

# CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI THCS

<b>Chủ đề 1. Các hệ phương trình cơ bản</b>	<b>3</b>
1. Hệ phương trình đối xứng loại I	3
2. Hệ phương trình đối xứng loại II	5
3. Hệ phương trình quy về đẳng cấp	8
<b>Chủ đề 2. Một số kĩ thuật giải hệ phương trình</b>	<b>12</b>
1. Kĩ thuật thế	12
Dạng 1: Rút một ẩn theo ẩn kia từ phương trình này thế vào phương trình kia	12
Dạng 2: Thế một biểu thức vào phương trình còn lại	13
Dạng 3: Thế hằng số từ phương trình này vào phương trình kia	15
2. Kĩ thuật phân tích thành nhân tử	17
3. Kĩ thuật cộng, trừ, nhân hai vế của hệ phương trình	22
Dạng 1: Cộng, trừ đại số để tạo ra các tổng bình phương	22
Dạng 2: Cộng, trừ hai vế để đưa về phương trình một ẩn	23
Dạng 3: Cộng, trừ đại số để đưa về phương trình tích	24
Dạng 4: Các bài toán không mẫu mực giải bằng cộng, trừ, nhân hai vế của hệ	26
4. Kĩ thuật đặt ẩn phụ	28
Dạng 1: Dùng ẩn phụ đưa về phương trình bậc nhất hai ẩn	28
Dạng 2: Dùng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I	30
Dạng 3: Dùng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II	32
Dạng 4: Dùng ẩn phụ đưa về phương trình một ẩn	33
Dạng 5: Đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu	34
5. Kĩ thuật nhân liên hợp đối với phương trình chứa căn thức	36
6. Kĩ thuật đánh giá trong giải hệ phương trình	39
Dạng 1: Dựa vào sự đồng biến nghịch biến các vế của hệ phương trình	39
Dạng 2: Sử dụng bất các đẳng thức cổ điển để đánh giá	40
Dạng 3: Sử dụng điều kiện của nghiệm của hệ phương trình	44
6. Kĩ hệ số bất định để giải hệ phương trình	45
<b>Chủ đề 3. Hệ phương trình bậc ba ẩn</b>	<b>52</b>
Dạng 1: Hệ hai phương trình ba ẩn	52

---

<b>Dạng 2:</b> Hệ ba phương trình ba ẩn	53
<b>Chủ đề 4. Hệ phương trình có chứa tham số</b>	57
<b>Dạng 1:</b> Biện luận về nghiệm của phương trình	57
<b>Dạng 2:</b> Tìm điều kiện của tham số để thỏa mãn một điều kiện cho trước	60
<b>Bài tập rèn luyện tổng hợp</b>	64
<b>Hướng dẫn giải</b>	76

# CHỦ ĐỀ 1: CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

## I- HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI I

### LÝ THUYẾT CHUNG:

Hệ đối xứng loại II là hệ có dạng: 
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Trong đó  $f(x, y)$  và  $g(x, y)$  là các đa thức đối xứng.

Nghĩa là:  $f(x, y) = f(y, x)$  và  $g(x, y) = g(y, x)$

Hay hệ phương trình đối xứng loại I là hệ phương trình có vai trò  $x, y$  hoàn toàn như nhau trong mỗi phương trình, nếu ta hoán đổi vị trí  $x$  và  $y$  trong hệ thì hệ

phương trình không thay đổi. Ví dụ: 
$$\begin{cases} x + y + 2xy = 21 \\ 2x^2 + 2y^2 - xy = 7 \end{cases}$$

**Tính chất:** Nếu hệ có nghiệm là  $(x_0; y_0)$  thì do tính đối xứng, hệ cũng có nghiệm là  $(y_0; x_0)$ .

### PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Biến đổi các phương trình của hệ đưa về ẩn  $S$  và  $P$  mà:  $S = x + y, P = x.y$ . Giải được  $S$  và  $P$ . Khi đó  $x, y$  là nghiệm của phương trình:  $X^2 - S.X + P = 0$

Một số hằng đẳng thức hay được sử dụng:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$$

$$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy = S^2 - 3P$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = S^2 - P$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3PS$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) = (S^2 - 2P)^2 - P^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{S}{P};$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2};$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

## THÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ x^2+y^2-xy=7 \end{cases}$$

*Lời giải*

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=-1 \\ (x+y)^2-3xy=7 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \quad (\exists x, y \Leftrightarrow S^2 \geq 4P) \text{ ta được } \begin{cases} S+P=-1 \\ S^2-3P=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1, P=-2 \\ S=-4, P=3 \end{cases}$$

$$\text{TH 1. } \begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, y=2 \\ x=2, y=-1 \end{cases}$$

$$\text{TH 2. } \begin{cases} S=-4 \\ P=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, y=-3 \\ x=-3, y=-1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:  $S = \{(-1; 2); (2; -1); (-1; -3); (-3; -1)\}$

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$$

*Lời giải*

$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3+x^3y^3-3xy(x+y)=17 \\ (x+y)+xy=5 \end{cases}$$

Đặt  $x+y=a$ ;  $xy=b$ . Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^3+b^3-3ab=17 \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ b^2-5b+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ (b-2)(b-3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (y-1)(y-2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2-2y+3=0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:  $(x; y) = (1; 2); (2; 1)$

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội năm 2018-2019)

**Lời giải**

Ta có hệ phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) + (xy)^3 + 7(x+y+xy+1) = 31 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 2 \\ (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] + (xy)^3 + 7[(x+y) + xy + 1] = 31 \end{cases}$$

Đặt  $a = x + y; b = xy$  thì hệ trên trở thành:  $\begin{cases} ab = 2 \\ a(a^2 - 3b) + b^3 + 7(a + b + 1) = 31 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 \\ a^3 - 3ab + b^3 + 7(a + b + 1) = 31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] - 3ab + 7(a+b+1) = 31$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 3ab + 7(a+b) - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 - 6(a+b) - 3 \cdot 2 + 7(a+b) - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 + (a+b) - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 27 + (a+b) = 3$$

$$\Leftrightarrow (a+b-3)[(a+b)^2 + 3(a+b) + 10] = 0$$

$$\Rightarrow a+b = 3 \left( \text{do } (a+b)^2 + 3(a+b) + 10 > 0 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad (\text{do } a^2 = (x+y)^2 \geq 4xy = 4b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (1; 1)$

**II- HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI II****KHÁI NIỆM**

Hệ đối xứng loại II là hệ có dạng:  $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases}$

Trong đó:  $f(x, y)$  là đa thức không đối xứng.

Hay hệ đối xứng kiểu hai là hệ đối xứng giữa hai phương trình của hệ, nếu ta hoán đổi vị trí của  $x$  và  $y$  trong phương trình thứ nhất sẽ được phương trình thứ hai của

hệ. Ví dụ: 
$$\begin{cases} x^2 - 2y = 1 & (1) \\ y^2 - 2x = 1 & (2) \end{cases}$$
 khi thay hoán đổi vị trí của  $x$  và  $y$  ở phương trình (1) ta được  $y^2 - 2x = 1$  đây chính là phương trình (2)

## PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được nhân tử chung  $(x - y)$  nhóm lại và đưa về phương tích và sau đó xét hai trường hợp:

$$(x - y) \cdot A(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ A(x, y) = 0 \end{cases}$$

Việc trừ theo vế thường phải sử dụng hằng đẳng thức hoặc liên hợp nếu chứa căn:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$

## THÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$$

*Lời giải*

Điều kiện:  $x, y \geq 0$ .

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$\begin{aligned} x^2 + \sqrt{x} - (y^2 + \sqrt{y}) &= 2(y - x) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left[ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) + 1 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) > 0$$

nên phương trình đã cho tương đương với:  $x = y$ .

$$\text{Hay } x^2 - 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm:  $(x;y) = (0;0), (1;1), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} = y \\ y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1} = x \end{cases}$$

*Lời giải*

Điều kiện:  $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -\frac{1}{2}$

Để ý rằng  $x = y = -\frac{1}{2}$  không phải là nghiệm.

Ta xét trường hợp  $x + y \neq -1$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - 1 + \sqrt{2x+1} - (y^3 + 3y - 1 + \sqrt{2y+1}) &= y - x \\ \Leftrightarrow (x-y)[x^2 + xy + y^2] + 4(x-y) + \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[ x^2 + xy + y^2 + 4 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}} \right] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Khi  $x = y$  xét phương trình:  $x^3 + 2x - 1 + \sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x + \sqrt{2x+1} - 1 = 0$

$$x(x^2 + 1) + \frac{2x}{\sqrt{2x+1} + 1} = 0 \Leftrightarrow x \left[ x^2 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tóm lại hệ phương trình có nghiệm duy nhất:  $x = y = 0$

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

*Lời giải*

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \\ yx^2 + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2xy(y-x)+7(x-y)+(x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x+y-2xy+7=0 \end{cases}$$

- + Nếu  $x=y$  thay vào hệ ta có:  $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=2 \\ x=y=3 \end{cases}$
- + Nếu  $x+y-2xy+7=0 \Leftrightarrow (1-2x)(1-2y)=15$ .

Mặt khác khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$$x^2+y^2-5x-5y+12=0 \Leftrightarrow (2x-5)^2+(2y-5)^2=2.$$

Đặt  $a=2x-5, b=2y-5$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a+4)(b+4)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=2 \\ ab+4(a+b)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \\ a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(3;2),(2;3)$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:  $(x;y)=(2;2),(3;3),(2;3),(3;2)$

### III- HỆ CÓ YẾU TỐ ĐẲNG CẤP

#### LÝ THUYẾT CHUNG:

$$+ \text{ Là những hệ có dạng: } \begin{cases} f^k(x,y)=c_1 \\ g^k(x,y)=c_2 \end{cases}$$

Trong đó  $f(x,y)$  và  $g(x,y)$  là các đa thức bậc  $k$  của  $x$  và  $y$  ( $k = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots$ ) và không chứa thành phần nhỏ hơn  $k$ .

+ Hoặc các phương trình của hệ khi nhân hoặc chia cho nhau thì tạo ra phương trình đẳng cấp.

Ta thường gặp dạng hệ này ở các hình thức như:

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ ex^2 + gxy + hy^2 = k \end{cases}'$$

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = dx + ey \\ gx^2 + hxy + ky^2 = lx + my \end{cases}'$$

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = mx + ny \end{cases}$$

## PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Phương pháp chung để giải hệ dạng này là: Từ các phương trình của hệ ta nhân hoặc chia cho nhau để tạo ra phương trình đẳng cấp bậc  $n$ :

$$a_1x^n + a_kx^{n-k} \cdot y^k \dots + a_ny^n = 0$$

Từ đó ta xét hai trường hợp:

$y = 0$  thay vào để tìm  $x$

+  $y \neq 0$  ta đặt  $t = \frac{x}{y}$  thì thu được phương trình:  $a_1t^n + a_kt^{n-k} \dots + a_n = 0$

+ Giải phương trình tìm  $t$  sau đó thế vào hệ ban đầu để tìm  $x, y$

**Chú ý:** ( Ta cũng có thể đặt  $y = tx$  )

## THÍ DỤ MINH HỌA

★**Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 & (1) \\ x^2 - xy + 3y^2 = 11 & (2) \end{cases}$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Huệ năm 2015-2016)

**Lời giải**

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} 22x^2 + 33xy + 11y^2 = 121 \\ 12x^2 - 12xy + 36y^2 = 121 \end{cases} \Leftrightarrow 10x^2 + 45xy - 25y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 9xy - 5y^2 = 0 \quad (3)$$

-

Ta thấy  $y = 0$  không là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế phương trình (3) cho  $y^2$  ta được  $2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 9\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \text{ (} t > 0 \text{) Khi đó: } 2t^2 + 9t - 5 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ x = -5y \end{cases}$$

Với  $x = \frac{y}{2}$  thay vào (1) ta được:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y^2 + y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Với  $x = -5y$  thay vào (1) ta được:

$$50y^2 - 15y^2 + y^2 = 12 \Leftrightarrow 36y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x; y) = (1; 2), (-1; -2), \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

★ **Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Vũng Tàu năm 2019-2020)

### Lời giải

Để ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có:  $2x^3 - y^3 = (x^2 - 2y^2)(x - 2y)$  đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -1 & (1) \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x & (2) \end{cases} \Rightarrow 2x^3 - y^3 = (x^2 - 2y^2)(x - 2y) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + 3xy + 5y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 0 \end{cases}$$

TH1:  $x = y$ , thay vào phương trình (1) ta được  $x = y = \pm 1$ .

$$\text{TH2: } x^2 + 3xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{11}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Thử lại, ta thấy  $x = y = 0$  không phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(1;1), (-1;-1)$ .

★**Thí dụ 7.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 = (2-y)(2+y) \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) \end{cases}$$
  
(Trích đề Chuyên Quảng Ninh năm 2019-2020)

**Lời giải**

$$\begin{cases} x^2 = (2-y)(2+y) \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ 2x^3 = (x+y)(4-xy) & (2) \end{cases}$$

Thế  $4 = x^2 + y^2$  từ phương trình (1) vào phương trình (2) ta được:

$$2x^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y.$$

Thay  $x = y$  vào phương trình (1) ta được:  $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ .

Hệ phương trình có nghiệm  $(x; y)$  là:  $(\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ .

## CHỦ ĐỀ 2: MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

### I- KỸ THUẬT THẾ

#### NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

- Hệ gồm hai phương trình, trong đó từ một phương trình ta có thể rút được một ẩn theo ẩn còn lại và thế vào phương trình kia tạo ra phương trình đa thức bậc cao một ẩn có thể giải được. Đôi khi ta cũng thực hiện phép thế hằng số hoặc thế một biểu thức vào phương trình còn lại.

#### Dấu hiệu nhận biết:

- Trong hai phương trình của hệ có ít nhất một phương trình bậc nhất của x và y.
- Có thể rút một biến theo biến còn lại từ một phương trình của hệ.

#### THÍ DỤ MINH HỌA

##### Dạng 1. Rút một ẩn theo ẩn còn lại và thế vào phương trình kia của hệ

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & (1) \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

#### Lời giải

Từ (1) ta có  $x = \frac{5-3y}{2}$  thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{5-3y}{2}\right)^2 - y^2 + 2y - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3(25 - 30y + 9y^2) - 4y^2 + 8y - 16 \\ \Leftrightarrow & 23y^2 - 82y + 59 = 0 \\ \Leftrightarrow & (y-1)(23y-59) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{59}{23} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $y = 1$  thay vào (1) ta được:  $2x + 3 = 5 \Rightarrow x = 1$

Với  $y = \frac{59}{23}$  thay vào (1) ta được:  $2x + 3 \cdot \frac{59}{23} = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{31}{23}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $\left\{ (1; 1); \left(-\frac{31}{23}; \frac{59}{23}\right) \right\}$

**Nhận xét:** Ở bài toán này ta rút x theo y vì phương trình (2) của hệ chưa nhiều ẩn y hơn so với x, khi thế x theo y chúng ta sẽ nhẹ nhàng hơn trong việc tính toán.

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} xy + 2x + y = 14 \\ x^3 + 3x^2 + 3x - y = 1 \end{cases}$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} xy + 2x + y = 14 \\ x^3 + 3x^2 + 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y+2) = 14 - y \quad (1) \\ (x+1)^3 - y - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Với  $y = -2$  thế vào (1) ta được:  $0x = 16$  (vô lý)

Với  $y \neq -2$  từ (\*) suy ra:  $x = \frac{14-y}{y+2}$  thế vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} \left(\frac{14-y}{y+2} + 1\right)^3 - y - 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{16}{y+2}\right)^3 = y+2 \Leftrightarrow (y+2)^4 = 16^3 \\ &\Leftrightarrow (y+2)^4 = 8^4 \Leftrightarrow \begin{cases} y+2 = 8 \\ y+2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \Rightarrow x = 1 \\ y = -10 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $y = 1$  thay vào (1) ta được:  $2x + 3 = 5 \Rightarrow x = 1$

Với  $y = \frac{59}{23}$  thay vào (1) ta được:  $2x + 3 \cdot \frac{59}{23} = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{31}{23}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $\{(1; 6); (-3; -10)\}$

### **Dạng 2. Thế một biểu thức vào phương trình còn lại**

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 - x - y = -1 \\ x^3 + x^2y + x^2 + xy = x + y - 2 \end{cases}$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - x - y = -1 \\ x^3 + x^2y + x^2 + xy = x + y - 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x^2 + 1 \\ x^2(x+y) + x(x+y) - (x+y) = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x^2 + 1 \quad (1) \\ (x+y)(x^2 + x - 1) = -2 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Thay  $x + y = x^2 + 1$  thế vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(x^2 + x - 1) &= -2 \\ \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 + x^2 + x - 1 &= -2 \\ \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3(x+1) + (x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^3 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^3+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^3=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

Với  $x=-1$  thế vào (1) ta được:  $-1+y=1+1 \Leftrightarrow y=3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x,y)=(-1;3)$

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases} \quad (*)$

*Lời giải*

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+xy)^2=2x+9 \\ 2x^2+2xy=x^2+6x+6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+xy)^2=2x+9 & (1) \\ x^2+xy=\frac{x^2+6x+6}{2} & (2) \end{cases}$$

Thế  $x^2+xy=\frac{x^2+6x+6}{2}$  vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2+6x+6}{2}\right)^2=2x+9 \\ & \Leftrightarrow (x^2+6x+6)^2=4(2x+9) \\ & \Leftrightarrow x^4+36x^2+36+12x^3+12x^2+72x=4(2x+9) \\ & \Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x=0 \\ & \Leftrightarrow x(x^3+12x^2+48x+64)=0 \\ & \Leftrightarrow x(x+4)^3=0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x=0$  thế vào (\*) ta được:  $0y=6$  (vô nghiệm)

Với  $x=-4$  thế vào (\*) ta được:  $16-8y=-24+6 \Leftrightarrow 8y=34 \Rightarrow y=\frac{17}{4}$  (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x,y)=\left(-4;\frac{17}{4}\right)$

**Nhận xét:** Chúng ta hoàn toàn có thể rút trực tiếp  $y$  hoặc  $xy$  từ phương trình (\*) thế vào phương trình kia của hệ để chuyển về phương trình bậc 4 một ẩn  $x$  và giải bằng cách nhân nghiệm, nhưng nếu linh hoạt một chút chúng ta biến đổi sau đó mới thế

như cách tôi trình bày ở trên thì lời giải sẽ nhẹ nhàng về mặt tính toán và đẹp mắt hơn.

★**Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

**Phân tích:** Rút  $y^2 = xy + 1$  thế vào phương trình (2) của hệ ta được phương trình đưa được về phương trình tích nên ta dùng phương pháp thế.

$$x^2 + xy + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x(x+y) + 2(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2=0 \end{cases}$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ x^2 + xy - 1 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ x^2 + xy + 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ x(x+y) + 2(x+y) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ (x+y)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ \begin{cases} x+y=0 \\ x+2=0 \end{cases} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ \begin{cases} x = -y \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y \\ y^2 = -y^2 - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = -2y - 1 \end{cases} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y \\ 2y^2 = -1 \end{cases} \text{ (VN)} \\ \begin{cases} x = -2 \\ (y+1)^2 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (-2; 1)$

**Dạng 3. Thế hằng số từ phương trình này vào phương trình kia**

★**Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$$

(Trích đề chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2015-2016)

**Lời giải**

Ta có: 
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 & (1) \\ x^2 + 6y^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

Thế  $10 = x^2 + 6y^2$  vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned}
 & x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x - 2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

+ Trường hợp 1:  $x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

Vì  $x = y = 0$  không thỏa mãn phương trình (2) nên  $x = y = 0$  không là nghiệm của hệ.

+ Trường hợp 2:  $x = 2y$  thay vào phương trình (2) ta có:

$$4y^2 + 8y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm  $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$

**Nhận xét:** Việc thế  $10 = x^2 + 6y^2$  vào (2) nhằm tạo ra một phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với  $x$  và  $y$ , từ phương trình đẳng cấp này chúng ta dễ dàng chuyển thành dạng tích để rút ra được mối liên hệ giữa  $x$  với  $y$ .

Trường hợp bạn chưa có nhiều kĩ năng phân tích nhân tử, bạn không thể chuyển  $x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$  thành dạng tích, bạn của thể làm như sau:

- Xét  $y = 0$  thì  $x = 0$  thay vào hệ phương trình đã cho ta thấy  $(x, y) = (0, 0)$  không thỏa mãn hệ phương trình.

- Xét  $y \neq 0$  chia hai vế của phương trình cho  $y^3 \neq 0$  ta được:  $\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0$

Đặt  $\frac{x}{y} = t$  ta được:  $t^3 - t^2 + t - 6 = 0$  đây là phương trình bậc 3 chúng ta dễ dàng dùng

máy tính để bấm ra nghiệm hoặc tự nhẩm nghiệm cũng đơn giản hơn, từ đó dễ dàng giải quyết bài toán.

★**Thí dụ 7.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 3y^3 = 6(4x + y) & (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$3x^3 - 3y^3 = (x^2 - 3y^2)(4x + y) \Leftrightarrow x^3 + x^2y - 12xy^2 = 0 \quad (*)$$

- Xét  $x = 0$  thì  $y = 0$  thay vào hệ phương trình đã cho ta thấy  $(x, y) = (0, 0)$  không thỏa mãn hệ phương trình.

- Xét  $x \neq 0$  chia hai vế của phương trình cho  $x^3 \neq 0$  ta được:  $1 + \left(\frac{y}{x}\right) - 12\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$

$$\text{Đặt } \frac{y}{x} = t, \text{ ta được: } 1 + t - 12t^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - 3t)(4t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = -4y \end{cases}$$

Với  $x = 3y$  thay vào (2) ta được:  $9y^2 - 3y^2 = 6 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 3$

Với  $x = -4y$  thay vào (2) ta được:

$$16y^2 - 3y^2 = 6 \Leftrightarrow 13y^2 = 6 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x = \mp \sqrt{\frac{96}{13}}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $\left\{ (1; 3); (-1; -3); \left( \sqrt{\frac{6}{13}}; -\sqrt{\frac{96}{13}} \right); \left( -\sqrt{\frac{6}{13}}; \sqrt{\frac{96}{13}} \right) \right\}$

## II- KỸ THUẬT PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ

### NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

$$\text{Hệ có dạng } \begin{cases} A(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases}$$

Trong đó có một phương trình của hệ đưa được về dạng tích

Chẳng hạn:  $A(x, y) = a(x, y).b(x, y) = 0$  thông thường  $A(x)$  là phương trình đa thức 2 ẩn, hoặc phương trình đẳng cấp, tìm được mối quan hệ các biến trong phương trình.

$$\text{Ta biến đổi: } \begin{cases} A(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x, y).b(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases}$$

### Dấu hiệu thường gặp:

- Có một phương trình là phương trình đa thức, nhưng đôi khi có thể là bậc cao chẳng hạn bậc 4 hoặc 6, chúng ta giải xuống bằng cách đặt ẩn phụ ( $t = x^2, t = x^3$ )
- Hệ có phương trình đẳng cấp, hoặc có thể dùng phép thế để kết hợp 2 hệ chuyển được về phương trình đẳng cấp.
- Hệ có căn thức cũng rất thường xuyên có thể chuyển về dạng tích bằng cách sử dụng lượng liên hợp, đặt ẩn phụ, hoặc đánh giá hàm số.

**THÍ DỤ MINH HỌA:**

★**Thí dụ 8.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

(Trích đề chuyên Yên Bái 2012-2013)

**Lời giải**

Biến đổi phương trình (1) của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ \Leftrightarrow & 6x^2 - 3xy + x + y - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 6x^2 - 3xy + 3x - 2x + y - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x(2x - y + 1) - (2x - y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (3x - 1)(2x - y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = \frac{1}{3}$  thế vào (2) ta được:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{8}{9} \Leftrightarrow y = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{3}$$

Với  $y = 2x + 1$  thế vào (2) ta được:

$$x^2 + (2x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $\left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right); (0; 1); \left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) \right\}$

**Nhận xét:** Đối các hệ phương trình có một phương trình có dạng là một tam thức bậc 2 đối với 2 ẩn như phương trình (1) của hệ trên việc chúng ta phải làm kiểm tra xem phương trình này có thể chuyển về phương trình tích để rút một ẩn theo ẩn kia và thế vào phương trình còn lại. Tuy nhiên đôi khi việc chuyển về phương trình tích là tương đối khó, ta có thể một ẩn là tham số như sau:

$$6x^2 - 3xy + x = 1 - y \Leftrightarrow 6x^2 - (3y - 1)x + y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta_{(1)} = (3y - 1)^2 - 4.6(y - 1) = 9y^2 - 6y + 1 - 24y + 24 = 9y^2 - 30y + 25 = (3y - 5)^2$$

$$x_1 = \frac{(3y - 1) + (3y - 5)}{12} = \frac{y - 1}{2}; \quad x_2 = \frac{(3y - 1) - (3y - 5)}{12} = \frac{1}{3}$$

Từ đây chúng ta dễ dàng đưa phương trình của hệ về dạng tích. Trong trường hợp dental không là số chính phương thì hệ đó không giải được bằng cách đưa phương trình đó của hệ về dạng tích, ta nên nghĩ tới việc tìm liên hệ giữa các ẩn bằng phương trình kia của hệ, hoặc có thể là phải kết hợp cả 2 phương trình của hệ mới tìm được quan hệ giữa các ẩn. Để minh họa điều này ta đến ví dụ sau:

★**Thí dụ 9.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16 & (1) \\ \sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} & (2) \end{cases}$$

(Trích đề chuyên Nam Định 2015-2016)

**Phân tích:** Điều kiện: 
$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2, y \geq 0.$$

Phương trình (1) của hệ có dạng bậc 2 của  $x$  và  $y$  nên thử ta thử kiểm tra xem có thể đưa về dạng tích hay không.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 + 2x^2 - xy + 5x + 6x - 3y + 15 = x + 16 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - (y-10)x - 3y - 1 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có:  $\Delta_{(*)} = (y-10)^2 - 4.3(-3y-1) = y^2 - 20y + 100 + 26y + 12 = y^2 + 6y + 112$

Ta thấy dental phương trình (\*) không là số chính phương nên phương trình (1) của hệ không thể đưa về dạng tích để rút ẩn này theo ẩn kia. Do đó ta nên nghĩ tới việc tìm liên hệ giữa các ẩn bằng phương trình (2) của hệ cho dù nhìn chứa căn tương đối phức tạp so với phương trình (1).

$$\sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y}$$

Do (2) có 2 căn, một căn chứa  $(x+2)$  và một căn chứa  $y$  nên chúng sẽ thường có quan hệ đặc biệt với nhau, ta tách đại lượng  $(x-y+3)$  theo chúng  $(x+2)$  và  $y$  để tạo mối liên hệ:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} \\ \Leftrightarrow &\sqrt{x+2}[(x+2)-y+1] - \sqrt{y} = 0 \\ \Leftrightarrow &(x+2)\sqrt{x+2} - y\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{x+2}(x+2-y) + (\sqrt{x+2} - \sqrt{y}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{x+2}\left[(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{y})^2\right] + (\sqrt{x+2} - \sqrt{y}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sqrt{x+2} \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{y})(\sqrt{x+2} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x+2} - \sqrt{y}) = 0 \\ \Leftrightarrow &(\sqrt{x+2} - \sqrt{y})\left[\sqrt{x+2} \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{y}) + 1\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0 \quad \left( \text{do } \sqrt{x+2} \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{y}) + 1 > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow y = x + 2$$

Hoặc các bạn có thể sử dụng biểu thức liên hợp:

$$(x+2)\sqrt{x+2} - y\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2-y)\sqrt{x+2} + \frac{x+2-y}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2-y) \left( \sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + 2 \quad \left( \text{do } \sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y}} > 0 \right)$$

Thay  $y = x + 2$  vào (1) ta được:

$$x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+3)(2x-(x+2)+5) = x+16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+3)^2 = x+16$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=-\frac{7}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $(x, y) = (1, 3)$

Với phân tích trên các bạn tự trình bày lời giải nhé!

