CHUYÊN ĐỀ : PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

MỤC LỤC

1. *Phương pháp đặt nhân tử chung 2*
2. *Phương pháp dùng hằng đẳng thức 2*
3. *Phương pháp nhóm hạng tử: 4*
4. *Phối hợp nhiều phương pháp 6*
5. *Phương pháp tách hạng tử 11*
   - *Dạng 1. Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc hai 11*
   - *Dạng 2. Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc ba 11*
   - *Dạng 3. Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc bốn 13*
   - *Dạng 4. Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc cao 15*
6. *Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử. 16*
7. *Phương pháp đổi biến số (hay đặt ẩn phụ) 18*
   - *Dạng 1. Đặt biến phụ $(x^2 + ax + m)(x^2 + ax + n) + p$ 18*
   - *Dạng 2. Đặt biến phụ dạng $(x + a)(x + b(x + c)(x + d) + e$ 19*
   - *Dạng 3. Đặt biến phụ dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 + c$ 21*
   - *Dạng 4. Đặt biến phụ dạng đẳng cấp 21*
   - *Dạng 5. Đặt biến phụ dạng khác 22*
8. *Phương pháp hệ số bất định 25*
9. *Phương pháp tìm nghiệm của đa thức: 30*
10. *Phương pháp xét giá trị riêng: 32*

Các phương pháp cơ bản

1. Phương pháp đặt nhân tử chung

a. Phương pháp

- Tìm nhân tử chung là những đơn, đa thức có mặt trong tất cả các hạng tử.
- Phân tích mỗi hạng tử thành tích các nhân tử chung và một nhân tử khác
- Viết nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc, viết các nhân tử còn lại của mỗi hạng tử vào trong dấu ngoặc (kể cả dấu của chúng).

b. Bài tập vận dụng

Bài 1. ***Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì:***

a) $55^{n+1} - 55^{n} \vdots 54$ b) $n^2(n+1) + 2n(n+1) \vdots 6$

c) $24^{n+1} - 24^{n} \vdots 23$ d) $n^2(n-1) - 2n(n-1) \vdots 6$

Bài 2. ***Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn một trong các đẳng thức sau:***

a) $x + y = xy$ b) $xy - x + 2(y - 1) = 13$

HD:

a) Ta có $x+y=xy$ được viết thành: $xy-x-y=0$.

Do đó suy ra: $x(y-1)-(y-1)=1$ hay $(y-1)(x-1)=1$

Mà $1=1.1=(-1).(-1)$ nên: $\begin{cases} y-1=1 \\ x-1=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-1=-1 \\ x-1=-1 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy ta có hai cặp số nguyên cần tìm là $(0,0)$ và $(2,2)$.

b) Phân tích vế trái ra thừa số ta có:

$xy-x+2(y-1)=x(y-1)+2(y-1)=(y-1)(x+2)$.

Vế phải bằng $13=1.13=13.1=(-1).(-13)=(-13).(-1)$ nên ta lần lượt có:

$\begin{cases} y-1=1 \\ x+2=13 \end{cases}$; $\begin{cases} y-1=13 \\ x+2=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y-1=-1 \\ x+2=-13 \end{cases}$; $\begin{cases} y-1=-13 \\ x+2=-1 \end{cases}$

Hay: $\begin{cases} x=11 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=14 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-15 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=-12 \end{cases}$.

Vậy ta có 4 cặp số nguyên cần tìm là: $(11,2)$; $(-1;14)$; $(-15;0)$; $(-3;-12)$.

2. Phương pháp dùng hằng đẳng thức

a) Phương pháp: Sử dụng 7 HĐT đã học và một số HĐT bổ sung sau đây:

1. $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$

2. $a^4+b^4=(a+b)(a-b)\left[(a+b)^2-2ab\right]$

3. $a^4+b^4=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2(ab)^2$

4. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

5. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

6. $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

b) Bài tập vận dụng:

Bài 1. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

b) $(x+1)^4 + (x^2+x+1)^2$

c) $(x+y)^5 - x^5 - y^5$

d) $(b^2+c^2)^3 + (c^2-a^2)^3 - (b^2+c^2)^3$

HD:

a) Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+c^3-(3a^2b+3ab^2+3abc)$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\right]=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

b) Ta có: $(x+1)^4+(x^2+x+1)^2=(x+1)^4+\left[x(x+1)+1\right]^2$

$=(x+1)^4+x^2(x+1)^2+2x(x+1)+1=(x+1)^2\left[(x+1)^2+x^2\right]+(2x^2+2x+1)$

$=(2x^2+2x+1)\left[(x+1)^2+1\right]=(x^2+2x+2)(2x^2+2x+1)$

c) Ta có: $(x+y)^5-x^5-y^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5-x^5-y^5$

$=5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)=5xy\left[(x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)\right]$

$=5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$

d) Ta có: $(b^2+c^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3=(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3+(-b^2-c^2)^3$

Ta lại có: Nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Mặt khác: $(a^2+b^2)+(c^2-a^2)+(-b^2-c^2)=a^2-a^2+b^2-b^2+c^2-c^2=0$

Suy ra $(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3+(-b^2-c^2)^3=3(a^2+b^2)(c^2-a^2)(-b^2-c^2)$

$=3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a+c)(a-c)$

Bài 2. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:*** $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

HD:

Ta có: $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

$=(a+b+c)^3-\left[(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3\right]$

Đặt $\begin{cases} x=a+b-c \\ y=b+c-a \Rightarrow x+y+z=a+b+c \\ z=c+a-b \end{cases}$

Suy ra: $(a+b+c)^3-\left[(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3\right]$

$=(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3$

$=3(x+y)(y+z)(z+x)=3.2a.2b.2c=24abc$

Bài 3. ***Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì:***

a) $(n+3)^2-(n-1)^2 \,\vdots\, 8$

b) $(2n-1)^3-2n+1 \,\vdots\, 8$

c) $(n+6)^2-(n-6)^2 \,\vdots\, 24$

d) $(7n-2)^2-(2n-7)^2 \,\vdots\, 45$

e) $n^6-n^2 \,\vdots\, 60$

f) $n^2(n^2-1) \,\vdots\, 12$

HD:

e) Ta có: $n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

$n(n-1)(n+1) \vdots 3$; $n(n-1) \vdots 2$; $n(n+1) \vdots 2 \Rightarrow n^2(n-1)(n+1) \vdots 4$

Đặt n = 5k; n = 5k + 1; n = 5k + 2; n = 5k + 3; n = 5k + 4 ($k \in \mathbb{Z}$)

Ta chứng minh $n^2(n-1)(n+1)(n^2+1) \vdots 5$

Vậy $n^6 - n^2$ chia hết cho 3, 4, 5 nên chia hết cho 60

f) Với mọi số nguyên n ta luôn có: $n^2 - 1 \vdots 4 \Rightarrow n^2(n^2 - 1) \vdots 4$

Lại có $n^2(n^2 - 1) = n(n-1)n(n+1) \vdots 3 \Rightarrow n^2(n^2 - 1) \vdots 12$ vì (3; 4) = 1

Bài 4. ***Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn một trong các đẳng thức sau***: $x^2 - y^2 = 21$

3. *Phương pháp nhóm hạng tử:*

a) Phương pháp

Bước 1: Chọn và nhóm 2 hoặc 3 …hạng tử thành một nhóm sao cho mỗi nhóm sau khi phân tích thành nhân tử thì các nhóm này có thừa số chung, hoặc liên hệ các nhóm là hằng đẳng thức.

Bước 2:

+ Nếu các nhóm có thừa số chung: Đặt thừa số chung của các nhóm làm **Nhân tử chung** ra ngoài ngoặc khi đó trong ngoặc là tổng các các thừa số còn lại của các nhóm.

Chú ý:

+ Nhiều khi để làm xuất hiện thừa số chung (nhân tử chung) ta cần đổi dấu các hạng tử.

+ Tính chất đổi dấu hạng tử: **A** = – (– **A**)

+ Nếu liên hệ các nhóm tạo thành hằng đẳng thức thì vận dụng hằng đẳng thức.

b) Bài tập vận dụng:

Bài 1. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1$

b) $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1$

c) $x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3$

d) $(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$

e) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$

f) $x^2y + xy^2 + xz^2 + yz^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$

HD:

a) Ta có: $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1 = \left(x^2 + 2xy + y^2\right) - \left(z^2 + 2z + 1\right) = (x + y)^2 - (z + 1)^2$

b) Ta có: $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz + 2y - 1 = \left(x^2 - 2xz + z^2\right) - \left(y^2 - 2y + 1\right) = (x - z)^2 - (y - 1)^2$

c) Ta có: $x^6 - 2x^4 - x^3y^3 + 2xy^3 = x\left(x^5 - 2x^3 - x^2y^3 + 2y^3\right)$

$$= x\left[x^3\left(x^2 - 2\right) - y^3\left(x^2 - 2\right)\right] = x\left(x^3 - y^3\right)\left(x^2 - 2\right) = x(x - y)\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

d) Ta có: $(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$

$$= x^2y + xyz + x^2z + xy^2 + y^2z + xyz + xyz + yz^2 + xz^2 - xyz$$

$$= \left(x^2y + xy^2 + xyz\right) + \left(y^2z + yz^2 + xyz\right) + x^2z + zx^2$$

$$= xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + xz(x + z)$$

$=y(x+y+z)(x+z)+xz(x+z)$

$=(x+z)(xy+y^2+yz+xz)=(x+z)(y+x)(x+y)$

e) Ta có: $x^2+2xy+y^2-x-y-12=(x+y)^2-(x-y)-12=...=(x+y+3)(x+y-4)$

f) Ta có: $x^2y+xy^2+xz^2+yz^2+x^2z+y^2z+2xyz=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2$

$=(x+y)(xy+z^2+xz+yz)=(x+y)(y+z)(z+x)$

Bài 2. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$

b) $a(b^2-c^2)-b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

c) $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$

d) $x^2y+xy^2+xz^2+yz^2+x^2z+y^2z+2xyz$

HD:

a) Ta có: $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)=xy^3-xz^3+yz^3-x^3y+x^3z-y^3z$

$=x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)=x^3(z-y)+y^3[-(z-y)-(y-x)]+z^3(y-x)$

$=x^3(z-y)-y^3(z-y)-y^3(y-x)+z^3(y-x)=(z-y)(x^3-y^3)+(y-x)(z^3-y^3)$

$=(z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-x)(z-y)(z^2+yz+y^2)$

$=(z-y)(x-y)(x^2+xy+y^2-z^2-yz-y^2)=(z-y)(x-y)(x-z)(x+y+z)$

b) $a(b^2-c^2)-b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=ab^2-ac^2-bc^2+ab^2+ac^2-b^2c$

$=ab(a+b)-c^2(a+b)+c(a+b)(a-b)=(a+b)(ab-c^2+ca+cb)=(a+b)(b+c)(a-c)$

c) Ta có: $2a^2b+4ab^2-a^2c+ac^2-4b^2c+2bc^2-4abc$

$=2a^2b+4ab^2-a^2c-2abc+ac^2+2bc^2-4b^2c-2abc$

$=2ab(a+2b)-ac(a+2b)+c^2(a+2b)-2bc(a+2b)$

$=(a+2b)(2ab-ac+c^2-2bc)=(a+2b)[a(2b-c)-c(2b-c)]$

$=(a+2b)(2b-c)(c-a)$

d) Ta có: $x^2y+xy^2+xz^2+yz^2+x^2z+y^2z+2xyz$

$=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+xz+yz)$

$=(x+y)(y+z)(z+x)$

Bài 3. ***Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì:***

a) $n^3+3n^2-n-3 \vdots 48$

b) $n^4+3n^3-n^2-3n \vdots 6$

c) $(2n-1)^3-2n+1 \vdots 24$

d) $2n^3-3n^2+n \vdots 6$

e) $n^3-n+12n \vdots 6$

f) $n^4+2n^3+3n^2\ 2n \vdots 8$

g) $2n^3+3n^2+7n \vdots 6$

h) $n^4-2n^3-n^2+2n \vdots 24$

i) $n^4+6n^3+11n^2+6n \vdots 24$

j) $n^4-3n^3-4n^2+16n \vdots 384\ \forall n>4,\ n=2k$

k) $n^{12}-n^8-n^4+1 \vdots 512\ \forall \in \mathbb{N},\ n=2k+1$

l) $n^8-n^6-n^4+n^2 \vdots 1152\ \forall \in \mathbb{N},\ n=2k+1$

HD:

j) Ta có: $384 = 2^7.3$ và đặt $n = 2k$

$$n^4 - 3n^3 - 4n^2 + 16n = n^3(n-4) - 4n(n-4) = (n-4)(n^3 - 4n) = n(n-4)(n^2-4)$$

$$= n(n-4)(n^2-4) = (n-4)(n-2)n(n+2) \quad (2)$$

Thay $n = 2k$ ta được: $(2) = (2k-4)(2k-2)2k(2k+2) = 2^4(k-2)(k-1)n(k+1)$

Với $k = 3; 4; ...$ thì $(k-2)(k-1)n(k+1) \vdots 8$ và $(k-2)(k-1)n(k+1) \vdots 3$

Do đó: $2^4(k-2)(k-1)n(k+1) \vdots 2^7.3$

k) Ta có: Ta có: $512 = 2^9$

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4-1) - (n^4-1) = (n^4-1)(n^8-1)$$

$$= (n^2-1)(n^2+1)(n^4-1)(n^4+1) = (n^2-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$$

Vì n lẻ nên $n^2+1 \vdots 2; n^2-1 \vdots 8$ ½ $\begin{cases}(n^2+1)^2 \vdots 2^2 \\ (n^2-1)^2 \vdots 2^6\end{cases}$ và $n^4+1 \vdots 2$.

