

# CHUYÊN ĐỀ MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

## A. LÝ THUYẾT



## B. DẠNG BÀI MINH HỌA

### I. BÀI TOÁN VÀ CÁC DẠNG BÀI VÀ PHƯƠNG PHÁP

#### Dạng 1: Chứng minh hệ thức

##### Phương pháp giải

Sử dụng định lý Ta-lét và hệ thức lượng đã học biến đổi các vế, đưa về dạng đơn giản để chứng minh.

**Bài 1.** Cho  $\Delta ABC$  nhọn có đường cao  $AH$ . Chứng minh  $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$ .

**Bài 2.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $AC \perp BD$  tại  $O$ . Chứng minh  $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  ( $\hat{A} < 90^\circ$ ), kẻ  $BM \perp CA$ . Chứng minh  $\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$ .

**Bài 4.** Một đường thẳng đi qua đỉnh  $A$  của hình bình hành  $ABCD$  cắt  $BD$ ,  $BC$ ,  $DC$  theo thứ tự ở  $E$ ,  $K$ ,  $G$ . Chứng minh rằng:

a)  $AE^2 = EK.EG$ ;

b)  $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$ ;

c) Khi đường thẳng thay đổi vị trí nhưng vẫn đi qua  $A$  thì tích  $BK.DG$  có giá trị không thay đổi.

**Bài 5.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $CD = b$ . Qua giao điểm  $O$  của hai đường chéo, kẻ đường thẳng song song với  $AB$ , cắt  $AD$  và  $BC$  theo thứ tự ở  $E$  và  $G$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{OE} = \frac{1}{OG} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

#### Dạng 2: Tìm độ dài đoạn thẳng, số đo góc

##### Phương pháp giải

*Bước 1:* Đặt độ dài cạnh, góc bằng ẩn.

*Bước 2:* Thông qua giả thiết và các hệ thức lượng lập phương trình chứa ẩn.

*Bước 3:* Giải phương trình, tìm ẩn số. Từ đó tính độ dài đoạn thẳng hoặc góc cần tìm.

**Bài 1.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ , có  $AB = 15$  cm,  $AH = 12$  cm. Tính  $BH, BC, CH, AC$

**Bài 2.** Cho hình thang  $ABCD$ , vẽ  $DE \perp AC$  ( $E \in AC$ ). Biết  $AB = 9$  cm,  $AC = 17$  cm,  $CD = 15$  cm.

a) Tính  $AD, BC, DE$ .

b) Tính  $S_{ABCD}, S_{ABC}$ .

**Bài 3.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AB = \frac{3}{4}AC, BC = 30$  cm. Tính  $AB, AC$ .

**Bài 4.** Cho hình thoi  $BEDF$  nội tiếp tam giác  $ABC$  ( $E$  thuộc  $AB$ ,  $D$  thuộc  $AC$ ,  $F$  thuộc  $BC$ ).

a) Tính cạnh hình thoi biết  $AB = c, BC = a$ .

b) Chứng minh  $BD < \frac{2ac}{a+c}$  với  $AB = c, BC = a$ .

c) Tính độ dài AB, BC, biết  $AD = m, DC = n, DE = d$ .

**Bài 5.** Cho tam giác ABC,  $PQ // BC$  với P, Q là các điểm tương ứng thuộc AB, AC. Đường thẳng PC và QB cắt nhau tại G. Đường thẳng đi qua G và song song với BC cắt AB tại E và AC tại F. Biết  $PQ = a, FE = b$ . Tính độ dài của BC.

**Bài 6.** Trên cạnh BC của hình vuông ABCD cạnh 6, lấy điểm E sao cho  $BE = 2$ . Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho  $CF = 3$ . Gọi M là giao điểm của AE và BF. Tính góc AMC.

### Dạng 3. Toán thực tế

**Bài 1:** Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5 m, các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng  $42^\circ$ . Tính chiều cao của cột đèn.

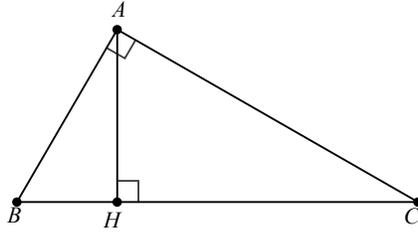
**Bài 2:** Ở độ cao 920 m, từ một máy bay trực thăng người ta nhìn hai điểm D, C của hai đầu cầu những góc so với đường vuông góc với mặt đất các góc lần lượt là  $\alpha = 37^\circ, \beta = 31^\circ$ . Tính chiều dài CD của cầu.

**Bài 3.** Một sợi dây treo từ ngọn cây thả xuống đất thì dư ra một đoạn dây dài 0,5 m. Nếu kéo căng sợi dây sao cho đầu dây chạm đất thì đo được khoảng cách từ đầu dây đến gốc cây là 2,5 m. Tính chiều cao cây.

**Bài 4.** Nhà An ở vị trí A, nhà Bảo ở vị trí B cách nhau 2 km. Quán Game ở tại vị trí C, biết  $AC = 800$  m và  $AB \perp AC$ . Vào một ngày đẹp trời, An hẹn Bảo đến quán Game. Biết An đi bộ với vận tốc 5 km/h và Bảo đi xe đạp. Hỏi Bảo phải đi với vận tốc bao nhiêu để đến quán Game cùng lúc với An.

## II. TRẮC NGHIỆM RÈN PHẦN XẠ

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$  (như hình vẽ). Hệ thức nào sau đây là **đúng**?

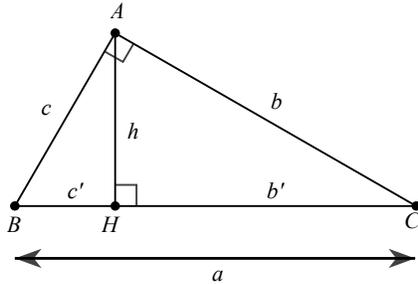


A.  $AH^2 = AB.AC$  .   B.  $AH^2 = BH.CH$  .   C.  $AH^2 = AB.BH$  .   D.  $AH^2 = CH.BC$  .

**Câu 2:** "Trong tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng .. ". Cụm từ thích hợp điền vào chỗ trống là:

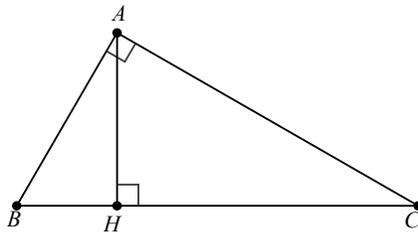
- A. Tích hai cạnh góc vuông.
- B. Tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.
- C. Tích cạnh huyền và 1 cạnh góc vuông.
- D. Tổng nghịch đảo các bình phương của hai cạnh góc vuông.

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$  (như hình vẽ). Hệ thức nào sau đây là sai?



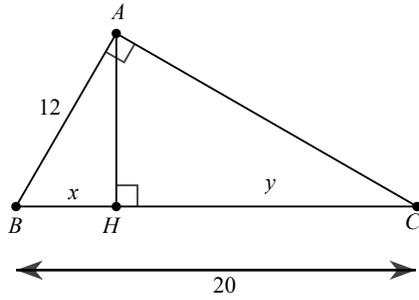
A.  $b^2 = b'.c$  .   B.  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$  .   C.  $a.h = b'.c'$  .   D.  $h^2 = b'.c'$  .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$  (như hình vẽ). Hệ thức nào sau đây là sai?



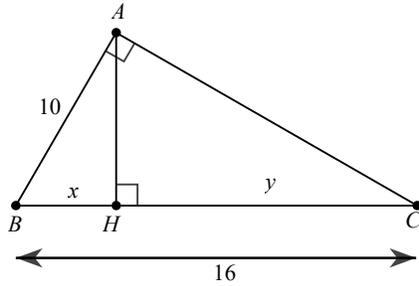
A.  $AB^2 = BH.BC$  .   B.  $AC^2 = CH.BC$  .   C.  $AB.AC = AH.BC$  . D.  $AH^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2}$

**Câu 5:** Tìm  $x, y$  trong hình vẽ sau:



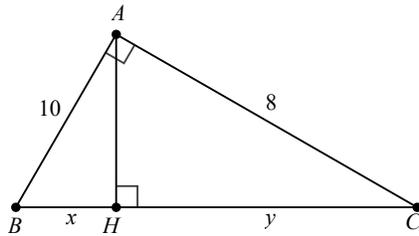
- A.**  $x = 7,2; y = 11,8$ . **B.**  $x = 7; y = 12$ . **C.**  $x = 7,2; y = 12,8$ . **D.**  $x = 7,2; y = 12$ .

**Câu 6:** Tính  $x, y$  trong hình vẽ sau:



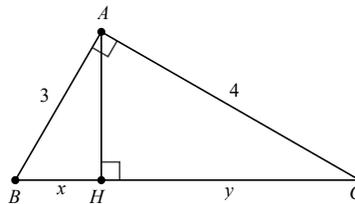
- A.**  $x = 6,5; y = 9,5$ . **B.**  $x = 6,25; y = 9,75$ . **C.**  $x = 9,25; y = 6,75$ . **D.**  $x = 6; y = 10$ .

**Câu 7:** Tìm  $x, y$  trong hình vẽ sau:



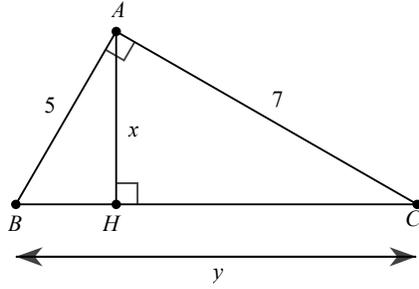
- A.**  $x = 3,6; y = 6,4$ . **B.**  $y = 3,6; x = 6,4$ . **C.**  $x = 4; y = 6$ . **D.**  $x = 2,8; y = 7,2$ .

