt{49}}{4} = \frac{30 - 2.7}{4} = 4 = \sqrt{16} < \sqrt{17}$

f). Ta có  $\sqrt{15} + \sqrt{24} < \sqrt{16} + \sqrt{25} = 4 + 5 = 9$ ;  $\sqrt{101} - 1 > \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \Rightarrow \sqrt{101} - 1 > \sqrt{15} + \sqrt{24}$   
 Vậy  $\sqrt{101} - 1 > \sqrt{15} + \sqrt{24}$

g). Ta có  $\frac{17 - 2\sqrt{15}}{6} > \frac{17 - 2\sqrt{16}}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{17 - 2\sqrt{15}}{6}\right)^2 > 2,25 > (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{17 - 2\sqrt{15}}{6} > \sqrt{2}$

Vậy  $\frac{17 - 2\sqrt{15}}{6} > \sqrt{2}$ .

**Bài tập 8.** So sánh các số sau

a).  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  và  $\sqrt{10}$

b).  $\sqrt{5} + 2$  và  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

c).  $-\sqrt{3} - 2$  và  $-\sqrt{2} - \sqrt{6}$

d).  $-8$  và  $-\sqrt{15} - \sqrt{7}$

e).  $3 - 2\sqrt{2}$  và  $2$

f).  $\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{12}}$  và  $\frac{7}{4\sqrt{3}}$

**Lời giải**

Đưa về so sánh  $A^2$  và  $B^2$

a). Xét  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} = 5 + \sqrt{24}$ ;  $(\sqrt{10})^2 = 10 = 5 + \sqrt{25}$

Vì  $\sqrt{24} < \sqrt{25} \Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < (\sqrt{10})^2 \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$

b). Xét  $(\sqrt{5} + 2)^2 = 9 + 4\sqrt{5} = 9 + \sqrt{80}$ ;  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 2\sqrt{12} = 8 + \sqrt{48}$

Vì  $9 + \sqrt{80} > 8 + \sqrt{48} \Leftrightarrow (\sqrt{5} + 2)^2 > (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 \Leftrightarrow \sqrt{5} + 2 > \sqrt{2} + \sqrt{6}$

c). Xét  $(\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48}$ ;  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 2\sqrt{12} = 8 + \sqrt{48} \Rightarrow (\sqrt{3} + 2)^2 < (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} + 2 < \sqrt{2} + \sqrt{6} \Leftrightarrow -3 - \sqrt{2} > -\sqrt{2} - \sqrt{6}$

d). Xét  $(\sqrt{15} + \sqrt{7})^2 = 22 + 2\sqrt{105}$ ;  $8^2 = 22 + 2\sqrt{441}$

$\Rightarrow (\sqrt{15} + \sqrt{7})^2 < 8^2$

$\Rightarrow \sqrt{15} + \sqrt{7} < 8 \Leftrightarrow -\sqrt{15} - \sqrt{7} > -8$

e). Xét  $(3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2} = 17 - \sqrt{288}$  và  $2^2 = 17 - \sqrt{169}$

Vì  $17 - \sqrt{288} < 17 - \sqrt{169} \Leftrightarrow (3 - 2\sqrt{2})^2 < 2^2 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} < 2$

f). Ta có  $\left(\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{12}}\right)^2 = \frac{49}{108}$ ;  $\left(\frac{7}{4\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{49}{48}$

Vì  $\frac{49}{48} > \frac{49}{108} \Rightarrow \left(\frac{7}{4\sqrt{3}}\right)^2 > \left(\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{12}}\right)^2 \Rightarrow \frac{7}{4\sqrt{3}} > \frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{12}}$

**Bài tập 9.** So sánh các số sau

a).  $\sqrt{30} - \sqrt{29}$  và  $\sqrt{29} - \sqrt{28}$

b).  $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1$  và  $\sqrt{48}$

c).  $\sqrt{21} + \sqrt{2}$  và  $\sqrt{14} + \sqrt{3}$

d).  $\sqrt{17} + \sqrt{6}$  và  $\sqrt{21} - \sqrt{2}$

**Lời giải**

a). Ta có  $(\sqrt{30} - \sqrt{29})(\sqrt{30} + \sqrt{29}) = 1$ ;  $(\sqrt{29} - \sqrt{28})(\sqrt{29} + \sqrt{28}) = 1$

$\sqrt{30} + \sqrt{29} > \sqrt{29} + \sqrt{28} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{30} + \sqrt{29}} < \frac{1}{\sqrt{29} + \sqrt{28}} \Rightarrow \sqrt{30} - \sqrt{29} < \sqrt{29} - \sqrt{28}$

b).  $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1 = 3\sqrt{3} + \sqrt{6} + 1$  và  $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3}$

Mà  $\sqrt{6}+1 > \sqrt{3}+1 > \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{27} + \sqrt{6}+1 > \sqrt{48}$ .

c). Ta có  $(\sqrt{21} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{21})^2 + 2\sqrt{21}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 23 + 2\sqrt{42}$

$(\sqrt{14} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{14})^2 + 2\sqrt{14}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 14 + 2\sqrt{42} + 3 = 17 + 2\sqrt{42}$

Vì  $23 > 17 \Rightarrow 23 + 2\sqrt{42} > 17 + 2\sqrt{42} \Rightarrow (\sqrt{21} + \sqrt{2})^2 > (\sqrt{14} + \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{21} + \sqrt{2} > \sqrt{14} + \sqrt{3}$

Vậy  $\sqrt{21} + \sqrt{2} > \sqrt{14} + \sqrt{3}$ .

d). Ta có  $(\sqrt{17} + \sqrt{6})^2 = 23 + 2\sqrt{102}; (\sqrt{21} - \sqrt{2})^2 = 23 - 2\sqrt{42}$

Vì  $23 + 2\sqrt{102} > 23 - 2\sqrt{42} \Rightarrow (\sqrt{17} + \sqrt{6})^2 > (\sqrt{21} - \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{17} + \sqrt{6} > \sqrt{21} - \sqrt{2}$

Vậy  $\sqrt{17} + \sqrt{6} > \sqrt{21} - \sqrt{2}$ .

**Nhận xét:** Khi so sánh  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  và  $\sqrt{c} + \sqrt{d}$  mà  $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{d})^2$  thì ta sẽ đi so sánh bình phương của hai số, rồi từ đó suy ra kết quả.

**Bài tập 10.** Sắp xếp theo thứ tự tăng dần  $23; 2\sqrt{7}; 5\sqrt{6}; -8\sqrt{2}; -\sqrt{127}$

**Lời giải**

Ta có  $-8\sqrt{2} = -\sqrt{8^2 \cdot 2} = -\sqrt{128} < -\sqrt{127} < 0$

Ta so sánh các số dương  $23; 2\sqrt{7}; 5\sqrt{6}$  như sau:

$23 = \sqrt{23^2} = \sqrt{529}; 2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28}; 5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6} = \sqrt{150}$

Do  $28 < 150 < 529 \Rightarrow \sqrt{28} < \sqrt{150} < \sqrt{529} \Rightarrow 2\sqrt{7} < 5\sqrt{6} < 23$

Vậy  $-\sqrt{128} < -\sqrt{127} < 2\sqrt{7} < 5\sqrt{6} < 23$ .

**Bài tập 11.** So sánh hai số sau  $\sqrt{29} - \sqrt{28}$  và  $\sqrt{28} - \sqrt{27}$

**Lời giải**

Xét  $(\sqrt{29} - \sqrt{28})(\sqrt{29} + \sqrt{28}) = 29 - 28 = 1 \Rightarrow \sqrt{29} - \sqrt{28} = \frac{1}{\sqrt{29} + \sqrt{28}}$

$(\sqrt{28} - \sqrt{27})(\sqrt{28} + \sqrt{27}) = 28 - 27 = 1 \Rightarrow \sqrt{28} - \sqrt{27} = \frac{1}{\sqrt{28} + \sqrt{27}}$

Vì  $\sqrt{27} < \sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{28} + \sqrt{27} < \sqrt{29} + \sqrt{28} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{28} + \sqrt{27}} > \frac{1}{\sqrt{29} + \sqrt{28}}$

$\Rightarrow \sqrt{28} - \sqrt{27} > \sqrt{29} - \sqrt{28}$

Vậy  $\sqrt{28} - \sqrt{27} > \sqrt{29} - \sqrt{28}$

**Nhận xét:** Để so sánh hai số dạng  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  và  $\sqrt{b} - \sqrt{d}$  ( $a, b, c, d$  là các số dương) mà  $a - b = b - d$  ta làm như sau:  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b;$

$(\sqrt{b} - \sqrt{d})(\sqrt{b} + \sqrt{d}) = b - d$

Sau đó từ việc so sánh hai số  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  và  $\sqrt{b} + \sqrt{d}$  ta sẽ so sánh được hai số  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  và  $\sqrt{b} - \sqrt{d}$

**Bài tập 12.** So sánh

a).  $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}$  và 2

b).  $x = \sqrt{13} + \sqrt{15}; y = \sqrt{11} + \sqrt{17}$

c).  $x = \sqrt{23} - \sqrt{21}; y = \sqrt{19} - \sqrt{17}$

d).  $x = \sqrt{12} + \sqrt{5}; y = \sqrt{20} + \sqrt{3}$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{4}}}} = \dots = 2$

b). Ta có:  $(13+15 = 11+17); x, y > 0$

Khi đó  $\begin{cases} x^2 = 28 + 2\sqrt{13.15}; \\ y^2 = 28 + 2\sqrt{11.17} \end{cases} \Rightarrow x^2 > y^2 \Rightarrow x > y$

c). Ta có:  $(23 - 21 = 19 - 17);$

$$x = \frac{23 - 21}{\sqrt{23} + \sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{23} + \sqrt{21}}; y = \frac{2}{\sqrt{19} + \sqrt{17}}$$

Vì  $\sqrt{23} + \sqrt{21} > \sqrt{19} + \sqrt{17} \Rightarrow x < y$

**Chú ý:**  $a, b \geq 0 \Rightarrow a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

d). Ta có  $12.5 = 20.3;$

$$\begin{cases} x^2 = 17 + 2\sqrt{60} \\ y^2 = 23 + 2\sqrt{60} \end{cases}; \Rightarrow x^2 < y^2 (x, y > 0) \Rightarrow x < y$$

**Bài tập 13.** So sánh:

a).  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$  và 10.

b).  $\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots+\sqrt{4}}}}$  và 3.

**Lời giải**

a).  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$  và 10.

Đặt  $a = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$

Ta có  $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{100}} \Rightarrow a > 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 10$

b).  $\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots+\sqrt{4}}}}$  và 3.

Ta có  $\sqrt{4} < 3 \Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4}} < \sqrt{4+3} < 3$

$\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4}}} < \sqrt{4+3} < 3$

$\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots+\sqrt{4}}}} < \sqrt{4+3} < 3$

**DẠNG 3. TÌM x THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC**

**1. Phương pháp.**

➤ Áp dụng:  $\sqrt{x} = a (a \geq 0) \Leftrightarrow x = a^2$

➤ Với  $a, b \geq 0: \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b.$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 14.** Tìm số  $x$  không âm, biết:

a)  $\sqrt{x} = 15;$

b)  $2\sqrt{x} = 14;$

c)  $\sqrt{x} < \sqrt{2};$

d)  $\sqrt{2x} < 4.$

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{15^2} \Leftrightarrow x = 225.$  Vậy  $x = 225.$

b) Ta có  $2\sqrt{x} = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{49} \Leftrightarrow x = 49.$  Vậy  $x = 49.$

c) Ta có  $\sqrt{x} < \sqrt{2} \Leftrightarrow x < 2.$  Kết hợp điều kiện  $0 \leq x < 2.$

d) Ta có  $\sqrt{2x} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x} < \sqrt{16} \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 16 \Leftrightarrow 0 \leq x < 8.$  Vậy  $0 \leq x < 8.$

**Bài tập 15.** Tìm  $x$  không âm biết :

a).  $\sqrt{x} = 5$

b).  $\sqrt{x} = \sqrt{2}$

c).  $\sqrt{x} = -2$

d).  $\sqrt{2x + \frac{1}{3}} = 3$

e).  $\sqrt{2x+1} + 3 = 0$

f).  $\sqrt{x^2 - 4x + 13} = 3.$

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 5^2 = 25$

b) Ta có  $\sqrt{x} = \sqrt{2} \Rightarrow x = (\sqrt{2})^2 = 2$

c) Ta có  $\sqrt{x} = -2 \Rightarrow$  không  $\exists x$

d) Ta có  $\sqrt{2x + \frac{1}{3}} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$

e) Ta có  $\sqrt{2x+1} + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

f) Ta có  $\sqrt{x^2 - 4x + 13} = 3 \Leftrightarrow x = 2.$

**Bài tập 16.** Tìm giá trị của  $x$  biết :

a).  $9x^2 - 16 = 0.$

b).  $4x^2 = 13.$

c).  $2x^2 + 9 = 0.$

d).  $-\frac{\sqrt{2x+1}}{3} + 2 = 0$

e).  $\sqrt{x} - 1 = 3(x \geq 0)$

f).  $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2}$

g).  $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4$

n).  $\sqrt{2x + \frac{1}{3}} = 3$

m).  $\sqrt{2x+1} + 3 = 0$

l).  $\sqrt{x^2 - 4x + 13} = 3.$

**Lời giải**

a) Ta có  $9x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{3}$

b) Ta có  $4x^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

c) Vì  $x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 9 > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

d) Ta có  $\sqrt{2x+1} = 6 \Leftrightarrow 2x+1 = 6^2 \Leftrightarrow x = \frac{35}{2}$

e) Ta có  $\sqrt{x} - 1 = 3(x \geq 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$

f) Ta có  $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

g) Ta có  $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 20 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$

h)  $x = \frac{13}{3}$

m).  $x \in \emptyset$

l).  $x = 2.$

**Bài tập 17.** Tìm giá trị của  $x$ , biết:

a).  $\sqrt{2x} < \frac{1}{3}$

b).  $\sqrt{-3x + \frac{1}{2}} \geq 5$

c).  $\sqrt{-2x+1} > 7$

d).  $\sqrt{2x-1} \leq \frac{3}{2}$

e).  $\sqrt{x} < 3$

f).  $\sqrt{3x} < 9$

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{2x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2x} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \leq 2x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{18}$

b) Điều kiện:  $-3x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{6}$

Ta có  $\sqrt{-3x + \frac{1}{2}} \geq 5 \Leftrightarrow -3x + \frac{1}{2} \geq 25 \Leftrightarrow x \leq -\frac{49}{6}$  (TMĐK)

c) Điều kiện:  $x \leq \frac{1}{2}$ .

Ta có  $\sqrt{-2x-1} > 7 \Leftrightarrow -2x-1 > 49 \Leftrightarrow x < -24$  (TMĐK)

d) Điều kiện:  $x \geq \frac{1}{2}$ .

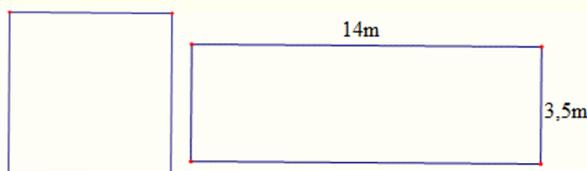
Ta có  $\sqrt{2x-1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x-1 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \leq \frac{13}{8}$

Kết hợp điều kiện ta được  $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{13}{8}$

e). Ta có  $\sqrt{x} < 3 \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{9} \Rightarrow 0 \leq x < 9$ .

f). Ta có  $\sqrt{3x} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{3x} < \sqrt{81} \Leftrightarrow 3x < 81 \Leftrightarrow x < 27$

**Bài tập 18. Đố.** Tính cạnh của một hình vuông, biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3,5 m và chiều dài 14 m.



**Lời giải**

Diện tích hình chữ nhật là  $3,5 \cdot 14 = 49(m^2)$ .

Gọi cạnh của hình vuông là  $x(x > 0)$ .

Ta có:  $x^2 = 49 \Leftrightarrow x = 7$ .

Vậy cạnh của hình vuông là 7m.

**SBÀI 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC  $\sqrt{A^2} = |A|$ .**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Căn thức bậc hai:**

- Nếu  $A$  là một biểu thức đại số thì  $\sqrt{A}$  gọi là căn thức bậc hai của  $A$ .
- $\sqrt{A}$  xác định (hay có nghĩa) khi  $A \geq 0$ .

**Ví dụ 1.** Tìm  $x$  để căn thức  $\sqrt{5-2x}$  có nghĩa.

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{5-2x}$  có nghĩa khi  $5-2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$ .

**Ví dụ 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $M = \sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}$  có nghĩa?

**Lời giải**

Ta có  $M$  có nghĩa khi  $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 2 \end{cases}$

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

Vậy có 7 giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $M$  có nghĩa

**2. Hằng đẳng thức  $\sqrt{A^2} = |A|$ .**

- Với mọi số  $a$ , ta có

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

- Khi đó

$$\sqrt{A^2} = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 3.** Tính giá trị của biểu thức:  $\sqrt{0,09} + 7 \cdot \sqrt{0,36} - 3\sqrt{2,25}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{0,09} + 7 \cdot \sqrt{0,36} - 3\sqrt{2,25}$   
 $= \sqrt{(0,3)^2} + 7 \cdot \sqrt{(0,6)^2} - 3\sqrt{(1,5)^2}$   
 $= 0,3 + 7 \cdot 0,6 - 3 \cdot 1,5 = 0,3 + 4,2 - 4,5 = 0.$

**Ví dụ 4.** Giá trị của biểu thức sau là số vô tỉ hay hữu tỉ:  $\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18}$ ?

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}\right) \cdot 18} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot 18} = \sqrt{9} = 3.$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho là một số hữu tỉ, hơn nữa còn là một số tự nhiên.

**Ví dụ 5.** Tính giá trị của biểu thức  $C = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ .

**Lời giải**

Ta có  $C = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$   
 $= |\sqrt{2}-1| - |2-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 - (2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-3.$

**Ví dụ 6.** Rút gọn biểu thức  $A = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$ .

**Lời giải**

Ta có  $A = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$

- Nếu  $x \geq \frac{1}{2}$  thì  $A = x - \frac{1}{2}$
- Nếu  $x < \frac{1}{2}$  thì  $A = \frac{1}{2} - x$

**Ví dụ 7.** Rút gọn biểu thức  $B = \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6}$ .

**Lời giải**

Ta có  $B = \sqrt{x^4} + \sqrt{x^6} = \sqrt{(x^2)^2} + \sqrt{(x^3)^2}$   
 $= |x^2| + |x^3| = x^2 + |x^3|$ .

- Nếu  $x \geq 0$  thì  $B = x^2 + x^3$ ;
- Nếu  $x < 0$  thì  $B = x^2 - x^3$ .

**Ví dụ 8.** Cho biểu thức:  $P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ .

- Rút gọn biểu thức  $P$ ;
- Tính giá trị của  $P$  khi  $x = 2$ .

**Lời giải**

a). Rút gọn biểu thức  $P$ ;

Ta có  $P = 3x - \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 3x - \sqrt{(x - 5)^2} = 3x - |x - 5|$ .

- Nếu  $x \geq 5$  thì  $P = 3x - (x - 5) = 2x + 5$ .
- Nếu  $x < 5$  thì  $P = 3x + (x - 5) = 4x - 5$ .

b). Khi  $x = 2 < 5$  thì giá trị của biểu thức là:  $P = 4 \cdot 2 - 5 = 3$ .

**Ví dụ 9.** Cho biểu thức:  $Q = 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ .

- Rút gọn biểu thức  $Q$ ;
- Tính các giá trị của  $x$  để  $Q = 7$ .

**Lời giải**

a). Rút gọn biểu thức  $Q$ ;

Ta có  $Q = 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2x - \sqrt{(x + 1)^2} = 2x - |x + 1|$

- Nếu  $x \geq -1$  thì  $Q = 2x - (x + 1) = x - 1$
- Nếu  $x < -1$  thì  $Q = 2x + (x + 1) = 3x + 1$

b). Tính các giá trị của  $x$  để  $Q = 7$ .

Ta phải xét hai trường hợp:

- $Q = 7 \Leftrightarrow x - 1 = 7 \Leftrightarrow x = 8$  (Không thỏa mãn  $x \geq -1$ )
- $Q = 7 \Leftrightarrow 3x + 1 = 7 \Leftrightarrow x = 2$  (Không thỏa mãn  $x < -1$ ).

Vậy  $Q = 7$  khi  $x = 8$

**Ví dụ 10.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $D = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$ .

**Lời giải**

Ta có  $D = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 = \sqrt{(2x - 1)^2} + 3 = |2x - 1| + 3 \geq 3$  với mọi  $x$ .

Vậy  $\min D = 3$  khi  $x = \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 11.** Tìm  $x$ , biết  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$ .

Lời giải

Ta có  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 7x = 13$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} + 7x = 13$$

$$\Leftrightarrow |x-3| + 7x = 13 \quad (1)$$

• Nếu  $x \geq 3$  thì  $|x-3| = x-3$ .

Khi đó (1) trở thành  $x-3+7x=13 \Leftrightarrow 8x=16 \Leftrightarrow x=2$  (không thuộc khoảng đang xét)

• Nếu  $x < 3$  thì  $|x-3| = 3-x$ .

Khi đó (1) trở thành  $3-x+7x=13 \Leftrightarrow 6x=10 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$  (thuộc khoảng đang xét)

Vậy giá trị của  $x$  thỏa mãn đẳng thức đã cho là  $x = \frac{5}{3}$ .

### B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA

#### Dạng 1. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ $\sqrt{A}$ CÓ NGHĨA

##### 1. Phương pháp.

①  $\sqrt{A}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A \geq 0$ .

②  $\sqrt{\frac{1}{A}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A > 0$ .

##### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 1.** (Bài 6, tr. 10 SGK). Với giá trị nào của  $a$  thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a).  $\sqrt{\frac{a}{3}}$ ;

b).  $\sqrt{4-a}$ ;

c).  $\sqrt{-5a}$ ;

d).  $\sqrt{3a+7}$ .

Lời giải

a)  $\sqrt{\frac{a}{3}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \frac{a}{3} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ .

b)  $\sqrt{-5a}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow -5a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ .

c)  $\sqrt{4-a}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow 4-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4$ .

d)  $\sqrt{3a+7}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow 3a+7 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{7}{3}$ .

**Bài tập 2.** (Bài 12, tr. 11 SGK) Tìm  $x$ , để mỗi căn thức sau có nghĩa:

a).  $\sqrt{2x+7}$ ;

b).  $\sqrt{-3x+4}$ ;

c).  $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$ ;

d).  $\sqrt{1+x^2}$ .

Lời giải

a)  $\sqrt{2x+7}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow 2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$ .

b)  $\sqrt{-3x+4}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow -3x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$ .

c)  $\sqrt{\frac{1}{-1+x}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow -1+x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

d) Vì  $1+x^2 > 0$  với mọi  $x$  nên  $\sqrt{1+x^2}$  có nghĩa với mọi  $x$

**Bài tập 3.** (Bài 37, tr. 20 SGK) Với giá trị nào của  $a$  thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

- a).  $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ ;                      b).  $\sqrt{\frac{a^2+1}{1-2a}}$ ;                      c).  $\sqrt{a^2-1}$ ;                      d).  $\sqrt{4-a^2}$ .

Lời giải

- a)  $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ .
- b)  $\sqrt{\frac{a^2+1}{1-2a}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow 1-2a > 0$  (vì  $a^2+1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ )  $\Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$ .
- c)  $\sqrt{a^2-1}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow a^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 1$   
 $\Leftrightarrow |a| \geq 1 \Leftrightarrow a \leq -1$  hoặc  $a \geq 1$ .
- d)  $\sqrt{4-a^2}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow 4-a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 4$   
 $\Leftrightarrow |a| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$ .

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 1.** Tìm  $x$  để căn thức  $\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$  có nghĩa.

Lời giải

Ta có  $\sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$  có nghĩa khi  $\sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}}$  có nghĩa.

Điều đó xảy ra khi  $(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ .

**Bài 2.** Với giá trị nào của  $x$  thì biểu thức  $\sqrt{25-x^2}$  có nghĩa?

Lời giải

Ta có  $\sqrt{25-x^2}$  có nghĩa khi  $25-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \geq -25$   
 $\Leftrightarrow x^2 \leq 25 \Leftrightarrow |x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$ .

**Bài 3.** Tìm các giá trị của  $x$  để biểu thức  $\sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$  có nghĩa

Lời giải

Ta có  $\sqrt{\frac{1}{x^2-100}}$  có nghĩa khi  $x^2-100 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x < -10 \end{cases}$

**Bài 4.** Biểu thức sau xác định với giá trị nào của  $x$ ?

- a).  $\sqrt{-3x+2}$ ;                      b).  $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ ;                      c).  $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$ ;                      d).  $\sqrt{x(x+2)}$ ;  
 e).  $\sqrt{9x^2-6x+1}$                       f).  $\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}$                       g).  $\sqrt{5x^2-3x-8}$                       h).  $\sqrt{5x^2+4x+7}$ .

Lời giải

- a) Đk:  $-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$ .
- b) Đk:  $\begin{cases} \frac{4}{2x+3} \geq 0 \\ 2x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$ .
- c) Đk:  $\begin{cases} \frac{2}{x^2} \geq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .

$$d) \text{ Đk: } x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$e) \text{ Đk: } 9x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 \geq 0, \forall x.$$

$$f) \text{ Đk: } \frac{2x-1}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leq 0 \\ 2-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 2.$$

$$g) \text{ Đk: } 5x^2 - 3x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - (8-5)x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (5x^2 - 8x) + (5x - 8) \geq 0 \Leftrightarrow (5x-8)(x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-8 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{5} \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$h) \text{ Đk: } 5x^2 + 4x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 20x + 35 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (25x^2 + 2.5x.2 + 4) + 31 \geq 0 \Leftrightarrow (5x+2)^2 + 31 \geq 0, \forall x.$$

**Bài 5.** Tìm  $x$  để biểu thức sau có nghĩa:

a).  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}$

b).  $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x-5}$

c).  $\frac{2}{x^2-9} - \sqrt{5-2x}$

d).  $\sqrt{2x-4} + \sqrt{8-x}$

e).  $\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{9-x^2}$

f).  $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x-2}$

g).  $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$

h).  $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$  i).  $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$

j).  $\sqrt{x+\frac{3}{x}} + \sqrt{-3x}$

k).  $\frac{x-1}{x+2} + \sqrt{x-2}$

l).  $\frac{2x+1}{x-2} + \sqrt{x-2}$

m).  $\frac{2x}{x^2-4} + x^2\sqrt{x-2}$

**Lời giải**

a) Biểu thức đã cho có nghĩa khi

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x+3)(x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

b) Biểu thức đã cho có nghĩa khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$

c) Biểu thức đã cho có nghĩa khi  $\begin{cases} x^2-9 \neq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 3 \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$

d)  $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

e)  $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

- f)  $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$
- g)  $\sqrt{x+\frac{3}{x}} + \sqrt{-3x}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{3}{x} > 0 \\ -3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3}{x} > 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$
- h)  $\frac{x-1}{x+2} + \sqrt{x-2}$  có nghĩa khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$
- i)  $\frac{2x+1}{x-2} + \sqrt{x-2}$  có nghĩa khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$
- j)  $\frac{2x}{x^2-4} + x^2\sqrt{x-2}$  có nghĩa khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

**Bài 6.** Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn có nghĩa với mọi  $x$

a).  $A = \sqrt{x^2-x+1} - \frac{2}{x^2+2}$ .

b).  $B = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1+x}} + \sqrt{2x^2-x+2}$

**Lời giải**

a). Ta có  $x^2+2 \neq 0$  với mọi  $x$  và  $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  với mọi  $x$ .

Do đó biểu thức đã cho luôn có nghĩa với mọi  $x$ .

b). Ta có  $2x^2-x+2 = 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$  với mọi  $x$ .

Lại có  $x^2+1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x > \sqrt{x^2}+x = |x|+x \geq 0$  với mọi  $x$

Vậy biểu thức đã cho luôn xác định với mọi  $x$ .

**Bài 7.** Chứng minh rằng các biểu thức sau luôn có nghĩa với mọi  $x$

a).  $A = \sqrt{x^2+x+1} - \frac{2}{x^2+1}$

b).  $B = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-2x+3}} + \sqrt{x^2-x+1}$

**Lời giải**

a). Ta có  $x^2+1 \neq 0, \forall x$  và  $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$

Do đó biểu thức luôn có nghĩa với mọi  $x$ .

b). Ta có  $x^2-2x+3 = (x-1)^2+2 > 0, \forall x$

Và  $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$

Do đó biểu thức đã cho luôn có nghĩa với mọi  $x$ .

**Dạng 2. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC**

**1. Phương pháp.**

Áp dụng:

$$\sqrt{A^2} = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 4.** Tính

a).  $\sqrt{(0,1)^2}$ ;

b).  $\sqrt{(-0,3)^2}$ ;

c).  $-\sqrt{(-1,3)^2}$ ;

d).  $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$ .

**Lời giải**



a).  $A = 2(5\sqrt{4^2} - 4\sqrt{5^2}) + \sqrt{8^2} = 2(5.4 - 4.5) + 8 = 2(20 - 20) + 8 = 8$

b).  $A = 2015 + \sqrt{6^2} - \sqrt{5^2} = 2015 + 6 - 5 = 2016.$

Loại  $\sqrt{m+2\sqrt{n}}$

1. Phương pháp

① Cách 1.

➤ Nhắm hai số  $a$  và  $b$  sao cho  $a.b = n$  và  $a+b = m$

➤ Sử dụng các hằng đẳng thức:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$  hoặc  $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

② Cách 2: Dùng máy tính:

➤ Nhấn Mode 5/3 Nhập  $a = 1; b = -m; c = n$  sẽ cho được hai số  $a$  và  $b$  cần tìm.

➤ Sử dụng các hằng đẳng thức như cách 1.

③ Chú ý: Sử dụng công thức:  $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$  với  $a, b \geq 0$ .

2. Bài tập minh họa

Bài tập 9. Rút gọn

a).  $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

b).  $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

c).  $\sqrt{23-2\sqrt{120}}$

Lời giải

a).  $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

Bấm máy Mode/5/3: nhập  $a = 1; b = -3; c = 2$  ta được  $a = 2; b = 1$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \sqrt{3-2\sqrt{2}} &= \sqrt{3-2\sqrt{2}.1} = \sqrt{3-2\sqrt{2}\sqrt{1}} = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2}.\sqrt{1} + \sqrt{1}^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2} \\ &= |\sqrt{2}-\sqrt{1}| = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

b).  $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

Bấm máy Mode/5/3 nhập  $a = 1; b = -8; c = 15$  ta được  $a = 5; b = 3$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \sqrt{8+2\sqrt{15}} &= \sqrt{8+2\sqrt{5}.3} = \sqrt{8+2\sqrt{5}\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5}.\sqrt{3} + \sqrt{3}^2} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} \\ &= |\sqrt{5}+\sqrt{3}| = \sqrt{5}+\sqrt{3} \end{aligned}$$

c).  $\sqrt{23-2\sqrt{120}}$

Bấm máy Mode/5/3 nhập  $a = 1; b = -23; c = 120$  ta được  $a = 15; b = 8$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \sqrt{23-2\sqrt{120}} &= \sqrt{23-2\sqrt{15}.8} = \sqrt{23-2\sqrt{15}.\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt{15}^2 - 2\sqrt{15}.\sqrt{8} + \sqrt{8}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{8})^2} = |\sqrt{15}-\sqrt{8}| = \sqrt{15}-\sqrt{8} = \sqrt{15}-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Loại  $\sqrt{m \pm k\sqrt{n}}$

1. Phương pháp

① Trường hợp 1: Nếu  $k$  là số chẵn thì tách sao cho  $k = 2k'$

➤ Đưa  $k'$  vào căn bậc hai bằng công thức:  $k' = \sqrt{(k')^2}$

➤ Bài toán về dạng 2.

Chú ý: Sử dụng công thức đưa vào căn bậc hai:  $a = \sqrt{a^2}$  với  $a$  là một số không âm.