★**Thí dụ 10.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 & (1) \\ xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (2) \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \geq 1, y \geq 1$

$$(2) \Leftrightarrow xy + x + y = x^2 - 2y^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) - (y^2 + xy) - (x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) - y(x + y) - (x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - y - y - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x-2y-1=0 \quad (\text{do } x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow x+y > 0) \\ &\Leftrightarrow x=2y+1 \end{aligned}$$

Thay  $x=2y+1$  vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{2y+1-1} + \sqrt{y-1} = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{2y} + \sqrt{y-1} = 3 \Leftrightarrow 2y + 2\sqrt{2y(y-1)} + y - 1 = 9 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{2y(y-1)} = 10 - 3y \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 3y \geq 0 \\ y^2 - 52y + 100 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{10}{3} \\ y = 50 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (5, 2)$

★**Thí dụ 11.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 & (1) \\ 3x^4 + (x-y)^2 = 6x^3y + y^2 & (2) \end{cases}$$

*Lời giải*

Điều kiện  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

Xuất phát từ phương trình (2) ta có:

$$\begin{aligned} 3x^4 - 6x^3y + (x-y)^2 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^3(x-2y) + x(x-2y) &= 0 \Leftrightarrow x(x-2y)(3x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2y \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x=0$  thay vào (1) ta có:  $2.0 + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow y = 9$

Với  $x=2y$  thay vào (1) ta có:  $2.\sqrt{2y} + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow (2\sqrt{2}+1)\sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow y = \frac{9}{9+4\sqrt{2}}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là  $\left\{ (0; 9), \left( \frac{18}{9+4\sqrt{2}}; \frac{9}{9+4\sqrt{2}} \right) \right\}$

### III- KỸ THUẬT CỘNG, TRỪ, NHÂN HAI VẾ CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Đối với nhiều hệ phương trình chúng ta không thể bắt đầu khai thác từng phương trình của hệ mà phải kết hợp cả 2 phương trình của hệ mới tạo ra được mối liên hệ giữa các ẩn. Các bài toán dạng này thường không có phương pháp chung chúng ta phải linh hoạt trong từng bài toán.

## THÍ DỤ MINH HỌA

### Dạng 1. Cộng, trừ đại số để đưa về các tổng bình phương

★**Thí dụ 12.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 3x - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - x - 4y + 5 = 0. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2016-2017)

#### Lời giải

Ta có: 
$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 3x - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - y^2 - x - 4y + 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được  $2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$  (3)

Phương trình (3) tương đương với  $(x-y)^2 + (x+y-2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Ta thấy  $x = y = 1$  thỏa mãn (1) và (2). Hệ đã cho có duy nhất nghiệm  $(x; y) = (1; 1)$ .

★**Thí dụ 13.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + x - 5y^2 = 42 \\ 7xy + 6y^2 + 42 = x \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Tây Ninh năm 2019-2020)

#### Lời giải

Lấy (1)+(2) ta được  $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$

Thay  $x = -y$  vào (1) ta được  $x^2 + x - 42 = 0$

Giải phương trình trên ta được  $x = -7; x = 6$

Với  $x = -7$  ta có  $y = 7$ ; Với  $x = 6$  ta có  $y = -6$ .

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là  $(-7;7)$  và  $(6;-6)$ .

## Dạng 2. Cộng, trừ đại số để đưa về phương trình một ẩn

★**Thí dụ 14.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x + x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

### Lời giải

Cộng theo vế phương trình (1) và (2) của hệ ta được:

$$2x + 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với  $x = 1$  thay vào PT (2) ta được:  $1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0$

Với  $x = -2$  thay vào PT (2) ta được:  $4 + y^2 = 1$  (VN)

Vậy có hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (1, 0)$

★**Thí dụ 16.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2(y^2 + 1) = 2 \\ x^2y^2 + xy + 1 = 3x^2 \end{cases}$$

### Lời giải

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2(y^2 + 1) = 2 \\ x^2y^2 + xy + 1 = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 - 2 = -x^2 \\ x^2y^2 + xy + 1 = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y^2 - 6 = -3x^2 & (1) \\ x^2y^2 + xy + 1 = 3x^2 & (2) \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$4x^2y^2 + xy - 5 = 0 \Leftrightarrow (xy - 1)(4xy + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với  $xy = 1$  thay vào (1) ta được:  $-3x^2 = -3 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$

Với  $xy = -\frac{5}{4}$  thay vào (1) ta được:

$$-3x^2 = \frac{75}{16} - 6 = \frac{75 - 96}{16} = -\frac{21}{16} \Leftrightarrow x^2 = \frac{21}{48} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{21}{48}} \Rightarrow y = \mp \frac{5}{4} \sqrt{\frac{48}{21}}$$

Vậy hệ có 4 nghiệm là  $\left\{ (1;1), (-1;-1), \left( \sqrt{\frac{21}{48}}; -\frac{5}{4} \sqrt{\frac{48}{21}} \right), \left( -\sqrt{\frac{21}{48}}; \frac{5}{4} \sqrt{\frac{48}{21}} \right) \right\}$

★**Thí dụ 15.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy - 3y = 4x^2 \\ y^2 + 2y + 7 = 7x^2 + 8x \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Phan Bội Châu năm 2018-2019)

### Lời giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2xy - 6y = 8x^2 \\ y^2 + 2y + 7 = 8x^2 - x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 3y = 4x^2 \\ y^2 + 2y + 7 - 2xy + 6y + x^2 - 8x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 3y = 4x^2 \\ (x - y)^2 - 8(x - y) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 3y = 4x^2 \\ (x - y - 7)(x - y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x^2 + 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}; y = \frac{-5 + \sqrt{13}}{3} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}; y = \frac{-5 - \sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ 3x^2 + 10x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + 2\sqrt{22}}{3}; y = \frac{-26 + 2\sqrt{22}}{3} \\ x = \frac{-5 - 2\sqrt{22}}{3}; y = \frac{-26 - 2\sqrt{22}}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$\left\{ \left( \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}; \frac{-5 + \sqrt{13}}{3} \right), \left( \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}; \frac{-5 - \sqrt{13}}{3} \right), \left( \frac{-5 + 2\sqrt{22}}{3}; \frac{-26 + 2\sqrt{22}}{3} \right), \left( \frac{-5 - 2\sqrt{22}}{3}; \frac{-26 - 2\sqrt{22}}{3} \right) \right\}$$

### Dạng 3. Cộng, trừ đại số để đưa về phương trình tích

★**Thí dụ 16.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y & (1) \\ y(x + y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 & (2) \end{cases}$$

### Lời giải

Nhân 2 vế của PT (1) với (2) rồi cộng với PT (2) theo vế ta được:

$$\begin{aligned} y(x + y)^2 + 2y^2 + 2xy = 15y &\Leftrightarrow y \left[ (x + y)^2 + 2(x + y) - 15 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x + y - 3)(x + y + 5) = 0. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $y = 0$  ta có:  $x^2 + 1 = 0$  (vô nghiệm)

Với  $y = 3 - x$  thay (1) ta được:  $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

Với  $y = 5 - x$  thay (1) ta được:  $x^2 + 9x + 46 = 0$  (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  $\{(1; 2), (-2; 5)\}$

★**Thí dụ 17.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y = 3 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 13. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2019-2020)

### Lời giải

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y = 3 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 13 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 8 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 3y^2 + 6y + 3 = 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 = 8 \quad (1) \\ (x-2y)^2 + 3(y+1)^2 = 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2(x+2)^2 + 2(y+1)^2 = 16 \\ (x-2y)^2 + 3(y+1)^2 = 16 \end{cases} \\ \Rightarrow & 2(x+2)^2 - (x-2y)^2 - (y+1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+2)^2 - (x-2y)^2 + (x+2)^2 - (y+1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2x-2y+2)(2y+2) + (x+y+3)(x-y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y+1)(4y+4) + (x+y+3)(x-y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y+1)(x+5y+7) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y - 1 & (2) \\ x = -5y - 7 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Thay (2) vào (1) được:

$$\begin{aligned} (y-1+2)^2 + (y+1)^2 = 8 & \Leftrightarrow 2(y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = -3 \Rightarrow x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Thay (3) vào (1) được:

$$\begin{aligned} (-5y-7+2)^2 + (y+1)^2 = 8 & \Leftrightarrow 26(y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y+1)^2 = \frac{4}{13} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = -1 + \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x = -2 - \frac{10}{\sqrt{13}} \\ y = -1 - \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x = -2 + \frac{10}{\sqrt{13}} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(x; y) \in \left\{ (0; 1), (-4; -3), \left(-2 - \frac{10}{\sqrt{13}}; -1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right), \left(-2 + \frac{10}{\sqrt{13}}; -1 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \right\}$$

**Dạng 4. Các bài toán hệ phương trình không mẫu mực giải bằng cách cộng, trừ, nhân theo vế hai phương trình của hệ với nhau**

★**Thí dụ 18.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 \end{cases}$$

(Trích đề HSG huyện Quảng Điền năm 2016-2017)

**Lời giải**

Lấy (1) + (2):  $(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 125 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5$  thay vào (1)  $\Rightarrow xy = 12$

Từ đó ta có hệ: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 7 \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ pt:

a)  $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = 1 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm:  $(x, y) \in \{(4; 3), (3; 4), (-3; -4), (-4; -3)\}$

★**Thí dụ 19.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 3 & (1) \\ y - \frac{y-3x}{x^2+y^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x^2 + y^2 \neq 0$

Với  $x = 0$  thì  $y = 1$

Với  $y = 0$  phương trình (2) có dạng  $\frac{3}{x^2} = 0$  (vô lý).

Xét  $x \neq 0, y \neq 0$  nhân 2 vế của PT(1) với  $y$ , nhân 2 vế PT(2) với  $x$  ta được:

$$\begin{cases} xy + \frac{xy + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3y & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - \frac{xy - 3x^2}{x^2 + y^2} = 0 & (4) \end{cases}$$

Cộng theo vế (3) và (4) ta được:  $2xy + 3 = 3y \Leftrightarrow x = \frac{3y-3}{2y}$  (5)

Thay (5) vào (2) biến đổi dẫn đến

$$4y^4 + 5y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(4y^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ (loại do } x \neq 0) \\ y = -1 \Rightarrow x = 3 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm:  $(x, y) \in \{(0; 1), (3; -1)\}$

★**Thí dụ 20.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 & (1) \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 & (2) \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện để hệ có nghiệm là  $x > 0$  và  $y > 0$  khi đó ta có:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{12}{y+3x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ 1 + \frac{12}{y+3x} = \frac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{y}} = 2 & (3) \\ \frac{6}{\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{24}{y+3} & (4) \end{cases}$$

Nhân vế phương trình (3) và (4) của hệ ta được:

$$\frac{36}{y} - \frac{4}{x} = \frac{48}{y+3} \Leftrightarrow 27x^2 - 6xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-y)(9x+y) = 0 \Leftrightarrow y = 3x \text{ (do } x > 0, y > 0)$$

Thay  $y = 3x$  vào (3) ta được:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{3x}} = 2 \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 12 + 6\sqrt{3}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm:  $(x, y) = (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})$

**Nhận xét:** Có nhiều bài toán tương tự như ví dụ 20, chúng có đặc điểm là 2 phương trình của hệ có dạng nữa đối xứng hoặc gần giống nhau nhưng sai khác về dấu. Điểm mấu chốt là đưa về sử dụng hằng đẳng thức:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Nếu tìm hiểu sâu về hệ phương trình các bạn có thể giải các hệ phương trình này bằng phương pháp số phức hóa. Các bạn rèn luyện thêm các ví dụ sau:

$$\begin{cases} 2x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 3 & (1) \\ 2y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 1 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{78y}{x^2 + y^2} = 20 & (1) \\ y + \frac{78x}{x^2 + y^2} = 15 & (2) \end{cases}$$

★**Thí dụ 21.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y(xy - 2) = 3x^2 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y(xy - 2) = 3x^2 \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(xy - 2) = 3x^2 \\ x(xy + 2) = -y^2 \end{cases}$$

Nhân vế với vế 2 phương trình của hệ ta được:

$$xy(xy-2)(xy+2) = -3x^2y^2 \Leftrightarrow xy(xy-1)(xy+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = 1 \\ xy = -4 \end{cases}$$

Với  $xy = 0$  ta có:  $x = y = 0$

Với  $xy = 1$  thay vào PT(1) của hệ ta được:  $y(1-2) = \frac{3}{y^2} \Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Với  $xy = -4$  thay vào PT(1) của hệ ta được:  $y(-4-2) = 3 \cdot \frac{16}{y^2} \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm:  $(x, y) = (0; 0), (2; -2), \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; -\sqrt[3]{3}\right)$

## IV- KỸ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ

### NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Phương pháp thường xuyên được sử dụng để giải hệ phương trình nhất là việc sử dụng ẩn phụ. Tùy dạng của hệ mà ta có phép đặt ẩn phụ phù hợp.

#### Dấu hiệu thường gặp:

- Hệ đối xứng loại I
- Hệ có các nhân tử lặp lại trong hai phương trình của hệ
- Đối với các hệ chứa căn thức chung ta cũng nên chú ý tới việc đặt ẩn phụ
- Các hệ chứa tổng và hiệu  $(x + y), (x - y)$
- Đối với một số trường hợp đặt ẩn phụ để đưa về hệ đối xứng loại I và loại II

### THÍ DỤ MINH HỌA:

#### Dạng 1. Dùng ẩn phụ đưa về dạng bậc nhất 2 ẩn

★ **Thí dụ 22.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hòa Bình năm 2010-2011)

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \neq -1, y \neq -1$

+ Đặt  $\begin{cases} u = \frac{x}{x+1} \\ v = \frac{y}{y+1} \end{cases}$ , Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u + v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = 3 \\ 2u + 6v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = 3 \\ 5v = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$$

Do đó:  $\begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{y}{y+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2 \\ y = -y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm:  $(x, y) = \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

★**Thí dụ 23.** Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} 5x^2 - \frac{10y}{y^2+1} = 1 \\ 3x^2 + \frac{20y}{y^2+1} = 11 \end{cases}$

(Trích đề Chuyên Kiên Giang năm 2011-2012)

**Lời giải**

(I)  $\begin{cases} 5x^2 - \frac{10y}{y^2+1} = 1 \\ 3x^2 + \frac{20y}{y^2+1} = 11 \end{cases}$ . Đặt  $x^2 = u$  ( $u \geq 0$ ) và  $\frac{10y}{y^2+1} = v$

Hệ (I) trở thành:  $\begin{cases} 5u - v = 1 \\ 3u + 2v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10u - 2v = 2 \\ 3u + 2v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13u = 13 \\ 5u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}$

Với  $u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với  $v = 4 \Rightarrow \frac{10y}{y^2+1} = 4 \Leftrightarrow 4y^2 - 10y + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ (I) đúng với  $x = \pm 1; y = 2$  hoặc  $y = \frac{1}{2}$

Vậy hệ (I) có 4 nghiệm  $(1; 2); (1; \frac{1}{2}); (-1; 2); (-1; \frac{1}{2})$

★**Thí dụ 24.** Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2y+4}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases}$

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \neq 3; y \neq -1$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2y+4}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{13}{10} \\ \frac{3}{x-3} - 2 - \frac{2}{y+1} = -\frac{11}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3} + \frac{3}{y+1} = \frac{3}{10} \\ \frac{3}{x-3} - \frac{2}{y+1} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Đặt  $a = \frac{1}{x-3}; b = \frac{1}{y+1}$  ta được hệ:

$$\begin{cases} a+3b = \frac{3}{10} \\ 3a-2b = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{y+1} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 14 \end{cases} \quad (\text{TMDK})$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất  $(x;y) = (13;14)$

**Dạng 2. Dùng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I**

★**Thí dụ 25.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 + 2xy \\ x + x^2y + xy = xy^2 + y + 1. \end{cases}$$

**Lời giải**

Ta có: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 + 2xy \\ x + x^2y + xy = xy^2 + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + x^2y^2 = 1 \\ (x-y) + xy(x-y) + xy = 1 \end{cases}$$

Đặt  $x - y = u, xy = v$  hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u + uv + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 1 & (1) \\ 2(u+v) + 2uv = 2 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:  $(u+v)^2 + 2(u+v) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 1 \\ u+v = -3 \end{cases}$

Với  $u+v = 1 \Rightarrow uv = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$

Từ đó ta được nghiệm:  $(x, y) = (1; 0), (0; -1), (1; 1), (-1, -1)$ .

Với  $u+v = -3 \Rightarrow uv = 4$ . Khi đó  $9 = (u+v)^2 < 4uv = 16$  (vô lý)

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm là:  $(x, y) = (1; 0), (0; -1), (1; 1), (-1, -1)$ .

★**Thí dụ 26.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases}.$$

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2019-2020)

### Lời giải

Điều kiện xác định của hệ phương trình  $\begin{cases} x \neq -2, \\ y \neq -2. \end{cases}$

Với điều kiện xác định trên, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{x}{y+2} + \frac{y}{x+2} = 1 \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Đặt  $a = \frac{x}{y+2}, b = \frac{y}{x+2}$ . Khi đó, hệ phương trình (2.2) trở thành

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ (a + b)^2 - 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Với  $a = 0, b = 1$ , ta có  $\begin{cases} \frac{x}{y+2} = 0 \\ \frac{y}{x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$

Với  $a = 1, b = 0$ , ta có  $\begin{cases} \frac{x}{y+2} = 1 \\ \frac{y}{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm  $(0; 2), (2; 0)$ .

★**Thí dụ 27.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 3 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 5 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Đại học Vinh năm 2018-2019)

### Lời giải

Điều kiện :  $x; y \neq 0$ . Ta có:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 3 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 3 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 5 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt  $a = \frac{1}{x} + x$ ;  $b = y - \frac{1}{y}$  với  $a^2 \geq 4$

Thay vào hệ (I) ta có:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2 - 2ab = 5 \Leftrightarrow 9 - 2ab = 5 \Leftrightarrow ab = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Mà  $a^2 \geq 4$  nên  $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y - \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (\text{tm}) \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là  $\left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

### Dạng 3. Dùng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II

★**Thí dụ 28.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2 + 3x = \frac{8}{y^3} \\ x^3 - 2 = \frac{6}{y} \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Nghệ An năm 2009-2010)

#### Lời giải

Đặt  $\frac{2}{y} = z$ . Hệ đã cho trở thành  $\begin{cases} 2 + 3x = z^3 \\ 2 + 3z = x^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow 3(x-z) = z^3 - x^3$$

$$\Leftrightarrow (x-z)(x^2 + xz + z^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = z \quad (\text{vì } x^2 + xz + z^2 + 3 > 0, \forall x, z).$$

Từ đó ta có phương trình:  $x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm:  $(x, y) = (-1; -2), (2, 1)$

★**Thí dụ 29.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 4x^2 - x + \frac{1}{y} = 1 \\ y^2 + y - xy^2 = 4 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hải Phòng năm 2012-2013)

**Lời giải**

Đặt: 
$$\begin{cases} 4x^2 - x + \frac{1}{y} = 1 & (1) \\ y^2 + y - xy^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Nếu  $y = 0$  thì (2) vô lí nên  $y \neq 0$  vậy (2)  $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} - x = \frac{4}{y^2}$

Đặt  $\frac{1}{y} = b$  ta có hệ: 
$$\begin{cases} 4x^2 - x + b = 1 & (1') \\ 4b^2 - b + x = 1 & (2') \end{cases}$$

Lấy (1') - (2') ta có  $(x - b)(2x + 2b - 1) = 0$

\*) Nếu  $x = b$  ta có hai nghiệm  $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

\*) Nếu  $2x + 2b = 1$  thì hệ vô nghiệm

Vậy hệ có hai nghiệm  $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

### Dạng 3. Dùng ẩn phụ đưa về phương trình một ẩn

★**Thí dụ 30.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Ninh Bình năm 2015-2016)

**Lời giải**

- Xét  $x = 0$ , hệ (I) trở thành 
$$\begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$$

- Xét  $x \neq 0$ , đặt  $\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt$ . Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} x^3 + 4xt = x^3 t^3 + 16x \\ 1 + x^2 t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4) & (1) \\ 4 = x^2(t^2 - 5) & (2) \end{cases}$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$$4x^3(t^3 - 1) = 4x^3(t - 4)(t^2 - 5)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 1 = t^3 - 4t^2 - 5t + 20 \quad (\text{Do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{7}{4} \end{cases}$$

+ Với  $t = -3$ , thay vào (2) được  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

$x = 1$  thì  $y = -3$ , thử lại  $(1; -3)$  là một nghiệm của (I)

$x = -1$  thì  $y = 3$ , thử lại  $(-1; 3)$  là một nghiệm của (I)

+ Với  $t = \frac{7}{4}$ , thay vào (2) được  $x^2 = -\frac{64}{31}$  (loại)

Vậy hệ (I) có các nghiệm  $(0; 2)$ ,  $(0; -2)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(-1; 3)$ .

★**Thí dụ 31.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3y} = \frac{x + \sqrt{y}}{2x^2 + y} \\ 2(2x + \sqrt{y}) = \sqrt{2x + 6} - y \end{cases}$$

### Lời giải

Điều kiện:  $y > 0; -3 \leq x \neq 0$ .

Đặt  $\sqrt{y} = tx \Rightarrow y = t^2x^2$  thay vào (1) ta được:  $\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3t^2x^2} = \frac{x + tx}{2x^2 + t^2x^2}$

Rút gọn biến  $x$  ta đưa về phương trình ẩn  $t$ :

$$(t-2)^2(t^2+t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 2x \geq 0.$$

Thay vào (2) ta được:

$$4x^2 + 8x = \sqrt{2x+6} \Leftrightarrow 4x^2 + 10x + \frac{25}{4} = 2x + 6 + \sqrt{2x+6} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+6} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Giải ra ta được  $x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \Rightarrow y = \frac{13-3\sqrt{17}}{2}$ .

Vậy nghiệm của hệ  $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}; \frac{13-3\sqrt{17}}{2}\right)$ .

### Dạng 3. Dùng ẩn phụ dạng tổng hiệu

★**Thí dụ 32.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 6x + \frac{3}{x+y} = 13 \\ 12(x^2 + xy + y^2) + \frac{9}{(x+y)^2} = 85 \end{cases}.$$

(Trích đề Chuyên Hà Tĩnh năm 2016-2017)

**Lời giải**

Ta có: 
$$\begin{cases} 6x + \frac{3}{x+y} = 13 \\ 12(x^2 + xy + y^2) + \frac{9}{(x+y)^2} = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-y) + 3(x+y) + \frac{3}{x+y} = 13 \\ 9(x+y)^2 + 3(x-y)^2 + \frac{9}{(x+y)^2} = 85 \end{cases}.$$

Đặt  $\begin{cases} x+y = a \neq 0 \\ x-y = b \end{cases}$ . Khi đó ta có: 
$$\begin{cases} 3a + \frac{3}{a} = 13 - 3b \quad (1) \\ 9\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 103 - 3b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b^2 - 13b + 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Xét  $b = \frac{11}{2}$ , thay vào (1) ta có  $6a^2 + 7a + 6 = 0$  (vô nghiệm).