**Câu 8:** Tính  $x, y$  trong hình vẽ sau:



- A.**  $x = 3,2; y = 1,8$ . **B.**  $x = 1,8; y = 3,2$ . **C.**  $x = 2; y = 3$ . **D.**  $x = 3; y = 2$ .

**Câu 9:** Tìm  $x, y$  trong hình vẽ sau:



- A.  $x = \frac{35\sqrt{74}}{74}; y = \sqrt{74}$ .    B.  $y = \frac{35\sqrt{74}}{74}; x = \sqrt{74}$ .    C.  $x = 4; y = 6$ .    D.  $x = 2,8; y = 7,2$ .

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , chiều cao  $AH$  và  $AB = 5; AC = 12$ . Đặt  $BC = y; AH = x$ . Tính  $x, y$ .

- A.  $x = 4; y = \sqrt{119}$ .    B.  $y = \frac{60}{13}; x = 13$ .    C.  $x = 4,8; y = 13$ .    D.  $x = \frac{60}{13}; y = 13$ .

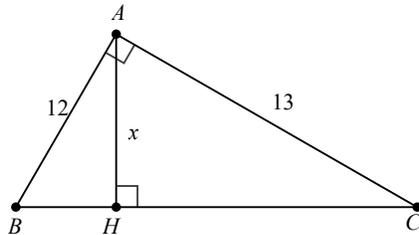
**Câu 11:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, AH \perp BC$  ( $H$  thuộc  $BC$ ). Cho biết  $AB : AC = 3 : 4$  và  $BC = 15\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $BH$ .

- A.  $BH = 5,4$ .    B.  $BH = 4,4$ .    C.  $BH = 5,2$ .    D.  $BH = 5$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, AH \perp BC$  ( $H$  thuộc  $BC$ ). Cho biết  $AB : AC = 4 : 5$  và  $BC = \sqrt{41}\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $CH$  (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

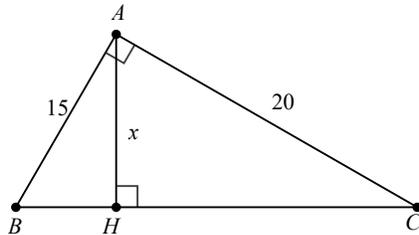
- A.  $CH \approx 2,5$ .    B.  $CH \approx 4$ .    C.  $CH \approx 3,8$ .    D.  $CH \approx 3,9$ .

**Câu 13:** Tính  $x$  trong hình vẽ sau:



- A.  $x = 14$ .    B.  $x = 13$ .    C.  $x = 12$ .    D.  $x = \sqrt{145}$ .

**Câu 14:** Tính  $x$  trong hình vẽ sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



- A.  $x \approx 8,81$ .    B.  $x \approx 8,82$ .    C.  $x \approx 8,83$ .    D.  $x \approx 8,80$ .

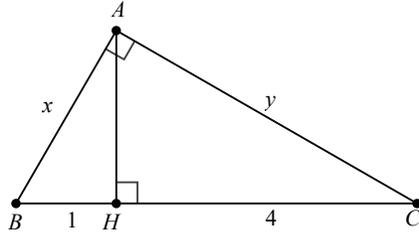
**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết:  $AB : AC = 3 : 4$  và  $AH = 6\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $CH$ .

- A.  $CH = 8$ .    B.  $CH = 6$ .    C.  $CH = 10$ .    D.  $CH = 12$ .

**Câu 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $AB : AC = 3 : 7$  và  $AH = 42\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $CH$ .

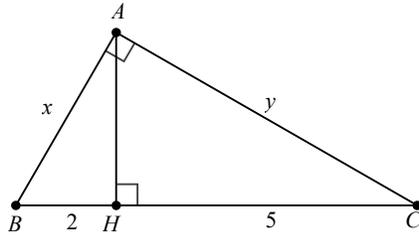
- A.**  $CH = 96$  .      **B.**  $CH = 49$  .      **C.**  $CH = 98$  .      **D.**  $CH = 89$  .

**Câu 17:** Tính  $x, y$  trong hình vẽ sau:



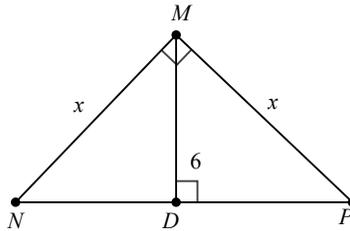
- A.**  $x = 2\sqrt{5}; y = \sqrt{5}$  .    **B.**  $x = \sqrt{5}; y = 3\sqrt{5}$  .    **C.**  $x = \sqrt{5}; y = 2\sqrt{5}$  .    **D.**  $x = 2\sqrt{5}; y = 2\sqrt{5}$  .

**Câu 18:** Tính  $x, y$  trong hình vẽ sau:



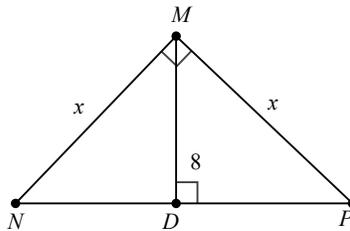
- A.**  $x = \sqrt{14}; y = \sqrt{35}$  .    **B.**  $x = \sqrt{35}; y = \sqrt{14}$  .    **C.**  $x = \sqrt{24}; y = 3\sqrt{5}$  .    **D.**  $x = \sqrt{6}; y = \sqrt{15}$  .

**Câu 19:** Tính  $x$  trong hình vẽ sau:



- A.**  $x = 6\sqrt{2}$  .      **B.**  $x = 8\sqrt{2}$  .      **C.**  $x = 8\sqrt{3}$  .      **D.**  $x = \frac{8}{\sqrt{2}}$  .

**Câu 20:** Tính  $x$  trong hình vẽ sau:



- A.**  $x = 6\sqrt{2}$  .      **B.**  $x = 6$  .      **C.**  $x = 6\sqrt{3}$  .      **D.**  $x = \sqrt{82}$  .

**Câu 21:** Cho  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ . Đường chéo  $BD$  vuông góc với  $BC$ . Biết  $AD = 12\text{cm}$ ,  $DC = 25\text{cm}$ . Tính độ dài  $BC$ , biết  $BC < 20$ .

- A.**  $BC = 15\text{cm}$  .      **B.**  $BC = 16\text{cm}$  .      **C.**  $BC = 14\text{cm}$  .      **D.**  $BC = 17\text{cm}$  .

**Câu 22:** Cho  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ . Đường chéo  $BD$  vuông góc với  $BC$ . Biết  $AD = 10\text{cm}$ ,  $DC = 20\text{cm}$ . Tính độ dài  $BC$ .

- A.  $BC = 3\sqrt{61} \text{ cm}$ .    B.  $BC = 2\sqrt{61} \text{ cm}$ .    C.  $BC = 15 \text{ cm}$ .    D.  $BC = \sqrt{61} \text{ cm}$ .

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AB : AC = 5 : 12$  và  $AB + AC = 34 \text{ cm}$ .

**Câu 23:** Tính các cạnh của tam giác  $ABC$ .

- A.  $AB = 5; AC = 12; BC = 13$ .    B.  $AB = 24; AC = 10; BC = 26$ .  
 C.  $AB = 10; AC = 24; BC = 26$ .    D.  $AB = 26; AC = 12; BC = 24$ .

**Câu 24:** Tính độ dài các đoạn  $AH, BH, CH$  (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

- A.  $AH \approx 9,23; BH \approx 7,69; CH \approx 18,31$ .    B.  $AH \approx 9,3; BH \approx 7,7; CH \approx 18,3$ .  
 C.  $AH \approx 8,23; BH \approx 8,69; CH \approx 17,31$ .    D.  $AH \approx 7,69; BH \approx 8,23; CH \approx 17,77$ .

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AB : AC = 3 : 4$  và  $AB + AC = 21 \text{ cm}$ .

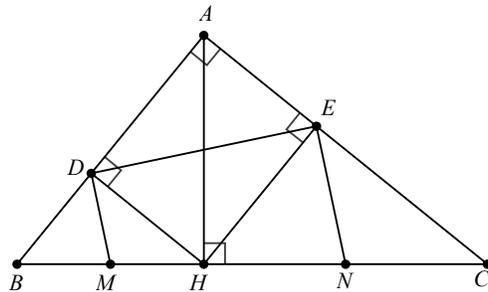
**Câu 25:** Tính các cạnh của tam giác  $ABC$ .

- A.  $AB = 9; AC = 10; BC = 15$ .    B.  $AB = 9; AC = 12; BC = 15$ .  
 C.  $AB = 8; AC = 10; BC = 15$ .    D.  $AB = 8; AC = 12; BC = 15$ .

**Câu 26:** Tính độ dài các đoạn  $AH, BH, CH$ .

- A.  $BH = 7,2; AH = 5,4; CH = 9,6$ .    B.  $CH = 7,2; BH = 5,4; AH = 9,6$ .  
 C.  $AH = 7,2; BH = 5,4; CH = 9$ .    D.  $AH = 7,2; BH = 5,4; CH = 9,6$ .

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $D$  và  $E$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $AB, AC$  (hình vẽ).