2. Bài tập minh họa

Bài tập 10. Rút gọn

a).  $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

b).  $\sqrt{36+12\sqrt{5}}$

c).  $\sqrt{49-12\sqrt{5}} - \sqrt{49+12\sqrt{5}}$

Lời giải

a).  $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Ta tách số  $10 = 2.5$  và đưa số  $5 = \sqrt{5^2} = \sqrt{25}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \sqrt{27-10\sqrt{2}} &= \sqrt{27-2.5.\sqrt{2}} = \sqrt{27-2.\sqrt{25}\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{25}^2 - 2\sqrt{25}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2} = \sqrt{(\sqrt{25} - \sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{25} - \sqrt{2}| = \sqrt{25} - \sqrt{2} = 5 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Ta thấy  $25 + 2 = 27$ . Vậy  $a = 25$  và  $b = 2$ .

b).  $\sqrt{36+12\sqrt{5}}$

Ta tách số  $12 = 2.6$  và đưa số  $6 = \sqrt{6^2} = \sqrt{36}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \sqrt{36+12\sqrt{5}} &= \sqrt{36+2.6.\sqrt{5}} = \sqrt{36+2.\sqrt{36}\sqrt{5}} = \sqrt{36+2\sqrt{180}} = \sqrt{36+2\sqrt{30}\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{36+2\sqrt{30}\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{30} + 2\sqrt{30}\sqrt{6} + \sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{30} + \sqrt{6})^2} = |\sqrt{30} + \sqrt{6}| = \sqrt{30} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Ta thấy  $36 + 5 \neq 36$  nên ta phải nhân  $36.5 = 180$  để đưa bài toán về dạng  $\sqrt{m+2.\sqrt{n}}$

c).  $\sqrt{49-12\sqrt{5}} - \sqrt{49+12\sqrt{5}} = \sqrt{(2-3\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+3\sqrt{5})^2} = 4.$

② Trường hợp 2:

➤ Nếu  $k$  là số lẻ thì nhân cả tử và mẫu của  $\frac{m \pm k\sqrt{n}}{2}$  cho 2.

➤ Sử dụng công thức:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  Với  $a$  là một số không âm,  $b$  là một số dương.

➤ Bài toán về dạng 2.

3. Bài tập minh họa

Bài tập 11. Rút gọn

a).  $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

b).  $\sqrt{8+2\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$

Lời giải

a).  $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

Ta nhân vào trong căn thức cả tử và mẫu cho 2

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \sqrt{5-\sqrt{21}} &= \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{21})}{2}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{21}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{7}\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{7}^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} + \sqrt{3}^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{7}-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b).  $\sqrt{8+2\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{8+2\sqrt{7}} \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}} &= \sqrt{(1+\sqrt{7})^2} \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{4}} \\ &= (1+\sqrt{7}) \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{7})(\sqrt{7}-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Bài tập 12. Rút gọn các biểu thức sau

a).  $A = \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$

b).  $B = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

c).  $C = \sqrt{49-12\sqrt{5}} - \sqrt{49+12\sqrt{5}}$

d).  $D = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}}$

Lời giải

a).  $A = \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4-\sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4(4 > \sqrt{15})$

b).  $B = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| + |1+\sqrt{3}| = 1$

c).  $C = \sqrt{49-12\sqrt{5}} - \sqrt{49+12\sqrt{5}} = \sqrt{(2-3\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+3\sqrt{5})^2} \Rightarrow C = 4$

d).  $D = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}} = \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3-2\sqrt{5})^2} \Rightarrow D = 6$

**Bài tập 13.** Rút gọn các biểu thức sau

a).  $\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

b).  $\sqrt{17-2\sqrt{72}} + \sqrt{19+2\sqrt{18}}$

c).  $\sqrt{12-2\sqrt{32}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$

d).  $\sqrt{29-2\sqrt{180}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

e).  $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{2}$

f).  $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} + 3\sqrt{2}$

g).  $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{7-2\sqrt{10}}$

h).  $\sqrt{10-2\sqrt{21}} - \sqrt{9-2\sqrt{14}}$

i).  $\sqrt{8-3\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$

j).  $\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}$

k).  $\sqrt{9-3\sqrt{5}} - \sqrt{9+3\sqrt{5}}$

l).  $(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+5} - \sqrt{5+2\sqrt{5}\cdot 1+1}$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1 = \sqrt{3}-1.$$

b).  $\sqrt{17-2\sqrt{72}} + \sqrt{19+2\sqrt{18}} = \sqrt{9-2\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}+8} + \sqrt{18+2\sqrt{18}\cdot 1+1}$

$$= \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{18}+1)^2} = 3-2\sqrt{2} + \sqrt{18}+1 = 4-2\sqrt{2} + \sqrt{18}.$$

c).  $\sqrt{12-2\sqrt{32}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{8-2\sqrt{8}\cdot\sqrt{4}+4} + \sqrt{8+2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1}$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} = 2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}+1 = 4\sqrt{2}-1.$$

d).  $\sqrt{29-2\sqrt{180}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{20-2\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{9}+9} - \sqrt{5+4\sqrt{5}+4}$

$$= \sqrt{(\sqrt{20}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{20}-3-\sqrt{5}-2 = \sqrt{5}(1-\sqrt{5}).$$

e).  $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{2}$

Ta có:  $(\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}})^2 = 4-\sqrt{7}+4+\sqrt{7}-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} = 8-2\sqrt{16-7}$   
 $= 8-2\sqrt{9} = 8-6 = 2$

Do đó  $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} = -\sqrt{2}$

Vì  $\sqrt{4-\sqrt{7}} < \sqrt{4+\sqrt{7}}$ .

Suy ra  $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ .

f).  $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} + 3\sqrt{2}$

Ta có:  $(\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}})^2 = 6+\sqrt{11}+6-\sqrt{11}-2\sqrt{(6-\sqrt{7})(6+\sqrt{11})}$   
 $= 12-2\sqrt{36-11} = 12-2\sqrt{25} = 12-10 = 2$ .

Do đó  $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{2}$

Vì  $\sqrt{6+\sqrt{11}} > \sqrt{6-\sqrt{11}}$ .

Suy ra  $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ .

g).  $\sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3} - \sqrt{5-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2}$   
 $= \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$ .

h).  $\sqrt{10-2\sqrt{21}} - \sqrt{9-2\sqrt{14}} = \sqrt{7-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+3} - \sqrt{7-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2}$   
 $= \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}-\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{2} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$ .

i).  $\sqrt{8-3\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$ .

Ta có:  $(\sqrt{8-3\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}})^2 = 12 - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{8-3\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}$   
 $= 12 - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{53-20\sqrt{7}}$   
 $= 12 - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{(2\sqrt{7}-5)^2} = 12 - 4\sqrt{7} + 2(2\sqrt{7}-5) = 12 - 10 = 2$ .

Do đó  $\sqrt{8-3\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}$  (vì  $\sqrt{8-3\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} > 0$ ).

j).  $\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}$ .

Ta có:  $(\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}})^2 = 5 + \sqrt{21} + 5 - \sqrt{21} - 2\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$   
 $= 10 - 2\sqrt{25-21} = 10 - 4 = 6$

Suy ra  $\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{6}$

Vì  $\sqrt{5+\sqrt{21}} > \sqrt{5-\sqrt{21}}$ .

k).  $\sqrt{9-3\sqrt{5}} - \sqrt{9+3\sqrt{5}}$ .

Ta có:  $(\sqrt{9-3\sqrt{5}} - \sqrt{9+3\sqrt{5}})^2 = 9 - 3\sqrt{5} + 9 + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{9-3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9+3\sqrt{5}}$   
 $= 18 - 2\sqrt{81-45} = 18 - 12 = 6$

Suy ra  $\sqrt{9-3\sqrt{5}} - \sqrt{9+3\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$

Vì  $\sqrt{9-3\sqrt{5}} < \sqrt{9+3\sqrt{5}}$ .

l).  $(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = (\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{5-2\sqrt{5}\cdot 1+1}} = (\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$   
 $= (\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{5}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3+\sqrt{5}}$ .

**Bài tập 14.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a).  $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$

b).  $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$

c).  $3\sqrt{5} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

d).  $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$

e).  $\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}$

f).  $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

g).  $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

h).  $\sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}}$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-2)^2} = 2\sqrt{2}$

b).  $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| + \sqrt{2} = \sqrt{3}$



**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 15.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$ ;

b).  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ ;

c).  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ;

d).  $\sqrt{49a^2}$ , với  $a < 0$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4-\sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4-\sqrt{15} + \sqrt{15} = 4$ .

( Vì  $4-\sqrt{15} > 0$  nên  $|4-\sqrt{15}| = 4-\sqrt{15}$  )

b) Ta có  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| + |1-\sqrt{3}| = (2-\sqrt{3}) + [-(1-\sqrt{3})] = 2-\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$

( Vì  $2-\sqrt{3} > 0$  nên  $|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$  và  $1-\sqrt{3} < 0$  nên  $|1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$  )

c) Ta có  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\cdot 2 + 2^2} + \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\cdot 2 + 2^2}$   
 $= \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}+2| + |\sqrt{3}-2| = (\sqrt{3}+2) + (2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}+2+2-\sqrt{3} = 4$ .

d) Ta có  $\sqrt{49a^2} = \sqrt{(7a)^2} = |7a| = -7a$ . ( Vì  $a < 0$  nên  $7a < 0$ , suy ra  $|7a| = -7a$  )

**Bài tập 16.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{25a^2} + 3a$ , với  $a < 0$ ;

b).  $\sqrt{16a^4} + 6a^2$ ;

c).  $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ , với  $a \leq 0$ ;

d).  $\sqrt{a^2+6a+9} + \sqrt{a^2-6a+9}$ , với  $-3 \leq a \leq 3$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{25a^2} + 3a = \sqrt{(5a)^2} + 3a = |5a| + 3a = -5a + 3a = -2a$ .

( Vì  $a < 0$  nên  $5a < 0$ , suy ra  $|5a| = -5a$  )

b) Ta có  $\sqrt{16a^4} + 6a^2 = \sqrt{(4a^2)^2} + 6a^2 = |4a^2| + 6a^2 = 4a^2 + 6a^2 = 10a^2$ .

( Vì  $a^2 \geq 0$ , với mọi  $a$  nên  $4a^2 \geq 0$ , với mọi  $a$ , suy ra  $|4a^2| = 4a^2$  )

c) Ta có  $3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3\sqrt{(3a^3)^2} - 6a^3 = 3|3a^3| - 6a^3 = 3\cdot(-3a^3) - 6a^3 = -15a^3$ .

( Vì  $a \leq 0$  nên  $3a^3 \leq 0$ , suy ra  $|3a^3| = -3a^3$  )

d) Ta có  $\sqrt{a^2+6a+9} + \sqrt{a^2-6a+9} = \sqrt{(a+3)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = |a+3| + |a-3| = (a+3) + (3-a)$   
 $= a+3+3-a = 6$ .

( Vì  $-3 \leq a \leq 3$  nên  $a+3 \geq 0$  và  $a-3 \leq 0$ , do đó  $|a+3| = a+3$  và  $|a-3| = 3-a$  )

**Bài tập 17.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$ , với  $a \geq 0, a \neq 4$ ;

b).  $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$ , với  $a \geq 0, a \neq 1$ ;

**Lời giải**

a) Với  $a \geq 0, a \neq 4$  ta có  $a-4 = (\sqrt{a})^2 - 2^2 = (\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)$  nên:

$$\frac{\sqrt{a}-2}{a-4} = \frac{\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} = \frac{1}{\sqrt{a}+2}$$

b) Với  $a \geq 0, a \neq 1$  ta có  $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1} = \frac{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a})^2 - 1} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$ .

**Bài tập 18.** Rút gọn biểu thức sau

- a).  $\sqrt{9x^2} - 2x$  với  $x < 0$ .                      b).  $2\sqrt{x^2}$  với  $x \geq 0$ .                      c).  $3\sqrt{(x-2)^2}$  với  $x < 2$ .  
 d).  $2\sqrt{x^2} - 5x$  với  $x < 0$                       e).  $\sqrt{25x^2} + 3x$  với  $x \geq 0$ .                      f).  $\sqrt{9x^4} + 3x^2$  với  $x$  bất kỳ  
 g).  $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$  với  $x > 4$ .

**Lời giải**

- a) Ta có:  $\sqrt{9x^2} - 2x = 3|x| - 2x = -3x - 2x = -5x$   
 b) Ta có:  $2\sqrt{x^2} = 2|x| = 2x$   
 c) Ta có:  $3\sqrt{(x-2)^2} = 3|x-2| = 3(2-x) = 6-2x$   
 d) Ta có:  $2\sqrt{x^2} - 5x = 2|x| - 5x = -2x - 5x = -7x$   
 e) Ta có:  $\sqrt{25x^2} + 3x = 5|x| + 3x = 5x + 3x = 8x$   
 f) Ta có:  $\sqrt{9x^4} + 3x^2 = 3x^2 + 3x^2 = 6x^2$   
 g) Ta có:  $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2} = x - 4 + \sqrt{(x-4)^2} = x - 4 + |x-4| = x - 4 + x - 4 = 2x - 8$

**Bài tập 19.** Rút gọn biểu thức sau

- a).  $A = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + 2x - 1$                       b).  $B = \frac{5-x}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}$                       c).  $C = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$   
 d).  $D = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x-3}$                       e).  $E = x^2 - \sqrt{x^4 + 8x^2 + 16}$                       f).  $F = \sqrt{1 - 4a + 4a^2} - 2a$

**Lời giải**

- a) Ta có:  $A = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + 2x - 1 = |2x - 3| + 2x - 1$   
 •  $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow A = 2x - 3 + 2x - 1 = 4x - 4$   
 •  $x < \frac{3}{2} \Rightarrow A = -2x + 3 + 2x - 1 = 2$   
 b) Điều kiện xác định  $x \neq 5$   
 Khi đó  $B = \frac{5-x}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}} = \frac{5-x}{|5-x|}$   
 •  $x > 5 \Rightarrow C = \frac{5-x}{x-5} = -1$   
 •  $x < 5 \Rightarrow C = \frac{5-x}{5-x} = 1$   
 c) Điều kiện xác định  $x \neq 1$   
 $C = \sqrt{(x-1)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = |x-1| + \frac{x-1}{|x-1|}$   
 •  $x > 1 \Rightarrow D = x - 1 + \frac{x-1}{x-1} = x - 1 + 1 = x$   
 •  $x < 1 \Rightarrow D = -x + 1 + \frac{x-1}{-x+1} = -x + 1 - 1 = -x$   
 d) Điều kiện xác định  $x \neq 3$   
 $D = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x-3} = \frac{|x-3|}{x-3}$   
 •  $x > 3 \Rightarrow E = \frac{x-3}{x-3} = 1$   
 •  $x < 3 \Rightarrow E = \frac{x-3}{-x+3} = -1$   
 e) Ta có:  $F = x^2 - \sqrt{x^4 + 8x^2 + 16} = x^2 - |x^2 + 4|$   
 $= x^2 - (x^2 + 4) = -4$   
 f)  $F = \sqrt{1 - 4a + 4a^2} - 2a = \sqrt{(2a-1)^2} - 2a$   
 $= |2a-1| - 2a = \begin{cases} 2a-1-2a & \text{khi } a \geq \frac{1}{2} \\ -2a+1-2a & \text{khi } a < \frac{1}{2} \end{cases}$

**Bài tập 20.** Chứng tỏ:  $x+2\sqrt{2x-4}=(\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2$  với  $x \geq 2$ .

Áp dụng rút gọn biểu thức sau:  $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}$  với  $x \geq 2$ .

**Lời giải**

Thật vậy  $VP = (\sqrt{2} + \sqrt{x-2})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} + (\sqrt{x-2})^2 = x + 2\sqrt{2x-4} = VT$

Ta có:  $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} = |\sqrt{2} + \sqrt{x-2}| + |\sqrt{2} + \sqrt{x-2}| = 2(\sqrt{2} + \sqrt{x-2})$

**Bài tập 21.** Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

a).  $\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}$  với  $x \geq 4$ .      b).  $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}$  với  $x \geq 3$ .

c).  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$  với  $x \geq 1$ .      d).  $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x+1}}$  với  $x \geq 0$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{x-4}\sqrt{x-4} = \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4} = \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} = \sqrt{x-4}+2$

b) Ta có  $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = \sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2} = |\sqrt{x-3}+1| = \sqrt{x-3}+1$

c) Ta có  $C = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1|$

- $x \geq 2 \Rightarrow C = \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}$

- $1 \leq x < 2 \Rightarrow C = \sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}+1 = 2$

d) Ta có  $D = \sqrt{x-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x+1}} = \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} = |\sqrt{x+1}-1| + |\sqrt{x+1}+1|$

- $x \geq 1 \Rightarrow D = \sqrt{x+1}-1 + \sqrt{x+1}+1 = 2\sqrt{x+1}$

- $0 \leq x < 1 \Rightarrow D = -\sqrt{x+1}+1 + \sqrt{x+1}+1 = 2$

**Bài tập 22.** Rút gọn các biểu thức sau

a).  $A = 4\sqrt{x} - \frac{(x+6\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9}$  ( $0 \leq x; x \neq 9$ )

b).  $B = \frac{\sqrt{9x^2+12x+4}}{3x+2}$  ( $x \neq \frac{-2}{3}$ )

**Lời giải**

a). Ta có:  $A = 4\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x}+3)^2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \Rightarrow A = 3(\sqrt{x}-1)$  ( $0 \leq x \neq 9$ )

b). Ta có:  $B = \frac{\sqrt{9x^2+12x+4}}{3x+2} = \frac{|3x+2|}{3x+2} = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq \frac{-2}{3} \\ -1 & \text{khi } x < \frac{-2}{3} \end{cases}$

**Bài tập 23.** Rút gọn các biểu thức sau

a).  $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$  ( $1 \leq a \leq 2$ )      b).  $B = 4x - \sqrt{x^2-4x+4}$  ( $x \geq 2$ )

c).  $C = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}$  ( $x \neq 2$ )      d).  $D = 2x-1 - \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

e).  $E = 4\sqrt{x} - \frac{(x+6\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9}$  ( $0 \leq x \neq 9$ )

**Lời giải**

a).  $A = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}} (1 \leq a \leq 2) = |\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1|$

• Với  $1 \leq a \leq 2 \Rightarrow \sqrt{a-1}+1 > 0; \sqrt{a-1}-1 \leq 0$

• Ta được:  $A = |\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1| = \sqrt{a-1}+1 - \sqrt{a-1}+1 = 2$

b).  $B = 4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} (x \geq 2) = 4x - |x-2| = 4x - (x-2) = 3x+2$

c).  $C = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} (x \neq -2) = \frac{|x+2|}{x+2}$

• Nếu  $x < -2$  thì  $A = -1$

• Nếu  $x > -2$  thì  $A = 1$

d).  $D = 2x-1 - \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} = 2x-1 - \frac{|x-5|}{x-5}$

• Nếu  $x-5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \Rightarrow A = 2x-1+1 = 2x$

• Nếu  $x \geq 5 \Rightarrow A = 2x-2$

e).  $E = 4\sqrt{x} - \frac{(x+6\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9} (0 \leq x \neq 9)$

Ta có  $E = 4\sqrt{x} - \frac{(x+6\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9} = 4\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x}+3)^2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = 3(\sqrt{x}-1) \quad (0 \leq x \neq 9)$

**Bài tập 24.** Cho biểu thức  $A = \sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$

a). Với giá trị nào của  $x$  thì  $A$  có nghĩa.

b). Tính  $A$  nếu  $x \geq \sqrt{2}$ .

**Lời giải**

a).  $A = \sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{(\sqrt{x^2-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x^2-1}-1)^2}$   
 $= |\sqrt{x^2-1}+1| + |\sqrt{x^2-1}-1|$

$A$  có nghĩa  $\Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

b).  $x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}-1 \geq 0$

$\Rightarrow A = \sqrt{x^2-1}+1 + \sqrt{x^2-1}-1 = 2\sqrt{x^2-1}$

**Bài tập 25.** Với giá trị nào của  $a$  và  $b$  thì:

a).  $\frac{1}{\sqrt{a^2-2ab+b^2}} = \frac{1}{b-a}$

b).  $\sqrt{a^2(b^2-2b+1)} = a(1-b)$

**Lời giải**

a). Điều kiện  $a \neq b$

Ta có  $\frac{1}{\sqrt{a^2-2ab+b^2}} = \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2}} = \frac{1}{b-a}$

$$\Leftrightarrow |a-b| = b-a \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

$$b). \sqrt{a^2(b^2-2b+1)} = a(1-b) \Leftrightarrow |a(b-1)| = a(1-b) \Leftrightarrow a(b-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 1 \\ a > 0 \\ b < 1 \end{cases}$$

**Bài tập 26.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a).  $A = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + 1 - 3x$  tại  $x = \frac{1}{3}$ .

b).  $B = \sqrt{2x^2 - 6x\sqrt{2} + 9}$  tại  $x = 3\sqrt{2}$

**Lời giải**

a).  $A = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + 1 - 3x$

Ta có  $A = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + 1 - 3x = \sqrt{(3x-2)^2} + 1 - 3x = |3x-2| + 1 - 3x$

Thay  $x = \frac{1}{3}$  vào biểu thức A ta được:  $A = |3 \cdot \frac{1}{3} - 2| + 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 + 1 - 1 = 1$

Vậy  $A = 1$  tại  $x = \frac{1}{3}$

b).  $B = \sqrt{2x^2 - 6x\sqrt{2} + 9} = \sqrt{(x\sqrt{2} - 3)^2} = |x\sqrt{2} - 3|$

Thay  $x = 3\sqrt{2}$  vào biểu thức B ta được  $B = |3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 3| = 3$

Vậy  $B = 3$  tại  $x = 3\sqrt{2}$

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 9.** Rút gọn biểu thức:

a).  $2\sqrt{x^2}$ , với  $x < 0$ ;

b).  $\frac{1}{2}\sqrt{x^{10}}$ , với  $x < 0$ ;

c).  $\sqrt{(a-5)^2}$ , với  $a \leq 5$ ;

d).  $\sqrt{(x-10)^{10}}$ , với  $x \leq 10$ ;

e).  $x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ , với  $x < 4$ ;

f).  $\sqrt{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$ , với  $0 \leq x \leq y$ .

**Lời giải**

a)  $2\sqrt{x^2} = 2|x| = -2x$ .

b)  $\frac{1}{2}\sqrt{x^{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^{5 \cdot 2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^5)^2} = \frac{1}{2}|x^5| = -\frac{1}{2}x^5$ .

c) Ta có:

- $a \leq 5 \Rightarrow a - 5 \leq 0$

- $\sqrt{(a-5)^2} = |a-5| = 5-a$

d) Ta có:

- $x \leq 10 \Rightarrow x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x-10)^5 \leq 0 \Rightarrow (10-x)^5 \geq 0$ .

- $\sqrt{(x-10)^{10}} = \sqrt{[(x-10)^5]^2} = |(x-10)^5| = |(10-x)^5| = (10-x)^5$ .

e) Ta có:

- $x < 4 \Rightarrow x - 4 < 0$

- $x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = x - 4 + \sqrt{(x-4)^2} = x - 4 + |x-4| = x - 4 - (x-4) = 0$

f) Ta có:

- $0 \leq x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow y - x \geq 0$

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} &= \sqrt{[(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})]^2} = \sqrt{[\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}]^2} \\ &= \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = -(x-y) = y-x. \end{aligned}$$

**Bài 10.** Rút gọn biểu thức:

a).  $\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}, (x \geq 0, x \neq 9)$     b).  $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}, (x \geq 0, x \neq 9);$     c).  $6-2x-\sqrt{9-6x+x^2}, (x < 3).$

Lời giải

a).  $\frac{3-\sqrt{x}}{x-9} = \frac{3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = -\frac{1}{\sqrt{x}+3}.$

b).  $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}-2.$

c).  $6-2x-\sqrt{9-6x+x^2} = 6-2x-\sqrt{(3-x)^2} = 6-2x-|3-x| = 6-2x-3+x = 3-x.$

**DẠNG 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**

**1. Phương pháp.**

Áp dụng

✦  $\sqrt{A^2} = |A|.$

✦  $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B.$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 27.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $\sqrt{x^2} = 7.$

b)  $\sqrt{x^2} = |-8|.$

c)  $\sqrt{4x^2} = 6.$

d)  $\sqrt{9x^2} = |-12|.$

Lời giải

a) Ta có  $\sqrt{x^2} = 7 \Leftrightarrow |x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7.$  Vậy  $x = \pm 7.$

b) Ta có  $\sqrt{x^2} = |-8| \Leftrightarrow |x| = 8 \Leftrightarrow x = \pm 8.$  Vậy  $x = \pm 8.$

c) Ta có  $\sqrt{4x^2} = 6 \Leftrightarrow |2x| = 6 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$  Vậy  $x = \pm 3.$

d) Ta có  $\sqrt{9x^2} = |-12| \Leftrightarrow |3x| = 12 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4.$  Vậy  $x = \pm 4.$

**Bài tập 28.** Giải các phương trình sau:

a).  $x^2 - 5 = 0.$

b).  $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0.$

Lời giải

a) Ta có  $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}.$  Vậy  $x = \pm\sqrt{5}.$

b) Ta có  $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{11}x - (\sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{11}.$

Vậy  $x = \sqrt{11}.$

**Bài tập 29.** Giải các phương trình sau:

a).  $\sqrt{2x+5} = \sqrt{3-x}$

b).  $\sqrt{1-x^2} = x-1$

c).  $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = 2x$

d).  $|3x+1| = |x+3|$

e).  $|x+5| + |x^2-25| = 0$

f).  $(x-1)^2 = x^2.$

Lời giải

a).  $\sqrt{2x+5} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x+5 = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{-2}{3} \end{cases}$

$$b). \sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1-x^2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \text{ (Ktm)} \\ x = 1 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

$$c). \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = 2x \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ \begin{cases} x + \frac{1}{2} = 2x \\ x + \frac{1}{2} = -2x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (t/m)} \\ x = -\frac{1}{6} \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases}$$

$$d). |3x+1| = |x+3| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = x+3 \\ 3x+1 = -x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$e). |x+5| + |x^2 - 25| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \\ x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5$$

$$f). (x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = x \\ x-1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 \text{ (vn)} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Bài tập 30.** Giải phương trình:

a).  $\sqrt{9x^2} = 2x+1$

b).  $\sqrt{x^4} = 7$

c).  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x-1$

d).  $\sqrt{x^2} = 7$

e).  $\sqrt{x^2} = |-8|$

f).  $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5$

g).  $\sqrt{x^4} = 9$

h).  $\sqrt{(x+2)^2} = 2x+1$

i).  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$

j).  $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x-3$

k).  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

l).  $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{9x^2 - 24x + 16}$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{9x^2} = 2x+1 \Leftrightarrow 3|x| = 2x+1$

**Trường hợp 1:**  $x \geq 0$ , phương trình trở thành:  $3x = 2x+1 \Leftrightarrow x = 1$  (TM  $x \geq 0$ )

**Trường hợp 2:**  $x < 0$ , phương trình trở thành:  $-3x = 2x+1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$  (TM  $x < 0$ )

Vậy  $S = \{-\frac{1}{5}; 1\}$

b).  $\sqrt{x^4} = 7 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$ .

Vậy tập nghiệm của phương trình  $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

c).  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x-1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 3x-1$

$\Leftrightarrow |x+3| = 3x-1 \quad (1)$

**Cách 1:**  $|x+3| = 3x-1$

**Trường hợp 1:** Nếu  $x \geq -3$

Khi đó (1) trở thành  $\Leftrightarrow x+3 = 3x-1$

$\Leftrightarrow x-3x = -1-3$

$\Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$  (TM)

**Trường hợp 1:** Nếu  $x < -3$

Khi đó (1) trở thành  $\Leftrightarrow -x-3 = 3x-1$

$\Leftrightarrow -x-3x = -1+3 \Leftrightarrow -4x = 2$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$  (Loại vì không TMĐK)

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $S = \{2\}$

**Cách 2:** ĐK:  $x \geq \frac{1}{3}$ . Bình phương hai vế ta có:  $(x+3)^2 = (3x-1)^2$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - (3x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3-3x+1).(x+3+3x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-2x).(4x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x=0 \Leftrightarrow x=2(TM) \\ 4x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}(khôngTM) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $S = \{2\}$

d).  $\sqrt{x^2} = 7 \Leftrightarrow |x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$

Vậy pt có hai nghiệm  $x = \pm 7$

e).  $\sqrt{x^2} = |-8| \Leftrightarrow |x| = 8 \Rightarrow x = \pm 8$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-8; 8\}$ .

f).  $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(1-2x)^2} = 5 \Leftrightarrow |1-2x| = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x=5 \Leftrightarrow x=-2 \\ 1-2x=-5 \Leftrightarrow x=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-3; 2\}$ .

g).  $\sqrt{x^4} = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-3; 3\}$ .

h).  $\sqrt{(x+2)^2} = 2x+1$  (ĐK:  $x \geq \frac{-1}{2}$ )

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - (2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2-2x-1).(x+2+2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x).(3x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 3x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (TMĐK) \\ x=-1 & (khôngTM) \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{1\}$ .

i).  $\sqrt{x^2-6x+9} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} = 5 \Leftrightarrow |x-3| = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=5 \Leftrightarrow x=8 \\ x-3=-5 \Leftrightarrow x=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-2; 8\}$ .

j).  $\sqrt{4x^2-12x+9} = x-3$  (ĐK:  $x \geq 3$ )

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)^2} = x-3 \Leftrightarrow (2x-3)^2 - (x-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3-x+3).(2x-3+x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x.(3x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (KhôngTM) \\ x=2 & (khôngTM) \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \emptyset$ .

k).  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2} \Leftrightarrow (2x-1)^2 - (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-1-x+1).(2x-1+x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x.(3x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{0; \frac{2}{3}\}$ .

l).  $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{9x^2 - 24x + 16}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)^2} = \sqrt{(3x-4)^2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 - (3x-4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-3-3x+4).(2x-3+3x-4) = 0$

$\Leftrightarrow (1-x).(5x-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 5x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{7}{5} \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{1; \frac{7}{5}\}$ .

**Bài tập 31.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2$

b).  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2$

c).  $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2x - 1$

d).  $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = 2$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{2\}$ .

b).  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2$

**Cách 1:** Ta có  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x-1} = 2^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 4(x-1) = (4-x)^2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{2\}$ .

**Cách 2:** Ta có  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1} + 1| = 2 \Rightarrow x = 2$

c).  $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x + 1 = (2x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow x = 1$  (thỏa mãn)

d).  $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4})^2 + 2.2\sqrt{x-4} + 2^2} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4} + 2)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-4} + 2| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} + 2 = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-4} = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{4\}$ .

**Bài tập 32.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x-1}$

b).  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

Lời giải

a). Ta có  $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (tm) \\ x = 3 (tm) \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{1; 3\}$ .

b).  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \Leftrightarrow |x-2| = |2x-3| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (tm) \\ x = \frac{5}{3} (tm) \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{1; \frac{5}{3}\}$

**Bài tập 33.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$

b).  $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$

c).  $\sqrt{(3-2x)^2} = 4$

d).  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2 \quad (x \geq 1)$

Lời giải

a).  $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x \Leftrightarrow |x-3| = 3-x \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

b).  $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(5-2x)^2} = 5-2x$

$$\Leftrightarrow |5-2x| = 5-2x \Leftrightarrow 5-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

c).  $\sqrt{(3-2x)^2} = 4 \Leftrightarrow |3-2x| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x = 4 \\ 3-2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,5 \\ x = -3,5 \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-1,5; -3,5\}$ .

d).  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2 \quad (x \geq 1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 3 \\ \sqrt{x-1} = -1 (loại) \end{cases} \Leftrightarrow x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{10\}$ .

**Bài tập 34.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

b).  $\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x-3}$

c).  $\sqrt{1-x^2} = x-1$

Lời giải

a).  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = 1 \Leftrightarrow |x-1| + |x-3| = 1 \quad (1)$$

• Với  $x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1-x+3-x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} (loại)$

- $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-1+3-x=1 \Leftrightarrow 0x=-1$  (loại)
- Với  $x > 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-1+x-3=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$  (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

b).  $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geq 0 \\ 2x^2-3=4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x=0 \text{ (loại)} \\ x=2 \text{ (t/m)} \end{cases}$

c).  $\sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-1=(x^2-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \text{ (t/m)} \end{cases} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm\sqrt{2}\}$

**Bài tập 35.** Giải các phương trình sau

- a).  $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$       b).  $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}|$   
 c).  $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$       d).  $\sqrt{3x^2-18x+28} + \sqrt{4x^2-24x+45} = -5-x^2+6x$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = x^2-1 \Leftrightarrow |x-1| = x^2-1$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x-1 = x^2-1 \\ x-1 = -(x^2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2-x=0 \\ (x-1)(x+2)=0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x=0 \text{ (loại)} \\ x=1 \text{ (t/m)} \\ x=-2 \text{ (t/m)} \end{cases} \Rightarrow x \in \{1; -2\}$

b).  $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}|$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 = x-\sqrt{3} \\ x^2-3 = -(x-\sqrt{3}) \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) - (x-\sqrt{3}) = 0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) + (x-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{3} = 0 \\ x+\sqrt{3}-1 = 0 \\ x-\sqrt{3} = 0 \\ x+\sqrt{3}+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = 1-\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -1-\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm  $S = \{-2; 1\}$ .