Vậy $(n^2-1)^2(n^2+1)^2(n^4+1) \vdots 2^9$

l) Ta có: $1152 = 2^7.3^2$

$$n^8 - n^6 - n^4 + n^2 = n^6(n^2-1) - n^2(n^2-1) = (n^2-1)(n^6-n^2)$$

$$= n^2(n^2-1)(n^4-1) = n^2(n^2-1)^2(n^2+1) \qquad (1)$$

Vì n lẻ nên $n^2+1 \vdots 2; n^2-1 \vdots 8$ ½ $(n^2-1)^2 \vdots 2^6$

Mặt khác ta có: $(1) = \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{\vdots 3}\underbrace{n(n-1)(n+1)}_{\vdots 3}(n^2+1) \vdots 3^2$ ½ đpcm

4. *Phối hợp nhiều phương pháp*

Bài 1.* *Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2$

b) $(x^2+y^2+xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$

c) $81x^4(z^2-y^2) - z^2 + y^2$

d) $x^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 - y^6$

HD:

a) $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2 = (a+b+c)^2 + (a-b+c+2b)(a-b+c-2b)$

$$= (a+b+c)^2 + (a+b+c)(a-2b+c) = (a+b+c)(a-b+c)$$

b) $(x^2+y^2+xy)^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$

$$= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2xy^3 + 2x^3y - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2$$

$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2+y^2) - z^2(x^2+y^2)$$

$$= (x^2+y^2)^2 + 2xy(x^2+y^2) - z^2(x^2+y^2)$$

$$= (x^2+y^2)(x^2+y^2+2xy-z^2) = (x^2+y^2)\left[(x+y^2) - z^2\right]$$

$$= (x^2+y^2)(x+y+z)(x+y-z)$$

c) Ta có: $81x^4(z^2-y^2) - z^2 + y^2 = 81x^4(z^2-y^2) - (z^2-y^2)$

$$=\left(z^2-y^2\right)\left(81x^4-1\right)=(z-y)(z+y)\left(9x^2-1\right)\left(9x^2+1\right)$$
$$=(z-y)(z+y)(3x+1)(3x-1)\left(9x^2+1\right)$$

d) Ta có: $x^6+x^4+x^2y^2+y^4-y^6$

$$=x^6-y^6+x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=\left(x^3\right)^2-\left(y^3\right)^2+\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2$$
$$=\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$$
$$=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$$
$$=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2-y^2+1\right)$$

Bài 2. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:*** $A=x^2y^2(y-x)+y^2x^2(z-y)-z^2x^2(z-x)$

HD:

Cách 1: Khai triển hai trong ba số hạng, chẳng hạn khai triển hai số hạng đầu rồi nhóm các số hạng làm xuất hiện thừa số chung $z-x$

$$A=x^2y^3-x^3y^2+y^2z^3-y^3z^2-z^2x^2(z-x)$$
$$=y^2\left(z^3-x^3\right)-y^3\left(z^2-x^2\right)-z^2x^2(z-x)$$
$$=y^2(z-x)\left(z^2+zx+x^2\right)-y^3(z-x)(z+x)-z^2x^2(z-x)$$
$$=(z-x)\left(y^2z^2+y^2zx+x^2y^2-y^3z-y^3x-z^2x^2\right)$$
$$=(z-x)[y^2z(z-y)-x^2(z-y)(z+y)+y^2x(z-y)$$
$$=(z-x)(z-y)\left(y^2z-x^2z-x^2y+y^2x\right)$$
$$=(z-x)(z-y)\left[z(y-x)(y+x)+xy(y-x)\right]$$
$$=(z-x)(z-y)(y-x)(xy+xz+yz).$$

Cách 2: Để ý rằng: $(z-y)+(y-x)=(z-x)$. Do vậy ta có:

$$A=x^2y^2(y-x)+y^2z^2(z-y)-z^2x^2\left[(z-y)+(y-x)\right]$$
$$=x^2y^2(y-x)+y^2z^2(z-y)-z^2x^2(z-y)-z^2x^2(y-x)$$
$$=(y-x)\left(x^2y^2-z^2x^2\right)+(z-y)\left(y^2z^2-z^2x^2\right)$$
$$=(y-x)x^2(y-z)(y+z)+(z-y)z^2(y-x)(y+x)$$
$$=(y-x)(z-y)\left(-x^2y-x^2z+yz^2+xz^2\right)$$
$$=(y-x)(z-y)\left[xz(z-x)+y(z-x)(z+x)\right]$$
$$=(y-x)(z-y)(z-x)(xz+yz+xy)$$

Bài 3. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:*** $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

HD:

Cách 1: Đặt $x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$ thì $a+b+c=0$.

Khi đó ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ hay $a^3+b^3+c^3=3abc$

Vậy: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$

Cách 2: Để ý rằng: $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$ và $(y-z)=(y-x)+(x-z)$

$$\left(x-y\right)^3+\left(y-z\right)^3+\left(z-x\right)^3=\left[\left(y-x\right)+\left(x-z\right)\right]^3+\left(z-x\right)^3+\left(x-y\right)^3$$
$$=\left(y-x\right)^3+3\left(y-x\right)\left(x-z\right)\left[\left(y-x\right)+\left(x-z\right)\right]+\left(x-z\right)^3-\left(x-z\right)^3-\left(y-x\right)^3$$

Bài 4. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử***

a) $a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)$ b) $xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(x+z\right)+3xyz$

c) $x^2+6xy+5y^2-5y-x$

HD:

a) Ta có: $a^2\left(b-c\right)+b^2\left[-\left(b-c\right)-\left(a-b\right)\right]+c^2\left(a-b\right)$

$$=a^2\left(b-c\right)-b^2\left(b-c\right)-b^2\left(a-b\right)+c^2\left(a-b\right)$$
$$=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(a+b\right)-\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c\right)$$
$$=\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(a+b-b-c\right)=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)$$

b) Ta có: $x^2+6xy+5y^2-5y-x=(x^2+xy-x)+(5xy+5y^2-5y)$

$$=x(x+y-1)+5y(x+y-1)=(x+y-1)(x+5y)$$

c) Ta có: $xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(x+z\right)+3xyz$

$$=\left[xy\left(x+y\right)+xyz\right]+\left[yz\left(y+z\right)+xyz\right]+\left[zx\left(z+x\right)+xyz\right]$$
$$=xy\left(x+y+z\right)+yz\left(x+y+z\right)+zx\left(x+y+z\right)=\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$$

Bài 5. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử***

a) $xy\left(x+y\right)-yz\left(y+z\right)-zx\left(z-x\right)$ b) $-c^2\left(a-b\right)+b^2\left(a-c\right)-a^2\left(b-c\right)$

c) $z^3\left(x-y\right)+x^3\left(y-z\right)+y^3\left(z-x\right)$ d) $ab\left(a+b\right)-bc\left(b+c\right)-ac\left(c-a\right)$

HD:

a) Ta có: $xy\left(x+y\right)-yz\left(y+z\right)-zx\left(z-x\right)$

$$=xy\left(x+y\right)-yz\left(y+z\right)-zx\left[\left(y+z\right)-\left(x+y\right)\right]$$
$$=xy\left(x+y\right)-yz\left(y+z\right)-zx\left(y+z\right)+zx\left(x+y\right)$$
$$=x\left(x+y\right)\left(y+z\right)-z\left(y+z\right)\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(x-z\right)$$

b) Ta có : $-c^2\left(a-b\right)+b^2\left[\left(a-b\right)+\left(b-c\right)\right]-a^2\left(b-c\right)$

$$=-c^2\left(a-b\right)+b^2\left(a-b\right)+b^2\left(b-c\right)-a^2\left(b-c\right)$$
$$=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c\right)+\left(b-c\right)\left(b-a\right)\left(b+a\right)$$
$$=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c-a-b\right)=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)$$

c) Ta có : $z^3\left(x-y\right)+x^3\left[-\left(x-y\right)-\left(z-x\right)\right]+y^3\left(z-x\right)$

$$=z^3\left(x-y\right)-x^3\left(x-y\right)+y^3\left(z-x\right)-x^3\left(z-x\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(z^3-x^3\right)+\left(z-x\right)\left(y^3-x^3\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z^2+zx+x^2\right)+\left(z-x\right)\left(y-x\right)\left(y^2+xy+x^2\right)$$
$$=\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2\right)=\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z-y\right)\left(z+y-x\right)$$

d) Ta có : $ab\left(a+b\right)-bc\left[\left(a+b\right)+\left(c-a\right)\right]-ac\left(c-a\right)$

$$= ab(a+b)-bc(a+b)-bc(c-a)-ac(c-a)$$
$$= b(a+b)(a-c)-c(c-a)(b+a)=(a+b)(b+c)(a-c)$$

Bài 6. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:*** $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

HD:

Ta có: $x^4(y-z)+y^4\left[-(y-z)-(x-y)\right]+z^4(x-y)$
$$= x^4(y-z)-y^4(y-z)-y^4(x-y)+z^4(x-y)$$
$$= (y-z)(x^4-y^4)-(x-y)(y^4-z^4)$$
$$= (y-z)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)(y-z)(y+z)(y^2+z^2)$$
$$= (x-y)(y-z)\left[(x+y)(x^2+y^2)-(y+z)(y^2+z^2)\right]$$
$$= (x-y)(y-z)(x^3+xy^2+x^2y+y^3-y^3-yz^2-y^2z-z^3)$$
$$= (x-y)(y-z)\left(x^3-z^3+y^2(x-z)+y(x^2-z^2)\right)$$
$$= (x-y)(y-z)\left[(x-z)(x^2+xz+z^2)+y^2(x-z)+y(x-z)(x+z)\right]$$
$$= (x-y)(y-z)(x-z)(x^2+xz+z^2+y^2+xy+yz)$$

Bài 7. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) $(x-y)-x^3(1-y)+y^3(1-x)$ b) $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(c-b)-4c^2a^2(2a+c)$

