PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. BÀI GIẢNG

1. NHẮC LẠI VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Với số a, ta có:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$

Tương tự như vậy, với đa thức ta cũng có:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức:

$a.\ C = |-3x| + 7x - 4 \ khi\ x \leq 0$

$b.\ D = 5 - 4x + |x - 6| \ khi\ x < 6$

Giải

a. Với $x \leq 0$ thì $-3x \geq 0$ nên ta nhận được:

$C = -3x + 7x - 4 = 4x - 4$

b. Với $x < 6$ thì $x - 6 < 0$ nên ta nhận được:

$D = 5 - 4x - x + 6 = 11 - 5x$.

2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Trong phạm vi kiến thức lớp 8 chúng ta sẽ chỉ quan tâm tới ba dạng phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, bao gồm:

Dạng 1: Phương trình:

$|f(x)| = k$, với k là hằng số không âm.

Dạng 2: Phương trình:

$|f(x)| = |g(x)|$

Dạng 3: Phương trình:

$|f(x)| = g(x)$

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

$a.\ |x + 5| = 3x + 1$ $\qquad$ $b.\ |-5x| = 2x + 21$

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|x + 5| = \left[\begin{array}{l} x + 5 \ khi\ x \geq -5 \\ -x - 5 \ khi\ x < -5 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq -5$ phương trình có dạng:

$x+5=3x+1 \Leftrightarrow 3x-x=5-1 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$, thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x<-5$ phương trình có dạng:

$-x-5=3x+1 \Leftrightarrow 3x+x=-5-1 \Leftrightarrow 4x=-6 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$, không thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương trình có nghiệm $x=2$.

Cách 2: Với điều kiện:

$$3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$\left[\begin{array}{l} x+5=3x+1 \\ x+5=-(3x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=4 \\ 4x=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=2$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$|5x|=2x+21$$

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|5x|=\left[\begin{array}{l} 5\text{x } khi\ x \geq 0 \\ -5x\ khi\ x<0 \end{array}\right..$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 0$ phương trình có dạng:

$5x=2x+21 \Leftrightarrow 3x=21 \Leftrightarrow x=7$, thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x<0$ phương trình có dạng:

$-5x=2x+21 \Leftrightarrow 7x=-21 \Leftrightarrow x=-3$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương trình có nghiệm $x=7$ và $x=-3$.

Cách 2: Với điều kiện:

$$2x+21 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{21}{2} \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$\left[\begin{array}{l} 5x=2x+21 \\ 5x=-(2x+21) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=21 \\ 7x=-21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-3 \end{array}\right., \text{ thỏa mãn } (*)$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=7$ và $x=-3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

<u>Dạng toán 1:</u> PHÁ DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ví dụ 1. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

$a.\ A = 3x + 2 + |5x|$ trong hai trường hợp $x \ge 0$ và $x < 0$.

$b.\ B = |-4x| - 2x + 12$ trong hai trường hợp $x \ge 0$ và $x < 0$.

$c.\ C = |x - 4| - 2x + 12$ khi $x > 5$.

$d.\ D = 3x + 2 + |x + 5|$

Giải

a. Ta có:

$$|5x| = \left[\begin{array}{l} 5x\ khi\ x \ge 0 \\ -5x\ khi\ x < 0 \end{array}\right.$$

Do đó:

$$A = \left[\begin{array}{l} 3x + 2 + 5x\ khi\ x \ge 0 \\ 3x + 2 - 5x\ khi\ x < 0 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 8x + 2\ khi\ x \ge 0 \\ -2x + 2\ khi\ x < 0 \end{array}\right.$$

b. Ta có:

$$|-4x| = \left[\begin{array}{l} -4x\ khi\ x \ge 0 \\ 4x\ khi\ x < 0 \end{array}\right.$$

Do đó:

$$B = \left[\begin{array}{l} -4x - 2x + 12\ khi\ x \ge 0 \\ 4x - 2x + 12\ khi\ x < 0 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} -6x + 12\ khi\ x \ge 0 \\ 2x + 12\ khi\ x < 0 \end{array}\right.$$

c. Ta có:

$$|x - 4| = x - 4\ khi\ x > 5$$

Do đó:

$$C = x - 4 - 2x + 12 = -x + 8$$

d. Ta có:

$$|x + 5| = \left[\begin{array}{l} x + 5\ khi\ x \ge -5 \\ -x - 5\ khi\ x < -5 \end{array}\right.$$