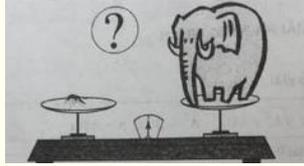
Vậy phương trình có tập nghiệm là  $S = \{-2; 1\}$ .

c).  $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x^2+4x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \Leftrightarrow x=-2 \\ x=-2 \end{cases}$

d).  $\sqrt{3x^2-18x+28} + \sqrt{4x^2-24x+45} = -5-x^2+6x$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{3(x-3)^2+1} + \sqrt{4(x-3)^2+9} = 4-(x-3)^2$  (1)

Ta có:  $\begin{cases} VT(1) \geq 4 \\ VT(1) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow$  phương trình có nghiệm khi hai vế đều bằng 4  $\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

**Bài tập 36. Đố:** Hãy tìm chỗ sai trong phép chứng minh “con muỗi nặng bằng con voi” dưới đây.



Giả sử con muỗi nặng  $m$  (gam), còn con voi nặng  $V$  (gam). Ta có :  $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$

Cộng cả hai vế với  $-2mV$ , ta có:  $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$  hay  $(m - V)^2 = (V - m)^2$

Lấy căn bậc hai mỗi vế của đẳng thức trên, ta được:  $m - V = V - m$

Từ đó ta có  $2m = 2V$ , Suy ra  $V = m$ . Vậy con muỗi nặng bằng con voi (!).

**Lời giải**

Sai lầm ở chỗ: Sau khi lấy căn bậc hai mỗi vế của đẳng thức  $(m - V)^2 = (V - m)^2$  phải được kết quả  $|m - V| = |V - m|$  chứ không thể có  $m - V = V - m$  (chú ý rằng  $\sqrt{A^2} = |A|$ ).

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 11.** Tìm  $x$  biết

a).  $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$  ;

b).  $\sqrt{25-20x+4x^2} + 2x = 5$  ;

c).  $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$  ;

d).  $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$  ;

e).  $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$  ;

g).  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$ .

**Lời giải**

a).  $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$

Ta có biến đổi:  $|x-3| = 3-x$

Ta có hai trường hợp:

**TH 1:** Nếu  $x \geq 3$  thì  $x-3 = 3-x \Leftrightarrow x = 3$  (TM)

**TH 2:** Nếu  $x < 3$  thì  $3-x = 3-x \Leftrightarrow 0 = 0$  (TM)

Vậy tất cả  $x \leq 3$  đều thỏa mãn.

b).  $\sqrt{25-20x+4x^2} + 2x = 5$

Ta có biến đổi:  $\sqrt{(5-2x)^2} = 5-2x$

$\Leftrightarrow |5-2x| = 5-2x$

Ta có hai trường hợp:

**TH 1:** Nếu  $x \leq \frac{5}{2}$  thì  $5-2x = 5-2x \Leftrightarrow 0 = 0$  (TM)

**TH 2:** Nếu  $x > \frac{5}{2}$  thì  $2x-5 = 5-2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$  (L)

Vậy tất cả  $x \leq \frac{5}{2}$  đều thỏa mãn.

c).  $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$

Ta có biến đổi:  $\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} - x \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} - x$

Tương tự ta có: tất cả  $x \leq \frac{1}{4}$  đều thỏa mãn.

d).  $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$ .

Điều kiện:  $x \geq 1$

Ta có biến đổi:  $\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}-1$

Ta có hai trường hợp:

Nếu:  $\sqrt{x-1} \geq 1 \Rightarrow x \geq 2: \sqrt{x-1}-1 = \sqrt{x-1}-1$  (TM)

Nếu:  $\sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow x < 2: 1-\sqrt{x-1} = \sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow x = 2$  (l) (TM)

Vậy:  $x \geq 2$  đều thỏa mãn.

e).  $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5.$

Ta có biến đổi:  $\sqrt{(1-6x)^2} = 5 \Leftrightarrow |1-6x| = 5$

Ta có hai trường hợp:

Nếu:  $x \leq \frac{1}{6}$  thì  $1-6x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$  (TM)

Nếu:  $x > \frac{1}{6}$  thì  $6x-1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$  (TM)

Vậy:  $x = -\frac{2}{3}$  và  $x = 1$  là giá trị cần tìm.

g).  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2.$

Điều kiện:  $x \geq 1$

Ta có biến đổi:  $\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| = 2$

Ta có hai trường hợp:

TH1:  $\sqrt{x-1}+1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

TH2:  $\sqrt{x-1}+1 = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -3$  (VL).

Vậy  $x = 2$  là giá trị cần tìm.

### Dạng 5: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

#### 1. Phương pháp.

Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ:

➤  $A = (\sqrt{A})^2$  (với  $A \geq 0$ ).

➤  $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ .

➤  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

#### 2. Bài tập minh họa.

Bài tập 37. Phân tích thành nhân tử:

a).  $x^2 - 2.$

b).  $x^2 - 7.$

c).  $x^2 + 2\sqrt{15}x + 15.$

d).  $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3.$

Lời giải

a). Ta có  $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ .

b). Ta có  $x^2 - 7 = x^2 - (\sqrt{7})^2 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ .

c). Ta có  $x^2 + 2\sqrt{15}x + 15 = x^2 + 2.x.\sqrt{15} + (\sqrt{15})^2 = (x + \sqrt{15})^2$ .

d). Ta có  $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = (2x)^2 - 2.2x.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (2x - \sqrt{3})^2$ .

#### 3. Bài tập rèn luyện.

Bài 9. Phân tích đa thức thành nhân tử.

a).  $x^2 - 11$  ;

b).  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$  ;

c).  $x - 5$  (với  $x > 0$ ) ;

d).  $5 - 7x^2$  (với  $x > 0$ ).

e).  $3+4x$  (với  $x < 0$ );

Lời giải

a).  $x^2 - 11 = (x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})$ .

b).  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2$ .

c).  $x - 5 = (\sqrt{x} + \sqrt{5})(\sqrt{x} - \sqrt{5})$  (với  $x > 0$ )

d).  $5 - 7x^2 = (\sqrt{5} - \sqrt{7x})(\sqrt{5} + \sqrt{7x})$  (với  $x > 0$ )

e).  $3 + 4x = \sqrt{3}^2 - \sqrt{4x}^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{4x})(\sqrt{3} + \sqrt{4x})$  (với  $x < 0$ )

**Dạng 6. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

**1. Phương pháp.**

Áp dụng

➤ Các hằng đẳng thức đáng nhớ.

➤ và  $A = (\sqrt{A})^2$  để biến đổi về trái thành về phải hoặc ngược lại.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 38.** Chứng minh:

a).  $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ .

b).  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -1$ .

Lời giải

a). Ta có  $(\sqrt{5} - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot 1 + 1^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$ .

b). Áp dụng câu a, ta có:  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5} - 1| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} = -1$ .

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 12.** Chứng minh đẳng thức:

a).  $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$ ;

b).  $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = 2$ ;

c).  $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$ ;

d).  $\sqrt{a + 4\sqrt{a-2}} + 2 + \sqrt{a - 4\sqrt{a-2}} + 2 = 4$  (với  $2 \leq a \leq 6$ ).

Lời giải

a).  $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$

$VT = 5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 4 = \sqrt{5}^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = (\sqrt{5} + 2)^2 = VP$

b). Ta có biến đổi:

$VT = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2} - \sqrt{5}$

$= \sqrt{(\sqrt{5} + 2)^2} - \sqrt{5} = |\sqrt{5} + 2| - \sqrt{5} = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 2 = VP$

c).  $VT = \sqrt{16 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{7} + 7} - \sqrt{7} = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7}^2} - \sqrt{7}$

$= \sqrt{(4 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{7} = |4 + \sqrt{7}| - \sqrt{7} = 4 + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 4 = VP$

d).  $VT = \sqrt{a - 2 + 2 \cdot \sqrt{a-2}} + 2 + \sqrt{a - 2 - 2 \cdot \sqrt{a-2}} + 2 + 4$

$= |\sqrt{a-2} + 2| + |\sqrt{a-2} - 2| = \sqrt{a-2} + 2 + 2 - \sqrt{a-2} = 4 = VP$  (Vì  $2 \leq a \leq 6$ )

**Dạng 7. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC**

**1. Phương pháp.**

➤ Áp dụng bất đẳng thức:  $|A| + |B| \geq |A + B|$ , dấu "="  $\Leftrightarrow A \cdot B \geq 0$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 39.** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a).  $A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

b).  $B = |2x - 1| + |3 - 2x|$

c).  $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

d).  $D = \sqrt{49x^2 - 42x + 9} + \sqrt{49x^2 + 42x + 9}$

**Lời giải**

a).  $A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow A = |x + 1| + |x - 1|$

**Cách 1:**

- Nếu  $x < -1 \Rightarrow A = -x - 1 - x + 1 = -2x > 2(1)$
- Nếu  $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow A = x + 1 - x + 1 = 2(2)$
- Nếu  $x > 1 \Rightarrow A = x + 1 + x - 1 = 2x > 2(3)$
- Từ (1)(2)(3)  $\Rightarrow \text{Min}A = 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

**Cách 2:** Áp dụng bất đẳng thức  $|A| + |B| \geq |A + B|$

$$A = |x + 1| + |x - 1| = |x + 1| + |1 - x| \geq |x + 1 + 1 - x| = 2$$

Vậy  $\text{Min}A = 2 \Leftrightarrow (x + 1)(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

b).  $B = |2x - 1| + |3 - 2x| \Rightarrow \text{Min}B = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

c).  $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = |2x - 1| + |3 - 2x| \geq |(2x - 1) + (3 - 2x)| = 2$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(3 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

d).  $D_{\min} = 6 \Leftrightarrow \frac{-3}{7} \leq x \leq \frac{3}{7}$

**SBÀI 3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Quy tắc khai phương một tích**

➤ Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

➤ Nếu  $A \geq 0, B \geq 0$  thì  $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ .

**Ví dụ 1.** Tính:

a).  $\sqrt{12,1.160}$

b).  $\sqrt{2500.4,9.0,9}$ .

Lời giải

a).  $\sqrt{12,1.160} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{16} = 11.4 = 44$

b).  $\sqrt{2500.4,9.0,9} = \sqrt{25.49.9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{9} = 5.7.3 = 105$

**Ví dụ 2.** Tính:

a).  $\sqrt{41^2 - 40^2}$

b).  $\sqrt{81.6,25 - 2,25.81}$

Lời giải

a).  $\sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{(41-40)(41+40)} = \sqrt{1.81} = 1.9 = 9$

b).  $\sqrt{81.6,25 - 2,25.81} = \sqrt{81.(6,25 - 2,25)} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9.2 = 18$

**Ví dụ 3.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}}$

b).  $\sqrt{16(x^2 - 6x + 9)}$ .

Lời giải

a).  $\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}}$

ĐK:  $x \neq 0$ .

Ta có  $\sqrt{15x^3 \cdot \frac{60}{x}} = \sqrt{900x^2} = 30|x| = \begin{cases} 30x & \text{khi } x \geq 0 \\ -30x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ .

b).  $\sqrt{16(x^2 - 6x + 9)} = \sqrt{16(x-3)^2} = 4|x-3| = \begin{cases} 4(x-3) & \text{khi } x \geq 3 \\ -4(x-3) & \text{khi } x < 3 \end{cases}$ .

**Ví dụ 4.** Rút gọn biểu thức  $M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)}$  với  $0 < x < 1$ .

Lời giải

Ta có  $M = \sqrt{25x^2(x - 2\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{25(\sqrt{x} - 1)^2} = 5|\sqrt{x} - 1|$ .

Vì  $x > 0$  nên  $|x| = x$ .

Vì  $0 < x < 1$  nên  $\sqrt{x} < 1$ . Do đó  $|\sqrt{x} - 1| = 1 - \sqrt{x}$

Vậy  $M = 5x(1 - \sqrt{x})$

**Ví dụ 5.** Đẳng thức  $\sqrt{x(1-y)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-y}$  đúng với những giá trị nào của x và y.

Lời giải

Theo định lí khai phương một tích thì

$\sqrt{x(1-y)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-y}$  khi  $x \geq 0$  và  $1-y \geq 0$  hay  $x \geq 0$  và  $y \leq 1$ .

**Ví dụ 6.** Cho các biểu thức  $M = \sqrt{(x-1)(x+3)}$  và  $N = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+3}$

a). Tìm các giá trị của x để M có nghĩa; N có nghĩa.

b). Với giá trị nào của x thì  $M = N$ ?

Lời giải

a). Tìm các giá trị của  $x$  để  $M$  có nghĩa;  $N$  có nghĩa.

- $M$  có nghĩa khi  $(x-1)(x+3) \geq 0$ .

Trường hợp 1:  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Trường hợp 2:  $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3$

Vậy  $M$  có nghĩa khi  $x \geq 1$  hoặc  $x \leq -3$ .

- $N$  có nghĩa khi  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

b). Để  $M$  và  $N$  đồng thời có nghĩa thì  $x \geq 1$

Khi đó ta có  $M = N$  theo định lí khai phương một tích.

2. Quy tắc nhân các căn bậc hai

➤ Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

➤ Nếu  $A \geq 0, B \geq 0$  thì

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$$

Ví dụ 7. Tính:

a).  $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50}$

b).  $\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{0,2}$

Lời giải

a).  $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{72 \cdot 50} = \sqrt{36 \cdot 100} = 6 \cdot 10 = 60$

b).  $\sqrt{12,8} \cdot \sqrt{0,2} = \sqrt{12,8 \cdot 0,2} = \sqrt{128 \cdot 0,02} = \sqrt{64 \cdot 0,04} = 8 \cdot 0,2 = 1,6$

Ví dụ 8. Tính:

a).  $\sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5}$

b).  $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

Lời giải

a).  $\sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{4,5} = \sqrt{40 \cdot 20 \cdot 4,5} = \sqrt{400 \cdot 9} = 20 \cdot 3 = 60$

b).  $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$

Ví dụ 9. Thực hiện các phép tính:

a).  $(\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}$

b).  $(\sqrt{12} + \sqrt{3})(\sqrt{27} - \sqrt{3})$

c).  $(\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

Lời giải

a).  $(\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = \sqrt{100} + \sqrt{225} - \sqrt{25} = 10 + 15 - 5 = 20$

b).  $(\sqrt{12} + \sqrt{3})(\sqrt{27} - \sqrt{3}) = \sqrt{324} - \sqrt{36} + \sqrt{81} - \sqrt{9} = 18 - 6 + 9 - 3 = 18$

c).  $(\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} - 1) = 5 - \sqrt{5} - \sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1 = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{3}$

Ví dụ 10. Tính:

a).  $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$

b).  $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$

c).  $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$

Lời giải

a).  $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 7 + 2\sqrt{21} + 3 = 10 + 2\sqrt{21}$

b).  $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{8})^2 - 2\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{16} + 2 = 2$

c).  $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}) = (5\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7})^2 = 25 \cdot 3 - 4 \cdot 7 = 47$

**Ví dụ 11.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}}$  với  $x > 0$ .

b).  $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2}$  với  $x > 2$ .

Lời giải

a).  $\sqrt{\frac{3x}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{3x}{5} \cdot \frac{5x}{27}} = \sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{|x|}{3} = \frac{x}{3}$  (Vì  $x > 0$ .)

b).  $\sqrt{x^6 \cdot (x-2)^2} = \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{(x-2)^2} = |x^3| \cdot |x-2| = x^3(x-2)$  (vì  $x > 2$ ).

**Ví dụ 12.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$

b).  $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$

Lời giải

a).  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$  (ĐK:  $x \geq 1$ )

b).  $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} = |\sqrt{x+1}-1|$  (ĐK  $x \geq -1$ )

Nếu  $x \geq 0$  thì  $|\sqrt{x+1}-1| = \sqrt{x+1}-1$

Nếu  $x < 0$  thì  $|\sqrt{x+1}-1| = 1-\sqrt{x+1}$

## B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

### Dạng 1. THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

#### 1. Phương pháp.

- Sử dụng các quy tắc khai phương một tích và quy tắc nhân các căn bậc hai
- Nếu  $A \geq 0, B \geq 0$  thì  $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 1.** Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a).  $\sqrt{0,16.81}$ ;

b).  $\sqrt{3^4 \cdot (-5)^2}$ ;

c).  $\sqrt{16,9.250}$ ;

d).  $\sqrt{5^2 \cdot 4^4}$ .

Lời giải

a) Ta có:  $\sqrt{0,16.81} = \sqrt{0,16} \cdot \sqrt{81} = 0,4 \cdot 9 = 3,6$ .

b) Ta có:  $\sqrt{3^4 \cdot (-5)^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{(-5)^2} = 3^2 \cdot |-5| = 9 \cdot 5 = 45$ .

c) Ta có:  $\sqrt{16,9.250} = \sqrt{169.25} = \sqrt{169} \cdot \sqrt{25} = 13 \cdot 5 = 65$ .

d) Ta có:  $\sqrt{5^2 \cdot 4^4} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{4^4} = 5 \cdot 4^2 = 80$ .

**Bài tập 2.** Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính:

a).  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80}$ ;

b).  $\sqrt{2,45} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{50}$ ;

c).  $\sqrt{0,6} \cdot \sqrt{5,4}$ ;

d).  $\sqrt{8,1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4,5}$ .

Lời giải

a) Ta có:  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{80} = \sqrt{5 \cdot 80} = \sqrt{400} = 20$ .

b) Ta có:  $\sqrt{2,45} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2,45 \cdot 40 \cdot 50} = \sqrt{4900} = 70$ .

c) Ta có:  $\sqrt{0,6} \cdot \sqrt{5,4} = \sqrt{0,6 \cdot 5,4} = \sqrt{3,24} = 1,8$ .

d) Ta có:  $\sqrt{8,1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{4,5} = \sqrt{8,1 \cdot 5 \cdot 4,5} = \sqrt{182,25} = 13,5$ .

**Bài tập 3.** Khai phương tích 13.25.52 được:

a). 2600.

b). 130.

c). 13.

d). 260.

Hãy chọn kết quả đúng.

Lời giải

Ta có:  $\sqrt{13.25.52} = \sqrt{16900} = 130$  (chọn B).

**Bài tập 4.** Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính

a).  $\sqrt{25^2 - 24^2}$ ;      b).  $\sqrt{26^2 - 10^2}$ ;      c).  $\sqrt{137^2 - 88^2}$ ;      d).  $\sqrt{481^2 - 480^2}$ .

Lời giải

a) Ta có:  $\sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{(25-24)(25+24)} = \sqrt{49} = 7$ .

b) Ta có:  $\sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{(26-10)(26+10)} = \sqrt{16.36} = 4.6 = 24$ .

c) Ta có:  $\sqrt{137^2 - 88^2} = \sqrt{(137-88)(137+88)} = \sqrt{49.225} = 7.15 = 105$ .

d) Ta có:  $\sqrt{481^2 - 480^2} = \sqrt{(481-480)(481+480)} = \sqrt{961} = 31$ .

**Bài tập 5.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$       b).  $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$       c).  $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

Lời giải

a)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3+2.\sqrt{3}.1+1} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$

b)  $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}.\sqrt{3}+3} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

c)  $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-2.2.\sqrt{5}+4} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}-2$

**Nhận xét:** Phương pháp giải trong ví dụ này là biến đổi biểu thức lấy căn thành bình phương của tổng hay hiệu hai số rồi áp dụng hằng đẳng thức  $\sqrt{A^2} = |A|$

### 3. Bài tập rèn luyện.

**Bài 1.** Tính

a).  $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24}\right) \cdot \sqrt{6}$       b).  $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$   
 c).  $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cdot \sqrt{12}$       d).  $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$

Lời giải

a).  $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24}\right) \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 6 + \sqrt{\frac{50}{3}} \cdot 6 - \sqrt{24} \cdot 6 = 0$

b).  $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3.2+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$

c).  $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cdot \sqrt{12} = 7$

d).  $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8} = 2(\sqrt{5}-1)$

**Bài 2.** Tính

a).  $\sqrt{55.77.35}$       b).  $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$   
 c).  $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$       d).  $2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$

Lời giải

a).  $\sqrt{55.77.35} = \sqrt{5.11.7.11.5.7} = 5.7.11 = 385$

b).  $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 125 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 2.125 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{2.125}{8.5}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

c).  $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2-1} = 1$

d).  $2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{6} = 9$

**Bài 3. Tính**

a).  $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$

b).  $\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

c).  $(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2$

d).  $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1.$

b).  $\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{18-12} = \sqrt{6}.$

c).  $(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2 = (\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}})^2 + 2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + (\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2$   
 $= \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3-2} = 2\sqrt{3} + 2 = 2(\sqrt{3}+1).$

d).  $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 1 - 2 - 3 + 2\sqrt{2 \cdot 3} = -4 + 2\sqrt{6}.$

**Bài 4. Tính**

a).  $A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

b).  $B = (3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$

c).  $C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

**Lời giải**

a).  $A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} = (\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{15}}$   
 $= (\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})} = \sqrt{10}-\sqrt{6} \cdot \sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})(4+\sqrt{15})}$   
 $= \sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}} \cdot \sqrt{4\sqrt{10}+\sqrt{150}-4\sqrt{6}-\sqrt{90}} = \sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{10}+\sqrt{6})}$   
 $= \sqrt{4} = 2$

b).  $B = (3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} + (3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}$   
 $= \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} (\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}) = 2(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})$   
 $= \sqrt{2}(\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2})$   
 $= \sqrt{2}(\sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}) = \sqrt{2}(\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2})$   
 $= \sqrt{2}(\sqrt{5}-1 + \sqrt{5}+1) = 2\sqrt{10}$

c).  $C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$   
 $\Rightarrow C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$   
 $\Rightarrow C = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{2^2 - (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}) = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$

**Bài 5. Tính**

a).  $A = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$

b).  $\sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

c).  $(\sqrt{12}+3\sqrt{15}-4\sqrt{135})\sqrt{3}$

d).  $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$

**Lời giải**

a).  $A = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5+2\sqrt{3}})^2} = \sqrt{9 - (5+2\sqrt{3})}$

$$= \sqrt{9-5-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

$$\begin{aligned} \text{b). } \sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} &= \sqrt{4+\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2+\sqrt{2}})^2} \\ &= \sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2 \cdot (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c). } (\sqrt{12}+3\sqrt{15}-4\sqrt{135})\sqrt{3} &= \sqrt{36}+3\sqrt{9 \cdot 5}-4\sqrt{9^2 \cdot 5} \\ &= 6+9\sqrt{5}-36\sqrt{5} = 6-27\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d). } 2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{\sqrt{75}}-3\sqrt{5\sqrt{48}} &= 2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-3\sqrt{20\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{80\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-6\sqrt{5\sqrt{3}} \\ &= 8\sqrt{5\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-6\sqrt{5\sqrt{3}} = \sqrt{5\sqrt{3}}(8-2-6) = 0 \end{aligned}$$

**Bài 6.** Thực hiện phép tính

$$\text{a). } \sqrt{(4-2\sqrt{3})(13+4\sqrt{3})}$$

$$\text{b). } (\sqrt{3}-2)(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{3}+2}$$

$$\text{c). } (3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\text{d). } (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

$$\text{e). } \sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\text{f). } \sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\text{g). } (5+4\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{1+\sqrt{2}}) \cdot (3-2\sqrt{1-\sqrt{2}})$$

$$\text{h). } \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

**Lời giải**

$$\text{a). } \sqrt{(4-2\sqrt{3})(13+4\sqrt{3})} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 \cdot (2\sqrt{3}+1)^2} = (\sqrt{3}-1) \cdot (2\sqrt{3}+1).$$

$$\begin{aligned} \text{b). } (\sqrt{3}-2)(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{3}+2} &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6}-2\sqrt{6}-2\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{3}+2} = (\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{\sqrt{3}+2} \\ &= \sqrt{2}(1-\sqrt{3})\sqrt{\sqrt{3}+2} = \sqrt{2}\sqrt{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c). } (3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}} &= \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2} \cdot (2+2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{(6+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d). } (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} &= \sqrt{2} \cdot (4+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{4-\sqrt{15}} \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{4-\sqrt{15}} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2(4-\sqrt{15})} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e). } \sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}-2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{f). } \sqrt{4+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-(2+\sqrt{2})}.$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - 2} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{g). } (5 + 4\sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}) \cdot (3 - 2\sqrt{1 - \sqrt{2}}) &= (5 + 4\sqrt{2}) \cdot [9 - 4(1 - \sqrt{2})] \\ &= (5 + 4\sqrt{2}) \cdot (5 + 4\sqrt{2}) = (5 + 4\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h). } \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \\ = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4 - (2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\ = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1. \end{aligned}$$

## DẠNG 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

### 1. Phương pháp.

- Trước hết tìm điều kiện của biến để biểu thức có nghĩa (nếu cần).
- Áp dụng các quy tắc
  - ① Khai phương một tích  $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$  ( $A \geq 0, B \geq 0$ ) và  $\sqrt{A^2} = |A|$ ,
  - ② Quy tắc nhân các căn bậc hai  $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ .
  - ③ Các hằng đẳng thức để rút gọn.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn rồi tính.

### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 6.** Rút gọn biểu thức sau:

a).  $\sqrt{0,49a^2}$  với  $a \leq 0$ ;

b).  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^4 (6-2a)^2}$  với  $a > 3$ ;

c).  $\sqrt{19,76(2-a)^2}$  với  $a > 2$ ;

d).  $\frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^2(a^2-b^2)^2}$  với  $a > b \geq 0$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\sqrt{0,49a^2} = 0,7|a| = -0,7a$  (do  $a \leq 0$ ).

b) Ta có:  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^4 (6-2a)^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 |6-2a| = \frac{a^2 \cdot 2|3-a|}{4} = \frac{a^2(a-3)}{2}$  (do  $a > 3$ ).

c) Ta có:  $\sqrt{19,76(2-a)^2} = \sqrt{1444(2-a)^2} = 38|2-a| = 38(a-2)$  (do  $a > 2$ ).

d) Ta có:  $\frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^2(a^2-b^2)^2} = \frac{1}{a-b} \cdot |a| \cdot |a^2-b^2| = \frac{1}{a-b} \cdot a \cdot (a-b)(a+b) = a(a+b)$  (do  $a > b \geq 0$ ).

**Bài tập 7.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{\frac{2a}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5a}{18}}$  với  $a \geq 0$ ;

b).  $\sqrt{11a} \cdot \sqrt{\frac{99}{a}}$  với  $a > 0$ ;

c).  $21a - \sqrt{11a} \cdot \sqrt{44a}$  với  $a \geq 0$ ;

d).  $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $\sqrt{\frac{2a}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5a}{18}} = \sqrt{\frac{10a^2}{90}} = \sqrt{\frac{a^2}{9}} = \frac{a}{3}$  (do  $a \geq 0$ ).

b) Ta có:  $\sqrt{11a} \cdot \sqrt{\frac{99}{a}} = \sqrt{11a \cdot \frac{99}{a}} = \sqrt{1089} = 33$ .

c) Ta có:  $21a - \sqrt{11a} \cdot \sqrt{44a} = 21a - \sqrt{484a^2} = 21a - 22a = -a$  (do  $a \geq 0$ )

d) Ta có:  $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2} = (4+a)^2 - \sqrt{64a^2} = (4+a)^2 - 8|a| = 16 + a^2 + 8a - 8|a|$

✦ Nếu  $a \geq 0$  thì  $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2} = 16 + a^2$ .

✦ Nếu  $a < 0$  thì  $(4+a)^2 - \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{160a^2} = 16 + a^2 + 16a$ .

**Bài tập 8.** Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau:

a).  $\sqrt{9(4+20x+25x^2)^2}$  tại  $x = -\sqrt{5}$ ;

b).  $\sqrt{2a^2(2b^2-12b+18)}$  tại  $a = -3, b = \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\sqrt{9(4+20x+25x^2)^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{(2+5x)^4} = 3(2+5x)^2$ .

Thay  $x = -\sqrt{5}$  vào biểu thức đã rút gọn, ta được:

$$3(2+5x)^2 = 3(2-5\sqrt{5})^2 = 3(129-20\sqrt{5}) \approx 252,836.$$

b) Ta có:  $\sqrt{2a^2(2b^2-12b+18)} = \sqrt{4a^2(b^2-6b+9)} = \sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{(b-3)^2} = 2|a| \cdot |b-3|$

Thay  $a = -3, b = \sqrt{3}$  vào biểu thức đã rút gọn, ta được:

$$2|a| \cdot |b-3| = 2|-3| \cdot |\sqrt{3}-3| = 6(3-\sqrt{3}) \approx 7,608.$$

### 3. Bài tập rèn luyện.

**Bài 7.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$

b).  $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0,5\sqrt{8}$

c).  $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$  ( $a \geq 0$ )

d).  $\sqrt{160b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b}$  ( $b \geq 0$ )

**Lời giải**

a).  $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

b).  $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0,5\sqrt{8} = 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

c).  $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a} = 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a} + 7\sqrt{a} = 6\sqrt{a}$

d).  $\sqrt{160b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b} = 4\sqrt{10b} + 4\sqrt{10b} - 9\sqrt{10b} = -\sqrt{10b}$

**Bài 8.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$

b).  $5\sqrt{48} - 4\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108}$

c).  $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$

d).  $2\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{175} + \sqrt{112}$

**Lời giải**

a).  $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50} = 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b).  $5\sqrt{48} - 4\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} = 20\sqrt{3} - 12\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c).  $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45} = 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = \sqrt{5}$

d).  $2\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{175} + \sqrt{112} = 4\sqrt{7} + 6\sqrt{7} - 15\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = -\sqrt{7}$

**Bài 9.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$

b).  $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$

c).  $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$

d).  $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$

**Lời giải**

a).  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60} = 6 + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{15} = 6$

b).  $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250} = 5\sqrt{10} + 10 - 5\sqrt{10} = 10$

c).  $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21} = 14 - 2\sqrt{21} - 7 + 2\sqrt{21} = 7$

d).  $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22} = 33 - 3\sqrt{22} - 11 + 3\sqrt{22} = 22$

**Bài 10.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$

b).  $2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$

Lời giải

a).  $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}} = 8\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} = 0$

b).  $2\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}} = 8\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} = 0$

**Bài 11.** Rút gọn

a).  $A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$

b).  $B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$

c).  $C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$

d).  $D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$

e).  $E = (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3}}$

f).  $F = \frac{3\sqrt{18} - 2\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$

g).  $G = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$

h).  $H = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

i).  $K = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$

Lời giải

a).  $A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b).  $B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{21}}{7}$

c).  $C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

d).  $D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)}{2(\sqrt{5} - 2)} = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

e).  $E = (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1)}{2} = -\frac{3 - 1}{2} = -1$

f).  $F = \frac{3\sqrt{18} - 2\sqrt{8}}{\sqrt{50}} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1$

g).  $G = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

h).  $H = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \sqrt{2} + 1$

i).  $K = \frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{3 \cdot 3\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} = \frac{2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2}{3}$

**Bài 12.** Rút gọn biểu thức sau (loại bỏ dấu căn và dấu trị tuyệt đối):

a).  $\sqrt{0,36x^2}$  với  $x < 0$

b).  $x\sqrt{5}$  với  $x \geq 3$

c).  $\sqrt{27.48(1-x)^2}$  với  $x > 1$

d).  $\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^4(x-y)^2}$

e).  $\sqrt{4 \cdot (x-3)^2}$  với  $x \geq 3$

f).  $\sqrt{9 \cdot (x-2)^2}$  với  $x < 2$

g).  $\left( \frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$  với  $x > 0$

h).  $\sqrt{x^2(x-1)^2}$  với  $x < 0$

i).  $\sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3x}{8}}$  với  $x \geq 0$

j).  $\sqrt{13x} \sqrt{\frac{52}{x}}$  với  $x > 0$

k).  $6\sqrt{\frac{1}{2}}$  với  $x$  bất kỳ.

l).  $(3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$ ,  $\forall x$

Lời giải

a).  $\sqrt{0,36x^2}$  với  $x < 0$ .

Ta có:  $\sqrt{0,36x^2} = \sqrt{(0,36x)^2} = |0,36x| = -0,36x$  (vì  $x < 0$ ).

b)  $\sqrt{x^4(3-x)^2}$  với  $x \geq 3$ .

Ta có:  $\sqrt{x^4(3-x)^2} = \sqrt{[x^2(3-x)]^2} = |x^2(3-x)| = x^2(x-3)$  (vì  $x \geq 3$ ).

c).  $\sqrt{27.48(1-x)^2}$  với  $x > 1$ .

Ta có:  $\sqrt{27.48(1-x)^2} = \sqrt{3^3.2^4.3.(1-x)^2} = \sqrt{[3^2.2^2.(1-x)]^2} = |3^2.2^2.(1-x)| = 36.(x-1)$  (vì  $x > 1$ ).

d).  $\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^4(x-y)^2}$   $x > y > 0$ .

Ta có:  $\frac{1}{x-y} \cdot \sqrt{x^4(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} \sqrt{[x^2(x-y)]^2} = \frac{1}{x-y} |x^2(x-y)| = x^2$   
(vì  $x > y > 0$ ).

e).  $\sqrt{4.(x-3)^2}$  với  $x \geq 3$ .

