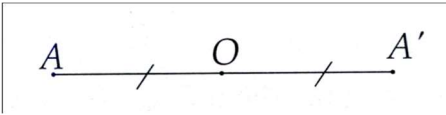


ĐỐI XỨNG TÂM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• *Hai điểm đối xứng qua một điểm*: Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm ấy.



A đối xứng với A' qua O

$\Leftrightarrow O$ là trung điểm của AA' .

Khi đó ta còn nói:

A' đối xứng với A qua O hoặc A và A' đối xứng nhau qua O .

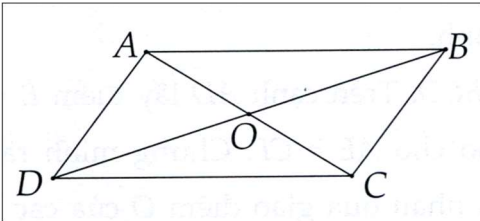
* *Quy ước*: Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O chính là điểm O .

* *Hai hình đối xứng qua một điểm*: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu một điểm bất kì thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.

* *Nhận xét*: Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì bằng nhau.

* *Hình có tâm đối xứng*: Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình qua điểm O cũng thuộc hình H .

* *Định lý*: Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.



O là tâm đối xứng của hình bình hành $ABCD$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. CÁC DẠNG BÀI CƠ BẢN – NÂNG CAO

Dạng 1. Chứng minh hai điểm hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một điểm

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng hoặc hai hình đối xứng với nhau qua một điểm.

Bài 1. Cho tam giác ABC . Gọi các điểm D, E theo thứ tự là trung điểm của AB và AC . Lấy P đối xứng với B qua tâm E và Q đối xứng với C qua tâm D . Chứng minh rằng hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua tâm A .

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Gọi E là điểm bất kì nằm ngoài tứ giác, F là điểm đối xứng với E qua M , G là điểm đối xứng với E qua Q , H là điểm đối xứng với G qua P . Chứng minh rằng E là điểm đối xứng với H qua điểm N .

Dạng 2. Sử dụng tính chất đối xứng trục để giải toán

Phương pháp giải: Sử dụng nhận xét hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và AC . Một điểm M bất kì thuộc cạnh BC , có điểm đối xứng với M qua điểm F là Q và điểm đối xứng của M qua điểm F là Q . Chứng minh:

a) A thuộc đường thẳng PQ ;

b) $BCQP$ là hình bình hành.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm E và trên cạnh CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Chứng minh rằng hai điểm E, F đối xứng với nhau qua giao điểm của các đường chéo AC, BD .

Dạng 3. Tổng hợp

Bài 5. Cho tam giác ABC điểm D thuộc cạnh BC . Từ D kẻ đường thẳng song song với cạnh AB , cắt cạnh AC tại E và đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại F . Chứng minh hai điểm E và F đối xứng với nhau qua trung điểm I của đoạn thẳng AD .

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AD, BC ở E và F . Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua O .

Bài 7 Cho góc xOy . Điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox , vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy . Tính số đo góc xOy để B đối xứng với C qua O .

Bài 8. Cho tam giác ABC . Vẽ điểm D đối xứng với B qua A , vẽ điểm E đối xứng với C qua A . Gọi M là điểm nằm giữa B và C . Tia MA cắt DE tại N . Chứng minh $MC = NE$.

HƯỚNG DẪN

1.

Ta có: $BAPC$ và $CAFB$ đều là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} AP // BC \\ FA // BC \end{cases}$$

Vậy F, A, P thẳng hàng.

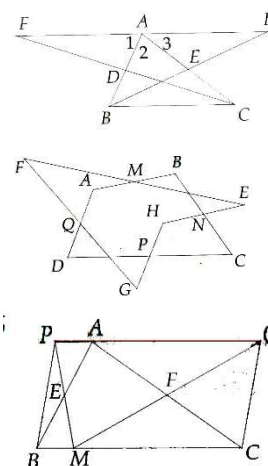
2.

Ta có $EBFA, FAGD, GDHC$ đều là hình bình hành. Vậy $BECH$ cũng là hình bình hành.

Vậy E đối xứng với H qua N .

3.

a) Tương tự 1. Ta chứng minh được A thuộc đường thẳng PQ .



b) Ta có:

$PA \parallel BM, PA = BM$

$AQ \parallel MC, AQ = MC$

Suy ra $BCQP$ là hình bình hành

4.

Ta có $AEFC$ là hình bình hành ($AE \parallel FC; AE = CF$) $\Rightarrow$ đường EF cắt AC tại trung điểm O của $AC \Rightarrow$ nên E, O, F thẳng hàng và O cũng là trung điểm EF (ĐPCM).

5.

Ta chứng minh được $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AD \cap EF = I$. I là trung điểm của AD và EF . Suy ra E đối xứng với F qua I .