HD:

a) Ta có : $(x-y)-x^3\left[(x-y)+(1-x)\right]+y^3(1-x)$
$$= (x-y)-x^3(x-y)-x^3(1-x)+y^3(1-x)$$
$$= (x-y)(1-x^3)-(1-x)(x^3-y^3)$$
$$= (x-y)(1-x)(1+x+x^2)-(1-x)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$= (x-y)(1-x)(1+x+x^2-x^2-xy-y^2)=(x-y)(1-x)(1-y)(x+y+1)$$

b) Ta có : $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2\left[(2a+c)-(2a+b)\right]-4c^2a^2(2a+c)$
$$= 4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(2a+c)-b^2c^2(2a+b)-4c^2a^2(2a+c)$$
$$= b^2(2a+b)(4a^2-c^2)+c^2(2a+c)(b^2-4a^2)$$
$$= b^2(2a+b)(2a-c)(2a+c)-c^2(2a+c)(2a-b)(2a+b)$$
$$= (2a+c)(2a+b)(2ab^2-b^2c-2ac^2+bc^2)=(2a+c)(2a+b)(b-c)(2ab+2ac-bc)$$

Bài 8. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$

b) $A=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

HD:

a) Ta có : $bc(ab-ac+bd-dc)-ac(ab-bc+ad-dc)+ab(ac-bc+ad-bd)$
$$= bc(ab-ac+bd-dc)-ac\left[(ab-ac+bd-dc)+(ac-bc+ad-bd)\right]+ab(ac-bc+ad-bd)$$
$$= (ab-ac+bd-dc)(bc-ac)-(ac-bc+ad-bd)(ac-ab)$$

$= (a+d)(b-c)c(b-a) - (c+d)(a-b)a(c-b)$

$= (b-c)(b-a)(ac+dc-ca-ad) = (b-c)(b-a)(c-a).d$

b) Ta có: $A = (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2 + (xy+yz+zx)^2$

$= \left[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\right](x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)^2$

Đặt $x^2+y^2+z^2 = a; xy+yz+zx = b \Rightarrow A = (a+b)^2 = (x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2$

Bài tập tự giải:

Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $a(b+c)^2 + b(a+c)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$

b) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$

c) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

d) $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c-1)$

Bài 9. ***Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì:***

a) $n^2+4n+3 \vdots 8 \ \forall n \in \mathbb{N}, n = 2k+1$

b) $n^5 - n \vdots 10$

c) $n^2(n^4-1) \vdots 60$

d) $n^5 - 5n^3 + 4n \vdots 120$

e) $mn(m^2-n^2) \vdots 3$

f) $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \vdots 9$

g) $3n^4 - 14n^3 + 21n^2 - 10n \vdots 24$

HD:

a) Ta có: $n^2+4n+3 = (n+1)(n+3) = (2k+2)(2k+4) = 4(k+1)(k+2) \vdots 8$

b) Ta có: $n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n^2-1)(n^2-4+5)$

$= n(n-1)(n+1)(n^2-4)+5n(n-1)(n+1)$

$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1)$

Tất cả hai số hạng đều chia hết cho 2 và 5 nên chia hết cho 10.

Nhận xét: $n^5 - n$ đều chia hết cho 5 và 6 nên chia hết cho 30

c) Ta có: $n^2(n^4-1) = n^2(n^2-1)(n^2+1) = n^2(n^2-1)(n^2-4+5)$

$= n^2(n^2-1)(n^2-4)+5n^2(n^2-1)$

$= n^2(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)+5n^2(n-1)(n+1)$

Ta có: $n; (n-2); (n-1); (n+1); (n+2)$ là 5 số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại số chia hết cho 3; 4; 5 nên $n^2(n-2)(n-1)(n+1)(n+2) \vdots 60$, $5n^2(n-1)(n+1) \vdots 5$ và $n^2(n-1)(n+1) \vdots 12$

Nên $5n^2(n-1)(n+1) \vdots 60$. Vậy $n^2(n^4-1) \vdots 60$

d) Ta có: $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-1)(n^2+4) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

Trong 6 số tự nhiên liên tiếp tồn tại 1 số chia hết cho 4, cho 5, cho 6 nên tích của chúng chia hết cho 120

e) Ta có: $mn(m^2-n^2) = mn[(m^2-1)-(n^2-1)] = mn(m^2-1) - mn(n^2-1)$

$= mn(m-1)(m+1) - mn(n-1)(n+1) \vdots 3$

f) Ta có: $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3(n^3+2n) = 3(n^3-n+3n) = 3(n^3-n)+9n$

$= 3(n-1)n(n+1)+9n \vdots 9$

g) Ta có: $3n^4 - 14n^3 + 21n^2 - 10n = n(3n^3 - 14n^2 + 21n - 10) = n(n-2)(3n^2-8n+5)$

$$= n(n-2)(n-1)(3n-5) = n(n-1)(n-2)(3n-3+8)$$
$$= \underbrace{3n(n-1)(n-2)(n+1)}_{\vdots 24} - \underbrace{8n(n-1)(n-2)}_{\vdots 24}$$

5. Phương pháp tách hạng tử

Dạng 1. Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc hai

Cách 1: Tách hạng tử bậc nhất bx

Tính a.c rồi phân tích a.c ra tích của hai thừa số $ac = a_1c_1 = a_2c_2 = ...$

Chọn ra hai thừa số có tổng bằng b , chẳng hạn : $ac = a_1c_1$ với $a_1 + c_1 = b$

Tách $bx = a_1x + c_1x$

Dùng phương pháp nhóm số hạng để phân tích tiếp

Cách 2: Tách hạng tử bậc ax^2

Ta thường làm làm xuất hiện hằng đẳng thức: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Cách 3: Tách hạng tử tự do c

Ta tách c thành c_1 và c_2để dùng phương pháp nhóm hạng tử hoặc tạo ra hằng đẳng thức bằng cách c_1 nhóm với ax^2 còn c_2 nhóm với bx.

Bài 1. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử***

a) $3x^2+8x+4$ b) $4x^2-4x-3$ c) $x^2-11x+8$ d) $x^2+5x-24$

e) $9x^2+12x-5$ f) $3x^2-7x+2$ g) $4x^2-4x-3$ h) x^2-5x+4

i) $x^2 - 6x + 5$ k) $x^2 + 7x + 12$ l) $x^2 + 8x + 15$ m) $x^2 - x - 12$

n) $x^2 - 13x + 36$ o) $2x^2 - 5x - 12$ p) $3x^2 + 13x - 10$ q) $2x^2 - 7x + 3$

r) $3x^2 - 16x + 5$ s) $x^4 + x^2 + 1$ t) $x^4 - 7x^2 + 6$ u) $x^4 + 2x^2 - 3$

v) $x^2 - x - 2001.2002$ x) $x^2 - x + 2017.2018$

HD:

Cách 1: Tách hạng tử giữa

Ta có: 3.4 = 12 = 2.6 , mà 2 + 6 = 8

Nên ta được: $3x^2+8x+4 = 3x^2+6x+2x+4 = (3x+2)(x+2)$

Cách 2: Tách hạng tử đầu

Ta có: $3x^2+8x+4 = (4x^2+8x+4) - x^2 = (2x+2)^2 - x^2 = (x+2)(3x+2)$

Cách 2: Tách hạng tử cuối

Ta có: $3x^2+8x+16-12 = (3x^2-12)+(x+16) = (x+2)(3x+2)$

Dạng 2. Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc ba

Chú ý:

- Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1
- Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1
- Nếu f(x) có nghiệm nguyên thì mọi nghiệm nguyên của P(x) đều là một trong các ước số của hệ số tự do a_0

- Nếu P(x) có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm hữu tỉ của P(x) có dạng $\frac{r}{s}$, trong đó r là ước của a_0, s là ước của a_n và (r, s) = 1

Bài 1. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) $a^3+4a^2-29a+24$ c) $3x^3-7x^2+17x-5$ e) $3x^3-14x^2+4x+3$

b) $x^3+6x^2+11x+6$ d) $2x^3-5x^2+8x-3$ f) x^3+5x^2+8x+4

HD:

a) Nhẩm nghiệm nhận thấy đa thức có ba nghiệm là 1; 3 và – 8, nên sẽ có chứa các nhân tử (a – 1), (a – 3) và (a + 8),

Nên ta có: $a^3+4a^2-29a+24=(a^3-a^2)+(5a^2-5a)+(-24a+24)$

$= a^2(a-1)+5a(a-1)-24(a-1)=(a-1)(a^2+5a-24)=(a-1)(a-3)(a+8)$

b) Nhẩm nghiệm ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là –1, –2, –3, nên ta phân tích :

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$$

c) Nhẩm nghiệm cho ta có nghiệm là $x=\frac{1}{3}$, nên có nhân tử là : (3x – 1)

Nên ta có : $3x^3-7x^2+17x-5=3x^3-x^2-6x^2+2x+15x-5$

$=x^2(3x-1)-2x(3x-1)+5(3x-1)=(3x-1)(x^2-2x+5)$

d) Nhẩm nghiệm cho ta có nghiệm là $x=\frac{1}{2}$, nên có nhân tử là : (2x – 1)

Nên ta có : $2x^3-5x^2+8x-3=2x^3-x^2-4x^2+2x+6x-3$

$=x^2(2x-1)-2x(2x-1)+3(2x-1)=(2x-1)(x^2-2x+3)$

e) Nhẩm nghiệm cho ta nghiệm là : $x=\frac{-1}{3}$ nên có 1 nhân tử là : (3x + 1)

Ta có: $3x^3-14x^2+4x+3=3x^3+x^2-15x^2-5x+9x+3$

$= x^2(3x+1)-5x(3x+1)+3(3x+1)=(3x+1)(x^2-5x+3)$

f) Cách 1 : bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x=-1$ và $x=-2$

Như vậy ta có : $x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x+2)^2$

Cách 2 : Nhận xét : Tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là: x + 1

Như vậy ta có : $x^3+5x^2+8x+4=(x^3+x^2)+(4x^2+4x)+(4x+4)=(x+1)(x+2)^2$

Bài 2. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:***

a) x^3-x^2-4 b) x^3-2x-4 c) x^3+x^2+4

d) x^3-5x^2+8x-4 e) $x^3-19x-30$ f) $x^3+4x^2-7x-10$

g) $3x^3-7x^2+17x-5$ h) x^3+5x^2+8x+4 i) x^3-5x^2+8x-4

j) $4x^3-13x^2+9x-18$ k) $2x^3-3x^2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)^3$

HD:

a) Ta nhận thấy f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhận tử là x – 2.
Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1: $x^3 - x^2 - 4 = \left(x^3 - 2x^2\right) + \left(x^2 - 2x\right) + \left(2x - 4\right) = \left(x - 2\right)\left(x^2 + x + 2\right)$

Cách 2: $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = \left(x^3 - 8\right) - \left(x^2 - 4\right) = \left(x - 2\right)\left(x^2 + x + 2\right)$

b) Ta nhận thấy đa thức $P(x) = x^3 - 2x - 4$ có số nghiệm là $x = 2$

Do đó, ta có $P(x) = (x - 2)Q(x)$

Chia đa trhức $P(x) = x^3 - 2x - 4$ cho nhị thức $x - 2$, ta được thương số là

$$Q(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

Suy ra $P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$

Vậy $P(x) = x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$

c) Ta có các ước của 4 là: $\pm 1; \pm 2; \pm 4$

Nhận thấy $x = -2$ là nghiệm của đa thức vậy đa thức có 1 nhân tử là: $x - (-2) = x + 2$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - x^2 + 4 = (x + 2)(x^2 - x + 2)$$

Hoặc: $x^3 + x^2 + 4 = (x^3 + 8) + (x^2 - 4) = (x + 2)(x^2 - x + 2)$

d) Nhận thấy $x = 1$ là nghiệm của đa thức nên có 1 nhân tử là: $x - 1$

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x^3 - x^2) - (4x^2 - 4x) + (4x - 4) = (x - 1)(x - 2)^2$

e) Ta có $x = -3$ là nghiệm nên có nhân tử là $x + 3$

$x^3 - 19x - 30 = x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x - 10x - 30 = (x + 3)(x^2 - 3x - 10) = (x + 3)(x + 2)(x - 5)$

f) Ta có: $x = -1$ là nghiệm của đa thức nên có nhân tử là: $x + 1$

$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = x^3 + x^2 + 3x^2 + 3x - 10x - 10 = (x + 1)(x - 2)(x + 5)$

g) Các ước của 5 là: $\pm 1; \pm 5$. Nhận thấy đa thức không có nghiệm nguyên, ta đi tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức $x = \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in U(-5) \\ q \in U(3) \end{cases}$