Xét  $b = 1$ , thay vào (1) ta có  $a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}.$

Khi  $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases};$

Khi  $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} x+y = \frac{1}{3} \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$

Thử lại ta suy ra hệ đã cho có nghiệm  $(x; y) \in \left\{ (2; 1); \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \right\}$

★**Thí dụ 33.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + xy + y \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

**Lời giải**

Đặt  $u = x + y$ ,  $v = x - y$  khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{u^2 - v^2}{4} + u \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 3v^2 - 4u = 0 \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + \frac{27}{u^2} - 4u = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 - 4u^3 + 27 = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-3)^2(u^2 + 2u + 3) = 0 \\ v = \frac{3}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Thử lại ta suy ra hệ đã cho có nghiệm  $(x; y) = (2; 1)$

★ **Thí dụ 34.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} = y + 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

### Lời giải

Điều kiện:  $y > -1$ . Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} = y + 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 6 = y^2 + 2y + 1 \\ \frac{1}{4}[(x-y)^2 + 3(x+y)^2] = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2(x-y) + 5 = 0 \\ (x-y)^2 + 3(x+y)^2 = 28 \end{cases}$$

Đặt  $u = x + y$ ,  $v = x - y$  khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uv + 2v + 5 = 0 \\ 3u^2 + v^2 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = -5 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$$

Với  $\begin{cases} u = -1 \\ v = -5 \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$  ;

Với  $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  ;

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm:  $(x, y) = (-3; 2), (1, 2)$

## V- KỸ THUẬT NHÂN LIÊN HỢP ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

### NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Đối với các bài toán chứa căn thức thì kỹ thuật nhân liên hợp là kỹ thuật không thể không nhắc tới, đối hệ phương trình kỹ thuật nhân liên giúp chúng ta tìm mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  thông qua một trong hai phương trình của hệ (thường là phương trình chứa căn thức) bằng cách chuyển nó về phương trình tích dạng:

$$(ax+by+c)A(x)=0$$

Khi áp dụng kĩ thuật nhân liên hợp chúng ta cần khéo léo trong việc xử lý phương trình tích cuối cùng, cần dùng điều kiện bài toán và đánh giá để chứng minh được phương trình  $A(x) = 0$  vô nghiệm.

### THÍ DỤ MINH HỌA:

★**Thí dụ 35.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy - y^2 = \sqrt{3y-1} - \sqrt{x+2y-1} \\ x^3y - 4xy^2 + 7xy - 5x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2016-2017)

#### Lời giải

Điều kiện: 
$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{3} \\ x+2y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ y \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Xét  $\sqrt{3y-1} + \sqrt{x+2y-1} = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$

Thay vào (2) không thỏa mãn.

Xét  $\sqrt{3y-1} + \sqrt{x+2y-1} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ y \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$

(1)  $\Leftrightarrow y(x-y) = \frac{y-x}{\sqrt{3y-1} + \sqrt{x+2y-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y + \frac{y-x}{\sqrt{3y-1} + \sqrt{x+2y-1}} = 0 \end{cases} \left( \text{VN do } y \geq \frac{1}{3} \right)$

Với  $x = y$ , thay vào (2) ta được:

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

Vậy nghiệm của hệ là: (1; 1).

★**Thí dụ 36.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2015-2016)

#### Lời giải

Điều kiện:  $y - 2x + 1 \geq 0, 4x + y + 5 \geq 0, x + 2y - 2 \geq 0, x \leq 1$

TH 1. 
$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 3 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \sqrt{10} - 1 \end{cases} \text{ (Không TM hệ)}$$

TH 2.  $x \neq 1, y \neq 1$  Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1) = \frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}}$$

$$(x+y-2) \left[ \frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y-2x+1 \right] = 0. \text{ Do } y-2x+1 \geq 0$$

$$\text{nên } \frac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y-2x+1 > 0 \Rightarrow x+y-2=0$$

$$\text{Thay } y=2-x \text{ vào pt thứ 2 ta được: } x^2+x-3 = \sqrt{3x+7} - \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2 = \sqrt{3x+7} - 1 + 2 - \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = \frac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \left[ \frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x \right] = 0$$

$$\text{Do } x \leq 1 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x > 0$$

$$\text{Vậy } x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=4 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x, y) = (-2; 4)$ .

★ **Thí dụ 37.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2\sqrt{2xy-y} + 2x+y=10 \\ \sqrt{3y+4} - \sqrt{2y+1} + 2\sqrt{2x-1}=3 \end{cases}$$

(Trích đề HSG huyện Trực Ninh năm 2011-2012)

### Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq \frac{1}{2}; y \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} + \sqrt{y})^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 3 - \sqrt{y} (*)$$

Thay vào (2)

$$\sqrt{3y+4} - \sqrt{2y+1} - 2(\sqrt{y}-2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3y+4} - 4) - (\sqrt{2y+1} - 3) - 2(\sqrt{y} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y+4-16}{\sqrt{3y+1}+4} - \frac{2y+1-9}{\sqrt{2y+1}+3} - 2 \cdot \frac{y-4}{\sqrt{y}+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-4) \cdot \left( \frac{3}{\sqrt{3y+1}+4} - \frac{2}{\sqrt{2y+1}+3} - \frac{2}{\sqrt{y}+2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-4=0 \\ \frac{3}{\sqrt{3y+1}+4} = \frac{2}{\sqrt{2y+1}+3} + \frac{2}{\sqrt{y}+2} \end{cases} (3)$$

Với  $y=4$  ta có  $x=1$

Với  $y \geq 0$  ta có  $\frac{3}{\sqrt{3y+1}+4} \leq \frac{1}{2}$

Từ (\*) suy ra  $y \leq 9$  suy ra  $\frac{2}{\sqrt{2y+1}+3} + \frac{2}{\sqrt{y}+2} > \frac{1}{2}$ .

Vậy phương trình (3) vô nghiệm

Kết luận nghiệm của hệ  $(x;y) = (1; 4)$

## VI- KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

### NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Đối với nhiều hệ phương trình việc đánh giá các phương trình của hệ là mấu chốt để giải bài toán một cách nhanh gọn, trong nhiều bài toán gần như là phương pháp duy nhất để giải hệ phương trình. Chúng ta thường dùng bất đẳng thức, tính đơn điệu tăng giảm của các vế của phương trình, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2, nói chung nói đến phương pháp đánh giá chúng cần hết sức linh hoạt, càng đánh giá sát và chặt thì việc giải quyết hệ phương trình càng giảm bớt các trường hợp đồng thời không bỏ sót nghiệm.

### THÍ DỤ MINH HỌA:

#### Dạng 1. Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến các vế phương trình của hệ

★Thí dụ 38. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2012-y} = \sqrt{2012} \\ \sqrt{2012-x} + \sqrt{y} = \sqrt{2012} \end{cases}$$

(Trích đề HSG huyện Thanh Oai năm 2012-2013)

#### Lời giải

Điều kiện :  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2012 \\ 0 \leq y \leq 2012 \end{cases}$

Từ 2 phương trình của hệ ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{2012-y} = \sqrt{2012-x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{2012-x} = \sqrt{y} - \sqrt{2012-y}$$

Nếu  $x > y$  thì :  $-\sqrt{2012-x} > -\sqrt{2012-y} \Rightarrow VT > VP$  (mâu thuẫn)

Tương tự nếu  $x < y \Rightarrow VT < VP$  (mâu thuẫn)

$\Rightarrow x = y$

Do đó: Hệ  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{2012-x} = \sqrt{2012} & (2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow x + 2012 - x + 2\sqrt{x(2012-x)} = 2012$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(2012-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2012$$

Vậy nghiệm của hệ  $(x;y) = (0;0), (2012;2012)$

★**Thí dụ 39.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (2x-y)(x^2+y^2) + 2x^2 + 6x = xy + 3y & (1) \\ \sqrt{3(x^2+y)+7} + \sqrt{5x^2+5y+14} = 4-2x-x^2 & (2) \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Đăk Lăk năm 2018-2019)

**Lời giải**

Phương trình (1):  $(2x-y)(x^2+y^2+x+3) = 0 \Leftrightarrow 2x = y$ .

Thế vào (2):  $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$  (\*).

Đánh giá vế trái của (\*):  $\sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} \geq 5$ .

Và đánh giá vế phải của (\*):  $4-2x-x^2 = 5-(x+1)^2 \leq 5$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $x = -1$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x;y) = (-1;-2)$ .

★**Thí dụ 40.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^2 - 6y - 2 \end{cases}$$

**Lời giải**

Hệ phương trình tương đương với: 
$$\begin{cases} y-2 = -(x+1)^2(x-2) & (1) \\ x-2 = 2(y+1)^2(y-2) & (2) \end{cases}$$

Nếu  $x > 2$  thì  $x-2 > 0$  từ phương trình (1) suy ra  $y-2 < 0$ . Khi đó vế phải phương trình (2) luôn không dương nên  $x-2 \leq 0$  hay  $x \leq 2$  (vô lý với  $x > 2$ )

Tương tự với  $x < 2$  ta cũng suy ra điều vô lý.

Suy ra  $x = 2$  khi đó  $y = 2$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là  $(x, y) = (2, 2)$

## Dạng 2. Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển để đánh giá

Một số bất đẳng thức Cổ điển thường được sử dụng như:

1. Bất đẳng thức Cauchy (tên quốc tế là AM - GM)

Nếu  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  là các số thực không âm thì: 
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki với hai bộ số thực bất kì  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  và  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$  ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại số thực  $k$  ( $k \neq 0$ ) sao cho  $a_i = kb_i$  với  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Một số bất đẳng thức phụ cần nhớ:**

1. Với  $a, b$  dương ta có:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Dấu "=" xảy ra khi  $a = b$ .

2. Với  $ab \geq 1$  thì  $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ . Với  $ab \leq 1$  thì bất đẳng thức đổi chiều.

Dấu "=" xảy ra khi  $a = b = 1$ .

★ **Thí dụ 41.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y}} - 1 & (1) \\ y + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{xy+y} & (2) \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện:  $\begin{cases} x > -1 \\ y > 0 \end{cases}$

Cộng theo vế phương trình (1) và (2) ta được:

$$(x+1) + y + \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) = 2\sqrt{y(x+1)} + \frac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y}} \quad (I)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(x+1) + y \geq 2\sqrt{y(x+1)} \quad (\text{do } x+1 > 0, y > 0) \quad (3)$$

Mặt khác với  $a, b$  dương ta có:

$$(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi  $a = b$

Áp dụng (\*) ta được:  $\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y}} \quad (4)$

Cộng (3) và (4) ta được:

$$(x+1)+y+\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\geq 2\sqrt{y(x+1)}+\frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y}} \quad (\text{II})$$

Từ (I) và (II) suy ra để phương trình có nghiệm thì  $x+1=y$

Thay  $x+1=y$  và phương trình (2) ta được:

$$y+\frac{1}{\sqrt{y}}=2y \Leftrightarrow y\sqrt{y}=1 \Leftrightarrow y^3=1 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=0$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (0, 1)$

★**Thí dụ 42.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện:  $-2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}, 2 \leq y \leq 12$

Với 2 số thực  $a, b$  bất kì ta có:  $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$

Áp dụng ta được: 
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} \leq |x|\sqrt{12-y} \leq \frac{x^2+12-y}{2} \\ \sqrt{y(12-x^2)} \leq \frac{y+12-x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} \leq 12$$

Do đó (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$

Thay  $y = 12 - x^2$  vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} x^3 - 8x - 1 &= 2\sqrt{10-x^2} \\ \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2(1 - \sqrt{10-x^2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left[ x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10-x^2}} \right] &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Do  $x \geq 0$  nên  $x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10-x^2}} > 0$  do đó:  $x=3 \Rightarrow y=3$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (3, 3)$

★**Thí dụ 43.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} = 24 - 6y \end{cases}$$

**Lời giải**

Điều kiện:  $0 \leq x \leq 32$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{32-x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x}) = y^2 - 6y + 21 \\ \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 3 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x + 32 - x) = 64 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{32-x} \leq 8$$

$$(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x})^4 \leq [2(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})]^2 \leq 256 \Rightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \leq 4$$

$$\text{Suy ra } (\sqrt{x} + \sqrt{32-x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x}) \leq 12$$

$$\text{Mặt khác } y^2 - 6y + 21 = (y-3)^2 + 12 \geq 12$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x = 16$  và  $y = 3$  (t/m)

Vậy hệ đã có nghiệm là  $(x; y) = (16; 3)$

★ **Thí dụ 44.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2x}, b = \sqrt{2y}; a, b \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

$$\text{Ta có: VT} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2 \left( \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \right)}.$$

Ta sử dụng bổ đề với  $a, b > 0$  và  $ab \leq 1$  ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)} \leq 0 \text{ (đúng).}$$

$$\text{Vậy VT} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}} = \text{VP}.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x = y$ . Thay vào (2) ta tìm được nghiệm của phương trình.

$$\text{Nghiệm của hệ } (x; y) = \left( \frac{9-\sqrt{73}}{36}; \frac{9-\sqrt{73}}{36} \right), \left( \frac{9+\sqrt{73}}{36}; \frac{9+\sqrt{73}}{36} \right).$$

### Dạng 3. Sử dụng điều kiện có nghiệm của hệ phương trình

1. Hệ có dạng:  $\begin{cases} f^2(x, y) = 0 \\ g^k(x) = 0 \end{cases}$  hệ phương trình có một phương trình là phương

trình bậc hai hai ẩn, ta coi một ẩn là tham số từ phương trình này ta tính delta và giới hạn miền giá trị của nghiệm của ẩn, từ đó giải bài toán

1. Hệ có dạng:  $\begin{cases} \sqrt{A(x, y)} = B(x, y) \\ C(x) = 0 \end{cases}$  từ đây ta có điều kiện:  $\begin{cases} A(x, y) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

từ đó chúng ta có điều kiện ràng buộc giữa x và y.

Phương pháp này rất ít được áp dụng trong các đề thi.

★**Thí dụ 45.** Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} (x-1)^2 = -y^3 - 3y^2 - 3y & (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

#### Lời giải

Viết phương trình (2) của hệ dưới dạng:

$$x^2 + 2(y-1)x + y^2 - 6y + 1 = 0$$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn x tham số y, để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta'_{(x)} = (y-1)^2 - (y^2 - 6y + 1) = 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0.$$

$$\text{Mặt khác (1)} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - (y+1)^3$$

$$\text{Do } y \geq 0 \text{ nên VT} = (x-1)^2 \geq 0 \geq 1 - (y+1)^3$$

Vì thế hệ có nghiệm khi x = 1 và y = 0, thay vào hệ ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x, y) = (1, 0).

★**Thí dụ 45.** Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^3 + xy + 6y} - \sqrt{y^3 + x^2 - 1} = 2 & (2) \end{cases}$

#### Lời giải

Viết phương trình (1) của hệ dưới dạng:

$$10x^2 - 2(y+19)x + 5y^2 - 6y + 41 = 0.$$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn x tham số y, để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta'_{(x)} = (y+19)^2 - 10(5y^2 - 6y + 41) = -49(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Thử lại  $(x, y) = (2, 1)$  thỏa mãn hệ phương trình đã cho

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là  $(x, y) = (2, 1)$ .

★**Thí dụ 46.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 9 & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

### Lời giải

Viết phương trình (1) của hệ dưới dạng:

$$x^2 + (y-3)x + y^2 - 4y + 4 = 0.$$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn  $x$  tham số  $y$ , để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta_{(x)} = (y-3)^2 - 4(y^2 - 4y + 4) = -3y^2 + 10y - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Tương tự viết phương trình (2) của hệ dưới dạng:

$$y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Ta coi đây là phương trình bậc 2 ẩn  $y$  tham số  $x$ , để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta_{(y)} = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) = -3x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Khi đó:  $x^4 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{697}{81} < 9.$

Vì vậy hệ đã cho vô nghiệm

## VII- KỸ THUẬT HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

### NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP:

Phương trình có dạng: 
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ g(x, y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta lấy :  $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$  (3) trong đó  $\alpha$  và  $\beta$  là các hằng số cần tìm để ta có thể chuyển phương trình (3) trở về phương trình tích. Thông thường ta lấy  $\alpha = 1$  hoặc  $\beta = 1$ , nếu bậc của  $f(x)$  cao hơn  $g(x)$  thì chọn  $\alpha = 1$ . Thông thường ta đưa phương trình (3) về các dạng sau:

**Dạng 1:**  $\alpha(mx + ny)^2 + \beta(mx + ny) + \lambda = 0$

**Dạng 2:**  $(x+a)^3 = (y+b)^3$  hoặc  $(ax+b)^3 = (cy+d)^3$

**Dạng 3:**  $(x+a)^4 = (y+b)^4$  hoặc  $(ax+b)^4 = (cy+d)^4$

**Nhận xét:**

- Các hệ phương trình đa thức bậc hai hai ẩn đều giải được bằng phương pháp hệ số bất định.
- Nếu hệ phương trình đa thức bậc cao nhất là 2 ta nghĩ tới dạng 1, nếu bậc cao nhất là 3 ta nghĩ tới dạng 2, bậc cao nhất là 4 ta nghĩ tới dạng 3.

### THÍ DỤ MINH HỌA:

★**Thí dụ 47.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 & (1) \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

**Phân tích:**

Quan sát thấy phương trình (1) và (2) của hệ đều có bậc cao nhất của  $x$  và  $y$  là bậc 2 nên ta tìm cách đưa phương trình về dạng phương trình bậc 2 theo  $mx + ny$ . Để làm được vậy ta nhân 2 vế PT (1) với  $\alpha$ , nhân 2 vế PT (2) với  $\beta$ , rồi cộng lại theo vế với nhau:

$$\begin{aligned} & \alpha(x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x) + \beta(xy + y^2 + 3y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & [\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)xy + (2\alpha + \beta)y^2] + 3(\alpha x + \beta y) + \beta = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha \left[ x^2 + \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right)xy + \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right)y^2 \right] + 3\alpha \left( x + \frac{\beta}{\alpha} \right)y + \beta = 0 \end{aligned}$$

Chúng ta cần tìm  $\alpha$  và  $\beta$  sao cho:

$$\begin{aligned} & x^2 + \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right)xy + \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right)y^2 = \left(x + \frac{\beta}{\alpha}y\right)^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 + \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right)xy + \left(2 + \frac{\beta}{\alpha}\right)y^2 = x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}xy + \frac{\beta^2}{\alpha^2}y^2 \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được 
$$\begin{cases} 2 + \frac{\beta}{\alpha} = 2\frac{\beta}{\alpha} \\ 2 + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 2$$

Ta chọn  $\alpha = 1, \beta = 2$  dẫn tới lời giải sau:

**Lời giải.**

Nhân 2 vế của PT (2) với 2 ta được:  $2xy + 2y^2 + 6y + 2 = 0$  (3)

Cộng (1) và (3) theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & 2xy + 2y^2 + 6y + 2 + x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 4xy + 4y^2) + 3(x + 2y) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + 2y)^2 + 3(x + 2y) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + 2y + 1)(x + 2y + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -2y - 1 \\ x = -2y - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = -2y - 1$  thay vào PT(2) của hệ ta được:

$$-y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = -3 - 2\sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x = -3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Với  $x = -2y - 2$  thay vào PT(2) của hệ ta được:

$$-y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3 + \sqrt{5} \\ y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy hệ có 4 nghiệm là

$$(x; y) = (-3 - 2\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}), (-3 + 2\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}), \left(-3 + \sqrt{5}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(-3 - \sqrt{5}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

★**Thí dụ 48.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 & (1) \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y & (2) \end{cases}$$

**Phân tích:** Quan sát 2 phương trình của hệ ta thấy không thể dùng phương pháp thế hay đưa về phương trình đẳng cấp để giải hệ phương trình. Do  $x, y$  độc lập với nhau, ta hi vọng từ 2 phương trình của hệ kết hợp với nhau để đưa về dạng:

$$(x+a)^3 = (y+b)^3 \quad (*)$$

Ta thấy phương trình (1) là phương trình có bậc 3 (bậc cao nhất) nên không nhân 2 vế của phương trình (1) thêm hệ số. Ta nhân 2 vế của phương trình (2) với hệ số  $\alpha$  và cộng với phương trình (1) được:

$$\begin{aligned} & (x^3 - y^3 - 35) + \alpha(2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y) = 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 - y^3 - 35 + 2\alpha x^2 + 3\alpha y^2 - 4\alpha x + 9\alpha y = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Mà: } (x+a)^3 = (y+b)^3 \Leftrightarrow x^3 - y^3 + (a^3 - b^3) + 3ax^2 + 3a^2x - 3by^2 - 3b^2y = 0 \quad (4)$$

Đồng nhất hệ số (3) và (4) ta được:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 35 \\ 2\alpha = 3a \\ -4\alpha = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = -35 \\ 2\alpha = 3a \\ \frac{3a^2}{3a} = \frac{-4\alpha}{2\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = -35 \\ 2\alpha = 3a \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

Do đó:  $(x-2)^3 = (y+3)^3$  dẫn tới lời giải sau:

**Lời giải.**

Nhân 2 vế của phương trình (2) với  $-3$  ta được:

$$-6x^2 - 9y^2 = -12x + 27y \quad (5)$$

Cộng (5) và (1) vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 - 6x^2 - 9y^2 = -12x + 27y + 35 \\ \Leftrightarrow & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 \\ \Leftrightarrow & (x-2)^3 = (y+3)^3 \\ \Leftrightarrow & x-2 = y+3 \\ \Leftrightarrow & x = y+5 \end{aligned}$$

Thay  $x = y + 5$  vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} & 2(y+5)^2 + 3y^2 = 4(y+5) - 9y \\ \Leftrightarrow & 2y^2 + 20y + 50 + 3y^2 - 4y - 20 + 9y = 0 \\ \Leftrightarrow & y^2 + 5y + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 3 \\ y = -3 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là  $(x, y) = (3; -2), (2; -3)$

★**Thí dụ 49.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 & (1) \\ x^3 - 3y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) & (2) \end{cases}$$

**Phân tích:** Hệ phương trình có bậc 4, cũng như 2 bài toán trên ta không thể giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, đẳng cấp hay là đưa về phương trình tích. Ta hi vọng đưa phương trình về dạng  $(x + \alpha)^4 = (y + \beta)^4$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4 + a = y^4 + a + 240 \\ x^3 - 3y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

Nhân 2 vế phương trình thứ 2 với k và cộng theo vế với phương trình thứ nhất ta được:

$$x^4 + a + k(x^3 - 3y^3) = y^4 + a + 240 + k[3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y)] \quad (*)$$

Mặt khác:

$$(x + \alpha)^4 = (y + \beta)^4 \Leftrightarrow x^4 + 4\alpha x^3 + 6\alpha^2 x^2 + 4\alpha^3 x + \alpha^4 = x^4 + 4\beta x^3 + 6\beta^2 x^2 + 4\beta^3 x + \beta^4 \quad (**)$$

Đồng nhất hệ số (\*) và (\*\*) ta được:

$$\begin{cases} a = \alpha^4 \\ k = 4\alpha \\ -3k = 6\alpha^2 \\ 4k = 4\alpha^3 \\ a + 240 = \beta^4 \\ 2k = 4\beta \\ -12k = 6\beta^2 \\ 32k = 4\beta^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -8 \\ \alpha = -2 \\ a = 16 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

**Lời giải.**

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4 + 16 = y^4 + 256 \\ x^3 - 3y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình thứ 2 với -8 rồi cộng theo vế với phương trình thứ nhất ta được:

$$\begin{aligned} x^4 + 16 - 8(x^3 - 3y^3) &= y^4 + 256 - 8[3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y)] \\ \Leftrightarrow (x - 2)^4 &= (y - 4)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y - 4 \\ x - 2 = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ x = 6 - y \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = y - 2$  thay vào (1) ta được:

$$8y^3 - 24y^2 + 32y + 224 = 0 \Leftrightarrow (y + 2)(8y^2 - 40y + 112) = 0 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = -4$$

Với  $x = 6 - y$  thay vào (1) ta được:

$$y^3 - 9y^2 + 36y - 44 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y^2 - 7y + 22) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là  $(x, y) = (-4; -2), (4; 2)$

## BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

**Câu 1.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y & (2) \end{cases}$$

**Câu 2.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} & (1) \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x + 1) & (2) \end{cases}$$

**Câu 3.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Câu 1.

Lấy phương trình (1) trừ đi 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$$(x - 1)^3 = (2 - y)^3 \Rightarrow x = 3 - y \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là:  $(2, 1); (1, 2)$

### Câu 2.

Lấy phương trình (1) nhân với 25 và cộng theo vế với phương trình (2) nhân 50 nhóm lại ta được:

$$25(3x + y)^2 + 50(3x + y) - 119 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = \frac{7}{5} \\ 3x + y = -\frac{17}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} y = \frac{7}{5} - 3x \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25}\right)$$

$$\text{Với } \begin{cases} y = -\frac{17}{5} - 3x \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm là  $(x, y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25}\right)$ .

### Câu 3.

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + (3y^2 - 24y + 51)x + 3y^2 - 24y + 49 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2 + 3(y-4)^2\right] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1, y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Thay  $x = -1$  vào (1) ta được:  $-1 - 3y^2 = -49 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(x, y) = (-1; 4), (-1, -4)$ .

## CHỦ ĐỀ 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BA ẨN

Hệ phương trình ba ẩn là một chủ đề khó và cũng rất hay gặp trong các đề thi học sinh giỏi và vào các trường chuyên, lớp chọn. Không có phương pháp nào tổng quát để giải các bài toán chủ đề này. Mình sẽ trình bày các ví dụ và lời giải chi tiết để các bạn có thể rút ra các kinh nghiệm để giải khi gặp các bài toán loại hệ ba ẩn này.