6.

Do E, O, F thẳng hàng mà B, O, D cũng thẳng hàng nên $\widehat{EOD} = \widehat{FOB}$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle DOE = \triangle BOF$ (g-c-g) $\Rightarrow OE = OF$.

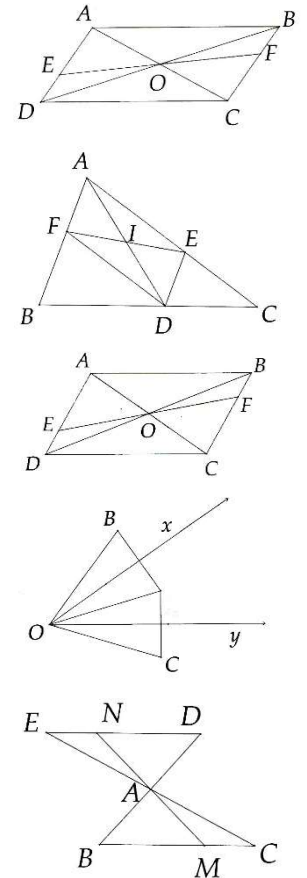
Vậy E đối xứng với F qua O .

7. Để B đối xứng với C qua O thì $\widehat{xOy} = 90^\circ$

8.

Chú ý: $BEDC$ là hình bình hành

Ta có: $\triangle EAN = \triangle CAM$ (g - c - g) $\Rightarrow NE = MC$



B. DẠNG BÀI NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Bài 1: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M không thuộc đường thẳng đó. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua M . Chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Trên cạnh AB lấy điểm I , trên cạnh AC lấy điểm K sao cho $AI = AK$. Chứng minh rằng điểm I đối xứng với điểm K qua AH .

Bài 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ E là điểm đối xứng của A qua B , F là điểm đối xứng của A qua D . Chứng minh rằng: E là điểm đối xứng của F qua C .

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho $AE = CF$. Chứng minh rằng: các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy.

Bài 5: Cho góc xOy khác góc bẹt và điểm M nằm trong góc đó. Hãy dựng qua M một đường thẳng cắt Ox ở A , cắt Oy ở B sao cho M là trung điểm của AB .

Bài 6: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm P trên AB . Gọi M, N là các trung điểm của AD, BC ; E, F lần lượt là điểm đối xứng của P qua M, N . Chứng minh rằng:

a) E, F thuộc đường thẳng CD .

b) $EF = 2CD$

Bài 7: Cho tam giác ABC , D là một điểm trên cạnh BC . Gọi E và F theo thứ tự là điểm đối xứng của điểm D qua AB và AC .

a) Chứng minh $AE = AF$;

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì để điểm E đối xứng với điểm F qua điểm A.

Bài 8: Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng với A qua C, E là điểm đối xứng với B qua A, F là điểm đối xứng với C qua B. Gọi BM là trung tuyến của tam giác ABC, EK là trung tuyến của tam giác DEF.

a) Chứng minh rằng ABKM là hình bình hành.

b) Gọi G là giao điểm của BM và EK. Chứng minh rằng G là trọng tâm của hai tam giác ABC và tam giác DEF.

Bài 9: Cho A và B là hai điểm thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xy (AB không vuông góc với xy). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua xy, C là giao điểm của A'B và xy. Gọi M là điểm bất kỳ khác C thuộc đường thẳng xy.

Chứng minh rằng: $AC + CB < AM + MB$.

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), điểm D thuộc cạnh huyền BC. Vẽ điểm M và điểm N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC. Chứng minh rằng:

a) M và N đối xứng qua A.

b) Xác định vị trí của điểm D để MN ngắn nhất, dài nhất.

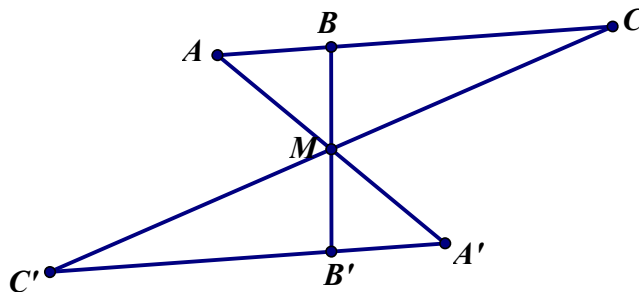
Hướng dẫn giải

Bài 1:

Giả sử A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó, ta có $AB + BC = AC$ (1).

Các đoạn thẳng A'B', B'C' và A'C' lần lượt đối xứng với các đoạn thẳng AB, BC, AC qua điểm M nên ta có $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $A'C' = AC$.