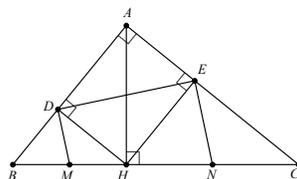
**Câu 27:** Tỉ số  $\frac{AB^2}{AC^2}$  bằng với tỉ số nào sau đây?

- A.  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HC}{HB}$ .    B.  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$ .    C.  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HA}{HB}$ .    D.  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HC}{HA}$ .

**Câu 28:** Tỉ số  $\frac{AB^3}{AC^3}$  bằng với tỉ số nào sau đây?

- A.  $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{EC}$ .    B.  $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{AD}{EC}$ .    C.  $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{ED}$ .    D.  $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{EC}{BD}$ .

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $BH = 9 \text{ cm}, CH = 16 \text{ cm}$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên các cạnh  $AB$  và  $AC$ . Các đường thẳng vuông góc với  $DE$  tại  $D$  và  $E$  lần lượt cắt  $BC$  tại  $M, N$ . (hình vẽ).



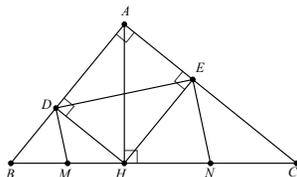
**Câu 29:** Tính độ dài đoạn thẳng  $DE$ .

- A.  $DE = 12 \text{ cm}$ .      B.  $DE = 8 \text{ cm}$ .      C.  $DE = 15 \text{ cm}$ .      D.  $DE = 16 \text{ cm}$ .

**Câu 30:** Tính độ dài đoạn  $MN$  ?

- A.  $MN = 15 \text{ cm}$ .      B.  $MN = 13 \text{ cm}$ .      C.  $MN = 12,5 \text{ cm}$ .      D.  $MN = 12 \text{ cm}$ .

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $BH = 9 \text{ cm}$ ,  $CH = 16 \text{ cm}$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên các cạnh  $AB$  và  $AC$ . Các đường thẳng vuông góc với  $DE$  tại  $D$  và  $E$  lần lượt cắt  $BC$  tại  $M, N$ . (hình vẽ).



**Câu 31:** Tính diện tích tứ giác  $DENM$ .

- A.  $S_{DENM} = 57 \text{ cm}^2$ .      B.  $S_{DENM} = 150 \text{ cm}^2$ .      C.  $S_{DENM} = 37,5 \text{ cm}^2$ .      D.  $S_{DENM} = 75 \text{ cm}^2$ .

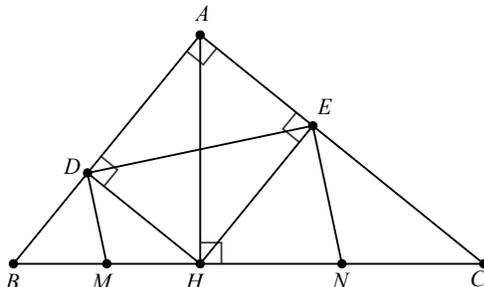
**Câu 32:** Tính độ dài đoạn thẳng  $DE$ .

- A.  $DE = 5 \text{ cm}$ .      B.  $DE = 8 \text{ cm}$ .      C.  $DE = 7 \text{ cm}$ .      D.  $DE = 6 \text{ cm}$ .

**Câu 33:** Kết luận nào sau đây là đúng?

- A.  $MN = \frac{1}{3} BC$ .      B.  $MN = \frac{1}{2} BC$ .      C.  $MN = \frac{3}{4} BC$ .      D.  $MN = \frac{2}{3} BC$ .

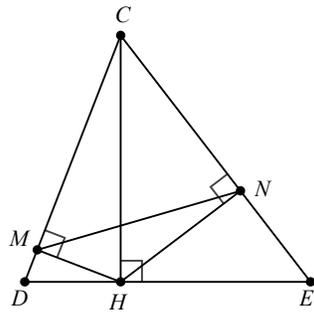
Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $BH = 4 \text{ cm}$ ,  $CH = 9 \text{ cm}$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên các cạnh  $AB$  và  $AC$ . Các đường thẳng vuông góc với  $DE$  tại  $D$  và  $E$  lần lượt cắt  $BC$  tại  $M, N$ . (hình vẽ).



**Câu 34:** Tính diện tích tứ giác  $DENM$ .

- A.  $S_{DENM} = 19,5 \text{ cm}^2$ .      B.  $S_{DENM} = 20,5 \text{ cm}^2$ .      C.  $S_{DENM} = 19 \text{ cm}^2$ .      D.  $S_{DENM} = 21,5 \text{ cm}^2$ .

Cho tam giác  $CDE$  nhọn, đường cao  $CH$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là hình chiếu của  $H$  lên  $CD, DE$ . (hình vẽ)



**Câu 35:** Tính  $CD \cdot CM$  bằng:

**A.**  $CH \cdot CE$ .

**B.**  $CE \cdot CN$ .

**C.**  $CH \cdot CN$ .

**D.**  $CD \cdot CN$ .



## HƯỚNG DẪN GIẢI

### I. BÀI TOÁN VÀ CÁC DẠNG BÀI

#### Dạng 1 Chứng minh đẳng thức hình học

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có đường cao  $AH$ . Chứng minh  $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$ .

**Lời giải**

Xét  $\triangle ABH$  vuông tại  $H$ , ta có:

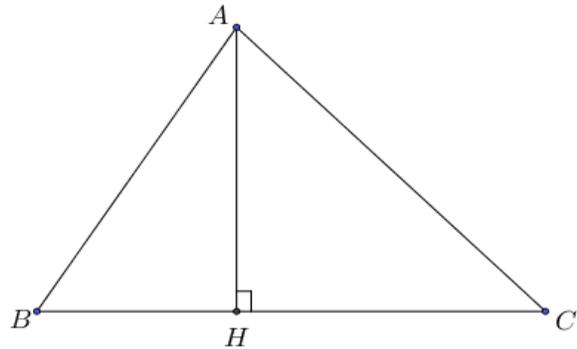
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (1).$$

Xét  $\triangle ACH$  vuông tại  $H$ , ta có:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad (2).$$

Lấy (1) - (2) ta được:

$$AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2 \quad (\text{đpcm}).$$



**Bài 2.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $AC \perp BD$  tại  $O$ . Chứng minh  $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ .

**Lời giải**

Lần lượt xét các tam giác vuông

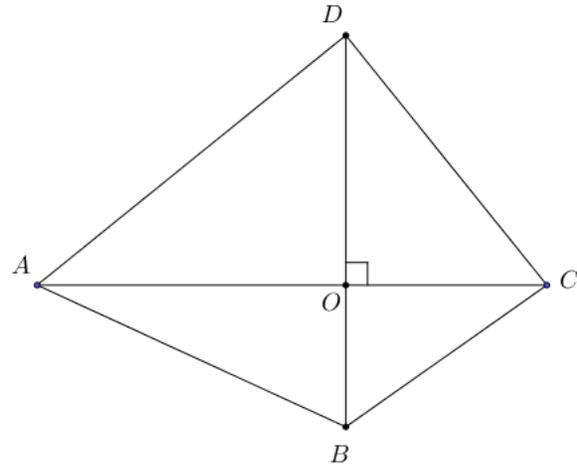
$AOD, AOB, BOC, DOC$  ta được:

$$\left\{ \begin{array}{l} AD^2 = OA^2 + OD^2 \quad (1) \\ CD^2 = OC^2 + OD^2 \quad (2) \\ AB^2 = OA^2 + OB^2 \quad (3) \\ BC^2 = OB^2 + OC^2 \quad (4) \end{array} \right.$$

Lấy  $\begin{cases} (1)+(4) \\ (2)+(3) \end{cases}$ , ta được:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \\ AD^2 + BC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$



**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  ( $\hat{A} < 90^\circ$ ), kẻ  $BM \perp CA$ . Chứng minh  $\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$ .

### Lời giải

Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ . Lại có  $\Delta ABC$  cân tại  $A \Rightarrow AH$  vừa là trung tuyến, vừa là đường cao. Xét  $\Delta AHC$  và  $\Delta BMC$

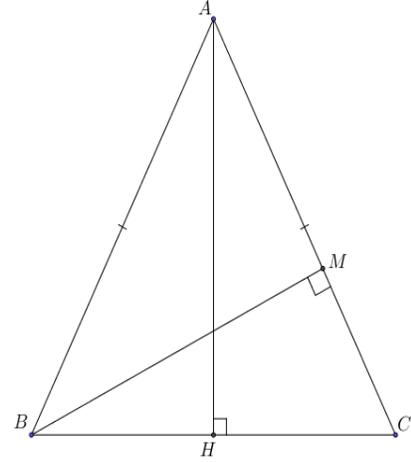
$$\text{có: } \begin{cases} \widehat{AHC} = \widehat{BMC} = 90^\circ \\ \widehat{BCM} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta BMC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{MC}{HC} \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{2MC}{BC} \Leftrightarrow BC^2 = 2MC.AC \quad (1).$$

$$\text{Xét: } \frac{AM}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{AC - MC}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = 2 \left( \frac{AB}{BC} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{2.AB^2}{2.MC.AC} \text{ (Thay (1) vào)}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{AB^2}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 \text{ (luôn đúng)} \Rightarrow \text{đpcm.}$$



**Bài 4.** Một đường thẳng đi qua đỉnh  $A$  của hình bình hành  $ABCD$  cắt  $BD$ ,  $BC$ ,  $DC$  theo thứ tự ở  $E$ ,  $K$ ,  $G$ . Chứng minh rằng:

a)  $AE^2 = EK.EG$ ;

b)  $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$ ;

c) Khi đường thẳng thay đổi vị trí nhưng vẫn đi qua  $A$  thì tích  $BK.DG$  có giá trị không thay đổi.