### 📁 Dạng 1. Hệ hai phương trình ba ẩn

★**Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x^{2003} + y^{2003} + z^{2003} = 3^{2004} \end{cases}$$

*Lời giải*

Ta có: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx & (1) \\ x^{2003} + y^{2003} + z^{2003} = 3^{2004} & (2) \end{cases}$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

Thế vào (2) ta có:  $3x^{2003} = 3^{2004} \Leftrightarrow x^{2003} = 3^{2003} \Leftrightarrow x = 3$

Do đó  $x = y = z = 3$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:  $(x; y; z) = (3; 3; 3)$

★**Thí dụ 2.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$$

*(Trích đề thi HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014)*

*Lời giải*

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^4 + y^4 + z^4 &= \frac{x^4 + y^4}{2} + \frac{y^4 + z^4}{2} + \frac{z^4 + x^4}{2} \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \\ &= \frac{x^2y^2 + y^2z^2}{2} + \frac{y^2z^2 + z^2x^2}{2} + \frac{z^2x^2 + x^2y^2}{2} \geq xyyz + yzzx + zxxxy \\ &= xyz(x + y + z) = xyz \quad (\text{vì } x + y + z = 1). \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:  $\left(x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{3}\right)$

★**Thí dụ 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

(Trích đề HSG Lâm Đồng năm 2010-2011)

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ z^2 = 2xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - x - y)^2 = 2xy - 4 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ z = 2 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:  $(x, y, z) = (2; 2; -2)$

## Dạng 2. Hệ ba phương trình ba ẩn

★**Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy + z^2 = 2 \\ yz + x^2 = 2 \\ zx + y^2 = 2 \end{cases}$$

**Lời giải**

Từ (1) và (2) ta có:  $(x - z)(x - y + z) = 0$  (4)

Từ (2) và (3) ta có:  $(y - x)(x + y - z) = 0$  (5)

Từ (3); (4); (5) ta có hệ: 
$$\begin{cases} (x - z)(x - y + z) = 0 \\ (y - x)(x + y - z) = 0 \\ zx + y^2 = 2 \end{cases}$$

Để giải hệ trên ta giải 4 hệ:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - z = 0 \\ y - x = 0 \\ zx + y^2 = 2 \end{cases} & \quad \text{(A)} & \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ zx + y^2 = 2 \end{cases} & \quad \text{(B)} \\ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - x = 0 \\ zx + y^2 = 2 \end{cases} & \quad \text{(C)} & \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ zx + y^2 = 2 \end{cases} & \quad \text{(D)} \end{aligned}$$

Giải 4 hệ trên ta được 8 bộ nghiệm của hệ phương trình:

$$(1; 1; 1); (-1; -1; -1); (\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2})$$

$$(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0); (0; \sqrt{2}; \sqrt{2}); (0; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

★**Thí dụ 5.** Tìm các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn: 
$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y - z - x = 3. \\ z - x - y = 5 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2015-2016)

**Lời giải**

Cộng vế với vế các phương trình đã cho ta được  $x + y + z = -9$ .

Phương trình đầu có dạng  $2x - (x + y + z) = 1 \Rightarrow x = -4$ .

Phương trình thứ hai có dạng  $2y - (x + y + z) = 3 \Rightarrow y = -3$ .

Phương trình thứ ba có dạng  $2z - (x + y + z) = 5 \Rightarrow z = -2$ .

Thử lại thỏa mãn. Vậy  $x = -4, y = -3, z = -2$ .

★**Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy = x + y + 1 \\ yz = y + z + 5 \\ zx = z + x + 2 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Vĩnh Phúc năm 2013-2014)

**Lời giải**

Ta có: 
$$\begin{cases} xy = x + y + 1 \\ yz = y + z + 5 \\ zx = z + x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1) = 2 \\ (y-1)(z-1) = 6 \\ (z-1)(x-1) = 3 \end{cases}$$

Nhân từng vế các phương trình của hệ trên ta được

$$((x-1)(y-1)(z-1))^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = 6 \\ (x-1)(y-1)(z-1) = -6 \end{cases}$$

+) Nếu  $(x-1)(y-1)(z-1) = 6$ , kết hợp với hệ trên ta được

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \\ z-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

+) Nếu  $(x-1)(y-1)(z-1) = -6$ , kết hợp với hệ trên ta được

$$\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-2 \\ z-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  $(x; y; z) = (2; 3; 4), (0; -1; -2)$ .

★**Thí dụ 7.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases} \quad \text{trong đó } x, y, z > 0$$

**Lời giải**

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 100 \\ (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 10 & (\text{Do } x, y, z > 0) \\ (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 5 \\ (z+1)(x+1) = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+1 = 5 \\ x+1 = 2 \\ y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là:  $(x; y; z) = (1; 0; 4)$

★**Thí dụ 8.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

**Lời giải**

Nếu chia hai vế của mỗi phương trình cho  $x^2y^2z^2$  thì ta được hệ mới đơn giản hơn.

TH 1.  $xyz = 0$ . Nếu  $x = 0$  thì hệ  $\Leftrightarrow y^2z^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} z = 0 \\ y = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Tương tự với  $y = 0$  và  $z = 0$  ta thu được các nghiệm là

$$(0; 0; t), (0; t; 0), (t; 0; 0), t \in \mathbb{R}$$

- TH 2.  $xyz \neq 0$ . Chia hai vế của mỗi pt trong hệ cho  $x^2y^2z^2$  ta được

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \quad (2).$$

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)^2 = 5 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad (3)$$

Cộng vế 3 phương trình của hệ ta được :

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 & (4) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -3 & (5) \end{cases}$$

- Từ (4) và (1) ta có  $\left(4 - \frac{1}{x}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{9}{x} = 13 \Leftrightarrow x = \frac{9}{13}$

- Từ (4) và (2) ta có  $y = \frac{3}{4}$ . Từ (4) và (3) ta có  $z = \frac{9}{11}$

- Tương tự, từ (5), (1), (2), (3) ta có  $x = -\frac{5}{6}$ ,  $y = -1$ ,  $z = -\frac{5}{4}$ .

- Vậy hệ có tập nghiệm là

$$S = \left\{ (t; 0; 0); (0; t; 0); (0; 0; t); \left(\frac{9}{13}; \frac{3}{4}; \frac{9}{11}\right); \left(-\frac{5}{6}; -1; -\frac{5}{4}\right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

## CHỦ ĐỀ 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

### 📁 Dạng 1. Biện luận về nghiệm của phương trình

★**Thí dụ 1.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} mx + 4y = 20 & (1) \\ x + my = 10 & (2) \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Với giá trị nào của  $m$  hệ đã cho:

- a) Vô nghiệm
- b) Có nghiệm duy nhất
- c) Vô số nghiệm

#### Lời giải

**Cách 1.** Với  $m = 0$  hệ có nghiệm duy nhất: 
$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

Với  $m \neq 0$  hệ phương trình tương đương với: 
$$\begin{cases} y = \frac{-m}{4}x + 5 & (a) \\ y = \frac{-1}{m}x + \frac{10}{m} & (b) \end{cases}$$

Để thấy (a) và (b) là hai đường thẳng trong hệ tọa độ Oxy, số nghiệm của hệ là số giao điểm của hai đường thẳng (a) và (b).

a) Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi (a) và (b) song song tức là:

$$\begin{cases} \frac{-m}{4} = \frac{-1}{m} \\ 5 \neq \frac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy  $m = -2$  thì hệ đã cho vô nghiệm.

b) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (a) và (b) cắt nhau tức là:

$$\frac{-m}{4} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 2$$

c) Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi (a) và (b) trùng nhau tức là:

$$\begin{cases} \frac{-m}{4} = \frac{-1}{m} \\ 5 = \frac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy khi  $m = 2$  hệ đã cho có vô số nghiệm.

**Cách 2.** từ PT(2) suy ra:  $x = 10 - my$  thay vào (1) ta được:

$$y(4 - m^2) = 20 - 10m \quad (3)$$

Ta có số nghiệm của hệ đã cho chính là số nghiệm của Phương trình (3)

a) Hệ đã cho vô nghiệm khi:  $\begin{cases} 20-10m \neq 0 \\ 4-m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

Vậy với  $m = -2$  thì hệ đã cho vô nghiệm.

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi:  $4-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

c) Hệ đã cho vô số nghiệm khi:  $\begin{cases} 20-10m = 0 \\ 4-m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

★**Thí dụ 2.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} x+y = 2m+1 \\ x^2y+y^2x = 2m^2-m-1 \end{cases}$ , với  $m$  là tham số.

a) Giải hệ phương trình với  $m=2$ .

b) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2012-2013)

**Lời giải**

a) Giải hệ phương trình với  $m=2$

Với  $m=2$ , hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x+y = 5 \\ x^2y+y^2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ xy(x+y) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Do đó,  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2-5X+1=0$

Giải ra ra được  $X_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}, X_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ .

Vậy hpt có hai nghiệm:  $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$ .

b) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi  $m$

Hệ đã cho viết lại là:  $\begin{cases} x+y = 2m+1 \\ xy(x+y) = (2m+1)(m-1) \end{cases}$

(1) Nếu  $m = -\frac{1}{2}$  thì hệ trở thành:  $\begin{cases} x+y = 0 \\ xy(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \end{cases}$ .

Hệ có vô số nghiệm.

(2) Nếu  $m \neq -\frac{1}{2}$  thì hệ trở thành:  $\begin{cases} x+y = 2m+1 \\ xy = m-1 \end{cases}$

Nên  $x, y$  là nghiệm phương trình:  $X^2 - (2m+1)X + m-1 = 0$  (\*).

$P/t$  (\*) có  $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m-1) = 4m^2 + 5 > 0, \forall m$  nên luôn có nghiệm.

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

★**Thí dụ 3.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = m \end{cases}$ , trong đó  $m$  là tham số và  $x, y$  là các ẩn số.

a) Giải hệ phương trình với  $m = 7$ .

b) Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hệ phương trình có nghiệm.

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Vĩnh Phúc năm 2017-2018)

**Lời giải**

a) Giải hệ phương trình với  $m = 7$ .

$$\text{Với } m = 7 \text{ ta có: } \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{x} = y \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7 \end{cases} \quad (\text{do } x = 0 \text{ không thỏa mãn}).$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x \frac{2x^2 - 1}{x} - \left( \frac{2x^2 - 1}{x} \right)^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2(2x^2 - 1) - (2x^2 - 1)^2 = 7x^2 \Leftrightarrow 8x^4 - 7x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \left( x^2 + \frac{1}{8} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Với  $x = -1 \Rightarrow y = -1$ . Vậy hệ phương trình có hai nghiệm  $(x; y) = (-1; -1), (1; 1)$ .

b) Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hệ phương trình có nghiệm.

Ta có  $x = 0$  không thỏa mãn suy ra  $x \neq 0$ .

Rút  $y$  từ PT thứ nhất rồi thế vào PT thứ hai ta có:

$$4x^2 + 4x \frac{2x^2 - 1}{x} - \left( \frac{2x^2 - 1}{x} \right)^2 = m$$

Hệ có nghiệm  $\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2(2x^2 - 1) - (2x^2 - 1)^2 = mx^2$  có nghiệm khác 0.

$\Leftrightarrow 8x^4 - mx^2 - 1 = 0$  có nghiệm khác 0. Đặt  $t = x^2, t \geq 0$ . Thay vào phương trình trên ta được  $8t^2 - mt - 1 = 0$  (1). Như vậy yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow$  (1) có nghiệm dương.

Để thấy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu do  $ac < 0$  suy ra (1) luôn có một nghiệm dương. Do đó với mọi số thực  $m$  hệ phương trình luôn có nghiệm.

**📁 Dạng 2. Tìm giá trị của tham số để nghiệm của hệ thỏa mãn một điều kiện cho trước**

★**Thí dụ 4.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m-4 & (1) \\ x + (m-1)y = m & (2) \end{cases}$$

Tìm  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn  $x + y = 2$ .

**Lời giải**

**Bước 1.** Tìm điều kiện để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Từ (2) suy ra:  $x = m - (m-1)y$ . Thế vào  $x = m - (m-1)y$  vào (1) ta được:

$$(m-1)(m - (m-1)y) = 3m-4 \Leftrightarrow y(m^2 - 2m) = m^2 - 4m + 3 \quad (3)$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất tức là:

$$m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \quad (*)$$

**Bước 2.** Tìm  $m$  thỏa mãn điều kiện  $x + y = 2$ .

Với điều kiện  $m \neq 0$  và  $m \neq 2$  hệ đã cho có nghiệm duy nhất là: 
$$\begin{cases} x = \frac{3m-2}{m} \\ y = \frac{m-2}{m} \end{cases}$$

Với điều kiện  $x + y = 2$  ta có:  $\frac{3m-2}{m} + \frac{m-2}{m} = 2 \Leftrightarrow 4m - 4 = 2m \Leftrightarrow m = 2 \quad (**)$

Từ (\*) và (\*\*) suy ra không tồn tại  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

★**Thí dụ 5.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$$

Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  thỏa mãn:  $y = x^2$

**Lời giải**

Từ phương trình thứ 2 suy ra:  $y = -m - x$ . Thế vào phương trình thứ nhất ta được:

$$mx - m - x = -1 \Rightarrow x(m-1) = m-1 \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất phương trình (\*) phải có nghiệm duy nhất tức là  $m \neq 1$ .

Khi đó, hệ có nghiệm duy nhất là 
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -m-1 \end{cases}$$

Ta có:  $y = x^2 \Leftrightarrow -m-1 = 1 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy  $m = -2$  là giá trị cần tìm.

★**Thí dụ 6.** Tìm nghiệm nguyên  $a$  để hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 - a \\ x + 2y = 3a + 1 \end{cases}$$

Có nghiệm  $(x; y)$  sao cho  $T = \frac{y}{x}$  là số nguyên.

(Trích đề tuyển sinh lớp 10 Chuyên Tây Ninh năm 2014-2015)

**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} 2x - 3y = 2 - a \\ x + 2y = 3a + 1 \end{cases}$  hệ đã cho có nghiệm  $(x, y)$  với  $\begin{cases} x = a + 1 \\ y = a \end{cases}$

$$\text{Mà } T = \frac{y}{x} = \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$$

Vì  $a$  nguyên, để  $T$  nguyên thì điều kiện là  $\begin{cases} a+1=1 \\ a+1=-1 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases}$

★**Thí dụ 7.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$ .

Tìm các giá trị của  $m$  để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt  $(x_1; y_1)$  và  $(x_2; y_2)$  thỏa mãn điều kiện  $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$ .

(Trích đề thi HSG tỉnh Hải Phòng năm học 2016-2017)

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 & (1) \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m & (2) \end{cases}$$

Ta có (1)  $\Leftrightarrow x^3y^2 - x^2y^2 - 2x^2y + 2xy + 3x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2y^2 - 2xy + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (xy-1)^2 + 2 = 0 \text{ (Vô lý)} \end{cases}$$

Thay  $x = 1$  vào phương trình (2) ta được  $y^2 - y - 3m + 1 = 0$  (3)

Để phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\Delta = 1 + 4(3m - 1) > 0 \Leftrightarrow 12m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Theo đề bài:  $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 + y_1 + y_2 + y_1y_2 = 0$  (4)

do  $x_1 = x_2 = 1$ .

Với  $m > \frac{1}{4}$  theo hệ thức Vi-ét cho phương trình (3) ta có :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1y_2 = 1 - 3m \end{cases} \text{ thay vào (4) ta có: } 5 + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận:  $m = 2$ .

★**Thí dụ 8.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi  $m = \sqrt{2}$ .

b) Tìm giá trị của  $m$  để hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn hệ

$$\text{thức } x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}.$$

(Trích đề vào lớp 10 Chuyên Quảng Nam năm 2008-2009)

**Lời giải**

a) Khi  $m = \sqrt{2}$  ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2} + 5}{5} \\ y = \sqrt{2}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2} + 5}{5} \\ y = \frac{5\sqrt{2} - 6}{5} \end{cases}$$

b) Giải tìm được:  $x = \frac{2m + 5}{m^2 + 3}; y = \frac{5m - 6}{m^2 + 3}$

Thay vào hệ thức  $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$ ; ta được  $\frac{2m + 5}{m^2 + 3} + \frac{5m - 6}{m^2 + 3} = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$

Giải tìm được  $m = \frac{4}{7}$

★**Thí dụ 9.** Định  $m$  nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên 
$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

**Lời giải**

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx + 4y = 2m + 2 \\ 2mx + m^2y = 2m^2 - m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = 2m^2 - 3m - 2 = (m - 2)(2m + 1) \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì  $m^2 - 4 \neq 0$  hay  $m \neq \pm 2$

Vậy với  $m \neq \pm 2$  hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} y = \frac{(m - 2)(2m + 1)}{m^2 - 4} = \frac{2m + 1}{m + 2} = 2 - \frac{3}{m + 2} \\ x = \frac{m - 1}{m + 2} = 1 - \frac{3}{m + 2} \end{cases}$$

Để  $x, y$  là những số nguyên thì  $m + 2 \in U(3) = \{1; -1; 3; -3\}$

Vậy:  $m + 2 = \pm 1, \pm 3 \Rightarrow m = -1; -3; 1; -5$

## BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỔNG HỢP

**Câu 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases}.$$

*(Trích đề HSG huyện Hạ Hòa năm 2015-2016)*

**Câu 2.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y^2 + 2xy + 4 = 2x + 5y \\ 5x^2 + 7y - 18 = \sqrt{x^4 + 4} \end{cases}.$$

*(Trích đề Chuyên Bắc Ninh năm 2019-2020)*

**Câu 3.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 8xy + 22y + 12x + 25 = \frac{1}{x^3} \\ y^3 + 3y = (x+5)\sqrt{x+2} \end{cases}.$$

*(Trích đề Chuyên Đà Nẵng năm 2019-2020)*

**Câu 4.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x+y)^2 = xy + 3y - 1 & (1) \\ x+y = \frac{x^2 + y + 1}{1+x^2} & (2) \end{cases}$$

*(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2019-2020)*

**Câu 5.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x+y = 4 \\ x^3 + y^3 = 4x^2 + 4y^2 - 12 \end{cases}$$

*(Trích đề Chuyên Lâm Đồng năm 2019-2020)*

**Câu 6.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x-y)^2 + 4 = 3y - 5x + 2\sqrt{(x+1)(y-1)} \\ \frac{3xy - 5y - 6x + 11}{\sqrt{x^3 + 1}} = 5 \end{cases}$$

*(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2019-2020)*

**Câu 7.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+3} = \sqrt{2x+3y+1} \\ x(y+1) - 4(x+y) + 54 = 0 \end{cases}.$$

*(Trích đề Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2019-2020)*

**Câu 8.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + 6y = 13 \\ 2x^2 = (x + 2y - 3)(2 - x) \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Trị năm 2019-2020)

**Câu 9.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (3x - y - 1)\sqrt{y + 1} + 3x - 1 = y\sqrt{3x - y} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Tiền Giang năm 2019-2020)

**Câu 10.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - 3y - 2 + \sqrt{y(x - y - 1)} + x = 0 \\ 3\sqrt{8 - x} - \frac{4y}{\sqrt{y + 1} + 1} = x^2 - 14y - 8. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2018-2019)

**Câu 11.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy - x - y = -5 \\ \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{1}{y^2 - 2y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hà Tĩnh năm 2018-2019)

**Câu 12.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y - \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 3 \\ x + y + \frac{6}{x + y} = -5 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Định năm 2018-2019)

**Câu 13.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{xy + 2} \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Lam Sơn năm 2018-2019)

**Câu 14.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = (x + 1)(y + 1) \\ \left(\frac{x}{y + 1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x + 1}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

**Câu 15.** (Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + 2y = m + 3 \\ 2x - 3y = m \end{cases} \quad (\text{I}) \quad (m \text{ là tham số})$$

a) Giải hệ phương trình (1) khi  $m = 1$

b) Tìm  $m$  để hệ (1) có nghiệm  $(x; y)$  sao cho  $P = 98(x^2 + y^2) + 4m$  đạt giá trị nhỏ nhất

(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

**Câu 16.** Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Vĩnh Phúc năm 2018-2019)

**Câu 17.** (Trích đề Chuyên Bến Tre năm 2018-2019)

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bến Tre năm 2018-2019)

**Câu 18.** Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x = 1 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Thái Bình năm 2018-2019)

**Câu 19.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy(x+1)(y+1) = 72 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Lâm Đồng năm 2018-2019)

**Câu 20.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ 3x^2 + 2xy - 3y^2 = 30 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(Trích đề Chuyên Đồng Nai năm 2018-2019)

**Câu 21.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 - x - y^2 + y = 0 \\ 2x^2 - y^2 + x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

**Câu 22.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 4x + 2y = 2 \\ x(x+1) + y(y+1) = 4 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2018-2019)

**Câu 23.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x+3)(x-1) = (y-2)(x+3) \\ (x-1)\sqrt{y^2 - 5y + 8} = (y-2)^2 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2018-2019)

**Câu 24.** Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình : 
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ 16x^2 - 8xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Tuyên Quang năm 2018-2019)

**Câu 25.** Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Thái Nguyên năm 2018-2019)

**Câu 26.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ x^2 - 3xy - y^2 = 3 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2016-2017)

**Câu 27.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$
.

(Trích đề Chuyên Quốc Học Huế năm 2018-2019)

**Câu 28.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{2x - y - 9} - 36 + x^2 = 0 \\ y^2 - xy + 9 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Vĩnh Long năm 2018-2019)

**Câu 29.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 & (1) \\ x^2 + y^5 = x^3 + y^2 & (2) \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2018-2019)

**Câu 30.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \\ \sqrt{5x - 6} + \sqrt{16 - 3y} = 2x^2 - 2x + y - 4. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bắc Giang năm 2018-2019)

**Câu 31.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ \frac{4x^2}{y} + \frac{6x}{y^2} = 1 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

**Câu 32.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 2y = xy + 2x \\ \sqrt{x + y} = xy - 2 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

**Câu 33.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - 3y - 2 + \sqrt{y(x - y - 1)} + x = 0 \\ 3\sqrt{8 - x} - \frac{4y}{\sqrt{y + 1} + 1} = x^2 - 14y - 8 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2018-2019)

**Câu 34.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - 2y + xy = 2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$
.

(Trích đề Chuyên Quảng Ngãi năm 2018-2019)

**Câu 35.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3} \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

(Trích đề Chuyên Quảng Ngãi năm 2018-2019)

**Câu 36.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 4\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3(x+4)} = 3y(y+1) + 10 \\ (x+2)^3 + x = y(y^2+1) - 2 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Đà Nẵng năm 2018-2019)

**Câu 37.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases}.$$

(Trích đề Chuyên Bến Tre năm 2018-2019)

**Câu 38.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2018-2019)

**Câu 39.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + x - y = 0 \\ \sqrt{2x+y-2} + 2 - 2x = 0. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Nam Định năm 2016-2017)

**Câu 40.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 \\ xy = x + 1 \end{cases}.$$

(Trích đề Chuyên Trà Vinh năm 2018-2019)

**Câu 41.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Tiên Giang năm 2018-2019)

**Câu 42.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x+y)^2 = xy + 3y - 1 \\ x+y = \frac{x^2+y+1}{1+x^2} \end{cases}.$$

(Trích đề Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

**Câu 43.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Ninh Bình năm 2015-2016)

**Câu 44.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 & (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2 + 3x}) = 3 & (2) \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2015-2016)

**Câu 45.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 - xy^2 + 1} + 3\sqrt{x-1} = xy^2 & (2). \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2017-2018)

**Câu 46.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 0 \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 4 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quốc Học Huế năm 2010-2011)

**Câu 47.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x - 2y + 3 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Phan Bội Châu năm 2012-2013)

**Câu 48.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x(x+4)(4x+y) = 6 \\ x^2 + 8x + y = -5 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2015-2016)

**Câu 49.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ x^2 + y^2 = 2a^2 + 4a - 1 \end{cases} \quad (\text{với } a \text{ là tham số}).$$

1. Giải hệ khi  $a = 1$ .
2. Tìm  $a$  để hệ đã cho có nghiệm  $(x; y)$  thoả mãn tích  $x.y$  đạt giá trị nhỏ nhất

(Trích đề Chuyên Lam Sơn năm 2011-2012)

**Câu 50.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ xy + 3y^2 + x = 3 \end{cases}.$$

(Trích đề Chuyên Quảng Ninh năm 2017-2018)

**Câu 51.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} (m+1)x - (m+1)y = 4m \\ x + (m-2)y = 2 \end{cases}, \text{ với } m \in \mathbb{R}$$

- a. Giải hệ đã cho khi  $m = -3$
- b. Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

(Trích đề Chuyên Gia Lai năm 2012-2013)

**Câu 52.** Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} |x| + |y - 3| = 1 \\ y - |x| = 3 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Đồng Nai năm 2012-2013)

**Câu 53.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

1. Giải hệ phương trình khi  $m = 2$ ;

2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $m$  thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  thoả mãn:  $2x + y \leq 3$ .

(Trích đề Chuyên Thái Bình năm 2009-2010)

**Câu 54.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2xy + z^2 = 1 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2009-2010)

**Câu 55.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - x = x^2y - y \\ \sqrt{2(x^4 + 1)} - 5\sqrt{|x|} + \sqrt{y} + 2 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2009-2010)

**Câu 56.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2xy + z^2 = 1 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Tuyên Quang năm 2012-2013)

**Câu 57.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{xy} \\ x^2 + y^2 = 18 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2016-2017)

**Câu 58.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x^2 + 8y^2 + 12xy = 23 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội năm 2010-2011)

**Câu 59.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2 + 2012}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2012}\right) = 2012 \\ x^2 + z^2 - 4(y+z) + 8 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2012-2013)

**Câu 60.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ xy + 3x^2 = 4 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Hải Dương năm 2009-2010)

**Câu 61.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 & (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2 + 3x}) = 3 & (2) \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2015-2016)

**Câu 62.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x+2y-2)(2x+y) = 2x(5y-2) - 2y \\ x^2 - 7y = -3 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2013-2014)

**Câu 63.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi  $m = \sqrt{2}$ .

b) Tìm giá trị của  $m$  để hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn hệ thức

$$x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}.$$

(Trích đề Chuyên Quảng Ninh năm 2008-2009)

**Câu 64.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + y = 9 \\ \sqrt{y^2 + 9} + x = 9 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Phú Yên năm 2011-2012)

**Câu 65.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2xy + x + 2y = 20 \\ \frac{1}{y} + \frac{2}{x} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2013-2014)

**Câu 66.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ \sqrt{x-3} + \sqrt{y+7} = 5. \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Đà Nẵng năm 2009-2010)

**Câu 67.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Bình Phước năm 2012-2013)

**Câu 68.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + xy - 4x = -6 \\ y^2 + xy = -1 \end{cases}$$

(Trích đề Chuyên Quảng Nam năm 2012-2013)

**Câu 69.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - \frac{6}{y} = 2 \\ 3x - \frac{8}{y^3} = -2. \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Điện Biên năm 2018-2019)

**Câu 70.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) - x - y = -3. \end{cases}$$

3 (Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2018-2019)

**Câu 71.**

1) Cho  $(x, y)$  là nghiệm của hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - y = m + 1 \\ 2x - 3y = m + 3 \end{cases}$$
 (với  $m$  là tham số thực).