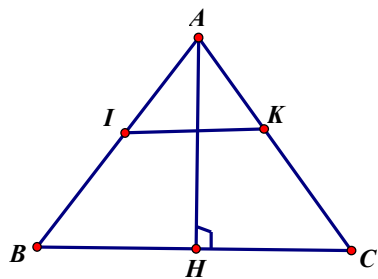
Kết hợp đẳng thức (1) ta được $A'B' + B'C' = A'C'$. Vậy A', B', C' thẳng hàng.



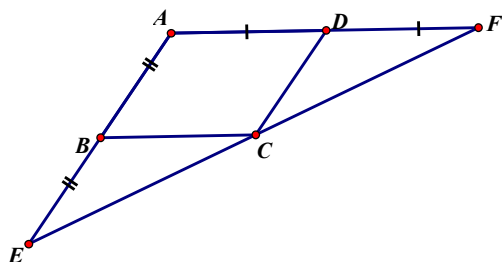
Bài 2:

Vì ABC cân tại A, AH là đường cao nên AH là tia phân giác của góc A

Lại có: $IA = AK \Rightarrow \Delta IAK$ cân tại A, mà AH là tia phân giác của góc A (cmt) $\Rightarrow$ AH là đường trung trực của IK $\Rightarrow$ Điểm I đối xứng với điểm K qua AH



Bài 3:



+) E là điểm đối xứng của A qua B (gt) nên $AB = BE$

Tứ giác ABCD là HBGH $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases}$

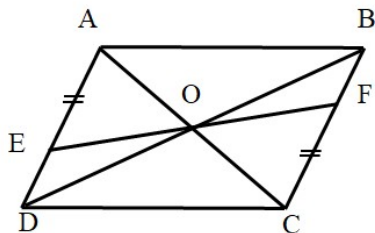
Mà $AB = BE$ (cmt) $\Rightarrow \begin{cases} BE \parallel CD \\ BE = CD \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác BDCE là hình bình hành

$\Rightarrow BD \parallel EC$ và $BD = EC$.

Chứng minh tương tự cũng có $BD \parallel CF$ và $BD = CF$.

Vì $BD \parallel EC$ và $BD \parallel CF \Rightarrow E, C, F$ thẳng hàng (tiên đề Ô-clit) Mà $EC = CF (= BD)$ nên C là trung điểm EF $\Rightarrow E$ là điểm đối xứng của F qua C.

Bài 4:



Gọi O là giao điểm của AC, BD.

Tứ giác ABCD là hình bình hành(gt) $\Rightarrow$ O là trung điểm của AC

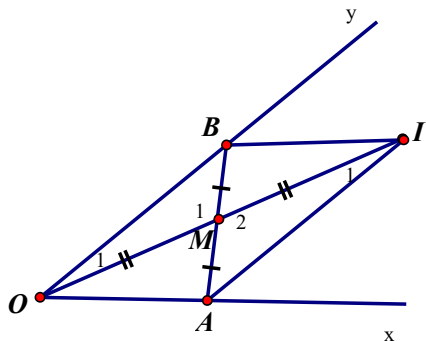
Tứ giác AECF có $AE = CF$, $AE \parallel CF$ nên là hình bình hành (dnhb)

mà O là trung điểm AC nên O là trung điểm EF.

⇒
điểm O.

EF đi qua O. Vậy các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy tại

Bài 5:



Cách dựng:

- Dựng điểm I đối xứng với O qua điểm M.
- Qua I dựng đường thẳng song song với Oy cắt Ox ở A.
- Dựng đường thẳng AM cắt Oy ở B.

Chứng minh:

Xét $\triangle MAI$ và $\triangle MBO$ có:

$$\widehat{O}_1 = \widehat{I}_1 \text{ (hai góc so le trong)}$$

$$MO = MI \text{ (Vì I và O đối xứng nhau qua M)}$$

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAI = \triangle MBO \text{ (g.c.g)} \Rightarrow MA = MB \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

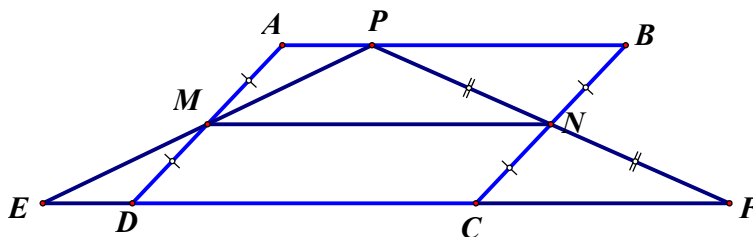
Bài toán luôn luôn dựng được một và có một nghiệm hình.

Bài 6:

a) +) M là trung điểm của AD và PE suy ra tứ giác APDE là hình bình hành $\Rightarrow DE \parallel AP$.

