

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. LÝ THUYẾT:

1. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung.

Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức

2. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức.

3. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử.

4. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP MINH HỌA CƠ BẢN:

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $2x^3 + 6x^2 - 4x$

b) $3x^2y - 9xy^2 + 12x^2y^2$

c) $2xy(x - y) - x(y - x)$

d) $x^2 - 4y^2 - x - 2y$

Giải

a) Ta có: $2x^3 + 6x^2 - 4x = 2x(x^2 + 3x - 2)$

b) Ta có: $3x^2y - 9xy^2 + 12x^2y^2 = 3xy(x - 3y + 4xy)$

c) Ta có: $2xy(x - y) - x(y - x) = 2xy(x - y) + x(x - y)$
 $= x(x - y)(2y + x)$

d) Ta có: $x^2 - 4y^2 - x - 2y = x^2 - (2y)^2 - (x + 2y)$
 $= (x - 2y)(x + 2y) - (x + 2y) = (x + 2y)(x - 2y - 1)$
 $= (x + 2y)(x - 2y - 1)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x - 2)^3 + 2 - x$

b) $3xy - 4y - 3x + 4$

c) $x^2 - 4xy + 3y^2$

d) $x^2 - y^2 + 5x - 5y$

Giải

a) Ta có: $(x - 2)^3 + 2 - x = (x - 2)^3 - (x - 2)$

$= (x - 2)((x - 2)^2 - 1) = (x - 2)(x - 2 - 1)(x - 2 + 1)$

$$= (x-2)(x-3)(x-1)$$

b) Ta có: $3xy - 4y - 3x + 4 = 3xy - 3x + 4 - 4y$

$$= 3x(y-1) - 4(y-1) = (y-1)(3x-4)$$

c) Ta có: $x^2 - 4xy + 3y^2 = x^2 - xy - 3xy + 3y^2$

$$= x(x-y) - 3y(x-y) = (x-y)(x-3y)$$

d) Ta có: $x^2 - y^2 + 5x - 5y = (x-y)(x+y) + 5(x-y)$

$$= (x-y)(x+y+5)$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x+2)^2 + 2(x^2-4) + (x-2)^2$

b) $2x^2 - 2xy - 4y^2$

c) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$

d) $4x(x-2y) - 8y(x-2y)$

Giải

a) Ta có: $(x+2)^2 + 2(x^2-4) + (x-2)^2$

$$= (x+2)^2 + (x^2-4) + (x^2-4) + (x-2)^2$$

$$= (x+2)^2 + (x-2)(x+2) + (x-2)(x+2) + (x-2)^2$$

$$= (x+2)(x+2+x-2) + (x-2)(x+2+x-2)$$

$$= 2x(x+2) + 2x(x-2) = 2x(x+2+x-2) = 4x^2$$

b) Ta có: $2x^2 - 2xy - 4y^2 = 2x^2 - 2y^2 - 2xy - 2y^2$

$$= 2(x^2 - y^2) - 2y(x+y)$$

$$= 2(x-y)(x+y) - 2y(x+y) = 2(x+y)(x-y-2y)$$

$$= 2(x+y)(x-3y)$$

c) Ta có: $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y = x^2 - 4y^2 - 2x - 4y$

$$= (x-2y)(x+2y) - 2(x+2y)$$

$$= (x+2y)(x-2y-2)$$

d) Ta có: $4x(x-2y) - 8y(x-2y)$

$$= (x-2y)(4x-8y) = 4(x-2y)(x-2y) = 4(x-2y)^2$$

Dạng 2: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

Lưu ý: Với một số bài toán chưa tường minh để áp dụng hằng đẳng thức thì ta phải thực hiện “thêm, bớt” một số hạng tử để xuất hiện dạng áp dụng hằng đẳng thức.

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

b) $2x^3 - 12x^2 + 24x - 16$

c) $(x+y)^3 - (x-y)^3$

c) $2x^4 + 2x^2 + 2$

Giải

a) Ta có: $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

b) Ta có: $2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 = 2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$

$$= 2(x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4x - 2^3) = 2(x-2)^3$$

c) Ta có: $(x+y)^3 - (x-y)^3$

$$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

$$= 6x^2y + 2y^3 = 2y(3x^2 + y^2)$$

d) Ta có: $2x^4 + 2x^2 + 2 = 2(x^4 + x^2 + 1) = 2(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)$

$$= 2\left((x^2 + 1)^2 - x^2\right) = 2\left((x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)\right)$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $x^3 + 6x^2 - 16$

c) $\frac{1}{36}a^2 - \frac{1}{4}b^2$

d) $x^2 + 2x - y^2 + 2y$

Giải

a) Ta có: $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 4)^2 - 4x^2$

$$= (x^2 + 4 - 2x)(x^2 + 4 + 2x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$$

b) Ta có: $x^3 + 6x^2 - 16 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 12x - 24$

$$= (x+2)^3 - 12(x+2) = (x+2)\left((x+2)^2 - 12\right) = (x+2)(x^2 + 4x - 8)$$

c) Ta có: $\frac{1}{36}a^2 - \frac{1}{4}b^2 = \left(\frac{1}{6}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b\right) \cdot \left(\frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b\right)$

d) Ta có: $x^2 + 2x - y^2 + 2y$

$$\begin{aligned}
&= x^2 + 2x + 1 - y^2 + 2y - 1 \\
&= (x + 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) \\
&= (x + 1)^2 - (y - 1)^2 = (x + 1 + y - 1)(x + 1 - y + 1) \\
&= (x + y)(x - y + 2)
\end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } (x + a)^2 - 25 & \text{b) } -125a^3 + 75a^2 - 15a + 1 \\
\text{c) } x^8 - x^4 + 1 & \text{d) } x^7 - x^2 - 2x - 1
\end{array}$$

Giải

$$\text{a) Ta có: } (x + a)^2 - 25 = (x + a)^2 - 5^2 = (x + a + 5)(x + a - 5)$$

$$\begin{aligned}
\text{b) Ta có: } & -125a^3 + 75a^2 - 15a + 1 \\
&= -(5a)^3 + 3 \cdot (5a)^2 - 3 \cdot 5a + 1 = (1 - 5a)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) Ta có: } & x^8 - x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - x^4 \\
&= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) Ta có: } & x^7 - x^2 - 2x - 1 = x^7 - x - x^2 - x - 1 \\
&= x(x^6 - 1) - (x^2 + x + 1) \\
&= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) - (x^2 + x + 1) \\
&= x(x^3 - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x(x^3 - 1)(x + 1) - 1) \\
&= (x^2 + x + 1)((x^4 - x)(x + 1) - 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^5 + x^4 - x^2 - x - 1)
\end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } 4x^4 + 81 & \text{b) } x^8 + 98x^4 + 1 \\
\text{c) } x^7 + x^2 + 1 & \text{d) } x^7 + x^5 + 1
\end{array}$$