Do đó:

$$D = \left[\begin{array}{l} 3x + 2 + x + 5\ khi\ x \ge -5 \\ 3x + 2 - x - 5\ khi\ x < -5 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 4x + 7\ khi\ x \ge -5 \\ 2x - 3\ khi\ x < -5 \end{array}\right.$$

Ví dụ 2. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

$a.\ A = |x - 2| + 3x - 2\ khi\ x > 2$

$b.\ B = |x - 3| + |3 - 2x| + x + 8\ khi\ x > 3$

Giải

a. Với giả thiết $x > 2$, ta suy ra:

$$x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$$

Do đó, A được viết lại:

$$A = x - 2 + 3x - 2 = 4x - 4$$

b. Với giả thiết $x > 3$, ta suy ra:

$$x - 3 > 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3$$

$$3 - 2x < 0 \Rightarrow |3 - 2x| = -(3 - 2x)$$

Do đó, B được viết lại:

$$B = x - 3 - (3 - 2x) + x + 8 = x - 3 - 3 + 2x + x + 8 = 4x + 2$$

Ví dụ 3. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn biểu thức:

$$C = |x - 1| + 2|x + 2| + 3$$

Hướng dẫn: Tạo các khoảng chia tương ứng để xét dấu.

Giải

Nhận xét rằng:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Do đó, để bỏ được dấu giá trị tuyệt đối của C ta cần xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x < -2$, ta được:

$$C = -(x - 1) - 2(x + 2) + 3 = -3x$$

Trường hợp 2: Nếu $-2 \le x \le 1$, ta được:

$$C = -(x - 1) + 2(x + 2) + 3 = x + 8$$

Trường hợp 3: Nếu $x > 1$, ta được:

$$C = (x - 1) + 2(x + 2) + 3 = 3x + 6$$

<u>Dạng toán 2:</u> GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$|f(x)| = k$, với k là hằng số không âm.

Phương pháp

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để f(x) xác định (nếu cần).

Bước 2: Khi đó:

$|f(x)| = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = k \\ f(x) = -k \end{array}\right.$ => nghiệm x.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình:

Chú ý: Hệ hoặc trong bước 2 có được là nhờ kiến thức giải phương trình tích (chương III), cụ thể:

$$|f(x)| = k \Leftrightarrow f^2(x) = k^2 \Leftrightarrow [f(x) - k][f(x) + k] = 0$$

Ví dụ 1. Giải phương trình $|2x - 3| = 1$.

Giải

Biến đổi tương đương phương trình:

$$|2x-3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=1 \\ 2x-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=1+3 \\ 2x=-1+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=2$ và $x=1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right|=1.$$

Giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 2$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+2}{x-2}=1 \\ \frac{x+2}{x-2}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=x-2 \\ x+2=-(x-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=0$.

Cách 2: Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right|=1 \Leftrightarrow |x+2|=|x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=x-2 \\ x+2=-(x-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=0$.

Dạng toán 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$|f(x)|=|g(x)|$$

Phương pháp

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần).

Bước 2: Khi đó:

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \text{=> nghiệm x.}$$

Bước 3: Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $|2x+3|=|x-3|$ b. $\left|\frac{x^2-x+2}{x+1}\right|-|x|=0$

Giải

a. Biến đổi tương đương phương trình:

$$|2x+3|=|x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3=x-3 \\ 2x+3=-(x-3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-x=-3-3 \\ 2x+x=3-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=-6$ và $x=0$.

b. Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 0$.

Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x^2-x+2}{x+1}\right| = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-x+2}{x+1} = x \\ \dfrac{x^2-x+2}{x+1} = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+2 = x(x+1) \\ x^2-x+2 = -x(x+1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\text{x} = 2 \\ 2\text{x}^2 = -2 \text{ vô nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{x} = 1$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$|2x - 3m| = |x + 6|$, với m là tham số.

Giải

Biến đổi tương đương phương trình:

$$|2x-3m| = |x+6| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3m = x+6 \\ 2x-3m = -(x+6) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-x = 6+3m \\ 2x+x = -6+3m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6+3m \\ x = m-2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 6 + 3m$ và $x = m - 2$.