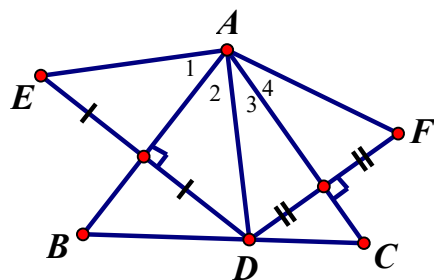
+) N là trung điểm của BC và PF suy ra tứ giác BPCF là hình bình hành $\Rightarrow FC \parallel PB$.

Mặt khác $CD \parallel AB$ nên suy ra các điểm E, F nằm trên đường thẳng CD.



$$\text{Xét } \triangle PEF \text{ có: } \begin{cases} MP = ME(gt) \\ NP = NF(gt) \end{cases} \Rightarrow MN \text{ là đường trung bình } \triangle PEF \Rightarrow EF = 2MN = 2CD.$$

Bài 7:



a) E đối xứng với D qua AB $\Rightarrow$ AB là trung trực của ED $\Rightarrow$ AE = AD.

F đối xứng với D qua AC $\Rightarrow$ AC là trung trực của DE $\Rightarrow$ AF = AD.

$\Rightarrow$ AE = AF.

Xét $\triangle AED$ cân tại A, có AB là trung trực $\Rightarrow$ AB đồng thời là phân giác của $\widehat{EAD} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Xét $\triangle ADF$ cân tại A, có AC là trung trực $\Rightarrow$ AC đồng thời là phân giác của $\widehat{FAD}$

$\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$

$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 2(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}) = 2\widehat{BAC}$

b) Để E đối xứng với F qua A thì E, A, F thẳng

hàng. $\Leftrightarrow \widehat{EAF} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 2\widehat{BAC} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

Vậy nếu $\triangle ABC$ vuông ở A thì E đối xứng với F qua điểm A.

Bài 8:

a/ BK là đường trung bình của tam giác CFD. Suy ra

$BK \parallel CD, BK = \frac{1}{2}CD$

Mà $CD = CA, AM = \frac{1}{2}CA \rightarrow BK \parallel AM, BK = AM$

Suy ra tứ giác ABKM là hình bình hành

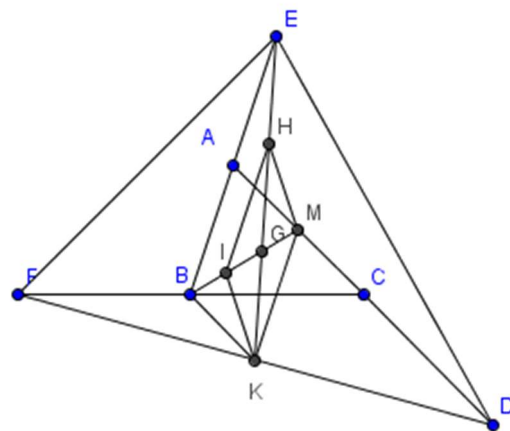
b/ Gọi G là giao điểm của EK, BM. I, H là trung điểm của BG, EG.

- Chứng minh tứ giác HMKI là hình bình hành:

Ta có: H là trung điểm của GE (gt)

I là trung điểm của GB (gt)

$\Rightarrow$ HI là đường trung bình của $\triangle BEG \Rightarrow \begin{cases} HI \parallel BE \\ HI = \frac{1}{2}BE \end{cases} \quad (1)$



+) Tứ giác ABKM là hình bình hành (cm câu a) $\Rightarrow \begin{cases} MK \parallel AB \\ MK = AB \end{cases}$

Mà E đối xứng với B qua A $\Rightarrow A$ là trung điểm của BE $\Rightarrow AB = \frac{1}{2}BE$

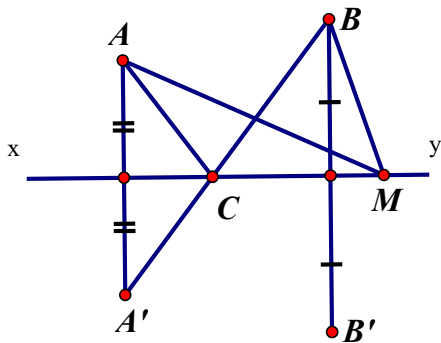
$$\Rightarrow \begin{cases} MK \parallel BE \\ MK = \frac{1}{2}BE \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác HMKI là hình bình hành

- Suy ra $GH = GK, GI = GM$, từ đó ta có $GE = \frac{2}{3}EK, GB = \frac{2}{3}BM \rightarrow G$ là trọng tâm tam giác

DEF cũng là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 9:



A' đối xứng với A qua xy

$\Rightarrow$ xy là đường trung trực của AA'

và $AC = A'C, AM = A'M$

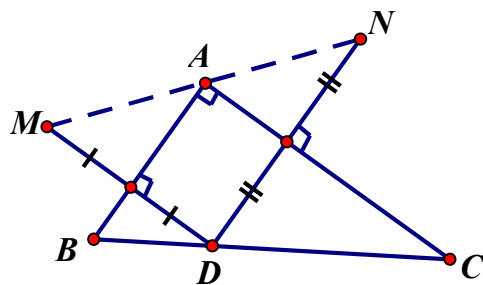
Ta có: $AC + CB = A'C + CB = A'B$ (1)

$$AM + MB = A'M + MB \quad (2)$$

Trong $\triangle MA'B$ có: $A'B < A'M + MB$ (quan hệ giữa 3 cạnh trong tam giác) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $AC + CB < AM + MB$.

