

CHUYÊN ĐỀ NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x thay đổi sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x (x gọi là biến số). Ta viết: $y = f(x)$, $y = g(x)$,...

Ví dụ: Ta có $y = 2x + 3$ là một hàm số của y theo biến x .

Lưu ý: Khi x thay đổi mà y luôn nhận giá trị không đổi thì hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm hằng.

2. Giá trị của hàm số, điều kiện xác định của hàm số

- Giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 kí hiệu là $y_0 = f(x_0)$.

- Điều kiện xác định của hàm số $y = f(x)$ là tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

- Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho x, y thỏa mãn hệ thức $y = f(x)$.

- Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

4. Hàm số đồng biến và hàm số nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị x thuộc R .

- Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị $y = f(x)$ tương ứng cũng tăng lên thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên R

- Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị $y = f(x)$ tương ứng lại giảm đi thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên R .

Nói cách khác, với x_1, x_2 bất kì thuộc R :

+ Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến

+ Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến.

Trong quá trình giải toán ta có thể sử dụng kiến thức sau đây để xét tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số trên R :

Cho x_1, x_2 bất kì thuộc R và $x_1 \neq x_2$. Đặt $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ khi đó:

- + Nếu $T > 0$ thì hàm số đã cho đồng biến trên R
- + Nếu $T < 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên R .

B. CÁC DẠNG BÀI CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải: Để tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 , ta thay $x = x_0$ vào $y = f(x)$ được $y_0 = f(x_0)$

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x - 1$. Tính $f(0)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$, $f(a)$

Dạng 2. Biểu diễn tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Phương pháp giải: Để biểu diễn tọa độ của điểm $M(x_0; y_0)$ trên hệ trục tọa độ Oxy, ta làm như sau:

1. Vẽ đường thẳng song song với trục Oy tại điểm có hoành độ $x = x_0$

2. Vẽ đường thẳng song song với trục Ox tại điểm có tung độ $y = y_0$

3. Giao điểm của hai đường thẳng trên chính là điểm $M(x_0; y_0)$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

a) Tính $f(0)$, $f(\sqrt{2} - 1)$

b) Tìm các giá trị của x sao cho $f(x) = 7$

Bài 3. Trong các bảng sau ghi các giá trị tương ứng của x và y . Bảng nào xác định y là hàm số của x ? Vì sao?

x	1	2	4	5	7	8
y	3	5	9	11	15	17

x	3	4	3	5	8
y	6	8	4	8	16

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 3$

a) Tính giá trị tương ứng của y theo các giá trị của x rồi điền vào bảng:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y = \frac{2}{3}x + 3$									

b) Hàm số đã cho là hàm đồng biến hay nghịch biến? Vì sao?

Bài 5. Sự tương quan giữa x và y theo bảng sau xác định một hàm số nào?

x	2	3	0	-2	-3
y	4	6	0	-4	-6

Dạng 3: Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Phương pháp giải: ta thực hiện một trong các cách sau:

Cách 1: Với mọi x_1, x_2 thuộc R , giả sử $x_1 < x_2$

-Nếu hiệu $H = f(x_1) - f(x_2) < 0$ thì hàm số đồng biến.

-Nếu hiệu $H = f(x_1) - f(x_2) > 0$ thì hàm số nghịch biến.

Cách 2: Với mọi x_1, x_2 thuộc R và $x_1 \neq x_2$. Xét tỉ số $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

-Nếu $T > 0$ thì hàm số đồng biến

-Nếu $T < 0$ thì hàm số nghịch biến

Bài 6. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x) = 3x$ trong $\mathbb{R}$.

Bài 7. Chứng minh hàm số $y = 2x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 8. Chứng minh hàm số $y = -\frac{1}{3}x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Bài 9. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = 4x^2 + 9$ đồng biến trong khoảng $(0; 5)$

Bài 10. Cho hàm số $y = 3x^2 + 6x + 5$ với $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số đồng biến khi $x > -1$, hàm số nghịch biến khi $x < -1$.

Bài 11. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$ đồng biến trong khoảng $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Bài 12. Tìm hàm số $f(x)$, biết $f(x+1) = x^2 - x + 2$.