Ta có:  $\sqrt{4.(x-3)^2} = \sqrt{[2(x-3)]^2} = |2(x-3)| = 2(x-3)$  (vì  $x \geq 3$ ).

f).  $\sqrt{9.(x-2)^2}$  với  $x < 2$ .

Ta có:  $\sqrt{9.(x-2)^2} = \sqrt{[3(x-2)]^2} = |3(x-2)| = 3(2-x)$  (vì  $x < 2$ ).

g).  $\sqrt{x^2(x+1)^2}$  với  $x > 0$ .

Ta có:  $\sqrt{x^2(x+1)^2} = \sqrt{[x(x+1)]^2} = |x(x+1)| = x(x+1)$  (vì  $x > 0$ ).

h)  $\sqrt{x^2(x-1)^2}$  với  $x < 0$ .

Ta có:  $\sqrt{x^2(x-1)^2} = \sqrt{[x(x-1)]^2} = |x(x-1)| = x(x-1)$  (vì  $x < 0$ ).

i).  $\sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3x}{8}}$  với  $x \geq 0$ .

Ta có:  $\sqrt{\frac{2x}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3x}{8}} = \sqrt{\frac{2x.3x}{3.8}} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}$  (vì  $x \geq 0$ ).

j).  $\sqrt{13x} \sqrt{\frac{52}{x}}$  với  $x > 0$ .

Ta có:  $\sqrt{13x} \sqrt{\frac{52}{x}} = \sqrt{\frac{13x.52}{x}} = \sqrt{13.13.4} = 13.2 = 26$ .

k).  $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 3x$  với  $x$  bất kỳ.

Ta có:  $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 3x = \sqrt{5.5.9x^2} - 3x = |5.3x| - 3x$ .

Khi đó  $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 3x = 12x$  nếu  $x \geq 0$ .

Hoặc  $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{45x} - 3x = -18x$  nếu  $x < 0$ .

l).  $(3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2}$ ,  $\forall x$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2} &= (3-x)^2 - \sqrt{0,2 \cdot 180 \cdot x^2} = (3-x)^2 - \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9x^2} \\ &= (3-x)^2 - 6|x|. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } (3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2} = (3-x)^2 - 6x = x^2 - 12x + 9 \text{ nếu } x \geq 0.$$

$$\text{Hoặc } (3-x)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180x^2} = (3-x)^2 + 6x = x^2 + 9 \text{ nếu } x < 0.$$

**Bài 13.** Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a). } A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} \quad (t \leq 0)$$

$$\text{b). } B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \quad (y < 0)$$

$$\text{c). } C = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \geq 1)$$

$$\text{d). } D = \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2}$$

Lời giải

$$\text{a). } A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} = \sqrt{\frac{-2t}{3} \cdot \frac{-3t}{8}} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \frac{-t}{2} \quad (t \leq 0)$$

$$\text{b). } B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \quad (y < 0) \Rightarrow B = -2y$$

$$\text{c). } C = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2 = 1$$

$$\text{d). } \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2} = \sqrt{(\sqrt{x^4 + 4} - x^2)(\sqrt{x^4 + 4} + x^2)} = \sqrt{(x^4 + 4) - (x^2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

**Bài 14.** Rút gọn các biểu thức

$$\text{a). } A = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 0)$$

$$\text{b). } B = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x \neq y)$$

$$\text{c). } \frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} \quad (a \geq 0; a \neq \frac{1}{4})$$

$$\text{d). } D = \frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4 - a}{\sqrt{a} - 2} \quad (a \geq 0; a \neq 4)$$

Lời giải

$$\text{a). } A = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\text{b). } B = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\text{c). } \frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} = \frac{(2\sqrt{a} - 1)(1 - \sqrt{a})}{(2\sqrt{a} - 1)^2} = \frac{1 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$$

$$\text{d). } D = \frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4 - a}{\sqrt{a} - 2} = 0$$

**Bài 15.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a). } \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} \text{ với } x \geq 0$$

$$\text{b). } \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} \quad (x \neq 1, y \neq 1, y \geq 0)$$

Lời giải

$$\text{a) } \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} \text{ với } x \geq 1.$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}.$$

b)  $\frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$ ,  $x \neq 1; y \neq 1; y > 0$ .

Ta có:  $\frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \sqrt{\left(\frac{y-2\sqrt{y}+1}{(x-1)^2}\right)^2} = \frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{y-2\sqrt{y}+1}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{y}-1}{x-1}$ .

**Bài 16.** Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$  tại  $x = -\sqrt{2}$

b).  $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$  tại  $a = 2; b = -\sqrt{3}$

c).  $4x-8 + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$  tại  $x = -\sqrt{2}$

d).  $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$  (với  $x < 3$ ) tại  $x = 0,5$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$  tại  $x = -\sqrt{2}$ .

Ta có:  $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2} = \sqrt{[2(1+3x)^2]^4} = 2(1+3x)^2$ .

Thay  $x = -\sqrt{2}$ , ta được:  $2(1-3\sqrt{2})^2 = 2(1-6\sqrt{2}+18) = 2(19-6\sqrt{2})$ .

b).  $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$  tại  $a = 2; b = -\sqrt{3}$ .

Ta có:  $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)} = 3|a|\sqrt{(b-2)^2} = 3|a||b-2|$ .

Thay  $a = 2; b = -\sqrt{3}$ , ta được:  $3|2||-\sqrt{3}-2| = 6|\sqrt{3}+2|$ .

c).  $4x-8 + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$  tại  $x = -\sqrt{2}$ .

Ta có:  $4x-8 + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}} = 4x-8 + \frac{|x|\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = 4x-8+|x|$ .

Thay  $x = -\sqrt{2}$ , ta được:  $-4\sqrt{2}-8+|-\sqrt{2}| = -3\sqrt{2}-8$ .

d).  $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$  (với  $x < 3$ ) tại  $x = 0,5$ .

Ta có:  $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3} = \sqrt{\left[\frac{(x-2)^2}{3-x}\right]^2} + \frac{x^2-1}{x-3} = \left|\frac{(x-2)^2}{3-x}\right| + \frac{x^2-1}{x-3}$ .

Thay  $x = 0,5$ , ta được:  $\left|\frac{(0,5-2)^2}{3-0,5}\right| + \frac{0,5^2-1}{0,5-3} = \frac{6}{5}$ .

### Dạng 3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

#### 1. Phương pháp.

Áp dụng một số cách sau

① Phương pháp thừa số chung với

★  $x \geq 0$  thì  $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

★  $x \geq 0$  thì  $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$

★  $x \geq 0, a \geq 0$  thì  $x-a = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

② Phương pháp hằng đẳng thức đáng nhớ.

③ Phương pháp nhóm hạng tử.

④ Phương pháp thêm, bớt và tách hạng tử.



$$\begin{aligned} \text{Ta có } A^2 &= \left( \sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} \right)^2 = 7 + \sqrt{13} - 2\sqrt{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})} + (7-\sqrt{13}) \\ &= 14 - 2\sqrt{49-13} = 14 - 2\sqrt{36} = 14 - 12 = 2 \end{aligned}$$

Khi đó  $A^2 = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$ .

### Dạng 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

#### 1. Phương pháp.

Để giải một phương trình chứa căn, ta tiến hành các bước sau:

**Bước 1.** Trước tiên tìm điều kiện để căn thức có nghĩa.

**Bước 2.** Áp dụng một số cách sau

① Sử dụng hằng đẳng thức  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  hoặc  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  để đưa phương trình chứa căn thức về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối với  $\sqrt{A^2} = |A|$ ;

② Áp dụng  $A^2 = B^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$ .

③ Đặt thừa số chung để đưa về phương trình tích:  $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ .

④ Bình phương hai vế  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 15.** Tìm  $x$  biết:

a).  $\sqrt{x^2} = 5$ ;

b).  $\sqrt{25x^2} = 10$ ;

b).  $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 7$ ;

c).  $\sqrt{x - 10\sqrt{x} + 25} = 3$ .

**Lời giải**

a). Ta có  $\sqrt{x^2} = 5 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$ . Vậy  $x \in \{-5; 5\}$ .

b). Ta có  $\sqrt{25x^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(5x)^2} = 10 \Leftrightarrow |5x| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 5x = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ . Vậy  $x \in \{-2; 2\}$ .

c). Ta có  $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-7)^2} = 7 \Leftrightarrow |2x-7| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 = 7 \\ 2x-7 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 14 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 0 \end{cases}$ .

Vậy  $x \in \{0; 7\}$ .

d). Ta có  $\sqrt{x - 10\sqrt{x} + 25} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x} - 5)^2} = 3 \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 5 = 3 \\ \sqrt{x} - 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 8 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ x = 4 \end{cases}$ .

Vậy  $x \in \{4; 64\}$ .

**Bài tập 16.** Giải các phương trình sau:

a).  $4x^2 - 64 = 0$ ;

b).  $\sqrt{x^4} - 7 = 0$ ;

c).  $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$ ;

d).  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$ .

**Lời giải**

a). Ta có  $4x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$ .

Vậy  $S = \{-4; 4\}$ .

b). Ta có  $\sqrt{x^4} - 7 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2)^2} = 7 \Leftrightarrow |x^2| = 7 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} \\ x = -\sqrt{7} \end{cases}$ . Vậy  $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$ .

c). Ta có  $\sqrt{9x^2} = 2x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(3x)^2} = 2x+1 \Leftrightarrow |3x| = 2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 3x = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases} \text{ . Vậy } S = \left\{ -\frac{1}{5}; 1 \right\}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 0 \\ -3x = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

d). Ta có  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{x^2 + 4x + 4} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2}$   
 $\Leftrightarrow |x-2| = |x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = x+2 \\ x-2 = -(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = -4 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ . Vậy  $S = \{0\}$ .

**Bài tập 17.** Giải các phương trình:

a).  $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$

b).  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$

c).  $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$

d).  $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$

Điều kiện xác định:  $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x-3 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \text{ hoặc } x < 1$

Khi đó  $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x-3 = 4(x-1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  (Thỏa mãn điều kiện)

b).  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ .

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ .

Khi đó  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 = 4(x-1) \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

c).  $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$ .

Điều kiện xác định:  $\frac{4x+3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 4x+3 \leq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{4} \\ x > -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq -\frac{3}{4} \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4} \text{ hoặc } x < -1$$

Khi đó  $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \frac{4x+3}{x+1} = 9 \Leftrightarrow 4x+3 = 9x+9 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{5}$  (thỏa mãn điều kiện).

d).  $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$

Điều kiện xác định:  $\begin{cases} 4x+3 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{4} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}$ .

Khi đó  $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{4x+3} = 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3 = 9(x+1) \\ 4x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ x \geq -\frac{3}{4} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

**Bài tập 18.** Giải phương trình ẩn  $y$

a).  $\sqrt{4y-20} + \sqrt{y-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9y-45} = 4$

b).  $2\sqrt{9y-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25y-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49y-147} = 20$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{4y-20} + \sqrt{y-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9y-45} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4y-20} + \sqrt{y-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9y-45} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4(y-5)} + \sqrt{y-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9(y-5)} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(y-5)} + \sqrt{y-5} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{y-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-5} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y-5 \geq 0 \\ y-5 = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 9$$

b).  $2\sqrt{9y-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25y-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49y-147} = 20$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{9(y-3)} - \frac{1}{5}\sqrt{25(y-3)} - \frac{1}{7}\sqrt{49(y-3)} = 20$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{(y-3)} - \sqrt{(y-3)} - \sqrt{(y-3)} = 20$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(y-3)} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-3} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y-3 \geq 0 \\ y-3 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ y = 28 \end{cases} \Rightarrow y = 28$$

**Bài tập 19.** Giải phương trình:  $\sqrt{25 \cdot (x+5)^2} = 15$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{25 \cdot (x+5)^2} = 15$

$$\Leftrightarrow 5|x+5| = 15 \Leftrightarrow |x+5| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 3 \\ x+5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -8. \end{cases}$$

**Bài tập 20.** Giải phương trình:  $\sqrt{9x^2 - 90x + 225} = 6$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sqrt{9x^2 - 90x + 225} = 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9(x^2 - 10x + 25)} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{9(x-5)^2} = 6 \Leftrightarrow 3|x-5| = 6$$

$$\Leftrightarrow |x-5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 2 \\ x-5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 3. \end{cases}$$

**Bài tập 21.** Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 - 25} = 2\sqrt{x-5}$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $\begin{cases} x^2 - 25 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 25 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5$ .

Khi đó  $\sqrt{x^2 - 25} = 2\sqrt{x-5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+5)(x-5)} - 2\sqrt{x-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5}(\sqrt{x+5} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = 0 \\ \sqrt{x+5} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = 0 \\ \sqrt{x+5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \\ x+5 = 4 \end{cases} \begin{cases} x = 5(TM) \\ x = -1(L). \end{cases}$$

**Bài tập 22.** Giải phương trình:  $\sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \frac{1}{5}\sqrt{25x-125} + 6$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \geq 5$ .

Ta có  $\sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = \frac{1}{5}\sqrt{25x-125} + 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \frac{1}{3}\sqrt{9 \cdot (x-5)} = \frac{1}{5}\sqrt{25(x-5)} + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} = \sqrt{x-5} + 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 6$$

$$\Leftrightarrow x-5 = 36 \Leftrightarrow x = 41 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

**Bài tập 23.** Giải phương trình:  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $x > 0$ .

$$\text{Ta có: } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

**Bài tập 24.** Tính cạnh của hình vuông, biết diện tích hình vuông đó bằng diện tích tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 12,8 m và 40 m.

**Lời giải**

Gọi  $x$  ( $x > 0$ , m) là cạnh hình vuông, khi đó diện tích hình vuông bằng:  $S_{hv} = x^2$  (m<sup>2</sup>).

Diện tích tam giác vuông là:  $S_{tgv} = \frac{1}{2} \cdot 12,8 \cdot 40 = 256$  (m<sup>2</sup>).

Theo giả thiết ta có:  $S_{hv} = S_{tgv} \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = \sqrt{256} = 16$  (m).

Vậy cạnh của hình vuông là 16 m.

### 3. Bài tập rèn luyện.

**Bài 17.** Giải các phương trình

a).  $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2$

b).  $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2 - 3x}$

c).  $\sqrt{-x^2 + x + 4} = x - 3$

d).  $\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x^2 - 9} = 0$

Lời giải

a).  $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$

b).  $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2 - 3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x \geq 0 \\ x^2 - 2x = 2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2$

c).  $\sqrt{-x^2 + x + 4} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ -x^2 + x + 4 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$

d). **Cách 1:**  $\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 3 = 4(x^2 - 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(tm) \\ x = \frac{-11}{4}(loai) \end{cases} \Rightarrow x = 3$

**Cách 2:** Với  $x \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x-3}(1 - 2\sqrt{x+3}) = 0 \Rightarrow x = 3(tm)$

**Bài 18.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{9 \cdot (2 - 3x)^2} = 6$

b).  $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$

c).  $\sqrt{10(x-3)} = \sqrt{20}$

d).  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 6$

Lời giải

a).  $\sqrt{9 \cdot (2 - 3x)^2} = 6 \Leftrightarrow 3|2 - 3x| = 6 \Leftrightarrow |2 - 3x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 0 \end{cases}$

b).  $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3} \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 3)(2x + 3)} = 2\sqrt{2x + 3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x - 3} \cdot \sqrt{2x + 3} = 2\sqrt{2x + 3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x + 3} \cdot (\sqrt{2x - 3} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x + 3} = 0 \\ \sqrt{2x - 3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$

c).  $\sqrt{10(x-3)} = \sqrt{20}$

Điều kiện  $x \geq 3$ .

Ta có  $\sqrt{10(x-3)} = \sqrt{20} \Leftrightarrow 10(x-3) = 20 \Leftrightarrow x = 5$  (thỏa mãn điều kiện)

d).  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 3x - 6 \Leftrightarrow |x+3| = 3x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 \geq 0 \\ \begin{cases} x + 3 = 3x - 6 \\ x + 3 = -3x + 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = \frac{9}{2}(t/m) \\ x = \frac{3}{4}(loai) \end{cases} \end{cases}$

**Dạng 5. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

**1. Phương pháp.**

Để chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể dùng các phương pháp sau:

- ① Với  $a \geq 0; b \geq 0$  thì  $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ ;
- ② Biến đổi tương đương.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 25.** Chứng minh:

- a).  $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$
- b).  $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$
- c).  $(\sqrt{2014} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014} + \sqrt{2013}) = 1$
- d).  $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$

**Lời giải**

a).  $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1.$

Ta có  $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1.$

b).  $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8.$

Ta có  $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = \sqrt{81 - 17} = \sqrt{64} = 8.$

c).  $(\sqrt{2014} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014} + \sqrt{2013}) = 1$

Ta có  $(\sqrt{2014} - \sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014} + \sqrt{2013}) = 2014 - 2013 = 1.$

d).  $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9.$

Ta có  $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 8 + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6} = 9.$

**Bài tập 26.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh rằng:  $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}.$

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2$  (vì hai vế đều dương)

$\Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{40} + 8 < 6 + 2\sqrt{42} + 7 \Leftrightarrow 13 + 2\sqrt{40} < 13 + 2\sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{40} < \sqrt{42} \Leftrightarrow 40 < 42.$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

**Bài tập 27.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh rằng:  $\sqrt{3} + 2 < \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1).$

**Lời giải**

Ta có  $(\sqrt{3} + 2)^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3};$

$[\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]^2 = 2(\sqrt{3} + 1)^2 = 2(3 + 2\sqrt{3} + 1) = 8 + 4\sqrt{3}.$

Vì  $7 + 4\sqrt{3} < 8 + 4\sqrt{3}$  nên  $(\sqrt{3} + 2)^2 < [\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]^2.$

Do đó  $\sqrt{3} + 2 < \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1).$

**Bài tập 28.** Chứng minh rằng:  $\sqrt{7} - \sqrt{3} < \sqrt{6} - \sqrt{2}.$

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{7} - \sqrt{3} < \sqrt{6} - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{7} + \sqrt{2} < \sqrt{6} + \sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$

$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{14} < 9 + 2\sqrt{18} \Leftrightarrow 2\sqrt{14} < 2\sqrt{18}.$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

**Bài tập 29.** Cho  $a > 0$ , chứng minh rằng:  $\sqrt{a+9} < \sqrt{a} + 3.$

Lời giải

Ta có  $(\sqrt{a+9})^2 = a+9$ ;

$(\sqrt{a}+3)^2 = a+6\sqrt{a}+9$ .

Do  $a > 0$  nên  $a+9 < a+9+6\sqrt{a}$ , do đó  $(\sqrt{a+9})^2 < (\sqrt{a}+3)^2$ . Vậy  $\sqrt{a+9} < \sqrt{a}+3$ .

**Bài tập 30.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:

a).  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  ;

b).  $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ .

Lời giải

a).  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Ta có  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$  (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $a=b$ ).

Bất đẳng thức cuối này đúng nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

**NHẬN XÉT:** Bất đẳng thức  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  với  $a, b \geq 0$  gọi là bất đẳng thức Cô - si.

b).  $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ .

Ta có  $a, b, c \geq 0$ . Áp dụng bất đẳng thức Cô - si đối với hai số ta được:

$$\begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ b+c &\geq 2\sqrt{bc} \\ c+a &\geq 2\sqrt{ca} \end{aligned}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được  $2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$ .

Suy ra  $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$  (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ ).

**Bài tập 31.** Chứng minh bất đẳng thức:  $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$  với  $a, b \geq 0$ .

Lời giải

Với  $a, b \geq 0$  ta có  $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+2\sqrt{a.b}+b}{4} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq a+2\sqrt{a.b}+b$

$\Leftrightarrow a-2\sqrt{a.b}+b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a.b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ , luôn đúng với  $a, b \geq 0$ . Vậy  $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ .

**Bài tập 32.** Cho  $a \geq \frac{1}{2}$ , chứng minh rằng:  $\sqrt{2a-1} \leq a$ .

Lời giải

Từ bất đẳng thức Cô - si  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$  suy ra  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

Áp dụng bất đẳng thức này cho các số không âm  $2a-1$  và  $1$  ta được:

$$\sqrt{2a-1} = \sqrt{(2a-1).1} \leq \frac{(2a-1)+1}{2} = a.$$

Vậy  $\sqrt{2a-1} \leq a$  (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi  $a=1$ ).

**SBÀI 4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG**

**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC**

**1. Quy tắc phép khai phương của một thương**

Muốn khai phương một thương  $\frac{A}{B}$ , trong đó số  $A$  không âm và số  $B$  dương, ta có thể khai phương lần lượt số  $A$  và số  $B$ , rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (\text{với } A \geq 0, B > 0)$$

**Ví dụ 1.** Tính

a).  $\sqrt{\frac{4}{25} \cdot \frac{49}{121}}$  ;

b).  $\sqrt{\frac{-36a}{49}}$  với  $a < 0$ .

**Lời giải**

a).  $\sqrt{\frac{4}{25} \cdot \frac{49}{121}} = \sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{22}{35}$ .

b).  $\sqrt{\frac{-36a}{49}} = \frac{\sqrt{-36a}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{-a}}{7} = \frac{6\sqrt{-a}}{7}$ .

**Nhận xét:** Vì  $a < 0$  nên  $\sqrt{-a}$  có nghĩa.

**Ví dụ 2.** Tính

a).  $\sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}}$  ;

b).  $\sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44}$ .

**Lời giải**

a).  $\sqrt{\frac{65^2 - 52^2}{225}} = \sqrt{\frac{(65 - 52)(65 + 52)}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 117}{225}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 13 \cdot 9}{15^2}} = \frac{13 \cdot 3}{15} = \frac{39}{15}$ .

b).  $\sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44} = \sqrt{\left(\frac{11}{9} - \frac{7}{9}\right) : \frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{4}{9} : \frac{144}{100}} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{100}{144}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{12}{10}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{10} = \frac{5}{9}$ .

**Ví dụ 3.** Đẳng thức  $\sqrt{\frac{x-5}{y+2}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{y+2}}$  đúng với những giá trị nào của  $x$  và  $y$ ?

**Lời giải**

Theo định lí khai phương một thương thì  $\sqrt{\frac{x-5}{y+2}} = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{y+2}}$

Khi  $x - 5 \geq 0$  và  $y + 2 > 0$  hay  $x \geq 5$  và  $y > -2$ .

**2. Quy tắc phép chia căn bậc hai**

Muốn chia căn bậc hai của số  $A$  không âm cho căn bậc hai của số  $B$  dương, ta có thể chia số  $A$

cho số  $B$  rồi khai phương kết quả đó  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$  ( với  $A \geq 0, B > 0$  )

Ví dụ 4. Tính

a).  $\sqrt{45} : \sqrt{80}$  ;

b).  $\sqrt{(2.3)^5} : \sqrt{2^3.3^5}$  .

Lời giải

a).  $\sqrt{45} : \sqrt{80} = \sqrt{\frac{45}{80}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$  .

b).  $\sqrt{(2.3)^5} : \sqrt{2^3.3^5} = \sqrt{\frac{2^5.3^5}{2^3.3^5}} = \sqrt{2^2} = 2$  .

Ví dụ 5. Tính

a).  $\sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$  ;

b).  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$  .

Lời giải

a).  $\sqrt{54} : \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{54 : 2} : \sqrt{3} = \sqrt{27 : 3} = \sqrt{9} = 3$  .

b).  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} : \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}} = \sqrt{\frac{3}{75}} : \sqrt{\frac{52}{117}} = \sqrt{\frac{1}{25}} : \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$  .

Ví dụ 6. Thực hiện các phép tính

a).  $(\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5}$  ;

b).  $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2}$  .

Lời giải

a).  $(\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{20}) : \sqrt{5} = \sqrt{9} - \sqrt{25} + \sqrt{4} = 3 - 5 + 2 = 0$  .

b).  $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 2\sqrt{9} + 3\sqrt{4} - 6 = 2.3 + 3.2 - 6 = 6$  .

**B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.**

**Dạng 1. THỰC HIỆN PHÉP TÍNH**

**1. Phương pháp.**

- Sử dụng các quy tắc khai phương một thương và quy tắc chia hai căn bậc hai để tính
- Với  $A \geq 0, B > 0$  thì  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

**2. Bài tập minh họa.**

Bài tập 1. ( Bài 28, tr. 18 SGK) Tính :

a).  $\sqrt{\frac{289}{225}}$  .

b).  $\sqrt{2\frac{14}{25}}$  .

c).  $\sqrt{\frac{0,25}{9}}$  .

d).  $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}}$  .

Lời giải

a) Ta có:  $\sqrt{\frac{289}{225}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{225}} = \frac{17}{15}$  .

b) Ta có  $\sqrt{2\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$  .

c) Ta có:  $\sqrt{\frac{0,25}{9}} = \frac{\sqrt{0,25}}{\sqrt{9}} = \frac{0,5}{9}$  .

d)  $\sqrt{\frac{8,1}{1,6}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4}$  .

Bài tập 2. ( Bài 29, tr. 19 SGK) Tính :

a).  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b).  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$  .

c).  $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$  .

d).  $\sqrt{\frac{6^5}{2^3.3^5}}$  .

Lời giải

- a) Ta có:  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{2}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ .
- b) Ta có  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}} = \sqrt{\frac{15}{735}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$ .
- c) Ta có:  $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}} = \sqrt{\frac{12500}{500}} = \sqrt{25} = 5$ .
- d)  $\sqrt{\frac{6^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{\frac{2^5 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^5}} = \sqrt{4} = 2$ .

**Bài tập 3.** (Bài 32, tr. 19 SGK) Tính :

a).  $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{5} \cdot 0,01}$ .      b)  $\sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4}$ .      c).  $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$ .      d)  $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$ .

**Lời giải**

- a) Ta có:  $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{5} \cdot 0,01} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{49}{9} \cdot 0,01} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot 0,1 = \frac{7}{24}$ .
- b) Ta có  $\sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4} = \sqrt{1,44 \cdot (1,21 - 0,4)} = \sqrt{1,44 \cdot 0,81} = \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{0,81} = 1,2 \cdot 0,9 = 1,08$ .
- c) Ta có:  $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165 - 124)(165 + 124)}{164}} = \sqrt{\frac{41 \cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2}$ .
- d)  $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}$ .

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 1.** Tính

a).  $\sqrt{2\frac{7}{81}}$ ; và  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$ ;      b).  $5\sqrt{7} + 7\sqrt{5} : \sqrt{35}$ ;      c).  $2\sqrt{8} - 3\sqrt{3} + 1 : \sqrt{6}$ .

**Lời giải**

- a) Ta có  $\sqrt{2\frac{7}{81}} = \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{81}} = \frac{13}{9}$ . và  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{6}{150}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$ .
- b) Ta có  $5\sqrt{7} + 7\sqrt{5} : \sqrt{35} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{35}} = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ .
- c) Ta có  $2\sqrt{8} - 3\sqrt{3} + 1 : \sqrt{6} = \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{6}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

**Bài 2.** Tính  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$

**Lời giải**

Tính  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{2}} + \frac{2}{5}\sqrt{25 \cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{9}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1 - 9 + 2\sqrt{2}^2}{2\sqrt{2}} = 0$$

Vậy  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}} = 0$

**Bài 3. Tính**

a).  $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$

b).  $\sqrt{36-12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$

c).  $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$

d).  $\sqrt{3-\sqrt{5}} : \sqrt{2}$

e).  $\frac{2\sqrt{12}-3\sqrt{27}+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

f).  $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

g).  $(\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}$

h).  $(12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}$  i).  $\sqrt{32} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}}$

**Lời giải**

a).  $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7} = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{4}{7}$

b).  $\sqrt{36-12\sqrt{5}} : \sqrt{6} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$

c).  $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3} = \frac{2}{3}$

d).  $\sqrt{3-\sqrt{5}} : \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} : 2 = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

e).  $\frac{2\sqrt{12}-3\sqrt{27}+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2^2 \cdot 3}-3\sqrt{3^2 \cdot 3}+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2 \cdot 2-3 \cdot 3+4)}{\sqrt{3}} = 2 \cdot 2-3 \cdot 3+4 = -1$

f).  $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^5}-\sqrt{2 \cdot 5^2}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4-5+2)}{\sqrt{2}} = 1$

g).  $(\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15} = \sqrt{\frac{12}{15}} + \sqrt{\frac{75}{15}} + \sqrt{\frac{27}{15}} = \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}$   
 $= \frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

h).  $(12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10} = 12\sqrt{5} - 8\sqrt{20} + 7\sqrt{45}$   
 $= 12\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 21\sqrt{5} = 17\sqrt{5}$

i).  $\sqrt{32} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} = \sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{18} + \sqrt{\frac{22}{11}} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

**Bài 4. Thực hiện phép tính**

a).  $A = \sqrt{\sqrt{7} + 5} - 2\sqrt{\sqrt{7} + 4} + 1$

b).  $B = \sqrt{4 + \sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3} + 15}} - \sqrt{\sqrt{3} + \frac{5}{2}}$

c).  $C = \sqrt{1 + 2\sqrt{5\sqrt{5} - 11}} - \sqrt{\sqrt{5} - 2}$

d).  $D = \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{27\sqrt{2} - 38}} - \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{2} - 4}}$

e).  $E = \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}} + \sqrt{2} - 1\right) \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

f).  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

g).  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{2}$

h).  $\sqrt{6,5 + \sqrt{12}} + \sqrt{6,5 - \sqrt{12}} + 2\sqrt{6}$

**Lời giải**

a).  $A = \sqrt{\sqrt{7} + 5} - 2\sqrt{\sqrt{7} + 4} + 1 = \sqrt{(\sqrt{7} + 4) - 2\sqrt{\sqrt{7} + 4} \cdot 1 + 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{\sqrt{7} + 4} - 1)^2} + 1$   
 $= \sqrt{\sqrt{7} + 4} - 1 + 1 = \sqrt{\sqrt{7} + 4} = \sqrt{\frac{2\sqrt{7} + 8}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{7} + 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7} + 1)}{2}$

$$\begin{aligned} \text{b). } B &= \sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{6\sqrt{3}+15}} - \sqrt{\sqrt{3}+\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{3}+2\sqrt{6\sqrt{3}+15}} - \sqrt{2\sqrt{3}+5}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}+2\sqrt{3(2\sqrt{3}+5)}+3} - \sqrt{2\sqrt{3}+5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2\sqrt{3}+5}+\sqrt{3})^2} - \sqrt{2\sqrt{3}+5}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+5} + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}+5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c). } C &= \sqrt{1+2\sqrt{5\sqrt{5}-11}} - \sqrt{\sqrt{5}-2} = \sqrt{(\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2} - \sqrt{\sqrt{5}-2} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-2} + \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{5}-2} \\ &= \sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d). } D &= \frac{\sqrt{1+2\sqrt{27\sqrt{2}-38}} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{5-3\sqrt{2}}+\sqrt{3\sqrt{2}-4})^2} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}} \\ &= \frac{\sqrt{5-3\sqrt{2}} + \sqrt{3\sqrt{2}-4} - \sqrt{5-3\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}} = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{\sqrt{3\sqrt{2}-4}} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{e). } E = \left( \sqrt{5-2\sqrt{2\sqrt{2}-2}} + \sqrt{2}-1 \right) \sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Ta có  $\sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\sqrt{2}+1}.$

Khi đó  $5-2\sqrt{2\sqrt{2}-2} = 5-2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} = 2+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}.$

$$= 2(\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}-1)$$

$$= (\sqrt{2+2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{5-2\sqrt{2\sqrt{2}-2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1.$$

Do đó  $E = \left( \sqrt{5-2\sqrt{2\sqrt{2}-2}} + \sqrt{2}-1 \right) \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}.$

$$\text{f). } \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{3}+1|}{\sqrt{2}} - \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{g). } \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{2} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\text{h). } \sqrt{6,5+\sqrt{12}} + \sqrt{6,5-\sqrt{12}} + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

**Dạng 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC**

**1. Phương pháp.**

- Tìm điều kiện của biến để căn thức có nghĩa.
- Áp dụng phép khai phương một thương:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$  ( $A \geq 0, B > 0$ )
- Quy tắc phép chia các căn bậc hai  $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$  ( $A \geq 0, B > 0$ )
- Áp dụng  $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, & \text{khi } A \geq 0 \\ -A, & \text{khi } A < 0 \end{cases}$ .
- Xét các trường hợp  $A \geq 0, A < 0$  để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 4.** Rút gọn biểu thức  $\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}}$ .

Lời giải

Ta có  $\frac{\sqrt{3^{16} - 3^{12}}}{\sqrt{3^{12} - 3^8}} = \sqrt{\frac{3^{12}(3^4 - 1)}{3^8(3^4 - 1)}} = \sqrt{3^4} = 9$ .

**Bài tập 5.** Rút gọn  $A = \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}} \cdot x$  rồi tính giá trị của biểu thức sau với  $x = 6$ .