Ta thấy nghiệm của đa thức là $x = \dfrac{1}{3}$ nên có nhân tử $x - \dfrac{1}{3}$ hay $3x - 1$

Vậy: $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5)$

h) Ta có $x = -1$ là nghiệm của đa thức nên có một nhân tử là $x + 1$

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4)$

i) Ta có $x = 1$ là nghiệm của đa thức nên có một nhân tử là $x - 1$

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - x^2 + 4x - 4x^2 + 4x - 4$

j) Các ước của 18 là $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

Ta nhận thấy $x = 3$ là nghiệm của đa thức $4x^3 - 13x^2 + 9x - 18$ nên ta có:

$4x^3 - 12x^2 - x^2 + 3x + 6x - 18 = 4x^2(x - 3) - x(x - 3) + 6(x - 3) = (x - 3)(4x^2 - x + 6)$

k) Đặt $y = x^2 - x + 1$, ta có:

$$2x^3 - 3x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)^3 = 2x^3 - 3x^2y + y^3 = 2x^3 - 2x^2y - x^2y + y^3$$

$$= 2x^2(x - y) - y(x - y)(x + y) = (x - y)(2x^2 - y^2 - xy) = (x - y)(x - y)(2x + y)$$

Dạng 3. ***Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc bốn***

Bài 1. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $P(x) = 6x^4 + 19x^2 + 15$

b) $Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

e) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

f) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$

c) $f(a) = 6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12$

d) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

g) $Q(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

HD:

a) Đặt $y = x^2$, có $P(y) = 6y^2 + 19y + 15$

Ta có: $6y^2 + 19y + 15 = 6y^2 + 9y + 10y + 15 = 3y(2y+3) + 5(2y+3) = (2y+3)(3y+5)$

Do đó $P(x) = 6x^4 + 19x^2 + 15 = (2x^2 + 3)(3x^2 + 5)$

b) $Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$

c) Nhẩm nghiệm ta thấy đa thức có nghiệm là x = 2, x = –3 hay có 1 nhân tử là x – 2 và x + 3

Ta có: $f(x) = 6a^4 + 7a^3 - 37a^2 - 8a + 12 = (6a^4 - 12a^3) + (19a^3 - 38a^2) + (a^2 - 2a) - (6a - 12)$

$= 6a^3(a-2) + 19a^2(a-2) + a(a-2) - 6(a-2) = (a-2)(6a^3 + 19a^2 + a - 6)$

$= (a-2)(a+3)(2a-1)(3a+2)$

d) Ta có tổng chẵn bằng tổng lẻ nên có nhân tử: x + 1, sau đó lại tổng chẵn bằng tổng lẻ.

$f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)(2x+1)$

e) Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

Ta có : $f(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = (x^4 + x^3) + (5x^3 + 5x^2) + (8x^2 + 8x) + (4x + 4)$

$= x^3(x+1) + 5x^2(x+1) + 8x(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$

f) Nhẩm nghiệm ta thấy x = 3 là nghiệm của đa thức P(x) nên có nhân tử là x – 3

$P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6 = 2x^4 - 6x^3 - x^3 + 3x^2 - 5x^2 + 15x - 2x + 6$

$= (2x^4 - 6x^3) - (x^3 - 3x^2) - (5x^2 - 15x) - (2x - 6)$

$= 2x^3(x-3) - x^2(x-3) - 5x(x-3) - 2(x-3) = (x-3)(2x^3 - x^2 - 5x - 2)$

$= (x-3)(2x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x + x - 2) = (x-3)(x-2)(x+1)(2x+1)$

g) Ta có tổng các hệ số bằng 0 và tổng chẵn cũng bằng tổng lẻ nên có nhân tử $x^2 - 1$

$Q(x) = x^4 + x^3 - x - 1 = (x^4 - 1) + (x^3 - x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)$

Bài 2. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $A = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017$

b) $C = x^4 + 2012x^2 + 2011x + 2012.$

c) $B = x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

d) $D = x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

e) $M = x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004$

f) $N = x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

HD:

a) $A = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017 = (x^4 - x) + 2017x^2 + 2017x + 2017$

$= x(x^3 - 1) + 2017(x^2 + x + 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[x(x-1) + 2017] = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2017)$

b) $C = x^4 + 2012x^2 + 2011x + 2012 = (x^4 - x) + (2012x^2 + 2012x + 2012)$

$= x\left(x^3-1\right)+2012\left(x^2+x+1\right)=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)+2012\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left[x(x-1)+2012\right]=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2012\right)$

c) $B=x^4+2010x^2+2009x+2010=\left(x^4-x\right)+\left(2010x^2+2010x+2010\right)$

$=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)+2010\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2010\right)$.

d) $D=x^4+1997x^2+1996x+1997=\left(x^4+x^2+1\right)+\left(1996x^2+1996x+1996\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)+1996\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1997\right)$

e) $M=x^4+2004x^2+2003x+2004=x^4+2004x^2+2004x-x+2004$

$=\left(x^4-x\right)+2004\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^3-1\right)+2004\left(x^2+x+1\right)$

$=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)+2004\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2004\right)$

f) $N=x^4+2008x^2+2007x+2008=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2008\right)$

Dạng 4. *Phân tích đa thức thành nhân tử của đa thức bậc cao*

Bài 3. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) x^8+14x^4+1

b) x^8+98x^4+1

c) $x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$

d) $x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1$

e) $2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3$

f) $x^6-x^4-9x^3+9x^2$

g) $x^5-5x^4+4x^3+4x^2-5x+1$

h) $3x^6-10x^5+34x^4-47x^3+52x^2+8x-40$

HD:

a) Ta có: $x^8+14x^4+1=x^8+2x^4+1+12x^4=\left(x^4+1\right)^2+12x^4$

$=\left(x^4+1\right)^2+2.\left(x^4+1\right).2x^2+4x^4-4x^2\left(x^4+1\right)+8x^4$

$=\left(x^4+1+2x^2\right)^2-\left(2x^3-2x\right)^2$

$=\left(x^4+1+2x^2-2x^3+2x\right)\left(x^4+1+2x^2+2x^3-2x\right)$

b) Ta có: $x^8+98x^4+1=\left(x^4+1\right)^2+2\left(x^4+1\right)^2.8x^2+64x^4-16x^2\left(x^4+1\right)+32x^4$

$=\left(x^4+8x^2+1\right)^2-16x^2\left(x^4+1-2x^2\right)=\left(x^4+8x^2+1\right)^2-\left(4x^3-4x\right)^2$

c) Ta có: $\left(x^7+x^5+x^3\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=x^3\left(x^4+x^2+1\right)+\left(x^4+x^2+1\right)$

$=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^3+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

$=\left(x^2-x+1\right)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$

d) Ta có: $x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1=\left(x^{11}+x^{10}+x^9\right)+\left(x^8+x^7+x^6\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^{11}+x^{10}+x^9\right)+\left(x^8+x^7+x^6\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$

$=x^9\left(x^2+x+1\right)+x^6\left(x^2+x+1\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^9+x^6+x^3+1\right)=(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

e) Ta có: $2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3=2x^5-2x^4-x^4+x^3+5x^3-5x^2-3x^2+3$

$=2x^4(x-1)-x^3(x-1)+5x^2(x-1)-3(x^2-1)=(x-1)^2(x^2+3)(2x+1)$

f) Ta có: $x^6-x^4-9x^3+9x^2=x^2(x^4-x^2-9x+9)$

$=x^2\left[x^2(x^2-1)-9(x-1)\right]=x^2\left[x^2(x-1)(x+1)-9(x-1)\right]=x^2(x-1)(x^3+x^2-9)$

g) Ta nhận thấy đa thức $x^5-5x^4+4x^3+4x^2-5x+1$ có một nhân tử là x + 1.
Do đó:
$x^5-5x^4+4x^3+4x^2-5x+1=(x^5+x^4)-(6x^4+6x^3)+(10x^3+10x^2)-(6x^2+6x)+(x+1)$

h) Nhận thấy đa thức có 2 nhân tử là: x – 1 và 3x + 2. Do đó đã thức đã cho bằng:
$(x-1)(3x+2)(x^4-3x^3+11x^2-14x+20)=(x-1)(3x+2)(x^2-2x+4)(x^2-x+5)$

6. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử.

***a) Phương pháp*:**

- Các đa thức không thể sử dụng các phương pháp như đặt nhân tử chung, nhóm hạng tử và sủ dụng hằng đẳng thức cũng như đoán nghiệm,
- Trong các thành phần của đa thức có chứa các hạng tử bậc 4, ta sẽ thêm bớt để đưa về hằng đẳng thức số 3 : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- Đối với đa thức bậc cao có dạng $x^{3m+1}+x^{3m+2}+1$ luôn luôn có nhân tử chung là bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu, nên ta thêm bớt để làm xuất hiện bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu:

b) Bài tập áp dụng

***Bài 1.* Phân tích đa thức sau thành nhân tử:**

a) $4x^4+81$ b) $64x^4+y^4$ c) $4x^4+y^4$

d) $4x^8+1$ e) x^4y^4+4 f) x^8+x^4+1

g) x^7+x^5+1 h) x^7+x^2+1 i) x^5+x-1

HD:

a) Ta có: $4x^4+81=(2x^2)^2+9^2+2.2x^2.9-2.2x^2.9=(2x^2+9)^2-36x^2$

b) Ta có: $64x^4+y^4=(8x^2)^2+(y^2)^2+2.8x^2.y^2-2.8x^2.y^2=(8x^2+y^2)^2-16x^2y^2$

c) Ta có: $4x^4+y^4=(2x^2)^2+(y^2)^2=(2x^2)^2+(y^2)^2+2.2x^2.y^2-4x^2y^2$

d) Ta có: $4x^8+1=(2x^4)^2+1+2.2x^4.1-4x^4=(2x^4+1)^2-(2x^2)^2$

e) Ta có: $x^4y^4+4=(x^2y^2)^2+2^2=(x^2y^2)^2+2^2+2.x^2.y^2.2-4x^2y^2=(x^2y^2+2)^2-(2xy)^2$

f) Ta có: $x^8+x^4+1=x^8+x^4+x^4+1-x^4=x^8+2x^4+1-x^4(x^4+1)^2-(x^2)^2$

g) Ta có: $x^7+x^5+1=x^7+x^5+(x^2+x)+1-x^2-x=(x^7-x)+(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$

$=x(x^6-1)+x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=x(x^3+1)(x^3-1)+x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

h) Ta có: $x^7+x^2+1=\left(x^7-x\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$$=x\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

i) Ta có: $x^5+x-1=\left(x^5+x^2\right)+\left(-x^2+x-1\right)=x^2\left(x^3+1\right)-\left(x^2-x+1\right)$

Bài 2. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) x^8+x+1 b) x^4+324 c) x^4+64

d) $81x^4+4y^4$ e) $4x^4y^4+1$ f) $4x^4+81$

g) $64x^4+y^4$ h) a^4+64 i) a^4+4b^2

HD:

a) Ta có: $x^8+x+1=\left(x^8-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=x^2\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$$=x^2\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

b) Ta có: $x^4+324=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2+2.x^2.18-36x^2=\left(x^2+18\right)^2-\left(6x\right)^2$

c) Ta có: $x^4+64=\left(x^2\right)^2+8^2=\left(x^2\right)^2+8^2+2.x^2.8-16x^2=\left(x^2+8\right)^2-\left(4x\right)^2$

d) Ta có: $81x^4+4y^4=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+2.9x^2.2y^2-36x^2y^2$

e) Ta có: $4x^4y^4+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1+2.2x^2y^2-4x^2y^2=\left(2x^2y^2+1\right)^2-\left(2xy\right)^2$

f) Ta có: $4x^4+81=\left(2x^2\right)^2+9^2=\left(2x^2\right)^2+9^2+2.2x^2.9-36x^2=\left(2x^2+9\right)^2-\left(6x\right)^2$

g) Ta có $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2.y^2-16x^2y^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-\left(4xy\right)^2$

h) Ta có: $a^4+64=\left(a^2\right)^2+8^2=\left(a^2\right)^2+8^2+2.a^2.8-16a^2=\left(a^2+8\right)^2-\left(4a\right)^2$

i) Ta có: $a^4+4b^4=\left(a^2\right)^2+\left(2b^2\right)^2+2.a^2.2b^2-4a^2.b^2=\left(a^2-2b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2$