Giải

$$\begin{aligned}
\text{a) Ta có: } & 4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 \\
&= (2x^2 + 9)^2 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 - (6x)^2
\end{aligned}$$

$$= (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x)$$

$$= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 6x + 9)$$

b) Ta có: $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4$

$$= (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$$

$$= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 - 16x^2(x^4 + 1 - 2x^2)$$

$$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 - 1)^2$$

$$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2$$

$$= (4x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$$

c) Ta có: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 - x) + (x^2 + x + 1)$

$$= x(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)[x(x - 1)(x^3 + 1) + 1]$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$$

d) $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 - x) + (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x - 1)(x^4 + x) + x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)[(x^5 - x^4 + x^2 - x) + (x^3 - x^2) + 1]$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

Lưu ý: Các đa thức có dạng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$. Ví dụ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$;

$x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; ... đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - 2x + 2y - y^2$

b) $3x^3 + xy - 12xy^2 - 2y^2$

c) $x^3 + x^2 + xy - y^3 + y^2$

d) $16x^4 - 8x^2 - y^2 + 1$

Giải

a) Ta có: $x^2 - 2x + 2y - y^2 = x^2 - y^2 - 2(x - y)$
 $= (x - y)(x + y) - 2(x - y) = (x - y)(x + y - 2)$

b) Ta có: $3x^3 + xy - 12xy^2 - 2y^2 = 3x^3 - 12xy^2 + xy - 2y^2$
 $= 3x(x^2 - 4y^2) + y(x - 2y) = 3x(x - 2y)(x + 2y) + y(x - 2y)$
 $= (x - 2y)(3x^2 + 6xy + y)$

c) Ta có: $x^3 + x^2 + xy - y^3 + y^2 = x^3 - y^3 + x^2 + xy + y^2$
 $= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)$
 $= (x^2 + xy + y^2)(x - y + 1)$

d) Ta có: $16x^4 - 8x^2 - y^2 + 1 = (2x)^4 - 2 \cdot (2x)^2 + 1 - y^2$
 $= ((2x)^2 - 1)^2 - y^2 = ((2x)^2 - 1 - y)((2x)^2 - 1 + y)$
 $= (4x^2 - 1 - y)(4x^2 - 1 + y)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $ax^2 - 2bxy + 2bx^2 - axy$

b) $8 - x^2 + 2x$

c) $x^2 + 2x - 4y^4 + 8y - 3$

d) $x^4 - 5x^3 + 20x - 16$

Giải

a) Ta có: $ax^2 - 2bxy + 2bx^2 - axy = ax^2 + 2bx^2 - axy - 2bxy$
 $= (a + 2b)x^2 - xy(a + 2b) = (a + 2b)(x^2 - xy) = x(a + 2b)(x - y)$

b) Ta có: $8 - x^2 + 2x = 9 - x^2 + 2x - 1$
 $= 9 - (x - 1)^2 = (3 - x + 1)(3 + x - 1) = (4 - x)(2 + x)$

c) Ta có: $x^2 + 2x - 4y^4 + 8y - 3 = x^2 + 2x + 1 - 4y^4 + 8y - 4$
 $= (x + 1)^2 - 4(y - 1)^2 = (x + 1 + 2y - 2)(x + 1 - 2y + 2)$
 $= (x + 2y - 1)(x - 2y + 3)$

d) Ta có: $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = x^4 - 16 - 5x^3 + 20x$
 $= (x^4 - 2^4) - (5x^3 - 20x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) - 5x(x^2 - 4)$
 $= (x^2 - 4)(x^2 + 4 - 5x) = (x^2 - 4)(x - 1)(x - 4)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $4x^2 - 9y^2 + 4x - 6y$

b) $x^3 + y(1 - 3x^2) + x(3y^2 - 1) - y^3$

c) $a^2x + a^2y - 7x - 7y$

d) $x(x+1)^2 + x(x-5) - 5(x+1)^2$

Giải

a) Ta có: $4x^2 - 9y^2 + 4x - 6y = (4x^2 - 9y^2) + (4x - 6y)$

$$= (2x + 3y)(2x - 3y) + 2(2x - 3y) = (2x - 3y)(2x + 3y + 2)$$

b) Ta có: $x^3 + y(1 - 3x^2) + x(3y^2 - 1) - y^3$

$$= x^3 + y - 3x^2y + 3xy^2 - x - y^3 = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - (x - y)$$

$$= (x - y)^3 - (x - y) = (x - y)[(x - y)^2 - 1]$$

$$= (x - y)(x - y + 1)(x - y - 1)$$

c) Ta có: $a^2x + a^2y - 7x - 7y = (a^2x + a^2y) - (7x + 7y)$

$$= a^2(x + y) - 7(x + y) = (x + y)(a^2 - 7)$$

d) Ta có: $x(x+1)^2 + x(x-5) - 5(x+1)^2$

$$= [x(x+1)^2 - 5(x+1)^2] + x(x-5) = (x+1)^2(x-5) + x(x-5)$$

$$= (x-5)[(x+1)^2 + x] = (x-5)(x^2 + 3x + 1)$$

Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt ẩn phụ**Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử**

a) $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$

b) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

Giải

a) Ta có: $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$

$$= [x(x+10)][(x+4)(x+6)] + 128$$

$$= (x^2 + 10x) + (x^2 + 10x + 24) + 128 \quad (*)$$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = t$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$$(t - 12)(t + 12) + 128 = t^2 - 144 + 128 = t^2 - 16 = (t + 4)(t - 4)$$

$$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$$

b) Giả sử $x \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\
&= x^2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(6x - \frac{6}{x} \right) + 7 \right] \quad (*)
\end{aligned}$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$$\begin{aligned}
x^2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(6x - \frac{6}{x} \right) + 7 \right] &= x^2 (t^2 + 2 + 6t + 7) \\
&= x^2 (t + 3)^2 = (xt + 3x)^2 = \left[x \left(x - \frac{1}{x} \right) + 3x \right]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2
\end{aligned}$$

Chú ý: Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

$$\begin{aligned}
x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 &= x^4 + (6x^3 - 2x^2) + (9x^2 - 6x + 1) \\
&= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2
\end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

b) $2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$

Giải

a) Ta có: $(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

$$= \left[(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \right] (x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx)^2 \quad (*)$$

Đặt $a = x^2 + y^2 + z^2$, $b = xy + yz + zx$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$$\begin{aligned}
a(a + 2b) + b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\
&= \left[(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx \right]^2
\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$$