Lời giải

Ta có  $A = \frac{\sqrt{(165^2 - 124^2)}}{\sqrt{369}} \cdot x = \frac{\sqrt{(165+124)(165-124)}}{\sqrt{369}} \cdot x = \sqrt{\frac{289 \cdot 41}{369}} \cdot x = \sqrt{\frac{289}{9}} \cdot x = \frac{17}{3} \cdot x$ .

Với  $x = 6$  thì  $A = \frac{17}{3} \cdot 6 = 34$ .

**Bài tập 6.** (Bài 30, tr. 19 SGK) Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$  với  $x > 0, y \neq 0$ .

b).  $2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$  với  $y < 0$ .

c).  $5xy \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$  với  $x < 0, y > 0$ .

d).  $0,2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$  với  $x \neq 0, y \neq 0$ .

Lời giải

a) Ta có:  $\frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{|x|}{y^2} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y}$  (do  $x > 0, y \neq 0$ ).

b) Ta có  $2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} = 2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4|y|^2}} = 2y^2 \cdot \frac{x^2}{2|y|} = 2y^2 \cdot \frac{x^2}{-2y} = -x^2y$ .

c) Ta có:  $5xy \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}} = 5xy \cdot \frac{\sqrt{25x^2}}{\sqrt{y^6}} = 5xy \cdot \frac{5|x|}{|y^3|} = 5xy \cdot \frac{-5x}{y^3} = -\frac{25x^2}{y^2}$  (do  $x < 0, y > 0$ ).

d)  $0,2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}} = 0,2x^3y^3 \cdot \frac{4}{x^2y^4} = \frac{0,8x}{y}$ .

**Bài tập 7.** ( Bài 34, tr. 19 SGK) Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $ab^2 \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$  với  $a < 0, b \neq 0$ .

b).  $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$  với  $a > 3$ .

c).  $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$  với  $b < 0, a > -1,5$ .

d).  $(a-b) \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$  với  $a < b < 0$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $ab^2 \sqrt{\frac{3}{a^2b^4}} = ab^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{|ab^2|} = ab^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{-ab^2} = -\sqrt{3}$  ( do  $a < 0, b \neq 0$ ).

b) Ta có  $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}} = \sqrt{\frac{9(a-3)^2}{16}} = \frac{3|a-3|}{4} = \frac{3(a-3)}{4}$  (do  $a > 3$ ).

c) Ta có:  $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{(3+2a)^2}{b^2}} = \frac{|3+2a|}{|b|} = \frac{3+2a}{-b}$ . (do  $b < 0, a > -1,5$ ).

d)  $(a-b) \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}} = (a-b) \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{(a-b)^2}} = (a-b) \frac{\sqrt{ab}}{|a-b|} = (a-b) \frac{\sqrt{ab}}{b-a} = -\sqrt{ab}$  (do  $a < b < 0$ )

**Bài tập 8.** Cho biểu thức  $B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}}$ . Rút gọn rồi tính giá trị của  $B$  với  $x=5; y=10$ .

**Lời giải**

Ta có  $B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}}$ . Điều kiện:  $x > 1; y > 1$ .

Khi đó  $B = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}-1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}} = \sqrt{\frac{x-1}{y-1}}$ .

Với  $x=5; y=10$  thì  $B = \sqrt{\frac{5-1}{10-1}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ .

**Bài tập 9.** Rút gọn biểu thức rồi tính

a).  $A = \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$  tại  $a=7,25; b=3,25$

b).  $B = \sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16}$  tại  $a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{8}{\sqrt{15}}$

c).  $C = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^3 + 5x^2}}{\sqrt{x+5}}$  ( $x \geq 0$ ) tại  $x = \sqrt{5}$

d).  $E = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$  với  $a = \sqrt{5}$

**Lời giải**

a).  $A = \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}} = \sqrt{\frac{a-1}{b-1}} = \frac{5}{3}$  ( $a=7,25, b=3,25$ )

b).  $B = \sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16} = \sqrt{15 \cdot (\frac{8}{\sqrt{15}})^2 - 8 \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} \cdot \sqrt{15} + 16}$   
 $= \sqrt{8^2 - 8^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$

c).  $C = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^3 + 5x^2}}{\sqrt{x+5}} (x \geq 0)$

Do  $x < 5 \Rightarrow 5 - x > 0 \Rightarrow |5 - x| = 5 - x \Rightarrow C = \frac{(x-6)^2 + (x^2 - 36)}{5 - x} = \frac{2x^2 - 12x}{5 - x} = -16$

d).  $D = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$

Ta có:  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^3 + 5x^2}$  và  $\sqrt{x+5}$  luôn có nghĩa.

Vậy  $D$  luôn xác định.

Với  $D = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^3 + 5x^2}}{\sqrt{x+5}} = 5x - \sqrt{125} + \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}}$   
 $= 5x - \sqrt{125} + |x| = 6x - 5\sqrt{5} (x \geq 0) \Rightarrow D = \sqrt{5}$

e).  $E = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$   
 $= \sqrt{(a^2 - 1) + 2\sqrt{a^2 - 1} + 1} - \sqrt{(a^2 - 1) - 2\sqrt{a^2 - 1} + 1}$   
 $= \sqrt{(\sqrt{a^2 - 1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{a^2 - 1} - 1)^2} = |\sqrt{a^2 - 1} + 1| - |\sqrt{a^2 - 1} - 1|$   
 $= |\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} + 1| - |\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1} - 1|$

**Bài tập 10.** Cho biểu thức  $C = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x + 6\sqrt{xy} + 9y}$  với  $x > 0, y > 0$ .

Rút gọn rồi tính giá trị của  $C$  với  $x = 25; y = 81$ .

**Lời giải**

Ta có  $C = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x + 6\sqrt{xy} + 9y} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})^2} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}$ .

Với  $x = 25; y = 81$  thì  $C = \frac{|\sqrt{25} - \sqrt{81}|}{\sqrt{25} + 3\sqrt{81}} = \frac{|5 - 9|}{5 + 3 \cdot 9} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ . Vậy  $C = \frac{1}{8}$ .

### 3. Bài tập rèn luyện.

**Bài 5.** Rút gọn biểu thức

a).  $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{x} - \sqrt{y}^2$  ;

b).  $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}, x \geq 0$

c).  $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \cdot \sqrt{\frac{y-2\sqrt{y}+1}{x-1}^2}, x \neq 1, y \neq 1, y > 0$  .

**Lời giải**

a).  $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{x} - \sqrt{y}^2$  ;

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + 2\sqrt{x^2y} + 2\sqrt{xy^2} - y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{-x\sqrt{y} + 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{xy}. \end{aligned}$$

$$\text{b). } \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}} = \frac{|\sqrt{x} - 1|}{\sqrt{x} + 1}.$$

$$\text{c). } \frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \cdot \sqrt{\frac{y-2\sqrt{y}+1}{x-1^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{y}-1^4}{x-1^4}} = \frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{\sqrt{y}-1^2}{x-1^2} = \frac{\sqrt{y}-1}{x-1}.$$

**Bài 6.** Rút gọn và tính:

$$\text{a). } A = \frac{\sqrt{a - 2\sqrt{ab} + b}}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} \text{ (với } a > b > 0 \text{) tại } a = 36; b = 25.$$

$$\text{b). } B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{3}}}{\sqrt{x}} \text{ (với } x > 3 \text{) tại } x = 81.$$

$$\text{c). } C = \sqrt{\frac{(x-5)^4}{(4-x)^2}} - \frac{x^2 - 25}{x-4} \text{ (} x < 4 \text{), tại } x = 3.$$

$$\text{d). } M = 3x - \sqrt{27} + \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{\sqrt{x+3}} \text{ (} x \geq 0 \text{), tại } x = \sqrt{3}.$$

**Lời giải**

$$\text{a). } A = \frac{\sqrt{a - 2\sqrt{ab} + b}}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$$

$$\text{Với } a > b > 0 \text{ ta có } A = \frac{\sqrt{a - 2\sqrt{ab} + b}}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} = \sqrt{\frac{a - 2ab + b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} = \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \quad (1)$$

Ta thấy  $a = 36; b = 25$  thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Thay } a = 36; b = 25 \text{ vào (1) ta có } A = \sqrt{\sqrt{36} - \sqrt{25}} = \sqrt{1} = 1.$$

**b)** Với  $x > 3$  ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{3}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x-3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}} : \sqrt{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \sqrt{x} \quad (1)$$

Ta thấy  $x = 81$  thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Thay } x = 81 \text{ vào (1) ta có } B = \sqrt{81} = 9.$$

**c)** Với  $x < 4$  ta có

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{(x-5)^4}{(4-x)^2}} - \frac{x^2 - 25}{x-4} = \frac{\sqrt{(x-5)^4}}{\sqrt{(4-x)^2}} - \frac{x^2 - 25}{x-4} = \frac{|(x-5)^2|}{|4-x|} - \frac{x^2 - 25}{x-4} \\ &= \frac{(x-5)^2}{4-x} + \frac{x^2 - 25}{4-x} = \frac{(x-5)^2 + x^2 - 25}{4-x} = \frac{2x^2 - 10x}{4-x} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta thấy  $x = 3$  thỏa mãn điều kiện.

Thay  $x = 3$  vào (1) ta có  $C = \frac{2 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3}{4 - 3} = -12$ .

d) Với  $x \geq 0$  ta có

$$M = 3x - \sqrt{27} + \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{\sqrt{x+3}} = 3x - \sqrt{27} + \sqrt{\frac{x^2(x+3)}{x+3}} = 3x - \sqrt{27} + \sqrt{x^2}$$

$$= 3x - \sqrt{27} + |x| = 3x - \sqrt{27} + x = 4x - \sqrt{27} \quad (1)$$

Ta thấy  $x = \sqrt{3}$  thỏa mãn điều kiện.

Thay  $x = \sqrt{3}$  vào (1) ta có  $M = 4\sqrt{3} - \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$ .

### Dạng 3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

#### 1. Phương pháp.

➤ Tìm điều kiện để căn thức có nghĩa.

➤ Áp dụng:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$ .

➤  $\sqrt{A^2} = |A|$ ; và  $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases} \quad (\text{với } B \geq 0)$ .

➤ **Đặt biệt.** Nếu hai *vế không âm* thì có thể bình phương hai vế để khử dấu căn.

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 11.** (Bài 33, tr. 19 SGK) Giải phương trình:

a).  $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0$ ;

c).  $\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{12} = 0$ ;

b).  $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = 0$ ;

d).  $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$ .

#### Lời giải

a) Ta có  $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{50} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot x = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 5$ . Vậy  $x = 5$ .

b)  $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$ . Vậy  $x = 2$ .

c)  $\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 = \sqrt{12} \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$ .  
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ . Vậy  $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$ .

d)  $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{5}} = \sqrt{20} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 10$ .  
 $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$ .

Vậy  $x_1 = -\sqrt{10}, x_2 = \sqrt{10}$ .

**Bài tập 12.** Tìm  $x$  biết:

a).  $\sqrt{(x-3)^2} = 9$ ;

b).  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6$ .

#### Lời giải

a) Ta có  $\sqrt{(x-3)^2} = 9 \Leftrightarrow |x-3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=9 \\ x-3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-6 \end{cases}$ .

Vậy  $x_1 = 12, x_2 = -6$ .

b)  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = 6 \Leftrightarrow |2x+1| = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=6 \\ 2x+1=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=-\frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{7}{2}.$$

**Bài tập 13.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$

b).  $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$

c).  $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4$

d).  $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4.$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$

Điều kiện xác định:  $x \geq -5$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{x+5} + 4\sqrt{x+5} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+5} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 2$$

$$\Leftrightarrow x+5 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -1$

b).  $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$

Điều kiện xác định:  $x \geq 1$

Ta có  $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} - \frac{15}{2.3}\sqrt{x-1} = 6 + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{x-1} - 5\sqrt{x-1} = 12 + 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 17(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = 17$

c).  $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4$

Điều kiện xác định:  $x \geq 5$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} - \sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 2$$

$$\Leftrightarrow x-5 = 4 \Leftrightarrow x = 9(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = 9$

d)  $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} = 16 - \sqrt{x+1}$

Điều kiện xác định:  $x \geq -1$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = 16 - \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow x+1 = 16 \Leftrightarrow x = 15(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = 15$

**Bài tập 14.** Giải các phương trình

a).  $\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}} = 2.$

b).  $\frac{\sqrt{5x-7}}{\sqrt{2x-1}} = 1.$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}} = 2.$

ĐKXD:  $3x-1$  và  $x+2$  cùng dấu hoặc  $x = \frac{1}{3}$ .

**Trường hợp 1:**  $\begin{cases} 3x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$

**Trường hợp 2:**  $\begin{cases} 3x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$

Vậy ĐKXD là  $x \geq \frac{1}{3}$  hoặc  $x < -2$ .

Bình phương hai vế của phương trình ta được:  $\frac{3x-1}{x+2} = 4$

$$\Leftrightarrow 3x-1=4(x+2) \Leftrightarrow 3x-1=4x+8$$

$$\Leftrightarrow x=-9 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

b).  $\frac{\sqrt{5x-7}}{\sqrt{2x-1}}=1.$

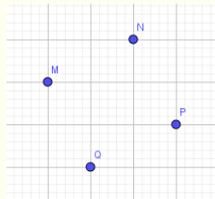
$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} 5x-7 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{5} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{5}.$$

Bình phương hai vế ta được:  $\frac{5x-7}{2x-1}=1 \Leftrightarrow 5x-7=2x-1 \Leftrightarrow 3x=6$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

**Bài tập 15.**(Bài 37, tr. 20 SGK)

**Đố.** Trên lưới ô vuông, mỗi ô vuông cạnh 1cm, cho 4 điểm M, N, P, Q (H.3).



Hãy xác định số đo cạnh, đường chéo và diện tích của tứ giác MNPQ.

**Lời giải**

Tứ giác MNPQ có:

- Các cạnh bằng nhau và cùng bằng đường chéo hình chữ nhật có chiều dài 2cm, chiều rộng 1cm. Do đó độ dài cạnh của tứ giác MNPQ là:  $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$  (cm).
- Các đường chéo bằng nhau và cùng bằng đường chéo hình chữ nhật có chiều dài 3cm, chiều rộng 1cm. Do đó độ dài đường chéo là:  $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$  (cm).
- Vậy tứ giác MNPQ là hình vuông cạnh  $\sqrt{5}$  (cm) nên có diện tích là  $(\sqrt{5})^2 = 5$  (cm<sup>2</sup>).

**4. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 7.** Giải phương trình

a).  $\sqrt{\frac{4x-1}{x+1}}=3;$

b).  $\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x+1}}=3;$

c).  $\sqrt{49x-98}-14\sqrt{\frac{x-2}{49}}=3\sqrt{x-2}+8;$

d).  $\sqrt{25x-25}-\frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}}=6+\sqrt{x-1}.$

**Lời giải**

a) ĐKXD:  $x < -1$  hoặc  $x \geq \frac{1}{4}$ .

Ta có  $\sqrt{\frac{4x-1}{x+1}}=3 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x+1}=9 \Leftrightarrow 4x-1=9x+9 \Leftrightarrow x=-2$  (thỏa mãn ĐKXD).

Vậy phương trình có nghiệm là  $x=-2$ .

b) ĐKXĐ:  $x \geq \frac{1}{4}$ .

Ta có  $\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4x-1}{x+1}} = 3 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x+1} = 9 \Leftrightarrow x = -2$  (không thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) ĐKXĐ:  $x \geq 2$ .

Ta có  $\sqrt{49x-98} - 14\sqrt{\frac{x-2}{49}} = 3\sqrt{x-2} + 8$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49(x-2)} - \frac{14\sqrt{x-2}}{\sqrt{49}} = 3\sqrt{x-2} + 8$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x-2} = 3\sqrt{x-2} + 8$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow x-2 = 16 \Leftrightarrow x = 18$$

Ta thấy  $x = 18$  (thỏa mãn ĐKX Đ). Vậy phương trình có nghiệm  $x = 18$ .

d) ĐKXĐ:  $x \geq 1$ .

Ta có  $\sqrt{25x-25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{25(x-1)} - \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} - \frac{5\sqrt{x-1}}{2} = 6 + \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} = 12 + 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow x-1 = 16 \Leftrightarrow x = 17.$$

Ta thấy  $x = 17$  thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 17$ .

**Bài 8.** Giải phương trình

a).  $\sqrt{3x} = \sqrt{6}$ .      b).  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ .      c).  $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$ .      d).  $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 5$ .

e).  $\sqrt{64x+64} - \sqrt{25x+25} + \sqrt{4x+4} = 20$ .      f).  $2x - \sqrt{25-10x+x^2} = 12$ .

**Lời giải**

a)  $\sqrt{3x} = \sqrt{6}$ .

Điều kiện  $x \geq 0$ .

Ta có  $\sqrt{3x} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$  (tm).

Vậy  $x = 2$ .

b)  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ .

Điều kiện  $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ .

Ta có  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = (2\sqrt{x-1})^2$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = 4(x-1) \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$
 (ktm).

Vậy phương trình vô nghiệm.

c)  $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2.$

Điều kiện  $\begin{cases} \frac{2x-3}{x-1} \geq 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}.$

Ta có  $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 4$   
 $\Leftrightarrow 2x-3 = 4(x-1) \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (tm).$

Vậy  $x = \frac{1}{2}.$

d)  $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(3x-1)^2} = 5 \Leftrightarrow |3x-1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = 5 \\ 3x-1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}.$  Vậy  $x_1 = 2, x_2 = -\frac{4}{3}.$

e)  $\sqrt{64x+64} - \sqrt{25x+25} + \sqrt{4x+4} = 20.$

Điều kiện  $x \geq -1.$

Ta có  $\sqrt{64x+64} - \sqrt{25x+25} + \sqrt{4x+4} = 20$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{64(x+1)} - \sqrt{25(x+1)} + \sqrt{4(x+1)} = 20$   
 $\Leftrightarrow 8\sqrt{x+1} - 5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{x+1} = 20$   
 $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow x+1 = 4^2 \Leftrightarrow x = 17 (tm)$

Vậy  $x = 17.$

f)  $2x - \sqrt{25 - 10x + x^2} = 12.$

Ta có  $2x - \sqrt{25 - 10x + x^2} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{25 - 10x + x^2} = 2x - 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 12 \geq 0 \\ \sqrt{(5-x)^2} = 2x - 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ |5-x| = 2x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ \begin{cases} 5-x = 2x-12 \\ 5-x = 12-2x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x = \frac{17}{3} (ktm) \\ x = 7 (tm) \end{cases}.$  Vậy  $x = 7.$

**Bài 9.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{1-x^2} = x-1$

c).  $\sqrt{2x^2+7} = 2-x$

e).  $\sqrt{x^2-4} + 2-x = 0$

g).  $\sqrt{(2x+4)(x-1)} = x+1$

b).  $\sqrt{x^2+4x+4} = x-2$

d).  $\sqrt{x^2+4x+3} = x-2$

f).  $\sqrt{x^2-4x+4} = 2x-1$

h).  $\sqrt{2x^2+4x-1} = x-2.$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{1-x^2} = x-1$

Điều kiện  $x \geq 1$

$\sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow 1-x^2 = x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (KTM) \\ x = 1 (TM) \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = 1.$

b).  $\sqrt{x^2+4x+4} = x-2$

Điều kiện  $x \geq 2$

$\sqrt{x^2+4x+4} = x-2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4 = x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow 4x+4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 (KTM)$

Vậy phương trình trên vô nghiệm.

<p><b>c).</b> <math>\sqrt{2x^2 + 7} = 2 - x</math>                  Điều kiện <math>x \leq 2</math>                  Ta có <math>\sqrt{2x^2 + 7} = 2 - x \Leftrightarrow 2x^2 + 7 = 4 - 4x + x^2</math>  <math>\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(TM) \\ x = -3(TM) \end{cases}</math>                  Vậy nghiệm của phương trình là:  <math>x = -1, x = -3.</math></p>	<p><b>d).</b> <math>\sqrt{x^2 + 4x + 3} = x - 2</math>                  Điều kiện <math>x \geq 2</math>  <math>\sqrt{x^2 + 4x + 3} = x - 2</math>  <math>\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = x^2 - 4x + 4</math>  <math>\Leftrightarrow 8x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{0} (KTM)</math>                  Vậy phương trình trên vô nghiệm.</p>
<p><b>e).</b> <math>\sqrt{x^2 - 4} + 2 - x = 0</math>                  Điều kiện <math>x \geq 2</math>  <math>\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = x - 2</math>  <math>\Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4</math>  <math>\Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2(TM)</math>                  Vậy nghiệm của phương trình là: <math>x = 2.</math></p>	<p><b>f).</b> <math>\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x - 1</math>                  Điều kiện <math>x \geq \frac{1}{2}</math>                  Ta có <math>\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x - 1</math>  <math>\Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2} = 2x - 1 \Leftrightarrow  x - 2  = 2x - 1</math>  <math>\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2x - 1 \\ x - 2 = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(KTM) \\ x = 1(TM) \end{cases}</math>                  Vậy nghiệm của phương trình là: <math>x = 1</math></p>
<p><b>g).</b> <math>\sqrt{(2x + 4)(x - 1)} = x + 1</math>                  Điều kiện <math>x \geq -1</math>  <math>\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = x^2 + 2x + 1</math>  <math>\Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5}(KTM) \\ x = \sqrt{5}(TM) \end{cases}</math>                  Vậy nghiệm của phương trình là: <math>x = \sqrt{5}</math></p>	<p><b>h).</b> <math>\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x - 2.</math>                  Điều kiện <math>x \geq 2</math>  <math>\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = x^2 - 4x + 4</math>  <math>\Leftrightarrow x^2 + 8x - 5 = 0</math>  <math>\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 16) - 21 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 - 21 = 0</math>  <math>\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = \sqrt{21} \\ x + 4 = -\sqrt{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + \sqrt{21}(KTM) \\ x = -4 - \sqrt{21}(KTM) \end{cases}</math>                  Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.</p>

**Bài 10.** Giải các phương trình sau

- |  |   |
|--|---|
| <b>a).</b> $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} = 5$                                    | <b>b).</b> $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$                    |
| <b>c).</b> $\sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}} = 1$ | <b>d).</b> $\sqrt{x + 2 - 3\sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 2\sqrt{2}.$ |

Lời giải

**a).**  $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} = 5$

Điều kiện  $x \geq 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x - 4 + 4\sqrt{x - 4} + 4} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 4} + 2)^2} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x - 4} + 2 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x - 4} = 3 \Leftrightarrow x - 4 = 9 \Leftrightarrow x = 13(TM)$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = 13$

**b).**  $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$

Điều kiện  $x \geq 1$

$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 1} + 1} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 1)^2} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} + 1 + |\sqrt{x - 1} - 1| = 2$

Nếu  $\sqrt{x-1}-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$  thì  $\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$

Vậy phương trình có nghiệm đúng với mọi  $1 \leq x \leq 2$

Nếu  $\sqrt{x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$  thì  $\sqrt{x-1}+1-1+\sqrt{x-1} = 2$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm đúng với mọi  $x = 2$

c).  $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$

Điều kiện  $x \geq 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2-4\sqrt{x-2}+4} + \sqrt{x-2-6\sqrt{x-2}+9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}-2| + |\sqrt{x-2}-3| = 1$$

Nếu  $2 \leq x \leq 6$  thì  $-\sqrt{x-2}+2-\sqrt{x-2}+3 = 1$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{x-2} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x-2 = 4 \Leftrightarrow x = 6(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 6$

Nếu  $6 < x < 11$  thì  $\sqrt{x-2}-2-\sqrt{x-2}+3 = 1 \Leftrightarrow 0\sqrt{x-2} = 0$

Vậy phương trình có nghiệm đúng với mọi  $6 < x < 11$

Nếu  $x \geq 11$  ta có:  $\sqrt{x-2}-2+\sqrt{x-2}-3 = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 6(KTM)$

Vậy không có giá trị nào của  $x$ .

d).  $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$

Điều kiện  $x \geq \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5-6\sqrt{2x-5}+9} + \sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2x-5}-3| + \sqrt{2x-5}+3 = 4$$

Nếu  $\frac{5}{2} \leq x \leq 7$

Ta có:  $3-\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x-5}+3 = 4 \Leftrightarrow 6 = 4(VL)$

Vậy không có giá trị nào của  $x$ .

Nếu  $x > 7$  thì  $\sqrt{2x-5}-3+\sqrt{2x-5}+3 = 4$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x-5 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}(KTM)$$

Vậy không có giá trị nào của  $x$ .

**Bài 11.** Giải các phương trình sau

a).  $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 - 3x = 7$

b).  $5\sqrt{x^2+5x+28} = x^2+5x+4$

c).  $2\sqrt{2x^2-3x+5} = 2x^2-3x-6$

d).  $\sqrt{2x^2+3x+9} + 2x^2+3x = 33$

Lời giải

a).  $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x = 7$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x + 5 = 12$$

Đặt  $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t \ (t \geq 0)$

Ta có:  $t^2 + t = 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \text{ (KTM)} \\ t = 3 \text{ (TM)} \end{cases}$

Khi  $t = 3$  ta có:  $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -1; x = 4$ .

b).  $5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = x^2 + 5x + 4$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = x^2 + 5x + 28 - 24$$

Đặt  $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = t \ (t \geq 0)$

Ta có:  $5t = t^2 - 24 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ (TM)} \\ t = -3 \text{ (KTM)} \end{cases}$

Khi  $t = 8$  ta có:  $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 28 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -9 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -9; x = 4$ .

c).  $2\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 2x^2 - 3x - 6$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 2x^2 - 3x + 5 - 11$$

Đặt  $\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = t \ (t \geq 0)$

Ta có:  $2t = t^2 - 11 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{10} + 1 \text{ (TM)} \\ t = 1 - \sqrt{10} \text{ (KTM)} \end{cases}$

Khi  $t = 1 + \sqrt{10}$  ta có:  $\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 1 + \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 5 - 11 - 2\sqrt{10} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 6 - 2\sqrt{10} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{57 + 16\sqrt{10}}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{57 + 16\sqrt{10}}}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{3 + \sqrt{57 + 16\sqrt{10}}}{4}; x = \frac{3 - \sqrt{57 + 16\sqrt{10}}}{4}$

d).  $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 2x^2 + 3x = 33$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 2x^2 + 3x + 9 = 42$$

Đặt  $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = t \ (t \geq 0)$

Ta có:  $t + t^2 = 42 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \ (TM) \\ t = -7 \ (KTM) \end{cases}$

Khi  $t = 6$  ta có:  $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 - 36 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-9}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = 3; x = \frac{-9}{2}$

**Bài 12.** Giải các phương trình sau

a).  $1 + \sqrt{3x+1} = 3x$

b).  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 6$

c).  $\sqrt{2 + \sqrt{3x-5}} = \sqrt{x+1}$

d).  $\sqrt{\frac{5x+7}{x+3}} = 4$

**Lời giải**

a).  $1 + \sqrt{3x+1} = 3x$

Điều kiện:  $x \geq \frac{1}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (3x-1)^2 = 3x+1 \Leftrightarrow 9x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ (loai) \\ x = 1 \ (tm) \end{cases}$$

b).  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2} = 3x - 6 \Leftrightarrow |x+3| = 3x - 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 \geq 0 \\ x + 3 = 3x - 6 \\ x + 3 = -3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{9}{2} \ (tm) \\ x = \frac{3}{4} \ (loai) \end{cases}$$

c).  $\sqrt{2 + \sqrt{3x-5}} = \sqrt{x+1}$

Điều kiện:  $\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3x-5}} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2 + \sqrt{3x-5} = x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-5} = x-1 \Leftrightarrow 3x-5 = x^2 - 2x+1 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \ (tm) \\ x = 3 \ (tm) \end{cases}$$

d).  $\sqrt{\frac{5x+7}{x+3}} = 4$

$$\text{Điều kiện: } \frac{5x+7}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+7 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-7}{5} \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7}{5} \leq x < -3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+7 \leq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-7}{5} \\ x < -3 \end{cases}$$

Ta có  $\sqrt{\frac{5x+7}{x+3}} = 4 \Leftrightarrow \frac{5x+7}{x+3} = 16 \Leftrightarrow x = \frac{-41}{11}$  (tm)

**Dạng 4. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

**1. Phương pháp.**

➤ Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

☞ Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng.

☞ Bất đẳng thức đúng thường có dạng  $A^2 \geq 0$ .

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 16.** (Bài 31, tr. 19 SGK)

a). So sánh  $\sqrt{25-16}$  và  $\sqrt{25}-\sqrt{16}$ ;

b). Chứng minh rằng, với  $a > b > 0$  thì  $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ ;  $\sqrt{25}-\sqrt{16} = 5-4 = 1$

Mà  $1 < 3$  do đó  $\sqrt{25}-\sqrt{16} < \sqrt{25-16}$ .

b) Với  $a > b > 0$  thì  $a-b > 0$ .

Ta có:  $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b} \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{a-b} + \sqrt{b} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 < (\sqrt{a-b} + \sqrt{b})^2$

$\Leftrightarrow a < a-b+2\sqrt{b(a-b)}+b \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{b(a-b)}$  (luôn đúng).

Vậy  $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$ .

**Bài tập 17.** (Bài 36, tr. 20 SGK) Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a).  $0,01 = \sqrt{0,0001}$ ;

b).  $-0,5 = \sqrt{-0,25}$ ;

c).  $\sqrt{39} < 7$  và  $\sqrt{39} > 6$ ;

d).  $(4-\sqrt{13}).2x < \sqrt{3}.(4-\sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

a) Đúng, vì  $0,01^2 = 0,0001$ .

b) Sai, vì  $\sqrt{-0,25}$  không có nghĩa.

c) Đúng, vì  $(\sqrt{39})^2 < 7^2$  và  $(\sqrt{39})^2 > 6^2$ .

d) Đúng, vì nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số dương  $\frac{1}{4-\sqrt{13}}$  thì không đổi chiều bất đẳng thức.

**Bài tập 18.**

a). Cho  $a > 0$ . Chứng minh  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ;

b). Cho  $a \geq 0, b \geq 0$ . Chứng minh  $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ ;

c). Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$ ;

d). Chứng minh  $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$  với mọi  $x$ .

**Lời giải**

a). Cho  $a > 0$ . Chứng minh  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ;

Ta có  $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1-2a}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$  (đúng với mọi  $a > 0$ ).

**b).** Cho  $a \geq 0, b \geq 0$ . Chứng minh  $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ ;

$$\text{Với } a \geq 0, b \geq 0 \text{ ta có } \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b) \geq a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

**c).** Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$ ;

Với  $a > 0, b > 0$  ta có

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \leq a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \Leftrightarrow a(\sqrt{b}-\sqrt{a}) - b(\sqrt{b}-\sqrt{a}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(a-b) \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leq 0 \text{ (đúng).}$$

**d).** Chứng minh  $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$  với mọi  $x$ .

$$\text{Ta có } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+2 \geq 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+1) - 2\sqrt{x^2+1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-1)^2 \geq 0.$$

**SBÀI 6 BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI**

**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC**

**1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn**

✦ Với  $B \geq 0$  ta có  $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

**Ví dụ 1.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a).  $\sqrt{45}$  ;                      b).  $\sqrt{2400}$  ;                      c).  $\sqrt{147}$  ;                      d).  $\sqrt{1,25}$  .

Lời giải

a).  $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$  ;                      b).  $\sqrt{2400} = \sqrt{400 \cdot 6} = 20\sqrt{6}$  ;  
 c).  $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = 7\sqrt{3}$  ;                      d).  $\sqrt{1,25} = \sqrt{0,25 \cdot 5} = 0,5\sqrt{5}$  .

**Ví dụ 2.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a).  $\sqrt{50 \cdot 6}$  ;                      b).  $\sqrt{14 \cdot 21}$  ;                      c).  $\sqrt{32 \cdot 45}$  ;                      d).  $\sqrt{125 \cdot 27}$  .

Lời giải

a).  $\sqrt{50 \cdot 6} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$  ;  
 b).  $\sqrt{14 \cdot 21} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7\sqrt{6}$  ;  
 c).  $\sqrt{32 \cdot 45} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 10} = 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{10} = 12\sqrt{10}$  ;  
 d).  $\sqrt{125 \cdot 27} = \sqrt{25 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 15} = 5 \cdot 3 \sqrt{15} = 15\sqrt{15}$  .

**Ví dụ 3.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a).  $\sqrt{18x}$  ;                      b).  $\sqrt{75x^2y}$  ;                      c).  $\sqrt{605x^3y^2}$  .

