

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

* Tập xác định của hàm số:

+ Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

* Tính chất biến thiên của hàm số:

+ Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) nghịch biến khi $x < 0$, và đồng biến khi $x > 0$.

+ Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

* Đồ thị của hàm số: $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

+ Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc toạ độ và nhận trục **Oy** làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một **Parabol** (P) với đỉnh **O**.

+ Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với mọi $x \neq 0$, $y = 0$ khi $x = 0$. Do đó, đồ thị (P) nằm phía trên trục hoành (Ox), đỉnh **O** là điểm thấp nhất của đồ thị.

+ Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$, $y = 0$ khi $x = 0$. Do đó, đồ thị (P) nằm phía trên trục hoành (Ox), đỉnh **O** là điểm cao nhất của đồ thị.

+ Vì đồ thị $y = ax^2$ ($a \neq 0$) luôn đi qua gốc toạ độ và nhận trục **Oy** làm trục đối xứng nên để vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một điểm ở bên phải trục **Oy** rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua **Oy**.

B. CÁC DẠNG BÀI TOÁN MINH HỌA

Dạng 1. Xác định hàm số bậc hai

Cho hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số bậc hai một ẩn nếu phương trình của hàm số có:

Vậy, để xác định một hàm số là hàm số bậc hai một ẩn phải thoả mãn điều kiện sau:

+ Hàm số chỉ chứa một ẩn duy nhất, với bậc cao nhất của ẩn là bậc hai.

+ Hàm số có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với ($a \neq 0$).

+ Hàm số có dạng $y = ax^2 + b$ có hệ số $a \neq 0$.

+ Hàm số $y = ax^2$ có hệ số $a \neq 0$.

Ví dụ minh họa 1:

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai một ẩn?

a. $y = \frac{1}{x^2} + 3$

b. $y = 1 + \frac{x^2}{5}$

c. $y = -x^2 + \frac{1}{x}$

$$d. y = \frac{1}{y^2} + x^2$$

$$e. y = 1 + x - x^2$$

$$f. y = 3(x-1)^2$$

Hướng dẫn giải:

Các hàm số là hàm số bậc hai một ẩn là: $y = 1 + \frac{x^2}{5}$ và $y = 1 + x - x^2$

$$y = 3(x-1)^2 = 3x^2 - 6x + 3.$$

Ví dụ minh họa 2:

Tìm m để hàm số sau là hàm số bậc hai một ẩn.

$$a. y = (m+2)x^2$$

$$b. y = (m^2 - 2)x^2$$

Hướng dẫn giải:

a. Để hàm số $y = (m+2)x^2$ là hàm số bậc hai khi và chỉ khi: $m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Vậy, với $m \neq -2$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc hai.

b. Để hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ là hàm số bậc hai khi và chỉ khi: $m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \sqrt{2} \\ m \neq -\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy, với $m \neq \pm\sqrt{2}$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc hai.

Dạng 2. Điểm thuộc đồ thị hàm số - Vẽ đồ thị hàm số

* Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị là Parabol (P).

+ Điểm M có tọa độ $(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị parabol (P) khi và chỉ khi $y_0 = ax_0^2$

+ Điểm M có tọa độ $(x_0; y_0)$ không thuộc đồ thị parabol (P) $\Leftrightarrow y_0 \neq ax_0^2$

* Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

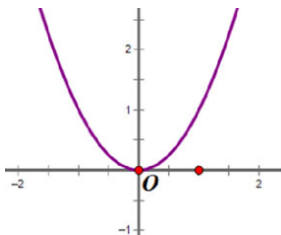
+ Xác định đỉnh của Parabol là gốc tọa độ $O(0;0)$.

+ Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số:

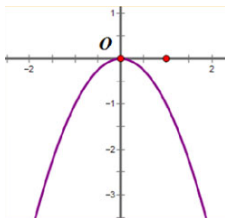
-2	-1	0	1	2
4a	a	0	a	4a

+ Hình dạng parabol:

$a > 0$



$a < 0$



Parabol nhận trục tung làm trục đối xứng.

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

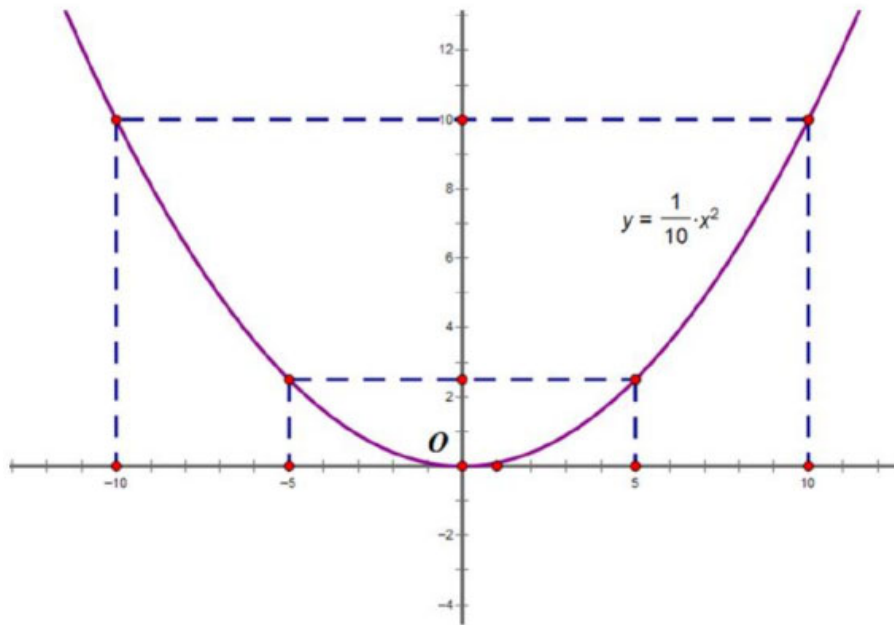
b. Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không: $A\left(3; \frac{9}{10}\right)$, $B\left(-5; \frac{5}{2}\right)$, $C(-10; 1)$

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a. Đồ thị (P) có đỉnh là $O(0;0)$, nằm phía trên trục hoành, nhận trục Oy làm trục đối xứng và đồ thị đi qua các điểm sau:

-10	-5	0	5	10
10	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	10



b. Thay tọa độ điểm $A\left(3; \frac{9}{10}\right)$ vào phương trình parabol (P): $y = \frac{1}{10}x^2$

Ta có: $\frac{9}{10} = \frac{1}{10}(3)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{10} = \frac{9}{10}$ (đúng). Vậy điểm A thuộc đồ thị hàm số.

Thay tọa độ điểm $B\left(-5; \frac{5}{2}\right)$ vào phương trình parabol (P): $y = \frac{1}{10}x^2$

Ta có: $\frac{5}{2} = \frac{1}{10}(-5)^2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{25}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ (đúng).

Vậy điểm B thuộc đồ thị hàm số.

Thay tọa độ điểm $C(-10;1)$ vào phương trình parabol $(P): y = \frac{1}{10}x^2$

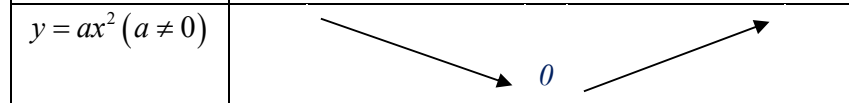
Ta có: $1 = \frac{1}{10}(-10)^2 \Leftrightarrow \frac{100}{10} \Leftrightarrow 1 = 10$ (vô lý).

Vậy điểm B không thuộc đồ thị hàm số.

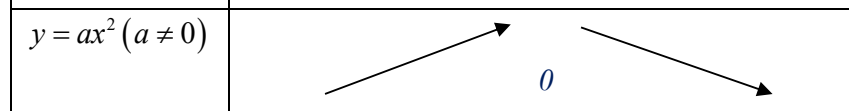
Dạng 3. Sự đồng biến - nghịch biến của đồ thị hàm số.

Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $a > 0$: Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) nghịch biến khi $x < 0$, và đồng biến khi $x > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = ax^2$ ($a \neq 0$)			

+ Nếu $a < 0$: Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = ax^2$ ($a \neq 0$)			

Ví dụ minh họa 1: Cho hàm số $y = (m^2 - m)x^2$. Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với mọi $x > 0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$.