Tìm  $m$  để biểu thức  $P = x^2 + 8y$  đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 - y^3 = -1 \end{cases}$$
 (với  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ ).

(Trích đề HSG tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019)

**Câu 72.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 2y + 1 \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 2x + 1 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2018-2019)

**Câu 73.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy - 2x + y = 6 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Bình Phước năm 2018-2019)

**Câu 74.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Sơn La năm 2018-2019)

**Câu 75.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (y-2x)(1-y-x) = 2x^2 - x \\ x(y-1) + \sqrt[3]{x^2 - y} = 2 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Ninh Bình năm 2018-2019)

**Câu 76.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{(x-y)^2 - 1}{xy} - \frac{2(x+y-1)}{x+y} = -4 \\ 4x^2 + 5y + \sqrt{x+y-1} + 6\sqrt{x} = 13 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Nam Định năm 2018-2019)

**Câu 77.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Bắc Ninh năm 2018-2019)

**Câu 78.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} \\ (3x+2y)(y+1) = 4-x^2 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2017-2018)

**Câu 79.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2017-2018)

**Câu 80.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
 (với  $m$  là tham số và  $x, y$  là ẩn số).

Tìm các giá trị  $m$  nguyên để hệ phương trình có nghiệm  $(x, y)$  nguyên.

(Trích đề HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2017-2018)

**Câu 81.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 2 \\ x^3 = x + y \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2017-2018)

**Câu 82.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 = 2 + xy^2 \\ y^2 = 2 + x^2y \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2016-2017)

**Câu 83.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0 \\ 2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0. \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2016-2017)

**Câu 84.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Quảng Nam năm 2016-2017)

**Câu 85.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2016-2017)

**Câu 86.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{6x-3} \\ 2y^4(5x^2 - 17x + 6) = 6 - 15x \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2016-2017)

**Câu 87.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 1 \end{cases}$$

(Trích đề HSG TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

**Câu 88.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + 8y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2015-2016)

**Câu 89.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2015-2016)

**Câu 90.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4(4x - y) \\ y^2 - 5x^2 = 4 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2015-2016)

**Câu 91.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{y - x + 1} = 2 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2015-2016)

**Câu 92.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy + y - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Phú Thọ năm 2015-2016)

**Câu 93.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \\ x^2 + y - \sqrt{7x^2 - 3} = 0. \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Nam Định năm 2015-2016)

**Câu 94.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x - 5y = -20 \\ (1+x)(1+2x)(1+3x) = (1+3y)(1+3y+2x^2) \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Đắk Lắk năm 2015-2016)

**Câu 95.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 4y = 24 \\ 3x + (2x + y - 1)(x - y + 1) = 11 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Vĩnh Long năm 2015-2016)

**Câu 96.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$$

(Trích đề HSG TP Hà Nội năm 2015-2016)

**Câu 97.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + xy + zx = 48 \\ y^2 + xy + yz = 12 \\ z^2 + zx + yz = 84 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Đà Nẵng năm 2015-2016)

**Câu 99.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2014-2015)

**Câu 100.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 2x + 4y \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2014-2015)

**Câu 101.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x^2 - 1)y + (y^2 - 1)x = 2(xy - 1) \\ 4x^2 + y^2 + 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015)

**Câu 102.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x^2y^2 \\ (x + y)(1 + xy) = 4x^2y^2 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Thanh Hóa năm 2014-2015)

**Câu 103.**

Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$$
 (với  $m$  là tham số).

a) Giải hệ phương trình khi  $m = 10$ ;

b) Tìm  $m$  để hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}.$$

(Trích đề HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015)

**Câu 104.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 4x + 2y = 2 \\ x(x + 1) + y(y + 1) = 4 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2014-2015)

**Câu 105.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-2} + \sqrt{y-3} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$
.

(Trích đề HSG tỉnh Khánh Hòa năm 2014-2015)

**Câu 106.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hải Dương năm 2014-2015)

**Câu 107.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 4x^3 - y^3 = x + 2y \\ 52x^2 - 82xy + 21y^2 = -9 \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Hưng Yên năm 2014-2015)

**Câu 108.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

(Trích đề HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015)

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Câu 1.

Thay  $y=0$  vào hệ phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Với  $y \neq 0$  ta có:

$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ y(x+y)^2 - 2(x^2+1) = 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2+1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt  $u = \frac{x^2+1}{y}$ ,  $v = x+y$

Hệ phương trình trở thành: 
$$\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{cases}$$

- Với  $v=3, u=1$  ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{cases}$$

- Với  $v=-5, u=9$  ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) \in \{(1; 2); (-2; 5)\}$ .

### Câu 2.

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + 4 = 2x + 5y & (1) \\ 5x^2 + 7y - 18 = \sqrt{x^4 + 4} & (2) \end{cases}$$

ĐK:  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - y + 2x(y - 1) + 4(1 - y) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y + 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$$

Với  $y = 1$  thay vào (2) ta được

$$5x^2 - 11 = \sqrt{x^4 + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{11}{5} \\ 24x^4 - 110x^2 + 117 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{55 + \sqrt{217}}{24} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{55 + \sqrt{217}}{24}}.$$

Với  $y = 4 - 2x$  thay vào (2) ta được  $5x^2 + 28 - 14x - 18 = \sqrt{x^4 + 4}$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2) + \sqrt{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} - 6(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -3\sqrt{x^2 - 2x + 2} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 4(x^2 - 2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left( \sqrt{\frac{55 + \sqrt{217}}{24}}; 1 \right); \left( -\sqrt{\frac{55 + \sqrt{217}}{24}}; 1 \right); \left( \frac{5 - \sqrt{7}}{3}; \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3} \right); \left( \frac{5 + \sqrt{7}}{3}; \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \right).$$

### Câu 3.

Điều kiện:  $x > -2; x \neq 0$

$$\begin{cases} 8xy + 22y + 12x + 25 = \frac{1}{x^3} & (1) \\ y^3 + 3y = (x + 5)\sqrt{x + 2} & (2) \end{cases}$$

Xét pt (2) ta có:

$$\begin{aligned}
y^3 + 3y &= (x+2)\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+2} \\
\Leftrightarrow y^3 - (\sqrt{x+2})^3 + 3(y - \sqrt{x+2}) &= 0 \\
\Leftrightarrow (y - \sqrt{x+2})(y^2 + y\sqrt{x+2} + x+2+3) &= 0 \\
\Leftrightarrow y &= \sqrt{x+2}
\end{aligned}$$

Thay  $y = \sqrt{x+2}$  ( $y \geq 0$ ) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}
8x\sqrt{x+2} + 22\sqrt{x+2} + 12x + 25 &= \frac{1}{x^3} \\
\Leftrightarrow 8(x+2)\sqrt{x+2} + 12(x+2) + 6\sqrt{x+2} + 1 &= \frac{1}{x^3} \\
\Leftrightarrow (2\sqrt{x+2} + 1)^3 &= \left(\frac{1}{x}\right)^3 \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} + 1 &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra  $0 < x < 1$  ta có phương trình trên tương đương

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{x+2} &= 1-x \\
\Rightarrow 4x^2(x+2) &= (1-x)^2 \\
\Leftrightarrow (x+1)^2(4x-1) &= 0 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \\
\Rightarrow y &= \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{3}{2} \text{ (thỏa đk)}
\end{aligned}$$

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$

#### Câu 4.

Để thấy  $y = 0$  không là nghiệm của (1). Với  $y \neq 0$ , ta có:

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 3y - 1 &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y + 1 = 4y - xy - y^2 \\ x^2 + 1 = 3y - xy - y^2 \end{cases} \\
\Rightarrow \frac{x^2 + y + 1}{x^2 + 1} = \frac{y(4 - x - y)}{y(3 - x - y)} = \frac{x + y - 4}{x + y - 3} &\quad (3)
\end{aligned}$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow x + y = \frac{x + y - 4}{x + y - 3} \quad (4)$$

Đặt  $x + y = a$ . Phương trình (4) trở thành:

$$a = \frac{a-4}{a-3} \Rightarrow a^2 - 3a = a - 4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$$

Thay  $y = 2 - x$  vào (2) được:

$$2 = \frac{x^2 + 2 - x + 1}{1 + x^2} \Leftrightarrow 2 + 2x^2 = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}$$

Thử lại ta thấy  $\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)$  và  $\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)$  là các nghiệm của hệ đã cho.

Vậy ...

### Câu 5.

Biến đổi được phương trình  $x^3 + y^3 = 4x^2 + 4y^2 - 12$  về dạng:

$$(x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 4x^2 + 4y^2 - 12 \Leftrightarrow 4(x^2 + y^2 - xy) = 4x^2 + 4y^2 - 12$$

Suy ra được:  $xy = 3$

Qui việc tìm  $x, y$  về giải phương trình:  $t^2 - 4t + 3 = 0$

Tìm được 2 cặp nghiệm:  $(x = 1; y = 3); (x = 3; y = 1);$

### Câu 6.

$$\begin{cases} (x - y)^2 + 4 = 3y - 5x + 2\sqrt{(x+1)(y-1)} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3xy - 5y - 6x + 11}{\sqrt{x^3 + 1}} = 5 & (2) \end{cases}$$

ĐK:  $x \geq -1; y \geq 1$

Đặt  $\sqrt{x+1} = a, \sqrt{y-1} = b$  ( $a > 0, b \geq 0$ )  $\Rightarrow x = a^2 - 1; y = b^2 + 1$

Phương trình (1) trở thành:

$$(a^2 - b^2 - 2)^2 + 4 = 3(b^2 + 1) - 5(a^2 - 1) + 2ab$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - 2)^2 + 4 - 3b^2 + 5a^2 - 8 - 2ab = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - 2)^2 + 4 + 4(a^2 - b^2 - 2) + a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 [(a + b)^2 + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y-1} \Rightarrow y = x + 2 \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow 3xy - 5y - 6x + 11 = 5\sqrt{x^3 + 1} \quad (4)$$

Thay (3) vào (4) được:

$$\begin{aligned} 3x(x+2) - 5(x+2) - 6x + 11 &= 5\sqrt{x^3 + 1} \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 5x - 10 - 6x + 11 &= 5\sqrt{x^3 + 1} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 1 &= 5\sqrt{x^3 + 1} \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1) - 2(x+1) - 5\sqrt{x+1}\sqrt{x^2 - x + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x+1}) &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} - 2\sqrt{x+1} &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - x + 1 &= 4(x+1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ (TMĐK)} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \Rightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x; y) \in \left\{ \left( \frac{5 + \sqrt{37}}{2}; \frac{9 + \sqrt{37}}{2} \right); \left( \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; \frac{9 - \sqrt{37}}{2} \right) \right\}.$$

### Câu 7.

Điều kiện:  $x + y + 3 \geq 0$  và  $2x + 3y + 1 \geq 0$ .

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có  $x + y + 3 = 2x + 3y + 1$ , tức  $x = 2 - 2y$ .

Từ đây và các điều kiện  $x + y + 3 \geq 0, 2x + 3y + 1 \geq 0$ , ta phải có  $5 - 2y \geq 0$  và  $5 - y \geq 0$ , tức  $y \leq \frac{5}{2}$ .

Bây giờ, thay  $x = 2 - 2y$  vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$(2 - 2y)(y + 1) - 4(2 - y) + 54 = 0 \text{ hay } -2(y + 4)(y - 6) = 0.$$

Do  $y \leq \frac{5}{2}$  nên từ đây, ta có  $y = -4$  (tương ứng  $x = 10$ ). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $(x, y) = (10, -4)$ .

### Câu 8.

$$\begin{cases} x + 6y = 13 \\ 2x^2 = (x + 2y - 3)(2 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13 - x}{6} \\ 2x^2 = \left( x + 2 \cdot \frac{13 - x}{6} - 3 \right) (2 - x) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13-x}{6} \\ 2x^2 = \frac{2(4-x^2)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13-x}{6} \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm  $(x; y)$  của hệ phương trình là:  $(1; 2), \left(-1; \frac{7}{3}\right)$ .

### Câu 9.

$$\begin{cases} (3x-y-1)\sqrt{y+1}+3x-1=y\sqrt{3x-y} & (1) \\ x^2+y^2=5 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện  $3x-y \geq 0; y \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{3x-y}-1)(\sqrt{y+1}+1)(\sqrt{3x-y}-\sqrt{y+1}+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-y}-1=0 & (3) \\ \sqrt{3x-y}-\sqrt{y+1}+2=0 & (4) \end{cases}$$

(3)  $\Leftrightarrow y = 3x - 1$  thế vào (2), ta được

$$x^2 + (3x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow 10x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

Loại nghiệm  $(x; y) = \left(-\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}\right)$

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{3x-y} + \frac{3-y}{2+\sqrt{y+1}} = 0 \quad (5)$$

Từ (2), ta có:  $|y| \leq \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3-y > 0 \Rightarrow (5)$  vô nghiệm

Vậy tập nghiệm  $S = \{(1; 2)\}$

### Câu 10.

Điều kiện  $x \leq 8; y \geq -1; x-y \geq 0$ .

$$\text{Hệ đã cho tương đương } \begin{cases} x-3y-2+\sqrt{(x-y)(y+1)}=0 & (1) \\ 3\sqrt{8-x}-\frac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét:  $y = -1$  và  $y = 0$  không thỏa mãn, do đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-y}{y+1} + \sqrt{\frac{x-y}{y+1}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 1 \Leftrightarrow x = 2y + 1. \text{ Thế vào (2) ta được phương trình}$$

$$\begin{aligned}
& 4\sqrt{y+1} - 3\sqrt{7-2y} + 4y^2 - 10y - 11 = 0 \\
& \Leftrightarrow 4(\sqrt{y+1} - 2) - 3(\sqrt{7-2y} - 1) + 4y^2 - 10y - 6 = 0 \\
& \Leftrightarrow (y-3) \left( \frac{2}{\sqrt{y+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{7-2y}+1} + 2y+1 \right) = 0. \quad (3) \\
& \text{Với } -1 < y \leq \frac{7}{2} \text{ thì } \frac{2}{\sqrt{y+1}+2} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{7-2y}+1} > \frac{3}{4}; 2y+1 > -1 \\
& \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{y+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{7-2y}+1} + 2y+1 > 0. \\
& \text{Do đó } (3) \Leftrightarrow y-3=0 \Leftrightarrow y=3. \\
& \Rightarrow x=7 \text{ thỏa mãn điều kiện. Vậy nghiệm của hệ là } (x; y) = (7; 3).
\end{aligned}$$

**Câu 11.**

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \neq 0; x \neq 2 \\ y \neq 0; y \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ phương trình (1) ta có: } xy - x - y = -5 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = -4$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x-1 = a \\ y-1 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a^2 - 1 \\ y^2 - 2y = b^2 - 1 \\ ab = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{y^2-2y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} = \frac{2}{3} \\
& \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2}{a^2b^2-a^2-b^2+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-2}{17-a^2-b^2} = \frac{2}{3} \\
& \Leftrightarrow 3(a^2+b^2) - 6 = 34 - 2(a^2+b^2) \\
& \Leftrightarrow a^2+b^2 = 8 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 8 \\
& \Leftrightarrow a+b = 8 + 2ab = 8 + 2(-4) = 0 \\
& \Leftrightarrow b = -a \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \pm 2
\end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là  $(-1; 3)$  và  $(3; -1)$

**Câu 12.**

$$\text{Đặt } S = x + y \neq 0; P = xy \neq 0, \text{ ta có: } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} S - \frac{4S}{P} = 3 \\ S + \frac{6}{S} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 5S + 6 = 0 \\ P = \frac{4S}{S-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -2; P = \frac{8}{5} \\ S = -3; P = 2 \end{cases}$$

Khi đó:  $S = 2; P = \frac{8}{5}$  khi và chỉ khi  $x, y$  là nghiệm của phương trình:  $t^2 + 2t + \frac{8}{5} = 0$  vô

nghiệm ( $\Delta' = \frac{-3}{5} \leq 0$ )

$S = -3; P = 2$  khi và chỉ khi  $x, y$  là nghiệm của phương trình:

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1; t_2 = -2$$

Vai trò của  $x, y$  trong hệ (2) như nhau, do vậy hệ (2) có hai nghiệm:  $(x = -1; y = -2), (x = -2; y = -1)$

### Câu 13.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ y^2 - 1 \geq 0 \\ xy + 2 \geq 0 \\ x, y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ y^2 \geq 1 \\ xy \geq -2 \end{cases}$$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{xy + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 y^2 (1) \\ x^2 + y^2 - 2 + 2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} = xy + 2 (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 y^2 - 2 + 2\sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1} = xy + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 = xy + 2 \Leftrightarrow (xy)^2 - xy - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - 2)(xy + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \text{ (tm)} \\ xy = -1 \text{ (tm)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x + y)^2 = -1 \text{ (ktm)} \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (x + y)^2 = 8 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = -2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = -\sqrt{2} \\ x = y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn  $(\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

### Câu 14.

Điều kiện:  $x \neq -1; y \neq -1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = (x+1)(y+1) \\ \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) + y(y+1) = (x+1)(y+1) \\ \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = 1 \\ \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Đặt  $a = \frac{x}{y+1}$ ;  $b = \frac{y}{x+1}$ . Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ 2a^2 - 2a + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ 2a(a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y+1} = 0 \\ \frac{y}{x+1} = 1 \\ \frac{x}{y+1} = 1 \\ \frac{y}{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{tm})$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (1; 0)$  hoặc  $(x; y) = (0; 1)$

### Câu 15.

Thay giá trị  $m = 1$  vào hệ phương trình ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy với  $m = 1$  thì hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (2; 1)$

a) Ta có  $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow (I)$  luôn có nghiệm  $(x; y)$  với mọi  $m$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2m + 6 \\ 2x - 3y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 - 2y \\ 7y = m + 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 - 2y \\ y = \frac{m+6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5m+9}{7} \\ y = \frac{m+6}{7} \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:  $P = 98(x^2 + y^2) + 4m$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P &= 98 \cdot \left( \frac{(5m+9)^2}{49} + \frac{(m+6)^2}{49} \right) + 4m \\
&= 2(26m^2 + 102m + 117) + 4m \\
&= 52m^2 + 208m + 234 \\
&= 52(m^2 + 4m + 4) + 234 - 52 \cdot 2 \\
&= 52(m+2)^2 + 26 \geq 26 \\
\Rightarrow \text{Min}P &= 26
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$

Vậy  $m=-2$  thỏa mãn yêu cầu bài toán

### Câu 16.

Đặt  $\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$  (DK:  $u^2 \geq 4v$ )

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2v = 5 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 10v + v^2 - 2v = 5 \\ u = 5 - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 12v + 20 = 0 \\ u = 5 - v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 10 \\ v = 2 \\ u = 5 - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \text{ (tm)} \\ \begin{cases} u = -5 \\ v = 10 \end{cases} \text{ (ktm)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là  $(1;2);(2;1)$

### Câu 17.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 2(1-2xy) \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = 2 \cdot (1-2xy) \\ (x-2y) \cdot (1-2xy) = 4 \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} a = x - 2y \\ b = 1 - 2xy \end{cases}$ . Khi đó ta có hệ phương trình tương đương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{2} \\ a \cdot \frac{a^2}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 1 - 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2y \\ 1 - 2(2 + 2y)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2y \\ 4y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x;y) = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$

### Câu 18.

$$x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow [(x+1)^3 - y^3] + 3(x+1) - 3y = 0$$

$$(x+1-y)[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow y = x+1$$

$$\text{Với } y = x+1 \text{ thế vào } x^2 + y^2 - 3x = 1 \text{ ta có } 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là  $(0;1); \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

### Câu 19.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy(x+1)(y+1) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + (x+y) = 18 \\ xy(xy+x+y+1) = 72 \end{cases}$$

Đặt  $x+y = a, xy = b$  ta có hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^2 + a - 2b = 18 \\ b(a+b+1) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2 + a - 18}{2} \quad (1) \\ \frac{a^2 + a - 18}{2} \left( a + \frac{a^2 + a - 18}{2} + 1 \right) = 72 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (a^2 + a - 18)(a^2 + 3a - 16) = 288$$

$$\Leftrightarrow [(a^2 + 2a - 17) - (a + 1)] \cdot [(a^2 + 2a - 17) + (a + 1)] = 288$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 2a - 17)^2 - (a + 1)^2 = 288$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 4a^3 + 4a^2 - 68a - 34a^2 + 289 - a^2 - 2a - 1 = 288$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 4a^3 - 31a^2 - 70a + 288 = 288$$

$$\Leftrightarrow a(a^3 + 4a^2 - 31a - 70) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^3 - 5a^2 + 9a^2 - 45a + 14a - 70) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-5)(a^2 + 9a + 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-5)(a+2)(a+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = -9 \\ a = 5 \Rightarrow b = 6 \\ a = -2 \Rightarrow b = -8 \\ a = -7 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

+) Với  $\begin{cases} a = 0 \\ b = -9 \end{cases}$  ta có hai số  $x, y$  là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 0X - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -3 \end{cases}$$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình  $(x; y) = \{(3; -3); (-3; 3)\}$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases} \text{ ta có hai số } x, y \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = 3 \end{cases}$$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình  $\{(3;2);(2;3)\}$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} a = -2 \\ b = -8 \end{cases} \text{ ta có hai số } x, y \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$X^2 + 2X - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = -4 \end{cases}$$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình  $\{(-4;2);(2;-4)\}$

$$+) \text{ Với } \begin{cases} a = -7 \\ b = 12 \end{cases} \text{ ta có hai số } x, y \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$X^2 + 7X + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -3 \\ X = 4 \end{cases}$$

Vậy ta được hai nghiệm của hệ phương trình  $(x;y) = \{(-3;-4);(-4;-3)\}$

Vậy ta hai nghiệm của hệ phương trình

$$(x;y) = \{(-3;-4);(-4;-3);(-4;2);(2;-4);(3;2);(2;3);(3;-3);(-3;3)\}$$

### Câu 20.

Xét  $x = 0$  không là nghiệm của hệ đã cho

Xét  $x \neq 0$  ta có phương trình (1) tương đương với :

$$x^2 - xy = 6 \Leftrightarrow x - y = \frac{6}{x} \Rightarrow x - \frac{6}{x} = y$$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$3x^2 + 2x \left( x - \frac{6}{x} \right) - 3 \left( x - \frac{6}{x} \right)^2 = 30$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x^2 - 12 - 3x^2 + 36 - \frac{108}{x^4} - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 6x^2 - 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \quad (\forall x \quad x^2 + 6 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm là  $(3;1);(-3;-1)$

### Câu 21.

$$x^2 - x - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ hoặc } x+y-1=0$$

$$+ \text{ Với } x = y \text{ thay vào pt thứ hai ta được: } x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -3.$$

$$\text{Suy ra được: } (x; y) = (1; 1) \text{ hoặc } (x; y) = (-3; -3)$$

$$+ \text{ Với } x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x \text{ thay vào pt thứ hai ta được:}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -3.$$

$$\text{Suy ra được: } (x; y) = (1; 0) \text{ hoặc } (x; y) = (-3; 4)$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:  $(1; 1), (-3; -3), (1; 0), (-3; 4)$ .