Bài 10:



a) AM đối xứng với AD qua AB nên
$$\begin{cases} AM = AD \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{cases} \quad (1)$$

AN đối xứng với AD qua AC nên
$$\begin{cases} AN = AD \\ \widehat{A_3} = \widehat{A_4} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 2(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}) = 2\widehat{BAC} = 2.90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ 3 điểm M, A, N thẳng hàng

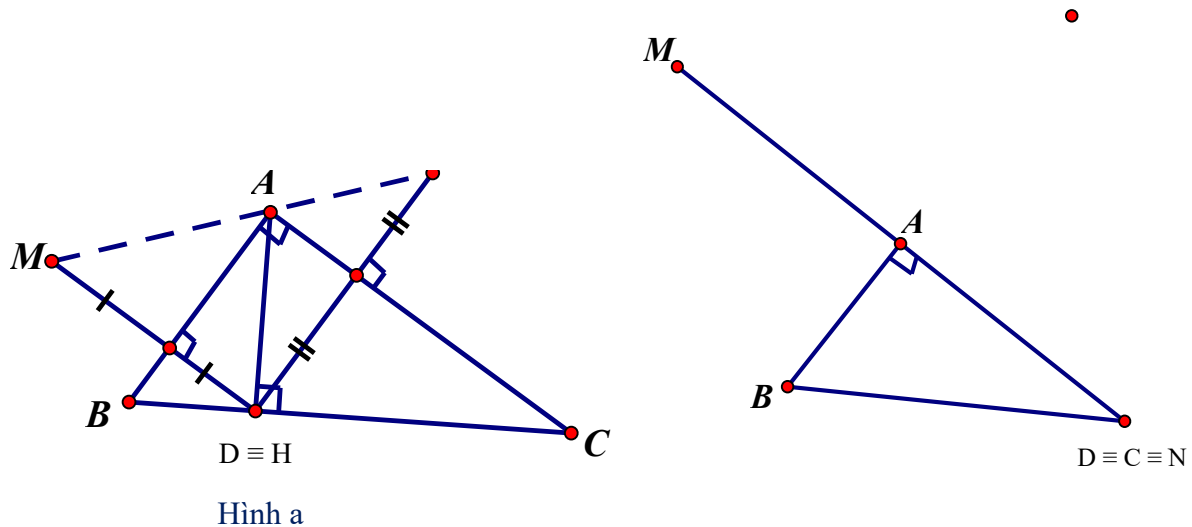
$\Rightarrow$ Mà $AM = AN \Rightarrow M$ và N đối xứng qua A và $MN = 2AD$.

b) Vẽ $AH \perp BC$, ta có $AD \geq AH \Rightarrow MN \geq 2AH$

Vậy MN ngắn nhất bằng AH khi $D \equiv H$ (hình a)

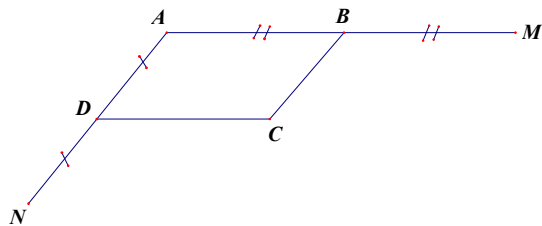
Dựa vào quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu, ta có $AD \leq AC \Rightarrow MN = 2AD \leq 2AC$.

Do đó MN dài nhất bằng 2AC khi $D \equiv C$ (hình b)



C. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hình vẽ trong đó ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua C.



Bài 2: Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BM, CN. Gọi D là điểm đối xứng với B qua M, gọi E là điểm đối xứng với C qua N. Chứng minh rằng điểm D đối xứng với điểm E qua điểm A.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh BC. Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB, gọi F là điểm đối xứng với D qua AC. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng nhau qua điểm A.

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt hai cạnh đối AD, BC ở E, F. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng nhau qua điểm O.

Bài 5: Cho tam giác ABC, D là một điểm trên BC, Qua D vẽ $DE \parallel AB$ (E thuộc AC) vẽ $DF \parallel AC$ (F thuộc AB). Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh rằng E đối xứng với F qua điểm I.

Bài 6: Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AB, E là trung điểm của AC. Gọi O là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Vẽ M đối xứng với O qua D, vẽ N đối xứng với O qua E. Chứng minh rằng MNCB là hình bình hành.