Dạng 4: Nâng cao và phát triển tư duy

Bài 13. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy + yz + zx - 2xyz.$$

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x - 1$. Tính $f(0)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$, $f(a)$.

Lời giải

$$f(0) = 4 \cdot 0 - 1 = -1.$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

$$f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 1.$$

$$f(a) = 4a - 1.$$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

a) Tính $f(0)$, $f(\sqrt{2} - 1)$

b) Tìm các giá trị của x sao cho $f(x) = 7$

Bài 3. Trong các bảng sau ghi các giá trị tương ứng của x và y . Bảng nào xác định y là hàm số của x ? Vì sao?

x	1	2	4	5	7	8
y	3	5	9	11	15	17

x	3	4	3	5	8
y	6	8	4	8	16

a)

b)

Lời giải

Bảng a) xác định y là hàm số của biến số x vì mỗi giá trị của x ta xác định được một giá trị tương ứng của y .

Bảng b) không xác định y là hàm số của biến số x vì mỗi giá trị của x không phải khi nào ta xác định được một giá trị tương ứng của y . Cụ thể khi $x = 3$, y lấy giá trị là 6 và 4.

Bài 4.

a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 3$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y = \frac{2}{5}x + 3$	$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{14}{5}$	3	$\frac{16}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{19}{5}$

b) Hàm số đồng biến. Vì $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Bài 5. Sự tương quan giữa x và y theo bảng sau xác định một hàm số nào ?

x	2	3	0	-2	-3
y	4	6	0	-4	-6

Lời giải

Tỉ số giữa y và x của bảng là : $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} = \frac{-6}{-3} = 2$

Vậy theo bảng là xác định được một hàm số $y = 2x$

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

a) Tính $f(0)$, $f(\sqrt{2}-1)$

b) Tìm các giá trị của x sao cho $f(x) = 7$

Lời giải

a) $f(0) = 2$

$$f(\sqrt{2}-1) = 2(\sqrt{2}-1)^2 + 3(\sqrt{2}-1) + 2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 1 = 5 - \sqrt{2}$$

b) $f(x) = 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 7$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) + 5(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+5) = 0$$

$$x-1=0 \text{ hoặc } 2x+5=0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ hoặc } x=-2,5$$

Vậy $x=1$ hoặc $x=-2,5$ thì $f(x)=7$

Bài 7. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x) = 3x$ trong $\mathbb{R}$:

Lời giải

Cho $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2)$

Vì $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2$ nên $3x_1 < 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Vậy $y = f(x) = 3x$ đồng biến trong $\mathbb{R}$

Bài 8. Chứng minh hàm số $y = 2x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Đặt $y = f(x) = 2x - 5$

TXĐ: $2x - 5$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ bất kì và $x_1 < x_2$. Xét $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 5) - (2x_2 - 5) = 2x_1 - 5 - 2x_2 + 5 = 2(x_1 - x_2) < 0$

(do $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$)

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Vậy hàm số $y = f(x) = 2x - 5$ đồng biến. (đpcm)

Bài 9. Chứng minh hàm số $y = -\frac{1}{3}x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải

Đặt $y = g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

TXĐ: $-\frac{1}{3}x + 2$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ bất kì và $x_1 < x_2$. Xét

$$g(x_1) - g(x_2) = \left(-\frac{1}{3}x_1 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3}x_2 + 2\right) = -\frac{1}{3}x_1 + 2 + \frac{1}{3}x_2 - 2 = -\frac{1}{3}(x_1 - x_2) > 0$$

(do $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}(x_1 - x_2) > 0$)

$\Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

Vậy hàm số $y = g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ nghịch biến. (đpcm)

Bài 10. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = 4x^2 + 9$ đồng biến trong khoảng $(0; 5)$

Lời giải

Trong khoảng $(0;5)$ ta lấy hai giá trị tùy ý của x sao cho $x_1 < x_2$, ta có :

$$\begin{aligned}f(x_1) - f(x_2) &= (4x_1^2 + 9) - (4x_2^2 + 9) \\&= 4x_1^2 - 4x_2^2 = 4(x_1^2 - x_2^2) = 4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

Vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 - x_2 < 0$. Mặt khác trong khoảng $(0;5)$ nên $x_1 + x_2 > 0$ do đó

$$4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0, \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \text{ hay } f(x_1) < f(x_2).$$

Vậy hàm số $f(x) = 4x^2 + 9$ đồng biến trong khoảng $(0;5)$. (đpcm)

Bài 11. Cho hàm số $y = 3x^2 + 6x + 5$ với $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số đồng biến khi $x > -1$, hàm số nghịch biến khi $x < -1$.

Lời giải

$$y = 3x^2 + 6x + 5 = 3(x+1)^2 + 2$$

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ bất kì và $x_1 < x_2$. Ta có $x_1 - x_2 < 0$

$$\begin{aligned}f(x_1) - f(x_2) &= [3(x_1+1)^2 + 2] - [3(x_2+1)^2 + 2] \\&= [3(x_1+1)^2] - [3(x_2+1)^2] = 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2)\end{aligned}$$

$$+ \text{ Khi } x > -1 \text{ thì } x_1 + x_2 > -2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 > 0 \Rightarrow 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) < 0$$

hay $f(x_1) < f(x_2)$, hàm số đồng biến.

$$+ \text{ Khi } x < -1 \text{ thì } x_1 + x_2 < -2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 < 0 \Rightarrow 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) > 0$$

hay $f(x_1) > f(x_2)$, hàm số nghịch biến.

Bài 12. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$ đồng biến trong khoảng $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Lời giải

Trong khoảng $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ cho x hai giá trị tùy ý $\sqrt{2} < x_1 < x_2 < \sqrt{3}$, ta có $x_1 - x_2 < 0$.

$$\begin{aligned}y_1 - y_2 &= \frac{3x_1^2 + x_1 - 4}{x_1 - 1} - \frac{3x_2^2 + x_2 - 4}{x_2 - 1} \\&= \frac{(x_1 - 1)(3x_1 + 4)}{x_1 - 1} - \frac{(x_2 - 1)(3x_2 + 4)}{x_2 - 1}\end{aligned}$$

$$= 3(x_1 - x_2)$$

Vì $\sqrt{2} < x_1 < x_2 < \sqrt{3}$ nên $x_1 - x_2 < 0$ do đó $3(x_1 - x_2) < 0$

hay $y_1 < y_2$. Vậy hàm số $y = \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$ đồng biến trong khoảng $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Bài 13. Tìm hàm số $f(x)$, biết $f(x+1) = x^2 - x + 2$.

Lời giải

Đặt $x+1 = t \Rightarrow x = t-1$

Do đó $f(t) = (t-1)^2 - (t-1) + 2 = t^2 - 3t + 4$

Thay t bởi x ta có $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Bài 14. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy + yz + zx - 2xyz.$$

Lời giải

Giả sử $z = \min(x, y, z) \Rightarrow z \leq \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$. Ta có $0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(1-z)^2}{4}$.

$P = xy(1-2z) + (x+y)z = xy(1-2z) + z(1-z)$, nếu ta xem z là tham số, x và y là ẩn số thì

$f(xy) = xy(1-2z) + (1-z)$ là hàm số của xy với $0 \leq xy \leq \frac{(1-z)^2}{4}$.

Do $1-2z > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(xy) = xy(1-2z) + (1-z)$ luôn đồng biến.

Suy ra

$$f(xy) \leq f\left(\frac{(1-z)^2}{4}\right) = (1-2z)\frac{(1-z)^2}{4} + z(1-2z) = \frac{-2z^3 + z^2 + 1}{4} = \frac{7}{27} - \left(\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{108}\right)$$

$$= \frac{7}{27} - \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{3}\right)^2\left(z + \frac{1}{6}\right) \leq \frac{1}{27}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

C.TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Tính $f(4-2\sqrt{3})$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 3\sqrt{x+1} + mx^2 - 2x + 3$. Tìm m để $f(-1) = f(3)$

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|}$. Chứng minh rằng $f(-x) = -f(x)$.