### Câu 22.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 3x^2 + xy - 4x + 2y = 2 \\ x(x+1) + y(y+1) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + xy - 4x + 2y = 2 \\ x^2 + x + y^2 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 4 & (1) \\ 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y = -2 & (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2x^2 + x(y-5) - (y^2 - y - 2) = 0 \quad (**)$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn  $x$  và  $y$  là tham số:

$$\Delta = (y-5)^2 + 4.2(y^2 - y - 2) = 9y^2 - 18y + 9 = 9(y-1)^2 \geq 0 \forall y$$

$$\text{Phương trình } (**) \text{ có hai nghiệm: } \begin{cases} x = \frac{5-y+3(y+1)}{4} = \frac{2+2y}{4} = \frac{y+1}{2} \\ x = \frac{5-y-3(y-1)}{4} = \frac{8-4y}{4} = 2-y \end{cases}$$

$$+) x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{y+1}{2} + y^2 + y = 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 + 2y + 2 + 4y^2 + 4y - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + 8y - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \frac{-13}{5} \Rightarrow x = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

$$+) x = 2-y \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2-y)^2 + 2-y + y^2 + y = 4$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4y + y^2 + 2 - y + y^2 + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow x = 2 - 1 = 1$$

Vậy các nghiệm của hệ đã cho là  $(1; 1); \left(\frac{-13}{5}; \frac{-4}{5}\right)$

## Câu 23.

$$\begin{cases} (x+3)(x-1) = (y-2)(x+3) & (1) \\ (x-1)\sqrt{y^2-5y+8} = (y-2)^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+3)[(x-1)-(y-2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x-1=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=y-1 \end{cases}$$

+) Với  $x = -3$  thay vào phương trình (2) ta có:  $-4\sqrt{y^2-5y+8} = (y-2)^2$   
(vô nghiệm vì VT < 0; VP ≥ 0)

+) Với  $x = y - 1$  thay vào phương trình (2) ta có:

$$(y-2)\sqrt{y^2-5y+8} = (y-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \Leftrightarrow y=2 & (3) \\ \sqrt{y^2-5y+8} = y-2 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow x = y - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow (x; y) = (1; 2)$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y-2 \geq 0 \\ y^2-5y+8 = y^2-4y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y=4 \end{cases} \text{ (tm)} \Rightarrow x = 4 - 1 = 3 \Rightarrow (x; y) = (3; 4)$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:  $(x; y) = \{(1; 2); (3; 4)\}$

## Câu 24.

Ta có:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ 16x^2 - 8xy + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 4 - 2y \\ 16x^2 - 8xy^2 + y^4 = 4 - 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16x^2 - 8xy^2 + y^4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (4x - y^2)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4x - y^2 \\ x-1 = y^2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2-1}{3} \\ x = \frac{y^2+1}{5} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x = \frac{y^2-1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{y^4-2y^2+1}{9} - \frac{2(y^2-1)}{3} + 2y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 - 6y^2 + 6 + 18y - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 8y^2 + 18y - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^3 + 2y^2 - 4y + 10) = 0$$

$$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{TH2: } x = \frac{y^2 + 1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{y^4 + 2y^2 + 1}{25} - \frac{2(y^2 + 1)}{5} + 2y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 2y^2 + 1 - 10y^2 - 10 + 50y - 75 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 8y^2 + 50y - 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(y^3 + 2y^2 - 4y + 42) = 0$$

$$\Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm nguyên duy nhất của hệ đã cho là  $(1; 2)$

### Câu 25.

Ta có phương trình (2) tương đương với:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + y^3 = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^3 + y^3 = 1$$

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 1 \\ (x - 2)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x - 2 = z \text{ ta có: } \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow (y + z)^2 - 2yz = 1 \\ y^3 + z^3 = 1 \Rightarrow (y + z)(y^2 - yz + z^2) = (y + z)(1 - yz) = 1 \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} a = y + z \\ b = yz \end{cases}$  ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 1 \\ a(1 - b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2 - 1}{2} \\ a\left(1 - \frac{a^2 - 1}{2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2 - 1}{2} \\ 2a - a^2 + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2 - 1}{2} \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2 - 1}{2} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ yz = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y, z \text{ là hai nghiệm của phương trình: } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm  $(3; 0); (2; 1)$

### Câu 26.

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{y^2 + 1} + y)(\sqrt{y^2 + 1} - y) = (\sqrt{y^2 + 1} - y)$$

(Do  $\sqrt{y^2+1}-y \neq 0$  với mọi  $y$ )

$$\Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x+y+1+\frac{(x+1)^2-y^2}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left(1+\frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ \sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)+\sqrt{y^2+1}-y=0 \end{cases} \quad (3)$$

Do  $\sqrt{(x+1)^2+1} > |x+1| \geq x+1$ ,  $\forall x$  và  $\sqrt{y^2+1} > |y| \geq -y$ ,  $\forall y$  nên (3) vô nghiệm.

Thay  $y = -x - 1$  vào (2) tìm được nghiệm  $\begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$

Với  $x=1 \Rightarrow y=-2$ ;  $x=-\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}$ . Vậy hệ có nghiệm  $(1;-2), \left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

### Câu 27.

Ta có:  $2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 \Leftrightarrow y^2-(x+1)y-2x^2+5x-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[y-\frac{x+1}{2}\right]^2 - \left[\frac{(x+1)^2}{4}+2x^2-5x+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[y-\frac{x+1}{2}\right]^2 - \frac{9x^2-18x+9}{4}=0 \Leftrightarrow \left[y-\frac{x+1}{2}\right]^2 - \left(\frac{3x-3}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\frac{x+1}{2}-\frac{3x-3}{2}\right)\left(y-\frac{x+1}{2}+\frac{3x-3}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2x+1)(y+x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x+1=0 \\ y+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ y=2-x \end{cases}$$

⊗ Trường hợp  $y=2x-1$ , thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2+(2x-1)^2+x+2x-1-4=0 \Leftrightarrow 5x^2-x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

Trường hợp này hệ đã cho có hai nghiệm:  $(x;y)=(1;1), (x;y)=\left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ .

⊗ Trường hợp  $y=2-x$ , thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2 + (2-x)^2 + x + 2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Trường hợp này hệ đã cho có một nghiệm:  $(x; y) = (1; 1)$ .

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm:  $(x; y) = (1; 1), (x; y) = \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ .

### Câu 28.

Điều kiện  $2x - y - 9 \geq 0$ , ta có 
$$\begin{cases} \sqrt{2x - y - 9} - 36 + x^2 = 0 & (1) \\ y^2 - xy + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2)  $\Leftrightarrow (2y - x)^2 = x^2 - 36$

Suy ra (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{2x - y - 9} + (2y - x)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 9 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$  thỏa điều kiện. Vậy hệ phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ .

### Câu 29.

Lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta được:

$$\begin{aligned} y^5 - y^3 &= x^3 + y^2 - 1 \\ \Leftrightarrow y^3 \cdot (y^2 - 1) - (y^2 - 1) &= x^3 \\ \Leftrightarrow (y^2 - 1) \cdot (y^3 - 1) &= x^3 \\ \Leftrightarrow (1 - y^2)(1 - y^3) &= x^3 (*) \end{aligned}$$

Mà từ (1)  $\Rightarrow x^2 = 1 - y^3$

Kết hợp với (1) và (\*) ta được: 
$$\begin{cases} x^2 = 1 - y^3 \\ x = 1 - y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (1-y^2)^2 = 1-y^3 \\
&\Leftrightarrow (1-y)^2 \cdot (1+y)^2 = (1-y)(1+y+y^2) \\
&\Leftrightarrow (1-y) \cdot \left[ (1+y)^2(1-y) - 1 - y - y^2 \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-y) \cdot (1+y-y^2-y^3-1-y-y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-y) \cdot (-2y^2-y^3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-y) \cdot y^2 \cdot (-2-y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=0 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=0 \\ y=-2 \\ x=-3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm  $S = \{(-2; -3); (0; 1); (1; 0)\}$

### Câu 30.

+) Điều kiện  $x \geq \frac{6}{5}, y \leq \frac{16}{3}$

+)  $x^2 - xy - x + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-y+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=x+2 \end{cases}$

+) Với  $x=3$  thay vào phương trình  $\sqrt{5x-6} + \sqrt{16-3y} = 2x^2 - 2x + y - 4$ , ta được

$$\sqrt{16-3y} = y+5 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 13y + 9 = 0 \\ y \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{-13 + \sqrt{133}}{2}.$$

+)  $y=x+2$  thay vào phương trình  $\sqrt{5x-6} + \sqrt{16-3y} = 2x^2 - 2x + y - 4$ , ta được

$$\sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5x-6} - 2) + (\sqrt{10-3x} - 2) = 2x^2 - x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3(x-2)}{\sqrt{10-3x}+2} - (x-2)(2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left( \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3 = 0 \end{cases}$$

+) Với  $x=2 \Rightarrow y=4$  (thỏa mãn)

$$+) \text{ Vì } \frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{3} \Rightarrow \sqrt{5x-6} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - 3 < 0$$

$$\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{3} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x < 0$$

Do đó phương trình  $\frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x - 3 = 0$  vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là  $\left\{ (2; 4); \left( 3; \frac{-13 + \sqrt{133}}{2} \right) \right\}$

### Câu 31.

$$\begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ \frac{4x^2}{y} + \frac{6x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^3 = 18 \\ 2x \cdot \frac{3}{y} \left(2x + \frac{3}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = 2x; b = \frac{3}{y}. \text{ Ta có } \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ ab(a+b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=1 \end{cases}$$

$$\text{Giải tìm được } \left( a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; b = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \text{ hoặc } \left( a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; b = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\text{Tìm được nghiệm } (x; y) \text{ của hệ là } \left( \frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}} \right); \left( \frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}} \right)$$

### Câu 32.

ĐKXĐ:  $x+y \geq 0$ . Từ phương trình thứ nhất ta được:

$$x^2 + 2y = xy + 2x$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) + y(2-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow \sqrt{2+y} = 2y-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+y = (2y-2)^2 \\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 9y + 2 = 0 \\ y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow y=2$$

$$x=y \Rightarrow \sqrt{2y} = y^2 - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \geq 2 \\ 2y = y^4 - 4y^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \geq 2 \\ (y-2)(y^3 + 2y^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $(2; 2)$

### Câu 33.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y(x-y-1)+x \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ y \geq -1 \\ y(x-y-1)+x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3y-2+\sqrt{y(x-y-1)+x}=0 & (1) \\ 3\sqrt{8-x}-\frac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \sqrt{y(x-y-1)+x} = -(x-3y-2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy-y^2-y+x} = -(x-3y-2)$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{(x-y)(y+1)} = x-3y-2 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } (*) \Leftrightarrow t(x-y)+k(y+1)=x-3y-2$$

$$\Leftrightarrow tx+(k-t)y+k=x-3y-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ k-t=-3 \\ k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ k=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-y)(y+1)} = (x-y)-2(y+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)-2(y+1)+\sqrt{(x-y)(y+1)}=0 \quad (**)$$

$$\text{+)TH1: } y=-1 \Rightarrow (**)\Leftrightarrow x=-1$$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow 3\sqrt{8+1}-\frac{4(-1)}{\sqrt{(-1)+1}+1}=(-1)^2-14(-1)-8$$

$$\Leftrightarrow 3.3+4=7 \text{ (vô lý)}$$

+)TH2: Chia cả 2 vế của phương trình (\*\*) cho  $y+1$  ta được:

$$(**) \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{y+1}\right)^2 - 2 + \sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 1 & (\text{tm}) \\ \sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = -2 & (\text{ktm}) \end{cases} \Leftrightarrow x-y=y+1 \Leftrightarrow y=\frac{x-1}{2}$$

Khi đó ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 3\sqrt{8-x}-\frac{4 \cdot \frac{x-1}{2}}{\sqrt{\frac{x-1}{2}+1}+1}=x^2-14 \cdot \frac{x-1}{2}-8$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{8-x}-\frac{2(x-1)}{\sqrt{\frac{x+1}{2}+1}}-x^2+7x+1=0$$

$$\text{Đặt } f(x) = 3\sqrt{8-x} - \frac{2(x-1)}{\sqrt{\frac{x+1}{2}} + 1} - x^2 + 7x + 1$$

$$\text{Ta có: } f(-1) = 6 \quad ; f(8) = -11 + \sqrt{2} \Rightarrow f(-1).f(8) = -66 + 36\sqrt{2} < 0 \\ \Rightarrow (3) \text{ có ít nhất một nghiệm trong đoạn } [-1; 8]$$

$$\text{Lại có: } f(7) = 0 \Rightarrow x = 7 \text{ là nghiệm của (3)} \Rightarrow y = \frac{7-1}{2} = 3$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x; y) = (7; 3)$$

**Câu 34.**

$$\text{Hệ viết lại thành } \begin{cases} (x-2y) + xy = 2 \\ (x-2y)^2 + 4xy = 4 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x - 2y \\ b = xy \end{cases} \text{ khi đó ta có hệ } \begin{cases} a + b = 2 \\ a^2 + 4b = 4 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được  $a = 2$  và  $b = 0$ .

$$\text{Với } \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Câu 35.**

ĐK:  $x \neq 0; y \neq 0$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3} \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3} & (1) \\ \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{5}{6} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2)} \Leftrightarrow 6y^2 - 6x^2 = 5xy \Leftrightarrow (2x+3y)(3x-2y) = 0.$$

$$* \text{ Nếu } 2x+3y=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3y}{2}.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } y \cdot \frac{-3y}{2} + \frac{3}{2} = \frac{16}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3y^2}{2} = \frac{23}{6} \text{ (phương trình vô nghiệm).}$$

$$* \text{ Nếu } 3x-2y=0 \Leftrightarrow x = \frac{2y}{3}.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3.$$

$$+ \text{ Với } y = 3 \Rightarrow x = 2 \text{ (TM).}$$

$$+ \text{ Với } y = -3 \Rightarrow x = -2 \text{ (TM).}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:  $(x; y) = (2; 3); (x; y) = (-2; -3)$ .

### Câu 36.

Điều kiện xác định:  $x \geq -2$

Phương trình (2) tương đương với:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x+2)^3 + (x+2) = y^3 + y \\ &\Leftrightarrow (x+2-y) \left[ x^2 + 4x + 4 + y(x+2) + y^2 + 1 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y+2) \left[ \left( \frac{x}{2} + y + 1 \right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + 1 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x-y+2 = 0 \left( \text{do} \left( \frac{x}{2} + y + 1 \right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + 1 \geq 1 \right) \end{aligned}$$

$$y = x + 2$$

Thay vào phương trình (1) ta được:  $4\sqrt{y} + 2\sqrt{3(y+2)} = 3y^2 - 3y + 10$

Áp dụng BĐT Co si ta có

$$VT = 2\sqrt{2y \cdot 2} + 2\sqrt{3(y+2)} \leq 2y + 2 + 3 + y + 2 = 3y + 7$$

$$VP = 3y^2 - 3y + 10 - (3y + 7) = 3y^2 - 6y + 3 = 3(y-1)^2 \geq 0$$

Như vậy phương trình có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = y - 2 = 1 - 2 = -1 \text{ (tm)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (-1; 1)$

### Câu 37.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(1-2xy) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(2-4xy) = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)(x^2 + 4y^2 - 4xy) = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ (x-2y)^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ x = 2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2 + 8y + 2 = 0 \\ x = 2 + 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

### Câu 38.

Ta có:

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(xy)^2+1=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy+(xy)^2+1=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases}$$

Đặt  $\begin{cases} x+y=u \\ xy-1=v \end{cases}$  thì hệ phương trình trên:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=10 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=10 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=16 \\ uv=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ u+v=-4 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \\ u+v=-4 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1, v=3 \\ u=3, v=1 \\ u=-1, v=-3 \\ u=-3, v=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy-1=3 \\ x+y=3 \\ xy-1=1 \\ x+y=-1 \\ xy-1=-3 \\ x+y=-3 \\ xy-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=4 \\ x+y=3 \\ xy=2 \\ x+y=-1 \\ xy=-2 \\ x+y=-3 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ x=2; y=1 \\ x=1; y=2 \\ x=1; y=-2 \\ x=-2; y=1 \\ x=0; y=3 \\ x=-3; y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=1 \\ x=1; y=2 \\ x=1; y=-2 \\ x=-2; y=1 \\ x=0; y=3 \\ x=-3; y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm  $S = \{(1;2);(2;1);(1;-2);(-2;1);(0;3);(-3;0)\}$

### Câu 39.

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + x - y = 0 & (1) \\ \sqrt{2x+y-2} + 2 - 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện:  $2x+y \geq 2$

$$(1) \Leftrightarrow (x-y)(2x+y) + (x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2x+y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=y \text{ vì } 2x+y+1 > 0 \text{ do } 2x+y \geq 2.$$

Thế  $y=x$  vào (2) ta được  $\sqrt{3x-2} = 2x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Với  $x=2 \Rightarrow y=2$  (thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất  $(x;y) = (2;2)$ .

**Câu 40.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 & (1) \\ xy = x + 1 & (2) \end{cases}$$

Với  $x = 0$ , phương trình (2) trở thành  $0 = 1$  (vô lí).

Với  $x \neq 0$ , ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y + 1 \\ xy = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2 \\ y = 1 + \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y-1 = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 2x^2 \quad (\text{do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{1} \Leftrightarrow y = 2$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{-1} \Leftrightarrow y = 0$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x, y) \in \{(1; 2), (-1; 0)\}$ .

**Câu 41.**

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có  $y^2 - y(x+3) + 2 - 2x^2 = 0$ . Ta xem là phương trình bậc hai theo biến  $y$  ( $x$  là tham số).

$$\Delta = (x+3)^2 - 4(2-2x^2) = x^2 + 6x + 9 - 8 + 8x^2 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 \geq 0.$$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm là  $y = \frac{x+3+3x+1}{2} = 2x+2$  và

$$y = \frac{x+3-3x-1}{2} = -x+1.$$

+ Nếu  $y = 2x+2$ . Thay vào phương trình (2) ta được

$$x^2 - (2x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x^2 - 8x - 4 = 3 \Leftrightarrow -3x^2 - 8x - 7 = 0 \quad (\text{phương trình vô nghiệm}).$$

+ Nếu  $y = -x+1$ . Thay vào phương trình (2) ta được

$$x^2 - (-x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1.$$

Vậy tập nghiệm  $S = \{(2; -1)\}$ .

**Câu 42.**

Điều kiện xác định của hệ phương trình là  $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$ . Biến đổi hệ phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x+y)^2 = xy + 3y - 1 \\ x+y = \frac{x^2+y+1}{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + 1 = xy + 3y \\ x+y = \frac{y}{1+x^2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3y + 1 = 0 \\ x+y-1 = \frac{y}{1+x^2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + y(x+y-3) = 0 \\ x+y-1 = \frac{y}{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{y(x+y-3)}{x^2+1} = 0 \\ x+y-1 = \frac{y}{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{y(x+y-1-2)}{x^2+1} = 0 \\ x+y-1 = \frac{y}{1+x^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt  $a = x+y-1; b = \frac{y}{1+x^2}$ , khi đó ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+b(a-2)=0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a(a-2)=0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+1=0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$$

Đến đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-1=1 \\ \frac{y}{1+x^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ y=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; y = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; y = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(x; y) = \left( \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right), \left( \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)$$

**Câu 43.** 
$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \quad (I)$$

- Xét  $x = 0$ , hệ (I) trở thành 
$$\begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$$

- Xét  $x \neq 0$ , đặt  $\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt$ . Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} x^3 + 4xt = x^3 t^3 + 16x \\ 1 + x^2 t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4)(1) \\ 4 = x^2(t^2 - 5)(2) \end{cases}$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$$\begin{aligned}
4x^3(t^3 - 1) &= 4x^3(t-4)(t^2 - 5) \\
\Leftrightarrow t^3 - 1 &= t^3 - 4t^2 - 5t + 20 \quad (\text{Do } x \neq 0) \\
\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 21 &= 0 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{7}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

+ Với  $t = -3$ , thay vào (2) được  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

$x = 1$  thì  $y = -3$ , thử lại  $(1; -3)$  là một nghiệm của (I)

$x = -1$  thì  $y = 3$ , thử lại  $(-1; 3)$  là một nghiệm của (I)

+ Với  $t = \frac{7}{4}$ , thay vào (2) được  $x^2 = -\frac{64}{31}$  (loại)

Vậy hệ (I) có các nghiệm  $(0; 2)$ ,  $(0; -2)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(-1; 3)$ .

#### Câu 44.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y-x}{y\sqrt{x}} = (x-y)(x+2y) \Leftrightarrow (x-y) \left( x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{do } x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} > 0, \forall x, y > 0$$

Thay  $y = x$  vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x^2 + 3x}) &= 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 3x} = \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} \\
\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 3x} &= \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x} - 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(L) \\ x = 1(tm) \end{cases} \Rightarrow x = y = 1
\end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(1; 1)$

#### Câu 45.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - xy^2 + 1 \geq 0 \end{cases}, \text{ kết hợp với phương trình (1), ta có } y > 0.$$

Từ (1), ta có

$$4\sqrt{x+1} - xy\sqrt{y^2+4} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = xy\sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow 16(x+1) = x^2 y^2 (y^2 + 4) \Leftrightarrow (y^4 + 4y^2)x^2 - 16x - 16 = 0.$$

Giải phương trình theo ẩn  $x$  ta được  $x = \frac{4}{y^2}$  hoặc  $x = \frac{-4}{y^2 + 4} < 0$  (loại).

Với  $x = \frac{4}{y^2} \Leftrightarrow xy^2 = 4$  thế vào phương trình (2), ta được:  $\sqrt{x^2 - 3} + 3\sqrt{x-1} = 4$

Điều kiện  $x \geq \sqrt{3}$ , ta có

$$\sqrt{x^2 - 3} + 3\sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 3} - 1) + 3(\sqrt{x-1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 3} + 1} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x-1} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left( \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 3} + 1} + \frac{3}{\sqrt{x-1} + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ (vì } \frac{x+2}{\sqrt{x^2 - 3} + 1} + \frac{3}{\sqrt{x-1} + 1} > 0) \Leftrightarrow x = 2.$$

Với  $x = 2$  ta có  $\begin{cases} y^2 = 2 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{2}$ . Kết hợp với điều kiện trên, hệ phương trình có nghiệm  $(2; \sqrt{2})$ .

#### Câu 46.

Điều kiện:  $x \neq 0; y \neq 0$ .

$$\text{Viết lại hệ: } \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) = -4 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } u = x + \frac{1}{x}; v = y + \frac{1}{y}, \text{ ta có hệ: } \begin{cases} u + v = -4 \\ uv = 4 \end{cases}$$

Giải ra được:  $u = -2; v = -2$ .

Giải ra được:  $x = -1; y = -1$ . Hệ đã cho có nghiệm:  $(x; y) = (-1; -1)$ .

#### Câu 47.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x - 2y + 3 = 0 & (1) \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4xy + 2x - 4y + 6 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+2)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow y = x+2$ . Thay vào pt (1) ta được

$$x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Vậy hệ có hai nghiệm  $(x; y)$  là  $\left(\frac{-5-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{-5+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$ .

#### Câu 48.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2 + 4x) \cdot (4x + y) = 6 \\ (x^2 + 4x) + (4x + y) = -5 \end{cases}$$

Suy ra  $x^2 + 4x$  và  $4x + y$  là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với  $\begin{cases} x^2 + 4x = -2 \\ 4x + y = -3 \end{cases}$  (I) hoặc  $\begin{cases} x^2 + 4x = -3 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$  (II)

$$\text{Giải (I): } x^2 + 4x = -2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 4x = 5 - 4\sqrt{2} \\ x = -2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 4x = 5 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Giải (II): } x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 - 4x = 2 \\ x = -3 \Rightarrow y = -2 - 4x = 10 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm  $(-2 + \sqrt{2}; 5 - 4\sqrt{2}), (-2 - \sqrt{2}; 5 + 4\sqrt{2}), (-1; 2), (-3; 10)$

**Câu 49.** a) Khi  $a = 1$ , hệ trở thành:  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy với  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ , hệ đã cho có 2 nghiệm  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 2a + 1 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 2a^2 + 4a - 1 \quad (2) \end{cases} \quad \text{Từ (1) ta có: } y = 2a + 1 - x$$

Thay vào (2) ta có:  $x^2 - (2a+1)x + a^2 + 1 = 0 \quad (3)$

Hệ có nghiệm  $\Leftrightarrow (3)$  có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{3}{4}$ .

Với  $a \geq \frac{3}{4}$  hệ đã cho có nghiệm. Khi đó, từ hệ đã cho ta có:

$$xy = a^2 + 1$$

Vì  $a \geq \frac{3}{4}$  nên  $a^2 + 1 \geq \frac{25}{16}$ . Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$ .

$$\text{Vậy } \min(xy) = \frac{25}{16}$$

### Câu 50.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 & (1) \\ xy + 3y^2 + x = 3 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1)  $\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + y(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = 0$ ,

ta được  $x = y$  hoặc  $x = -2y$

\* Với  $x = y$ , từ (2) ta có:  $4x^2 + x - 3 = 0$ , ta được  $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$ .

Khi đó,  $x_1 = y_1 = -1, x_2 = y_2 = \frac{3}{4}$ .

\* Với  $x = -2y$ , từ (2) ta có  $y^2 - 2y - 3 = 0$ , ta được  $y_1 = -1, y_2 = 3$

Nếu  $y = -1 \Rightarrow x = 2$ . Nếu  $y = 3 \Rightarrow x = -6$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y)$  là:  $(-1; -1); \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right); (2; -1); (-6; 3)$ .

### Câu 51.

a. Giải hệ đã cho khi  $m = -3$

$$\text{Ta được hệ phương trình } \begin{cases} -2x + 2y = -12 \\ x - 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -6 \\ x - 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y)$  với  $(7; 1)$

b. Điều kiện có nghiệm của phương trình

$$\frac{m+1}{1} \neq \frac{-(m+1)}{m-2} \Leftrightarrow (m+1)(m-2) \neq -(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2) + (m+1) \neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm khi  $m \neq -1$  và  $m \neq 1$

Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (m+1)x - (m+1)y = 4m \\ x + (m-2)y = 2 \end{cases}$  khi  $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (m+1)x - (m+1)y = 4m \\ x + (m-2)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{4m}{m+1} \\ x + (m-2)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{4m}{m+1} \\ y = \frac{-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4m-2}{m+1} \\ y = \frac{-2}{m+1} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm  $(x; y)$  với  $\left(\frac{4m-2}{m+1}; \frac{-2}{m+1}\right)$

### Câu 52.

$$\text{Từ } y - |x| = 3 \Leftrightarrow y - 3 = |x| \Rightarrow y - 3 \geq 0 \Rightarrow |y - 3| = y - 3$$

$$\begin{cases} |x| + |y - 3| = 1 \\ y - |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y - 3 = 1 \\ y - |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = 4 \\ y - |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| = 1 \\ y = |x| + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm  $(x; y)$ :  $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$

**Câu 53.** 1. Khi  $m = 2$  ta có hệ phương trình:  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy với  $m = 2$  hệ phương trình có nghiệm duy nhất:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

2. Ta có hệ:  $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1-2 \\ mx + y = m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ y = -m(m-1) + m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ y = -m^2 + 2m+1 \end{cases}$$

Vậy với mọi giá trị của  $m$ , hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = m - 1 \\ y = -m^2 + 2m + 1 \end{cases}$$

Khi đó:  $2x + y = -m^2 + 4m - 1$   
 $= 3 - (m - 2)^2 \leq 3$  đúng  $\forall m$  vì  $(m - 2)^2 \geq 0$

Vậy với mọi giá trị của  $m$ , hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  thoả mãn  $2x + y \leq 3$ .