Bài 7: Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với AB, Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại G. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng G đối xứng với H qua I.

Bài 8: Cho $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc đó, Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, C đối xứng với A qua Oy.

- Chứng minh rằng $OB = OC$
- Tính số đo $\widehat{xOy}$ để B đối xứng với C qua O

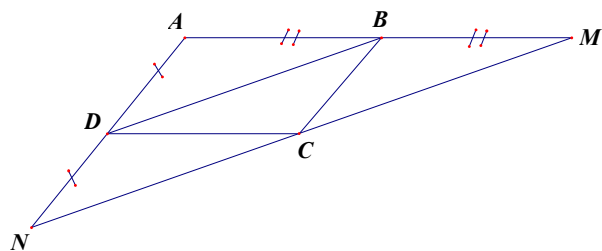
Bài 9: Cho ΔABC có H là trực tâm. Gọi M là trung điểm của BC, K là điểm đối xứng với H qua M. Tính số đo $\widehat{ABK}$; $\widehat{ACK}$

Bài 10: Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD; E là một điểm bất kỳ trên cạnh đáy AD và I, K là điểm đối xứng với E lần lượt qua M và N. Chứng minh rằng độ dài IK không phụ thuộc vào vị trí của điểm E

HƯỚNG DẪN

Bài 1: Cho hình vẽ trong đó ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua C.

Lời giải



Ta có $AB = CD$ (ABCD là hình bình hành)

$$AB = BM \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow CD = BM$$

Ta có $AB \parallel CD$ (ABCD là hình bình hành)

$$\Rightarrow BM \parallel CD$$

Xét tứ giác BDCM có

$$CD = BM \text{ (cmt)}$$

$$CD \parallel BM \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BDCM là hình bình hành

$\Rightarrow BD \parallel CM; BD = CM \text{ (1)}$

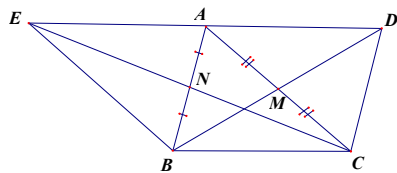
Chứng minh tương tự ta có $BD \parallel NC; BD = NC \text{ (2)}$

Từ (1) và (2) và theo tiên đề Ôclit suy ra N, C, M thẳng hàng và $CM = CN$

Do đó N đối xứng với M qua C.

Bài 2: Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BM, CN. Gọi D là điểm đối xứng với B qua M, gọi E là điểm đối xứng với C qua N. Chứng minh rằng điểm D đối xứng với điểm E qua điểm A.

Lời giải



Xét tứ giác ABCD có

$$AM = MC \text{ (BM là trung tuyến của tam giác ABC)}$$

$$BM = MD \text{ (D đối xứng với B qua M)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow AD \parallel BC; AD = BC \text{ (1)}$

Xét tứ giác ACBE có

$$AN = NB \text{ (CN là trung tuyến của tam giác ABC)}$$

$$NE = NC \text{ (E đối xứng với C qua N)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ACBE là hình bình hành

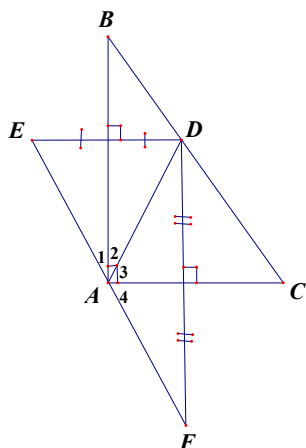
$\Rightarrow AE \parallel BC; AE = BC \text{ (2)}$

Từ (1) và (2) Theo tiên đề Ôclit suy ra A, D, E thẳng hàng và $AD = AE$

Do đó D đối xứng với E qua A

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh BC. Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB, gọi F là điểm đối xứng với D qua AC. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng nhau qua điểm A.

Lời giải



Ta có E đối xứng với D qua AB

$\Rightarrow$ AB là đường trung trực của ED

$\Rightarrow$ AE = AD (1)

$\Rightarrow$ $\triangle ADE$ cân tại A

$\Rightarrow$ AB là đường phân giác

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (2)

Ta có F đối xứng với D qua AC

$\Rightarrow$ AC là đường trung trực của FD

$\Rightarrow$ AF = AD (3)

$\Rightarrow$ $\triangle ADF$ cân tại A

$\Rightarrow$ AC là đường phân giác

$\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ (4)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow$ AE = AF (5)

Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4}$ (6)

Từ (2)(4) và (6) suy ra

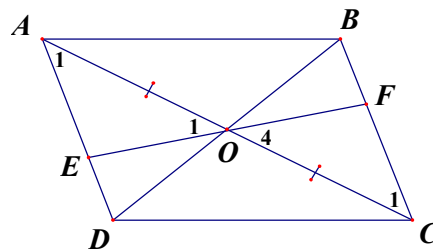
$$\begin{aligned} \widehat{EAF} &= \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} \\ &= 2(\widehat{A_2} + \widehat{A_3}) \\ &= 2\widehat{BAC} \\ &= 2 \cdot 90^\circ \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ E, A, F thẳng hàng (7)

Từ (5) và (7) suy ra E đối xứng với F qua A

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt hai cạnh đối AD, BC ở E, F. Chứng minh rằng các điểm E và F đối xứng nhau qua điểm O.