Lời giải

a).  $\sqrt{18x} = \sqrt{9 \cdot 2x} = 3\sqrt{2x}$  (với  $x \geq 0$ ).  
 b).  $\sqrt{75x^2y} = \sqrt{25x^2 \cdot 3y} = 5|x|\sqrt{3y}$  ( $y \geq 0$ )  

$$= \begin{cases} 5x\sqrt{3y} & \text{khi } x \geq 0 \\ -5x\sqrt{3y} & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

c).  $\sqrt{605x^3y^2} = \sqrt{121x^2 \cdot y^2 \cdot 5x} = 11x|y|\sqrt{5x}$  ( $x \geq 0$ )  

$$= \begin{cases} 11xy\sqrt{5x} & \text{khi } y \geq 0 \\ -11xy\sqrt{5x} & \text{khi } y < 0. \end{cases}$$

**Ví dụ 4.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a).  $\sqrt{128(x-y)^2}$  ;                      b).  $\sqrt{150(4x^2-4x+1)}$  ;                      c).  $\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}$  .

Lời giải

a).  $\sqrt{128(x-y)^2} = \sqrt{64(x-y)^2 \cdot 2} = 8|x-y|\sqrt{2} = \begin{cases} 8(x-y)\sqrt{2} & \text{khi } x \geq y \\ 8(y-x)\sqrt{2} & \text{khi } x < y. \end{cases}$

b).  $\sqrt{150(4x^2 - 4x + 1)} = \sqrt{25 \cdot 6(2x - 1)^2}$

$$= 5|2x - 1|\sqrt{6} = \begin{cases} 5(2x - 1)\sqrt{6} & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ 5(1 - 2x)\sqrt{6} & \text{khi } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

c).  $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \sqrt{(x - 2)^3} = \sqrt{(x - 2)^2 \cdot (x - 2)} = (x - 2)\sqrt{x - 2}$  (với  $x \geq 2$ ).

**2. Đưa thừa số vào trong dấu căn**

✦ Với  $A \geq 0, B \geq 0$  thì  $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ .

✦ Với  $A < 0, B \geq 0$  thì  $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ .

**Ví dụ 5.** Đưa thừa số vào trong dấu căn

a).  $3\sqrt{5}$  ;

b).  $5\sqrt{6}$  ;

c).  $\frac{2}{7}\sqrt{35}$  .

**Lời giải**

a).  $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$  ;

b).  $5\sqrt{6} = \sqrt{5^2 \cdot 6} = \sqrt{150}$  ;

c).  $\frac{2}{7}\sqrt{35} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 35} = \sqrt{\frac{20}{7}}$  .

**Ví dụ 6.** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a).  $-4\sqrt{\frac{1}{8}}$  ;

b).  $-0,06\sqrt{250}$  .

**Lời giải**

a).  $-4\sqrt{\frac{1}{8}} = -\sqrt{4^2 \cdot \frac{1}{8}} = -\sqrt{2}$

b).  $-0,06\sqrt{250} = -\sqrt{(0,06)^2 \cdot 250} = -\sqrt{0,9}$

**Ví dụ 7.** Đưa thừa số vào trong dấu căn

a).  $x\sqrt{x}$

b).  $y\sqrt{\frac{x}{y}}$

c).  $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$  .

**Lời giải**

a).  $x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$  ( $x \geq 0$ )

b).  $y\sqrt{\frac{x}{y}}$

ĐK:  $x, y \geq 0; y \neq 0$

**Xét trường hợp**  $x \geq 0, y > 0$ , ta có  $y\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2 \cdot \frac{x}{y}} = \sqrt{xy}$

**Xét trường hợp**  $x < 0; y < 0$ , ta có  $y\sqrt{\frac{x}{y}} = -\sqrt{y^2 \cdot \frac{x}{y}} = -\sqrt{xy}$

c).  $\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x}}$

ĐK:  $xy > 0$ , ta có  $\frac{x}{y} \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

**Ví dụ 8.** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a).  $-x\sqrt{\frac{3}{x}}$  với  $x > 0$ .

b).  $-x\sqrt{\frac{-1}{x}}$  với  $x < 0$ .

Lời giải

a) Ta có  $-x\sqrt{\frac{3}{x}} = -\sqrt{x^2 \cdot \frac{3}{x}} = -\sqrt{3x}$  với  $x > 0$ .

b) Ta có  $-x\sqrt{\frac{-1}{x}} = -\sqrt{(-x)^2 \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)} = \sqrt{-x}$  với  $x < 0$ .

**Ví dụ 9.** Chỉ ra chỗ sai trong các biến đổi sau:

a).  $x\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3x^2}{7}}$

b).  $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}$

Lời giải

a). Biến đổi  $x\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3x^2}{7}}$  chỉ đúng khi  $x \geq 0$

Nếu  $x < 0$  thì  $x\sqrt{\frac{3}{7}} = -\sqrt{\frac{3x^2}{7}}$

b). Biến đổi  $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = y\sqrt{xy}$  chỉ đúng khi  $x > 0$

Nếu  $x < 0$  thì  $xy\sqrt{\frac{y}{x}} = -y\sqrt{x^2 \cdot \frac{y}{x}} = -y\sqrt{xy}$

**B. CÁC DẠNG TOÁN:**

**Dạng 1: ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN VÀ ĐƯA THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN**

**1. Phương pháp giải**

① Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

➤ Biến đổi biểu thức lấy căn thành **dạng tích**  $A^2B$  trong đó có thừa số là bình phương của một số hoặc một biểu thức.

➤ Thực hiện việc đưa thừa số ra ngoài dấu căn bằng cách áp dụng  $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$  (với  $B \geq 0$ ).

② Đưa thừa số vào trong dấu căn:

➤ Chú ý đến dấu của thừa số trước dấu căn.

➤ Nếu  $A \geq 0$  thì ta nâng  $A$  lên lũy thừa bậc hai rồi viết kết quả vào trong dấu căn:

$$A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B} \quad (\text{với } A \geq 0; B \geq 0).$$

➤ Nếu  $A < 0$  thì ta coi  $A$  như là  $-(-A)$ . Ta nâng  $(-A)$  lên lũy thừa bậc hai rồi viết kết quả vào trong dấu căn. Còn dấu "-" vẫn để đằng trước dấu căn:

$$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B} \quad (\text{với } A < 0; B \geq 0).$$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 1.** (Bài 43, tr. 27 SGK) Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích một cách thích hợp rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

- a).  $\sqrt{54}$ .      b).  $\sqrt{108}$ .      c).  $0,1\sqrt{20000}$ .      d)  $-0,05\sqrt{28800}$ .      e).  $\sqrt{7.63.a^2}$

Lời giải

a) Ta có  $\sqrt{54} = \sqrt{9.6} = 3\sqrt{6}$ .

b) Ta có  $\sqrt{108} = \sqrt{36.3} = 6\sqrt{3}$ .

c) Ta có  $0,1\sqrt{20000} = 0,1\sqrt{10000.2} = 0,1.100\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ .

d) Ta có  $-0,05\sqrt{28800} = -0,05\sqrt{10^2.144.2} = -0,05.10.12\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$ .

e) Ta có  $\sqrt{7.63.a^2} = \sqrt{7^2.9.a^2} = 7.3|a| = 21|a|$ .

**Bài tập 2.** ( Bài 44, tr. 27 SGK) Đưa thừa số vào trong dấu căn (với  $x > 0$  và  $y \geq 0$ ):

- a).  $3\sqrt{5}$ .      b).  $-5\sqrt{2}$ .      c).  $-\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ .      d).  $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ .

Lời giải

a) Ta có  $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2.5} = \sqrt{45}$ .

b) Ta có  $-5\sqrt{2} = -\sqrt{5^2.2} = -\sqrt{50}$ .

c) Ta có: Với  $x > 0$  và  $y \geq 0$ :  $-\frac{2}{3}\sqrt{xy} = -\sqrt{\frac{4xy}{9}}$

d) Ta có: Với  $x > 0$  và  $x\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{\frac{2x^2}{x}} = \sqrt{2x}$ .

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 1.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

- a).  $\sqrt{96.125}$ .      b).  $\sqrt{a^4b^5}$ .  
 c).  $\sqrt{a^6b^{11}}$ .      d).  $\sqrt{a^3(1-a)^4}$  ( $a > 1$ ).  
 e).  $\sqrt{75a^3}$ ;      f).  $\sqrt{98a^5(b^2-6b+9)}$ .

Lời giải

a)  $\sqrt{96.125} = \sqrt{2^5.3.5^3} = \sqrt{2^4.5^2.30} = 20\sqrt{30}$ .

b)  $\sqrt{a^4b^5} = a^2b^2\sqrt{b}$ .

c)  $\sqrt{a^6b^{11}} = |a^3b^5|\sqrt{b}$ .

d) Với  $a > 1$ :  $\sqrt{a^3(1-a)^4} = \sqrt{a^2.a.[(1-a)^2]^2} = a(1-a)^2\sqrt{a}$ .

e)  $\sqrt{75a^3} = \sqrt{5^2.3.a^2.a} = 5\sqrt{3}|a|\sqrt{a} = \begin{cases} 5a\sqrt{3a} & \text{khi } a \geq 0 \\ -5a\sqrt{3a} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$ .

f)  $\sqrt{98a^5(b^2-6b+9)} = \sqrt{7^2.2.a^4.a.(b-3)^2} = \sqrt{7^2.2.(a^2)^2.a.(b-3)^2}$   
 $= 7a^2|b-3|\sqrt{2a} = \begin{cases} 7a^2(b-3)\sqrt{2a} & \text{khi } b \geq 3 \\ 7a^2(3-b)\sqrt{2a} & \text{khi } b < 3 \end{cases}$ .

**Bài 2.** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- a).  $x\sqrt{13}$  với  $x \geq 0$ .      b).  $x\sqrt{2}$  với  $x < 0$ .      c).  $x\sqrt{-\frac{11}{x}}$  với  $x < 0$ .

Lời giải

- a) Với  $x \geq 0$ :  $x\sqrt{13} = \sqrt{13x^2}$ .  
 b) Với  $x < 0$ :  $x\sqrt{2} = -\sqrt{2x^2}$ .  
 c) Với  $x < 0$ :  $x\sqrt{-\frac{11}{x}} = -\sqrt{-\frac{11}{x}x^2} = -\sqrt{-11x}$ .

**Dạng 2: SO SÁNH PHÂN SỐ**

**1. Phương pháp.**

- ① Sử dụng đưa thừa số vào trong dấu căn hoặc ra ngoài dấu căn và chú ý rằng:  
 ✦ Nếu  $0 < A < B$  thì  $A\sqrt{C} < B\sqrt{C}$  (với  $C > 0$ ).  
 ② Sử dụng đưa thừa số vào trong dấu căn rồi so sánh các số trong dấu căn.  
 ✦ Nếu  $0 < A < B$  thì  $\sqrt{A} < \sqrt{B}$ .

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 3.** ( Bài 45, tr. 27 SGK) So sánh :

- a)  $3\sqrt{3}$  và  $\sqrt{12}$ . b) 7 và  $3\sqrt{5}$ .  
 c)  $\frac{1}{3}\sqrt{51}$  và  $\frac{1}{5}\sqrt{150}$ . d)  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$  và  $6\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

**Lời giải**

- a) Ta có  $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$ .  
 Vì  $2 < 3$  và  $\sqrt{3} > 0$  nên  $2\sqrt{3} < 3\sqrt{3}$ . Vậy  $\sqrt{12} < 3\sqrt{3}$ .  
 b) Ta có  $7 = \sqrt{49}, 3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ .  
 Vì  $\sqrt{49} > \sqrt{45} \Rightarrow 7 > 3\sqrt{5}$ . Vậy  $7 > 3\sqrt{5}$ .  
 c) Ta có  $\frac{1}{3}\sqrt{51} = \sqrt{\frac{51}{9}} = \sqrt{\frac{17}{3}}; \frac{1}{5}\sqrt{150} = \sqrt{\frac{150}{25}} = \sqrt{6}$ .  
 Vì  $\sqrt{\frac{17}{3}} < \sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{51} < \frac{1}{5}\sqrt{150}$ . Vậy  $\frac{1}{3}\sqrt{51} < \frac{1}{5}\sqrt{150}$   
 d) Ta có  $\frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}; 6\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = \sqrt{18}$ .  
 Vì  $\sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{18} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6} < 6\sqrt{\frac{1}{2}}$ . Vậy  $\frac{1}{2}\sqrt{6} < 6\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

**Bài tập 4.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh :

- a).  $5\sqrt{6}$  và  $7\sqrt{3}$ . b).  $3\sqrt{2\frac{2}{3}}$  và  $5\sqrt{1\frac{1}{5}}$ .

**Lời giải**

- a)  $5\sqrt{6}$  và  $7\sqrt{3}$ .  
 Ta có  $5\sqrt{6} = \sqrt{25.6} = \sqrt{150}$ ;  
 $7\sqrt{3} = \sqrt{49.3} = \sqrt{147}$   
 Vì  $\sqrt{150} > \sqrt{147}$  nên  $5\sqrt{6} > 7\sqrt{3}$ .  
 b)  $3\sqrt{2\frac{2}{3}}$  và  $5\sqrt{1\frac{1}{5}}$ .  
 Ta có  $3\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{9.\frac{8}{3}} = \sqrt{24}$   
 $5\sqrt{1\frac{1}{5}} = \sqrt{25.\frac{6}{5}} = \sqrt{30}$

Vì  $\sqrt{24} < \sqrt{30}$  nên  $3\sqrt{2\frac{2}{3}} < 5\sqrt{1\frac{1}{5}}$

**Bài tập 5.** Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy so sánh:

a).  $\frac{5}{4}\sqrt{2}$  và  $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ .

b).  $-3\sqrt{11}$  và  $-2\sqrt{23}$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\frac{5}{4}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{25}{16} \cdot 2} = \sqrt{\frac{25}{8}} = \sqrt{3\frac{1}{8}}$

$\frac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 7} = \sqrt{\frac{28}{9}} = \sqrt{3\frac{1}{9}}$

Vì  $\sqrt{3\frac{1}{8}} > \sqrt{3\frac{1}{9}}$  nên  $\frac{5}{4}\sqrt{2} > \frac{2}{3}\sqrt{7}$

b) Ta có  $-3\sqrt{11} = -\sqrt{9 \cdot 11} = -\sqrt{99}$

$-2\sqrt{23} = -\sqrt{4 \cdot 23} = -\sqrt{92}$

Vì  $-\sqrt{99} < -\sqrt{92}$  nên  $-3\sqrt{11} < -2\sqrt{23}$

**Bài tập 6.** Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

a).  $6\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 15\sqrt{\frac{2}{5}}, 9\sqrt{1\frac{2}{9}}$

b).  $-\sqrt{71}, \frac{2}{3}\sqrt{12}, \frac{1}{2}\sqrt{21}, -5\sqrt{3}$

**Lời giải**

a) Ta có  $6\sqrt{3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}; 7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98};$

$15\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{225 \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{90}; 9\sqrt{1\frac{2}{9}} = \sqrt{81 \cdot \frac{11}{9}} = \sqrt{99}$

Vì  $\sqrt{90} < \sqrt{98} < \sqrt{99} < \sqrt{108}$  nên  $15\sqrt{\frac{2}{5}} < 7\sqrt{2} < 9\sqrt{1\frac{2}{9}} < 6\sqrt{3}$

b) Ta có  $\frac{2}{3}\sqrt{12} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 12} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \sqrt{5\frac{1}{3}};$

$\frac{1}{2}\sqrt{21} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 21} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \sqrt{5\frac{1}{4}};$

$-5\sqrt{3} = -\sqrt{25 \cdot 3} = -\sqrt{75}.$

Vì  $-\sqrt{75} < -\sqrt{71} < \sqrt{5\frac{1}{4}} < \sqrt{5\frac{1}{3}}$  nên  $-5\sqrt{3} < \sqrt{71} < \frac{1}{2}\sqrt{21} < \frac{2}{3}\sqrt{12}.$

### 3. Bài tập rèn luyện.

**Bài 3.** So sánh các cặp số:

a).  $4\sqrt{7}$  và  $3\sqrt{13}$ .

b).  $\frac{1}{4}\sqrt{82}$  và  $6\sqrt{\frac{1}{7}}$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $4\sqrt{7} = \sqrt{4^2 \cdot 7} = \sqrt{112}, 3\sqrt{13} = \sqrt{13 \cdot 3^2} = \sqrt{117}$

Vì  $112 < 117$  nên  $\sqrt{112} < \sqrt{117}$ . Vậy  $4\sqrt{7} < 3\sqrt{13}$ .

b) Ta có:  $\frac{1}{4}\sqrt{82} = \sqrt{\frac{82}{4^2}} = \sqrt{\frac{41}{8}}, 6\sqrt{\frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{6^2}{7}} = \sqrt{\frac{36}{7}}$ .

Vì  $\frac{41}{8} < \frac{36}{7}$  nên  $\sqrt{\frac{41}{8}} < \sqrt{\frac{36}{7}}$ . Vậy  $\frac{1}{4}\sqrt{82} < 6\sqrt{\frac{1}{7}}$ .

**DẠNG 3. RÚT GỌN BIỂU THỨC**

**1. Phương pháp.**

➤ Đưa thừa số ra ngoài dấu căn rồi rút gọn các căn thức đồng dạng  $A \geq 0$

$$p\sqrt{A} + q\sqrt{A} - r\sqrt{A} = (p + q - r)\sqrt{A}.$$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 7.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45}$ ;

b).  $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98}$ .

Giải

a) Ta có  $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$

b) Ta có  $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{98} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

**Bài tập 8.** Rút gọn các biểu thức sau :

a).  $2\sqrt{125} - 5\sqrt{45} + 6\sqrt{20}$ ;

b).  $\sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5})$ .

c).  $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt{12}$ .

Lời giải

a)  $2\sqrt{125} - 5\sqrt{45} + 6\sqrt{20} = 2\sqrt{5^2 \cdot 5} - 5\sqrt{3^2 \cdot 5} + 6\sqrt{2^2 \cdot 5} = 10\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$   
 $= 10\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = (10 - 15 + 12)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$ .

b)  $\sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}) = \sqrt{216} + \sqrt{13,5} + \sqrt{37,5}$   
 $= 6\sqrt{6} + \sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{75}{2}} = 6\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{5}{2}\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$ .

c)  $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt{12} = 2\sqrt{5^2 \cdot 3} - 4\sqrt{3 \cdot 3^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3}$   
 $= 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (10 - 12 + 2)\sqrt{3} = 0$ .

**Bài tập 9.** Rút gọn các biểu thức sau với  $x \geq 0$  :

a).  $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$

b).  $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$ .

Lời giải

a) Ta có  $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x} = (2 - 4 - 3)\sqrt{3x} + 27 = -5\sqrt{3x} + 27$ .

b) Ta có  $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28 = 3\sqrt{2x} - 10\sqrt{2x} + 21\sqrt{2x} + 28$   
 $= (3 - 10 + 21)\sqrt{2x} + 28 = 14\sqrt{2x} + 28$ .

**Bài tập 10.** Rút gọn biểu thức  $M = 2x\sqrt{16xy^3} + 7\sqrt{25x^3y^3} - 3y\sqrt{36x^3y}$  với  $x \geq 0; y \geq 0$

Lời giải

Ta có  $M = 2x\sqrt{16xy^3} + 7\sqrt{25x^3y^3} - 3y\sqrt{36x^3y}$   
 $= 8xy\sqrt{xy} + 35xy\sqrt{xy} - 18xy\sqrt{xy} = 25xy\sqrt{xy}$

**Bài tập 11.** Rút gọn

a).  $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$  với  $x \geq 0, y \geq 0$  và  $x \neq y$ .

b).  $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$  với  $a > 0,5$ .

Lời giải

a) Ta có  $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}} = \frac{|x+y|}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{2}} = \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{x-y}$  (vì  $x+y > 0$ ).



**SBÀI 7.**

**TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU**

**A. TÓM TẮT KIẾN THỨC**

**1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn:**

✦ Với  $A, B$  mà  $AB \geq 0$  và  $B \neq 0$ , ta có:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ .

**Ví dụ 1.** Khử mẫu của các biểu thức lấy căn sau a).  $\sqrt{\frac{5}{72}}$ ; b).  $\sqrt{\frac{3}{80}}$  c).  $\sqrt{\frac{2}{75}}$

**Lời giải**

a). Ta có  $\sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{72 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{10}{144}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{10}$

**Nhận xét:**

Nếu bạn nhân cả tử và mẫu của phân số  $\frac{5}{72}$  với 72 thì vẫn ra kết quả nhưng biến đổi phức

tạp hơn:  $\sqrt{\frac{5}{72}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 72}{72 \cdot 72}} = \sqrt{\frac{360}{72^2}} = \frac{6}{72} \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{10}$

Vậy tìm thừa số phụ như nào cho hợp lý?

Trước hết bạn phân tích mẫu số ra thừa số nguyên tố:  $72 = 2^2 \cdot 3^2$ .

Bạn thấy ngay thừa số phụ là 2, lúc đó số mũ của các thừa số nguyên tố đều chẵn.

b). Ta có  $\sqrt{\frac{3}{80}} = \sqrt{\frac{3}{16 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{4^2 \cdot 5^2}} = \sqrt{\frac{15}{20^2}} = \frac{1}{20} \sqrt{15}$ .

c). Ta có  $\sqrt{\frac{2}{75}} = \sqrt{\frac{2}{25 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5^2 \cdot 3^2}} = \sqrt{\frac{6}{15^2}} = \frac{1}{15} \sqrt{6}$ .

**Ví dụ 2.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a).  $\sqrt{\frac{11}{27x}}$

b).  $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}}$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{\frac{11}{27x}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 3x}{27x \cdot 3x}} = \sqrt{\frac{33x}{81x^2}} = \frac{1}{9x} \sqrt{33x}$  (ĐK:  $x > 0$ )

b).  $\sqrt{\frac{3x}{5y^3}} = \sqrt{\frac{3x \cdot 5y}{5y^3 \cdot 5y}} = \sqrt{\frac{15xy}{25y^4}} = \frac{1}{5y^2} \sqrt{15xy}$  (ĐK:  $xy \geq 0; y \neq 0$ )

**Ví dụ 3.** Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a).  $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$

b).  $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$

**Lời giải**

a).  $\sqrt{\frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^4}} = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{x+1}$  (ĐK:  $x > -1$ )

b).  $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x-1}{x^3}} = \sqrt{\frac{x \cdot (x-1)}{x^4}} = \frac{1}{x^2} \sqrt{x \cdot (x-1)}$  (ĐK:  $x \geq 1$  hoặc  $x < 0$ )

**Ví dụ 4.** Rút gọn các biểu thức sau :

a).  $\sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}}$

b).  $\sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5})$ .

**Lời giải**

a)  $\sqrt{200} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{8}} = 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$

b)  $\sqrt{3}(\sqrt{72} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}) = \sqrt{216} + \sqrt{13,5} + \sqrt{37,5}$   
 $= 6\sqrt{6} + \sqrt{\frac{27}{2}} + \sqrt{\frac{75}{2}} = 6\sqrt{6} + \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{5}{2}\sqrt{6} = 5\sqrt{6}.$

**Ví dụ 5.** Rút gọn các biểu thức sau :

a).  $12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$

b).  $4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}}$

**Lời giải**

a)  $12\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = 4\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = -2\sqrt{6}.$

b)  $4\sqrt{\frac{2}{9}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

**Ví dụ 6.** Rút gọn các biểu thức sau :  $P = \sqrt{9ab} + 7\sqrt{\frac{a}{b}} - 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 3ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$  với  $a, b > 0.$

**Lời giải**

Ta có  $P = \sqrt{9ab} + 7\sqrt{\frac{a}{b}} - 5\sqrt{\frac{b}{a}} - 3ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$

$$P = 3\sqrt{ab} + \frac{7}{b}\sqrt{ab} - \frac{5}{a}\sqrt{ab} - 3ab \cdot \frac{1}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{7}{b} - \frac{5}{a}\right)\sqrt{ab}$$

**2. Trục căn thức ở mẫu:**

✦ Với  $B > 0$ , ta có

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B};$$

✦ Với  $A \geq 0$  và  $A \neq B^2$ , ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2};$$

✦ Với  $A \geq 0; B \geq 0$  và  $A \neq B$ , ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}.$$

**Ví dụ 7.** Trục căn thức ở mẫu

a).  $\frac{3 + \sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$

b).  $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$

**Lời giải**

a) Ta có  $\frac{3 + \sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{5\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)}{5}$

b) Ta có  $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2}$

**Ví dụ 8.** Trục căn thức ở mẫu

a).  $\frac{3}{\sqrt{7}};$

b)  $\frac{2}{\sqrt{3}-1};$

c)  $\frac{3}{\sqrt{15}+4};$

**Lời giải**

a)  $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{7}$

$$b) \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

$$c) \frac{3}{\sqrt{15}+4} = \frac{3 \cdot (\sqrt{15}-4)}{(\sqrt{15}-4) \cdot (\sqrt{15}+4)} = \frac{3 \cdot (\sqrt{15}-4)}{15-16} = 3 \cdot (4-\sqrt{15})$$

**Ví dụ 9.** Trục căn thức ở mẫu

a).  $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$

b).  $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

**Lời giải**

a) Ta có  $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{3}-3\sqrt{5})} = \frac{75+45-30\sqrt{15}}{75-45}$   
 $= \frac{30 \cdot (4-\sqrt{15})}{30} = 4-\sqrt{15}$

b)  $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})^2-3} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{1-2\sqrt{2}+2-3}$   
 $= \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}$

**Ví dụ 10.** Rút gọn các biểu thức  $B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

**Lời giải**

Ta có  $B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{6-5}$   
 $B = (\sqrt{5}+\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + \sqrt{6}-\sqrt{5} = 2\sqrt{6}$

**B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA**

**Dạng 1. KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY CĂN**

**1. Phương pháp.**

① Bằng cách nhân tử và mẫu của biểu thức trong căn cho mẫu số rồi rút mẫu ra ngoài căn bằng

công thức:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$  (Với  $A, B$  mà  $AB \geq 0$  và  $B \neq 0$ ).

② Trong thực hành, cụ thể gồm các bước sau :

- Biến đổi mẫu thành bình phương của một số hoặc một biểu thức (nếu cần);
- Khai phương mẫu và đưa ra ngoài dấu căn.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 1.** (Bài 48, 49 tr.19 SGK). Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a).  $\sqrt{\frac{1}{600}}$ ;  $\sqrt{\frac{11}{540}}$ ;  $\sqrt{\frac{3}{50}}$ ;  $\sqrt{\frac{5}{98}}$ ;  $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$ .

b).  $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$ ;  $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$ ;  $\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}$ ;  $\sqrt{\frac{9a^3}{36b}}$ ;  $3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$ .

(Giả thiết các biểu thức có nghĩa).

**Lời giải**

a).  $\sqrt{\frac{1}{600}} = \sqrt{\frac{600}{600^2}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 100}}{600} = \frac{10\sqrt{6}}{600} = \frac{\sqrt{6}}{60}$ ;

$$\sqrt{\frac{11}{540}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 15}} = \frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{15}}{6 \cdot 15} = \frac{\sqrt{165}}{90};$$

$$\sqrt{\frac{3}{50}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 50}{50^2}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 25}}{50} = \frac{5\sqrt{6}}{50} = \frac{\sqrt{6}}{10};$$

$$\sqrt{\frac{5}{98}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{49 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{5}}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{14};$$

$$b). \quad ab\sqrt{\frac{a}{b}} = ab\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{ab}{|b|}\sqrt{ab} = \begin{cases} a\sqrt{ab} & \text{khi } b > 0; \\ -a\sqrt{ab} & \text{khi } b < 0; \end{cases}$$

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{a}{b|a|}\sqrt{ab} = \begin{cases} \frac{\sqrt{ab}}{b} & \text{khi } a > 0 \\ -\frac{\sqrt{ab}}{b} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\frac{1+b}{b^2}} = \frac{\sqrt{1+b}}{|b|};$$

$$\sqrt{\frac{9a^3}{36b}} = \frac{\sqrt{a^3b}}{2|b|} = \frac{|a|\sqrt{ab}}{2|b|} = \frac{a\sqrt{ab}}{2b} \quad (ab \geq 0; b \neq 0).$$

$$3xy\sqrt{\frac{2}{xy}} = 3xy \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{xy} = 3\sqrt{2xy} \quad (\text{vì } xy \geq 0).$$

### 3. Bài tập rèn luyện.

**Bài 1.** Khử mẫu các biểu thức dưới dấu căn rồi thực hiện phép tính:  $2\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - \sqrt{\frac{1}{15}}$ .

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\sqrt{\frac{3}{20}} = 2 \frac{\sqrt{60}}{20} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{15}}{20} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{1}{60}} = \frac{\sqrt{60}}{60} = \frac{2\sqrt{15}}{60} = \frac{\sqrt{15}}{30}$$

$$\sqrt{\frac{1}{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{Vậy } 2\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - \sqrt{\frac{1}{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5} + \frac{\sqrt{15}}{30} - \frac{\sqrt{15}}{15} = \sqrt{15} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{30} - \frac{1}{15} \right) = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

### Dạng 2. TRỤC CĂN Ở MẪU

#### 1. Phương pháp

- Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu để làm mất dấu căn ở mẫu.
- Cụ thể áp dụng các công thức sau:

$$\textcircled{1}. \quad \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}; \quad \textcircled{2}. \quad \frac{A}{\sqrt{B} \pm C} = \frac{A(\sqrt{B} \mp C)}{B - C^2}; \quad \textcircled{3}. \quad \frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{B - C}.$$

**Nhận xét.** Ta gọi  $\sqrt{B} + \sqrt{C}$  và  $\sqrt{B} - \sqrt{C}$  là hai biểu thức liên hợp.

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 2.** (Bài 50, 51, 52 tr.30 SGK). Trục căn ở mẫu với giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa.

$$a). \quad \frac{5}{\sqrt{10}}; \quad \frac{5}{2\sqrt{5}}; \quad \frac{1}{3\sqrt{20}}; \quad \frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}; \quad \frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}} \quad \text{với } b \neq 0; y > 0.$$

b).  $\frac{3}{\sqrt{3}+1}; \frac{2}{\sqrt{3}-1}; \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}; \frac{b}{3+\sqrt{b}}$  với  $b \geq 0$ ;  $\frac{p}{2\sqrt{p}-1}$  với  $p \geq 0, p \neq \frac{1}{4}$ .

c).  $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$  với  $x > 0, y > 0, x \neq y$ ;  $\frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$  với  $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$ .

Lời giải

a).  $\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5})^2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$

$$\frac{1}{3\sqrt{20}} = \frac{1}{3\sqrt{4 \cdot 5}} = \frac{1}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{30};$$

$$\frac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{5\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{5};$$

$$\frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}+b)}{b\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}+b}{b}.$$

b).  $\frac{3}{\sqrt{3}+1} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2};$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1;$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{7+4\sqrt{3}}{4-3} = 7+4\sqrt{3};$$

$$\frac{b}{3+\sqrt{b}} = \frac{b(3-\sqrt{b})}{9-b}; \frac{p}{2\sqrt{p}-1} = \frac{p(2\sqrt{p}+1)}{4p-1} = \frac{2p\sqrt{p}+p}{4p-1};$$

c).  $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = 2(\sqrt{6}+\sqrt{5});$

$$\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}} = \frac{3(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{10-7} = \sqrt{10}-\sqrt{7};$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y};$$

$$\frac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{2ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

**Bài tập 3.** Trục căn thức ở mẫu.

a).  $\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$  với  $a \geq 0; a \neq 1$

b).  $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}$  với  $a > 0, b > 0$  và  $ab = \frac{1}{4}$

Lời giải

a)  $\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{(1-\sqrt{a})^2}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})} = \frac{1-2\sqrt{a}+a}{1-a}$

b)  $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+1)}{a+b+2\sqrt{ab}-1}$

$$= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1}{a + b + 2\sqrt{\frac{1}{4} - 1}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1}{a + b}$$

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 2.** Trục căn ở mẫu:

a).  $\frac{9}{\sqrt{3}}$

b).  $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}};$

c).  $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1};$

d).  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

e).  $\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}};$

f).  $\frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2}}.$

g).  $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}};$

h).  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

**Lời giải**

a). Ta có  $\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$

b).  $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

c).  $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2 - 1} = 3 + 2\sqrt{2}$

d).  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{5 - 3} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$

e).  $\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} = \frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{1 - \sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a} + a$

f).  $\frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{8} - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

g).  $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{3 + 2\sqrt{2} - 3} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

h).  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{6} - 5} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{30}}{12}.$

**Bài 3.** Rút gọn biểu thức:

a).  $A = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}};$

b).  $B = \frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} - \sqrt{6}.$

**Lời giải**

a).  $A = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} = \frac{7 - 4\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3}}{49 - 48} = 14$

b).  $B = \frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} - \sqrt{6} = \frac{15(\sqrt{6} - 1)}{6 - 1} + \frac{4(\sqrt{6} + 2)}{6 - 4} - \frac{12(3 + \sqrt{6})}{9 - 6} - \sqrt{6}.$   
 $= 3(\sqrt{6} - 1) + 2(\sqrt{6} + 2) - 4(3 + \sqrt{6}) - \sqrt{6} = -11$

**Bài 4.** Cho  $x = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{147} - \sqrt{48}}$ . Chứng minh rằng  $3x$  là một số nguyên.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x &= \frac{\sqrt{75} + \sqrt{12}}{\sqrt{147} - \sqrt{48}} = \frac{\sqrt{5^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{3 \cdot 7^2} - \sqrt{4^2 \cdot 3}} = \frac{5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{7\sqrt{3} - 4\sqrt{3}} = \frac{(5\sqrt{3} + 2\sqrt{3})(7\sqrt{3} + 4\sqrt{3})}{(7\sqrt{3} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{3} + 4\sqrt{3})} \\ &= \frac{(5\sqrt{3} + 2\sqrt{3})(7\sqrt{3} + 4\sqrt{3})}{(7\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = \frac{105 + 60 + 42 + 24}{147 - 48} = \frac{231}{99} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Tính  $x$  được  $x = \frac{7}{3}$ , do đó  $3x = 7 \in \mathbb{Z}$

**Bài 5.** Biến đổi  $\frac{26}{10 + 4\sqrt{3}}$  về dạng  $a + b\sqrt{3}$ . tính tích  $ab$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{26}{10 + 4\sqrt{3}} = \frac{13}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{13(5 - 2\sqrt{3})}{(5 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})} = \frac{65 - 26\sqrt{3}}{25 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{65 - 26\sqrt{3}}{13} = 5 - 2\sqrt{3}$$

Vậy  $a = 5; b = -2$ . do đó  $ab = 5 \cdot (-2) = -10$

**Bài 6.** Tính  $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} \\ &= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{(\sqrt{1} + \sqrt{2})(\sqrt{1} - \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{(\sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{3} - \sqrt{4})} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{(\sqrt{99} + \sqrt{100})(\sqrt{99} - \sqrt{100})} \\ &= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{3 - 4} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} \\ &= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{-1} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{-1} \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{100} - \sqrt{99} = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 10 - 1 = 9. \end{aligned}$$

### Dạng 3. RÚT GỌN BIỂU THỨC

#### 1. Phương pháp.

Thực hiện các phép biến đổi căn thức:

①.  $\sqrt{A^2} = |A|$ .