Bài 3. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) x^6-64y^6 b) x^5-x^4-1 c) x^5+x^4+1

d) x^4+x^2+1 e) x^8+x^7+1 f) $x^{64}+x^{32}+1$

g) x^8+98x^4+1 h) $a^{10}+a^5+1$ i) a^4+3a^2+4

HD:

a) $x^6-64y^6=\left(x^3\right)^2-\left(8y^3\right)^2=\left(x^3-8y^3\right)\left(x^3+8y^3\right)$

b) Ta có: $x^5-x^4-1=\left(x^5-x^4+x^3\right)-\left(x^3+1\right)=x^3\left(x^2-x+1\right)-\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

c) Ta có: $x^5+x^4+1=x^5+x^4+x^3+1-x^3=x^3\left(x^2+x+1\right)-\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$

d) Ta có: $x^8+98x^4+1=\left(x^8+2x^4+1\right)+96x^4$

$$=\left(x^4+1\right)^2+16x^2\left(x^4+1\right)+64x^4-16x^2\left(x^4+1\right)+32x^4$$

$$=\left(x^4+1+8x^2\right)^2-16x^2\left(x^4+1-2x^2\right)=\left(x^4+8x^2+1\right)^2-\left(4x^3-4x\right)^2$$

e) Cách 1: $x^4+x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Cách 2: $x^4+x^2+1=x^4-x^3+x^2+x^3+1=x^2\left(x^2-x+1\right)+\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

Cách 3: $x^4+x^2+1=x^4+x^3+x^2-\left(x^3-1\right)=x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$

f) Ta có: $x^8+x^7+1=x^8+x^7+x^6-x^6+1=(x^2+x+1)[x^6-(x-1)(x^3+1)]$

g) Ta có: $x^{64}+x^{32}+1=x^{64}+2.x^{32}+1-x^{32}=\left(x^{32}+1\right)^2-x^{32}=\left(x^{32}+1+x^{16}\right)\left(x^{32}+1-x^{16}\right)$

h) Ta có: $a^{10}+a^5+1=\left(a^{10}-a\right)+\left(a^5-a^2\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^9-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=a\left((a^3)^3-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^3-1\right)\left(a^6+2a^3+1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=\left(a^7+2a^4+a\right)\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)+a^2\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=\left(a^2+a+1\right)\left[\left(a^7+2a^4+a\right)\left(a-1\right)+\left(a^3-a^2\right)+1\right]$

7. Phương pháp đổi biến số (hay đặt ẩn phụ)

a) *Phương pháp:*

Trong một số bài toán, ta nên đưa một biến phụ vào để việc giải bài toán được gọn gàng, tránh nhầm lẫn. Đặt ẩn phụ để đưa về dạng tam thức bậc hai rồi sử dụng các phương pháp cơ bản khác và tiếp tục phân tích.

b) *Bài tập áp dụng*

***Dạng 1.* Đặt biến phụ $(x^2+ax+m)(x^2+ax+n)+p$**

Phương pháp: Đặt $x^2+ax=t$ hoặc $x^2+ax+\dfrac{m+n}{2}=t$ để đưa đa thức về đa thức với ẩn t.

Thay t ngược lại ta được kết quả.

***Bài 1.* Phân tích đa thức sau thành nhân tử:**

a) $\left(x^2-4\right)\left(x^2-10\right)-72$

b) $\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-15$

c) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12$

d) $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x-3\right)-5$

e) $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x^3+14x^2+24x$

f) $\left(x^2+2x+7\right)-\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+3\right)$

HD:

a) Đặt $x^2-4=t$ khi đó đa thức trở thành:

$t\left(t-6\right)-72=t^2-6t-72=\left(t-12\right)\left(t+6\right)=\left(x^2-16\right)\left(x^2+2\right)=\left(x-4\right)\left(x+4\right)\left(x^2+2\right)$

b) Đặt $x^2+x=y$ ta có: $y^2-2y-15=\left(y-3\right)\left(y+3\right)=\left(x^2+x-3\right)\left(x^2+x+3\right)$

c) Đặt $x^2+x=t$ khi đó đa thức trở thành:

$\left(t+1\right)\left(t+2\right)-12=t^2+3t-10=\left(t-2\right)\left(t+5\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x^2+x+5\right)$

d) Đặt : $x^2+3x=t$, Khi đó đa thức trở thành:

$\left(t+1\right)\left(t-3\right)-5=t^2-2t-8=\left(t+2\right)\left(t-4\right)=\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x-4\right)$

e) Ta có: $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x^3+14x^2+24x=\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2$

Đặt: $x^2+4x+8=y$ ½ $y^2+3xy+2x^2$ (1)

Ta xem đa thức (1) đa thức bậc hai của biến y với các hệ số là a = 1 ; b = 3x ; c = $2x^2$

Ta có : $1.2x^2=2x^2=x.2x$, x + 2x = 3x = b

Suy ra : $y^2+3xy+2x^2=\left(y^2+xy\right)+\left(2xy+2x^2\right)=\left(x+y\right)\left(2x+y\right)$

f) Đặt : $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành :

$\left(t+7\right)-\left(t+4\right)\left(t+3\right)=t+7-t^2-7t-12=-t^2-6t-5=-\left(t+1\right)\left(t+5\right)$,

Thay t trở lại ta được : $-\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)=-\left(x+1\right)^2\left(x^2+2x+5\right)$

Bài 2. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:***

a) $\left(x^2+2x\right)^2+9x^2+18x+20$

b) $\left(x^2+8x+7\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)+15$

c) $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)-6$

d) $x^2+6xy+9y^2-3\left(x+3y\right)-4$

e) $4x^2+4xy+y^2+10x+5y-6$

f) $x^2+8xy+16y^2+2x+8y-3$

HD:

a) $\left(x^2+2x\right)^2+9x^2+18x+20=\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+5\right)$. Đặt $x^2+2x=t$

b) $\left(x^2+8x+7\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)+15=\left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right)$. Đặt $x^2+8x+11=t$

c) $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)-6=\left(x^2+3x-1\right)\left(x^2+3x+4\right)$. Đặt $x^2+3x+1=t$

d) $x^2+6xy+9y^2-3\left(x+3y\right)-4=\left(x+3y\right)^2-3\left(x+3y\right)-4$. Đặt x + 3y = t

e) $4x^2+4xy+y^2+10x+5y-6=\left(2x+y^2\right)+5\left(2x+y\right)-6$. Đặt 2x + y = t

f) $x^2+8xy+16y^2+2x+8y-3=\left(x+4y\right)^2+2\left(x+4y\right)-3$. Đặt x + 4y = t

Dạng 2. ***Đặt biến phụ dạng (x + a)(x + b(x + c)(x + d) + e***

Phương pháp : Biến đổi đa thức về dạng $(x^2+ax+m)(x^2+ax+n)+p$ rồi đặt ẩn phụ như trên

Bài 1. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:***

a) $\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)+15$

b) $x\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)+128$

c) $\left(a+1\right)\left(a+2\right)\left(a+3\right)\left(a+4\right)+1$

d) $\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)-24$

e) $\left(4x+1\right)\left(12x-1\right)\left(3x+2\right)\left(x+1\right)-4$

f) $\left(x-4\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)\left(x-7\right)-1680$

HD:

a) Ta có: $\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)+15=\left(x^2+8x+15\right)\left(x^2+8x+7\right)+15$

Đặt $t=x^2+8x+11$ ta được $\left(t+4\right)\left(t-4\right)+15=t^2-1=(t-1)\left(t+1\right)$

Thay lại $t=x^2+8x+11$ ta được $\left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right)$

Vậy: $\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)+15=\left(x^2+8x+10\right)\left(x+6\right)\left(x+2\right)$

b) $x\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)+128=\left(x^2+10x+8\right)\left(x^2+10x+16\right)=\left(x+2\right)\left(x+8\right)\left(x^2+10x+8\right)$

Cách 2: $x\left(x+10\right)\left(x+4\right)\left(x+6\right)+128=\left(x^2+10x\right)\left(x^2+10x+24\right)+128$

c) $\left(a+1\right)\left(a+2\right)\left(a+3\right)\left(a+4\right)+1=\left(a^2+5a+5\right)^2$

d) $\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)-24=\left(x+1\right)\left(x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)$

e) $\left(4x+1\right)\left(12x-1\right)\left(3x+2\right)\left(x+1\right)-4=\left(12x^2+11x-2\right)\left(12x^2+11x+3\right)$

f) $\left(x-4\right)\left(x-5\right)\left(x-6\right)\left(x-7\right)-1680=\left(x-12\right)\left(x+1\right)\left(x^2-11x+70\right)$

Bài 2. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:***

a) $\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+x-6\right)-24$ b) $(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3)+9$

c) $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$ d) $4\left(x^2+15x+50\right)\left(x^2+18x+72\right)-3x^2$

e) $(3x+2)(3x-5)(x-9)(9x+10)+24x^2$ f) $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$

HD: *Biến đổi đa thức đưa về dạng như bài tập 1*

a) Ta có: $\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+x-6\right)-24=(x-1)(x+4)(x-2)(x+3)-24$

$$(x-2)(x+4)(x-1)(x+3)-24=\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x-3\right)-24$$

Đặt : $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành : $(t-8)(t-3)-24=t^2-11t=t(t-11)$

Thay t trở lại ta được : $\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x-11\right)=x(x+2)\left(x^2+2x-11\right)$

b) Ta có: $(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3)+9=\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2-3x-9\right)+9$

$$=t^2-10t+9=x(2x-3)(2x^2-3x-8)$$

c) Ta có: $(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1)-4=\left(12x^2+11x+2\right)\left(12x^2+11x-1\right)-4$

Đặt $12x^2+11x=t$, Khi đó đa thức trở thành: $(t+2)(t-1)-4=t^2+t-6=(t-2)(t+3)$

Vậy : $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4=\left(12x^2+11x-2\right)\left(12x^2+11x+3\right)$

d) Ta có: $4\left(x^2+15x+50\right)\left(x^2+18x+72\right)-3x^2=4(x+5)(x+10)(x+6)(x+12)-3x^2$

$$=4\left(x^2+17x+60\right)\left(x^2+16x+60\right)-3x^2$$

Đặt $t=x^2+16x+60\Rightarrow x^2+17x+60=t+x\Rightarrow 4t(t+x)-3x^2=4t^2+4xt-3x^2$

Đến đây ta xem đa thức $4t^2+4xt-3x^2$ là đa thức bậc hai của biến t với các hệ số:

$a=4$, $b=4x$, $c=-3x^2$. Dùng phương pháp tách hạn tử cuối ta được:

$$4t^2+4xt-3x^2=(2t+x)^2-(2x)^2=(2t-x)(2t+3x)$$

$$=\left(2x^2+31x+120\right)\left(2x^2+25x+120\right)=(x+8)(2x+15)\left(2x^2+35x+120\right)$$

e) Ta có: $(3x+2)(3x-5)(x-9)(9x+10)+24x^2=\left(9x^2-9x-10\right)\left(9x^2+9x-10\right)+24x^2$

Đặt $y=9x^2-9x-10$, khi đó đa thức trở thành: $y(y+10x)+24x^2=y^2+10xy-24x^2$

Tìm m.n = $24x^2$ và m + n = 10x ta chọn được m = 6x , n = 4x

Ta được: $y^2+10xy+24x^2=(y+6x)(y+4x)$

Do đó $(3x+2)(3x-5)(x-9)(9x+10)+24x^2=\left(9x^2-3x-10\right)\left(9x^2-5x-10\right)$

f) Ta có: $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4=\left(x^2+5xy+5y^2\right)^2$