Đặt $a = x^4 + y^4 + z^4$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, $c = x + y + z$, khi đó ta có:

$$2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2a - 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2 \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$a - b^2 = x^4 + y^4 + z^4 - (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

$$= x^4 + y^4 + z^4 - (x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2)$$

$$= -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$b - c^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z)^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx)$$

$$= -2(xy + yz + zx)$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2(a - b^2) + (b - c^2)^2$$

$$= -4x^2y^2 - 4y^2z^2 - 4z^2x^2 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4z^2x^2 + 8x^2yz + 8xy^2z + 8xyz^2$$

$$= 8xyz(x + y + z)$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

b) $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 4c^2$

Giải

a) Đặt $x - y = a$, $y - z = b$, $z - x = c \Rightarrow a + b + c = 0$ khi đó ta có:

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3$$

$$= (a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b)$$

$$= -3(x - y)(y - z)(x - y + y - z) = -3(x - y)(y - z)(x - z)$$

b) Ta có: $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 4c^2$

$$= (a + b + c)^2 + (a + b - c - 2c)(a + b - c + 2c)$$

$$= (a + b + c)^2 + (a + b - 3c)(a + b + c) = (a + b + c)(a + b + c + a + b - 3c)$$

$$= (a + b + c)(2a + 2b - 2c) = 2(a + b + c)(a + b - c)$$

Dạng 5: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - 4x + 3$

b) $6x^2 - 11x + 3$

c) $x^3 - 2x^2 + 5x - 4$

d) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4xy - 4y$

Giải

a) Ta có: $x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3$
 $= x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(x-3)$

b) Ta có: $6x^2 - 11x + 3 = 6x^2 - 2x - 9x + 3$
 $= 2x(3x-1) - 3(3x-1) = (3x-1)(2x-3)$

c) Ta có: $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = x^3 - x^2 - x^2 + x + 4x - 4$
 $= x^2(x-1) - x(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2 - x + 4)$

d) Ta có: $x^2 + 4y^2 + 2x - 4xy - 4y = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y$
 $= (x-2y)^2 + 2(x-2y) = (x-2y)(x-2y+2)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $3x^2 - 4x + 1$

b) $2x^3 - 5x + 3$

c) $2x^3 - x^2 - 6x$

d) $2x^3 - x^2 - 13x - 6$

Giải

a) Ta có: $3x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 3x - x + 1$
 $= 3x(x-1) - (x-1) = (x-1)(3x-1)$

b) Ta có: $2x^3 - 5x + 3 = 2x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 2x - 3x + 3$
 $= 2x^2(x-1) + 2x(x-1) - 3(x-1) = (x-1)(2x^2 + 2x - 3)$

c) Ta có: $2x^3 + x^2 - 6x = x(2x^2 + x - 6)$
 $= x(2x^2 + 4x - 3x - 6) = x(2x(x+2) - 3(x+2)) = x(2x-3)(x+2)$

d) Ta có: $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 2x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 10x - 3x - 6$
 $= (x+2)(2x^2 - 5x - 3) = (x+2)(2x^2 + x - 6x - 3)$
 $= (x+2)(x(2x+1) - 3(2x+1)) = (x+2)(2x+1)(x-3)$

Lưu ý: Khi thực hiện tách đa thức để nhóm thành các nhân tử chung ta có thể thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Thực hiện nhằm nghiệm của đa thức

(thường các nghiệm $x = \pm 1$; $x = \pm 2$ thỏa mãn).

Ví dụ: $3x^2 - 4x + 1$, với $x = 1$ thay vào ta được $3 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của đa thức.

Bước 2: Thực hiện tách đa thức để có nhân tử chung là nghiệm của đa thức.

Ví dụ: Thực hiện tách đa thức để có $x-1$ là nhân tử chung

$$3x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 3x - x + 1 = 3x(x-1) - (x-1) = (x-1)(3x-1)$$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3 + 4x^2 + 11x + 8$

b) $2x^3 - 5x^2 + 4$

c) $6a^2 - 6ab - 11a + 11b$

d) $m^3 + 7m^2 + 6m$

Giải

a) Nhận xét: Thực hiện nhẩm nghiệm ta thấy $x = -1$ là nghiệm của phương trình, do đó nhân tử chung là $(x+1)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^3 + 4x^2 + 11x + 8 &= x^3 + x^2 + 3x^2 + 3x + 8x + 8 \\ &= x^2(x+1) + 3x(x+1) + 8(x+1) = (x+1)(x^2 + 3x + 8) \end{aligned}$$

b) Nhận xét: Thực hiện nhẩm nghiệm ta thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình, do đó nhân tử chung là $(x-2)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2x^3 - 5x^2 + 4 &= 2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x - 2x + 4 \\ &= 2x^2(x-2) - x(x-2) - 2(x-2) = (x-2)(2x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

c) Nhận xét: Thực hiện nhẩm nghiệm ta thấy $a = b$ là nghiệm của phương trình, do đó nhân tử chung là $(a-b)$

$$\text{Ta có: } 6a^2 - 6ab - 11a + 11b = 6a(a-b) - 11(a-b) = (6a-11)(a-b)$$

d) Nhận xét: Thực hiện nhẩm nghiệm ta thấy $m = -6$ hoặc $m = -1$ là nghiệm của phương trình, do đó nhân tử chung là $(m-6)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } m^3 + 7m^2 + 6m &= m^3 + 6m^2 + m^2 + 6m \\ &= m^2(m+6) + m(m+6) = (m^2+m)(m+6) = m(m+1)(m+6) \end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 8$

b) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

Giải

a) Ta có: $(x-1)(x-2)(x+4)(x+5) + 8$

$$= (x-1)(x+4)(x-2)(x+5) + 8$$

$$= (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x - 10) + 8 \quad (*)$$

Đặt $t = x^2 + 3x - 7$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$$(t-3)(t+3) + 8 = t^2 - 9 + 8 = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

$$=(x^2+3x-7-1)(x^2+3x-7+1)=(x^2+3x-8)(x^2+3x-6)$$

b) Ta có: $x^4+4x^3+2x^2-4x+1=x^2\left(x^2+4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$=x^2\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x-\frac{1}{x}\right)+2\right) \quad (*)$$

Đặt $t=x-\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$, khi đó phương trình (*) trở thành:

$$x^2\left((t^2+2)+4t+2\right)=x^2(t^2+2+4t+2)=x^2(t^2+4t+4)$$

$$=x^2(t+2)^2=x^2\left(x-\frac{1}{x}+2\right)^2=(x^2+2x-1)^2$$

Lưu ý: Khi thực hiện phân tích thành nhân tử bằng phương pháp đặt ẩn phụ như ví dụ trên, thường gặp ở các dạng sau:

+) Dạng: $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c)(x \pm d) + t$

+) Dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$

Dạng 6: Tìm x với điều kiện cho trước

Phương pháp:

Áp dụng cách phân tích đa thức thành nhân tử chung, ta đưa biểu thức về dạng $A.B = 0$, khi đó xảy ra các trường hợp:

$$TH1: \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ giải ra ta được giá trị } x.$$

$$TH2: \begin{cases} A > 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ giải ra ta tìm được giá trị } x.$$

$$TH3: \begin{cases} B > 0 \\ A = 0 \end{cases} \text{ giải ra ta được giá trị } x.$$

Bài 1: Tìm x, biết:

a) $x(x+1)-2(2x-1)=2$

b) $4x^2-(x-1)^2=0$

c) $2x^3+2x-3x^2-3=0$

d) $x^2(3x-4)-8+6x=0$

Giải

a) Ta có: $x(x+1)-2(2x-1)=2 \Leftrightarrow x^2+x-4x+2=2$

$$\Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy $x = 0$ và $x = 3$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Ta có: $4x^2 - (x-1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - (x-1))(2x + (x-1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $x = -1$ và $x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

c) Ta có: $2x^3 + 2x - 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \text{ (do } x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

d) Ta có: $x^2(3x-4) - 8 + 6x = 0 \Leftrightarrow x^2(3x-4) + 2(3x-4) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \text{ (do } x^2 + 2 > 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Vậy $x = \frac{4}{3}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 2: Tìm x biết:

a) $x^2 - 2018x + 2017 = 0$

b) $x^3 - 8x^2 = 8 - x$

Giải

a) Ta có: $x^2 - 2018x + 2017 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2017x + 2017 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 2017(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2017) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2017=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2017 \end{cases}$$

Vậy $x = 1$ và $x = 2017$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Ta có: $x^3 - 8x^2 = 8 - x \Leftrightarrow x^2(x-8) + (x-8) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-8) = 0 \text{ (do } x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

Vậy $x = 8$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Lưu ý: Đối với bài học sinh thường mắc sai lầm cách giải như sau:

$$\text{Ta có: } x^3 - 8x^2 = 8 - x \Leftrightarrow x^2(x - 8) = -(x - 8) \Leftrightarrow x^2 = -1$$

\Rightarrow phương trình vô nghiệm.

Vì vậy: Đối với những bài toán tương tự ta chỉ được phép rút gọn khi giá trị đó luôn khác 0. Còn các trường hợp còn lại chúng ta phải nhóm thành nhân tử chung.

B. CÁC DẠNG BÀI TỔNG HỢP MINH HỌA NÂNG CAO

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a)(xy + 1)^2 - (x + y)^2 \qquad b)(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 - 4c^2$$

$$c)(a^2 + 9)^2 - 36a^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a)(xy + 1)^2 - (x + y)^2 = (xy + 1 - x - y)(xy + 1 + x + y)$$

$$= [x(y - 1) + 1 - y][x(y + 1) + y + 1]$$

$$= (x - 1)(y - 1)(x + 1)(y + 1)$$

$$b)(a + b + c)^2 + (a + b - c + 2c)(a + b - c - 2c)$$

$$= (a + b + c)^2 + (a + b + c)(a + b - 3c)$$

$$= (a + b + c)(a + b + c + a + b - 3c)$$

$$= (a + b + c)(2a + 2b - 2c) = 2(a + b + c)(a + b - c)$$

$$c)(a^2 + 9)^2 - 36a^2 = (a^2 + 9 - 6a)(a^2 + 9 + 6a) = (a - 3)^2(a + 3)^2$$

2. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$a)3a - 3b + a^2 - 2ab + b^2$$

$$b)a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1$$

$$c)4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a)3(a - b) + (a - b)^2 = (a - b)(3 + a - b)$$

$$b)(a + b)^2 - 2(a + b) + 1 = (a + b - 1)^2$$

$$c)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$= [(b+c)^2 - a^2] [a^2 - (b-c)^2]$$

$$= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$a) x^2 - 4xy + 4y^2 - 9a^2 \qquad b) xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2)$$

$$c) x^2(a-b) - 2xy(a-b) + ay^2 - by^2 \qquad d) 8xy^3 - x(x-y)^3$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x^2 - 4xy + 4y^2 - 9a^2 = (x-2)^2 - (3a)^2 = (x-2-3a)(x-2+3a)$$

$$b) xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2) = xy a^2 + xy b^2 - abx^2 - aby^2$$

$$= (xy a^2 - abx^2) + (xy b^2 - aby^2)$$

$$= ax(ay - bx) + by(bx - ay) = (ay - bx)(ax - by)$$

$$c) x^2(a-b) - 2xy(a-b) + ay^2 - by^2 = x^2(a-b) - 2xy(a-b) + y^2(a-b)$$

$$= (a-b)(x^2 - 2xy + y^2) = (a-b)(x-y)^2$$

$$d) 8xy^3 - x(x-y)^3 = x[(2y)^3 - (x-y)^3]$$

$$= x(2y-x+y)[4y^2 + 2y(x-y) + (x-y)^2] = x(3y-x)(x^2 + 3y^2)$$

4. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$a) A = x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy \qquad b) B = x^6 - y^6$$

$$c) C = 4xy(x^2 + y^2) - 6(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2) + 9(x^2 + y^2)$$

$$d) D = 25 - a^2 + 2ab - b^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) A = x^2 + 2xy + y^2 - 4x^2y^2 = (x+y)^2 - 4x^2y^2$$

$$= (x+y-2xy)(x+y+2xy)$$

$$b) B = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$c) C = 4xy(x^2 + y^2) - 6(x^2 + y^2)(x+y) + 9(x^2 + y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(4xy - 6x - 6y + 9)$$

$$= (x^2 + y^2)[2x(2y-3) - 3(2y-3)]$$

$$= (x^2 + y^2)(2x - 3)(2y - 3)$$

$$d) D = 25 - (a^2 - 2ab + b^2) = 25 - (a - b)^2$$

$$= (5 + a - b)(5 - a + b)$$

5. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$a) x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 12y^3$$

$$b) x^3 + 4y^2 - 2xy + x^2 + 8y^3$$

$$c) 3x^2(a - b + c) + 36xy(a - b + c) + 108y^2(a - b + c)$$

$$d) a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 12y^3$$

$$= x^2(x + 3y) - 4y^2(x + 3y)$$

$$= (x - 2y)(x + 2y)(x + 3y)$$

$$b) x^3 + 8y^3 + x^2 - 2xy + 4y^2$$

$$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + (x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$= (x + 2y + 1)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$c) 3(a - b + c)(x^2 + 12xy + 36y^2)$$