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y = (m^2 - m)x^2$.

a. Hàm số đồng biến với mọi $x > 0 \Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m(m-1) > 0$

Khi $\begin{cases} m > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$

Hoặc $\begin{cases} m < 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Vậy với $m < 0$ hoặc $m > 1$ thì hàm số đã cho đồng biến với mọi $x > 0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x > 0 \Leftrightarrow a < 0 \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow m(m-1) < 0$

Khi $\begin{cases} m > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Hoặc $\begin{cases} m < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện này.

Vậy với $0 < m < 1$ thì hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x > 0$.

Dạng 4. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

* Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

+ Nếu $a > 0$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $x = 0$.

+ Nếu $a < 0$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 khi $x = 0$.

* Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

+ Nếu $a > 0$ hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{b}{2a}$

+ Nếu $a < 0$ hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có giá trị lớn nhất khi $x = -\frac{b}{2a}$

Dạng 5. Viết phương trình parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (tìm hệ số a)

Khi biết toạ độ của một điểm thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$), ta đi tìm hệ số a của nó bằng cách thay toạ độ điểm đó vào phương trình hàm số.

Ví dụ minh hoạ 1: Cho hàm số $y = (m^2 - m)x^2$. Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$.

Hướng dẫn giải:

Đồ thị hàm số $y = (m^2 - m)x^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$

$$\Leftrightarrow 2 = (m^2 - m)(1)^2 \Leftrightarrow m^2 - m = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy, với $m = -1$ hoặc $m = 2$ thì đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1; 2)$

Ví dụ minh hoạ 2: Viết phương trình parabol $y = ax^2$. Biết đồ thị của nó đi qua điểm $M(-2; 8)$.

Hướng dẫn giải:

Phương trình parabol $y = ax^2$ đi qua điểm $M(-2; 8)$

$$\Leftrightarrow -8 = a(-2)^2 \Leftrightarrow a = -2$$

Vậy, hàm số cần tìm là: $y = -2x^2$.

Dạng 6. Tương giao giữa Parabol với đường thẳng

Cho parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $y = kx + b$.

+ Lập phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 = kx + b$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của parabol với đường thẳng.

+ Toạ độ giao điểm $(x_0; y_0)$ vừa là nghiệm của phương trình $y = ax^2$, vừa là nghiệm của phương trình $y = kx + b$.

Ví dụ minh hoạ 1: Cho hàm số $y = mx^2$ có đồ thị là parabol (P) . Tìm giá trị của m biết rằng đồ thị của hàm số $y = mx^2$ cắt đường thẳng $(d): y = x - 3$ tại điểm có hoành độ bằng 5.

Hướng dẫn giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$ là toạ độ giao điểm của (P) và (d) .

Theo đề, $x_0 = 5$ và M thuộc (d) nên ta có: $y_0 = x_0 - 3 \Leftrightarrow y_0 = 5 - 3 \Leftrightarrow y_0 = 2$

Vậy $M(5; 2)$. Điểm $M(5; 2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = mx^2$

$$\Leftrightarrow 2 = m(5)^2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{25}. \text{ Vậy, hàm số cần tìm là: } y = \frac{2}{25}x^2.$$

BÀI TẬP LUYỆN TẠI LỚP

Bài 1: Cho hàm số $y = -3x^2$

a. Lập bảng tính giá trị của hàm số tại các điểm có hoành độ (x) sau:

$$-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2$$

b. Với giá trị nào của x thì hàm số (y) nhận các giá trị sau:

$$0; 27; -27; 5; -\frac{1}{9}; -81; -3$$

Bài 2: Cho hàm số $y = (m - 4)x^2$. Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với mọi $x > 0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$.

Bài 3: Cho hàm số $y = (k^2 - 2k + 3)x^2$

a. Xét sự biến thiên của hàm số trên tập xác định của nó?

b. Tìm k biết đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 6)$?

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

a. Vẽ đồ thị của hàm số;

b. Cho các điểm sau: $A(0; 1); B(2; 2); C\left(-3; \frac{5}{2}\right); D\left(-\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right)$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

Bài 5: Cho hàm số $y = (m + 1)x^2$. Xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

- a. Đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;9)$
 b. Đồ thị của hàm số đi qua điểm $B(-4;32)$.

Bài 6: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$.

- a. Biết điểm $A(-3;m)$ thuộc đồ thị hàm số, tìm m? Hỏi điểm $A'(3;m)$ có thuộc đồ thị hàm số không? Vì sao?
 b. Biết điểm $M(k;-9)$ thuộc đồ thị hàm số, tìm k? Hỏi điểm $M'(k;9)$ có thuộc đồ thị hàm số không? Vì sao?

Bài 7: Cho hàm số $y = ax^2$.

- a. Xác định hàm số biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(\sqrt{2};2)$.
 Vẽ đồ thị hàm số với giá trị tìm được của a.
 b. Biết $B(-\sqrt{2};2)$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số trong câu a, O là gốc tọa độ. Tam giác OAB là tam giác gì? Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 8: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 (P)$ và $y = 2x - 2$.

- a. Vẽ hai đồ thị hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
 b. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên.

Bài 9: Cho hàm số $y = -3x^2$.

- a. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -9 ;
 b. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số cách đều hai trục tọa độ
 c. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ.

Bài 10: Cho hàm số $y = kx^2$.

- a. Xác định k biết đồ thị hàm số có đồ thị cắt đường thẳng $y = -3x + 4$ tại điểm có hoành độ $x = -2$.
 b. Với giá trị k tìm được ở câu a, hãy vẽ đồ thị hàm số $y = kx^2$ và $y = -3x + 4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
 c. Bằng đồ thị hãy xác định tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = kx^2$ và $y = -3x + 4$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Bài 1: Cho hàm số $y = -3x^2$

- a. Lập bảng tính giá trị của hàm số tại các điểm có hoành độ (x) sau:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
---	----	----	----------------	---	---------------	---	---

$y = -3x^2$	-12	-3	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	-3	-12
-------------	-----	----	----------------	---	----------------	----	-----

b. Với giá trị nào của x thì hàm số (y) nhận các giá trị sau:

Với $y = 0$, ta có $-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Với $y = 27$, ta có $-3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = -9$ không có giá trị của x thỏa mãn;

Với $y = -27$, ta có $-3x^2 = -27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$;

Với $y = -\frac{1}{9}$, ta có $-3x^2 = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$;

Với $y = -3$, ta có $-3x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bài 2: Cho hàm số $y = (m-4)x^2$.

a. Hàm số đồng biến với mọi $x > 0$.

$$\Leftrightarrow m-4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$$

Vậy với $m > 4$ thì hàm số đã cho đồng biến với mọi $x > 0$.

b. Hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$.

$$\Leftrightarrow m-4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$$

Vậy với $m < 4$ thì hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x > 0$.

Bài 3: Cho hàm số $y = (k^2 - 2k + 3)x^2$

a. Hàm số $y = (k^2 - 2k + 3)x^2$ có hệ số $a = k^2 - 2k + 3 = (k-1)^2 + 2 > 0$ với mọi giá trị của k .

Do đó, hàm số đã cho nghịch biến khi $x < 0$; và đồng biến khi $x > 0$.

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;6) \Leftrightarrow 6 = (k^2 - 2k + 3)(1)^2$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 3 = 6 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k-3) \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 3 \end{cases}$$

Vậy, với $k = -1$ hoặc $k = 3$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;6)$

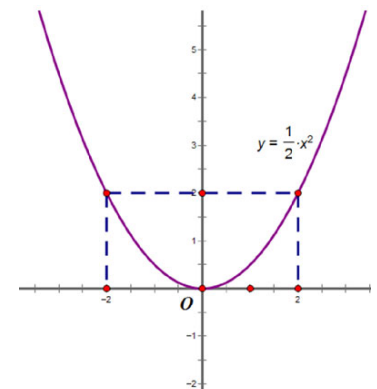
Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

a. Vẽ đồ thị của hàm số:

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là parabol (P) có đỉnh là $O(0;0)$, nhận trục Oy

làm trục đối xứng, và đi qua các điểm sau:

x	-2	0	2
---	----	---	---



$y = \frac{1}{2}x^2$	2	0	2
----------------------	---	---	---

b. Ta có:

Thay hoành độ điểm $A(0;1)$ vào hàm số: $\frac{1}{2}(0)^2 = 0 \neq y_A = 1$

Vậy điểm $A(0;1)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $B(2;2)$ vào hàm số: $\frac{1}{2}(2)^2 = 2 = y_B$

Vậy điểm $B(2;2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $C\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ vào hàm số: $\frac{1}{2}(-3)^2 = \frac{9}{2} \neq y_C = \frac{5}{2}$

Vậy điểm $C\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Thay hoành độ điểm $D\left(-\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right)$ vào hàm số: $\frac{1}{2}(-\sqrt{5})^2 = \frac{5}{2} = y_D$

Vậy điểm $D\left(-\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

KL: Vậy điểm B và điểm D thuộc đồ thị hàm số.