<u>Dạng toán 4:</u> GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$|f(x)| = g(x)$$

Phương pháp

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Phá dấu trị tuyệt đối) Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần).

Bước 2: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $f(x) \geq 0$. (1)

Phương trình có dạng:

$f(x) = g(x)$ => nghiệm x và kiểm tra điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $f(x) < 0$ (2)

Phương trình có dạng:

$-f(x) = g(x)$ => nghiệm x và kiểm tra điều kiện (2).

Bước 3: Kết luận nghiệm cho phương trình.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần) và $g(x) \geq 0$.

Bước 2: Khi đó:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$ => nghiệm x.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $|x+4| + 3x = 5$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$x + 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$, thỏa mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$ (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$-(x+4) + 3x = 5 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$$, không thỏa mãn (2)

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$|x+4| = 5 - 3x.$$

Với điều kiện:

$$5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}.$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$|x+4| = 5 - 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = 5 - 3x \\ x + 4 = -(5 - 3x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{9}{2} \text{ loại} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

Chú ý: Qua ví dụ trên, chúng ta thấy rằng "*Cả hai cách giải được trình bày đều có độ phức tạp như nhau*". Chính vì vậy, tại đây đặt ra một câu hỏi "*Trong trường hợp nào cách 1 tỏ ra hiệu quả hơn cách 2 và ngược lại?*" – Câu trả lời chúng ta sẽ nhận được trong ví dụ 3.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a. $|2x| = x - 6$ *b.* $|4x| = 2x + 12$

c. $|-3x| = x - 8$ *d.* $|-5x| - 16 = 3x$

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|2x| = \left[\begin{array}{l} 2x \text{ } khi \text{ } x \ge 0 \\ -2x \text{ } khi \text{ } x < 0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \ge 0$ phương trình có dạng:

$2x = x - 6 \Leftrightarrow x = -6$, không thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x < 0$ phương trình có dạng:

$-2x = x - 6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$, không thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Với điều kiện:

$x - 6 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 6$ (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$\left[\begin{array}{l} 2x = x - 6 \\ 2x = -(x-6) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ 3x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 2 \end{array}\right.$, không thỏa mãn (*).

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|4x| = \left[\begin{array}{l} 4x \text{ } khi \text{ } x \ge 0 \\ -4x \text{ } khi \text{ } x < 0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \ge 0$ phương trình có dạng:

$4x = 2x + 12 \Leftrightarrow x = 6$, (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Nếu $x < 0$ phương trình có dạng:

$-4x = 2x + 12 \Leftrightarrow x = -2$, (thỏa mãn).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 6$ và $x = -2$.

Cách 2: Với điều kiện:

$2x + 12 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -6$ (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$\left[\begin{array}{l} 4x = 2x + 12 \\ 4x = -(2x+12) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 12 \\ 6x = -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array}\right.$, thỏa mãn (*).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 6$ và $x = -2$.

c. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$|3x| = x - 8$$

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|3x| = \left[\begin{array}{l} 3x \; khi \; x \geq 0 \\ -3x \; khi \; x < 0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 0$ phương trình có dạng:

$3x = x - 8 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$, không thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x < 0$ phương trình có dạng:

$-3x = x - 8 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$, không thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Với điều kiện:

$x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$ (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$\left[\begin{array}{l} 3x = x - 8 \\ 3x = -(x-8) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -8 \\ 4x = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$, không thỏa mãn (*).

Vậy, phương trình vô nghiệm.

d. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$|5x| = 3x + 16$$

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|5x| = \left[\begin{array}{l} 5x \; khi \; x \geq 0 \\ -5x \; khi \; x < 0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 0$ phương trình có dạng:

$5x = 3x + 16 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$, thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x < 0$ phương trình có dạng:

$-5x = 3x + 16 \Leftrightarrow 8x = -16 \Leftrightarrow x = -2$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương có hai nghiệm $x = 8$ và $x = -2$.

Cách 2: Với điều kiện:

$3x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{16}{3}$ (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$\left[\begin{array}{l} 5x = 3x + 16 \\ 5x = -(3x+16) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 16 \\ 8x = -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -2 \end{array}\right.$, thỏa mãn (*).