Bài 4. Tìm điều kiện xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$

b) $y = \frac{1}{x^4 + 2x^2 - 3}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2}}$

d) $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{|x|-2}$

e) $y = \sqrt{x-5} - \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-3}$

f) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

Bài 5. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^2 + 3$ nghịch biến trong khoảng $K = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

Bài 6. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^3$ luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 7. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \sqrt{x+2}$ trên khoảng $K = \{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$

Bài 8. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \sqrt{4-x}$ trên khoảng $K = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^2 - 4x - 3$

b) $y = 4x^2 - 2x - 1$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 5$

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

b) $y = -x^2 + 6x - 3$

b) $y = -9x^2 + 6x - 3$

c) $y = -x^4 + 4x^2 - 5$

Bài 11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

a) $y = \frac{x^2 - 6x + 14}{x^2 - 6x + 12}$

b) $y = \frac{x}{(x+2019)^2} (x > 0)$

Bài 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

b) $y = \frac{(4x+1)(x+4)}{x} (x > 0)$

HƯỚNG DẪN

Bài 1. Ta có: $f(4-2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1} = \frac{\sqrt{3}-1-1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{3} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

Bài 2. Ta có $f(-1) = 3\sqrt{-1+1} + m(-1)^2 - 2(-1) + 3 = m + 5$

$$f(3) = 3\sqrt{3+1} + m3^2 - 2.3 + 3 = 9m + 3$$

Do đó $f(-1) = f(3) \Leftrightarrow m + 5 = 9m + 3 \Leftrightarrow 8m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$

Bài 3. Ta có $f(-x) = \frac{|-x+1|+|-x-1|}{|-x+1|-|-x-1|} = \frac{|x-1|+|x+1|}{|x-1|-|x+1|} = -\left(\frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|-|x-1|}\right) = -f(x)$

Bài 4. a. $x > 2$ b. $x \neq \pm 1$ c. $x > -2, x \neq 0$ d. $x > 1, x \neq 2$

e. $x \geq 5, x \neq 9$ f. $-2 \leq x \leq 2$

Bài 5. Cho $x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2$. Xét $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 + 3 - (x_1^2 + 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$

Do $x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0; x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Do đó hàm số nghịch biến trên K

Bài 6. Cho $x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 < x_2$. Xét

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2\right) = (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right] > 0$$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bài 7. Cho $x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2$. Xét $f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2 + 2} - \sqrt{x_1 + 2} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2 + 2} + \sqrt{x_1 + 2}} > 0$

Do đó hàm số đồng biến trên K

Bài 8. Cho $x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2$. Xét $f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{4 - x_2} - \sqrt{4 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{4 - x_2} + \sqrt{4 - x_1}} < 0$

Do đó hàm số nghịch biến trên K

Bài 9. a. Ta có $y = x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7 \geq -7, \forall x$. Suy ra $y_{\min} = -7$ đặt được khi $x = 2$

b. Ta có $y = 4x^2 - 2x - 1 = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}, \forall x$. Suy ra $y_{\min} = -\frac{5}{4}$ đặt được khi $x = \frac{1}{4}$

c. Ta có $y = x^4 - 2x^2 + 5 = (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4, \forall x$. Suy ra $y_{\min} = 4$ đặt được khi $x = \pm 1$

Bài 10. a. Ta có $y = -x^2 + 6x - 3 = -(x - 3)^2 + 6 \leq 6, \forall x$. Suy ra $y_{\max} = 6$ đặt được khi $x = 3$

b. Ta có $y = -9x^2 + 6x - 3 = -(3x - 1)^2 - 2 \leq -2, \forall x$. Suy ra $y_{\max} = -2$ đặt được khi $x = \frac{1}{3}$

c. Ta có $y = -x^4 + 4x^2 - 5 = -(x^2 - 2)^2 - 1 \leq -1, \forall x$. $\frac{2}{(x-3)^2 + 3}$ Suy ra $y_{\max} = -1$ đặt được khi $x = \pm\sqrt{2}$