Bài 5: Cho hàm số $y = (m+1)x^2$. Xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

a. Đồ thị của hàm số $y = (m+1)x^2$ đi qua điểm $A(1;9)$

$$\Leftrightarrow 9 = (m+1)(1)^2 \Leftrightarrow m+1 = 9 \Leftrightarrow m = 8$$

Vậy, với $m = 8$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;9)$

b. Đồ thị của hàm số $y = (m+1)x^2$ đi qua điểm $B(-4;32)$.

$$\Leftrightarrow 32 = (m+1)(-4)^2 \Leftrightarrow 16(m+1) = 32$$

$$\Leftrightarrow m+1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy, với $m = 1$ thì đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-4;32)$.

Bài 6: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$.

a. Vì điểm $A(-3;m)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$, nên

$$m = -\frac{1}{3}(-3)^2 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -3$$

Suy ra tọa độ điểm $A(-3;-3)$ và $A'(3;-3)$ là hai điểm đối xứng nhau qua trục Oy (tính chất đối xứng của hàm số $y = ax^2$ với $(a \neq 0)$). Mà điểm $A(-3;-3)$ thuộc đồ thị hàm số nên điểm $A'(3;-3)$ cũng thuộc đồ thị hàm số.

b. Điểm $M(k;-9)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^2$, nên:

$$-9 = -\frac{1}{3}(k)^2 \Leftrightarrow k^2 = 27 \Leftrightarrow k = \pm 3\sqrt{3}$$

Với $k = \pm 3\sqrt{3}$ thay vào phương trình hàm số ta được $y = -\frac{1}{3}(\pm 3\sqrt{3})^2 = -9 \neq y_M$.

Do đó điểm $M'(k;9)$ không thuộc đồ thị hàm số.

Bài 7: Cho hàm số $y = ax^2$.

a. Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(\sqrt{2};2) \Leftrightarrow 2 = a(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy, $a = 1$ và hàm số cần tìm là $y = x^2$

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol có đỉnh $O(0;0)$, có trục đối xứng Oy.

Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua các điểm sau:

x	-1	0	1
$y = x^2$	1	0	1

b. Điểm $A(\sqrt{2};2)$ và $B(-\sqrt{2};2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$.

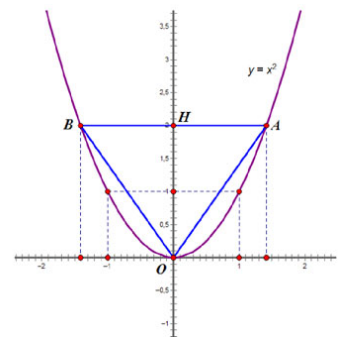
Vì $\begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$ nên hai điểm A và B đối xứng nhau qua trục Oy.

Do đó, Oy là đường trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra $OA = OB$.

Vậy tam giác OAB là tam giác cân tại O.

Ta có: $OH = |y_A| = 2$; $AB = 2\sqrt{2}$

Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}.2.2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (đvdt)



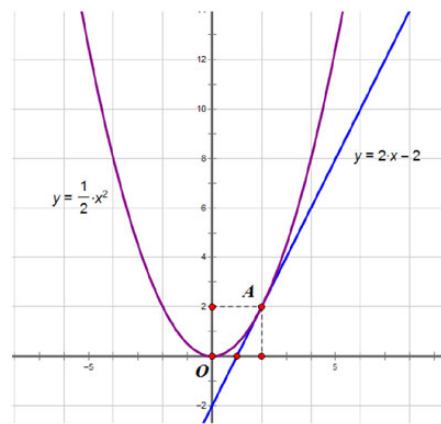
Bài 8: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (P) và $y = 2x - 2$.

a. * Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$, có

trục đối xứng Oy.

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ đi qua các điểm sau:

x	-2	0	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	0	2



* Đồ thị hàm số $y = 2x - 2$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0; -2)$ và $(1; 0)$

b. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2$. Vậy tọa độ giao điểm là $(2; 2)$.

Bài 9: Cho hàm số $y = -3x^2$ (P).

a. Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số và có $y_M = -9$

Vì M thuộc (P) nên ta có: $-9 = -3x_M^2 \Leftrightarrow x_M^2 = 3 \Leftrightarrow x_M = \pm\sqrt{3}$

Vậy điểm thuộc đồ thị hàm số và có tung độ bằng -9 là: $M_1(-\sqrt{3}; -9)$ và $M_2(\sqrt{3}; -9)$

b. Gọi $N(x_N; y_N)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số và có khoảng cách đến các trục tọa độ bằng nhau.

N thuộc đồ thị hàm số nên: $y_N = -3x_N^2$

N có khoảng cách đến hai trục tọa độ bằng nhau nên:

$$|y_N| = |x_N| \Leftrightarrow \begin{cases} y_N = x_N & (1) \\ y_N = -x_N & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $y_N = x_N \Leftrightarrow -3x_N^2 = x_N$

$$\Leftrightarrow x_N(1 + 3x_N) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 0 \Rightarrow y_N = 0 \\ x_N = -\frac{1}{3} \Rightarrow y_N = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ta có điểm $(0; 0); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Giải (2): $y_N = -x_N \Leftrightarrow -3x_N^2 = -x_N$

$$\Leftrightarrow x_N(1-3x_N) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 0 \Rightarrow y_N = 0 \\ x_N = \frac{1}{3} \Rightarrow y_N = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ta có điểm $(0;0); \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Vậy, các điểm thuộc đồ thị hàm số cách đều hai trục tọa độ là: $(0;0); \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

c. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ.

Điểm $A(x_A; y_A)$ có tung độ gấp 9 lần hoành độ: $y_A = 9x_A$.

Điểm A thuộc đồ thị hàm số nên: $y_A = -3x_A^2 \Leftrightarrow 9x_A = -3x_A^2$

$$\Leftrightarrow 3x_A(x_A + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \Rightarrow y_A = 0 \\ x_A = -3 \Rightarrow y_A = -27 \end{cases}$$

Vậy tọa độ các điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ gấp 9 lần hoành độ là: $(0;0); (-3;-27)$.

Bài 10: Cho hàm số $y = kx^2$.

a. Đồ thị hàm số có đồ thị cắt đường thẳng $(d): y = -3x + 4$

tại điểm có hoành độ $x = -2$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ giao điểm của (P) và (d) . Theo

đề ta có $x_0 = -2$

M thuộc đường thẳng (d) nên:

$$y_0 = -3x_0 + 4 \Leftrightarrow y_0 = -3 \cdot 2 + 4 = -2$$

Suy ra $M(-2; -2)$. Thay vào phương trình (P) , ta có:

$$-2 = k(-2)^2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

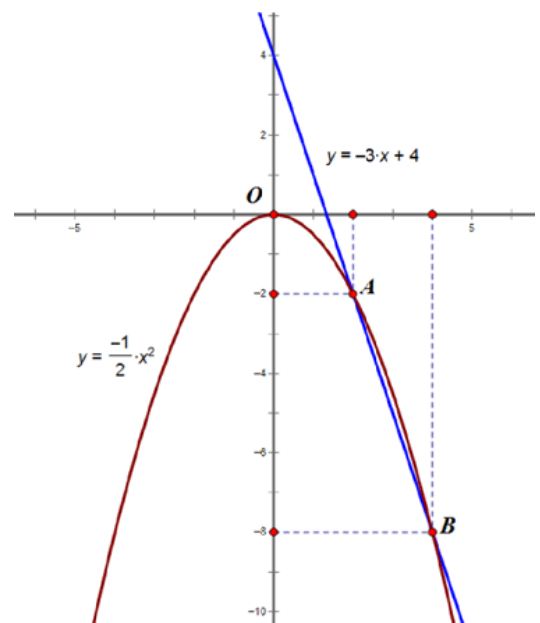
Vậy, đồ thị hàm số cần tìm là: $y = -\frac{1}{2}x^2$

b. Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P) và đường thẳng (d) :

$$y = -3x + 4$$

Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P) là parabol có đỉnh $O(0;0)$, có trục đối xứng là Oy và đi qua các điểm:

x	-2	0	2
---	----	---	---



$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	0	-2
-----------------------	----	---	----

* Đồ thị hàm số $y = -3x + 4$ là đường thẳng (d) đi qua hai điểm $(0; 4)$ và $(1; 1)$

c. Dựa vào đồ thị ta thấy tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P) và đường thẳng (d) :

$y = -3x + 4$ là: $A(2; -2); B(4; -8)$.