Vậy, phương có hai nghiệm $x = 8$ và $x = -2$.

Ví dụ 3. Giải các phươn g trình sau:

a. $|x - 7| = 2x + 3$ *b.* $|x + 4| = 2x - 5$

c. $|x+3| = 3x-1$ d. $|x-4|+3x = 5$

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|x-7| = \left[\begin{array}{l} x-7 \text{ khi } x \ge 7 \\ -x+7 \text{ khi } x < 7 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \ge 7$ phương trình có dạng:

$x-7 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -10$, không thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x < 7$ phương trình có dạng:

$-x+7 = 2x+3 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương có nghiệm $x = \frac{4}{3}$.

Cách 2: Với điều kiện:

$$2x+3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{3}{2} \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$\left[\begin{array}{l} x-7 = 2x+3 \\ x-7 = -(2x+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10 \\ 3x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10 \text{ loại} \\ x = \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương có nghiệm $x = \frac{4}{3}$.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|x+4| = \left[\begin{array}{l} x+4 \text{ khi } x \ge -4 \\ -x-4 \text{ khi } x < -4 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \ge -4$ phương trình có dạng:

$x+4 = 2x-5 \Leftrightarrow x = 9$, thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x < -4$ phương trình có dạng:

$-x-4 = 2x-5 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, không thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương có nghiệm $x = 9$.

Cách 2: Với điều kiện:

$$2x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{5}{2} \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$\left[\begin{array}{l} x+4=2x-5 \\ x+4=-(2x-5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ 3x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=\dfrac{1}{3}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, phương có nghiệm $x=9$.

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|x+3| = \left[\begin{array}{l} x+3\ khi\ x \geq -3 \\ -x-3\ khi\ x < -3 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq -3$ phương trình có dạng:

$x+3=3x-1 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$, thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x < -3$ phương trình có dạng:

$-x-3=3x-1 \Leftrightarrow 4x=-2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$, không thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương có nghiệm $x=2$.

Cách 2: Với điều kiện:

$$3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$\left[\begin{array}{l} x+3=3x-1 \\ x+3=-(3x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=4 \\ 4x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2}\text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, phương có nghiệm $x=2$.

d. Viết lại phương trình dưới dạng:

$|x-4| = 5-3x$.

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$|x-4| = \left[\begin{array}{l} x-4\ khi\ x \geq 4 \\ -x+4\ khi\ x < 4 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 4$ phương trình có dạng:

$x-4=5-3x \Leftrightarrow 4x=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$, không thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: Nếu $x < 4$ phương trình có dạng:

$-x+4=5-3x \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Với điều kiện:

$$5-3x\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{5}{3} \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$\left[\begin{array}{l} x-4=5-3x \\ x-4=-(5-3x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=9 \\ 2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{9}{4}\ \text{(loại)} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình:

a. $|x+1|=x^2+x$ b. $|x^2-2x|+4=2x$

Giải

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$ (1)

Khi đó, phương trình có dạng:

$x+1=x^2+x \Leftrightarrow x^2=1$

$\Leftrightarrow x=\pm 1$, thỏa mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$ (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$-(x+1)=x^2+x \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=-1$, không thỏa mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=\pm 1$

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$|x^2-2x|=2x-4$.

Với điều kiện:

$2x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$ (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$|x^2-2x|=2x-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=2x-4 \\ x^2-2x=-(2x-4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+4=0 \\ x^2=4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)^2=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2\ \text{không thỏa mãn}(*) \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=2$.

Nhận xét:

1. Trong câu a), chúng ta đã lựa chọn cách 1 để thực hiện là bởi nếu sử dụng cách 2 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình $x^2+x\ge 0$. Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc "*Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại*", cụ thể:

Với điều kiện:

$$x^2+x\ge 0 \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$|x+1|=x^2+x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=x^2+x \\ x+1=-\left(x^2+x\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2+2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ (x+1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Thử lại:

- Với $x=1$ ta được $x^2+x=1^2+1=2\ge 0$ luôn đúng.
- Với $x=-1$ ta được $x^2+x=(-1)^2-1=0\ge 0$ luôn đúng.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x=\pm 1$.