Bài 11.a. Ta có $y = \frac{x^2 - 6x + 14}{x^2 - 6x + 12} = \frac{x^2 - 6x + 12 + 2}{x^2 - 6x + 12} = 1 + \frac{2}{x^2 - 6x + 12} = 1 + \frac{2}{(x-3)^2 + 3}$

Do $(x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-3)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{2}{(x-3)^2 + 3} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \frac{2}{(x-3)^2 + 3} \leq \frac{5}{3}$

Vậy $y_{\max} = \frac{5}{3}$ đặt được khi $x = 3$

b. Ta có $y = \frac{x}{(x+2019)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$x + 2019 \geq 2\sqrt{2019x} \Rightarrow (x+2019)^2 \geq 8076x \Rightarrow \frac{x}{(x+2019)^2} \leq \frac{x}{8076x} = \frac{1}{8076}$

Vậy $y_{\max} = \frac{1}{8076}$ đặt được khi $x = 2019$

Bài 12.a. Ta có $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)^2 - (x+1) + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Vậy $y_{\min} = \frac{3}{4}$ đặt được khi $x = 1$

b. Ta có $y = \frac{(4x+1)(x+4)}{x} = \frac{4x^2 + 17x + 4}{x} = 4x + 17 + \frac{4}{x} = \left(4x + \frac{4}{x}\right) + 17 \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{4}{x}} + 17 = 25$

Vậy $y_{\min} = 25$ đặt được khi $x = 1$

D. TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Với $x_1, x_2 \in D; x_1 < x_2$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D . B. $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số nghịch biến trên D .
C. $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D . D. $f(x_1) = f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D .

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D . Với $x_1, x_2 \in D; x_1 > x_2$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D . B. $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số nghịch biến trên D .
C. $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D . D. $f(x_1) = f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D .

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 + x$. Tính $f(2)$

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Tính $2.f(3)$

- A. 16. B. 8. C. 32. D. 64.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Tính $f(3) - 2f(2)$

- A. 34. B. 17. C. 20. D. 0.

Câu 6. Cho hai hàm số $f(x) = 6x^4$ và $h(x) = 7 - \frac{3x}{2}$. So sánh $f(-1)$ và $h\left(\frac{2}{3}\right)$

- A. $f(-1) = h\left(\frac{2}{3}\right)$. B. $f(-1) > h\left(\frac{2}{3}\right)$. C. $f(-1) < h\left(\frac{2}{3}\right)$. D. Không đủ điều kiện so sánh.

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x) = -2x^3$ và $h(x) = 10 - 3x$. So sánh $f(-2)$ và $h(-1)$

- A. $f(-2) < h(-1)$. B. $f(-2) \leq h(-1)$. C. $f(-2) = h(-1)$. D. $f(-2) > h(-1)$.

Câu 8. Cho hai hàm số $f(x) = -2x^2$ và $g(x) = 3x + 5$. Giá trị nào của a để $\frac{1}{2}f(a) = g(a)$

- A. $a = 0$. B. $a = 1$. C. $a = 2$. D. Không tồn tại.

Câu 9. Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 5x - 4$. Có bao nhiêu giá trị của a để $f(a) = g(a)$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = 3x - 2$ có đồ thị (C) . Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số (C) .

- A. $M(0;1)$. B. $N(2;3)$. C. $P(-2;-8)$. D. $Q(-2;0)$.

Câu 11. Cho hai hàm số $f(x) = 5,5x$ có đồ thị (C) . Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số (C)

- A. $M(0;1)$. B. $N(2;11)$. C. $P(-2;11)$. D. $P(-2;12)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = 3x$ có đồ thị (C) và các điểm $M(1;1); O(0;0); P(-1;-3); Q(3;9); A(-2;6)$.

Có bao nhiêu điểm trong các điểm trên thuộc đồ thị hàm số (C)

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 13. Đường thẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;4)$?

- A. $2x + y - 3 = 0$. B. $y - 5 = 0$. C. $4x - y = 0$. D. $5x + 3y - 1 = 0$.

Câu 14. Đường thẳng nào sau đây đi qua điểm $N(1;1)$?