C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ (Hàm số bậc hai một ẩn và đồ thị hàm số $y = ax^2$)

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến khi $a > 0$ và $x > 0$. B. Hàm số nghịch biến khi $a < 0$ và $x < 0$.
C. Hàm số nghịch biến khi $a > 0$ và $x < 0$. D. Hàm số nghịch biến khi $a > 0$ và $x = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến khi $a > 0$ và $x < 0$. B. Hàm số đồng biến khi $a > 0$ và $x > 0$.
C. Hàm số đồng biến khi $a > 0$ và $x < 0$. D. Hàm số đồng biến khi $a < 0$ và $x = 0$.

Câu 3. Kết luận nào sau đây là sai khi nói về đồ thị của hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$.

- A. Đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.
B. Với $a > 0$ đồ thị nằm phía trên trục hoành và O là điểm cao nhất của đồ thị.
C. Với $a < 0$ đồ thị nằm phía dưới trục hoành và O là điểm cao nhất của đồ thị.
D. Với $a > 0$ đồ thị nằm phía trên trục hoành và O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Câu 4. Giá trị của hàm số $y = f(x) = -7x^2$ tại $x_0 = -2$ là:

- A. 28. B. 14. C. 21. D. -28.

Câu 5. Giá trị của hàm số $y = f(x) = \frac{4}{5}x^2$ tại $x_0 = -5$ là

- A. 20. B. 10. C. 4. D. -20.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = (-2m + 1)x^2$. Tìm giá trị của m để đồ thị đi qua điểm $A(-2; 4)$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2m - 3}{3}x^2$. Tìm giá trị của m để đồ thị đi qua điểm $B(-3; 5)$

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{3}{7}$. C. $m = \frac{7}{3}$. D. $m = 3$.

Câu 8. Cho hàm số $y = (5m + 2)x^2$ với $m \neq -\frac{2}{5}$. Tìm m để hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$.

- A. $m < -\frac{2}{5}$. B. $m > \frac{2}{5}$. C. $m < \frac{2}{5}$. D. $m > -\frac{5}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số với $y = \frac{m-7}{-3}x^2$. Tìm m để hàm số nghịch biến với mọi $x < 0$.

- A. $m > 7$. B. $m < 7$. C. $m < -7$. D. $m > -7$.

Câu 10. Cho hàm số $y = (4 - 3m)x^2$ với $m \neq \frac{4}{3}$. Tìm m để hàm số đồng biến với mọi $x > 0$.

- A. $m > \frac{4}{3}$. B. $m < -\frac{4}{3}$. C. $m < \frac{4}{3}$. D. $m < -\frac{4}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{2}{5-2m}x^2$ với $m \neq \frac{5}{2}$. Tìm m để hàm số đồng biến với mọi $x < 0$.

- A. $m > \frac{5}{2}$. B. $m < \frac{5}{2}$. C. $m > \frac{2}{5}$. D. $m < \frac{2}{5}$.

Câu 12. Trong các điểm $A(1;2); B(-1;-1); C(10;-200); D(\sqrt{10};-10)$ có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y = -x^2$.

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2$. Tìm b biết $f(b) \geq 6b + 9$

- A. $1 < b < 3$. B. $-1 \leq b \leq 3$. C. $\begin{cases} b \leq -1 \\ b \geq 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} b < -1 \\ b > 3 \end{cases}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$. Tìm b biết $f(b) \leq -5b + 2$

- A. $\frac{1}{2} < b < 2$. B. $\frac{1}{2} \leq b \leq 2$. C. $\begin{cases} b < \frac{1}{2} \\ b > 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} b \leq \frac{1}{2} \\ b \geq 2 \end{cases}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = (2m + 2)x^2$. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(x;y)$ với $(x;y)$ là

ng nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

- A. $m = \frac{7}{4}$. B. $m = \frac{1}{4}$. C. $m = \frac{7}{8}$. D. $m = -\frac{7}{8}$.

Câu 16. Cho hàm số $y = (-3m + 1)x^2$. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(x;y)$ với $(x;y)$ là

ng nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

- A. $m = \frac{1}{3}$. B. $m = -\frac{1}{3}$. C. $m = 3$. D. $m = -3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = (-m^2 + 4m - 5)x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng

- A. Đồ thị của hàm số nằm phía trên trục hoành.

B. Đồ thị của hàm số nhận gốc tọa độ O là điểm cao nhất.

C. Hàm số nghịch biến với $x < 0$.

D. Hàm số đồng biến với $x > 0$.

Câu 18. Cho hàm số $y = (4m^2 + 12m + 11)x^2$. Kết luận nào sau đây là sai?

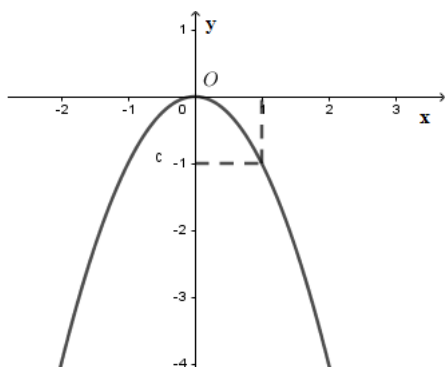
A. Đồ thị của hàm số nằm phía trên trục hoành.

B. Đồ thị của hàm số nhận gốc tọa độ O là điểm thấp nhất.

C. Hàm số nghịch biến với $x > 0$.

D. Hàm số đồng biến với $x > 0$.

Câu 19. Hình vẽ dưới đây là của đồ thị hàm số nào?



A. $y = -x^2$.

B. $y = x^2$.

C. $y = 2x^2$.

D. $y = -2x^2$.

Câu 20. Hình vẽ dưới đây là của đồ thị hàm số nào?

A. $y = x^2$.

B. $y = \frac{1}{2}x^2$.

C. $y = 3x^2$.

D. $y = \frac{1}{3}x^2$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^2$ có đồ thị là (P) . Có bao nhiêu điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ.

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 22. Cho hàm số $y = -\frac{2}{5}x^2$ có đồ thị là (P) . Điểm trên (P) (khác gốc tọa độ $O(0;0)$) có tung độ gấp ba lần hoành độ thì có hoành độ là:

A. $\frac{15}{2}$.

B. $-\frac{15}{2}$.

C. $\frac{2}{15}$.

D. $-\frac{2}{15}$.

Câu 23. Cho $(P): y = \frac{1}{2}x^2; (d): y = x - \frac{1}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

A. $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(1;2)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

D. $(2;1)$.

Câu 24. Cho $(P): y = 3x^2; (d): y = -4x - 1$. Tìm tọa độ giao điểm (P) và (d)

A. $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right); (1; 3)$. **B.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); (1; 3)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); (-1; 3)$. **D.** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 25. Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định m để điểm $A(\sqrt{2}; m)$ nằm trên parabol.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -\frac{1}{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -2$.

Câu 26. Cho parabol $y = -\sqrt{5}x^2$. Xác định m để điểm $A(m\sqrt{5}; -2\sqrt{5})$ nằm trên parabol.

A. $m = -\frac{5}{2}$. **B.** $m = \frac{2}{5}$. **C.** $m = \frac{5}{2}$. **D.** $m = -\frac{2}{5}$.

Câu 27. Cho parabol $(P): y = (m-1)x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3-2x$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại điểm có tung độ $y = 5$.

A. $m = 5$. **B.** $m = 7$. **C.** $m = 6$. **D.** $m = -6$.

Câu 28. Cho parabol $(P): y = \sqrt{5m+1}x^2$ và đường thẳng $(d): y = 5x+4$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại điểm có tung độ $y = 9$.