Bài 3. ***Cho biểu thức:*** $A=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2$

a) Phân tích A thành nhân tử

b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì A < 0

HD:

a) Ta có: $A=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-\left(2bc\right)^2$

$=\left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)=\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)\left(b-c-a\right)\left(b-c+a\right)$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên:

$b+c-a>0,\ b+c+a>0,\ b-c-a<0,\ b-c+a>0$ ½ $A<0$

Dạng 3. Đặt biến phụ dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 + c$

a) Phương pháp

Đặt $t=x+\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow x=t-\dfrac{a+b}{2}$

$\Rightarrow f(t)=(t-\dfrac{a+b}{2}+a)^4+(t-\dfrac{a+b}{2}+b)^4=(t-\dfrac{b-a}{2})^4+(t+\dfrac{b-a}{2})^4=....=ct^4+dt^2+e$

b) Bài tập áp dụng

Bài 1. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử thành nhân tử.***

a) $Q(x)=\left(x-3\right)^4+\left(x-1\right)^4-16$

b) $P(x)=(x+3)^4+(x+5)^4-2$

c) $R(x)=(x+3)^4+(x+1)^4-16$

d) $f(x)=(x+3)^4+(x+5)^4-16$

HD:

a) Đặt y = x – 2, khi đó đa thức trở thành

$Q\left(y\right)=\left(y-1\right)^4+\left(y\ +\ 1\right)^4-16=2y^4+12y^2-14=2\left(y^2+7\right)\left(y+1\right)$

Do đó $Q\left(x\right)=2\left(x^2-4x+11\right)\left(x-3\right)\left(x-1\right)$.

b) Đặt $t=x+4\Rightarrow x=t-4\Rightarrow P(x)=(t-1)^4+(t+1)^4-2$

$P(x)=\left[\left(t-1\right)^2+\left(t+1\right)^2\right]^2-2=2t^4+12t^2=2t^2(t^2+6)=2(x+4)^2\left[\left(x+4\right)^2+6\right]$

c) Đặt $t=x+2\Rightarrow R(x)=(t+1)^4+(t-1)^4-16=2(t^4+6t^2-7)$

d) Đặt $t=x+4\Rightarrow f(x)=(t+1)^4+(t-1)^4-16=2(t^4+6t^2-7)$

Dạng 4. Đặt biến phụ dạng đẳng cấp

Bài 1. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử thành nhân tử.***

a) $(x^2+1)^2+3x(x^2+1)+2x^2$

b) $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$

c) $4\left(x^2+x+1\right)^2+5x\left(x^2+x+1\right)+x^2$

d) $\left(x^2-x+2\right)^4-3x^2\left(x^2-x+2\right)^2+2x^4$

e) $\left(x^2-x-1\right)^4+7x^2\left(x^2-x-1\right)^2+12x^4$

f) $10\left(x^2-2x+3\right)^4-9x^2\left(x^2-2x+3\right)^2-x^4$

HD:

a) Đặt $x^2+1=t$, khi đó đa thức trở thành: $t^2+3xt+2x^2$

Ta xem đa thức trên là đa thức bậc hai của biến t với các hệ số là a = 1 ; b = 3x ; c = $2x^2$

Ta có: $a.c=1.2x^2=x.2x$, x + 2x = 3x = b. Do đó ta có:

$t^2+3xt+2x^2=\left(t^2+xt\right)+\left(2xt+2x^2\right)=t\left(t+x\right)+2x\left(t+x\right)=\left(t+x\right)\left(t+2x\right)$

Thay $t=x^2+1$ ta được: $\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1+2x\right)=\left(x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)$

b) Ta có: $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2=t^2+3xt+2x^2=(t+x)(t+2x)$

c) Ta có: $4\left(x^2+x+1\right)^2+5x\left(x^2+x+1\right)+x^2=4t^2+5xt+x^2=(t+x)(4t+x)$

d) Đặt $\left(x^2-x+2\right)^2=t$, khi đó đa thức trở thành: $t^2-3x^2t+2x^4=\left(t-x^2\right)\left(t-2x^2\right)$

e) Đặt $\left(x^2-x-1\right)^2=t$, khi đó đa thức trở thành: $t^2+7x^2t+12x^2=\left(t+3x^2\right)\left(t+4x^2\right)$

f) Đặt $\left(x^2-2x+3\right)^2=t$, khi đó đa thức trở thành: $10t^2-9x^2t-x^4=\left(t-x^2\right)\left(10t+x^2\right)$

Dạng 5. Đặt biến phụ dạng khác

Bài 1. ***Phân tích thành nhân tử đa thức.*** $P(x)=2x^4+3x^3-9x^2-3x+2$

HD:

Đa thức dạng: $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+kbx+a$ với $k = 1$ hoặc $k = -1$

Cách giải: Đặt $y = x^2 + k$ và đưa P(x) về dạng chứa hạng tử $ay^2 + bxy$ rồi sử dụng HĐT

Đặt $y = x^2 - 1$ suy ra $y^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

Biến đổi $P(x) = 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^3 - 5x^2 - 3x$

$= 2(x^2 - 1)^2 + 3x(x^2 - 1) - 5x$

Từ đó $P(y) = 2y^2 + 3xy - 5x^2$

Tìm m, n sao cho $m.n = -10x^2$ và $m + n = 3x$ chọn $m = 5x$, $n = -2x$

Ta có : $P(y) = 2y^2 + 3xy - 5x^2 = 2y^2 - 2xy + 5xy - 5x^2 = = (y - x)(2y - 5x)$

Do đó , $P(x) = (x^2 - x - 1)(2x^2 + 5x - 2)$.

Bài 2. ***Phân tích thành nhân tử đa thức.*** $P(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4$

HD:

Đa thức dạng: $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $e=\dfrac{d^2}{b^2}$

Cách giải: Đặt biến phụ $y=x^2+\dfrac{d}{b}$ và đưa P(x) về dạng có chứa $y^2 + bxy$ rồi sử dụng HĐT

Dễ thấy $b = 1$, $d = 2$, $e = 4$, đặt $y = x^2 - 2$ ½ $y^2 = x^4 - 4x^2 + 4$

Biến đổi $P(x) = x^4 - 4x^2 + 4 - x^3 - 6x^2 + 2x = (x^2 - 2)^2 - x(x^2 - 2) - 6x^2$

Từ đó $P(y) = y^2 - xy - 6x^2$

Tìm m, n sao cho $m.n = - 6x^2$ và $m + n = - x$ chọn $m = 2x$, $n = -3x$

Ta có $P(y) = y^2 + 2xy - 3xy - 6x^2 = y(y + 2x) - 3x(y + 2x) = (y + 2x)(y - 3x)$

Do đó, $P(x) = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - 3x - 2)$.

Nếu đa thức P(x) có chứa ax^4 thì có thể xét đa thức $Q(x) = P(x)/a$ theo cách trên.

Bài 3. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:*** $P(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

HD:

Đa thức không có hai nghiệm là 1 và –1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

Nên ta biến đổi như sau:

$$P(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{-6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right]$$

Đặt $x-\dfrac{1}{x}=t$ ½ $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$ ½ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$

Đa thức trở thành : $x^2\left(t^2+2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+9\right)=x^2\left(t+3\right)^2$

Thay t trở lại ta được : $x^2\left(x-\dfrac{1}{x}+3\right)^2=x^2\left(\dfrac{x^2-1+3x}{x}\right)^2=(x^2+3x-1)^2$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+3x-1\right)^2$

Bài 4. ***Phân tích đa thức thành nhân tử:***

a) $A(x)=x^4+x^3-4x^2+x+1$

b) $Q(x)=x^4-3x^3-6x^2+3x+1$

c) $N(x)=x^4+6x^3+7x^2+6x+1$

d) $B(x)=x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

e) $M(x)=x^4+10x^3+26x^2+10x+1$

f) $P(x)=2x^4-21x^3-30x^2-105x+50$

g) $A(x)=4x^4-8x^3+3x^2-8x+4$

h) $B(x)=2x^4-15x^3+35x^2-30x+8$

HD:

a) Ta có: $A(x)=x^4+x^3-4x^2+x+1=x^2\left(x^2+x-4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\dfrac{1}{x^2}+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4\right]$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ ½ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$ Đa thức trở thành:

$A(x)=x^2\left(t^2-2+t-4\right)=x^2\left(t^2+t-6\right)=x^2\left(t-2\right)\left(t+3\right)$

Thay t trở lại ta được :

$A(x)=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)=x^2\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x}\right)\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x}\right)=\left(x-1\right)^2.\left(x^2+3x+1\right)$

Vậy $A(x)=x^4+x^3-4x^2+x+1=\left(x-1\right)^2\left(x^2+3x+1\right)$

b) Ta có: $Q(x)=x^2\left(x^2-3x-6+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2\left[\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-6\right]$

Đặt $x-\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$

$Q(t)=t^2+2-3t-6=t^2-3t-4=(t+1)(t-4)$

$Q(x)=x^4-3x^3-6x^2+3x+1=(x^2+x-1)(x^2-4x-1)$

c) $N(x)=x^4+6x^3+7x^2+6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^2\left[x^2+\dfrac{1}{x^2}+6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+7\right]$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ ½ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức trở thành:

$N(x)=x^2\left(t^2-2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+5\right)=x^2\left(t+1\right)\left(t+5\right)$

Thay t trở lại ta được: $N(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+5x+1\right)$

d) Ta có: $B(x)=x^4-7x^3+14x^2-7x+1=x^2\left[x^2+\dfrac{1}{x^2}-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+14\right]$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$ ½ $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức trở thành:

$B(x)=x^2\left(t^2-2-7t+14\right)=x^2\left(t^2-7t+12\right)=x^2\left(t-3\right)\left(t-4\right)$

Vậy $B(x)=x^4-7x^3+14x^2-7x+1=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-4x+1\right)$

e) $M(x)=x^4+10x^3+26x^2+10x+1=x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+10\left(x-\frac{1}{x}\right)+26\right]$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$ ½ $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

Đa thức trở thành: $x^2\left(t^2-2+10t+26\right)=x^2\left(t^2+10t+24\right)=x^2\left(t+4\right)\left(t+6\right)$

Thay t trở lại ta được : $M(x)=x^4+10x^3+26x^2+10x+1=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$

f) Ta có: $P(x)=x^2\left(2x^2-30-21x-\frac{105}{x}+\frac{50}{x^2}\right)=x^2\left[2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{5}{x}\right)-30\right]$

Đặt $t=x+\frac{5}{x}\Rightarrow x^2+\frac{25}{x^2}=t^2-10$

$P(t)=2\left(t^2-10\right)-21t-30=2t^2-21t-50=\left(t+2\right)\left(2t-25\right)$

$P(x)=x^2\left[2\left(x+\frac{5}{x}\right)-25\right]\left[\left(x+\frac{5}{x}\right)+2\right]=2\left(x^2-25x+10\right)\left(2x^2+2x+5\right)$

h) $A(x)=4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=4\left(x^4+1\right)-8x\left(x^2+1\right)+3x^2=4\left(x^2+1\right)^2-8x\left(x^2+1\right)-5x^2$

$=4y^2-8xy-5x^2=4y^2+2xy-10xy-5x^2$

$=\left(2y+x\right)\left(2y-5x\right)=\left(2x^2+x+2\right)\left(2x^2-5x+2\right)=\left(2x^2+x+2\right)\left(x-2\right)\left(2x-1\right)$

i) $B(x)=2x^4-15x^3+35x^2-30x+8=2\left(x^4+4\right)-15x\left(x^2+2\right)+35x^2$

$=2\left(x^2+2\right)^2-15\left(x^2+2\right)+27x^2=2y^2-15y+27x^2$

$=\left(y-3x\right)\left(2y-9x\right)=\left(x^2-3x+2\right)\left(2x^2-9x+4\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-4\right)\left(2x-1\right)$