### Lời giải

a) Vì  $AD \parallel BK \Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} \quad (1)$

Vì  $AB \parallel DG \Rightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{EB}{ED} \quad (2)$

Từ (1) và (2) có:  $\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK.EG$

Vậy  $AE^2 = EK.EG$

b) Vì  $AD \parallel BK \Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$ ;  $AB \parallel DG \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$

nên  $\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BD} + \frac{BE}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} = \frac{1}{AE}$

Vậy  $\frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} = \frac{1}{AE}$ .

c) Đặt  $AB = a$ ,  $AD = b$

Vì  $AB \parallel CG \Rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} = \frac{a}{CG}$ ;  $AD \parallel CK \Rightarrow \frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} = \frac{KC}{b}$  nên  $\frac{BK}{a} = \frac{b}{DG}$

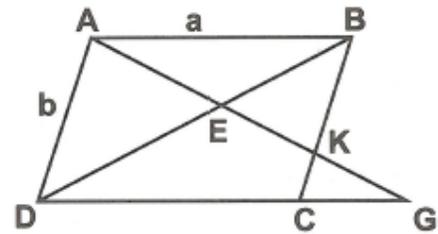
$\Rightarrow BK.DG = a.b$  (hằng số).

Vậy khi đường thẳng thay đổi vị trí nhưng vẫn đi qua  $A$  thì tích  $BK.DG$  có giá trị không thay đổi.

**Bài 5.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $CD = b$ . Qua giao điểm  $O$  của hai đường chéo, kẻ đường thẳng

song song với  $AB$ , cắt  $AD$  và  $BC$  theo thứ tự ở  $E$  và  $G$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{OE} = \frac{1}{OG} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

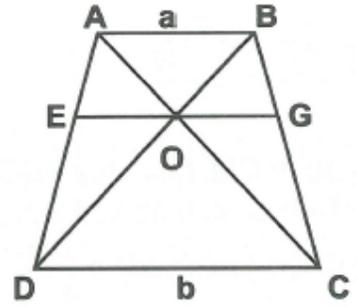
### Lời giải



Vì  $OE \parallel AB$  nên  $\frac{OE}{AB} = \frac{DE}{DA} \Leftrightarrow \frac{OE}{a} = \frac{DE}{DA}$  (theo hệ quả định lý Ta-lét) (1).

Vì  $OE \parallel CD$  nên  $\frac{OE}{DC} = \frac{AE}{DA} \Leftrightarrow \frac{OE}{b} = \frac{AE}{DA}$  (theo hệ quả định lý Ta-lét) (2).

Từ (1) và (2) ta được  $\frac{OE}{a} + \frac{OE}{b} = \frac{DE}{DA} + \frac{AE}{DA} = 1 \Leftrightarrow OE \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{OE}$$

Tương tự có:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{OG}$

Vậy  $\frac{1}{OE} = \frac{1}{OG} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

## Dạng 2: Tìm độ dài đoạn thẳng, số đo góc

**Bài 1.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ , có  $AB = 15\text{ cm}$ ,  $AH = 12\text{ cm}$ . Tính  $BH, BC, CH, AC$

**Lời giải**

Xét  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ . Ta có:

$$\bullet \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{15^2} = \frac{1}{400}$$

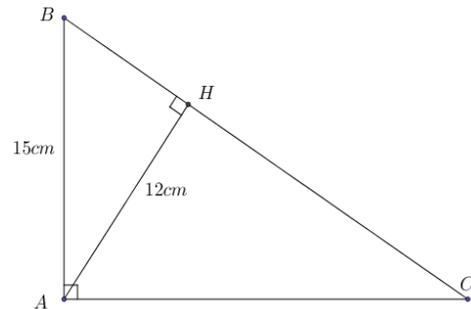
$$\Leftrightarrow AC = 20(\text{cm}).$$

$$\bullet BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$$

$$\Leftrightarrow BC = 25(\text{cm})$$

$$\bullet AB^2 = BH \cdot BC \Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{15^2}{25} = 9(\text{cm}).$$

$$\bullet AC^2 = CH \cdot CB \Leftrightarrow CH = \frac{AC^2}{CB} = \frac{20^2}{25} = 16(\text{cm}).$$



**Bài 2.** Cho hình thang  $ABCD$ , vẽ  $DE \perp AC$  ( $E \in AC$ ). Biết  $AB = 9\text{ cm}$ ,  $AC = 17\text{ cm}$ ,  $CD = 15\text{ cm}$ .

a) Tính  $AD, BC, DE$ .

b) Tính  $S_{ABCD}, S_{ABC}$ .

**Lời giải**

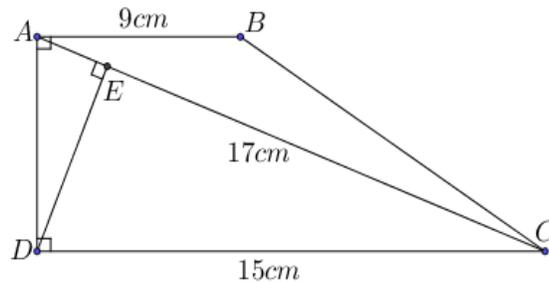
a. Xét  $\Delta ADC$  vuông tại  $D$ , có đường cao  $DE$ , ta được:

$$\bullet AD^2 = AC^2 - DC^2 = 17^2 - 15^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow AD = 8(\text{cm}).$$

$$\bullet \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2} = \frac{289}{14400}$$

$$\Leftrightarrow DE = \frac{120}{17}(\text{cm}).$$



Từ  $B$  kẻ  $BH \perp DC$  ( $H \in DC$ ).

$$\Rightarrow AD \parallel BH.$$

Ta lại có:  $AB \parallel DH$  ( $ABCD$  là hình thang)

và  $\widehat{BAD} = 90^\circ$ .

$\Rightarrow ABDH$  là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = DH = 9(\text{cm}) \\ AD = BH = 8(\text{cm}) \end{cases}$$

Xét  $\Delta BHC$  vuông tại  $H$ , ta được:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = 8^2 + (DC - DH)^2$$

$$= 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow BC = 10(\text{cm}).$$

b. Ta có:

$$\bullet S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2} = 92 (\text{cm}^2) \bullet$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60 (\text{cm}^2).$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = S_{ABCD} - S_{ADC} = 92 - 60$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} = 32 (\text{cm}^2).$$

**Bài 3.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AB = \frac{3}{4}AC$ ,  $BC = 30 \text{ cm}$ . Tính  $AB$ ,  $AC$ .

**Lời giải**

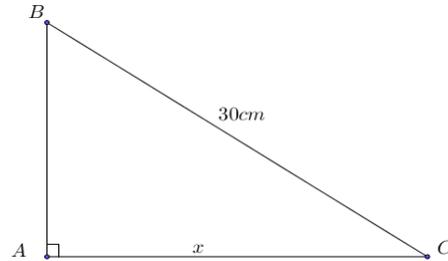
Gọi  $AC = x (\text{cm}) \Rightarrow AB = \frac{3x}{4} (\text{cm})$  với  $x > 0$ . Xét

$\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 900 = \frac{9x^2}{16} + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 576 \Leftrightarrow x = 24.$$

Vậy  $AC = 24 (\text{cm})$ ,  $AB = 18 (\text{cm})$ .



**Bài 4.** Cho hình thoi  $BEDF$  nội tiếp tam giác  $ABC$  ( $E$  thuộc  $AB$ ,  $D$  thuộc  $AC$ ,  $F$  thuộc  $BC$ ).

a) Tính cạnh hình thoi biết  $AB = c$ ,  $BC = a$ .

b) Chứng minh  $BD < \frac{2ac}{a+c}$  với  $AB = c$ ,  $BC = a$ .

c) Tính độ dài  $AB$ ,  $BC$ , biết  $AD = m$ ,  $DC = n$ ,  $DE = d$ .

**Lời giải**

a) Gọi độ dài cạnh hình thoi là  $x$ .

Vì  $ED \parallel BC$  nên  $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB}$  (hệ quả định lý Ta-lét)

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{c-x}{c} \Leftrightarrow cx = a(c-x) \Leftrightarrow cx = ac - ax$$

$$\Leftrightarrow (a+c)x = ac \Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+c}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{ac}{a+c}.$$

b) Trên tia đối của tia  $BC$  lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = BA$ .

Ta có tam giác  $ABK$  cân tại  $B$  nên  $\widehat{BKA} = \widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$  (tính chất góc ngoài tam giác).

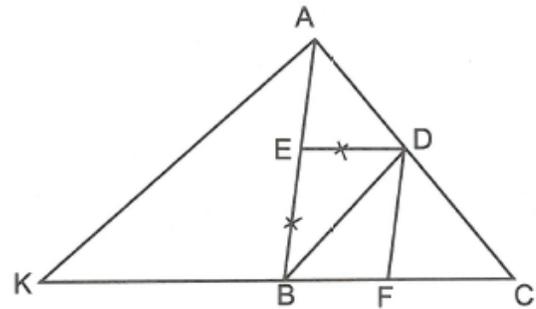
Mà  $\widehat{EBD} = \widehat{DBF} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{DBF} \Rightarrow BD \parallel AK \Rightarrow \frac{BD}{AK} = \frac{CB}{CK}$  (hệ quả định lý Ta-lét)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AK} = \frac{CB}{BC+BK} = \frac{a}{a+c} \quad (1)$$

Trong tam giác  $ABK$  có:

$AK < AB + BK = c + c = 2c$  (định lý về độ dài cạnh trong tam giác) (2).

$$\text{Từ (1) và (2) có: } BD < \frac{a}{a+c} \cdot 2c = \frac{2ac}{a+c}$$



Vậy  $BD < \frac{2ac}{a+c}$ .

c) Vì  $ED \parallel BC$  nên  $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$  (hệ quả định lý Ta-lét)  $\Rightarrow \frac{d}{BC} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow BC = \frac{d(m+n)}{m}$

Tương tự có  $AB = \frac{d(m+n)}{n}$

Vậy  $BC = \frac{d(m+n)}{m}$  và  $AB = \frac{d(m+n)}{n}$ .