A. $m = 5$. **B.** $m = 15$. **C.** $m = 6$. **D.** $m = 16$.

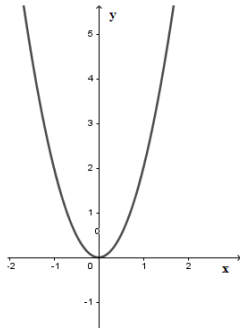
Câu 29. Cho parabol $(P): y = \left(\frac{1-2m}{m}\right)x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x+2$. Biết đường thẳng d cắt (P) tại một điểm có tung độ $y = 4$. Tìm hoành độ giao điểm còn lại của d và parabol (P)

A. $x = -\frac{1}{2}$. **B.** $x = \frac{1}{2}$. **C.** $x = -\frac{1}{4}$. **D.** $x = \frac{1}{4}$.

Câu 30. Cho parabol $(P): y = \left(\sqrt{3m+4} - \frac{7}{4}\right)x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x-5$. Biết đường thẳng d cắt (P) tại một điểm có tung độ $y = 1$. Tìm m và hoành độ giao điểm còn lại của d và parabol (P)

A. $m = 0; x = 2$. **B.** $m = \frac{1}{4}; x = -10$. **C.** $m = 2; x = 8$. **D.** $m = 0; x = 10$.

Câu 31. Cho đồ thị hàm số $y = 2x^2$ như hình vẽ. Dựa vào đồ thị, tìm m để phương trình $2x^2 - m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.



A. $m < -5$.

B. $m > 0$.

C. $m < 0$.

D. $m > -5$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án C.

Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

a) Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$

b) Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

Câu 2. Đáp án B.

Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

a) Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$

b) Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

Câu 3. Đáp án B.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một parabol đi qua gốc tọa độ O , nhận Oy là trục đối xứng (O là đỉnh của parabol).

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O , là điểm thấp nhất của đồ thị.

- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O , là điểm cao nhất của đồ thị.

Câu 4. Đáp án D.

Thay $x_0 = -2$ vào hàm số $y = f(x) = -7x^2$ ta được $f(-2) = -7.(-2)^2 = -28$.

Câu 5. Đáp án A.

Thay $x_0 = -5$ vào hàm số $y = f(x) = \frac{4}{5}x^2$ ta được $f(-5) = \frac{4}{5}.(-5)^2 = 20$

Câu 6. Đáp án A.

Thay tọa độ điểm $A(-2; 4)$ vào hàm số $y = f(x) = (-2m + 1)x^2$ ta được

$$(-2m + 1).(-2)^2 = 4 \Leftrightarrow -2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Câu 7. Đáp án C.

Thay tọa độ điểm $B(-3;5)$ vào hàm số $y = f(x) = \frac{2m-3}{3}x^2$ ta được

$$\frac{2m-3}{3} \cdot (-3)^2 = 5 \Leftrightarrow 3(2m-3) = 5 \Leftrightarrow 6m-9 = 5 \Leftrightarrow 6m = 14 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3} \text{ Vậy } m = \frac{7}{3} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Câu 8. Đáp án A.

Để hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$ thì $a < 0$ nên $5m+2 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{5}$.

Vậy $m < -\frac{2}{5}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 9. Đáp án B.

Để hàm số nghịch biến với mọi $x < 0$ thì $a > 0$ nên $\frac{m-7}{-3} > 0 \Leftrightarrow m-7 < 0 \Leftrightarrow m < 7$

Vậy $m < 7$ thỏa mãn điều kiện đề bài

Câu 10. Đáp án C.

Để hàm số đồng biến với mọi $x > 0$ thì $a > 0$ nên $4-3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$

Vậy $m < \frac{4}{3}$ thỏa mãn điều kiện đề bài

Câu 11. Đáp án A.

Để hàm số đồng biến với mọi $x < 0$ thì $a < 0$ nên

$$\frac{2}{5-2m} < 0 \Leftrightarrow 5-2m < 0 \Leftrightarrow 2m > 5 \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}. \text{ Vậy } m > \frac{5}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện đề bài}$$

Câu 12. Đáp án D.

+) Thay tọa độ điểm $A(1;2)$ vào hàm số $y = -x^2$ ta được $2 = -1^2$ (vô lý) nên $A \notin (P)$.

+) Thay tọa độ điểm $C(10;-200)$ vào hàm số $y = -x^2$ ta được $-200 = -(10)^2 \Leftrightarrow -200 = -100$ (vô lý) nên loại $C \notin (P)$

+) Thay tọa độ điểm $D(\sqrt{10};-10)$ vào hàm số $y = -x^2$ ta được $-10 = -(\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow -10 = -10$ (luôn đúng) nên $D \in (P)$

+) Thay tọa độ điểm $B(-1;-1)$ vào hàm số $y = -x^2$ ta được $-1 = -(-1)^2 \Leftrightarrow -1 = -1$ (luôn đúng) $B \in (P)$

Câu 13. Đáp án C.

Ta có $f(b) \geq 6b + 9 \Leftrightarrow 3b^2 \geq 6b + 9 \Leftrightarrow b^2 - 2b - 3 \geq 0$. Vậy $\begin{cases} b \leq -1 \\ b \geq 3 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 14. Đáp án D.

Ta có $f(b) \leq -5b + 2 \Leftrightarrow -2b^2 \leq -5b + 2 \Leftrightarrow 2b^2 - 5b + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2b^2 - 4b - b + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2b(b - 2) - (b - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (2b - 1)(b - 2) \geq 0$

$$\text{Vậy } \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 1 \geq 0 \\ b - 2 \geq 0 \\ 2b - 1 \leq 0 \\ b - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{1}{2} \\ b \geq 2 \\ b \leq \frac{1}{2} \\ b \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2 \\ b \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} b \leq \frac{1}{2} \\ b \geq 2 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Câu 15. Đáp án D.

Ta có $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 2(y + 1) - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2; 1)$

Thay $x = 2; y = 1$ vào hàm số $y = (2m + 2)x^2$ ta được

$$1 = (2m + 2).2^2 \Leftrightarrow 2m + 2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2m = \frac{-7}{4} \Leftrightarrow m = \frac{-7}{8}$$

Vậy $m = -\frac{7}{8}$ là giá trị cần tìm.

Câu 16. Đáp án B.

Ta có: $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ 4(2y - 3) - 3y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2)$

Thay $x = 1; y = 2$ vào hàm số $y = (-3m + 1)x^2$ ta được

$$2 = (-3m + 1).1^2 \Leftrightarrow -3m + 1 = 2 \Leftrightarrow -3m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{3}$$

Vậy $m = -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 17. Đáp án B.

Ta thấy hàm số $y = (-m^2 + 4m - 5)x^2$ có

$$a = -m^2 + 4m - 5 = -(m^2 - 4m + 4) - 1 = -(m - 2)^2 - 1 \leq -1 < 0, \forall m$$

Nên hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$. Suy ra C,D sai.

Và đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

Suy ra A sai.

Câu 18. Đáp án C.

Ta thấy hàm số $y = (4m^2 + 12m + 11)x^2$ có

$$a = 4m^2 + 12m + 11 = (4m^2 + 12m + 9) + 2 = (2m + 3)^2 + 2 \geq 2 > 0, \forall m$$

Nên hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

Suy ra C sai, D đúng.

Và đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Câu 19. Đáp án A.

Từ hình vẽ suy ra $a < 0$ nên loại B,C

Vì đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(1; -1)$ nên loại D.

Câu 20. Đáp án D.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(3; 3)$, ta thay $x = 3; y = 3$ vào từng hàm số ở các đáp án ta được:

+ Đáp án A: $y = x^2 \Leftrightarrow 3 = 3^2 \Leftrightarrow 3 = 9$ (vô lý) nên loại A.

+ Đáp án B: $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2}3^2 \Leftrightarrow 3 = \frac{9}{2}$ (vô lý) nên loại B.

+ Đáp án C: $y = 3x^2 \Leftrightarrow 3 = 3.3^2 \Leftrightarrow 3 = 27$ (vô lý) nên loại C.

+ Đáp án D: $y = \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{3}.3^2 \Leftrightarrow 3 = 3$ (luôn đúng) nên chọn D.

Câu 21. Đáp án D.

Gọi điểm $M(x; y)$ là điểm cần tìm.

Vì M có tung độ gấp đôi hoành độ nên $M(x; 2x)$ Thay tọa độ điểm M vào hàm số ta được

$$2x = \sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Hay có hai điểm thỏa mãn điều kiện là $O(0; 0), M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

Câu 22. Đáp án B.