#### Câu 54.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2xy + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy = z^2 + 2(x + y) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2xy = z^2 - 2z + 1 = (1 - z)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2xy = (x + y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 1.$$

Vậy hệ phương trình chỉ có 1 cặp nghiệm duy nhất:  $(x; y; z) = (0; 0; 1)$ .

#### Câu 55.

Điều kiện :  $y \geq 0$ .

$$(1) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

+/Nếu  $x = \pm 1$  thay vào phương trình (2) ta có :  $\sqrt{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ .

+/Nếu  $x = y \geq 0$

$$\text{Khi đó (2)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^4 + 1)} - 4\sqrt{x} + 2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{do } 2(x^4 + 1) \geq 2 \cdot 2\sqrt{x^4 \cdot 1} = 4x^2 \Rightarrow \sqrt{2(x^4 + 1)} \geq 2|x| = 2x.$$

$$\text{nên VT(3)} \geq 2(x - 2\sqrt{x} + 1) = 2(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0.$$

$$\text{Do đó Pt (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ \sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

#### Câu 56.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ 2xy=z^2-2(x+y)-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ 2xy=z^2-2z+1=(1-z)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2xy=(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=y=0; z=1$$

Hệ pt có nghiệm duy nhất:  $(x,y,z)=(0,0,1)$

### Câu 57.

Điều kiện:  $xy \geq 0$

Đặt  $a = x + y$ ,  $b = \sqrt{xy}$  ( $b \geq 0$ ). Ta có hệ  $\begin{cases} a = 3 + b \\ a^2 - 2b^2 = 18 \end{cases}$

Thế  $a = 3 + b$  vào phương trình còn lại ta được:  $(3 + b)^2 - 2b^2 = 18$

$$\Leftrightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

Do đó  $(a; b) = (6; 3)$ . Ta được hệ  $\begin{cases} x + y = 6 \\ \sqrt{xy} = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện). Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = (3; 3)$$

### Câu 58. Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được: $(2x + 3y)^2 = 25$

Ta có 2 hệ:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Giải ra và kết luận

### Câu 59.

.

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 & (1) \\ x^2 + z^2 - 4(y + z) + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012})(\sqrt{y^2 + 2012} - y) = 2012(\sqrt{y^2 + 2012} - y) \text{ (Do } \sqrt{y^2 + 2012} - y \neq 0 \forall y \text{)}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 2012})2012 = 2012(\sqrt{y^2 + 2012} - y) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 2012} = \sqrt{y^2 + 2012} - y \\ &\Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 2012} - \sqrt{x^2 + 2012} \\ &\Leftrightarrow x + y = \frac{(\sqrt{y^2 + 2012} - \sqrt{x^2 + 2012})(\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012})}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}} \\ &\Leftrightarrow x + y = \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}} \Leftrightarrow (x + y) \frac{\sqrt{y^2 + 2012} - y + \sqrt{x^2 + 2012} + x}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Do } \left. \begin{array}{l} \sqrt{y^2 + 2012} > |y| \geq y \forall y \\ \sqrt{x^2 + 2012} > |x| \geq -x \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{y^2 + 2012} - y + \sqrt{x^2 + 2012} + x > 0 \Rightarrow y = -x$$

$$\text{Thay } y = -x \text{ vào (2)} \Rightarrow x^2 + z^2 + 4x - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 = 0 \\ (z - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -x = 2$$

Vậy hệ có nghiệm  $(x; y; z) = (-2; 2; 2)$ .

#### Câu 60.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 & (1) \\ xy + 3x^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Từ (2)  $\Rightarrow x \neq 0$ . Từ đó  $y = \frac{4 - 3x^2}{x}$ , thay vào (1) ta có:

$$x^2 + \left(\frac{4 - 3x^2}{x}\right)^2 + x \cdot \frac{4 - 3x^2}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 7x^4 - 23x^2 + 16 = 0$$

Giải ra ta được  $x^2 = 1$  hoặc  $x^2 = \frac{16}{7}$

$$\text{Từ } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1; \quad x^2 = \frac{16}{7} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{7}}{7} \Rightarrow y = \mp \frac{5\sqrt{7}}{7}$$

Vậy hệ có nghiệm  $(x; y)$  là  $(1; 1); (-1; -1); \left(\frac{4\sqrt{7}}{7}; -\frac{5\sqrt{7}}{7}\right); \left(-\frac{4\sqrt{7}}{7}; \frac{5\sqrt{7}}{7}\right)$

#### Câu 61.

$$\text{ĐK: } \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Từ pt (1) suy ra } (y - x) \left( x + 2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x + 2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$$

+) Với  $y = x$  thay vào (2) ta được

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(1+\sqrt{x^2+3x})=3 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+3x}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x}-1)=0$$

(nhân hai vế pt với  $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$ ) (Ta cũng có thể đặt  $t = \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$  rồi bình phương hai vế)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=1 \\ \sqrt{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ (L)} \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

+) Vì  $x > 0; y > 0$  nên  $x+2y+\frac{1}{y\sqrt{x}}=0$  vô nghiệm

Vậy nghiệm của hpt là:  $(x; y) = (1; 1)$ .

### Câu 62.

+) Ta có PT(1)  $\Leftrightarrow 2x^2 + xy + 4xy + 2y^2 - 4x - 2y = 10xy - 4x - 2y$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 4xy) + (2y^2 - xy) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2y) - y(x-2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y=2x \end{cases}$$

+) Trường hợp 1:  $x = 2y$ , kết hợp với phương trình (2) ta có hệ  $\begin{cases} x=2y \\ x^2-7y=-3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4y^2-7y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ x=1 \\ x=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

+) Trường hợp 2:  $y = 2x$ , kết hợp với phương trình (2) ta có hệ  $\begin{cases} y=2x \\ x^2-7y=-3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2-14x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ x=7+\sqrt{46} \\ x=7-\sqrt{46} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+\sqrt{46} \\ y=14+2\sqrt{46} \\ x=7-\sqrt{46} \\ y=14-2\sqrt{46} \end{cases}$$

+) Kết luận: Hệ phương trình có 4 nghiệm:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=7+\sqrt{46} \\ y=14+2\sqrt{46} \end{cases}, \begin{cases} x=7-\sqrt{46} \\ y=14-2\sqrt{46} \end{cases}$$

**Câu 63.**

a) Khi  $m = \sqrt{2}$  ta có hệ phương trình  $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ 3x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}+5}{5} \\ y = \sqrt{2}x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}+5}{5} \\ y = \frac{5\sqrt{2}-6}{5} \end{cases}$$

b) Giải tìm được:  $x = \frac{2m+5}{m^2+3}; y = \frac{5m-6}{m^2+3}$

Thay vào hệ thức  $x+y = 1 - \frac{m^2}{m^2+3}$ ; ta được  $\frac{2m+5}{m^2+3} + \frac{5m-6}{m^2+3} = 1 - \frac{m^2}{m^2+3}$

Giải tìm được  $m = \frac{4}{7}$

**Câu 64.**

Với điều kiện  $x, y < 9$ , hệ đã cho là:  $\begin{cases} x^2 + 9 = (9-y)^2 & (1) \\ y^2 + 9 = (9-x)^2 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được:  $(x-y)(x+y-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=9-x \end{cases}$

+ Với  $x = y$ , thế vào (1) ta được:  $18x - 72 = 0 \Leftrightarrow x = y = 4$ .

+ Với  $y = 9 - x$ , thế vào (2) thì phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất:  $(x; y) = (4; 4)$ .

**Câu 65.**

Hệ phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + (x+2y) = 20 \\ \frac{x+2y}{xy} = \frac{4}{3} \end{cases} \quad (\text{Đk } x \neq 0; y \neq 0)$

Đặt  $u = x + 2y; v = xy \neq 0$  Hệ phương trình có dạng  $\begin{cases} u + 2v = 20 \\ 3u = 4v \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ v = 6 \end{cases} \text{ Khi đó có hệ phương trình } \begin{cases} x + 2y = 8 & (1) \\ xy = 6 & (2) \end{cases}$$

Rút x từ (1) thay vào (2) được  $y = 1$  hoặc  $y = 3$

Kết luận hệ phương trình có 2 nghiệm  $(x;y) = (6; 1); (2; 3)$

### Câu 66.

Điều kiện:  $x \geq 3$  và  $y \geq -7$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x-3} \geq 0, v = \sqrt{y+7} \geq 0 \Rightarrow x = u^2 + 3, y = v^2 - 7$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} u^2 + v^2 = 17 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \cdot v = 4 \\ u + v = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow u, v$  là nghiệm phương trình  $X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 1$  hoặc  $X = 4$

$\Rightarrow (u; v) = (1; 4)$  hoặc  $(u; v) = (4; 1)$

Kết luận:  $(x; y) = (4; 9); (x; y) = (19; -6)$

### Câu 67.

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 3 = y^2 + 4x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 - (y-1)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y-1)(x+y-3) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

+ TH1:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

+ TH2:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ y=-x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

+ Kết luận: hệ pt có nghiệm  $(x;y)$  là:  $(-1;-2), (2;1), (1;2)$ .

### Câu 68.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + xy - 4x = -6 & (1) \\ y^2 + xy = -1 & (2) \end{cases}$$

Nếu  $(x;y)$  là nghiệm của (2) thì  $y \neq 0$ .

$$\text{Do đó: } (2) \Leftrightarrow x = \frac{-y^2 - 1}{y} \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) và biến đổi, ta được:

$$4y^3 + 7y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(4y^2+3y+1)=0 \text{ (thí sinh có thể bỏ qua bước này)}$$

$$\Leftrightarrow y = -1$$

$$y = -1 \Rightarrow x = 2$$

Vậy hệ có một nghiệm:  $(x; y) = (2; -1)$ .

### Câu 69.

$$\begin{cases} x^3 - \frac{6}{y} = 2 & (1) \\ 3x - \frac{8}{y^3} = -2 & (2) \end{cases} \quad \text{ĐK: } y \neq 0$$

Cộng PT (1) với PT (2) ta được

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{8}{y^3}\right) + \left(3x - \frac{6}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{y}\right) \left(x^2 + \frac{2x}{y} + \frac{4}{y^2} + 3\right) = 0$$

TH1:  $x = \frac{2}{y}$  thay vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{8}{y^3} - \frac{6}{y} = 2 \Rightarrow 2y^3 + 6y^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+2)^2 = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2; \quad y = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{TH2: } \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{2x}{y} + \frac{4}{y^2} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{y^2} + 3 = 0 \text{ (PT vô nghiệm)}$$

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm  $(x; y) = (2; 1), (-1; -2)$

### Câu 70.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) = (x-1) + (y-3) + 1 \end{cases}$$

Đặt  $a = x-1; b = y-3$ . Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab = a + b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 1 \\ ab = a + b + 1 \end{cases}$$

Đặt  $S = a + b; P = ab$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ . Hệ trên trở thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ P = S + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn) hoặc } \begin{cases} S = 3 \\ P = 4 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\begin{cases} S = -1 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là  $(0;3), (1;2)$

### Câu 71.

3) Cho  $(x, y)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} x - y = m + 1 \\ 2x - 3y = m + 3 \end{cases}$  (với  $m$  là tham số thực).

Tìm  $m$  để biểu thức  $P = x^2 + 8y$  đạt giá trị nhỏ nhất.

4) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 - y^3 = -1 \end{cases}$  (với  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ ).

(Trích đề HSG tỉnh Đồng Nai năm 2018-2019)

### Lời giải

1) Giải:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 - y^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 + 2xy = 1 \\ (x - y)^3 - 3xy(x - y) = -1 \end{cases}$

Đặt  $\begin{cases} x - y = S \\ xy = P \end{cases}$

Ta có:  $\begin{cases} S^2 + 2P = 1 \\ S^3 - 3SP = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 - S^2}{2} \\ S^3 - 3S \cdot \frac{1 - S^2}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 - S^2}{2} \\ 2S^3 + 3S^3 - 3S + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 - S^2}{2} \\ 5S^3 - 3S + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 - S^2}{2} \\ (S + 1)(5S^2 - 5S + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 - S^2}{2} \\ (S + 1)(5S^2 - 5S + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1 - S^2}{2} \\ (S + 1) = 0 \\ 5S^2 - 5S + 2 = 0 \text{ (vn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

### Câu 72.

Trừ theo vế các phương trình (1) và (2) ta được:

$$(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1})+3(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \text{ hoặc } \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0 \quad (*)$$

**Trường hợp 1:**  $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ . Thay  $y=x$  vào (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=(x+1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được:  $x=0 \Rightarrow x=y=0$ .

**Trường hợp 2:**  $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$ .

$$\text{Xét } A = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3 = \frac{(3\sqrt{x^2+1}+x)+(3\sqrt{y^2+1}+y)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$$

$$\text{Ta có: } 3\sqrt{x^2+1}+x > 3\sqrt{x^2}+x = 3|x|+x = 2|x|+(|x|+x) \geq 0.$$

$$\text{Tương tự: } 3\sqrt{y^2+1}+y > 0$$

Suy ra:  $A > 0$ . Trường hợp 2 không xảy ra.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất:  $x=y=0$ .

**Cách 2:**

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}=2y-x+1 \\ \sqrt{y^2+1}=2x-y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y-x+1 \geq 1 & (1) \\ 2x-y+1 \geq 1 & (2) \\ x^2+1=4y^2+4y+1-4xy-2x+x^2 & (3) \\ y^2+1=4x^2+4x+1-4xy-2y+y^2 & (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế các phương trình (3) và (4) ta được phương trình:

$$(x-y)[4(x+y)+6]=0 \Leftrightarrow x=y \text{ hoặc } 4(x+y)+6=0:$$

Cộng theo vế các bất phương trình (1) và (2) ta được:  $x+y \geq 0$ , suy ra trường hợp  $4(x+y)+6=0$  không xảy ra.

Trường hợp  $x=y$ , thay vào (3) ta được:  $x=y=0$ .

### Câu 73.

$$\text{Ta có } \begin{cases} xy-2x+y=6 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-2)+y-2=4 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y-2)=4 \\ (x+1)^2+(y-2)^2=8 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt  $a=x+1; b=y-2$  ta có hệ phương trình.

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ (a+b)^2 - 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ (a+b)^2 = 16 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = 4 \\ a+b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+1 = 2 \\ y-2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 = -2 \\ y-2 = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nghiệm của hệ phương trình  $S = \{(1;4);(-3;0)\}$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $x^2 = 2x + m - 1$  hay

$$x^2 - 2x - m + 1 = 0 \quad (1)$$

$(d)$  và  $(P)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - (-m+1) > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Do  $A, B$  thuộc  $(P)$  nên  $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$ . Theo đề bài ta có

$$y_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Theo hệ thức Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m + 1 \end{cases}$$

Nếu  $x_1 \cdot x_2 = 4$  thì  $-m + 1 = 4 \Rightarrow m = -3$  (loại).

Nếu  $x_1 \cdot x_2 = -3$  thì  $-m + 1 = -3 \Rightarrow m = 4$  (nhận). Vậy  $m = 4$  là giá trị cần tìm.

#### Câu 74.

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 & (1) \\ 8y^2 + x^2 = 12 & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào PT(1) ta được  $x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0$

Nếu  $y = 0$  thì từ (1) suy ra  $x = 0$  không thỏa mãn PT (2).

$$\text{Xét } y \neq 0 \text{ PT (3)} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{y} + 8 = 0$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{y} = t \text{ ta được } t^3 + t^2 + 2t + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t^2 - t + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+2 = 0 \\ t^2 - t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2$$

Với  $t = -2 \Rightarrow x = -2y$ , thay vào (2) được  $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -1$

Với  $y = 1 \Rightarrow x = -2$

$y = -1 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  $(-2;1); (2;-1)$ .

### Câu 75.

Ta có:

$$\begin{cases} (y-2x)(1-y-x) = 2x^2 - x & (1) \\ x(y-1) + \sqrt[3]{x^2 - y} = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (y-2x)(1-y) - x(y-2x) - x(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2x)(1-y) - x(y-1) = 0 \Leftrightarrow (1-y)(y-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = x \end{cases}.$$

Với  $y = 1$ , thay vào (2) được:  $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$ .

Với  $y = x$ , thay vào (2) được:  $x(x-1) + \sqrt[3]{x^2 - x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + \sqrt[3]{x^2 - x} - 2 = 0$ .

Đặt  $t = \sqrt[3]{x^2 - x}$ , phương trình trở thành:

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3) có  $\Delta = -7 < 0$  nên vô nghiệm.

$$\text{Do đó } t = 1 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Với } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \text{ Với } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$(x; y) \in \left\{ (-3; 1), (3; 1), \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right), \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

### Câu 76.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} xy \neq 0 \\ x + y \geq 1 \quad (*) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2 - 1}{xy} + 4 - \frac{2(x+y-1)}{x+y} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2 - 1}{xy} - \frac{2(x+y-1)}{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{xy} - \frac{2(x+y-1)}{x+y} = 0 \Leftrightarrow (x+y-1) \frac{(x^2 + y^2 + x + y)}{xy(x+y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x \quad (\text{vì với } x, y \text{ thỏa mãn đk } (*) \text{ ta có } x^2 + y^2 + x + y > 0)$$

Thay  $y = 1 - x$  vào phương trình thứ (2) của hệ pt ta thu được pt

$$4x^2 + 5(1-x) - 13 + 6\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 8 + 6\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x - 6\sqrt{x} + 9 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = (\sqrt{x}-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = \sqrt{x}-3 \\ 2x-1 = 3-\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 = \sqrt{x} \\ 4-2x = \sqrt{x} \end{cases}$$

+)  $2x+2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x + \frac{7}{4} + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$  (phương trình vô nghiệm vì  $x \geq 0$ ).

+)  $4-2x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x \geq 0 \\ (4-2x)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 4x^2 - 17x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = \frac{17+\sqrt{33}}{8} \\ x = \frac{17-\sqrt{33}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17-\sqrt{33}}{8}.$

Với  $x = \frac{17-\sqrt{33}}{8} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}-9}{8}$  thỏa mãn điều kiện (\*).

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm  $x, y$  là:  $\left(\frac{17-\sqrt{33}}{8}; \frac{\sqrt{33}-9}{8}\right).$

### Câu 77.

$$2. \begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 (*) \end{cases}$$

Điều kiện:  $\begin{cases} 2x-y-1 \geq 0 \\ x+2y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$

Nhận xét:

$$\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}. \text{ Không thỏa mãn điều kiện.}$$

$$\sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Không thỏa mãn phương trình } *.$$

Do đó, ta có  $\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-y-1} - \sqrt{x} + \sqrt{3y+1} - \sqrt{x+2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x}} - \frac{x-y-1}{\sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1) \left( \frac{1}{\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y} \end{cases}$$

Với  $y = x - 1$  thay vào phương trình \* ta có

$$(x-1)^2(x+2) = 2(x-1)^3 - (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0; x = 5 \Rightarrow y = 4$$

$$\text{Với } \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} \\ \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y} \end{cases}$$

$$\text{Cộng vế với vế hai phương trình ta được } \sqrt{x} = \sqrt{3y + 1} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{3}$$

$$\text{Thay vào * ta được } (x-1)^2(x+2) = \frac{2}{27}(x-1)^3 - \frac{1}{9}(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(25x+59) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ do } (x \geq 0).$$

Vậy hệ có các nghiệm  $(x; y) = (1; 0); (5; 4)$ .

**Cách 2:** Bình phương hai vế PT thứ nhất

$$\text{PT thứ nhất } \Leftrightarrow \sqrt{(2x-y-1)(3y+1)} = \sqrt{x(x+2y)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-y-1)(x-3y-1) = 0.$$

### Câu 78.

$$\text{ĐKXĐ } x, y \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } (3x+2y)(y+1) = 4-x^2$$

$$\Leftrightarrow 3xy + 3x + 2y^2 + 2y + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x(x+y-1) + 2y(x+y-1) + 4(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y+4)(x+y-1) = 0.$$

Vì  $x, y \geq -\frac{1}{2}$  nên  $x+2y+4 > 0$  và do đó phương trình  $\Leftrightarrow x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$

Thay vào phương trình đầu ta được

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2}$$

Với ĐKXĐ  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ . Đặt

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = t > 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2x+1)(3-2x)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = \frac{t^2 - 4}{2} \Rightarrow -4x^2 + 4x - 1 = \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^2 - 4 \Rightarrow \frac{4x^2 - 4x + 1}{2} = -\frac{t^4 - 8t^2}{8}$$

Do đó ta có phương trình  $t = \frac{t^4 - 8t^2}{8} \Leftrightarrow t(t^3 - 8t + 8) = 0 \Leftrightarrow t(t-2)(t^2 + 2t - 4) = 0$

Vì  $t > 0$  nên  $t = 2$  hoặc  $t = \sqrt{5} - 1$

Xét  $t = 2$  ta có  $\sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$

Xét  $t = \sqrt{5} - 1$  ta có  $\sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2 - 2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} = 1 - \sqrt{5} < 0$  (Vô lí)

Đối chiếu ĐKXD của hệ phương trình ta có hệ phương trình có 2 nghiệm

$$\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

### Câu 79.

ĐKXD:  $x + y \neq 0$

Chia phương trình (1) cho  $(x + y)^2$  ta được hệ  $\begin{cases} 8(x^2 + y^2) + 4xy + \frac{5}{(x + y)^2} = 13 \\ 2x + \frac{1}{x + y} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x + y)^2 + \frac{1}{(x + y)^2}\right] + 3(x - y)^2 = 13 \\ \left(x + y + \frac{1}{x + y}\right) + (x - y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x + y + \frac{1}{x + y}\right)^2 + 3(x - y)^2 = 23 \\ \left(x + y + \frac{1}{x + y}\right) + (x - y) = 1 \end{cases}$$

Đặt  $u = x + y + \frac{1}{x + y}$ ,  $v = x - y$  (ĐK:  $|u| \geq 2$ ), ta có hệ  $\begin{cases} 5u^2 + 3v^2 = 23 & (3) \\ u + v = 1 & (4) \end{cases}$

Từ (4) rút  $u = 1 - v$ , thế vào (3) ta được

$$5u^2 + 3(1 - u)^2 = 23 \Leftrightarrow 4u^2 - 3u - 10 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \text{ hoặc } u = -\frac{5}{4}.$$

Trường hợp  $u = -\frac{5}{4}$  loại vì  $|u| < 2$ .

Với  $u = 2 \Rightarrow v = -1$  (thỏa mãn). Khi đó ta có hệ  $\begin{cases} x + y + \frac{1}{x + y} = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Giải hệ trên bằng cách thế  $x = -1 + y$  vào phương trình đầu ta được

$$2y - 1 + \frac{1}{2y - 1} = 2 \Leftrightarrow y = 1. \text{ Vậy hệ có nghiệm duy nhất } (x, y) = (0; 1).$$

### Câu 80.

Từ phương trình thứ hai ta có:  $x = 2 - 2y$  thế vào phương trình thứ nhất được:

$$(m-1)(2-2y)+y=2$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)y=2m-4 \quad (3)$$

Hệ có nghiệm  $x, y$  là các số nguyên  $\Leftrightarrow (3)$  có nghiệm  $y$  là số nguyên.

$$\text{Với } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m-3 \neq 0 \Rightarrow (3) \text{ có nghiệm } y = \frac{2m-4}{2m-3}$$

$$= 1 - \frac{1}{2m-3}$$

$$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3=1 \\ 2m-3=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=1 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị  $m$  thoả mãn là 1; 2.

### Câu 81.

Ta có:

$$x^3 = x + y \Rightarrow 2x^3 = 2(x+y) \Rightarrow 2x^3 = (x^2 + y^2 - xy)(x+y)$$

$$2x^3 = x^3 + y^3 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$$\text{Thế vào phương trình } x^2 + y^2 - xy = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm } (x, y) = \{(\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}$$

### Câu 82.

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} x^2 = 2 + xy^2 & (1) \\ y^2 = 2 + x^2y & (2) \end{cases}$$

- Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được ;

$$x^2 - y^2 = xy^2 - x^2y \Leftrightarrow (x-y)(xy+x+y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (3) \\ xy+x+y = 0 & (4) \end{cases}$$

- Thay  $y = x$  từ (3) vào (1) ta được phương trình :

$$x^2 = 2 + x^3 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy ta được các nghiệm  $(x; y)$  là :

$$(-1; -1); (1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}); (1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$$

- Từ (4) suy ra  $y = \frac{-x}{x+1}$  ( vì  $x = -1$  không phải là nghiệm của (4)). Thay  $y$  vào (2), ta

$$\text{có: } \frac{x^2}{(x+1)^2} = 2 + \frac{-x^3}{x+1} \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad (\forall x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

- Với  $x = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2 - \sqrt{5}} = -3 - \sqrt{5}$ . Ta được  $(x; y) = (1 - \sqrt{5}; -3 - \sqrt{5})$  là nghiệm của hệ.

- Với  $x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2 + \sqrt{5}} = -3 + \sqrt{5}$ . Ta được  $(x; y) = (1 + \sqrt{5}; -3 + \sqrt{5})$  là nghiệm của hệ.

Vậy hệ đã cho có 5 nghiệm :

$$(-1; -1); \quad (1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}); \quad (1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}); \quad (1 - \sqrt{5}; -3 - \sqrt{5}); \\ (1 + \sqrt{5}; -3 + \sqrt{5})$$

### Câu 83.

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - xy - y^3 = 0(1) \\ 2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(y+1) - y = 0(2) \end{cases} \quad \text{ĐK: } x \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow (x - y)(x + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$$

TH1:  $x + y^2 = 0$ , suy ra  $x = y = 0$  không thỏa mãn hệ.

