

KHÁI NIỆM HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Định nghĩa

- Hai tam giác gọi là *đồng dạng* với nhau nếu chúng có ba cặp góc bằng nhau đôi một và ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

$$\text{- Ta có } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \end{cases}$$

• Tính chất

a) Mọi tam giác đồng dạng với chính tam giác đó (hoặc nói: Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau).

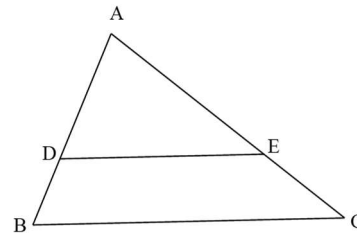
b) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $\frac{1}{k}$.

c) Nếu $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ và $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ thì $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

• Định lý

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

GT	$\triangle ABC$ $DE // BC (D \in AB, E \in AC)$
KL	$\triangle ADE \sim \triangle ABC$



II. DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1. Vẽ tam giác đồng dạng với tam giác cho trước. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Vẽ tam giác đồng dạng với tam giác cho trước.
 - Xác định tỉ số đồng dạng.
 - Kẻ đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.
- Chứng minh hai tam giác đồng dạng.
 - Sử dụng định nghĩa hoặc định lý nhận biết hai tam giác đồng dạng.

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Hãy vẽ tam giác đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số đồng dạng:

a) $k = \frac{2}{3}$;

b) $k = \frac{4}{3}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = 2AB$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = 2AC$. Chứng minh $ADE \sim ABC$.

Ví dụ 3. Từ điểm D trên cạnh AB của tam giác ABC, kẻ một đường thẳng song song với AC tại F; DF cắt AC ở I. Tìm cặp tam giác đồng dạng.

Ví dụ 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $CD = 2AB$. Gọi E là trung điểm của DC. Chứng minh ba tam giác EDA, ABE, CEB đồng dạng với nhau.

Dạng 2: Tính độ dài cạnh, tỉ số đồng dạng thông qua các tam giác đồng dạng.

Ví dụ 5. Cho 2 tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chứng minh tỉ số chu vi hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng k.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. Kẻ một đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC tại E và F. Biết $AE = 2\text{cm}$, tính tỉ số đồng dạng của AEF , ABC và độ dài các đoạn cạnh AF, EF.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$. Điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $BD = 2\text{cm}$. Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB lần lượt tại F và E.

a) Chứng minh $BDE \sim DCF$

b) Tính chu vi tứ giác AEDF

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức cạnh thông qua các tam giác đồng dạng.

Ví dụ 8. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 6\text{cm}$, $AD = 5\text{cm}$. Lấy F trên cạnh BC sao cho $CF = 3\text{cm}$. Tia DF cắt tia AB tại G.

a) Chứng minh $GBF \sim DCF$ và $GAD \sim DCF$

b) Tính độ dài đoạn thẳng AG

c) Chứng minh $AG.CF = AD.AB$

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC, kẻ Ax song song với BC. Từ trung điểm M của cạnh BC, kẻ một đường thẳng bất kì cắt Ax ở N, cắt AB ở P và cắt AC ở Q. Chứng minh: $\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$.

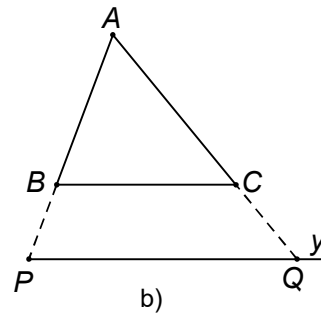
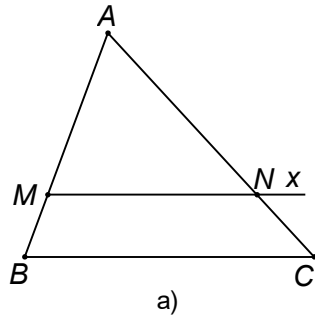
HƯỚNG DẪN GIẢI

1.a) Giả sử đã vẽ được $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$, thế thì $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} = k$.

Từ đó suy ra cách vẽ gồm hai bước sau:

Bước 1: Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

Bước 2: Kẻ $Mx \parallel BC$ cắt AC ở N .



Hình 296

Ta có $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

b) Giả sử đã vẽ được $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $k = \frac{4}{3}$ thế thì $\frac{AP}{AB} = \frac{4}{3} = k$.

Từ đó suy ra cách vẽ gồm hai bước sau:

Bước 1: Trên tia AB lấy điểm P sao cho $\frac{AP}{AB} = \frac{4}{3}$.