- A. $2x + y - 3 = 0$. B. $y - 3 = 0$. C. $4x + 2y = 0$. D. $5x + 3y - 1 = 0$.

Câu 15. Hàm số $y = 1 - 4x$ là hàm số?

- A. Đồng biến. B. Hàm hằng. C. Nghịch biến. D. Đồng biến với $x > 0$.

Câu 16. Hàm số $y = 5x - 16$ là hàm số?

- A. Đồng biến. B. Hàm hằng. C. Nghịch biến. D. Nghịch biến với $x > 0$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{5-m}{2}x - 2m - 1$. Tìm m để hàm số nhận giá trị -5 khi $x = 2$

- A. $m = 5$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = -3$.

Câu 18. Cho hàm số $y = mx - 3m + 2$. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;-3)$

- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = 5$. D. $m = 6$.

Câu 19. Cho hàm số $y = (2 - 3m)x - 6$. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-3;6)$

- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = 9$. D. $m = 2$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 3}$. Tính $f(a^2)$ với $a < 0$.

- A. $f(a^2) = \frac{a+1}{3+2a}$. B. $f(a^2) = \frac{2a+1}{3-2a}$. C. $f(a^2) = \frac{2a-1}{3+2a}$. D. $f(a^2) = \frac{1-a}{3-2a}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 4}$. Tính $f(4a^2)$ với $a \geq 0$.

- A. $f(4a^2) = \frac{2a-1}{a+2}$. B. $f(4a^2) = \frac{2a+1}{a-2}$. C. $f(4a^2) = \frac{a-2}{2a+1}$. D. $f(4a^2) = \frac{2a+1}{a+2}$.

Câu 22. Cho hàm số $y = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 2)x - 4 - 4\sqrt{3}$. Tìm x để $y = 3$

- A. $x = \sqrt{2} + 3$. B. $x = \sqrt{3}$. C. $x = \sqrt{3} + 2$. D. $x = \sqrt{3} - 2$.

Câu 23. Cho hàm số $y = (3 + 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} - 1$. Tìm x để $y = 0$

- A. $x = 1$. B. $x = \sqrt{2} + 1$. C. $x = \sqrt{2}$. D. $x = \sqrt{2} - 1$.

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Đáp án A.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Khi đó :

- Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Câu 2. Đáp án C.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Khi đó :

- Hàm số đồng biến trên $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Hàm số nghịch biến trên $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Câu 3. Đáp án D.

Thay $x = 2$ vào hàm số ta được $f(2) = 2^3 + 2 = 10$

Câu 4. Đáp án C.

Thay $x = 3$ vào hàm số ta được $f(3) = 3^3 - 3.3 - 2 = 16$

$\Rightarrow 2.f(3) = 2.16 = 32$.

Câu 5. Đáp án D.

Thay $x = 3$ vào hàm số ta được $f(3) = 3.3^2 + 2.3 + 1 = 34$

Thay $x = 2$ vào hàm số ta được $f(2) = 3.2^2 + 2.2 + 1 = 17$

Suy ra $f(3) - 2f(2) = 34 - 2.17 = 0$.

Câu 6. Đáp án A.

Thay $x = -1$ vào hàm số $f(x) = 6x^4$ ta được $f(-1) = 6.(-1)^4 = 6$

Thay $x = \frac{2}{3}$ vào hàm số $h(x) = 7 - \frac{3x}{2}$ ta được $h\left(\frac{2}{3}\right) = 7 - \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{2} = 6$

Nên $f(-1) = h\left(\frac{2}{3}\right)$.

Câu 7. Đáp án D.

Thay $x = -2$ vào hàm số $f(x) = -2x^3$, ta được $f(-2) = -2.(-2)^3 = 16$

Thay $x = -1$ vào hàm số $h(x) = 10 - 3x$, ta được $h(-1) = 10 - 3(-1) = 13$

Nên $f(-2) > h(-1)$.

Câu 8. Đáp án D.