**Bài 5.** Cho tam giác ABC,  $PQ \parallel BC$  với P, Q là các điểm tương ứng thuộc AB, AC. Đường thẳng PC và QB cắt nhau tại G. Đường thẳng đi qua G và song song với BC cắt AB tại E và AC tại F. Biết  $PQ = a$ ,  $FE = b$ . Tính độ dài của BC.

**Lời giải**

Đặt  $BC = x$ .

Áp dụng kết quả của Ví dụ 2 - dạng 1 - chủ đề 1 ta có:

$$\frac{1}{GE} = \frac{1}{GF} = \frac{1}{a} + \frac{1}{x} \Rightarrow GE = GF = \frac{ax}{a+x}$$

$$\Rightarrow GE + GF = 2 \frac{ax}{a+x} \Leftrightarrow EF = \frac{2ax}{a+x} \Leftrightarrow b = \frac{2ax}{a+x}$$

$$\Leftrightarrow ab + bx - 2ax = 0 \Leftrightarrow x = \frac{ab}{2a-b}$$

Vậy  $BC = \frac{ab}{2a-b}$ .

**Bài 6.** Trên cạnh BC của hình vuông ABCD cạnh 6, lấy điểm E sao cho  $BE = 2$ . Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho  $CF = 3$ . Gọi M là giao điểm của AE và BF. Tính góc AMC.

**Lời giải**

Gọi H là giao điểm của CM và AB, G là giao điểm của AM và DF.

Vì  $AB \parallel CG$  nên  $\frac{AB}{CG} = \frac{BE}{EC} = \frac{BE}{BC - BE} = \frac{2}{6-2} = \frac{1}{2}$  (hệ quả định lý Ta-lét)

$$\Rightarrow CG = 2AB = 2.6 = 12 \Rightarrow FG = CG - CF = 12 - 3 = 9$$

Vì  $AH \parallel CG$  nên  $\frac{BH}{AB} = \frac{CF}{FG}$

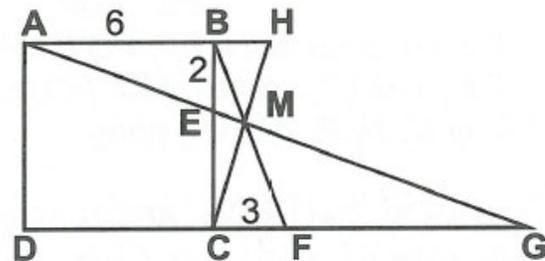
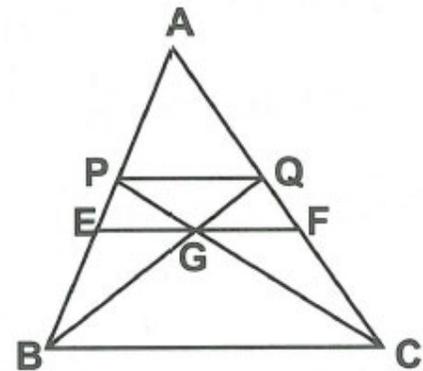
$$\Rightarrow \frac{BH}{6} = \frac{3}{9} \Rightarrow BH = 6 \cdot \frac{3}{9} = 2 \Rightarrow BH = BE$$

Xét  $\triangle BAE$  và  $\triangle BCH$  có:

$$\begin{cases} BE = BH \text{ (theo trên)} \\ \widehat{ABE} = \widehat{CBH} = 90^\circ \\ AB = BC \text{ (tính chất hình vuông)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BAE = \triangle BCH (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{BHC} \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{MAH} + \widehat{AHM} = \widehat{MAH} + \widehat{AEB} = 90^\circ$$

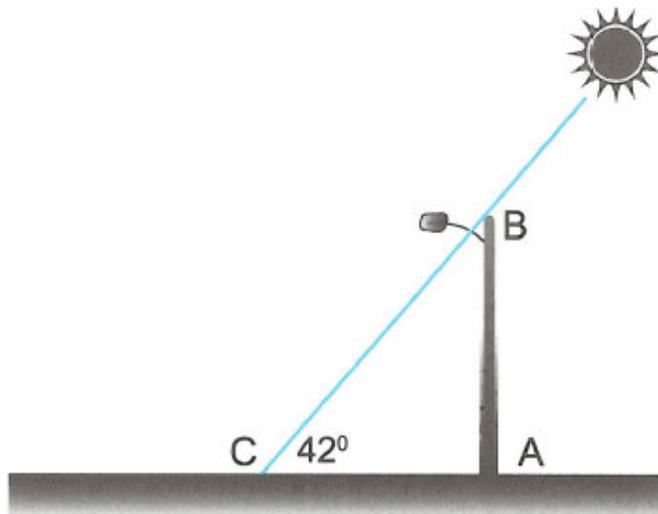
Vậy  $\widehat{AMC} = 90^\circ$ .



### Dạng 3: Toán thực tế:

**Bài 1:** Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5 m, các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng  $42^\circ$ . Tính chiều cao của cột đèn.

**Lời giải**



Gọi chiều cao của cột đèn là  $AB$ , bóng của nó trên mặt đất là  $AC$ . Ta có:  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ .

Theo giả thiết, ta có  $\widehat{BCA} = 42^\circ$ .

Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , ta có:

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \tan \widehat{BCA} \approx 7,5 \tan 42^\circ \approx 6,75(\text{cm})$$

Vậy chiều cao của cột đèn là 6,75 (cm).

**Bài 2:** Ở độ cao 920 m, từ một máy bay trực thăng người ta nhìn hai điểm  $D, C$  của hai đầu cầu những góc so với đường vuông góc với mặt đất các góc lần lượt là  $\alpha = 37^\circ$ ,  $\beta = 31^\circ$ . Tính chiều dài  $CD$  của cây cầu.

**Lời giải**

Gọi  $A$  là vị trí của trực thăng,  $B$  là chân đường vuông góc hạ từ  $A$  xuống mặt đất.  $C$  và  $D$  là hai điểm đầu cầu.

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{BAD} = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow BD = AB \cdot \tan \widehat{BAD} = 920 \cdot \tan 37^\circ \approx 920 \cdot 0,754 \approx 693,68(\text{m})$$

$$\text{Mặt khác: } \tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

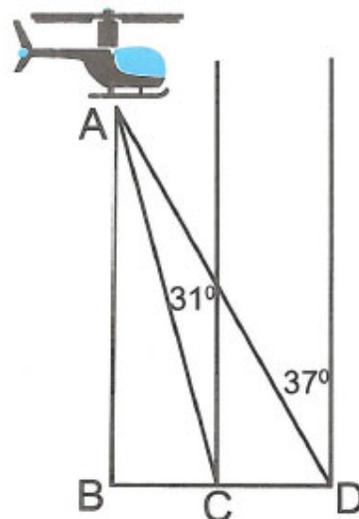
$$\Rightarrow BC = AB \cdot \tan \widehat{BAC} = 920 \cdot \tan 31^\circ \approx 920 \cdot 0,6 \approx 552(\text{m})$$

Vậy chiều dài của cây cầu là:

$$CD = BD - BC \approx 693,68 - 552 = 141,68(\text{m}).$$

**Bài 3.** Một sợi dây treo từ ngọn cây thả xuống đất thì dư ra một đoạn dây dài 0,5 m. Nếu kéo căng sợi dây sao cho đầu dây chạm đất thì đo được khoảng cách từ đầu dây đến gốc cây là 2,5 m. Tính chiều cao cây.

**Lời giải**



Gọi chiều dài dây là  $AC$  và chiều cao cây là  $AB$ . Đặt

$AB = x$  (m) với  $x > 0,5$ .

Do khi dây treo từ ngọn cây thả xuống đất thì dư ra một đoạn  $= 0,5$  m .

$\Rightarrow AC = x + 0,5$  (m)

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  , ta được:  $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$$\Leftrightarrow (x + 0,5)^2 = 2,5^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + x + 0,25 = 6,25 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy cây cao 6 m .



**Bài 4.** Nhà An ở vị trí  $A$  , nhà Bảo ở vị trí  $B$  cách nhau 2 km . Quán Game ở tại vị trí  $C$  , biết  $AC = 800$  m và  $AB \perp AC$  . Vào một ngày đẹp trời, An hẹn Bảo đến quán Game. Biết An đi bộ với vận tốc 5 km/h và Bảo đi xe đạp. Hỏi Bảo phải đi với vận tốc bao nhiêu để đến quán Game cùng lúc với An.