TH2:  $x - y = 0$  hay  $y = x$  thế vào (2) ta được :  $2(x^2 + 1) - 3\sqrt{x}(x+1) - x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm :  $(x; y) = (4; 4)$  và  $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ .

### Câu 84.

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ (x^2y^2 + 2xy + 1)y - 2(2x+1) = -2y \end{cases} \quad (*)$$

(lưu ý: không nhất thiết biến đổi đưa về phải của pt thứ hai về  $-2y$ , có thể  $-3y$ )

- Xét  $y = 0$  thay vào hệ (\*) ta được:  $\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ -2(2x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Suy ra  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$  là một nghiệm của hệ.

- Xét  $y \neq 0$ , hệ phương trình (\*) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} xy + \frac{2x+1}{y} = 4 \\ x^2 y^2 + 2xy + 1 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1) + \frac{2x+1}{y} = 5 \\ (xy+1)^2 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} (**)$$

Đặt  $a = xy+1, b = \frac{2x+1}{y}$ ; khi đó hệ phương trình (\*\*) trở thành:  $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-2b=-2 \end{cases} (***)$

+ Giải hệ (\*\*\*) tìm được:  $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$ .

\* Với  $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} xy+1=2 \\ \frac{2x+1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2x+1}{3}\right)=1 \\ y=\frac{2x+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$

\* Với  $\begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$  ta có  $\begin{cases} xy+1=-4 \\ \frac{2x+1}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2x+1}{9}\right)=-5 \\ y=\frac{2x+1}{9} \end{cases}$  (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm:  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ .

**Cách khác:**

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2 y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ x^2 y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + (4x+2) = 8y \\ x^2 y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases} \Rightarrow x^2 y^3 + xy^2 - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ xy = 1 \\ xy = -5 \end{cases}$$

+ Với  $y = 0$ . Suy ra được  $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .

+ Với  $xy = 1$ . Suy ra được  $(x; y) = (1; 1)$  hoặc  $(x; y) = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ .

+ Với  $xy = -5$ . Trường hợp này không tồn tại cặp  $(x; y)$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm:  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ .

### Câu 85.

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = xy + x + 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases} \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 - x(y+1) = 1 \\ 2x^3 = x + y + 1 \end{cases} \quad (II)$$

Đặt  $t = y + 1$  ta có hệ

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ 2x^2 = (x+t)(x^2 + t^2 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t^2 - xt = 1 \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t = 1 \\ x = t = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = (1; 0); (-1; -2)$ .

### Câu 86.

Điều kiện:  $x \geq \frac{1}{2}$ . Phương trình thứ hai tương đương với

$$2y^4(5x-2)(x-3) = 3(2-5x) \Leftrightarrow (5x-2)[2y^4(x-3)+3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ 2y^4(x-3)+3 = 0 \end{cases}$$

Với  $2y^4(x-3)+3=0$  ta được  $y^4 = \frac{3}{6-2x} \Rightarrow y^2 = \sqrt{\frac{3}{6-2x}}$ , khi đó thế vào phương

trình thứ nhất ta được  $\sqrt{\frac{3}{6-2x}} \cdot \sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5\sqrt{\frac{3}{6-2x}} - \sqrt{6x-3}$  hay

$$\sqrt{6x-3} + \sqrt{3(6-2x)} = 5\sqrt{3} - \sqrt{(6x-3)(6-2x)}$$

Với phương trình trên ta nhận thấy có các hướng xử lý như sau

+ Hướng 1. Đặt ẩn phụ  $a = \sqrt{6x-3} \geq 0; b = \sqrt{3(6-2x)} \geq 0$ . Khi đó ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 15 \\ a + b = 5\sqrt{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 15 \\ \sqrt{3}(a+b) + ab = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b)^2 = 45 + 6ab \\ \sqrt{3}(a+b) = 15 - ab \end{cases}$$

Từ hệ trên ta được  $45 + 6ab = (15 - ab)^2 \Leftrightarrow (ab)^2 - 36ab + 180 = 0$ .

Chú ý là  $ab \geq 0$  nên từ phương trình trên ta được  $ab = 6$  và  $ab = 30$ .

Với  $ab = 30$  ta được  $a + b = -5\sqrt{3}$ , loại

Với  $ab = 6$  ta được  $a + b = 3\sqrt{3}$  suy ra  $a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3}$  hoặc  $a = \sqrt{3}; b = 2\sqrt{3}$ .

$$\text{Từ } a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3} \text{ ta được } \begin{cases} \sqrt{6x-3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3(6-2x)} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Từ } a = 2\sqrt{3}; b = \sqrt{3} \text{ ta được } \begin{cases} \sqrt{6x-3} = \sqrt{3} \\ \sqrt{3(6-2x)} = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Đây là hệ phương trình đối xứng nên ta có thể giải được hệ trên.

+ Hướng 2. Nhận thấy phương trình có một nghiệm  $x = 1$  nên ta sử dụng đại lượng liên hợp

$$\begin{aligned} & \sqrt{6x-3} + \sqrt{3(6-2x)} = 5\sqrt{3} - \sqrt{(6x-3)(6-2x)} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{6x-3} - \sqrt{3} + \sqrt{3(6-2x)} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{-12x^2 + 42x - 18} \\ \Leftrightarrow & \frac{6x-6}{\sqrt{6x-3} + \sqrt{3}} + \frac{6-6x}{\sqrt{3(6-2x)} + 2\sqrt{3}} = \frac{12x^2 - 42x + 30}{2\sqrt{3} + \sqrt{-12x^2 + 42x - 18}} \\ \Leftrightarrow & (6x-6) \left[ \frac{1}{\sqrt{6x-3} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3(6-2x)} + 2\sqrt{3}} - \frac{2x-5}{2\sqrt{3} + \sqrt{-12x^2 + 42x - 18}} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét phương trình } \frac{1}{\sqrt{6x-3} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3(6-2x)} + 2\sqrt{3}} - \frac{2x-5}{2\sqrt{3} + \sqrt{-12x^2 + 42x - 18}} = 0.$$

Phương trình trên được viết lại thành.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2x-1} + 1} - \frac{1}{\sqrt{6-2x} + 2} - \frac{2x-5}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{6-2x} + 2 - \sqrt{2x-1} - 1}{(\sqrt{2x-1} + 1)(\sqrt{6-2x} + 2)} + \frac{5-2x}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{6-2x} - 1 + 2 - \sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x-1} + 1)(\sqrt{6-2x} + 2)} + \frac{5-2x}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{5-2x}{(\sqrt{2x-1} + 1)(\sqrt{6-2x} + 2)} + \frac{5-2x}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (5-2x) \left[ \frac{1}{(\sqrt{2x-1} + 1)(\sqrt{6-2x} + 2)} + \frac{1}{2 + \sqrt{-4x^2 + 14x - 6}} \right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Từ các kết quả trên ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là

$$(x; y) = \left( 1; \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right), \left( 1; -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right), \left( \frac{5}{2}; \sqrt[4]{3} \right), \left( \frac{5}{2}; -\sqrt[4]{3} \right)$$

### Câu 87.

Cả hai phương trình đều có hạng tử xy nên ta sẽ tìm cách triệt tiêu, lúc này bài toán có thể giải được. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2xy - x + y = 6 \\ xy - y + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - x + y = 6 \\ 2xy - 2y + 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow 3y - 3x = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3} + x$$

Thế  $y = \frac{2}{3} + x$  vào phương trình thứ nhất ta được  $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x \in \left\{ -2; \frac{4}{3} \right\}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(x; y) = \left( -2; \frac{-4}{3} \right), \left( \frac{4}{3}; 2 \right)$

### Câu 88.

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 3 = 4x & (1) \\ x^3 + 12x + 8y^3 = 6x^2 + 9 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow 9 = 12x - 3x^2 - 12y^2$ , thế vào phương trình (2) và thu gọn ta được:

$$x^3 + 8y^3 = 3(x^2 - 4y^2) \Leftrightarrow (x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2 - 3x + 6y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x^2 - 2xy + 4y^2 - 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

\*) TH1:  $x+2y=0 \Leftrightarrow y = \frac{-x}{2}$ , thế vào phương trình (1) ta được

$$2x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 0, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

\*) TH2:  $x^2 - 2xy + 4y^2 - 3x + 6y = 0$ , trừ vế theo vế của phương này với phương trình (1) ta được:

$$-2xy - 3x + 6y - 3 = -4x \Leftrightarrow 2xy - x - 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Nếu  $x=3$  thay vào phương trình (1) ta được:  $4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ , cặp  $(x; y) = (3; 0)$  thoả mãn phương trình (2).

+ Nếu  $y = \frac{1}{2}$ , thay vào phương trình (1) ta được:  $(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ , cặp  $(x; y) =$

$\left( 2; \frac{1}{2} \right)$  thoả mãn phương trình (2).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là  $(x; y) = (3; 0)$  và  $(x; y) = (2; 1)$ .

**Câu 89.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

28 (Trích đề HSG tỉnh Nghệ An năm 2015-2016)

### Lời giải

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = y^2 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2x+1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + x(2x+1) + (2x+1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ 7x^2 + 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

Xét hệ:  $\begin{cases} y = -2x-1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ x^2 - x(2x+1) + (2x+1)^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ 3x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x;y)$  là:  $(0;1)$ ,  $(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7})$ ,  $(0;-1)$ ,  $(-1;1)$

### Câu 90.

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3 - y^3 = (y^2 - 5y^2)(4x - y) \Leftrightarrow 21x^3 - 5x^2y - 4xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(7x - 4y)(3x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{7}y \\ x = -\frac{y}{3} \end{cases}$$

- Với  $x = 0$  thay vào (2) ta được  $y = \pm 2$

- Với  $x = \frac{4}{7}y$  thay vào (2) ta được  $-\frac{31}{49}y^2 = 4$  phương trình vô nghiệm

- Với  $x = -\frac{y}{3}$  thay vào (2) ta được  $y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x; y) = (0; 2); (0; -2); (-1; 3); (1; -3)$$

### Câu 91.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y + 2 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{y - x + 1} = 2 & (2) \end{cases} \text{ Điều kiện } \begin{cases} x^2 - y + 3 \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - 3(x-1)y + 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\text{Tính } \Delta = (x-1)^2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ y = 2x-2 \end{cases}$$

Với  $y = x-1$  thay vào (2) ta được

$$\sqrt{x^2 - x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1(tm) \\ x = 0(tm) \end{cases}$$

Với  $y = 2x-2$  thay vào (2) ta được

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{x-1} = 2$$

Ta có  $\sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{x-1} \geq 2$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0(tm)$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm  $(x; y) = (0; -1); (1; 0)$

### Câu 92.

Xét hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy + y - 5x + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

PT (1)  $\Leftrightarrow 2x^2 - y^2 + xy + y - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$

Ta có  $\Delta' = (x+1)^2 - 4(-2x^2 + 5x - 2) = 9x^2 - 18x + 9 = 9(x-1)^2$

Khi đó PT (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1-3(x-1)}{2} \\ y = \frac{x+1+3(x-1)}{2} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x+2 \\ y = 2x-1 \end{cases}$

Với  $y = -x+2$ , thay vào PT (2) ta được  $2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Với  $y = 2x-1$ , thay vào PT (2) ta được  $5x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{5} \end{cases}$

\*)  $x=1 \Rightarrow y=1$

\*)  $x=-\frac{4}{5} \Rightarrow y=-\frac{13}{5}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(1; 1)$  và  $(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5})$

### Câu 93.

Điều kiện  $x \geq 1, y \in \mathbb{R}$

$$y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - \sqrt{x-1}(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y - \sqrt{x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\sqrt{x-1} \end{cases}$$

Với  $y=1$ , thay vào (2) ta được

$$x^2 + 1 - \sqrt{7x^2 - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{7x^2 - 3} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 7x^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ (do điều kiện của } x)$$

Với  $y = \sqrt{x-1}$ , thay vào (2) ta được  $x^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{7x^2 - 3} = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4) + (\sqrt{x-1} - 1) - (\sqrt{7x^2 - 3} - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0 \end{cases}$$

Với  $x=2$  suy ra  $y=1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} &= (x+2) \left( 1 - \frac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5} \right) + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \\ &= (x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x \geq 1 \text{ thì } \sqrt{7x^2-3}-2 \geq 0 \Rightarrow (x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } (x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 0$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm  $(1;1), (2;1)$ .

#### Câu 94.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được  $x = 5y - 20$ . Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\begin{aligned} (5y-19)(10y-39)(15y-59) &= (1+3y) \left[ 1+3y+2(5y-20)^2 \right] \\ \Leftrightarrow 750y^3 - 8725y^2 + 33830y - 34719 &= 150y^3 - 1141y^2 + 2006y + 801 \\ \Leftrightarrow 600y^3 - 7584y^2 - 31824y - 44520 &= 0 \Leftrightarrow (y-5)(75y^2 - 573y + 1113) = 0 \end{aligned}$$

Để thấy phương trình  $75y^2 - 573y + 1113 = 0$  vô nghiệm

Do đó từ phương trình trên ta được  $y-5=0 \Leftrightarrow y=5$  nên  $x=5$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $(5;5)$ .

**Cách khác:** Khi thực hiện phép thế  $x = 5y - 20$  vào phương trình thứ hai thì ta được phương trình một ẩn, tuy nhiên phương trình khó phân tích. Do đó ta có thể tìm cách phân tích phương trình thứ hai thành tích.

$$\begin{aligned}
& (1+x)(1+2x)(1+3x) = (1+3y)(1+3y+2x^2) \\
& \Leftrightarrow (2x^2+3x+1)(3x+1) = (1+3y)(1+3y+2x^2) \\
& \Leftrightarrow (3x+1)^2 + 2x^2(3x+1) = (1+3y)^2 + 2x^2(3y+1) \\
& \Leftrightarrow 3(x-y)[2+3(x+y)+2x^2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2+3(x+y)+2x^2=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Đến đây ta kết hợp với phương trình thứ nhất để tìm nghiệm.

Trong hai cách trên thì cách thực hiện phép thế dễ thấy hơn nhưng cách phân tích phương trình thứ hai thành tích cho lời giải đơn giản hơn.

### Câu 95.

Đặt  $a = 2x + y - 1; b = x - y + 1$ . Khi đó hệ phương trình viết được lại thành

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} a^2 + b^2 = 26 \\ a + b + ab = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = 26 \\ ab = 11 - (a + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 - 2[11 - (a + b)] = 26 \\ ab = 11 - (a + b) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 + 2(a + b) - 48 = 0 \\ ab = 11 - (a + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -8; ab = 19 \\ a + b = 6; ab = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

+ Với  $\begin{cases} a + b = -8 \\ ab = 19 \end{cases}$ , hệ vô nghiệm do  $(a + b)^2 < 4ab$ .

+ Với  $\begin{cases} a + b = 6 \\ ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = 5 \\ a = 5; b = 1 \end{cases}$ .

○ Khi  $a = 1; b = 5$  ta có  $\begin{cases} 2x + y - 1 = 1 \\ x - y + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ .

○ Khi  $a = 5; b = 1$  ta có  $\begin{cases} 2x + y - 1 = 5 \\ x - y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ .

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là  $(2; -2), (2; 2)$ .

**Chú ý.** Khi hai phương trình của hệ đều không thể phân tích được thành tích thì ta nhân một trong hai phương trình với một số  $k$  rồi cộng theo vế hai phương trình thì được một phương trình bậc hai. Ta cần tìm hằng số  $k$  để phương trình phân tích được thành tích. Chẳng hạn ta viết lại hệ phương trình như

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 4y = 24 \\ 3x + (2x + y - 1)(x - y + 1) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 4y - 24 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - xy + 4x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

Khi đó ta thấy nếu nhân phương trình thứ hai với  $k = 2$  rồi cộng hai phương trình thì ta thu được phương trình  $9x^2 + 6x - 48 = 0$ .

### Câu 96.

Từ  $x + y + z = 3$  và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$  ta được  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$ . Khi đó ta được

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{z(x+y+z)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(xy+zx+yz+z^2) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0$$

+ Xét trường hợp  $x+y=0$ , khi đó từ  $x+y+z=3$  ta được  $z=3$ .

Cũng từ  $x+y=0$  ta được  $x=-y$ . Thế vào  $x^2+y^2+z^2=17$  ta được

$$2x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2.$$

Từ đó ta được hai bộ số  $(x;y;z)$  thỏa mãn là  $(2;-2;3), (-2;2;3)$ .

+ Giải các trường hợp  $y+z=0$  và  $z+x=0$  ta được các bộ số là hoán vị của hai bộ số trên.

Vậy các bộ số  $(x;y;z)$  cần tìm là

$$(2;-2;3), (-2;2;3), (2;3;-2), (-2;3;2), (3;2;-2), (3;-2;2).$$

### Câu 97.

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$\begin{cases} x^2 + xy + zx = 48 \\ y^2 + xy + yz = 12 \\ z^2 + zx + yz = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z) = 48 \\ y(x+y+z) = 12 \\ z(x+y+z) = 84 \end{cases}$$

Mặt khác cộng theo vế các phương trình của hệ ta được

$$(x+y+z)^2 = 144 \Leftrightarrow x+y+z = \pm 12.$$

+ Với  $x+y+z=-12$ , thế vào phương trình trên ta được  $(x;y;z) = (-4;-1;-7)$ .

+ Với  $x+y+z=12$ , thế vào phương trình trên ta được  $(x;y;z) = (4;1;7)$ .

Thử vào hệ phương trình đã cho ta được các nghiệm của hệ là

$$(x;y;z) = (4;1;7), (-4;-1;-7).$$

**Câu 99.** Ta có: 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x) & (1) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ở phương trình (1) ta có:

$$x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = y^3 + 15y + 6y^2 + 14$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + 3y + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x = (y+2)^3 + 3 \cdot (y+2)$$

$$\Leftrightarrow x = y+2 \quad (*)$$

Từ (2) và (\*) ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = y + 2 \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y \\ 4x^3 + 6x \cdot (x - 2) + 15x + 3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y \\ 4x^3 + 6x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y \\ 8x^3 + 12x^2 + 6x + 6 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 1)^3 = -5 \\ x - 2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt[3]{5}}{2} \\ y = \frac{-5 - \sqrt[3]{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $\left(\frac{-1 - \sqrt[3]{5}}{2}; \frac{-5 - \sqrt[3]{5}}{2}\right)$

### Câu 100.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 2x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 2 - 2xy \\ (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 2x + 4y \end{cases} \Rightarrow (x + y)(2 - 2xy) = 2x + 4y \\ & \Leftrightarrow x^2y + xy^2 + y = 0 \Leftrightarrow y(x^2 + xy + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + xy + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Với  $x^2 + xy + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + xy = -1 \Rightarrow y^2 = \sqrt{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x^2 \pm \sqrt{3}x + 1 = 0$  phương trình vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y) = (\sqrt{2}; 0); (-\sqrt{2}; 0)$

### Câu 101.

$$\begin{cases} (x^2 - 1)y + (y^2 - 1)x = 2(xy - 1); (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2x - y - 6 = 0; (2) \end{cases}$$

$$x^2y + xy^2 - (x + y) - 2(xy - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(xy - 1) - 2(xy - 1) = 0$$

từ PT (1) ta có :

$$\Leftrightarrow (x + y - 2)(xy - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ xy = 1 \end{cases}$$

thay vào PT (2) giải ra có 5 nghiệm

$$(xy) \in \left\{ (1; 1); (-0,5; 2); \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}; \sqrt{3}+1\right); \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}; 1-\sqrt{3}\right); \left(\frac{-4}{5}; \frac{14}{5}\right) \right\}$$

### Câu 102.

Với  $x = y = 0$  là nghiệm của hệ phương trình

Nhận thấy nếu  $x \neq 0$  thì  $y \neq 0$  và ngược lại

Xét  $x \neq 0; y \neq 0$  hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 \\ (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{xy}) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2 & (1) \\ (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(2 + \frac{2}{xy}) & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^3 = 8$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{xy} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ có nghiệm  $(x; y)$  là  $(0; 0); (1; 1)$

### Câu 103.

a) Khi  $m = 10$  hệ phương trình có dạng  $\begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 10x + 50y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{52} \\ y = \frac{23}{52} \end{cases}$

Vậy khi  $m = 10$  thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (\frac{15}{52}; \frac{23}{52})$

b) Ta có:  $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{mx - 2}{2} \\ 2x + my = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{mx - 2}{2} \\ 2x + m \frac{mx - 2}{2} = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{mx - 2}{2} \\ (m^2 + 4)x = 2m + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m + 10}{m^2 + 4} \\ y = \frac{mx - 2}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = \frac{2m + 10}{m^2 + 4} \\ y = \frac{mx - 2}{2} \end{cases}$

Thay vào hệ thức  $x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$ .

Ta được  $\frac{-2014m^2 + 7m - 8050}{m^2 + 4} = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4} \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(m - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện đề bài ta được  $m = 1; m = 6$ .

### Câu 104.

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 4x + 2y = 2 \\ x(x+1) + y(y+1) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + xy - 4x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ta có:  $2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y+x-2)(y-2x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow y = 2 - x \text{ hoặc } y = 2x - 1$$

Với  $y = 2 - x$  thay vào (2) ta được:  $x^2 - 2x + 1 = 0$  suy ra  $x = 1$

Ta được nghiệm (1;1)

$y = 2x - 1$  thay vào (2) ta được:  $5x^2 - x - 4 = 0$ , suy ra  $x = 1; x = \frac{-4}{5}$

Ta được nghiệm (1;1) và  $(\frac{-4}{5}; \frac{-13}{5})$

Vậy hệ có nghiệm (1;1) và  $(\frac{-4}{5}; \frac{-13}{5})$

### Câu 105.

Điều kiện  $x \geq -1, y \geq 3$ . Ta xét các trường hợp

Trường hợp 1:  $x + 1 < y - 3 \Leftrightarrow y > x + 4$

Khi đó,  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} < \sqrt{y-1} + \sqrt{y-2} + \sqrt{y-3}$

Suy ra hệ vô nghiệm

Trường hợp 2:  $x + 1 > y - 3 \Leftrightarrow y < x + 4$

Khi đó,  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} > \sqrt{y-1} + \sqrt{y-2} + \sqrt{y-3}$

Suy ra hệ vô nghiệm

Trường hợp 3:  $x + 1 = y - 3 \Leftrightarrow y = x + 4$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho, ta được

$$2x^2 + 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$$

So điều kiện ta được  $x = -1 \Rightarrow y = 3$ . Vậy  $(x; y) = (-1; 3)$ .

### Câu 106.

Từ hệ ta có  $x^3(2y+x) = y^3(2x+y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(2xy + x^2 + y^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3(x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

\* Với  $x = y$  ta tìm được  $(x; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

\* Với  $x = -y$  ta tìm được  $(x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (-1; 1); (1; -1)$$

### Câu 107.

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 4x^3 - y^3 = x + 2y & (1) \\ 52x^2 - 82xy + 21y^2 = -9 & (2) \end{cases}$$

Nhân vế trái của (1) với vế phải của (2) và nhân vế phải của (1) với vế trái của (2) ta có:

$$\begin{aligned} & (-9)(4x^3 - y^3) = (x + 2y)(52x^2 - 82xy + 21y^2) \\ \Leftrightarrow & (-9)(4x^3 - y^3) - (x + 2y)(52x^2 - 82xy + 21y^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (8x^3 - 8xy^2) + (2x^2y - 2xy^2) - (3y^3 + 3y^2x) = 0 \\ \Leftrightarrow & 8x(x^2 - y^2) + 2xy(x - y) - 3y^2(x - y) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - y)(8x^2 + 10xy - 3y^2) = 0 \end{aligned}$$

Biến đổi nhận được phương trình:  $(x - y)(4x - y)(2x + 3y) = 0$

Với  $x = y$  tìm được  $(x; y) = (0; 0)$  (thử vào hệ không thỏa mãn)

$$(x; y) = (1; 1); (-1; -1) \quad (\text{thử vào hệ thấy thỏa mãn})$$

Với  $y = 4x$  tìm được  $(x; y) = (0; 0)$  (thử vào hệ không thỏa mãn)

Với  $y = \frac{-2}{3}x$  tìm được  $(x; y) = (0; 0)$  (thử vào hệ không thỏa mãn)

Vậy hệ có nghiệm  $(x; y) = (1; 1); (-1; -1)$

### Câu 108.

Nhân cả hai vế của (2) với 2 ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế với vế ta có

$$\begin{aligned} & (x^2 - 4xy + 4y^2) - 3(x - 2y) + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 - 3(x - 2y) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 2y - 1)(x - 2y - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1 \text{ hoặc } x = 2y + 2. \end{aligned}$$

+) Với  $x = 2y + 1$ , thế vào (2) và rút gọn ta có  $y(y + 3) = 0 \Leftrightarrow y = 0$  hoặc  $y = -3$ .

Suy ra  $x = 1, y = 0$  hoặc  $x = -5, y = -3$ .

+) Với  $x = 2y + 2$ , thế vào (2) và rút gọn ta có  $3y^2 + 13y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-13 + \sqrt{109}}{6}$

$$\text{hoặc } y = \frac{-13 - \sqrt{109}}{6}.$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{-7 + \sqrt{109}}{3}, y = \frac{-13 + \sqrt{109}}{6} \text{ hoặc } x = \frac{-7 - \sqrt{109}}{3}, y = \frac{-13 - \sqrt{109}}{6}.$$

Vậy hệ có 4 nghiệm  $x = 1, y = 0; x = -5, y = -3;$

$$x = \frac{-7 + \sqrt{109}}{3}, y = \frac{-13 + \sqrt{109}}{6}; x = \frac{-7 - \sqrt{109}}{3}, y = \frac{-13 - \sqrt{109}}{6}.$$