***Bài 5.* Phân tích đa thức thành nhân tử:**

a) $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x+y+z\right)^2-3\left(xy+yz+zx\right)^2$ b) $\left(x-y\right)^3+\left(y-z\right)^3+\left(z-x\right)^3$

c) $\left(x^3-y^3\right)^3+\left(y^3+z^3\right)^3-\left(z^3+x^3\right)^3$ d) $\left(a+b\right)^3+\left(b+c\right)^3+\left(c+a\right)^3-8\left(a+b+c\right)^3$

e) $\left(a+b+c\right)^3-\left(a+b-c\right)^3-\left(b+c-a\right)^3-\left(c+a-b\right)^3$

HD:

a) Ta có $\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+zx\right)$

Đặt $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a\\ xy+yz+zx=b\end{cases}\Rightarrow A=a\left(a+2b\right).3b^2=a^2+2ab-3b^2=\left(a-b\right)\left(a+3b\right)$

$\Rightarrow A=\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\left[(x^2+y^2+z^2+3\left(xy+yz+zx\right)\right]$

b) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

Ta đã biết: Nếu $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Đặt $\begin{cases} x-y=a \\ y-z=b \\ z-x=c \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow B=a^3+b^3+c^3 \Rightarrow B=3abc=3(x-y)(y-z)(z-x)$

c) $(x^3-y^3)^3+(y^3+z^3)^3-(z^3+x^3)^3$

Đặt $\begin{cases} x^3-y^3=a \\ y^3+z^3=b \\ -x^3-z^3=c \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0$

$\Rightarrow B=a^3+b^3+c^3 \Rightarrow B=3abc=3(x^3-y^3)(y^3+z^3)(-z^3-x^3)$

d) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-8(a+b+c)^3$

Đặt $\begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ c+a=z \end{cases} \Rightarrow x+y+z=2(a+b+c) \Rightarrow (x+y+z)^3=8(a+b+c)^3$

e) Vậy $D=x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$

Ta có: $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \Rightarrow D=-3(x+y)(y+z)(z+x)$

f) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

Đặt $\begin{cases} m=a+b-c \\ n=b+c-a \\ p=c+a-b \end{cases} \Rightarrow a+b+c=m+n+p$

$\Rightarrow E=(m+n+p)^3-m^3-n^3-p^3=3(m+n)(n+p)(p+m)$

$\Rightarrow E=3.2b.2c.2a=24abc$

8. *Phương pháp hệ số bất định*

a) Kiến thức cơ bản

Định lý :

a) Nếu đa thức $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0=0$ với mọi $x \in Q$ thì $a_i=0$

b) Nếu hai đa thức cùng bậc mà hằng đẳng với nhau với mọi giá trị của các biến thì hệ số của các hạng tử đồng dạng bằng nhau.

VD: Cho hai đa thức $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ và

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+....+b_1x+b_0.$$

Nếu f(x) = g(x) thì $a_i=b_i$ (i = 0; 1; 2; 3; .....n)

b) Bài tập áp dụng

Bài 1. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

f) $x^4-6x^3+12x^2-14x+3$ g) $2x^4-3x^3-7x^2+6x+8$

h) $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3$ i) $2x^4-7x^3+17x^2-20x+14$

j) $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$ k) $2x^2-7xy+6y^2+9x-13y-5$

HD:

a) Ta nhận thấy các giá trị $\pm1;\ \pm3$ không là nghiệm của đa thức đã cho

Do đó, ta có: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = \left(x^2 + ax + 1\right)\left(x^2 + bx + 3\right)$

Hoặc: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = \left(x^2 + ax - 1\right)\left(x^2 + bx - 3\right)$

Giả sử ở TH1 ta có :

$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = x^4 + \left(a + b\right)x^3 + \left(4 + ab\right)x^2 + \left(3a + b\right)x + 3$

Đồng nhất hệ số ta có:

$\begin{cases} a + b = -6 \\ 4 + ab = 12 \\ 3a + b = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$ Vậy $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = \left(x^2 - 4x + 1\right)\left(x^2 - 2x + 3\right)$

b) ***Cách 1***: Ta nhận thấy đa thức có 1 nghiệm là x = – 1 nên có nhân tử là x + 1

Do đó: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x + 1)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$

$= 2x^4 + (a + 2)x^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$

Đồng nhất hệ số ta có:

$\begin{cases} a + 2 = -3 \\ a + b = -7 \\ b + c = 6 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = (x + 1)(x - 2)(2x^2 - x - 4)$

Cách 2:

Giả sử $(2x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 2x^4 + (2c + a)x^3 + (2d + ac + b)x^2 + (ad + bc)x + bd$

Đồng nhất các hệ số: $\begin{cases} 2c + a = -3 \\ 2d + ac + b = -7 \\ ad + bc = 6 \\ bd = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ d = -4 \\ a = c = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = (2x^2 - x - 4)(x + 1)(x - 2)$

c) Ta có: $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = \left(ax + by + 3\right)\left(cx + dy - 1\right)$

$= acx^2 + \left(3c - a\right)x + bdy^2 + \left(3d - b\right)y + \left(bc + ad\right)xy - 3$

Đồng nhất các hệ số ta có:

$\begin{cases} ac = 12 \\ bc + ad = -10 \\ 3c - a = 5 \\ bd = -12 \\ 3d - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \\ b = -6 \\ d = 2 \end{cases}$ ½ $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = \left(4x - 6y + 3\right)\left(3x + 2y - 1\right)$

d) Ta có: $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 20x + 14 = \left(2x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right)$

$= 2x^4 + (2c + a)x^3 + (ac + b + 2d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

Đồng nhất hệ số ta có:

$\begin{cases} 2c + a = -7 \\ ac + b + 2d = 17 \\ ad + bc = -20 \\ bd = 14 \text{ ½ } b = 7, d = 2\,(TM) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \\ c = -2 \\ d = 2 \end{cases}$

Ta có: $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$

$$= 4x^4 + (2a+2b)x^3 + (ab+4)x^2 + (a+b)x + 1$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được : 2a + 2b = 4, ab + 4 = 5, a + b = 2 $\Rightarrow$ a = 1, b = 1

Vậy $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2$

e) $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 9x - 13y - 5 = (2x + ay + b)(x + cy + d) \Rightarrow c = -2, b = -3, b = -1, d = 5$

Bài 2. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $x^3 - 19x - 30$

b) $x^4 + 8x + 63$

c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$

d) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

e) $3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1$

f) $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$

HD:

a) Ta có: $x^3 - 19x - 30 = (x+a)(x^2 + bx + c) = x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac.$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được $\begin{cases} a + b = 0 \\ ab + c = 19 \\ ac = -30 \end{cases}$

Vì a,c thuộc số nguyên vá tích ac = –30, do đó a, c là ước của –30

hay $a, c \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$

Với a = 2, c = 15 khi đó b = –2 thoả mãn hệ trên. Đó là một bộ số phải tìm

Vậy: $x^3 - 19x - 30 = (x+2)(x^2 - 2x - 15)$

b) Ta có: $x^4 + 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

Đồng nhất hệ số ta có: $x^4 + 8x + 63 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 9)$

c) Dễ thấy ± 1 không phải là nghiệm của đa thức trên nên đa thức không có nghiệm nguyên, cũng không có nghiệm hữu tỉ.

Do đó: $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

$$= x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd.$$

Đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho, ta có

$$\begin{cases} a + c = 6 \\ ac + b + d = 7 \\ ad + bc = 6 \\ bd = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = d = 1 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy: $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5)$

d) Ta có: $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (ax^2 + bx + 1)(cx^2 + dx + 1)$

Đồng nhất các hệ số, ta được: $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2$

e) Ta viết: $3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = (3x^2 + cx + 1)(x^2 + dx + 1)$

$$= 3x^4 + (3d+c)x^3 + (4+cd)x^2 + (c+d)x + 1$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được: 3d + c = 11, 4 + cd = – 7, c + d = – 2 $\Leftrightarrow c, d \in \varnothing$ (loại)

Khi đó, ta chọn cách viết khác:

$3x^4+11x^3-7x^2-2x+1=(3x+m)(x^3+nx^2+px+q)$ với mọi x

$$=3x^4+(3n+m)x^3+(3p+mn)x^2+(3q+mp)x+mq$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được: $\begin{cases}3n+m=11\\3p+mn=-7\\3q+mp=-2\\mq=1\end{cases}$

Xét hai trường hợp:

TH$_1$: m = q = – 1, giải ra được n = 4, p = – 1 (nhận)

TH$_2$: m = q = – 1, giải ra $n,p\in\varnothing$ (loại)

Vậy: $3x^4+11x^3-7x^2-2x+1=(3x-1)(x^3+4x^2-x-1)$

f) Ta có: $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=(ax+by+3)(cx+dy-1)$

$=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2+(3c-a)x+(3d-b)y-3$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases}ac=12\\ad+bc=-10\\bd=-12\\3c-a=5\\3d-b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=-6\\c=3\\d=2\end{cases}$

Vậy $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=(4x-6y+3)(3x+2y-1)$

Bài 3. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $A=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$ b) $A=(a+b+c)^3-4(a^3+b^3+c^3)-12abc$

c) $A=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ d) $C=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

HD:

a) Ta có: $A=(x^2+y^2+z^2)\left[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\right]+(xy+yz+zx)^2$

Đặt: $x^2+y^2+z^2=a, xy+yz+zx=b$ khi đó ta được:

$A=a(a+2b)+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2$

b) $A=(a+b+c)^3-4(a^3+b^3+c^3)-12abc$

Đặt $\begin{cases}a+b=m\\a-b=n\end{cases}\Rightarrow 4ab=m^2-n^2$ và $a^3+b^3=(a+b)\left[(a-b)^2+ab\right]=m\left(n^2+\dfrac{m^2-n^2}{4}\right)$

$\Rightarrow A=(m+c)^3-4.\dfrac{m^3+3mn^2}{4}-4c^3-3c(m^2-n^2)=3(-c^3+mc^2-mn^2+cn^2)$

$=3(m-c)(c-n)(c+n)=3(a+b+c)(c+a-b)(c-a+b)$

c) $A=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

Đặt $\begin{cases}x=a-b\\y=b-c\end{cases}\Rightarrow x+y=a-c$

$A=abx+bcy-ca(x+y)=ax(b-c)-cy(a-b)=axy-cxy=xy(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a)$

d) $C=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

Đặt $\begin{cases}x=a-b\\y=b-c\end{cases}\Rightarrow x+y=a-c$

$$C=ay^3-b(x+y)^3+cx^3=ay^3-b\left[x^3+y^3+3xy(x+y)\right]+cx^3$$
$$=y^3(a-b)-x^3(b-c)-3bxy(x+y)$$
$$=xy^3-x^3y-3bxy(x+y)=xy(y^2-x^2)-3bxy(x+y)$$
$$=xy(x+y)(y-x-3b)=xy(x+y)(b-c-a+b-3b)$$
$$=-xy(x+y)(a+b+c)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

Bài 4. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $A=2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$

b) $B=a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

c) $C=ab(a+b)+b(b+c)+ca(c+a)-a^3-b^3-c^3-2abc$

HD:

a) Đặt: $\begin{cases}x^4+y^4+z^4=a\\x^2+y^2+z^2=b\\x+y+z=c\end{cases}$ Khi đó ta có:

$$A=2a-b^2-2bc^2+c^4=2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4=2(a-b^2)+(b-c^2)^2$$

Lại có : $a-b^2=-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ và $b-c^2=-2(xy+yz+zx)$

Thay vào ta được : $A=-4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+4(xy+yz+zx)^2=8xyz(x+y+z)$

b) Đặt $\begin{cases}a+b-c=x\\b+c-a=y\\c+a-b=z\\m=x+y+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=y+z\\2b=z+x\\2c=x+y\end{cases}$

$$2A=(y+z)x^2+(x+z)y^2+(y+x)z^2+2xyz=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz$$
$$=xy(m-z)+yz(m-x)+zx(m-y)+2xyz=m(xy+yz+zx)-xyz$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x)=8abc\Rightarrow A=4abc$$

c) Đặt $\begin{cases}a+b-c=z\\b+c-a=x\\c+a-b=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=y+z\\2b=x+z\\2c=x+y\end{cases}$