$$= 3(a - b + c)(x + 6y)^2$$

$$d) ax^2 + a - xa^2 - x$$

$$= ax(x - a) - (x - a)$$

$$= (x - a)(ax - 1)$$

6. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$a) x^3 - 1 + 5x^2 - 5 + 3x - 3$$

$$b) a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$$

$$c) x^3 - 3x^2 + 3x - 1y^3$$

$$d) 5x^3 - 3x^2y - 45xy^2 + 27y^3$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1 + 5x + 5 + 3)$$

$$= (x - 1)(x^2 + 6x + 9)$$

$$= (x - 1)(x + 3)^2$$

$$b) a^3(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)$$

$$= (a^2 + a + 1)(a^3 + 1)$$

$$= (a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$c) (x-1)^3 - y^3 = (x-1-y) \left[(x-1)^2 + (x-1)y + y^2 \right]$$

$$= (x-y-1)(x^2 - 2x + 1 + xy - y + y^2)$$

$$d) x^2(5x-3y) - 9y^2(5x-3y)$$

$$= (5x-3y)(x^2 - 9y^2)$$

$$= (5x-3y)(x-3y)(x+3y)$$

7. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$a) x^3 - x^2 - x + 1$$

$$b) x^4 - x^2 + 2x - 1$$

$$c) 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - 1)^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2 - 1) + (x-1)^2(x+1)$$

$$b) x^4 - (x-1)^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$$

$$c) (2ab + a^2 + b^2 - 1)(2ab - a^2 - b^2 + 1)$$

$$= \left[(a+b)^2 - 1 \right] \left[1 - (a-b)^2 \right]$$

$$= (a+b+1)(a+b-1)(1+a-b)(1-a+b)$$

8. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Đặt $A = 4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$. Chứng minh rằng $A > 0$

Hướng dẫn giải – đáp số

Dùng hằng đẳng thức đáng nhớ, phân tích A thành nhân tử, ta được :

$$A = (2xy + x^2 + y^2 - z^2)(2xy - x^2 - y^2 + z^2)$$

$$= \left[(x+y)^2 - z^2 \right] \left[z^2 - (x-y)^2 \right] = (x+y+z)(x+y-z)(z+x-y)(y+z-x)$$

Do x, y, z là 3 cạnh của 1 tam giác, suy ra :

$$x+y+z > 0, x+y-z > 0, z+x-y > 0, y+z-x > 0 \Rightarrow A > 0$$

9. Cho các số a, b lần lượt thỏa mãn các hệ thức : $\begin{cases} a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0 \\ b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0 \end{cases}$. Tính $a+b$

Hướng dẫn giải – đáp số

Cộng vế theo vế của hai hằng đẳng thức ta được :

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 + b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + b^3 - 3b^2 + 3b - 1 + 2(a = b - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^3 + (b - 1)^3 + 2(a - 1 = b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - 2)(a^2 + a + 1 + b^2 + b + 1 + 2) = 0$$

$$\text{Vì } a^2 + a + 1 + b^2 + b + 1 + 2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow a + b = 2$$

10. Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$a(b^2 - 1)(c^2 - 1) + b(a^2 - 1)(c^2 - 1) + c(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 4abc$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét vế trái, ta có :

$$a(b^2 - 1)(c^2 - 1) + b(a^2 - 1)(c^2 - 1) + c(a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

$$= a(b^2c^2 - b^2 - c^2 + 1) + b(a^2c^2 - a^2 - c^2 + 1) + c(a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1)$$

$$= ab^2c^2 - ab^2 - ac^2 + a + a^2bc^2 - a^2b - bc^2 + b + a^2b^2c - a^2c - b^2c + a$$

$$= (a + b + c) - (a^2b + ab^2 - a^2b^2c) - (ac^2 + a^2c - a^2bc^2) - (bc^2 + b^2c - ab^2c^2)$$

$$= abc - ab(a + b - abc) - ac(c + a - abc) - bc(c + b - abc)$$

$$= abc + abc + abc + abc = 4abc$$

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN SỐ 1

Dạng 1: Sử dụng hằng đẳng thức để phân tích thành tích hoặc rút gọn biểu thức cho trước.

Bài 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^3 + 8y^3$ b) $a^6 - b^3$ c) $64y^3 - 125x^3$ d) $27x^3 - \frac{1}{8}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + 4y^2\right)$

$$b) \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \left(x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)$$

$$c) (x-2)(x^2-2x+4)(x+2)(x^2+2x+4)$$

$$d) (2x+y)(4x^2-2xy+y^2) - (2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) (x-1)^3 - (x-1)(x^2+x+1)$$

$$b) (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 6(x+1)^2$$

$$c) (x+5)(x^2-5x+25) - (x+3)^3 + (x-2)(x^2+2x+4) - (x-1)^3$$

$$d) (3x-2y)^3 - (4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2) + (y+2x)^3$$

Dạng 2: Tìm x.

Bài 4: Tìm x, biết:

$$a) (x-1)(x^2+x+1) - x(x+2)(x-2) = 5$$

$$b) (x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$$

$$c) (x-3)(x^2+3x+9) + x(x+2)(2-x) = 1$$

$$d) (x-1)^3 - (x+3)(x^2-3x+9) + 3(x^2-4) = 2$$

Bài 5: Tìm x, biết:

$$a) (x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2+2) = 15$$

$$b) (x-2)^3 - (x-4)(x^2+4x+16) + 6(x+1)^2 = 49$$

$$c) (x-1)^3 + (2-x)(4+2x+x^2) + 3x(x+2) = 16$$

$$d) (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15$$

Dạng 3: Tính nhanh.

Bài 6: Tính nhanh.

a) 29^3 b) 101^3

Bài 7: Tính nhanh.

a) $17^3 + 3^3$ b) $24^3 - 64$

Dạng 4: Tính giá trị của biểu thức.

Bài 8: a) Tính giá trị của phân thức $I = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ tại $x = -1$.

b) Tính giá trị của phân thức $M = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$ tại $x = -2$.

c) Tính giá trị của biểu thức $K = 27 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ tại $x = -3$.

Bài 9:

a) Cho $x + y = 3$ và $x^2 + y^2 = 5$. Tính $x^3 + y^3$.

b) Cho $x - y = 3$ và $x^2 + y^2 = 15$. Tính $x^3 - y^3$.

Dạng 5: Chứng minh đẳng thức.

Bài 10: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

a) $A = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1)$

b) $B = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - (20 + x^3)$

c) $C = 3y \cdot (-3y - 2)^2 - (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1) - (-6y - 1)^2$

Bài 11:

a) Cho a, b là các số tự nhiên. Chứng minh rằng: nếu $a^3 + b^3$ chia hết cho 3 thì $a + b$ chia hết cho 3.

b) Cho $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$. Chứng minh rằng: $A : 11$

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN SỐ 1

Dạng 1: Sử dụng hằng đẳng thức để phân tích thành tích hoặc rút gọn biểu thức cho trước.