2. Trong câu b), chúng ta đã lựa chọn cách 2 để thực hiện bởi nếu sử dụng cách 1 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình $x^2-2x\ge 0$ và $x^2-2x<0$. Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc "*Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại*" – Đề nghị bạn đọc tự làm.

3. Một câu hỏi sẽ được đặt ra tại đây là '*Với một phương trình có dạng đặc biệt hơn một chút (thí dụ:* $2|x-1|=x^2-2x-2$*) thì ngoài việc lựa chọn một trong hai cách giải thì còn có một phương pháp giải khác không?*" – Câu trả lời "*Đương nhiên sẽ có*".

Chú ý: Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng một ví dụ để minh họa phương pháp giải phương trình chứa nhiều hơn 1 dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 5. Giải phương trình:

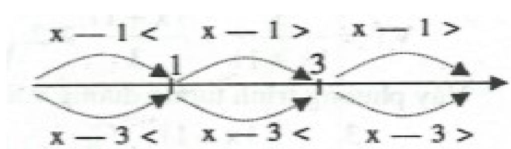
$$|x-1|+|x-3|=2$$

Giải

Nhận xét rằng:

$x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$,

$x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge 3$,



Do đó, để thực hiện việc bỏ dấu giá trị tuyệt đối cho phương trình chúng ta cần phải xét ba trường hợp.

Trường hợp 1: Nếu $x\le 1$ (1)

Khi đó, phương trình có dạng:

$-(x-1)-(x-3)=2\Leftrightarrow -2x+4=2$

$\Leftrightarrow x=1$, thỏa mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $1<x<3$ (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$(x-1)-(x-3)=2 \Leftrightarrow 2=2$, luôn đúng.

Trường hợp 3: Nếu $x \ge 3$ (3)

Khi đó, phương trình có dạng:

$(x-1)+(x-3)=2 \Leftrightarrow 2x-4=2$

$\Leftrightarrow x=3$, thỏa mãn điều kiện (3).

Vậy, phương trình có nghiệm $1 \le x \le 3$.

Chú ý: Qua kết quả của phương trình trên, chúng ta nhận thấy một điều rraats thú vị là nghiệm của phương trình có thể là một đoạn trên trục số.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\dfrac{3}{|x+1|}+\dfrac{|x+1|}{3}=2$ (1)

Giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ne -1$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t=\dfrac{|x+1|}{3}$, điều kiện $t>0$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{t}+t=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+1|}{3}=1 \Leftrightarrow |x+1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x=2$ và $x=-4$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT=\frac{3}{|x+1|}+\frac{|x+1|}{3} \ge 2.\sqrt{\frac{3}{|x+1|}.\frac{|x+1|}{3}}=2=VP$$

Vậy phương trình tương đương với:

$$\frac{3}{|x+1|}=\frac{|x+1|}{3} \Leftrightarrow 9=(x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x=2$ và $x=-4$.

PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1:Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=|-3|+2+|5x|$ khi $x \le 0$;

b) $B=|-3x|^2-8x^2+|x-2|$ khi $x \ge 2$;

c) $C=|x-7|+2x-3$

Bài 2: Giải phương trình:

Phương pháp: $|f(x)|=a\,(a \ge 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$

a) $\left|x-5\right|=2$ b) $\left|8x-5\right|=2$ c) $\left|x-2\right|=-3$ d) $\left|4x+3\right|=0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

Phương pháp: $\left|f(x)\right|=\left|g(x)\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\f(x)=-g(x)\end{array}\right.$

a) $\left|4-5x\right|=\left|5-6x\right|$; b) $\left|3x+2\right|-\left|7x+1\right|=0$;

c) $\left|x^2-2x-3\right|+\left|x+1\right|=0$; d) $\frac{1}{4}\left|x-5\right|=\left|3x+1\right|$

Bài 4: Giải phương trình:

Phương pháp: $\left|f(x)\right|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{cases}$

a) $\left|2x-3\right|=x$ b) $\left|3x-2\right|=1-x$

c) $\left|x-3\right|=4-x$ d) $\left|x-7\right|-3=x$

e) $\left|x^2-3x+3\right|=-x^2+3x-1$ f) $\left|x^2-9\right|=x^2-9$

Bài 5: Giải phương trình: Dạng toán nâng cao

a) $\left|\left|x-3\right|+1\right|=2$ b) $\left|\left|x+1\right|-1\right|=5$

c) $\left|x-1\right|+\left|2-x\right|=3$ d) $\left|x+3\right|+\left|x-5\right|=3x-1$

e) $\left|1-x\right|-\left|x-2\right|-\left|x-3\right|=\frac{1}{2}$ f) $\left|\left|x\right|-2\left|x-1\right|+3\left|x-2\right|\right|=4$

Tự luyện:

Bài 6: Giải phương trình:

a) $\left|x-6\right|=4$ b) $\left|3x-2\right|=1$ c) $\left|2-3x\right|=-1$ d) $\left|1-4x\right|=0$

Bài 7: Giải phương trình:

a) $\left|2-3x\right|=\left|3-2x\right|$; b) $\left|3+5x\right|-\left|x+6\right|=0$;

c) $\left|x^2+x-2\right|+\left|x+2\right|=0$; d) $\frac{1}{2}\left|x-3\right|=\left|2x+5\right|$

Bài 8: Giải các phương trình sau:

a) $\left|x-6\right|=-5x+9$; b) $\left|x+1\right|=x^2+x$;

c) $\left|x^2-2x\right|+4=2x$; d) $\left|\frac{x^2-x-6}{x-1}\right|=x-2.$

Bài 9: Giải các phương trình sau:

a) $\left|x-2\right|+\left|x-3\right|+\left|2x-8\right|=9$ b) $\left|x+5\right|+\left|x+3\right|=3x$

c) $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=3$ d) $\left|x^2-2x+2\right|+\left|x^2-2x-3\right|=5$

Bài 10: Giải các phương trình sau:

a) $|x-1|-2|x|=-2$ b) $|x-2|+|x+1|+x^2-5=0$

c) $\dfrac{7}{|x-1|-3}=|x+2|$ a) $S=\{-3;1\}$; b) $S=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{5}+1\right\}$; c) $S=\left\{-\sqrt{7}-2;\sqrt{15}+1\right\}$

LỜI GIẢI PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Bài 1:

a) Vì $x\le 0$ nên $|5x|=-5x$. Từ đó tìm được $A=5-5x$.

b) Vì $x\ge 2$ nên $|x-2|=x-2$. Mặt khác, ta luôn có $|-3x|^2=9x^2$ nên tìm được $B=x^2+x-2$

c) Với $x\ge 7$, ta có $C=3x-10$.

Với x < 7, ta có $C=x+4$.

Bài 2: a) $\left|x-5\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=2\\x-5=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{3;7\right\}$

b) $\left|8x-5\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x-5=2\\8x-5=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7}{8}\\x=\dfrac{3}{8}\end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{3}{8};\dfrac{7}{8}\right\}$ c) Vì giá trị tuyệt đối luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên suy ra phương trình vô nghiệm

d) $\left|4x+3\right|=0\Leftrightarrow 4x+3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{4}$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{-3}{4}\right\}$

Bài 3: HD: a) Trường hợp 1. Xét $4-5x=5-6x$. Tìm được $x=1$.

Trường hợp 2. Xét $4-5x=6x-5$. Tìm được $x=\dfrac{9}{11}$.

Vậy $x\in\left\{1;\dfrac{9}{11}\right\}$.

b) Đưa PT về dạng $|3x+2|=|7x+1|$. Giải được $x\in\left\{\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{10}\right\}$.

c) Nhận xét: Vì $\left|x^2-2x-3\right|\ge 0$ và $|x+1|\ge 0$ nên PT tương đương với $\begin{cases}\left|x^2-2x-3\right|=0\\|x+1|=0\end{cases}$. Giải hai BPT ta được $x=-1$.