Lời giải



Ta có ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow$ AD // BC

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (2 góc so le trong)

O là giao điểm của 2 đường chéo

$$\Rightarrow OA = OC$$

Xét $\triangle AOE$ và $\triangle COF$ có

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (cmt)}$$

$$OA = OC \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_4} \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOE = \triangle COF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow OE = OF$$

Do đó E đối xứng với F qua O

Bài 5: Cho tam giác ABC, D là một điểm trên BC, Qua D vẽ $DE \parallel AB$ (E thuộc AC) vẽ $DF \parallel AC$ (F thuộc AB). Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh rằng E đối xứng với F qua điểm I.

Lời giải

Xét tứ giác AEDF có

$$AF \parallel DE \text{ (DE} \parallel AB \text{)}$$

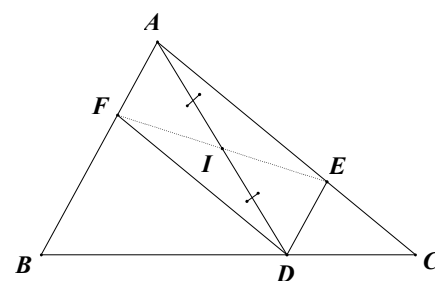
$$AE \parallel DF \text{ (DF} \parallel AC \text{)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEDF là hình bình hành

Có I là trung điểm của đường chéo AD

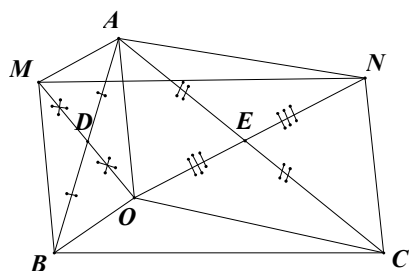
$\Rightarrow$ I là trung điểm của đường chéo EF

Do đó E đối xứng với F qua điểm I.



Bài 6: Cho tam giác ABC, D là trung điểm của AB, E là trung điểm của AC. Gọi O là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Vẽ M đối xứng với O qua D, vẽ N đối xứng với O qua E. Chứng minh rằng MNCB là hình bình hành.

Lời giải



Xét tứ giác AOCN có

$$AE = EC \text{ (gt)}$$

$$OE = EN \text{ (N đối xứng với O qua E)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOCN là hình bình hành

$$AO \parallel NC; AO = NC \text{ (1)}$$

Xét tứ giác AOBM có

$$AD = DB \text{ (gt)}$$

$$OD = DM \text{ (N đối xứng với O qua E)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOBM là hình bình hành
 $\Rightarrow AO//MB; AO=MB$ (1)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow BM//CN; BM=CN$

Xét tứ giác MNCB có

$BM//CN$ (cmt)

$BM=CN$ (cmt)

Do đó tứ giác MNCB là hình bình hành

Bài 7: Cho tam giác ABC có đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với AB, Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại G. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng G đối xứng với H qua I.

Lời giải

Ta có $BD \perp AC$ (gt)

$CG \perp AC$ (gt)

$\Rightarrow BD//CG \Rightarrow BH//CG$

Ta có $CE \perp AB$ (gt)

$BG \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow CE//BG \Rightarrow CH//BG$

Xét tứ giác BHCG có

$BH//CG$ (cmt)

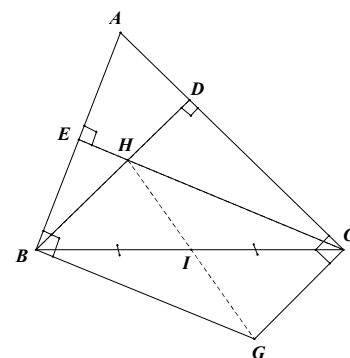
$CH//BG$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCG là hình bình hành

Có I là trung điểm của đường chéo BC

$\Rightarrow$ I là trung điểm GH

$\Rightarrow$ G đối xứng với H qua điểm I



Bài 8: Cho $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc đó, Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, C đối xứng với A qua Oy.

a) Chứng minh rằng $OB = OC$

b) Tính số đo $\widehat{xOy}$ để B đối xứng với C qua O

Lời giải

a) Ta có B đối xứng với A qua Ox

$\Rightarrow$ Ox là đường trung trực của AB

$\Rightarrow$ OA = OB (1)