Thay $x = a$ vào hai hàm số đã cho ta được $f(a) = -2a^2; g(a) = 3a + 5$ Khi

$$\text{đó } \frac{1}{2}f(a) = g(a) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-2a^2) = 3a + 5 \Leftrightarrow -a^2 = 3a + 5 \Leftrightarrow a^2 + 3a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0$$

$$(\text{vô lý vì } \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} > 0; \forall a)$$

Vậy không có giá trị của a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 9. Đáp án C.

Thay vào hai hàm số đã cho ta $f(a) = a^2 \quad g(a) = 5a - 4$

$$\text{Khi đó } f(a) = g(a) \Leftrightarrow a^2 = 5a - 4 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 10. Đáp án C.

Lần lượt thay tọa độ các điểm M, N, P, Q vào hàm số $f(x) = 3x - 2$ ta được

+) Với $M(0;1)$, thay $x = 0; y = 1$ ta được $1 = 3 \cdot 0 - 2 \Leftrightarrow 1 = -2$ (Vô lý) nên $M \notin (C)$

+) Với $N(2;3)$, thay $x = 2; y = 3$ ta được $3 = 3 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow 3 = 4$ (Vô lý) nên $N \notin (C)$.

+) Với $P(-2;-8)$, thay $x = -2; y = -8$ ta được $-8 = 3 \cdot (-2) - 2 \Leftrightarrow -8 = -8$ (luôn đúng)

nên $P \in (C)$.

+) Với $Q(-2;0)$, thay $x = -2; y = 0$ ta được $0 = 3 \cdot (-2) - 2 \Leftrightarrow 0 = -8$ (Vô lý) nên $Q \notin (C)$.

Câu 11. Đáp án B.

Lần lượt thay tọa độ các điểm M, N, P, Q vào hàm số $f(x) = 5,5x$ ta được

+) Với $M(0;1)$, thay $x = 0; y = 1$ ta được $1 = 5,5 \cdot 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ (Vô lý) nên $M \notin (C)$

+) Với $N(2;11)$, thay $x = 2; y = 11$ ta được $2 \cdot 5,5 = 11 \Leftrightarrow 11 = 11$ (luôn đúng) nên $N \in (C)$

+) Với $P(-2;11)$, thay $x = -2; y = 11$ ta được $11 = 5,5 \cdot (-2) \Leftrightarrow 11 = -11$ (Vô lý) nên $P \notin (C)$

+) Với $Q(-2;12)$, thay $x = -2; y = 12$ ta được $12 = 5,5 \cdot (-2) \Leftrightarrow 12 = -11$ (Vô lý) nên $Q \notin (C)$.

Câu 12. Đáp án B.

Lần lượt thay tọa độ các điểm $M, O, P, Q; A$ vào hàm số $f(x) = 3x$ ta được

+) Với $M(1;1)$, thay $x = 1; y = 1$ ta được $1 = 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 = 3$ (vô lý) nên $M \notin (C)$.

+) Với $O(0;0)$, thay $x = 0; y = 0$ ta được $0 = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng) nên $O \in (C)$.

+) Với $P(-1;-3)$, thay $x = -1; y = -3$ ta được $-3 = 3 \cdot (-1) \Leftrightarrow -3 = -3$ (luôn đúng) nên $P \in (C)$.

+) Với $Q(3;9)$, thay $x = 3; y = 9$ ta được $9 = 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 9 = 9$ (luôn đúng) nên $Q \in (C)$.

+) Với $A(-2;6)$, thay $x = -2; y = 6$ ta được $6 = (-2) \cdot 3 \Leftrightarrow 6 = -6$ (vô lý) nên $A \notin (C)$.

Vậy có ba điểm thuộc đồ thị (C) trong số các điểm đã cho.

Câu 13. Đáp án C.

+) Thay $x = 1; y = 4$ vào $2x + y - 3 = 0$ ta được $2.1 + 4 - 3 = 3 \neq 0$

+) Thay $x = 1; y = 4$ vào $y - 5 = 0$ ta được $4 - 5 = -1 \neq 0$

+) Thay $x = 1; y = 4$ vào $4x - y = 0$ ta được $4.1 - 4 = 0$

+) Thay $x = 1; y = 4$ vào $5x + 3y - 1 = 0$ ta được $5.1 + 3.4 - 1 = 16 \neq 0$

Vậy đường thẳng $d : 4x - y = 0$ đi qua $M(1;4)$.