Bài 1: Viết các biểu thức sau dưới dạng tích:

a) $x^3 + 8y^3$

$$= x^3 + (2y)^3 = (x + 2y)[x^2 - 2xy + (2y)^2] = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

b) $a^6 - b^3$

$$= (a^2)^3 - b^3 = (a^2 - b)[(a^2)^2 + a^2b + b^2] = (a^2 - b)(a^4 + a^2b + b^2)$$

c) $64y^3 - 125x^3$

$$= (4y)^3 - (5x)^3 = (4y - 5x)[(4y)^2 + 4y \cdot 5x + (5x)^2] = (4y - 5x)(16y^2 + 20xy + 25x^2)$$

d) $27x^3 - \frac{1}{8}$

$$= (3x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(3x - \frac{1}{2}\right)\left[(3x)^2 + 3x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + 4y^2\right)$

$$= \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + (2y)^3 = \frac{1}{27}x^3 + 8y^3$$

b) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)$

$$= (x^2)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = x^6 - \frac{1}{27}$$

c) $(x - 2)(x^2 - 2x + 4)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$

$$= [(x - 2)(x^2 + 2x + 4)] \cdot [(x + 2)(x^2 - 2x + 4)] = (x^3 - 2^3) \cdot (x^3 + 2^3) = (x^3)^2 - (2^3)^2 = x^6 - 64$$

d) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

$$= (2x)^3 + y^3 - [(2x)^3 - y^3] = 8x^3 + y^3 - 8x^3 + y^3 = 2y^3$$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(x-1)^3 - (x-1)(x^2 + x + 1)$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 - 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 1 = -3x^2 + 3x$$

b) $(x-3)^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9) + 6(x+1)^2$

$$= x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3 - (x^3 - 3^3) + 6 \cdot (x^2 + 2x + 1)$$

$$= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 6x^2 + 12x + 6$$

$$= -3x^2 + 39x + 6$$

c) $(x+5)(x^2 - 5x + 25) - (x+3)^3 + (x-2)(x^2 + 2x + 4) - (x-1)^3$

$$= x^3 + 5^3 - (x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3) + x^3 - 2^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$= x^3 + 125 - x^3 - 9x^2 - 27x - 27 + x^3 - 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$$= -6x^2 - 30x + 91$$

d) $(3x-2y)^3 - (4x-5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2) + (y+2x)^3$

$$= (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 - [(4x)^3 - (5y)^3] + y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 2x + 3y \cdot (2x)^2 + (2x)^3$$

$$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 - 64x^3 + 125y^3 + y^3 + 6xy^2 + 12x^2y + 8x^3$$

$$= -29x^3 - 42x^2y + 42xy^2 + 118y^3$$

Dạng 2: Tìm x.

Bài 4: Tìm x, biết:

a) $(x-1)(x^2 + x + 1) - x(x+2)(x-2) = 5$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 - x(x^2 - 4) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 - x^3 + 4x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 6(x^2 - 2x + 1) = -10$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 6x^2 + 12x - 6 = -10$$

$$\Leftrightarrow 12x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{c) } (x-3)(x^2+3x+9) + x(x+2)(2-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3^3 + x(2^2 - x^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 27 + 4x - x^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = 28$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

$$\text{d) } (x-1)^3 - (x+3)(x^2-3x+9) + 3(x^2-4) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 3^3) + 3x^2 - 12 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3^3 + 3x^2 - 12 = 2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 42$$

$$\Leftrightarrow x = 14.$$

Bài 5: Tìm x , biết:

$$\text{a) } (x+2)(x^2-2x+4) - x(x^2+2) = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2^3 - x^3 - 2x = 15$$

$$\Leftrightarrow 2x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7}{2}$$

$$\text{b) } (x-2)^3 - (x-4)(x^2+4x+16) + 6(x+1)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 - 2^3 - (x^3 - 4^3) + 6 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 49$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 64 + 6x^2 + 12x + 6 = 49$$

$$\Leftrightarrow 24x = -13$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-13}{24}$$

$$c) (x-1)^3 + (2-x)(4+2x+x^2) + 3x(x+2) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2^3 - x^3 + 3x^2 + 6x = 16$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8 - x^3 + 3x^2 + 6x = 16$$

$$\Leftrightarrow 9x = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$d) (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15$$

$$(x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3 - (x^3 - 3^3) + 9 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 = 15$$

$$\Leftrightarrow 45x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{15}$$

Dạng 3: Tính nhanh.

Bài 6: Tính nhanh.

a) 29^3

Áp dụng kiến thức: $(A-B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A-B)$ và $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$

$$29^3 = (30-1)^3 = 30^3 - 1^3 - 3 \cdot 30 \cdot 1 \cdot (30-1) = 27000 - 1 - 90 \cdot 29 = 27000 - 1 - 2610 = 24389$$

b) 101^3

$$101^3 = (100+1)^3 = 100^3 + 1^3 + 3 \cdot 100 \cdot 1 \cdot (100+1) = 1000000 + 1 + 300 \cdot 101 = 1000000 + 1 + 30300 = 1030301$$

Bài 7: Tính nhanh.

a) $17^3 + 3^3$

$$17^3 + 3^3 = (17+3)^3 - 3 \cdot 17 \cdot 3 \cdot (17+3) = 20^3 - 153 \cdot 20 = 8000 - 3060 = 4940$$

b) $24^3 - 4^3$

$$24^3 - 4^3 = (24-4)^3 + 3 \cdot 24 \cdot 4 \cdot (24-4) = 20^3 + 288 \cdot 20 = 8000 + 5760 = 13760.$$

Dạng 4: Tính giá trị của biểu thức.

Bài 8: a) Tính giá trị của phân thức $I = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ tại $x = -1$.

$$\text{Ta có } I = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ vào } I = \frac{x^2 + x + 1}{x-1} \text{ ta được } I = \frac{(-1)^2 + (-1) + 1}{(-1) - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Tính giá trị của phân thức $M = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$ tại $x = -2$.

$$\text{Ta có } M = \frac{x^3 + 2^3}{x^2 - 2x + 4} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4} = x + 2$$

$$\text{Thay } x = -2 \text{ vào } M = x + 2 \text{ ta được } M = -2 + 2 = 0.$$

c) Tính giá trị của biểu thức $K = 27 + (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ tại $x = -3$.

$$\text{Ta có } K = 27 + (x-3)(x^2 + 3x + 9) = 27 + x^3 - 27 = x^3.$$

$$\text{Thay } x = -3 \text{ vào } K = x^3 \text{ ta được } K = (-3)^3 = -27.$$

Bài 9:

a) Cho $x + y = 3$ và $x^2 + y^2 = 5$. Tính $x^3 + y^3$.

$$\text{Ta có: } 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 3^2 - 5 = 4 \Rightarrow xy = 2.$$

$$\text{Ta lại có: } x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 27 - 18 = 9.$$

b) Cho $x - y = 3$ và $x^2 + y^2 = 15$. Tính $x^3 - y^3$.

$$\text{Ta có } 2xy = (x^2 + y^2) - (x - y)^2 = 15 - 3^2 = 6 \Rightarrow xy = 3.$$

$$\text{Ta lại có } x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 + 27 = 54.$$

Dạng 5: Chứng minh đẳng thức.