Gọi điểm $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Vì M có tung độ gấp ba lần hoành độ nên $M(x; 3x)$

Thay tọa độ điểm M vào hàm số ta được

$$3x = -\frac{2}{5}x^2 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{2}{5}x + 3\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -\frac{15}{2} \Rightarrow y = -\frac{45}{2} \end{cases}$$

Hay điểm khác gốc tọa độ thỏa mãn điều kiện là $M\left(\frac{-15}{2}; \frac{-45}{2}\right)$

Câu 23. Đáp án A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d)

$$\frac{1}{2}x^2 = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ ta được $y = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$

Nên tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

Câu 24. Đáp án C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d)

$$3x^2 = -4x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 1) + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x^2 = \frac{1}{3} \\ x = -1 \Rightarrow y = 3x^2 = 3 \end{cases}$$

Nên tọa độ giao điểm cần tìm là $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); (-1; 3)$

Câu 25. Đáp án A.

Thay $x = \sqrt{2}; y = m$ vào hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ ta được $m = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$

Câu 26. Đáp án D.

Thay $x = m\sqrt{5}; y = -2\sqrt{5}$ vào hàm số $y = -\sqrt{5}x^2$ ta được

$$-2\sqrt{5} = -\sqrt{5} \cdot (m\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow -5m\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow m = -\frac{2}{5}. \text{ Vậy } m = -\frac{2}{5}.$$

Câu 27. Đáp án C.

Thay $y = 5$ vào phương trình đường thẳng d

$$\text{ta được } 5 = 3 - 2x \Leftrightarrow x = -1$$

Nên tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) là $(-1;5)$ Thay $x = -1; y = 5$ vào hàm

số $y = (m-1)x^2$ ta được $(m-1).(-1)^2 = 5 \Leftrightarrow m-1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm.

Câu 28. Đáp án D.

$$\text{ĐK: } m > \frac{-1}{5}$$

Thay $y = 9$ vào phương trình đường thẳng d ta được $9 = 5x + 4 \Leftrightarrow x = 1$

Nên tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) là $(1;9)$

Thay $x = 1; y = 9$ vào hàm số $y = \sqrt{5m+1}.x^2$ ta được

$\sqrt{5m+1}.1^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{5m+1} = 9 \Leftrightarrow 5m+1 = 81 \Leftrightarrow 5m = 80 \Leftrightarrow m = 16(TM)$ Vậy $m = 16$ là giá trị cần tìm.

Câu 29. Đáp án A.

Thay $y = 4$ vào phương trình đường thẳng d ta được $2x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Nên tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) là $(1;4)$

Thay $x = 1; y = 4$ vào hàm số $y = \left(\frac{1-2m}{2}\right)x^2$ ta được

$$\frac{1-2m}{2}.1^2 = 4 \Leftrightarrow 1-2m = 8 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{2} \Rightarrow (P): y = 4x^2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$4x^2 = 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hoành độ giao điểm còn lại là $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 30. Đáp án D.

Thay $y = 1$ vào phương trình đường thẳng d ta được $3x - 5 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Nên tọa độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) là $(2;1)$ Thay $x = 2; y = 1$ vào hàm

số $y = \left(\sqrt{3m+4} - \frac{7}{4}\right)x^2$ ta được

$$\left(\sqrt{3m+4} - \frac{7}{4}\right).2^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3m+4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3m+4} = 2$$

$$\Leftrightarrow 3m+4 = 4 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow (P): y = \frac{1}{4}x^2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$\frac{1}{4}x^2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 10 \end{cases}$$

Vậy hoành độ giao điểm còn lại là $x = 10$.

Câu 31. Đáp án D.

Ta có $2x^2 - m - 5 = 0$ (*) $\Leftrightarrow 2x^2 = m + 5$

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của parabol $(P): y = 2x^2$ đường thẳng $d: y = m + 5$.

Để (*) có hai nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Từ đồ thị hàm số ta thấy

Với $m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -5$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt hay phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi $m > -5$.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN Ở NHÀ

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$. Hãy tính $f(-2)$; $f(3)$; $f(\sqrt{5})$; $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng khi $x = -2$ thì $y = \frac{-4}{3}$. Tìm hệ số a

Bài 3: Cho hàm số $y = (m + 2)x^2$ ($m \neq -2$). Tìm giá trị của m để:

a) Hàm số đồng biến với $x < 0$.

b) Có giá trị $y = 4$ khi $x = -1$.

Bài 4: Cho hàm số $y = (1 - \sqrt{m - 1})x^2$

a) Tìm điều kiện để hàm số đồng biến khi $x < 0$

b) Tìm điều kiện để hàm số nghịch biến khi $x < 0$

Bài 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ có đồ thị (P) đi qua $A\left(-3; \frac{9}{4}\right)$.

a) Tính a .

b) Các điểm nào sau đây thuộc (P) : $B(-3\sqrt{2}; 4)$; $C(-2\sqrt{3}; 3)$.

Bài 6: Cho hàm số $y = (m^2 + 2m + 3)x^2$ Chứng tỏ rằng hàm số nghịch biến với mọi $x < 0$.

Bài 7: Cho hàm số $y = (m^2 - 6m + 12)x^2$.

a) Chứng tỏ rằng hàm số nghịch biến trong khoảng $(-2005; 0)$, đồng biến trong khoảng $(0; 2005)$

b) Khi $m = 2$. Tìm x để $y = 8$

Bài 8: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$. Tìm $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a-1) = 4$.

Bài 9: Cho hình lập phương có cạnh bằng x cm. Gọi S là diện tích toàn phần của hình lập phương

- a) Tính S theo x
- b) S thay đổi như thế nào khi x tăng, khi x giảm?
- c) Khi x tăng 3 lần thì S tăng hay giảm mấy lần?

Bài 10: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng khi $x = 5$ thì $y = \frac{75}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y khi x thỏa mãn điều kiện $-4 \leq x \leq 2$

Bài 11: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$. Biết $f(x_1) > f(x_2)$. Hãy so sánh x_1 và x_2 trong các trường hợp sau :

- a) x_1, x_2 là những số dương.
- b) x_1, x_2 là những số âm.

Bài 12: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của x thỏa mãn điều kiện $-3 \leq x \leq -1$ ta đều có $f(-3) \leq -2x^2 \leq f(-1)$. Suy ra rằng x biến đổi thỏa mãn điều kiện $-3 \leq x \leq -1$ thì y có giá trị bé nhất là -18 và giá trị lớn nhất là -2

Bài 13: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$

- a) Hãy xác định hàm số biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(2;4)$.
- b) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
- c) Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.
- d) Tìm m sao cho $B(m; m^3)$ thuộc Parabol.
- d) Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

Bài 14:

- a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x \cdot |x|$
- b) Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x \cdot |x|$

Bài 15: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

- a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .
- b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Bài 16:

a) Xác định điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ sao cho độ dài đoạn IM là nhỏ nhất, trong đó $I(0;1)$.

b) Giả sử điểm A chạy trên Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tập hợp trung điểm J của đoạn OA .

Bài 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A và B chạy trên parabol $(P): y = x^2$ sao cho $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$. Giả sử I là trung điểm của đoạn AB .

a) Tìm quỹ tích điểm trung điểm I của đoạn AB .

b) Đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

c) Xác định tọa độ điểm A và B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Bài 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm $A(-1;1), B(3;9)$

a) Tính diện tích tam giác OAB .

b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 19: Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (Bỏ qua độ dày của cổng).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabol $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

HƯỚNG DẪN

Bài 1: Ta có: $f(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$; $f(3) = \frac{3}{2} \cdot 3^2 = \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{27}{2}$;

$f(\sqrt{5}) = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt{5})^2 = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$; $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

Bài 2: Thay $x = -2$; $y = \frac{-4}{3}$ vào hàm số $y = f(x) = ax^2$ có $a \cdot (-2)^2 = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow 4a = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{-1}{3}$

Bài 3: Cho hàm số $y = (m+2)x^2$ ($m \neq -2$). Tìm giá trị của m để:

a) Tìm điều kiện để hàm số đồng biến khi $x < 0$

Để hàm số đồng biến khi $x < 0$

$$\Leftrightarrow m+2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$$

Vậy để hàm số đồng biến khi $x < 0$ thì $m < -2$

b) Thay $y = 4; x = -1$ vào hàm số $y = (m+2)x^2$ ($m \neq -2$) ta có :

$$4 = (m+2)(-1)^2$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

Vậy khi $m = 2$ thì hàm số giá trị $y = 4$ khi $x = -1$.