Bước 2: Kẻ $Pq \parallel BC$ cắt tia AC ở Q . Ta có $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

2.

Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AD, AE .

Từ đó chứng minh được

$\triangle AMN \sim \triangle ADE$ (định lí)

$\triangle ABC \sim \triangle AMN$ (do hai tam giác bằng nhau)

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$

3.

Dùng định nghĩa để chứng minh:

$\triangle ADE \sim \triangle CFE$; $\triangle EFI \sim \triangle CBI$; $\triangle FIC \sim \triangle BIA$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CFE$ (theo tính chất bắc cầu)

4.

Sử dụng tính chất các tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau để chứng minh.

5.

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để chứng minh.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'} = k$$

6.

CM được: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Có } \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AF = \frac{AC}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}; EF = \frac{BC}{3} = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

7.

a) HS tự chứng minh: $\triangle BED \sim \triangle BAC$; $\triangle DFC \sim \triangle BAC$

Từ đó suy ra $\triangle BED \sim \triangle DFC$

$$\text{b) Tương tự bài 5, ta tính được } BE = \frac{5}{4} \text{ cm}; ED = \frac{7}{4} \text{ cm}$$

Chu vi hình bình hành $AEDF = 2AE + 2ED = 11 \text{ cm}$.

8.

a) HS tự chứng minh $\triangle GBF \sim \triangle GAD$; $\triangle GBF \sim \triangle DCF$

$\Rightarrow \triangle GAD \sim \triangle DCF$

$$\text{b) Do } \triangle GBF \sim \triangle DCF \Rightarrow \frac{BG}{CD} = \frac{BF}{CF}$$

Thay số tính được $BG = 4 \text{ cm} \Rightarrow AG = 10 \text{ cm}$

$$\text{c) } \triangle GAD \sim \triangle DCF \Rightarrow \frac{GA}{DC} = \frac{AD}{CF} \Rightarrow GA \cdot CF = CD \cdot AD$$

mà $AB = CD \Rightarrow \text{đpcm}$

9.

$$\Delta PBM \sim \Delta PAN \Rightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{BM}{AN}$$

Theo định lí Ta-lét ta có:

$$\frac{QM}{QN} = \frac{MC}{AN} = \frac{BM}{AN} \Rightarrow đpcm.$$

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CƠ BẢN

Bài 1: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' đồng dạng với nhau theo tỉ số k, chứng minh rằng tỉ số chu vi của hai tam giác ABC và A'B'C' cũng bằng k.

Bài 2: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 10cm, CA = 14cm, AB = 6cm$. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF có cạnh nhỏ nhất là 9cm. Tính các cạnh còn lại của tam giác DEF.

Bài 3: Cho ΔABC , điểm D thuộc cạnh BC sao cho: $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$. Kẻ $DE // AC$; $DF // AB$

($E \in AB; F \in AC$).

a) Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng. Đối với mỗi cặp, hãy viết các góc bằng nhau và các tỉ số tương ứng.

b) Hãy tính chu vi ΔBED , biết hiệu chu vi của ΔDFC và ΔBED là 30cm

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo AC lấy điểm E sao cho $AC = 3AE$. Qua E vẽ đường thẳng song song với CD, cắt AD và BC theo thứ tự ở M và N.

a) Tìm các tam giác đồng dạng với ΔADC và tìm tỉ số đồng dạng.

b) Điểm E nằm ở vị trí nào trên AC thì E là trung điểm của MN?

Bài 5: Cho ΔABC . Vẽ tam giác đồng dạng với tam giác đó, biết tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$. Có thể dựng được bao nhiêu tam giác như thế?

HƯỚNG DẪN GIẢI PHIẾU TỰ LUYỆN

$$\text{Bài 1: } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = k = \frac{C_{\Delta ABC}}{C_{\Delta A'B'C'}}$$

Với $C_{\Delta ABC}$ là chu vi tam giác ABC và $C_{\Delta A'B'C'}$ là chu vi tam giác $A'B'C'$

Bài 2: $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

ΔABC cạnh nhỏ nhất là cạnh $AB = 6\text{ cm}$. Nên cạnh nhỏ nhất của ΔDEF là $DE = 9\text{ cm}$

Ta có: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{6}{9} = \frac{14}{DF} = \frac{10}{EF}$

Từ đó tính được $DF = 21\text{ cm}; EF = 15\text{ cm}$

Bài 3:

a) Các cặp tam giác đồng dạng:

$\Delta ABC \sim \Delta EBD$; $\Delta ABC \sim \Delta FDC$; $\Delta FDC \sim \Delta EBD$ (vì cùng đồng dạng với ΔABC)

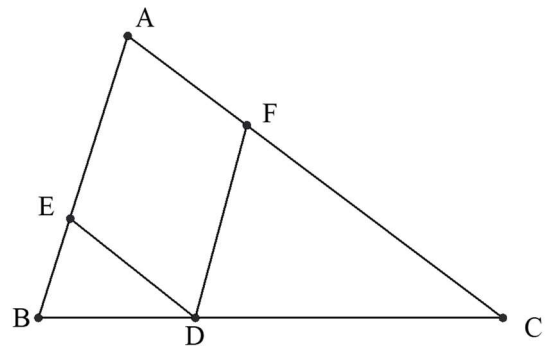
* $\Delta ABC \sim \Delta EBD$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BED}; \widehat{ABC} = \widehat{EBD}; \widehat{ACB} = \widehat{EDB};$

$\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED} = \frac{3}{1}$

* $\Delta ABC \sim \Delta FDC$ có: $\frac{AC}{FC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{FD} = \frac{3}{2}$

* $\Delta FDC \sim \Delta EBD$ có: $\frac{FC}{ED} = \frac{CD}{DB} = \frac{FD}{EB} = \frac{2}{1}$



c) Ta có tỉ số về chu vi bằng tỉ số đồng dạng

* $\Delta DFC \sim \Delta BED$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{CD}{DB} = \frac{2}{1}$

Do đó: $\frac{P_{\Delta DFC}}{P_{\Delta BED}} = \frac{2}{1} \Rightarrow P_{\Delta DFC} = 2P_{\Delta BED}$

Mà theo giả thiết: $P_{\Delta DFC} - P_{\Delta BED} = 30 \Rightarrow 2P_{\Delta BED} - P_{\Delta BED} = 30 \Rightarrow P_{\Delta BED} = 30(\text{cm})$

Bài 4:

a) Tam giác đồng dạng với ΔADC

* $\Delta ADC \sim \Delta ADC$. Tỉ số đồng dạng: $k_1 = 1$

* $\triangle ADC \sim \triangle CBA$. Tỉ số đồng dạng: $k_1 = 1$ (hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng)

$\triangle ADC \sim \triangle AME$ theo tỉ số đồng dạng $k_2 = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$

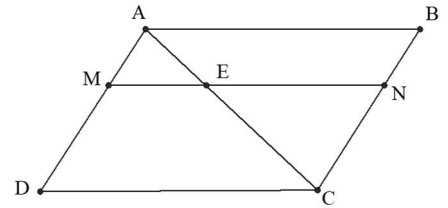
$\triangle ADC \sim \triangle CNE$ theo tỉ số đồng dạng $k_3 = \frac{AC}{CE} = \frac{3}{2}$

b) E là trung điểm của MN thì $EM = EN$ suy ra: $\frac{EM}{EN} = 1$

Ta có: $\triangle AME \sim \triangle CNE$ (cùng đồng dạng với $\triangle ADC$)

suy ra: $\frac{AE}{CE} = \frac{EM}{EN} = 1 \Rightarrow AE = CE = 1$

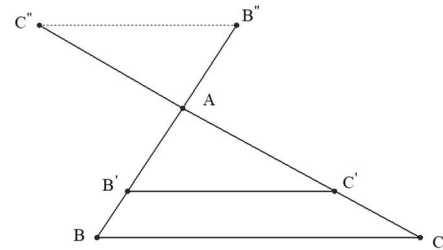
Suy ra E là trung điểm của AC



Bài 5: Cách 1: - Tại đỉnh A dựng tam giác $AB'C'$

đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$ bằng cách

Kẻ $B'C' \parallel BC$ sao cho $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{2}{3}$



- Tam giác có 3 đỉnh, tại mỗi đỉnh ta dựng tương tự như trên, sẽ được ba tam giác đồng dạng với tam giác ABC.

Cách 2: - Ta có cách dựng thứ 2 bằng cách vẽ $B''C'' \parallel BC$ sao cho: $\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{2}{3}$

- Tam giác có 3 đỉnh, tại mỗi đỉnh ta dựng tương tự như trên, sẽ được ba tam giác đồng dạng với tam giác ABC

Kết luận: Ta có thể dựng được sáu tam giác đồng dạng với tam giác ABC (trong đó tại mỗi đỉnh có một cặp tam giác bằng nhau).

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====