d) Tương tự ý a), tìm được $x\in\left\{\dfrac{-9}{11};\dfrac{1}{13}\right\}$

Bài 4: a) $\left|2x-3\right|=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\\left[\begin{array}{l}2x-3=x\\2x-3=-x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;3\right\}$

b) $\left|3x-2\right|=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x-2=1-x \\ 3x-2=-1+x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right\}$

c) $\left|x-3\right|=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-3=4-x \\ x-3=-4+x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{2} \\ -3=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

d) $\left|x-7\right|-3=x \Leftrightarrow \left|x-7\right|=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-7=x+3 \\ x-7=-x-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} -7=3 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$

e) $\left|x^2-3x+3\right|=-x^2+3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x+3=-x^2+3x-1 \\ x^2-3x+3=x^2-3x+1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-6x+4=0 \\ 3=1 \quad (L) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\geq 0 \\ (x-2)(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1\geq 0 (*) \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. (t.m(*))$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2\}$

f) $\left|x^2-9\right|=x^2-9 \Leftrightarrow x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3\geq 0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3\leq 0 \\ x+3\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3 \\ x\leq -3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x\geq 3$ hoặc $x\leq -3$

Bài 5: a) $\left|\left|x-3\right|+1\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-3\right|+1=2 \\ \left|x-3\right|+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-3\right|=1 \\ \left|x-3\right|=-3 \quad (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2;4\}$

b) $\left|\left|x+1\right|-1\right|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x+1\right|-1=5\\ \left|x+1\right|-1=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x+1\right|=6\\ \left|x+1\right|=-4 \quad (L)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=6\\ x+1=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=-7\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-7;5\right\}$

c) $\left|x-1\right|+\left|2-x\right|=3 \quad (1)$

Giá trị của x để biểu thức trong dấu $\left|\ \right|$ bằng 0 là $1;2$

Ta có bảng sau:

x		1		2	
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	0	$x-1$		$x-1$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$		$2-x$	0	$-2+x$

Ta có: $x<1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x+1+2-x=3 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

$1 \le x < 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-1+2-x=3 \Leftrightarrow 1=3$ (vô lí) suy ra phương trình vô nghiệm

$x \ge 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-1-2+x=3 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;3\right\}$

d) $\left|x+3\right|+\left|x-5\right|=3x-1$

Các giá trị của x để biểu thức trong dấu $\left|\ \right|$ bằng 0 là $-3;5$

Ta có bảng sau:

x		-3		5	
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	0	$x+3$		$x+3$
$\lvert x-5\rvert$	$-x+5$		$-x+5$	0	$x-5$

Ta có:

$x<-3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x-3-x+5=3x-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{5}$ (không thỏa mãn)

$-3 \le x < 5 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x+3-x+5=3x-1 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

$x \ge 5 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x+3+x-5=3x-1 \Leftrightarrow x=-1$ (không thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1\right\}$

e) $\left|1-x\right|-\left|x-2\right|-\left|x-3\right|=\dfrac{1}{2} \quad (1)$

Các giá trị của x để biểu thức trong dấu $\left|\ \right|$ bằng 0 là $1;2;3$

Ta có bảng sau:

x		1		2		3	
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	0	$-1+x$		$-1+x$		$-1+x$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$		$x-2$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$		$-x+3$		$-x+3$	0	$x-3$

Ta có: $x<1 \Leftrightarrow 1-x-\left(-x+2\right)-\left(-x+3\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$ (không thỏa mãn)

$1 \le x < 2 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow -1+x-\left(-x+2\right)-\left(-x+3\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{13}{6}$ (không thỏa mãn)

$2 \le x < 3 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow -1+x-\left(x-2\right)-\left(-x+3\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn)

$x \ge 3 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow -1+x-x+2-x+3=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right\}$

f) $\left|x\right|-2\left|x-1\right|+3\left|x-2\right|=4$ (1)

Các giá trị của x để biểu thức trong dấu $\left|\;\right|$ bằng 0 là: $0;1;2$

Ta có bảng sau:

x		0		1		2	
$\lvert x\rvert$	$-x$	0	x		x		x
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$		$x-1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$

Với $x<0 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow -x-2\left(-x+1\right)+3\left(-x+2\right)=4 \Leftrightarrow x=0$ (không thỏa mãn)

Với $0 \le x < 1 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow x-2\left(-x+1\right)+3\left(-x+2\right)=4 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Với $1 \le x < 2 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow x-2\left(x-1\right)+3\left(-x+2\right)=4 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Với $x \ge 2 \Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow x-2\left(x-1\right)+3\left(x-2\right)=4 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{0;1;4\right\}$.

========== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ ==========