Câu 14. Đáp án A.

+) Thay $x = 1; y = 1$ vào $2x + y - 3 = 0$ ta được $2.1 + 1 - 3 = 0$ nên điểm N thuộc đường thẳng $2x + y - 3 = 0$

+) Thay $x = 1; y = 1$ vào $y - 3 = 0$ ta được $1 - 3 = -2 \neq 0$

+) Thay $x = 1; y = 1$ vào $4x + 2y = 0$ ta được $4.1 + 2.1 = 6 \neq 0$

+) Thay $x = 1; y = 1$ vào $5x + 3y - 1 = 0$ ta được $5.1 + 3.1 - 1 = 7 \neq 0$

Vậy đường thẳng $d : 2x + y - 3 = 0$ đi qua $N(1;1)$

Câu 15. Đáp án C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Giả sử $x_1 < x_2$ và $x_1, x_2 \in D$

Ta có $f(x_1) = 1 - 4x_1; f(x_2) = 1 - 4x_2$

Xét hiệu $H = f(x_1) - f(x_2) = 1 - 4x_1 - (1 - 4x_2) = 1 - 4x_1 - 1 + 4x_2 = 4(x_2 - x_1) > 0$ (vì $x_1 < x_2$).

Vậy $y = 1 - 4x$ là hàm số nghịch biến.

Câu 16. Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Giả sử $x_1 < x_2$ và $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x_1) = 5x_1 - 16; f(x_2) = 5x_2 - 16$

Xét hiệu $H = f(x_1) - f(x_2) = 5x_1 - 16 - (5x_2 - 16) = 5x_1 - 16 - 5x_2 + 16 = 5(x_1 - x_2) < 0$ (vì

$x_1 < x_2$).

Vậy $y = 5x - 16$ là hàm số đồng biến.

Câu 17. Đáp án B.

Thay $x = 2; y = -5$ vào $y = \frac{5-m}{2}x - 2m - 1$

ta được $-5 = \frac{5-m}{2} \cdot 2 - 2m - 1 \Leftrightarrow -3m + 4 = -5 \Leftrightarrow -3m = -9 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 18. Đáp án C.

Thay $x = 2; y = -3$ vào $y = mx - 3m + 2$ ta được $m \cdot 2 - 3m + 2 = -3 \Leftrightarrow -m = -5 \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 19. Đáp án D.

Thay $x = -3; y = 6$ vào $y = (2 - 3m)x - 6$ ta được $6 = (2 - 3m) \cdot (-3) - 6 \Leftrightarrow 9m = 18 \Leftrightarrow m = 2$

Câu 20. Đáp án D.

Thay $x = a^2$ vào $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 3}$, ta được

$$f(a^2) = \frac{\sqrt{a^2} + 1}{2\sqrt{a^2} + 3} = \frac{|a| + 1}{2|a| + 3} = \frac{-a + 1}{-2a + 3} = \frac{1 - a}{3 - 2a} \quad (\text{vì } a < 0 \Rightarrow |a| = -a)$$

Câu 21. Đáp án A.

Thay $x = 4a^2$ vào $f(x) = \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 4}$ ta được $f(4a^2) = \frac{2\sqrt{4a^2} - 2}{\sqrt{4a^2} + 4}$

$$= \frac{2|2a| - 2}{|2a| + 4} = \frac{4a - 2}{2a + 4} = \frac{2a - 1}{a + 2} \quad (\text{vì } a \geq 0 \Rightarrow |2a| = 2a)$$

Câu 22. Đáp án C.

Ta có $y = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 2)x - 4 - 4\sqrt{3} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + 2)x = 7 + 4\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} + 2)x = (\sqrt{3} + 2)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} + 2$$

Vậy $x = \sqrt{3} + 2$

Câu 23. Đáp án D.

$y = 0 \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})x = \sqrt{2} + 1$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)^2 x = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} + 1)^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1.$$

----- TOÁN HỌC SƠ ĐỒ -----