Ta có: $4C=4a^2(b+c-a)+4b^2(c+a-b)+4c^2(a+b-c)-8abc$

$$=(y+z)^2x+(z+x)^2y+(x+y)^2z-(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-(x+y)(y+z)(z+x)+6xyz$$
$$=xy(x+y)+yz(x+y)+zx(x+y)+z^2(x+y)-(x+y)(y+z)(z+x)+4xyz$$

$$=\left(x+y\right)\left(xy+yz+zx+z^2\right)-\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+4xyz$$
$$=\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)-\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+4xyz=4xyz$$
$$\Rightarrow C=xyz=\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)$$

Bài 5. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $B=x(x+2y)^3-y(y+2x)^3$

b) $C=x^4+(x+y)^4+y^4$

c) $D=a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

d) $E=4x\left(x+y\right)\left(x+y+z\right)\left(x+z\right)+y^2z^2$

HD:

a) Đặt $m=x+y$, ta có:

$$B=x((m+y))^3-y((m+x))^3=x\left[m^3+3my((m+y))+y^3\right]-y\left[m^3+3mx((m+x))+x^3\right]$$
$$=m^3\left(x-y\right)-xy\left(x^2-y^2\right)-3mxy\left(m+x-m-y\right)=\left(x-y\right)\left[m^3-xy\left(x+y\right)-3mxy\right]$$
$$=m\left(x-y\right)\left(m^2-4xy\right)=m\left(x-y\right)\left[\left(x+y\right)^2-4xy\right]=m\left(x-y\right)^3=\left(x+y\right)\left(x-y\right)^3$$

b) Đặt: $m=x+y$, ta có:

$$C=\left(m-y\right)^4+m^4+y^4=m^4-4m^3y+6m^2y^2-4my^3+y^4+m^4+y^4$$
$$=2\left(m^4+2m^2y^2+y^4\right)-4my\left(m^2+y^2\right)+2m^2y^2$$
$$=2\left(m^2+y^2-my\right)^2=2\left[\left(x+y\right)^2+y^2-\left(x+y\right)y\right]^2=2\left(x^2+xy+y^2\right)^2$$

c) Đặt: $m=a^2+b^2+c^2$

$$D=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$=m^2-4\left[b^2\left(a^2+c^2\right)+c^2a^2\right]=m^2-4\left[b^2\left(m-b^2\right)+c^2a^2\right]$$
$$=\left(m-2b^2\right)^2-\left(2ca\right)^2=\left(m-2b^2-2ca\right)\left(m-2b^2+2ca\right)$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2-2b^2-2ca\right)\left(a^2+b^2+c^2-2b^2+2ca\right)$$
$$=\left[\left(a-c\right)^2-b^2\right]\left[\left(a+c\right)^2-b^2\right]=\left(a-c-b\right)\left(a-c+b\right)\left(a+c-b\right)\left(a+b+c\right)$$

d) Ta có: $E=4x\left(x+y+z\right)\left(x+y\right)\left(x+z\right)+y^2z^2=4\left(x^2+xy+xz\right)\left(x^2+xz+xy+yz\right)+y^2z^2$

Đặt: $x^2+xy+xz=m$, ta có:

$$4\left(x^2+xy+xz\right)\left(x^2+xz+xy+yz\right)+y^2z^2=4m\left(m+yz\right)+y^2z^2=\left(2m+yz\right)^2$$

Thay $m=x^2+xy+xz$, ta được: $E=\left(2x^2+2xy+2xz+yz\right)^2$

9. *Phương pháp tìm nghiệm của đa thức:*

a) Lý thuyết:

- ***Định lý về nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên***

- Giả sử đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ là đa thức với hệ số nguyên, trong đó $n>1$. Khi đó, nếu P(x) có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm hữu tỉ của P(x) có dạng $\frac{r}{s}$, trong đó r là ước của a^0, s là ước của a^n và (r, s) = 1

- Nếu P(x) có nghiệm x = a thì f(a) = 0. Khi đó, P(x) có một nhân tử là **x – a** và P(x) có thể viết dưới dạng **P(x) = (x – a).q(x)**
- Nếu đa thức P(x) có hai nghiệm phân biệt là x = a và x = b thì ta có thể phân tích đa thức P(x) thành tích của ba thừa số là (**x – a**), (**x – b**) và **Q(x)**. Khi đó P(x) = (x – a)(**x – b**) Q(x)
- Vậy nếu đa thức P(x) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = a$ thì $P(x) = (x - a)^2R(x)$.

- ***Hệ quả:*** Đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, trong đó a_i nguyên $\forall i = \overline{0, n-1}$. Khi đó nếu P(x) có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm hữu tỉ của P(x) đều là số nguyên và là một trong các ước số của hệ số $\mathbf{a^0}$.

  Ví dụ: Cho đa thức: $x^3 + 3x + 4$

  Nếu đa thức trên có nghiệm là a (đa thức có chứa nhân tử (x + a)) thì nhân tử còn lại có dạng $(x^2 + bx + c)$. Tức là: $x^3 + 3x + 4 = (x + a)(x^2 + bx + c)$.

  $\Rightarrow +ac = +4 \quad \Rightarrow$ a là ước của $+4$

  Vậy trong đa thức với hệ số nguyên, nghiệm nguyên nếu có phải là ước của hạng tử tự do.
- ***Định lý Bezout:*** Số x_0 là nghiệm của đa thức $P(x) \equiv P(x) \vdots (x - x_0)$
- ***Sơ đồ Horner:***

- Giả sử chúng ta chia đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ cho nhị thức x – a
- Bậc của đa thức thương Q(x) nhỏ hơn bậc của P(x) một đơn vị

  $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + ... + b_0$ (Số dư r là một hằng số)
- Ta có: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = (x - a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + ... + b_0) + r$
- Cân bằng hệ số, ta có:

	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
a	$a_n = b_{n-1}$	$b_{n-2} = a_n.a + a_{n-1}$		$b_0 = b_1.a + a_1$	$r = b_0.a + a_0$

b) Bài tập áp dụng:

Bài 1. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử. $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$***

HD:

Ta nhận thấy đa thức P(x) có 2 nghiệm phân biệt là –1 và 2

Vì P(–1) = 0 và P(2) = 0. Do đó P(x) = (x – 1)(x – 2)Q(x)

Chia đa thức P(x) cho tam thức $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$, ta được thương đúng của phép chia là: $Q(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$

Suy ra: $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$

Vậy : $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Bài 2. ***Phân tích đa thứcsau thành nhân tử:***

a) $x^3 - 2x - 4$

b) $x^3 + 3x - 4$

c) $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$

d) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$

e) $6x^4 + x^3 + 19x^2 - 31x - 30$

f) $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4$

g) $9x^4 + 15x^3 + 43x^2 + 22x - 40$

h) $2x^4 - 19x^3 + 2002x^2 - 9779x + 11670$

ĐS:

a) $(x-2)(x^2+2x+2)$

b) $(x-1)(x+2)^2$

c) $(2x-1)(x^2-2x+3)$

d) $(x+1)(x-2)(x^2+2x+2)$

e) $(2x-3)(3x+2)(x^2+x+5)$

f) $(x-2)(2x-1)(2x^2+3x+2)$

g) $(3x-2)(3x+4)(x^2+x+5)$

h) $(x-2)(x-3)(2x^2-9x+1945)$

10. Phương pháp xét giá trị riêng:

- *Phương pháp này được áp dụng đối với một số đa thức nhiều biến, có thể hoán vị vòng quanh*
- *Trong phương pháp này trước hết ta xác định các nhân tử chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định nhân tử còn lại*
- *Ngoài ra ta còn có nhận xét: Giả sử phải phân tích biểu thức F(a,b,c) thành nhân tử, trong đó a, b, c có vai trò như nhau trong biểu thức đó. Nếu F(a,b,c) = 0 khi a = b thì F(a,b,c) sẽ chứa nhân tử a + b, b + c, c + a. Nếu F(a,b,c) là biểu thức đối xứng của a ,b, c nhưng F(a,b,c) ≠ 0 khi a = b thì ta thử xem khi a = + b, F(a,b,c) có triệt tiêu không, nếu thoả mãn thì F(a,b,c) chứa nhân tử a + b và từ đó chứa các nhân tử b + c, c + a.*

Bài 1. ***Phân tích đa thức sau thành nhân tử:*** $P=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

HD:

Nhận xét: Nếu thay x bởi y thì P = 0, nên P chia hết cho x – y

Hơn nữa nếu thay x bởi y, y bởi z, z bởi x thì P không thay đổi (Ta nói đa thức P có thể **hoán vị vòng quanh**). Do đó: P chia hết cho x – y thì P cũng chia hết cho y – z và z – x.

Từ đó: $P=k(x-y)(y-z)(z-x)$; trong đó k là **hằng số** (không chứa biến)

Vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến, còn tích (x – y)(y – z)(z – x) cũng có bậc 3 đối với tập hợp các biến

Ta có: $P=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$ (*) đúng với mọi x, y, z ∈ **R** nên ta chọn các giá trị riêng cho x, y, z để tìm hằng số a là xong.

Chú ý: ***Các giá trị của x, y, z ta có thể chọn tuỳ ý, chỉ cần chúng đôi một khác nhau để tránh P = 0 là được.***

Chẳng hạn: Chọn x = 2; y = 1; z = 0 thay vào đẳng thức **(*)**, ta tìm được k = –1

Vậy: $P=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)=(x-y)(y-z)(x-z)$

Bài 2. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

$$Q=a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

HD:

Nhận xét:
Với a = 0 thì Q = 0, cho nên a là một nhân tử của Q. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên b và c cũng là nhân tử của Q, mà Q có bậc 3 đối với tập hợp các biến nên Q = k.abc.
Chọn a = b = c = 1 được k = 4. Vậy Q = 4abc.

Bài 3. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $P=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

b) $B=(xy+xz+yz)(x+y+z)+xyz$

c) $M = a(b+c)(b-c) + b(c+a)(c-a) + c(a+b)(a-b)$

d) $A = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$

HD:

a) ***Nhận xét:*** Nếu thay x = –y thì P = 0, nên P chia hết cho x + y

Hơn nữa nếu thay x bởi y, y bởi z, z bởi x thì P không thay đổi

Do đó: P chia hết cho x + y thì P cũng chia hết cho y + z và z + x.

Từ đó: $P = k(x+y)(y+z)(z+x)$; trong đó k là **hằng số** (không chứa biến)

Vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến, còn tích (x + y)(y + z)(z + x) cũng có bậc 3 đối với tập hợp các biến.

Với x = 0; y = z = 1, ta có: k = 3. Vậy $P = 3(x+y)(y+z)(z+x)$

b) Khi x = + y thì $B = -y^2z + y^2z = 0$ nên B chứa nhân tử x + y

Lập luận tương tự**,** ta có $B = (x+y)(y+z)(z+x)$

c) Khi thay a = b thì M = 0 nên M chia hết cho a – b.

Lập luận tương tự, ta có: $M = R(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Chọn a = 0, b = 1, c = 2 ta được R = 1. Vậy $M = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

d) Khi thay a = b thì A = 0 nên A chia hết cho a – b.

Lập luận tương tự, ta có: $A = k(a-b)(b-c)(c-a)$

Chọn a = 0, b = 2, c = 1, ta được: k = +1. Vậy $A = -(a-b)(b-c)(c-a)$

Bài 4. ***Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:***

a) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$

b) $xy(y-z) - xz(x+z) + yz(2x+y+z)$

c) $x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2 - 4xyz$

d) $x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2 - 3xyz$

e) $A = (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5$

f) $A = a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

g) $B = a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$

HD:

e) $A = 5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

f) $A = (b-c)(a-b)(c-a)(a+b+c)$

g) $B = (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$