Ta có C đối xứng với A qua Oy

$\Rightarrow$ Oy là đường trung trực của AC

$\Rightarrow$ OA = OC (2)

Từ (1) và (2) suy ra OB = OC

b) Xét ΔAOB có

OA = OB (cmt)

$\Rightarrow \Delta AOB$ cân tại O

Ta lại có Ox là trung trực của AB

$\Rightarrow$ Ox là tia phân giác của $\widehat{AOB}$

$\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (3)

Xét ΔAOC Có

OA = OC (cmt)

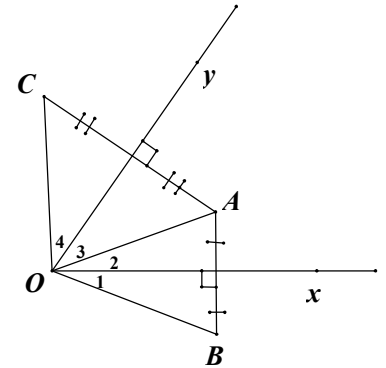
$\Rightarrow \Delta AOC$ cân tại O

Ta lại có Oy là trung trực của AC

$\Rightarrow$ Oy là tia phân giác của $\widehat{AOC}$

$\Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ (4)

Ta có $\widehat{BOC} = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4$ (5)



Từ (3)(4) và (5) suy ra

$$\begin{aligned}\widehat{BOC} &= \widehat{O}_2 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_3 \\ &= 2(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3) \\ &= 2.\widehat{xOy}\end{aligned}$$

Ta có OB = OC (cmt)

Để B đối xứng với C qua điểm O

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ$$

$$2.\widehat{xOy} = 180^\circ$$

$$\widehat{xOy} = 180^\circ : 2$$

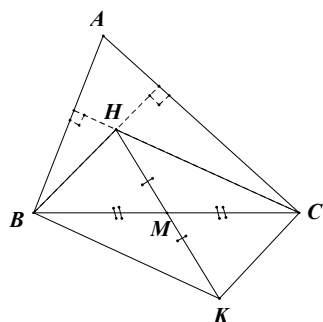
$$\widehat{xOy} = 90^\circ$$

Vậy $\widehat{xOy} = 90^\circ$ thì B đối xứng với C qua O

Bài 9: Cho ΔABC có H là trực tâm. Gọi M là trung điểm của BC, K là điểm đối xứng với H qua M.

Tính số đo $\widehat{ABK}$; $\widehat{ACK}$

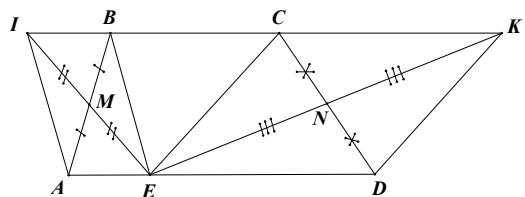
Lời giải



Xét tứ giác BHCK có
 $MB = MC$ (gt)
 $HM = MK$ (H đối xứng với K qua M)
 $\Rightarrow$ Tứ giác BHCK là hình bình hành
 $\Rightarrow BH \parallel CK; CH \parallel BK$ (1)
 Ta có H là trực tâm của ΔABC
 $\Rightarrow BH \perp AC; CK \perp AB$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $CK \perp AC; BK \perp AB$
 $\Rightarrow \widehat{ABK} = 90^\circ; \widehat{ACK} = 90^\circ$

Bài 10: Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD; E là một điểm bất kỳ trên cạnh đáy AD và I, K là điểm đối xứng với E lần lượt qua M và N. Chứng minh rằng độ dài IK không phụ thuộc vào vị trí của điểm E

Lời giải



Xét tứ giác AIBE có

$IM = ME$ (I đối xứng với E qua M)

$MA = MB$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác AIBE là hình bình hành

$\Rightarrow IB = AE; AE \parallel IB$ (1)

Xét tứ giác ECKD có

$EN = NK$ (E đối xứng với K qua N)

$CN = ND$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác ECKD là hình bình hành

$\Rightarrow CK = ED; CK \parallel ED$ (2)

Ta có

$IB \parallel AE$ (cmt) $\Rightarrow IB \parallel AD$

$BC \parallel AD$ (gt)

Theo tiên đề Oclit $\Rightarrow I, B, C$ thẳng hàng

$CK \parallel ED$ (cmt) $\Rightarrow CK \parallel AD$

$CB \parallel AD$ (gt)

Theo tiên đề Oclit $\Rightarrow K, C, B$ thẳng hàng

$\Rightarrow I, K, C, B$ thẳng hàng

$\Rightarrow IK = IB + CB + CK$ (3)

Từ (1) (2) và (3)

$\Rightarrow IK = EA + CB + EB$

$\Rightarrow IK = AD + CB$

Vậy độ dài IK không phụ thuộc vào vị trí của điểm E.