**Lời giải**

$$800 \text{ m} = 0,8 \text{ Km}.$$

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2000^2 + 800^2$$

$$\Leftrightarrow BC = 2154 \text{ (m)} = 2,154 \text{ (Km)}.$$

Thời gian An đi từ nhà đến quán Game là

$$t_1 = \frac{AC}{v_1} = \frac{0,8}{5} = 0,16 \text{ (h)}.$$

Thời gian Bảo đi từ nhà đến quán Game là

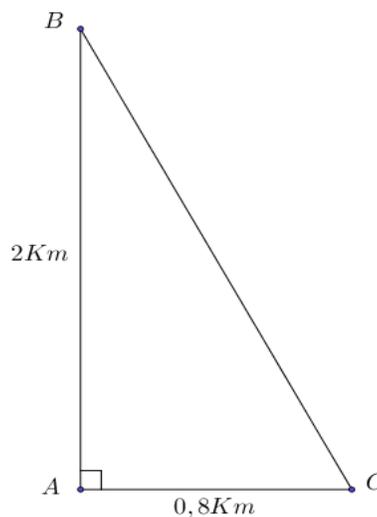
$$t_2 = \frac{BC}{v_2} = \frac{2,154}{v_2} \text{ (h)}.$$

Do An và Bảo đến cùng lúc nên

$$t_1 = t_2 \Leftrightarrow \frac{2,154}{v_2} = 0,16$$

$$\Leftrightarrow v_2 \approx 13,5 \text{ (Km/h)}.$$

Vậy Bảo sẽ đi với vận tốc  $\approx 13,5$  Km/h.



## II. TRẮC NGHIỆM RÈN PHẢN XẠ

### Câu 1. Lời giải:

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Khi đó ta có hệ thức  $HA^2 = HB.HC$ .

Đáp án cần chọn là B.

### 2. Lời giải:

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Khi đó ta có hệ thức  $HA^2 = HB.HC$ .

Hay "Trong tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng Tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền".

Đáp án cần chọn là B.

### 3. Lời giải:

Nhận thấy  $ah = bc$  nên phương án C là sai.

Đáp án cần chọn là C.

### 4. Lời giải:

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Khi đó ta có các hệ thức

$$AC^2 = CH.BC; AB^2 = BH.BC; AB.AC = BC.AH \text{ và } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

Nhận thấy phương án D:  $AH^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$  là sai.

Đáp án cần chọn là D.

### 5. Lời giải:

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{144}{20} = 7,2 \Rightarrow CH = BC - BH = 20 - 7,2 = 12,8.$$

Vậy  $x = 7,2; y = 12,8$ .

Đáp án cần chọn là C.

### 6. Lời giải:

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{100}{16} = 6,25 \Rightarrow CH = BC - BH = 16 - 6,25 = 9,75.$$

Vậy  $x = 6,25; y = 9,75$ .

Đáp án cần chọn là B.

### 7. Lời giải:

Theo định lý Pytago ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 100 \Leftrightarrow BC = 10$ .

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ hay } x = 3,6.$$

$\Rightarrow CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4$  hay  $y = 6,4$ . Vậy  $x = 3,6; y = 6,4$ .

Đáp án cần chọn là A.

### 8. Lời giải:

Theo định lý Pytago ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5$ .

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = 1,8 \text{ hay } x = 1,8.$$

$\Rightarrow CH = BC - BH = 5 - 1,8 = 3,2$  hay  $y = 3,2$ .

Vậy  $x = 1,8; y = 3,2$ .

Đáp án cần chọn là B.

### 9. Lời giải:

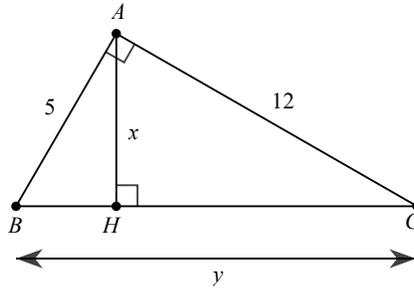
Theo định lý Pytago ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 74 \Leftrightarrow BC = \sqrt{74}$ .

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 7}{\sqrt{74}} = \frac{35\sqrt{74}}{74}. \text{ Vậy } x = \frac{35\sqrt{74}}{74}; y = \sqrt{74}.$$

Đáp án cần chọn là A.

### 10. Lời giải:



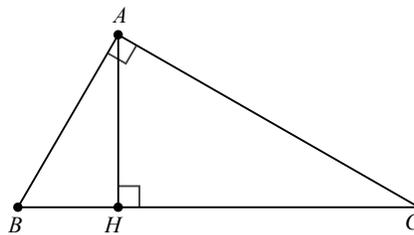
Theo định lý Pytago ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = 169 \Leftrightarrow BC = 13$ .

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}. \text{ Vậy } x = \frac{60}{13}; y = 13.$$

Đáp án cần chọn là D.

### 11. Lời giải:



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } AB : AC = 3 : 4 &\Leftrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9 + 16} = \frac{AB^2 + AC^2}{25} \\ &= \frac{BC^2}{25} = \frac{225}{25} = 9 \end{aligned}$$

(Vì theo định lý Pytago ta có  $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 225$ )

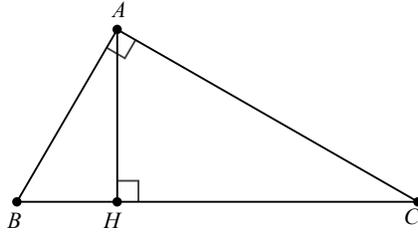
$$\text{Nên } \frac{AB^2}{9} = 9 \Rightarrow AB = 9; \frac{AC^2}{16} = 9 \Rightarrow AC = 12.$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông  $ABC$  ta có:

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{81}{15} = 5,4. \text{ Vậy } BH = 5,4.$$

Đáp án cần chọn là A.

### 12. Lời giải:



Ta có  $AB : AC = 4 : 5$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{4} = \frac{AC}{5} \Rightarrow \frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{25} = \frac{AB^2 + AC^2}{16 + 25} = \frac{41}{41} = 1 \text{ (vì theo định lý Pytago ta có:}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = (\sqrt{41})^2 = 41)$$

$$\text{Nên } \frac{AB^2}{16} = 1 \Rightarrow AB^2 = 16 \Rightarrow AB = 4; \frac{AC^2}{25} = 1 \Rightarrow AC = 5$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông  $ABC$  ta có:

$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{25}{\sqrt{41}} \approx 3,9. \text{ Vậy } CH \approx 3,9.$$

Đáp án cần chọn là D.

### 13. Lời giải:

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{15 \cdot 20}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = 12. \text{ Vậy } x = 12.$$

Đáp án cần chọn là C.

### 14. Lời giải:

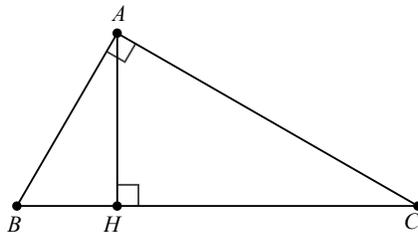
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông  $ABC$  ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{12^2 + 13^2}} \approx 8,82. \text{ Vậy } x \approx 8,82.$$

Đáp án cần chọn là B.

### 15. Lời giải:



Ta có  $AB : AC = 3 : 4$ , đặt  $AB = 3a, AC = 4a$  ( $a > 0$ )

$$\text{Theo hệ thức lượng } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{36} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} \Rightarrow \frac{1}{36} = \frac{25}{144a^2} \Rightarrow a = \frac{5}{2} (TM)$$

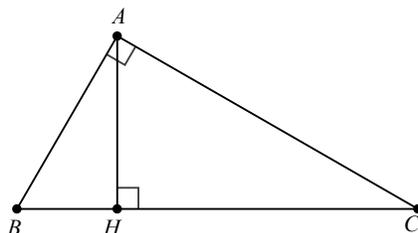
$$\Rightarrow AB = 7,5; AC = 10.$$

Theo định lý Pytago cho tam giác vuông  $AHC$  ta có:

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8. \text{ Vậy } CH = 8.$$

Đáp án cần chọn là A.

### 16. Lời giải:



Ta có  $AB : AC = 3 : 7$ , đặt  $AB = 3a; AC = 7a$  ( $a > 0$ )

$$\text{Theo hệ thức lượng } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{1}{42^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{49a^2} \Rightarrow \frac{1}{1764} = \frac{58}{441a^2}$$

$$\Rightarrow 441a^2 = 102312 \Rightarrow a = 2\sqrt{58} \text{ (TM)} \Rightarrow AB = 6\sqrt{58}; AC = 14\sqrt{58}$$

Theo định lý Pytago cho tam giác vuông  $AHC$  ta có:

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{(14\sqrt{58})^2 - 42^2} = 98. \text{ Vậy } CH = 98.$$

Đáp án cần chọn là C.

### 17. Lời giải:

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH^2 = 1.4 \Rightarrow AH = 2.$$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông  $AHB; AHC$  ta có:

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2}; AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = 2\sqrt{5}. \text{ Vậy } x = \sqrt{5}; y = 2\sqrt{5}.$$

Đáp án cần chọn là C.

### 18. Lời giải:

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH^2 = 2.5 \Rightarrow AH = \sqrt{10}.$$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông  $AHB; AHC$  ta có:

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{10 + 4} = \sqrt{14};$$

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{10 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\text{Vậy } x = \sqrt{14}; y = \sqrt{35}.$$

Đáp án cần chọn là A.

### 19. Lời giải:

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có  $\frac{1}{MD^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow x^2 = 128 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2}. \text{ Vậy } x = 8\sqrt{2}.$$

Đáp án cần chọn là B.

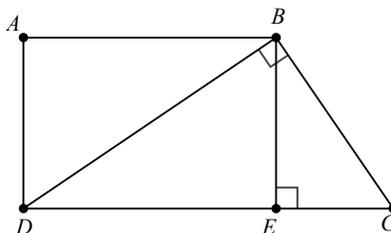
### 20. Lời giải:

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{MD^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} \Rightarrow \frac{1}{36} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{36} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow x^2 = 72 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2}. \text{ Vậy } x = 6\sqrt{2}.$$

Đáp án cần chọn là A.