Bài 4: Hàm số $y = (1 - \sqrt{m-1})x^2$ (ĐK: $m \geq 1; m \neq 2$)

a) Tìm điều kiện để hàm số đồng biến khi $x < 0$

Để hàm số đồng biến khi $x < 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{m-1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} > 1 \Leftrightarrow m-1 > 1 \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy để hàm số đồng biến khi $x < 0 \Leftrightarrow m > 2$

b) Tìm điều kiện để hàm số nghịch biến khi $x < 0$

Để hàm số nghịch biến khi $x < 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{m-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} < 1 \Leftrightarrow m-1 < 1 \Leftrightarrow m < 2$$

Vậy để hàm số nghịch biến khi $x < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Bài 5:

a) Đồ thị (P) đi qua $A\left(-3; \frac{9}{4}\right) \Rightarrow \frac{9}{4} = a(-3)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

b) Thay $B(-3\sqrt{2}; 4)$ vào (P) ta được: $4 = \frac{1}{4}(-3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{9}{2}$ (vô lý)

Vậy B không thuộc (P).

Thay $C(-2\sqrt{3}; 3)$ vào (P) ta được: $3 = \frac{1}{4}(-2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 3 = 3$ (đúng)

Vậy C thuộc (P).

Bài 6:

Hàm số đã cho có dạng $y = ax^2$,

$$a = m^2 + 2m + 3 = (m^2 + 2m + 1) + 2 = (m+1)^2 + 2 > 0 \text{ với mọi } m$$

Do đó : Hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x < 0$

Bài 7:

a) hàm số $y = (m^2 - 6m + 12)x^2$.

$$y = (m^2 - 6m + 12)x^2 = [(m-3)^2 + 3]x^2$$

Vì $a = [(m-3)^2 + 3] > 0$ với mọi x nên trong khoảng $(-2005; 0)$ thì $x < 0$, do đó hàm số nghịch biến, trong khoảng $(0; 2005)$ thì $x > 0$, do đó hàm số nghịch biến.

b) Với $m = 2$, ta có $y = 4x^2$

$$y = 8 \Leftrightarrow 4x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Bài 8 :

$$f(a-1) = 4$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = 3$$

Vậy với $a = -1$ hoặc $a = 3$ thì hàm số $y = f(x) = x^2$ có $f(a-1) = 4$.

Bài 9:

a) Mỗi hình lập phương là một hình vuông với cạnh có độ dài bằng x cm nên diện tích mỗi mặt là $x^2(\text{cm}^2)$. Vì hình lập phương có 6 mặt bằng nhau nên $S = 6x^2(\text{cm}^2)$

b) $S = 6x^2$ là một hàm số có dạng $y = ax^2$, với $a = 6 > 0$. Hàm số này đồng biến khi $x > 0$. Vì x là độ dài nên $x > 0$. Do đó khi x tăng thì S cũng tăng, x giảm thì S cũng giảm

c) Giả sử cho x_1 là độ dài của cạnh hình lập phương. Khi đó S có giá trị tương ứng là $S_1 = 6x_1^2$. Khi cạnh tăng lên 3 lần, đặt $x_2 = 3x_1 \Leftrightarrow S_2 = 6x_2^2 = 6(3x_1^2) = 6.9x_1^2 = 9.6x_1^2 = 9S_1$. Vậy khi x tăng lên 3 lần thì S tăng lên 9 lần.

Bài 10: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng khi $x = 5$ thì $y = \frac{75}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y khi x thỏa mãn điều kiện $-4 \leq x \leq 2$

$$\text{Thay } x = 5; y = \frac{75}{2} \text{ vào hàm số } y = f(x) = ax^2 \text{ ta có : } a.5^2 = \frac{75}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vì $a = \frac{3}{2} > 0$ nên $y = 0$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số và hàm số nghịch biến khi $x < 0$, đồng biến khi

$x > 0$, do đó khi $-4 \leq x \leq 2$ thì $f(-4) = \frac{3}{2}(-4)^2 = 24 \geq f(x) \geq f(0) = 0$ và khi $0 \leq x \leq 2$ thì

$$0 = f(0) \leq f(x) \leq f(2) = \frac{3}{2}.2^2 = 6$$

Vậy khi x biến đổi, thỏa mãn $-4 \leq x \leq 2$ thì giá trị nhỏ nhất của y bằng 0 và giá trị lớn nhất của y bằng 24.

Bài 11: Vì $a = \frac{1}{3} > 0$ nên hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$. Vậy

+ Khi x_1, x_2 cùng dương thì $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

+ Khi x_1, x_2 cùng âm thì $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$

Bài 12: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$..Chứng minh rằng với mọi giá trị của x thỏa mãn điều kiện

$$-3 \leq x \leq -1 \text{ ta điều có } f(-3) \leq -2x^2 \leq f(-1)$$

Vì $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến khi $x < 0$.Do đó

$$f(-3) \leq f(x) \leq f(-1) \text{ hay } -2(-3)^2 \leq f(x) \leq -2(-1)^2 \Leftrightarrow -18 \leq -2x^2 \leq -2$$

Vậy khi x biến đổi thỏa mãn điều kiện $-3 \leq x \leq -1$ thì y có giá trị bé nhất là -18 và giá trị lớn nhất là -2

Bài 13: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$

a)Hãy xác định hàm số biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm $A(2;4)$.

b)Vẽ đồ thị của hàm số đã cho .

c)Tìm các điểm trên Parabol có tung độ bằng 16.

d)Tìm m sao cho $B(m;m^3)$ thuộc Parabol.

e)Tìm các điểm trên Parabol (khác gốc tọa độ) cách đều hai trục tọa độ.

Lời giải:

a) Ta có $A \in (P) \Leftrightarrow 4 = a.2^2 \Leftrightarrow a = 1$

b) Đồ thị Parabol có đỉnh là gốc tọa độ

$O(0;0)$ quay bề lồi xuống dưới, có trục

đối xứng là Oy đi qua các điểm

$M(1;1), N(-1;1), E(3;9), F(-3;9)$

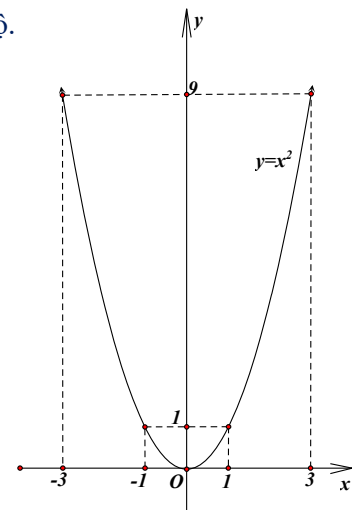
c) Gọi C là điểm thuộc (P) có tung độ bằng 16.

Ta có: $y_C = 16 \Leftrightarrow x_C^2 = 16 \Leftrightarrow x_C = \pm 4$. Vậy $C(4;16)$ hoặc $C(-4;16)$.

d) Thay tọa độ điểm B vào (P) ta được: $m^3 = m^2 \Leftrightarrow m^3 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.

e) Gọi D là điểm thuộc (P) cách đều hai trục tọa độ. Ta có: $d(D, Ox) = |y_D| = x_D^2; d(D, Oy) = |x_D|$.

Theo giả thiết ta có: $x_D^2 = |x_D| \Leftrightarrow |x_D| = 0$ (loại) hoặc $|x_D| = 1$. Vậy $D(1;1)$ hoặc $D(-1;1)$.