Bài 10: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

a) $A = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1)$

$$A = (2x)^3 + 3^3 - 8x^3 + 2 = 8x^3 + 27 - 8x^3 + 2 = 29.$$

$$b) B = (x+3)(x^2 - 3x + 9) - (20 + x^3)$$

$$B = x^3 + 3^3 - 20 - x^3 = 27 - 20 = 7$$

$$c) C = 3y \cdot (-3y - 2)^2 - (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1) - (-6y - 1)^2$$

$$C = 3y \cdot (-3y - 2)^2 - (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1) - (-6y - 1)^2$$

$$= 3y \cdot (9y^2 + 12y + 4) - (27y^3 - 1) - (36y^2 + 12y + 1)$$

$$= 27y^3 + 36y^2 + 12y - 27y^3 + 1 - 36y^2 - 12y - 1$$

$$= 0.$$

Bài 11:

a) Cho a, b là các số tự nhiên. Chứng minh rằng: nếu $a^3 + b^3$ chia hết cho 3 thì $a + b$ chia hết cho 3.

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Vì $a^3 + b^3$ chia hết cho 3 và $3ab(a+b)$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^3$ chia hết cho 3

Do đó $a+b$ chia hết cho 3 (đpcm).

b) Cho $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$. Chứng minh rằng: $A : 11$

$$\text{Ta có } A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$$

$$= (1^3 + 10^3) + (2^3 + 9^3) + \dots + (5^3 + 6^3)$$

$$= (1+10)(1^2 + 10 \cdot 1 + 10^2) + (2+9)(2^2 + 2 \cdot 9 + 9^2) + \dots + (5+6)(5^2 + 5 \cdot 6 + 6^2)$$

$$= 11 \cdot 111 + 11 \cdot 103 + \dots + 11 \cdot 91$$

$$= 11 \cdot (111 + 103 + \dots + 91)$$

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN SỐ 2-TỔNG HỢP

Bài 1. Khai triển các hằng đẳng thức sau:

$$a) (2x+3)^2$$

$$b) \left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2$$

$$c) (x^2 + 2y^2)^2$$

$$d) (x^2 - y^2x)^2$$

Bài 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng hằng đẳng thức:

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $x^2 - 8x + 16$

c) $9x^2 - 12x + 4$

d) $\left(x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}y\right)$

e) $(xy^2 + 1) \cdot (1 - xy^2)$

f) $(3x + 2y)^2 - 4(3x + 2y) + 4$

Bài 3. Điền vào chỗ trống để được những hằng đẳng thức đúng :

a) $9a^2 + 6a + \dots = \dots$

b) $\dots - 8xy + y^2 = \dots$

c) $25x^2 - \dots + 16y^2 = \dots$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (x + y)^2 - (x - y)^2$

c) $B = 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2 - (x - y)(x + y)$

b) $C = (2x - 1)^2 - 2(2x - 3)^2 + 9$

d) $D = (2x - 3)^2 - 2(2x - 3)(2x - 6) + (x - 3)^2$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = (x + 2)(2x - 4) - (2x + 1)^2 + 2x(x - 3)$ với $x = -\frac{1}{5}$

b) $B = (2x + 1)^2 - (x - 1)^2 - 3(x - 2)(x + 2)$ với $x = \frac{1}{6}$

c) $C = (x - y)^2 + 2(x^2 - y^2) + (x + y)^2$ với $x = 0,75$.

Bài 6. a) Cho $2x - y = -2$. Tính giá trị của biểu thức:

$A = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 6$

b) Cho $x + y = 5$. Tính giá trị của biểu thức:

$B = 3x^2 - 2x + 3y^2 - 2y + 6xy - 100$

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 + 2x + 5$

b) $B = 2x(x - 3)$

c) $C = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$

d) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $A = 4x - x^2 + 3$

b) $B = -2x^2 - 3x + 7$

$F = 12x - 8y - 4x^2 - y^2 + 1$

Bài 9. Cho a, b, c, d là các số khác 0 và

$(a + b + c + d)(a - d - c + d) = (a - b + c - d)(a + b - c - d)$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Bài 10. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng: $a = b = c$.

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỔNG HỢP SỐ 2

Bài 1. Khai triển các hằng đẳng thức sau:

$$a) (2x+3)^2 \quad b) \left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2 \quad c) (x^2 + 2y^2)^2 \quad d) (x^2 - y^2x)^2$$

Lời giải:

$$a) (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 \quad c) (x^2 + 2y^2)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$$

$$b) \left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2 = 9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2 \quad d) (x^2 - y^2x)^2 = x^4 - 2x^3y^2 + y^4x^2$$

Bài 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng hằng đẳng thức:

$$a) x^2 + 4x + 4 \quad b) x^2 - 8x + 16 \quad c) 9x^2 - 12x + 4$$
$$d) \left(x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}y\right) \quad e) (xy^2 + 1) \cdot (1 - xy^2) \quad f) (3x + 2y)^2 - 4(3x + 2y) + 4$$

Lời giải

$$a) x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \quad b) x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$
$$c) 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2 \quad d) \left(x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}y\right) = x^2 - \frac{1}{4}y^2$$
$$e) (xy^2 + 1) \cdot (1 - xy^2) = 1 - x^2y^4 \quad f) (3x + 2y)^2 - 4(3x + 2y) + 4 = (3x + 2y - 2)^2$$

Bài 3. Điền vào chỗ trống để được những hằng đẳng thức đúng :

$$a) 9a^2 + 6a + \dots = \dots \quad b) \dots - 8xy + y^2 = \dots \quad c) 25x^2 - \dots + 16y^2 = \dots$$

Lời giải

$$a) 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$$
$$b) 16x^2 - 8xy + y^2 = (4x - y)^2$$
$$c) 25x^2 - 40xy + 16y^2 = (5x - 4y)^2$$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = (x + y)^2 - (x - y)^2 \quad c) B = 3(x - y)^2 - 2(x + y)^2 - (x - y)(x + y)$$
$$b) C = (2x - 1)^2 - 2(2x - 3)^2 + 9 \quad d) D = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(2x - 6) + (3 - x)^2$$