**21. Lời giải:**



Kẻ  $BE \perp CD$  tại  $E$

Suy ra tứ giác  $ABED$  là hình chữ nhật (vì  $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ ) nên  $BE = AD = 12\text{cm}$

Đặt  $EC = x$  ( $0 < x < 25$ ) thì  $DE = 25 - x$ .

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông  $BCD$  ta có:

$$BE^2 = ED \cdot EC \Leftrightarrow x(25 - x) = 144 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x - 9x + 144 = 0 \Leftrightarrow x(x - 16) - 9(x - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 16)(x - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Với  $EC = 16$ , theo định lý Pytago ta có:  $BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$  (loại).

Với  $EC = 9$ , theo định lý Pytago ta có:  $BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$  (nhận).

Vậy  $BC = 15\text{cm}$ .

Đáp án cần chọn là A.

**22. Lời giải:**

Kẻ  $BE \perp CD$  tại  $E$

Suy ra tứ giác  $ABED$  là hình chữ nhật (vì  $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ ) nên  $BE = AD = 10\text{cm}$

Đặt  $EC = x$  ( $0 < x < 25$ ) thì  $DE = 20 - x$ .

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong

tam giác vuông  $BCD$  ta có:  $BE^2 = ED \cdot EC \Leftrightarrow x(20 - x) = 100$

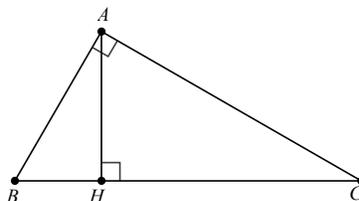
$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10(tm)$$

Với  $EC = 16$ , theo định lý Pytago ta có:  $BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \sqrt{12^2 + 10^2} = 2\sqrt{61}$ .

Vậy  $BC = 2\sqrt{61}\text{cm}$ .

Đáp án cần chọn là B.

**23. Lời giải:**



Theo giả thiết:  $AB : AC = 5 : 12$ .

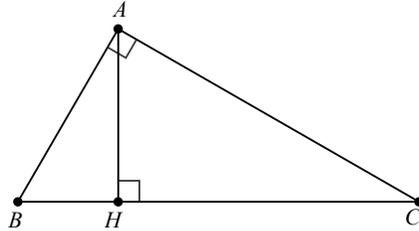
Suy ra  $\frac{AB}{5} = \frac{AC}{12} = \frac{AB+AC}{5+12} = \frac{34}{17} = 2$ . Do đó  $AB = 5.2 = 10(cm)$ ;  $AC = 2.12 = 24(cm)$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , theo định lý Pytago ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 10^2 + 24^2 = 676, \text{ suy ra } BC = 26 \text{ cm.}$$

Đáp án cần chọn là C.

**24. Lời giải:**



Theo câu trước ta có  $AB = 10$ ;  $AC = 24$ ;  $BC = 26$ .

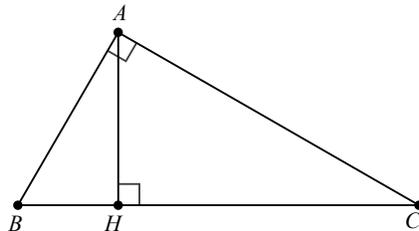
$$\Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{10 \cdot 24}{26} \approx 9,23;$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{10^2}{26} = \frac{100}{26} \approx 3,85. \Rightarrow CH = BC - BH = 26 - 3,85 = 22,15.$$

Vậy  $AH \approx 9,23$ ;  $BH \approx 3,85$ ;  $CH \approx 22,15$ .

Đáp án cần chọn là A.

**25. Lời giải:**



Theo giả thiết:  $AB : AC = 3 : 4$

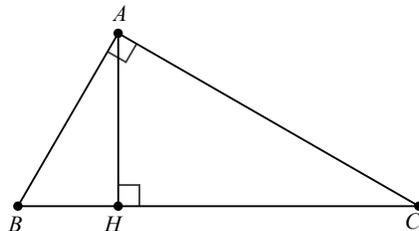
Suy ra  $\frac{AB}{3} = \frac{AC}{4} = \frac{AB+AC}{3+4} = 3$ . Do đó  $AB = 3.3 = 9(cm)$ ;  $AC = 3.4 = 12(cm)$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , theo định lý Pytago ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225, \text{ suy ra } BC = 15 \text{ cm.}$$

Đáp án cần chọn là B.

**26. Lời giải:**



$$\text{Ta có } AB = 9; AC = 12; BC = 15 \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 9}{15} = 7,2$$

$$AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{81}{15} = 5,4 \Rightarrow CH = BC - BH = 15 - 5,4 = 9,6$$

Vậy  $AH = 7,2; BH = 5,4; CH = 9,6$ .

Đáp án cần chọn là B.

### 27. Lời giải:

Xét tam giác vuông  $ABC$  có  $AH$  là đường cao nên  $AB^2 = BH.BC; AC^2 = CH.BC$

$$\text{Nên } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH.BC}{CH.BC} = \frac{BH}{CH}$$

Đáp án cần chọn là B.

### 28. Lời giải:

Tam giác vuông  $AHB$  có  $BH^2 = BD.AB \Rightarrow BD = \frac{BH^2}{AB}$

Tam giác vuông  $AHC$  có  $HC^2 = AC.EC \Rightarrow EC = \frac{HC^2}{AC}$

Từ đó  $\frac{BD}{EC} = \frac{BH^2}{AB} : \frac{HC^2}{AC} = \frac{HB^2}{HC^2} \cdot \frac{AC}{AB}$  mà theo câu trước thì  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$  nên

$$\frac{BD}{EC} = \frac{AB^4}{AC^4} \cdot \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{BD}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}.$$

Đáp án cần chọn là A.

### 29. Lời giải:

Tứ giác  $AEHD$  là hình chữ nhật vì  $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$  nên  $DE = AH$

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AH^2 = HB.HC = 9.16 = 144 \Rightarrow AH = 12$

Nên  $DE = 12\text{cm}$ .

Đáp án cần chọn là A.

### 30. Lời giải:

+ Ta có:  $\widehat{NEC} + \widehat{AED} = 90^\circ$  mà  $\widehat{AED} = \widehat{HAE}$  (do  $AEHD$  là hình chữ nhật) và  $\widehat{HAE} = \widehat{ABC}$  (cùng phụ với  $\widehat{ACB}$ ) nên  $\widehat{NEC} + \widehat{ABC} = 90^\circ$  mà  $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$  nên  $\widehat{ACB} = \widehat{NEC}$  hay  $\triangle NEC$  cân tại  $N \Rightarrow EN = NC$  (1).

+  $\widehat{NEC} + \widehat{HEN} = 90^\circ$  mà  $\widehat{NEC} = \widehat{NCE} \Rightarrow \widehat{NCE} + \widehat{HEN} = 90^\circ$ . Lại có  $\widehat{NEC} + \widehat{NHE} = 90^\circ$  nên  $\widehat{NEH} = \widehat{NHE}$  hay  $\triangle NEH$  cân tại  $N$  hay  $NE = NH$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $NH = NC$

Tương tự ta có  $MH = MB$  nên  $MN = MH + NH = \frac{1}{2}HB + \frac{1}{2}HC = \frac{1}{2}.9 + \frac{1}{2}.16 = 12,5\text{cm}$

Đáp án cần chọn là C.

### 31. Lời giải:

Vì  $DM \perp DE, EN \perp DE \Rightarrow DM \parallel EN; \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$  nên  $DENM$  là hình thang vuông

Theo câu các câu trước ta có:  $DM = \frac{BH}{2} = 4,5; EN = \frac{CH}{2} = 8; DE = 12$

$$\text{Nên } S_{DENM} = \frac{(DM + EN).DE}{2} = \frac{(4,5 + 8).12}{2} = 75\text{cm}^2.$$

Đáp án cần chọn là D.

### 32. Lời giải:

Tứ giác  $AEHD$  là hình chữ nhật vì  $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$  nên  $DE = AH$

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AH^2 = HB.HC = 4.9 = 36 \Rightarrow AH = 6$

Nên  $DE = 6 \text{ cm}$ .

Đáp án cần chọn là D.

### 33. Lời giải:

+ Ta có  $\widehat{NEC} + \widehat{AED} = 90^\circ$  mà  $\widehat{AED} = \widehat{HAE}$  (do  $AEHD$  là hình chữ nhật) và  $\widehat{HAE} = \widehat{ABC}$  (cùng phụ với  $\widehat{ACB}$ ) nên  $\widehat{AEC} + \widehat{ABC} = 90^\circ$  mà  $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$  nên  $\widehat{ACB} = \widehat{NEC}$  hay  $\triangle NEC$  cân tại  $N$   
 $\Rightarrow EN = NC$  (1).

+  $\widehat{NEC} + \widehat{HEN} = 90^\circ$  mà  $\widehat{NEC} = \widehat{NCE} \Rightarrow \widehat{NCE} + \widehat{HEN} = 90^\circ$ . Lại có  $\widehat{NEC} + \widehat{NHE} = 90^\circ$  nên  $\widehat{NEH} = \widehat{NHE}$  hay  $\triangle NEH$  cân tại  $N$  hay  $NE = NH$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $NH = NC$

Tương tự ta có  $MH = MB$  nên  $MN = MH + NH = \frac{1}{2}HB + \frac{1}{2}HC = \frac{1}{2}BC$ .