Bài 14:

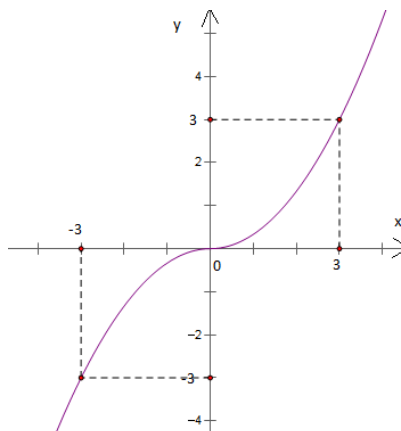
a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x \cdot |x|$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x \cdot |x|$

Lời giải:

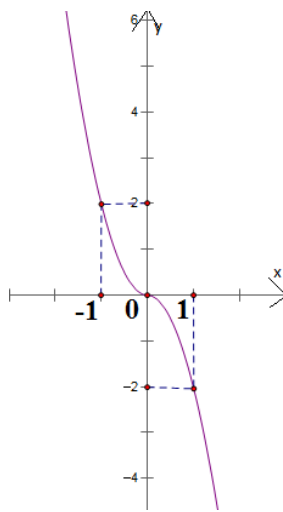
a) Với $x \geq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^2$

Với $x < 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x^2$



b) Với $x \geq 0 \Rightarrow y = -2x^2$

Với $x < 0 \Rightarrow y = 2x^2$



Bài 15: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) .

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

.Ta có $y(2) = 4; y(-3) = 9$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $B(2;4)$ và $A(-3;9)$.

b) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B xuống trục hoành.

Ta có $S_{\triangle OAB} = S_{AA'B'B} - S_{\triangle OAA'} - S_{\triangle OBB'}$

Ta có $A'B' = |x_{B'} - x_{A'}| = x_{B'} - x_{A'} = 5; AA' = y_A = 9; BB' = y_B = 4$

$$S_{AA'B'B'} = \frac{AA' + BB'}{2} \cdot A'B' = \frac{9+4}{2} \cdot 5 = \frac{65}{2} \text{ (đvdt)}, S_{\Delta OAA'} = \frac{1}{2} A'A \cdot A'O = \frac{27}{2} \text{ (đvdt)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = S_{AA'B'B'} - S_{\Delta OAA'} - S_{\Delta OBB'} = \frac{65}{2} - \left(\frac{27}{2} + 4 \right) = 15 \text{ (đvdt)}.$$

Bài 16 :

a) Xác định điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ sao cho độ dài đoạn IM là nhỏ nhất, trong đó $I(0;1)$.

b) Giả sử điểm A chạy trên Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tập hợp trung điểm J của đoạn OA .

Lời giải

a) Giả sử điểm M thuộc đường Parabol $(P): y = x^2$ suy ra $M(m; m^2)$. Khi đó

$$IM^2 = m^2 + (m^2 - 1)^2 = m^4 - m^2 + 1. \text{ Vậy } IM = \sqrt{\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Ta thấy } IM \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{khi } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hay } M\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

b) Giả sử điểm $A(a; a^2)$ thuộc $(P): y = x^2$. Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm đoạn OA . Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \\ y_1 = \frac{a^2}{2} = 2x_1^2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các trung điểm I của đoạn OA là đường Parabol $(P_1): y = 2x^2$.

Bài 17 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A và B chạy trên parabol $(P): y = x^2$ sao cho $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$. Giả sử I là trung điểm của đoạn AB .

a) Tìm quỹ tích điểm trung điểm I của đoạn AB .

b) Đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

c) Xác định tọa độ điểm A và B sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Giả sử $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ là hai điểm thuộc (P) . Để $A, B \neq O(0;0)$ và $OA \perp OB$ ta cần điều

kiện: $ab \neq 0$ và $OA^2 + OB^2 = AB^2$ hay $ab \neq 0$ và $a^2 + a^4 + b^2 + b^4 = (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2$. Rút gọn hai

về ta được: $ab = -1$. Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm đoạn AB . Khi đó:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a+b}{2} \\ y_1 = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{2} = 2x_1^2 + 1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình $y = 2x^2 + 1$.

Ta cũng có thể tìm điều kiện để $OA \perp OB$ theo cách sử dụng hệ số góc: Đường thẳng OA có hệ số

góc là $k_1 = \frac{a^2}{a} = a$, đường thẳng OB có hệ số góc là $k_2 = \frac{b^2}{b} = b$. Suy ra điều kiện để $OA \perp OB$ là

$$a.b = -1$$

b) Phương trình đường thẳng đi qua A và B là $(AB): \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2}$ hay

$(AB): y = (a+b)x - ab = (a+b)x + 1$. Từ đây ta dễ dàng suy ra đường thẳng $(AB): y = (a+b)x + 1$ luôn luôn đi qua điểm cố định $(0;1)$.

c) Vì $OA \perp OB$ nên $ab = -1$. Độ dài đoạn $AB = \sqrt{(a-b)^2 + (a^2-b^2)^2}$ hay

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + a^4 + b^4 - 2a^2b^2} \quad \text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có } a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|,$$

$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$. Ta có: $AB \geq \sqrt{2|ab| + 2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2} = 2$. Vậy AB ngắn nhất bằng 2 khi

$a^2 = b^2, ab = -1$. Ta có thể chỉ ra cặp điểm đó là: $A(-1;1)$ và $B(1;1)$.

Bài 18 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$, trên (P) lấy hai điểm

$$A(-1;1), B(3;9).$$

a) Tính diện tích tam giác OAB .

b) Xác định điểm C thuộc cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải:

a) Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \cdot (-1) + b = 1 \\ a \cdot 3 + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Suy ra phương trình đường thẳng AB là $(d): y = 2x + 3$.

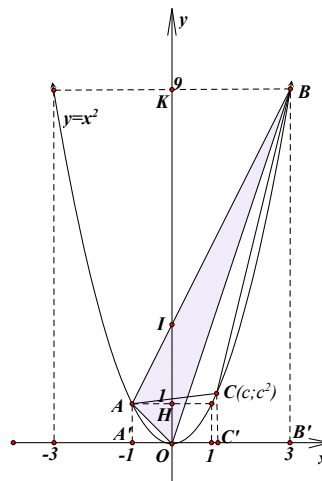
Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm $I(0;3)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$$S_{OAB} = S_{OAI} + S_{OBI} = \frac{1}{2} AH \cdot OI + \frac{1}{2} BK \cdot OI.$$

Ta có $AH = 1; BK = 3, OI = 3$.

Suy ra $S_{OAB} = 6$ (đvdt).



b) Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc cung nhỏ (P) với $-1 < c < 3$.

Diện tích tam giác: $S_{ABC} = S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'}$.

Các tứ giác $ABB'A', AA'C'C, CBB'C'$ đều là hình thang vuông nên ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1+9}{2} \cdot 4 - \frac{1+c^2}{2} \cdot (c+1) - \frac{9+c^2}{2} \cdot (3-c) = 8 - 2(c-1)^2 \leq 8.$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng 8 (đvdt) khi $C(1;1)$.

Bài 19: Một xe tải có chiều rộng là 2,4 m chiều cao là 2,5 m muốn đi qua một cái cổng hình Parabol.

Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (Bỏ qua độ dày của cổng).

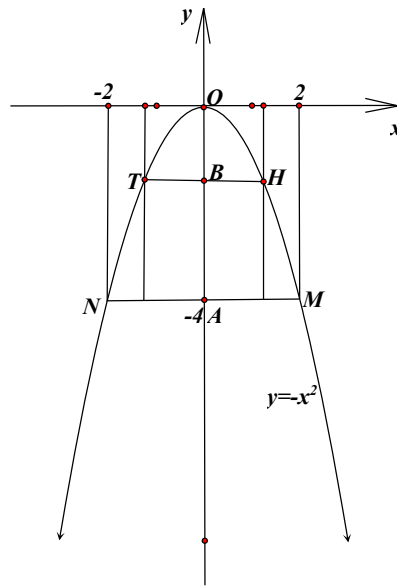
a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy gọi Parabol $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$.

b) Hỏi xe tải có đi qua cổng được không? Tại sao?

Lời giải:

a) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét. Do khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m nên $MA = NA = 2m$. Theo giả thiết ta có $OM = ON = 2\sqrt{5}$, áp dụng định lý Pitago ta tính được: $OA = 4$ vậy $M(2; -4), N(-2; -4)$. Do $M(2; -4)$ thuộc parabol nên tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình: $(P): y = ax^2$ hay $-4 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = -1$ và $(P): y = -x^2$.

b) Để đáp ứng chiều cao trước hết xe tải phải đi vào chính giữa cổng.



Xét đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}$

(ứng với chiều cao của xe). Đường thẳng này cắt Parabol tại 2 điểm

có tọa độ thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

suy ra tọa độ hai giao điểm là $T\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right); H\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow HT = 3\sqrt{2} > 2,4$.

Vậy xe tải có thể đi qua cổng.

-----Toán Học Sơ Đồ-----