Lời giải

$$a) A = (x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$$

$$b) C = (3x-1)^2 - 2(2x-3)^2 + 9 = 9x^2 - 6x + 1 - 8x^2 + 12x - 18 + 9 = x^2 + 6x - 8$$

$$\begin{aligned} c) B &= 3(x-y)^2 - 2(x+y)^2 - (x-y)(x+y) \\ &= 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 - x^2 + y^2 \\ &= 2y^2 - 10xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) D &= (2x-3)^2 - (2x-3)(2x-6) + (3-x)^2 \\ &= (2x-3)^2 - 2(2x-3)(x-3) + (x-3)^2 \\ &= (2x-3-x+3)^2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức:

$$a) A = (x+2)(2x-4) - (2x+1)^2 + 2x(x-3) \quad \text{với } x = -\frac{1}{5}$$

$$b) B = (2x+1)^2 - (x-1)^2 - 3(x-2)(x+2) \quad \text{với } x = \frac{1}{6}$$

$$c) C = (x-y)^2 + 2(x^2 - y^2) + (x+y)^2 \quad \text{với } x = 0,75.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) A &= (x+2)(2x-4) - (2x+1)^2 + 2x(x-3) \\ &= 2(x^2 - 4) - 4x^2 - 4x - 1 + 2x^2 - 6x \\ &= -10x - 9 \end{aligned}$$

Với $x = -\frac{1}{5}$ thay vào biểu thức A ta được:

$$A = -10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 9 = -7$$

Vậy $A = -7$ tại $x = -\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} b) B &= (2x+1)^2 - (x-1)^2 - 3(x-2)(x+2) \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 - 3(x^2 - 4) \\ &= 6x + 12 \end{aligned}$$

Thay $x = \frac{1}{6}$ vào biểu thức B, ta được:

$$B = 6 \cdot \frac{1}{6} + 12 = 13$$

Vậy $B = 13$ tại $x = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}c) C &= (x-y)^2 + 2(x^2 - y^2) + (x+y)^2 \\ &= (x-y)^2 + 2(x-y)(x+y) + (x+y)^2 \\ &= (x-y+x+y)^2 \\ &= 4x^2\end{aligned}$$

Thay $x = 0,75$ vào biểu thức C, ta được:

$$C = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Bài 6. a) Cho $2x - y = -2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 6$$

a) Cho $x + y = 5$. Tính giá trị của biểu thức:

$$B = 3x^2 - 2x + 3y^2 - 2y + 6xy - 100$$

Lời giải

$$\begin{aligned}a) A &= 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y + 4 \\ &= (2x - y)^2 - 2(2x - y) + 4\end{aligned}$$

Thay $2x - y = -2$ vào biểu thức A, ta được:

$$\begin{aligned}A &= (-2)^2 - 2(-2) - 6 \\ A &= 2\end{aligned}$$

b) $B = 3x^2 - 2x + 3y^2 - 2y + 6xy - 100$

$$\begin{aligned}&= 3(x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) - 100 \\ &= 3(x + y)^2 - 2(x + y) - 100\end{aligned}$$

Thay $x + y = 5$ vào biểu thức B, ta được:

$$\begin{aligned}B &= 3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 - 100 \\ B &= -35\end{aligned}$$

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 + 2x + 5$

b) $B = 2x(x - 3)$

c) $C = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$

d) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

Lời giải: c) $C = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$

$$a) A = x^2 + 2x + 5 = (x+2)^2 + 1$$

$$\text{Vì } (x+2)^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow (x+2)^2 + 1 \geq 1, \forall x$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -2$. Vậy Min $A = 1$ tại $x = -2$.

$$b) B = 2x(x-3)$$

$$= 2x^2 - 6x$$

$$= 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2}$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}, \forall x$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$. Vậy Min $A = -\frac{9}{2}$ tại $x = \frac{3}{2}$.

$$c) C = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+3)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; (y+3)^2 \geq 0, \forall x, y \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+3)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x, y$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2}; y = -3$. Vậy Min $C = \frac{3}{4}$ tại $x = \frac{1}{2}; y = -3$.

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

$$a) A = 4x - x^2 + 3$$

$$b) B = -2x^2 - 3x + 7$$

$$c) C = 12x - 8y - 4x^2 - y^2 + 1$$

Lời giải:

$$a) A = 4x - x^2 + 3$$

$$= -(x-2)^2 + 7$$

$$\text{Vì } -(x-2)^2 \leq 0, \forall x \Rightarrow -(x-2)^2 + 7 \leq 7, \forall x$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$. Vậy Max $A = 7$ khi $x = 2$.

$$b) B = -2x^2 - 3x + 7$$

$$= -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}\right) + \frac{65}{8}$$

$$= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{65}{8}$$

$$\text{Vì } -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \leq 0, \forall x \Rightarrow -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{65}{8} \leq \frac{65}{8}, \forall x$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{3}{4}$. Vậy $\text{Max } A = \frac{65}{8}$ khi $x = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} c) C &= 12x - 8y - 4x^2 - y^2 + 1 \\ &= -(4x^2 - 12x + 9) - (y^2 + 8y + 16) + 26 \\ &= -(2x - 3)^2 - (y + 4)^2 + 26 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -(2x - 3)^2 \leq 0; -(y + 4)^2 \leq 0, \forall x, y \Rightarrow -(2x - 3)^2 - (y + 4)^2 + 26 \leq 26, \forall x, y$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{3}{2}; y = -4$. Vậy $\text{Max } A = 26$ khi $x = \frac{3}{2}; y = -4$.

Bài 9. Cho a, b, c, d là các số khác 0 và

$$(a + b + c + d)(a - b - c + d) = (a - b + c - d)(a + b - c - d)$$

Chúng minh rằng: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)(a - b - c + d) &= (a - b + c - d)(a + b - c - d) \\ \Rightarrow \left[(a + d)^2 - (b + c)^2 \right] &= \left[(a - d)^2 - (b - c)^2 \right] \\ \Rightarrow a^2 + 2ad + d^2 - b^2 - 2bc - c^2 - a^2 + 2ad - d^2 + b^2 - 2bc + c^2 &= 0 \\ \Rightarrow ad &= bc \\ \Rightarrow \frac{a}{c} &= \frac{b}{d} \end{aligned}$$

Bài 10. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng: $a = b = c$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= ab + bc + ca \\ \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) &= 0 \\ \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 &= 0 \\ \Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $(a - b)^2 \geq 0; (b - c)^2 \geq 0; (c - a)^2 \geq 0, \forall a, b, c$ nên từ (*) suy ra:

$$a - b = b - c = c - a = 0 \text{ hay } a = b = c.$$