Đáp án cần chọn là B.

### 34. Lời giải:

Vì  $DM \perp DE, EN \perp DE \Rightarrow DM \parallel EN; \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$  nên  $DENM$  là hình thang vuông

Theo câu các câu trước ta có:  $DM = \frac{BH}{2} = 2; EN = \frac{CH}{2} = 4,5; DE = 6$

Nên  $S_{DENM} = \frac{(DM + EN).DE}{2} = 19,5 \text{ cm}^2$ .

Đáp án cần chọn là A.

### 35. Lời giải:

Tam giác  $CHD$  vuông tại  $H$ , ta có  $CH^2 = CM.CD$

Tam giác  $CHE$  vuông tại  $H$ , ta có  $CH^2 = CN.CE$

Nên  $CM.CD = CN.CE$

Đáp án cần chọn là B.

### III. TỰ LUYỆN

#### Bài 1:

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  (gt), theo định lý Py-ta-go ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$BC^2 = 36 + 64$$

$$BC^2 = 10^2$$

$$BC = 10\text{cm}$$

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH$  là đường cao theo hệ thức liên hệ giữa các cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền.

Ta có:  $BH \cdot BC = AB^2$

$$BH \cdot 10 = 6^2$$

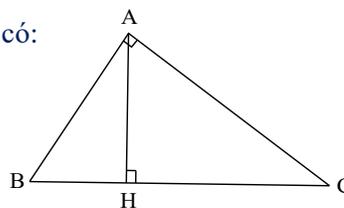
$$BH = 3,6\text{cm}$$

Theo hệ thức liên quan đến đường cao

Ta có:  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

$$AH \cdot 10 = 6 \cdot 8$$

$$AH = 4,8\text{cm}$$



#### Bài 2:

Ta có:  $AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

$$BC^2 = 13^2 = 169$$

$\triangle ABC$  có  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , theo định lý đảo

Py-ta-go ta có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

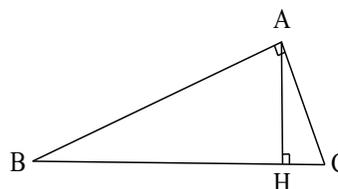
Mà  $AH$  là đường cao của tam giác  $ABC$  (gt)

Do đó theo hệ thức liên quan đến đường cao,

Ta có:  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

$$AH \cdot 13 = 12 \cdot 5$$

$$AH = \frac{60}{13}(\text{cm})$$



#### Bài 3:

a) Ta có:  $\triangle AHB$  ( $\widehat{AHB} = 90^\circ$ )

$HD$  là đường cao, theo hệ thức liên quan đến đường cao, ta có:

$$AD \cdot AB = AH^2$$

Tương tự cũng có:  $AE \cdot AC = AH^2$

Do đó:  $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

b) Xét  $\triangle AED$  và  $\triangle ABC$  có:  $\widehat{EAD}$  (chung)

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \quad (\text{vì } AD \cdot AB = AE \cdot AC)$$

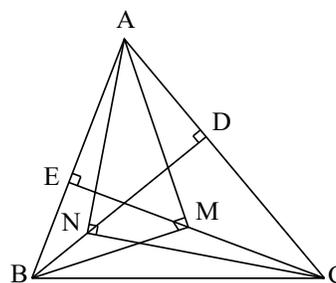
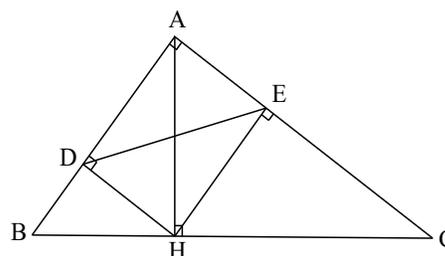
Do đó:  $\triangle AED \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC}$$

#### Bài 4:

Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACE$  có:

$$\widehat{BAD} \text{ (chung); } \widehat{ADB} = \widehat{AEC} (= 90^\circ)$$



Do đó  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

$$\Rightarrow AE \cdot AB = AD \cdot AC \quad (1)$$

$\triangle AMB$  vuông tại  $M$  (gt),  $ME$  là đường cao (gt), theo hệ thức liên quan tới đường cao có:

$$AM^2 = AE \cdot AB \quad (2)$$

$$\text{Tương tự cũng có: } AN^2 = AD \cdot AC \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) có  $AM^2 = AN^2$

$$\Rightarrow AM = AN$$

$\Rightarrow \triangle AMN$  cân tại  $A$ .

### Bài 5:

- Qua  $D$  dựng đường thẳng vuông góc với  $DE$ , cắt  $BC$  tại  $P$ . Trong tam giác vuông  $DPF$ , có là đường cao nên

$$\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{DP^2} + \frac{1}{DF^2}$$

Trong đó  $CD = DA$  (cạnh hình vuông)

$\triangle DCE = \triangle DCP$  (g.c.g)  $\Rightarrow DP = DE$ .

$$\text{Vậy: } \frac{1}{DA^2} = \frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2}.$$

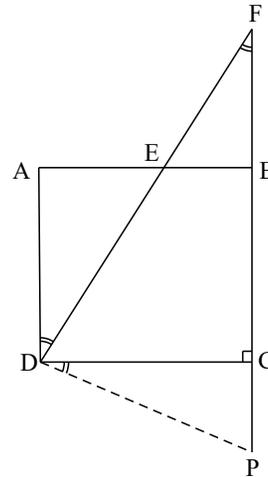
Nhận xét:

- Khi  $E$  di động trên cạnh  $AB$ , ta luôn luôn có:

$$\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2} = \frac{1}{DA^2}$$

Kết quả bài toán được phát biểu cách khác

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{DE^2} + \frac{1}{DF^2}$  không đổi



### Bài 6:

Xét  $\triangle AMN$  vuông tại  $A$ ,  $AC$  là đường cao (gt)

Theo hệ thức liên quan đường cao trong tam giác vuông, ta có:

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AC^2}$$

Xét ba điểm  $A, B, C$  ta có:

$$AC \geq |AB - BC|$$

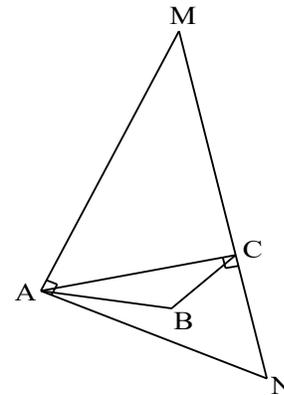
$$AC \geq 1(\text{cm})$$

$$\text{Do vậy: } \frac{1}{AC} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{AC^2} \leq 1$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow C$  nằm giữa  $A$  và  $B$

Vậy khi  $C$  nằm giữa  $A$  và  $B$  sao cho  $BC = 3\text{cm}$

thì  $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$  lớn nhất.



### Bài 7:

Vẽ  $AE \perp AN, E \in DC$  và  $AH \perp DC, H \in DC$

Ta có:  $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} - (\widehat{EAN} + \widehat{BAx}) = 15^\circ$

Xét  $\triangle ABM$  và  $\triangle ADE$  có:

$$\widehat{ABM} = \widehat{ADE}$$

$AB = AD$  (vì  $ABCD$  là hình thoi)

$$\widehat{BAM} = \widehat{DAE} (= 15^\circ)$$

Do đó:  $\triangle ABM = \triangle ADE$  (c.g.c)  $\Rightarrow AM = AE$

$\triangle ADH$  vuông tại  $H$  có:

$$\widehat{ADH} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 60^\circ \text{ nên là nửa tam giác đều}$$

$$\text{Suy ra: } DH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$$

$\triangle ADH$  có  $\widehat{H} = 90^\circ$ , theo Định lí Py-ta-go ta có:

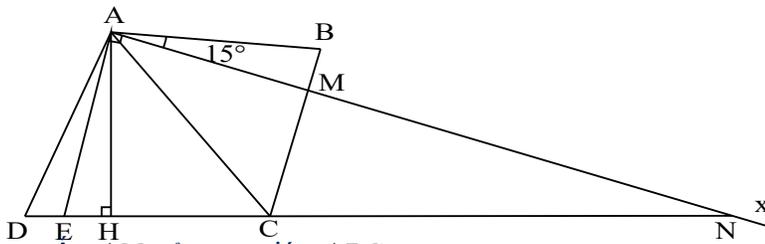
$$AH^2 + DH^2 = AD^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3AB^2}$$

$\triangle AEN$  có  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $AH \perp DN$ , theo hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ta có:

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AH^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{4}{3AB^2}$$



### Bài 8:

Vẽ đường trung tuyến  $AM$  của tam giác  $ABC$

Tam giác vuông tại  $A$ ,  $AH$  là đường cao, theo hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông,

Ta có:  $AH^2 = BH.HC$ ;  $BH = a$  (gt);  $HC = b$  (gt)

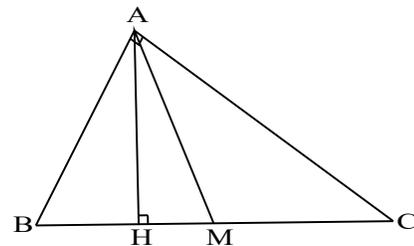
$$\text{Nên } AH^2 = ab \Rightarrow AH = \sqrt{ab}$$

$\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AM$  là đường trung tuyến

$$\text{Nên } AM = \frac{BC}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Ta có:  $AH \perp HM$  nên  $AH \leq AM$

$$\text{Do đó: } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$



-----Toán Học Sơ Đò-----