②.  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$  (với  $A \geq 0, B > 0$ ).

③.  $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$  (với  $B \geq 0$ ).

④.  $\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} \mp \sqrt{C})}{B - C}$  ( $B \geq 0, C \geq 0, B \neq C$ ).

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 4.** Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức chữ đều có nghĩa):

a).  $\sqrt{18(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$ ;

c)  $\sqrt{\frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}}$ ;

b).  $ab\sqrt{1 + \frac{1}{a^2 b^2}}$ ;

d)  $\frac{a + \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ .

Lời giải

a).  $\sqrt{18(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 \cdot 9(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = 3|\sqrt{2} - \sqrt{3}| \sqrt{2} = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2} = 3\sqrt{6} - 6$ .

$$b). ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}} = ab\sqrt{\frac{a^2b^2+1}{a^2b^2}} = \frac{ab}{|ab|}\sqrt{a^2b^2+1} = \begin{cases} \sqrt{a^2b^2+1} & \text{neu } ab > 0 \\ -\sqrt{a^2b^2+1} & \text{neu } ab < 0. \end{cases}$$

$$c). \sqrt{\frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4}} = \sqrt{\frac{ab+a}{b^4}} = \frac{\sqrt{ab+a}}{b^2}.$$

$$d). \frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}.$$

Cách khác:  $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a+\sqrt{ab})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}(a-b)}{a-b} = \sqrt{a}.$

**Bài tập 5.** Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức chữ đều có nghĩa):

$$\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}; \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}; \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}; & \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{1-\sqrt{3}} = -\sqrt{5}; \\ \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} &= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{6}}{2}; & \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{1-\sqrt{a}} = -\sqrt{a}; \\ \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2} &= \frac{\sqrt{p}(\sqrt{p}-2)}{\sqrt{p}-2} = \sqrt{p}. \end{aligned}$$

**Bài tập 6.** Xét biểu thức:  $A = \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

- Rút gọn A;
- Biết  $a \geq 1$ , hãy so sánh A và |A|;
- Tìm a để  $A = 2$ ;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

a). (ĐK  $a \geq 0$ )

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1 \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a^3+1})}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} + 1 = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{a-\sqrt{a}+1} - (2\sqrt{a}+1) + 1 \\ &= a + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 1 + 1 = a - \sqrt{a} \end{aligned}$$

Với  $a \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} - 1 \geq 0$ . và  $a \geq 1 \Rightarrow a \geq 0$

Suy ra  $A = a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) \geq 0$

Khi đó  $A \geq 0 \Rightarrow |A| = A$ . Vậy  $|A| = A$ .

c). Tìm a để  $A = 2$

$$\begin{aligned} a - \sqrt{a} &= 2 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} - 2 = 0 \Leftrightarrow a + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a}+1) - 2(\sqrt{a}+1) &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}+1=0 \\ \sqrt{a}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=-1(VN) \\ \sqrt{a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=4 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được  $a = 4$  thì  $A = 2$ .

$$d). A = a - \sqrt{a} = a - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Vì  $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  với mọi  $a$ .

Nên  $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$  với mọi  $a$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng  $-\frac{1}{4}$  khi và chỉ khi  $\sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

**Bài tập 7.** Xét biểu thức:  $B = \left(\frac{3}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right)$

a). Rút gọn  $B$ ;

b). Tìm giá trị của  $B$  nếu  $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ ;

c). Với giá trị nào của  $a$  thì  $\sqrt{B} > B$ .

**Lời giải**

a). Điều kiện  $-1 < a < 1$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{3}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) \\ &= \left(\frac{3 + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}}\right) : \left(\frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}\right) = \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{1-a}}{3 + \sqrt{1-a^2}} = \sqrt{1-a} \end{aligned}$$

b). Với  $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ ; Khi đó:

$$B = \sqrt{1-a} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4 - 3}} = \sqrt{3} + 1$$

c). Với  $-1 < a < 1$ , ta có:  $\sqrt{B} > B \Leftrightarrow \sqrt{B}(1 - \sqrt{B}) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{B} > 0 \\ 1 - \sqrt{B} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ \sqrt{B} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < B < 1$$

Khi đó  $0 < \sqrt{1-a} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-a < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ .

Kết hợp với điều kiện  $-1 < a < 1$  ta được  $0 < a < 1$

Vậy  $0 < a < 1$  thì  $\sqrt{B} > B$ .

**Bài tập 8.** Cho  $a > b > 0$ , chứng minh rằng  $\frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a^2 - 2ab + b^2)}{75a^4b}} = \frac{2}{15} \sqrt{6b}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a^2 - 2ab + b^2)}{75a^4b}} &= \frac{a^2b}{a-b} \sqrt{\frac{8(a-b)^2 \cdot b}{75a^4b \cdot b}} \\ &= \frac{a^2b}{a-b} \cdot \frac{2(a-b)}{5a^2b} \cdot \sqrt{\frac{2b}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{2b \cdot 3}{9}} = \frac{2}{15} \sqrt{6b}. \end{aligned}$$

Ta thấy vế trái đúng bằng vế phải.

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 7.** Rút gọn các biểu thức sau (giả sử các biểu thức chữ đều có nghĩa):

- |  |   |   |
|--|---|---|
| a). $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ;  | e). $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ (với $x \geq 0$ ). | b). $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}}$ ; |
| c). $\frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24-4\sqrt{3}}$ ;  | d). $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$ ;              | g). $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ ;                          |
| f). $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ ; | h). $\frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30-\sqrt{2}}}$ .               |   |

**Lời giải**

a)  $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+2.3\sqrt{2}+2} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2}$ .

b)  $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{3^2}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$ .

c)  $\frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24-4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(13-4\sqrt{3})}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}(12-2.2\sqrt{3}.1+1)}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{3}-1)^2}{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}$ .

d)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2\sqrt{3}+2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

e)  $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$

Với  $0 \leq x < 1$  thì  $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ .

Với  $x=1$  thì  $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1} = \frac{0}{\sqrt{x}+1} = 0$ .

Với  $x > 1$  thì  $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ .

f)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+(2\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}$   
 $= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{2}(2+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2} = 1+\sqrt{2}$ .

g)  $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3-2.\sqrt{3}.1+1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

h)  $\frac{\sqrt{8-\sqrt{15}}}{\sqrt{30-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{16-2\sqrt{15}}{15-2\sqrt{15}}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{15-2.\sqrt{15}.1+1}{15-2\sqrt{15}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{15}-1)^2}{2(\sqrt{15}-1)}} = \frac{\sqrt{15}-1}{2(\sqrt{15}-1)} = \frac{1}{2}$ .

**Bài 8.** Chứng minh đẳng thức:

a).  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b} = 1$  ( $a \geq 0, b \geq 0, a \neq 0$ );

b).  $\frac{a\sqrt{b}+b}{a-b} \sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}} (\sqrt{a}+\sqrt{b}) = b$  ( $a > b > 0$ )

**Lời giải**

a). Ta có  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{2b}{a-b}$  ( $a \geq 0, b \geq 0, a \neq 0$ );

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - \sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{2b}{a-b}$$

$$= \frac{a + \sqrt{ab} - \sqrt{ab} + b}{a-b} - \frac{2b}{a-b}$$

$$= \frac{a-b}{a-b} = 1$$

b). Ta có  $\frac{a\sqrt{b}+b}{a-b} \sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}} (\sqrt{a}+\sqrt{b})$  ( $a > b > 0$ )

$$= \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \sqrt{\frac{b(a+b-2\sqrt{ab})}{a^2+2a\sqrt{b}+b}} (\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$= \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+\sqrt{b})^2}} = \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})} = b$$

**Dạng 4. PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ**

**1. Phương pháp.**

**Áp dụng:**

①  $A = (\sqrt{A})^2$  (với  $A \geq 0$ ).

②  $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$  (với  $B \geq 0$ ).

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 9.** Phân tích thành nhân tử (với  $a, b, x, y$  là các số không âm).

a).  $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$ ;

b).  $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$ .

**Lời giải**

a)  $ab + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1 = b(\sqrt{a})^2 + b\sqrt{a} + \sqrt{a} + 1 = b\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) + (\sqrt{a} + 1) = (\sqrt{a} + 1)(b\sqrt{a} + 1)$ .

b)  $\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2} = x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = (x\sqrt{x} + x\sqrt{y}) - (y\sqrt{y} + y\sqrt{x})$   
 $= x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)$ .

**Bài tập 10.** Tính

a).  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ ;

b).  $\sqrt{6} + \sqrt{55} - \sqrt{10} - \sqrt{33}$ .

**Lời giải**

a)  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})$ .



**Dạng 6. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**

**1. Phương pháp giải**

- ① Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa:  $\sqrt{A}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A \geq 0$ .
- ② Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:  $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ .
- ③ Rút gọn các căn thức đồng dạng.
- ④ Biến đổi phương trình về dạng:  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$  (với  $A \geq 0$ ).

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 13.** Giải phương trình:

- a).  $\sqrt{18x+9} + \sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+12} = 9$ ;
- b).  $\sqrt{25x-50} - \sqrt{16x-32} - \sqrt{9x-18} = 12 - 4\sqrt{x-2}$ .

**Lời giải**

a). Điều kiện:  $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{18x+9} + \sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\sqrt{4x+12} &= 9 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{x+3} &= 9 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 3 &\Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 4$

b). Điều kiện:  $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \sqrt{25x-50} - \sqrt{16x-32} - \sqrt{9x-18} &= 12 - 4\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} &= 12 - 4\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 6 &\Leftrightarrow x-2 = 36 \Leftrightarrow x = 38 \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 38$

**Bài tập 14.** Giải phương trình:

- a).  $\frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17$ ;
- b).  $3x - 7\sqrt{x} + 4 = 0$ ;
- c).  $-5x + 7\sqrt{x} + 12 = 0$ ;

**Lời giải**

a). Điều kiện:  $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} &= -17 \Leftrightarrow x = 290. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9(x-1)} + 24\sqrt{\frac{x-1}{8^2}} &= -17 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{9}{2}\sqrt{x-1} + \frac{24}{8}\sqrt{x-1} &= -17 \Leftrightarrow -\sqrt{x-1} = -17 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 17 \\ \Leftrightarrow x-1 = 289 &\Leftrightarrow x = 290. \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được:  $x = 290$ .

b). (Điều kiện  $x \geq 0$ )

Ta có  $3x - 7\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - 3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - 4(\sqrt{x}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x}-4=0 \\ \sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{4}{3} \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{9} \\ x = 1 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được:  $x = \frac{16}{9}; x = 1$ .

c). Điều kiện  $x \geq 0$

$$-5x + 7\sqrt{x} + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x - 5\sqrt{x} + 12\sqrt{x} + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 12(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(-5\sqrt{x} + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 0 \\ -5\sqrt{x} + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \text{ (vn)} \\ \sqrt{x} = \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{144}{25}$$

Đối chiếu điều kiện ta được:  $x = \frac{144}{25}$ .

**Bài tập 15.** Tìm  $x$ , biết:

a).  $2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20;$

b).  $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} + 1 = \sqrt{x};$

c).  $\sqrt{9x^2+45} - \frac{1}{12}\sqrt{16x^2+80} + 3\sqrt{\frac{x^2+5}{16}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25x^2+125}{9}} = 9;$

d).  $\sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0.$

**Lời giải**

a).  $2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20$

ĐKXD:  $x \geq 3$

$$2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{9(x-3)} - \frac{1}{5}\sqrt{25(x-3)} - \frac{1}{7}\sqrt{49(x-3)} = 20$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} - \sqrt{x-3} = 20 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-3} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 5 \Leftrightarrow x-3 = 25$$

$$\Leftrightarrow x = 28 \text{ ( Thỏa ĐK)}$$

Vậy  $x = 28$ .

b).  $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} + 1 = \sqrt{x}$

ĐKXD:  $x \geq 0$

$$\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} + 1 = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3\sqrt{x}-5) \cdot 3}{6} - \frac{(2\sqrt{x}-7) \cdot 2}{6} + \frac{6}{6} = \frac{6}{6}\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 15 - 4\sqrt{x} + 14 + 6 = 6\sqrt{x} \Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x} = 15 - 14 - 6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 25 \text{ ( Thỏa ĐK)}. \text{ Vậy } x = 25.$$

$$c). \sqrt{9x^2 + 45} - \frac{1}{12}\sqrt{16x^2 + 80} + 3\sqrt{\frac{x^2 + 5}{16}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25x^2 + 125}{9}} = 9;$$

$$\sqrt{9x^2 + 45} - \frac{1}{12}\sqrt{16x^2 + 80} + 3\sqrt{\frac{x^2 + 5}{16}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25x^2 + 125}{9}} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9(x^2 + 5)} - \frac{1}{12}\sqrt{16(x^2 + 5)} + 3\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{16}} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{25(x^2 + 5)}}{\sqrt{9}} = 9$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 5} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 5} + \frac{3}{4}\sqrt{x^2 + 5} - \frac{5}{12}\sqrt{x^2 + 5} = 9 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 5} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 2. \text{ Vậy } x = -2 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$d). \sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0.$$

$$\text{ĐKXD: } x \geq 0$$

$$\sqrt{4,5x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{9x}{2}} + \sqrt{5^2 \cdot 2x} - \sqrt{4^2 \cdot 2x} + \sqrt{6^2 \cdot 2x} - 5\sqrt{\frac{x}{2}} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 4\sqrt{2x} + 6\sqrt{2x} - \frac{5}{2}\sqrt{2x} = 12 \Leftrightarrow 6\sqrt{2x} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ( Thỏa ĐK). Vậy } x = 2.$$

**SBÀI 8. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**Rút gọn biểu thức:**

Để thực hiện phép tính, rút gọn biểu thức ta sử dụng các phép biến đổi đơn giản như:

- ✦ Đưa thừa số ra ngoài dấu căn,.
- ✦ Đưa thừa số vào trong dấu căn.
- ✦ Khử căn ở mẫu và trục căn thức ở mẫu để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn (căn đồng dạng).
- ✦ Cộng trừ các căn thức đồng dạng:  $p\sqrt{A} + q\sqrt{A} - r\sqrt{A} + m = (p + q - r)\sqrt{A} + m$

**Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $\sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}}$

b).  $42\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}}$

**Lời giải**

a) Ta có  $\sqrt{4,5} - \frac{1}{2}\sqrt{72} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2}} - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2}$   
 $= \frac{3}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

b) Ta có  $42\sqrt{\frac{25}{6}} - 10\sqrt{\frac{3}{2}} - 12\sqrt{\frac{98}{3}} = 42 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{6} - 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} - 12 \cdot \frac{7}{3}\sqrt{6}$   
 $= 35\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 28\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ .

**Ví dụ 2.** Rút gọn biểu thức  $N = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

**Lời giải**

Ta có:  $N = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}}$   
 $= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$   
 $= \frac{1}{2}[(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1)] = 1$

**Ví dụ 3.** Biến đổi biểu thức  $5\sqrt{\frac{a}{b}} - 4\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{1}{ab}}$  về dạng  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\sqrt{ab}$ , với  $a, b > 0; x, y, z \in \mathbb{Z}$

Tính tổng  $x + y + z$

**Lời giải**

Ta có  $5\sqrt{\frac{a}{b}} - 4\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{5}{a}\sqrt{ab} - \frac{4}{b}\sqrt{ab} - \frac{1}{ab}\sqrt{ab} = \left(\frac{5}{a} - \frac{4}{b} - \frac{1}{ab}\right)\sqrt{ab}$

Vậy  $x = 5; y = -4; z = -1$ . do đó  $x + y + z = 0$

**Ví dụ 4.** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x} - \frac{\sqrt{x}}{y - \sqrt{xy}}$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x > 0; y > 0; x \neq y$ . khi đó ta có:  $P = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} = \frac{y - x}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x})}$

$$= \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{\sqrt{xy}(\sqrt{y}-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

**Ví dụ 6.** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3 \right) : \frac{\sqrt{xy}}{x+3\sqrt{xy}}$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x > 0; y > 0$ . Khi đó ta có:

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - 3 \right) : \frac{\sqrt{xy}}{x+3\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = \frac{x-9y}{y}$$

**Ví dụ 7.** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (x-y)$

**Lời giải**

Ta có  $P = \left( \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \sqrt{xy} \right) : (x-y)$

$$= (x+2\sqrt{xy}+y) \cdot \frac{1}{x-y} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

**Ví dụ 8.** rút gọn biểu thức  $P = \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \geq 0; x \neq 1$ . Khi đó ta có:  $P = \left( \frac{x+\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = x-1$$

**Ví dụ 9.** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{3\sqrt{x}-1}{1-x} \right) \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right)$

**Lời giải**

Điều kiện  $x > 0; x \neq 1$ . Khi đó ta có  $P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1+2x+2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x} = \frac{6}{\sqrt{x}}$$

**B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA**

**DẠNG 1. RÚT GỌN CÁC BIỂU THỨC**

**1. Phương pháp.**

- Thực hiện các phép biến đổi đơn giản của căn thức bậc hai để làm xuất hiện căn thức đồng dạng.
- Cộng, trừ các căn thức đồng dạng.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 1. (Bài 58, tr. 32 SGK)** Rút gọn các biểu thức sau:

a).  $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$ ;

b).  $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$ ;

c).  $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$ ;

d).  $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50}$ .

**Lời giải**

a)  $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{\frac{25}{5}} + \sqrt{\frac{20}{4}} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ ;

b)  $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5} = \sqrt{\frac{2}{4}} + \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ .

c)  $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} = \sqrt{4.5} - \sqrt{9.5} + 3\sqrt{9.2} + \sqrt{36.2}$   
 $= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - \sqrt{5}$ .

d)  $0,1\sqrt{200} + 2\sqrt{0,08} + 0,4\sqrt{50} = 0,1\sqrt{100.2} + 2\sqrt{0,04.2} + 0,4\sqrt{25.2}$   
 $= \sqrt{2} + 0,4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3,4\sqrt{2}$ .

**Bài tập 2.** Rút gọn biểu thức sau:

a).  $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$ ;

b).  $\sqrt{150} + \sqrt{1,6}\sqrt{60} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$ ;

c).  $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$ ;

d).  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

**Lời giải**

a)  $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{16.3} - 2\sqrt{25.3} - \frac{\sqrt{11}\sqrt{3}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{\frac{4}{3}}$   
 $= 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \sqrt{3} + 10\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{17}{3}\sqrt{3}$ .

b)  $\sqrt{150} + \sqrt{1,6}\sqrt{60} + 4,5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6} = \sqrt{25.6} + \sqrt{16.6} + 4,5\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{6}$   
 $= 5\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 4,5\sqrt{\frac{24}{9}} - \sqrt{6} = 8\sqrt{6} + 1,5.2\sqrt{6} = 8\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 11\sqrt{6}$ .

c)  $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84} = \sqrt{4.7}\sqrt{7} - 2\sqrt{21} + 7 + \sqrt{4.21} = 14 - 2\sqrt{21} + 7 + 2\sqrt{21} = 21$ .  
 $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120} = 6 + 2\sqrt{30} + 5 - \sqrt{4.30} = 6 + 2\sqrt{30} + 5 - 2\sqrt{30} = 11$ .

**Bài tập 3.** Rút gọn biểu thức sau (với  $a > 0, b > 0$ );

a).  $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$

b).  $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$ .

**Lời giải**

a)  $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a} = 5\sqrt{a} - 20ab\sqrt{a} + 20ab\sqrt{a} - 6\sqrt{a} = -\sqrt{a}$ .

b)  $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$   
 $= 40ab\sqrt{ab} - 6ab\sqrt{ab} + 6ab\sqrt{ab} - 45ab\sqrt{ab} = -5ab\sqrt{ab}$ .

**Bài tập 4.** Cho biểu thức:  $B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$  với  $x \geq -1$ .

a). Rút gọn biểu thức  $B$ ;

b). Tìm  $x$  sao cho  $B$  có giá trị bằng 16.

Lời giải

- a)  $B = 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = 4\sqrt{x+1}$ .  
 b)  $B = 16 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 4 \Leftrightarrow x+1 = 16 \Leftrightarrow x = 15$ .

**Bài tập 5.**

- a).  $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$  với  $a > 0$  và  $b > 0$ ;  
 b).  $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$  với  $m > 0$  và  $x \neq 1$ .

Lời giải

- a)  $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{ab}{a^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab} + \sqrt{ab} + \frac{1}{b}\sqrt{ab} = \left(\frac{2}{b} + 1\right)\sqrt{ab}$ .  
 b)  $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}} \cdot \sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}} = \sqrt{\frac{m}{(1-x)^2} \cdot \frac{4m(1-x)^2}{81}} = \sqrt{\frac{4m^2}{81}} = \frac{\sqrt{4m^2}}{\sqrt{81}} = \frac{2m}{9}$ . (với  $m > 0$  và  $x \neq 1$ )

**Bài tập 6.** Rút gọn rồi so sánh giá trị của  $M$  với 1, biết:

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

Lời giải

Ta có:  $\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}$   
 Do đó:  $M = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}$ .  
 Vì  $\sqrt{a} > 0$  nên  $1 - \frac{1}{\sqrt{a}} < 1$  suy ra  $M < 1$ .

**Bài tập 7.** Giá trị của biểu thức  $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$  bằng:

- A).  $\frac{1}{2}$ ;                      B). 1;                      C). -4;                      D). 4.

Chọn câu trả lời đúng.

Lời giải

Ta có:  $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4}{1} = 4$

Chọn D).

**Bài tập 8.** Cho  $B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

- a). Xác định  $x$  để cho  $B$  có nghĩa;  
 b). Rút gọn  $B$ ;  
 c). Tìm  $x$  để  $B > 1$ ;  
 d). Tìm  $x$  nguyên để  $B$  là số nguyên.

Lời giải

- a) Ta có  $x - 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có } B = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

$$B > 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$$

Vậy với  $x > 9$  thì  $B > 1$ .

$$\text{d) Vì } B = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3} \text{ nên } B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \text{ là ước của } 4. \text{ Do đó } \sqrt{x}-3 \text{ nhận các giá trị } \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Suy các giá trị thích hợp của  $x$  là 1, 4, 16, 25, 49.

### 3. Bài tập rèn luyện

**Bài 1.** Rút gọn biểu thức:

$$\text{a). } 3\sqrt{2a} - \sqrt{18a^3} + 4\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{128a} \text{ (với } a \geq 0)$$

$$\text{b). } 2y\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{a}{ax-ay}} - \sqrt{x^3-x^2y} \text{ (với } x > y > 0)$$

$$\text{c). } \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ (với } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b)$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a). Với } a \geq 0, \text{ ta có: } 3\sqrt{2a} - \sqrt{18a^3} + 4\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{128a} &= 3\sqrt{2a} - 3a\sqrt{2a} + 2\sqrt{2a} - 2\sqrt{2a} \\ &= 3\sqrt{2a} - 3a\sqrt{2a} = 3(1-a)\sqrt{2a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b). Với } x > y > 0, \text{ ta có: } 2y\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{a}{ax-ay}} - \sqrt{x^3-x^2y} \\ &= 2y\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{a}{a(x-y)}} - \sqrt{x^2(x-y)} \\ &= 2y\sqrt{x-y} - |x|\sqrt{x-y} + x\sqrt{\frac{1}{x-y}} - x\sqrt{\frac{1}{x-y}} \\ &= \sqrt{x-y}(2y-x) \text{ (do } x > 0). \end{aligned}$$

c). Với  $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$ , ta có: 
$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b + a - 2\sqrt{ab} + b}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{2a + 2b}{a - b}.$$

**Bài 2 (Dạng 1).** Rút gọn biểu thức:

a). 
$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+2} - \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

b). 
$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

Lời giải

a). Ta có: 
$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+2} - \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} - \frac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1-2+2+2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{3}{\sqrt{2}+1} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 3(\sqrt{2}-1)$$

b). Ta có: 
$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{6}+2\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{6}-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}+1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}+1} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{10})(3-\sqrt{5})+(2\sqrt{2}-\sqrt{10})(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{10}+3\sqrt{10}-\sqrt{50}+6\sqrt{2}+2\sqrt{10}-3\sqrt{10}-\sqrt{50}}{9-5}$$

$$= \frac{12\sqrt{2}-2\sqrt{50}}{4} = \frac{12\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**DẠNG 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC**

**1. Phương pháp.**

✦ Thực hiện các phép biến đổi căn thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi về trái bằng về phải hoặc về phải bằng về trái của đẳng thức.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 9.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a). 
$$\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

b). 
$$\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3} \quad \text{với } x > 0.$$

Lời giải

a) Ta có: VT = 
$$\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{6}{9}} - 4\sqrt{\frac{6}{4}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 2\right)\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \text{VP (đpcm)}.$$

b) Ta có VT =  $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = \left(\sqrt{6x} + \frac{\sqrt{6x}}{3} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x}$   
 $= \frac{7}{3}\sqrt{6x} : \sqrt{6x} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = \text{VP (đpcm)}$ .

**Bài tập 10.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a).  $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$  với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ .

b).  $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$  với  $a+b > 0$  và  $b \neq 0$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{1-(\sqrt{a})^3}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} = 1 + \sqrt{a} + a + \sqrt{a} = 1 + 2\sqrt{a} + a = (1 + \sqrt{a})^2$

và  $\frac{1-\sqrt{a}}{1-a} = \frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \frac{1}{1+\sqrt{a}}$

Do đó: VT =  $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = (1 + \sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{a})^2} = 1 = \text{VP (đpcm)}$ .

b) Ta có: VT =  $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{(a+b)^2}} = \frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a| \cdot b^2}{a+b} = |a| = \text{VP (đpcm)}$ .

(do  $a+b > 0$  và  $b \neq 0$ ).

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 3.** Chứng minh đẳng thức sau với  $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$ :

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) : \frac{\sqrt{y} - 1}{y - \sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x - y}$$

**Lời giải**

Rút gọn về trái được  $\frac{4\sqrt{xy}}{x - y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{x}}{x - y}$ .

**Bài 4.** Chứng minh đẳng thức sau với  $x \geq 0; y \geq 0$  và  $x \neq y$ :

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{xy}}{x - y}\right) : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

**Lời giải**

Xét về trái  $\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{xy}}{x - y}\right) : \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$   
 $= \left(\frac{x + 2\sqrt{xy} + y - 4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$   
 $= \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

Ta thấy về trái đúng bằng về phải nên đẳng thức đã cho là đúng.

**Bài 5.** Chứng minh đẳng thức sau với  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$  và  $x \neq y$ :

$$\left( \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x - y) = 1 - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Xét về trái } T &= \left( \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x - y) = \left( \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \cdot \frac{1}{x - y} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \end{aligned}$$

$$\text{Xét về phải } P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Rõ ràng  $T = P$ , suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 6.** Chứng minh rằng giá trị của biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} - y} + \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x} \right) \cdot \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$  là hằng số với mọi giá trị thích hợp của  $x$  và  $y$ :

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $x \neq y$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } A &= \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})} \right) \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A luôn là hằng số với mọi giá trị thích hợp  $x$  và  $y$ .

### DẠNG 3. CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN.

#### 1. Phương pháp.

➤ Thực hiện các phép biến đổi căn để biến đổi biểu thức không còn chứa biến.

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 11.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến  $a$ :

$$\left( \frac{1}{2 + 2\sqrt{a}} + \frac{1}{2 - 2\sqrt{a}} - \frac{a^2 + 1}{1 - a^2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \quad \text{với } a > 0, a \neq 1.$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{2 + 2\sqrt{a}} + \frac{1}{2 - 2\sqrt{a}} &= \frac{1}{2(1 + \sqrt{a})} + \frac{1}{2(1 - \sqrt{a})} \\ &= \frac{1 - \sqrt{a} + 1 + \sqrt{a}}{2(1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a})} = \frac{2}{2(1 - a)} = \frac{1}{1 - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó biểu thức đã cho bằng: } \left( \frac{1}{1 - a} - \frac{a^2 + 1}{(1 - a)(1 + a)} \right) \cdot \frac{a + 1}{a} &= \frac{1 + a - a^2 - 1}{1 - a^2} \cdot \frac{a + 1}{a} \\ &= \frac{a(1 - a)}{1 - a^2} \cdot \frac{a + 1}{a} = 1. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến  $a$ .

**Bài tập 12.** (Dạng 3). Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$\left( \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \quad \text{với } x > 0, y > 0, x \neq y.$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \left( \frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 1 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến.

**DẠNG 4. RÚT GỌN RỒI TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC TẠI  $x = a$ .**

**1. Phương pháp.**

- **Bước 1.** tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa
- **Bước 2.** rút gọn biểu thức.
- **Bước 3.** thay giá trị của biến  $x = a$  vào biểu thức đã được rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

**Nhận xét:**

- Nhiều lúc có thể phải sử dụng kết quả rút gọn, lập phương trình hoặc bất phương trình rồi giải ra để tìm giá trị của biến.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 13.** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{4-x}$

a). Rút gọn  $P$ .

b). Tính giá trị của  $P$  với  $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$ .

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x \geq 0; x \neq 4$ .

Khi đó ta có:  $P = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) - (2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2 - 2x - 4\sqrt{x} - 2 + 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{-x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Ta có  $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}} = 2(2+\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+1$

Do đó  $P = \frac{\sqrt{3}+1}{2-(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{-2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -(2+\sqrt{3})$

**Bài tập 14.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4x}{(x-1)^2}$

a). Rút gọn  $P$ .

b). Tính giá trị của  $P$  biết  $|x-5|=4$ .

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x > 0; x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } P &= \left[ \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)^2} \right] \cdot \frac{(x-1)^2}{4x} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x} \\ &= \frac{(x+\sqrt{x}-2) - (x-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{4x} = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Ta có  $|x-5|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=1 \end{cases}$

Với  $x=9$ , ta có  $P = \frac{\sqrt{9}+1}{2\sqrt{9}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Với  $x=1$ , không thỏa mãn điều kiện đã nêu nên biểu thức  $P$  không có giá trị.

**Bài tập 15.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

a). Rút gọn  $P$ .

b). Tính giá trị của  $P$  biết  $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$ .

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } P &= \left[ \frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} - (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{4\sqrt{xy} - x - 2\sqrt{xy} - y}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{-(x-2\sqrt{xy}+y)}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \end{aligned}$$

b) Ta có  $\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{9x}{4}$

Do đó  $P = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{9}{4}x}} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{\frac{5}{2}\sqrt{x}} = \frac{-2}{5}$

**Bài tập 16.** Cho  $P = \left[ \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{x+4\sqrt{x+4}} \right] : \left( \frac{2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right)$

a). Rút gọn  $P$ .

b). Tìm  $x$  để  $P = -\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x \geq 0 ; x \neq 4$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } P &= \left[ \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{2}{(\sqrt{x+2})^2} \right] : \left( \frac{2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x+2}-2}{(\sqrt{x+2})^2} : \frac{2-(\sqrt{x+2})}{x-4} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})^2} \cdot \frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})}{-\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Ta có  $P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4 = \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

**Bài Tập 17.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{x\sqrt{x-9\sqrt{x}}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{3\sqrt{x}-3}{x+3\sqrt{x}} \right)$

a). Rút gọn  $P$ .

b). Tìm  $x$  để  $P > 1$ .

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x \geq 0 ; x \neq 9$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-3})+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} : \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3})}{x-3\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

b) Để  $P > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-3}} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-3}} - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x-3}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x-3}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-4 > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sqrt{x}-4 < 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x < 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

**Bài tập 18.** Cho biểu thức  $D = \left( 2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3} \right) : \left[ \frac{6\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right]$ .

a). Rút gọn  $D$ .

b). Chứng minh rằng  $D < \frac{3}{2}$

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x \geq 0 ; x \neq \frac{9}{4}$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } D &= \frac{2(2\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1+\sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{4\sqrt{x}-6-\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-3} : \frac{6\sqrt{x}+1+2x-3\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{2x+3\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-3} \cdot \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Xét hiệu  $D - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} = \frac{6\sqrt{x}-10-6\sqrt{x}-3}{2(2\sqrt{x}+1)} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x}+1)} < 0$ . Vậy  $D < \frac{3}{2}$

**Nhận xét:** Về mặt phương pháp, muốn chứng minh  $D < \frac{3}{2}$  ta chứng minh  $D - \frac{3}{2} < 0$

**Bài tập 19.** Cho biểu thức  $B = \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

a). Rút gọn B.

b). Chứng minh rằng B luôn luôn có giá trị không âm với mọi giá trị thích hợp của x.

**Lời giải**

a) Điều kiện  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } B &= \frac{x+2+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{x+2+x-1-x+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Ta có  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x} \geq 0$

$$\text{Khi đó } x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Do đó } B = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0.$$

**Bài tập 20.** Cho biểu thức  $C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - 1\right)$

a). Rút gọn C.

b). Chứng minh rằng C luôn luôn có giá trị âm với mọi giá trị thích hợp của x.

**Lời giải**

a) Điều kiện  $x > 0 ; x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } C &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right) : \frac{\sqrt{x}-x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x-\sqrt{x}+1} = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Ta có  $x \geq 0 ; x \neq 1$  nên  $-(\sqrt{x}+1) < 0$ . Khi đó  $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ .

$$\text{Do đó } C = \frac{-(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} < 0 \text{ với mọi giá trị thích hợp của } x.$$

**Bài tập 21. (Dạng 1).** Cho biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

- a). Rút gọn A nếu  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$ ;
- b). Tìm x để  $A = 2$ .

**Lời giải**

a). Với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$ , ta có: 
$$A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$$

b). Khi  $A = 2$  ta được  $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2(\sqrt{x+2}) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$  (tm  $x \geq 0, x \neq 4$ )

Vậy  $x = 16$ .

**Bài tập 22. (Dạng 1).** Cho biểu thức:  $B = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$  với  $a > b > 0$ .

- a). Rút gọn B ;
- b). Tính B nếu  $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ ;
- c). Tìm điều kiện của a, b để  $B < 1$

**Lời giải**

a) Với điều kiện:  $a > b > 0$ , ta có: 
$$B = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{(\sqrt{a^2-b^2} + a)(a-\sqrt{a^2-b^2})}{\sqrt{a^2-b^2} \cdot b}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

b) Ta có:  $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b$  thay vào ta được  $B = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}b-b}{\frac{3}{2}b+b}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}b}{\frac{5}{2}b}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

c) Khi  $B < 1$  ta có:  $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a-b} < \sqrt{a+b}$   
 $\Leftrightarrow a-b < a+b \Leftrightarrow -b < b \Leftrightarrow 2b > 0 \Leftrightarrow b > 0$ .

Vậy với  $a > b > 0$  thì  $B < 1$ .

**Bài tập 23.** Rút gọn  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{3}{3-\sqrt{x}} - \frac{6\sqrt{x}}{x-9}$ , rồi tính giá trị của biểu thức P với  $x = 0,36$ .

**Lời giải**

Rút gọn ta được  $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+3}}$  với điều kiện  $x \geq 0 ; x \neq 9$ .

Khi đó  $x = 0,36$  ta có  $P = -\frac{2}{3}$ .

**DẠNG 5. RÚT GỌN RỒI TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC**

**1. Phương pháp.**

➤ **Bước 1.** tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa

➤ **Bước 2.** rút gọn biểu thức ta được biểu thức  $Q$ .

① Nếu  $Q$  là một biểu thức có dạng bậc hai, tức là  $Q = ax^2 + bx + c, a \neq 0$  thì ta đưa về dạng

$$\begin{aligned} \text{bình phương thiếu: } Q &= ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\Delta}{4a} \right) \text{ khi đó:} \end{aligned}$$

★ Nếu  $a > 0$  thì  $ax^2 + bx + c \geq \frac{-\Delta}{4a}$  dấu bằng xảy ra khi  $x = -\frac{b}{2a}$ . Suy ra GTNN là  $\frac{-\Delta}{4a}$ .

★ Nếu  $a < 0$  thì  $ax^2 + bx + c \leq \frac{-\Delta}{4a}$  dấu bằng xảy ra khi  $x = -\frac{b}{2a}$ . Suy ra GTLN là  $\frac{-\Delta}{4a}$ .

② Nếu  $Q$  là một biểu thức có dạng phân thức  $\frac{f(x)}{k^2} \geq 0$  hoặc  $\frac{f(x)}{k^2} \leq 0$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 24.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{2m+1}{m^2+2}$ .

**Lời giải**

Xét  $A - k = \frac{-km^2 + 2m - 2k^2 + 1}{m^2 + 2}$ .

Khi đó để biểu thức đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thì tử số là biểu thức  $f(m) = -km^2 + 2m - 2k^2 + 1$  phải biểu diễn được dưới dạng bình phương

hay  $\Delta_m = 0 \Leftrightarrow 1 + k(1 - 2k) = 0 \Leftrightarrow -2k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$ .

Khi đó  $A - 1 = \frac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \frac{2m+1 - m^2 - 2}{m^2+2} = -\frac{(m-1)^2}{m^2+2} \leq 0, \forall m \Rightarrow A \leq 1, \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $m = 1$

Và  $A + \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{m^2+2} + \frac{1}{2} = \frac{2(2m+1) + m^2 + 2}{2(m^2+2)} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \geq 0, \forall m \Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}, \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $m = -2$

Vậy  $\max A = 1$  khi và chỉ khi  $m = 1$ ,  $\min A = -\frac{1}{2}$  khi và chỉ khi  $m = -2$

**Bài tập 25.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \frac{1}{x - \sqrt{x+1}}$

**Lời giải**

Điều kiện xác định  $x \geq 0$

Để  $A$  đạt giá trị lớn nhất thì  $x - \sqrt{x+1}$  đạt giá trị nhỏ nhất

Có  $x - \sqrt{x} + 1 = x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Lại có  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x \geq 0$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$  Khi đó  $\text{Min}(x - \sqrt{x} + 1) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Vậy  $\text{Max } A = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

**Bài tập 26.** Cho biểu thức  $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$

a). Rút gọn A.

b). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = A - 9\sqrt{x}$

Lời giải

a).  $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$  với  $x > 0, x \neq 1$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1}\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

b).  $P = A - 9\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}\right)$  với  $x > 0, x \neq 1$

Với  $x > 0, x \neq 1$ , áp dụng bất đẳng thức Cauchy có:  $\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 9\sqrt{x}} = 6$

$\Rightarrow -\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}\right) \leq -6 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}\right) \leq 1 - 6 = -5 \Leftrightarrow P \leq -5$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 9\sqrt{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$  (thỏa mãn). Vậy  $\text{max } P = -5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$

**Bài tập 27.** Cho biểu thức  $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}\right) - \frac{6 + \sqrt{x}}{4 - x}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

a). Rút gọn A.

b). Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

a).  $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}\right) - \frac{6 + \sqrt{x}}{4 - x}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x}) + \sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} - \frac{6 + \sqrt{x}}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{2\sqrt{x} + x + 2\sqrt{x} - x}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} - \frac{6 + \sqrt{x}}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} = \frac{4\sqrt{x} - 6 - \sqrt{x}}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} = \frac{3\sqrt{x} - 6}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{3 \cdot (\sqrt{x} - 2)}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} = \frac{-3}{2 + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

b). Có  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{-3}{2}$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy  $\min A = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x = 0$

**Bài tập 28.** Cho biểu thức:  $C = \left( \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$

- a). Rút gọn  $C$  nếu  $x \geq 0, x \neq 1$ ;
- b). Tìm  $x$  để  $C$  dương;
- c). Tìm giá trị lớn nhất của  $C$ .

**Lời giải**

a) ĐK:  $x \geq 0, x \neq 1$ , ta có:

$$\begin{aligned} C &= \left( \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = \left( \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} - 2 - x - \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \\ &= \frac{-\sqrt{x}(1-x)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(1-x)}{(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

b) Ta có:  $C > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{x} \Rightarrow 0 \leq x < 1$ .

c) Với  $x \geq 0, x \neq 1$ , ta có  $C = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) = \sqrt{x} - x = -\left(x - \sqrt{x}\right)$   
 $= -\left(x - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

Vì  $-\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$  với mọi  $x \geq 0$  nên  $-\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$  với mọi  $x \geq 0$ .

Do đó:  $C \leq \frac{1}{4}$  với mọi  $x \geq 0$

GTLN của  $C = \frac{1}{4}$  khi  $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ .

Vậy GTLN của  $C = \frac{1}{4}$  khi  $x = \frac{1}{4}$ .

**Bài tập 29.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left( 2 - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1} \right)$ .

- a). Rút gọn  $P$ .
- b). Tìm giá trị lớn nhất của  $P$ .

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x \geq 0 ; x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có } P &= \frac{(\sqrt{x}+1)+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{2 \cdot (\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-4)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

b) Ta có  $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{1}{1} = 1$  vì  $\sqrt{x} \geq 0$

Do đó  $\max P = 1$  đạt được khi  $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Bài tập 30.** Cho biểu thức  $Q = \left( \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{14}{x-9} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2}$

- a). Rút gọn  $Q$ .
- b). Tìm giá trị nhỏ nhất của  $Q$ .

**Lời giải**

a) Điều kiện:  $x \geq 0 ; x \neq 9$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } Q &= \frac{(\sqrt{x}-3)^2 + \sqrt{x}+3)^2 + 14}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} \\ &= \frac{x-6\sqrt{x}+9+x+6\sqrt{x}+9+14}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} \\ &= \frac{2x+32}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

b) Ta có  $Q = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9+25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 \quad (\text{bất đẳng thức cô si}) \\ &\geq 10 - 6 = 4. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\sqrt{x}+3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 5 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}+3)^2 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 = 5 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy  $\min Q = 4$  khi  $x = 4$ .

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 7.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{x-36} - \frac{\sqrt{x}-6}{x+6\sqrt{x}} \right) : \frac{x\sqrt{x}-36\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-3)(x-2\sqrt{x}+3)}$

- a). Rút gọn  $P$ .
- b). Với giá trị nào của  $x$  thì  $P$  có giá trị lớn nhất? Giá trị lớn nhất đó là bao nhiêu?

**Lời giải**

a) Rút gọn ta được  $\frac{6}{x-2\sqrt{x}+3}$  với điều kiện  $x > 0; x \neq 9; x \neq 36$ .

b)  $P = \frac{6}{(\sqrt{x}-1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3$  (vì  $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ ).

Suy ra  $\max P = 3$  đạt được khi  $x = 1$ .

**Bài 8.** Cho biểu thức  $P = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}$

- a). Rút gọn  $P$ .
- b). Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

**Lời giải**

a)  $P = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$  ( $x \geq 0; x \neq 1$ ).

b) 
$$P = \frac{5\sqrt{x} + 15 - 17}{\sqrt{x} + 3} = 5 - \frac{17}{\sqrt{x} + 3} \geq 5 - \frac{17}{3} \Rightarrow P \geq 5 - \frac{17}{3} \text{ (vì } \sqrt{x} \geq 0 \text{)}.$$

$$P \geq -\frac{2}{3} \text{ (dấu bằng xảy ra khi } x = 0 \text{)}. \text{ Vậy min} = -\frac{2}{3}, \text{ đạt được khi } x = 0.$$

**DẠNG 6. RÚT GỌN RỒI TÌM GIÁ TRỊ CỦA  $x$  NGUYÊN ĐỂ BIỂU THỨC NHẬN GIÁ TRỊ NGUYÊN**

**1. Phương pháp.**

➤ **Bước 1.** tìm điều kiện để biểu thức có nghĩa

➤ **Bước 2.** Ta xét hai trường hợp sau:

① **Loại 1.** Biểu thức  $Q$  sẽ có dạng  $\frac{f(x)}{g(x)}$  trong đó  $f(x)$  và  $g(x)$  là các đa thức và  $g(x) \neq 0$

Khi đó:

★ **Bước 1:** Tách về dạng  $Q = m(x) + \frac{k}{g(x)}$  trong đó  $m(x)$  là một biểu thức nguyên khi  $x$  nguyên và  $k$  có giá trị là số nguyên.

★ **Bước 2:** Để  $Q$  nhận giá trị nguyên thì  $\frac{k}{g(x)}$  nguyên hay  $k : g(x)$  nghĩa là  $g(x)$  thuộc tập ước của  $k$ .

★ **Bước 3:** Lập bảng để tính các giá trị của  $x$ .

★ **Bước 4:** Kết hợp với điều kiện đề bài, loại bỏ những giá trị không phù hợp, sau đó kết luận bài toán.

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 31.** Tìm các giá trị nguyên của biến số  $x$  để biểu thức đã cho cũng có giá trị nguyên

a).  $\frac{2}{x-1}$ .

b).  $\frac{x-2}{x-1}$ .

c).  $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ .

**Lời giải**

a).  $\frac{2}{x-1}$  có điều kiện  $x \neq 1$

Để  $\frac{2}{x-1}$  nhận giá trị nguyên thì  $2 : (x-1) \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Ta có bảng:

$x-1$	-2	-1	1	2
$x$	-1 (thỏa mãn)	0 (thỏa mãn)	2 (thỏa mãn)	3 (thỏa mãn)

Vậy với  $x \in \{-1; 0; 2; 3\}$  thì biểu thức  $\frac{2}{x-1}$  nhận giá trị nguyên.

b).  $\frac{x-2}{x-1}$  có điều kiện  $x \neq 1$

Ta có:  $\frac{x-2}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1}$

Để  $\frac{x-2}{x-1}$  nhận giá trị nguyên thì  $1 : (x-1) \Leftrightarrow x-1 \in U(1) = \{\pm 1\}$

Ta có bảng:

$x-1$	-1	1
$x$	0 (thỏa mãn)	2 (thỏa mãn)

Vậy với  $x \in \{0; 2\}$  thì biểu thức  $\frac{x-2}{x-1}$  nhận giá trị nguyên

c).  $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$  có điều kiện là  $x \geq 0$

Ta có  $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{3(\sqrt{x+1})-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{3(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} - \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x+1}}$

Để  $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$  nhận giá trị nguyên thì  $3: (\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Ta có bảng:

$\sqrt{x+1}$	-3	-1	1	3
$\sqrt{x}$	-4 (loại)	-2 (loại)	0 (thỏa mãn)	2
$x$			0 (thỏa mãn)	4 (thỏa mãn)

Vậy với  $x \in \{0; 4\}$  thì biểu thức  $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$  nhận giá trị nguyên

**② Loại 2.** Đây là một dạng nâng cao hơn của dạng bài tập tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $Q$  nhận giá trị nguyên bởi ta chưa xác định giá trị của biến  $x$  có nguyên hay không để biến

đổi biểu thức  $A$  về dạng  $A = m(x) + \frac{k}{g(x)}$ .

Bởi vậy, để làm được dạng bài tập này, chúng ta sẽ thực hiện các bước sau:

★ **Bước 1:** Áp dụng điều kiện cùng với các bất đẳng thức đã được, chứng minh  $m < A < M$  trong đó  $m, M$  là các số nguyên.

★ **Bước 2:** Trong khoảng từ  $m$  đến  $M$ , tìm các giá trị nguyên.

★ **Bước 3:** Với mỗi giá trị nguyên ấy, tìm giá trị của biến  $x$ .

★ **Bước 4:** Kết hợp với điều kiện đề bài, loại bỏ những giá trị không phù hợp rồi kết luận.

**Nhận xét:** Trong dạng này ta hay sử dụng bất đẳng thức Cô-Si: cho  $a \geq 0, b \geq 0$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a = b$ .

### 3. Bài tập minh họa.

**Bài tập 32.** Tìm giá trị của  $x$  để các biểu thức dưới đây nhận giá trị nguyên.

a).  $\frac{2\sqrt{x}}{x+3}$

b).  $\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

#### Lời giải

a).  $\frac{2\sqrt{x}}{x+3}$  có điều kiện là  $x \geq 0$

Có  $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ x+3 \geq 3 > 0 \end{cases}$ . Suy ra ta có  $\frac{2\sqrt{x}}{x+3} \geq 0 \forall x \geq 0$  (1)

Lại có  $\frac{2\sqrt{x}}{x+3} = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho  $x \geq 0$  có  $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}} \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (2)

Từ (1) và (2) ta có:  $0 \leq \frac{2\sqrt{x}}{x+3} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$  mà biểu thức nhận giá trị nguyên nên  $\frac{2\sqrt{x}}{x+3} = 0$

Giải phương trình tính được  $x = 0$

Vậy với  $x = 0$  thì biểu thức nhận giá trị nguyên

b).  $\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$  có điều kiện là  $x \geq 0$ .

Có  $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ x + \sqrt{x} + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \forall x \geq 0 \quad (1)$

Lại có  $\frac{2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho  $x \geq 0$  có

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \leq \frac{2}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $0 \leq \frac{2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \leq \frac{2}{3}$  mà biểu thức nhận giá trị nguyên nên  $\frac{2\sqrt{x}}{x + 3} = 0$ .

Giải phương trình được  $x = 0$

Vậy với  $x = 0$  thì biểu thức nhận giá trị nguyên.

**Bài tập 33.** Cho biểu thức  $P = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right)$ .

a). Rút gọn  $P$ .

b). Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để  $P$  có giá trị nguyên.

**Lời giải**

a).  $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0);$

b).  $x \in [1; 4].$

**SBÀI 9.**

**CĂN BẬC BA**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa.**

Căn bậc ba của một số  $a$  là số  $x$  sao cho  $x^3 = a$ .

Mỗi số  $a$  đều có duy nhất một căn bậc ba.

**\* Nhận xét :**

- Căn bậc ba của một số dương là số dương ;
- Căn bậc ba của một số âm là một số âm ;
- Căn bậc ba của số 0 là số 0 ;

**Ví dụ 1.** Hãy tìm :

a).  $\sqrt[3]{216}$

b).  $\sqrt[3]{729}$

c).  $\sqrt[3]{331}$ .

Lời giải

a)  $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

b).  $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

c).  $\sqrt[3]{331} = \sqrt[3]{11^3} = 11$

**Ví dụ 2.** Hãy tìm :

a).  $\sqrt[3]{-343}$

b).  $\sqrt[3]{-1000}$

c).  $\sqrt[3]{-1728}$ .

Lời giải

a)  $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{-7^3} = -7$

b)  $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{-10^3} = -10$

c)  $\sqrt[3]{-1728} = \sqrt[3]{-12^3} = -12$

**Ví dụ 3.** Hãy tìm :

a).  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

b).  $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}}$

c).  $\sqrt[3]{-0,064}$

Lời giải

a).  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$

b).  $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}} = 3\sqrt[3]{27 \cdot 12} - 1 = \sqrt[3]{324} - 1 < \sqrt[3]{343} - 1 = 7 - 1 = 6$

c).  $\sqrt[3]{-0,064} = \sqrt[3]{(-0,4)^3} = -0,4$ .

**2. Tính chất**

- $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ ;
- So sánh:  $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ .
- Phép khai phương  $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ . ( $b \neq 0$ )
- $\sqrt[3]{a^3} = a$ .
- Phép khai phương  $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$ ;

**Ví dụ 4.** So sánh

a). 7 và  $\sqrt[3]{345}$

b).  $2\sqrt[3]{6}$  và  $3\sqrt[3]{2}$ .

Lời giải

a). 7 và  $\sqrt[3]{345}$

Ta có  $7 = \sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{345}$  ;

b).  $2\sqrt[3]{6}$  và  $3\sqrt[3]{2}$ .

Ta có  $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$   
 $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$   
 $48 < 54$  nên  $2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$

**Ví dụ 5.** So sánh

a).  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18}$  và  $\frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$

b).  $\sqrt[3]{130} + 1$  và  $3\sqrt[3]{12} - 1$ .

Lời giải

a). Ta có  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 18} = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{3}}$

$\frac{3}{4}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 12} = \sqrt[3]{\frac{81}{16}} = \sqrt[3]{5\frac{1}{16}}$

Vì  $5\frac{1}{3} > 5\frac{1}{16}$  nên  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18} > \frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$

b) Ta có  $\sqrt[3]{130} + 1 > \sqrt[3]{125} + 1 = 5 + 1 = 6$  ;

$3\sqrt[3]{12} - 1 = 3\sqrt[3]{27 \cdot 12} - 1 = \sqrt[3]{324} - 1 < \sqrt[3]{343} - 1 = 7 - 1 = 6$  ;

Vậy  $\sqrt[3]{130} + 1 > 3\sqrt[3]{12} - 1$ .

**Ví dụ 6.** Cho  $a < 0$ , hỏi số nào lớn hơn trong hai số  $\sqrt[3]{2a}$  và  $\sqrt[3]{3a}$

Lời giải

Ta có  $2 < 3$  nên  $2a > 3a$  ( vì  $a < 0$  ).

Do đó  $\sqrt[3]{2a} > \sqrt[3]{3a}$ .

**Ví dụ 7.** Rút gọn các biểu thức

a).  $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$  ;

b).  $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$ .

Lời giải

a) Ta có  $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64} = 2 + (-3) + (-4) = -5$

b) Ta có  $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$ .

**Ví dụ 8.** Tính

a).  $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13.5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15}$  ;

b).  $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$ .

Lời giải

a)  $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13.5} - \sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{16 \cdot 13.5} + \sqrt[3]{120 : 15}$   
 $= \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{8}$

$= 6 - 2 = 4 = 6 - 2 = 4$

b)  $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$

$= 2 + 1 = 3$

**Nhận xét:** Để tính tích trên có thể sử dụng hằng đẳng thức :  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Ta có  $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{2})^3 + 1^3 = 2 + 1 = 3$ .

**Ví dụ 9.** Tính

a).  $(\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1)$  ;

b).  $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1)$

Lời giải

a) Ta có  $(\sqrt[3]{5} + 1)^3 - 3\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{5} + 1) = 5 + 3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1 - 3\sqrt[3]{25} - 3\sqrt[3]{5} = 6.$

b) Ta có  $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3})^3 + 6\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1) = 4 - 3\sqrt[3]{32} + 3\sqrt[3]{16} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2}$   
 $= 6 - 6\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} - 2 + 6\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{2} = 2.$

**Ví dụ 10.** Tính  $A = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}.$

Lời giải

Ta có  $A^3 = (\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2})^3$

$$A^3 = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \left( \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \right)$$

$\Rightarrow A^3 = 4 - 3A$

$\Rightarrow A^3 + 3A - 4 = 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A^2 + A + 4) = 0 \Leftrightarrow A - 1 = 0$  (vì  $A^2 + A + 4 > 0$ )

Vậy  $A = 1$

**Ví dụ 11.** Rút gọn biểu thức.

a).  $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x + 1)};$

b).  $\frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x} + 1}}.$

Lời giải

a) Ta có  $\sqrt[3]{x^3 + 1 + 3x(x + 1)} = \sqrt[3]{(x + 1)^3} = x + 1.$

b)  $\frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x} + 1}} = \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{x} + 1}} = \sqrt[3]{x} + 1.$

**B. PHÂN DẠNG VÀ VI DỤ MINH HỌA.**

**DẠNG 1. THỰC HIỆN PHÉP TÍNH**

**1. Phương pháp.**

➤ Áp dụng  $(\sqrt[3]{a})^3 = a; \sqrt[3]{a^3} = a.$

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 1. (Bài 67, tr 36 SGK)** Hãy tìm  $\sqrt[3]{512}; \sqrt[3]{-729}; \sqrt[3]{0,064}; \sqrt[3]{-0,216}; \sqrt[3]{-0,008}.$

Lời giải

Ta có:  $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8.$

$\sqrt[3]{-729} = \sqrt[3]{-9^3} = -9.$

$\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{(0,4)^3} = 0,4.$

$\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-0,6)^3} = -0,6.$

$\sqrt[3]{-0,008} = \sqrt[3]{(-0,2)^3} = -0,2.$

**Bài tập 2. (Bài 68, tr. 36 SGK)** Tính:

a).  $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125};$

b).  $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}.$

Lời giải

a).  $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{-2^3} - \sqrt[3]{5^3} = 3 + 2 - 5 = 0$

b).  $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{135}{5}} - \sqrt[3]{54 \cdot 4} = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{216} = 3 - 6 = -3$

**Bài tập 3.** Thực hiện phép tính

a).  $A = (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

b).  $B = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ .

Lời giải

a). Ta có:  $A = (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) = ((\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2)(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$   
 $= (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 2 = 1$

b). Áp dụng hằng đẳng thức  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

Ta có:  $B^3 = (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}})^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}})$   
 $= 4 + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}B = 4 + 3\sqrt[3]{4 - 5}B = 4 - 3B$

$\Leftrightarrow B^3 + 3B - 4 = 0 \Leftrightarrow B^3 - 1 + 3B - 3 = 0 \Leftrightarrow (B - 1)(B^2 + B + 4) = 0$

$\Leftrightarrow B = 1 \left( B^2 + B + 4 = B^2 + 2\frac{1}{2}B + \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \right)$

Vậy  $B = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$ .

**3. Bài tập rèn luyện.**

**Bài 1.** Thực hiện phép tính

a).  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{-18} \cdot \sqrt[3]{3}$ .

b).  $\sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2})}; \sqrt[3]{(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}$ .

c).  $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[3]{4}$ .

d).  $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ .

e).  $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$ .

Lời giải

a).  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{-18} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot (-18) \cdot 3} = \sqrt[3]{-27} = -3$ .

b).  $\sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} = \sqrt{2} + 1$ .

$\sqrt[3]{(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^2(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3} = \sqrt{3} - 1$ .

c).  $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[3]{4} = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt[3]{4} = 0$ .

d).  $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) : \frac{2}{3}\sqrt[3]{9} = \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3}\right) : \frac{2}{3}\sqrt[3]{9} = \frac{9}{4} - \sqrt[3]{9}$ .

e).  $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = 3 + 2 = 5$ .

**Bài 2.** Thực hiện phép tính  $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

a).  $(\sqrt[3]{4} + 1)^3 - (\sqrt[3]{4} - 1)^3$

b).  $(12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2})\left(5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ .

Lời giải

a)  $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216} = -4 - 5 + 6 = -3$

b) Ta có  $(\sqrt[3]{4} + 1)^3 - (\sqrt[3]{4} - 1)^3$

$$= (\sqrt[3]{4} + 1 - \sqrt[3]{4} + 1) \left[ (\sqrt[3]{4} + 1)^2 + (\sqrt[3]{4} + 1)(\sqrt[3]{4} - 1) + (\sqrt[3]{4} - 1)^2 \right]$$

$$= 2 \cdot (\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{4} + 1 + \sqrt[3]{16} - 1 + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{4} + 1) = 2(3\sqrt[3]{16} + 1) = 2(6\sqrt[3]{2} + 1)$$

c) Ta có  $(12\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}) \left( 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)$

$$= (12\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2}) \left( 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right) = 12\sqrt[3]{2} \left( 5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right) = 120 - 36 = 84$$

**Bài 3.** Cho  $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$  và  $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$ . Tính  $xy^3 - x^3y$ .

**Lời giải**

Ta có  $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{16} + 2 + \sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}^2}$

$$= \frac{2 \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{4 - 2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

Tương tự  $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$

Do đó:  $xy^3 - x^3y = xy(y^2 - x^2) = xy(y - x)(y + x) = 8(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$

**Bài 4.** Trục căn ở mẫu số biểu diễn  $\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3}^2} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}{4 - 3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}$ .

## DẠNG 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

### 1. Phương pháp.

➤ biến đổi hai vế của đẳng thức cùng bằng một biểu thức.

### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 4.** Chứng minh rằng nếu:

$$ax^3 = by^3 = cz^3 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ thì } \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

**Lời giải**

Ta đặt  $ax^3 = by^3 = cz^3 = t$  suy ra  $a = \frac{t}{x^3}$ ,  $b = \frac{t}{y^3}$ ,  $c = \frac{t}{z^3}$

Ta có:  $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{t}{x^3} x^2 + \frac{t}{y^3} y^2 + \frac{t}{z^3} z^2} = \sqrt[3]{\frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z}} = \sqrt[3]{t \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{t} \quad (1)$

Ta lại có:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{t}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{t}{y^3}} + \sqrt[3]{\frac{t}{z^3}} = \frac{\sqrt[3]{t}}{x} + \frac{\sqrt[3]{t}}{y} + \frac{\sqrt[3]{t}}{z} = \sqrt[3]{t} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \sqrt[3]{t} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có:  $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ . (ĐPCM)

**Bài tập 5.** Chứng minh đẳng thức:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[ (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2 \right].$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức Cô-si cho 3 số không âm  $x, y, z$ :  $\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} VT &= (x + y) + z - 3\sqrt[3]{xyz} = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 - 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) + z - 3\sqrt[3]{xyz} \\ &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})^3 - 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\sqrt[3]{z}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) - 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \\ &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[ (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})^2 - 3(\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx}) \right] \\ &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{yz} - \sqrt[3]{zx}) \\ &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \frac{1}{2} (2\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{z^2} - 2\sqrt[3]{xy} - 2\sqrt[3]{yz} - 2\sqrt[3]{zx}) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[ (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2 \right] \\ &= VP. \end{aligned}$$

Vậy ta có đẳng thức

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[ (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2 \right].$$

Suy ra với 3 số không âm  $x, y, z$ :

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[ (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2 \right] \geq 0$$

Do đó  $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $x = y = z$ .

### DẠNG 3. SO SÁNH HAI SỐ

#### 1. Phương pháp.

Đưa thừa số vào căn bậc ba rồi so sánh hai số trong căn:

$$\blacktriangleright A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3B}.$$

$$\blacktriangleright A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}.$$

#### 2. Bài tập minh họa.

**Bài tập 6.** So sánh

a). 6 và  $\sqrt[3]{215}$ .

b).  $4\sqrt[3]{5}$  và  $5\sqrt[3]{4}$ .

**Lời giải**

a). Ta có  $6 = \sqrt[3]{216} > \sqrt[3]{215}$ . Vậy  $6 > \sqrt[3]{215}$ .

b).  $4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{320}$ ;  $5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$ .

Vì  $320 < 500$  nên  $4\sqrt[3]{5} < 5\sqrt[3]{4}$ .

**Bài tập 7.** So Sánh:

a).  $2\sqrt[3]{3}$  và  $\sqrt[3]{23}$ ;

b). 33 và  $3\sqrt[3]{133}$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{23}$ . Do đó  $2\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{23}$ .

b) Ta có:  $33 = 3 \cdot 11 = 3\sqrt[3]{1331} > 3\sqrt[3]{133}$ . Do đó  $33 > 3\sqrt[3]{133}$ .

**DẠNG 4. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**

**1. Phương pháp.**

Áp dụng:  $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$ .

**2. Bài tập minh họa.**

**Bài tập 8.** Giải các phương trình

a).  $\sqrt[3]{2x+1} = 2$ .

b).  $\sqrt[3]{1-2x} = -2$ .

c).  $\sqrt[3]{x-2} + 2 = x$ .

Lời giải

a).  $\sqrt[3]{2x+1} = 2 \Leftrightarrow 2x+1 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ .

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{7}{2}$ .

b).  $\sqrt[3]{1-2x} = -2 \Leftrightarrow 1-2x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$ .

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{9}{2}$ .

c).  $\sqrt[3]{x-2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2} = x-2 \Leftrightarrow x-2 = (x-2)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ (x-2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=1 \end{cases}$ .

Vậy phương trình có 3 nghiệm  $x=1; x=2; x=3$ .

**Bài tập 9.** Giải phương trình:

a).  $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$ ;

b).  $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$ .

Lời giải

a)  $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = \sqrt[3]{(x+3)^3}$

$\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 = (x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$\Leftrightarrow 27x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

b)  $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{5+x} = x+5 \Leftrightarrow x+5 = (x+5)^3$

$\Leftrightarrow (x+5)[(x+5)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ (x+5)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ x+5=1 \\ x+5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=-4 \\ x=-6 \end{cases}$ .