CHUYÊN ĐỀ

2021

PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

NGUYỄN PHÚC THỌ

MỖI TUẦN MỘT BÀI TOÁN-THẢO LUẬN

PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

Bài toán 1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn

$$P(a+b) = 6\big(P(a)+P(b)\big) + 15a^2b^2(a+b) \ (1)$$

Với mọi số phức a và b sao cho $a^2+b^2 = ab$.

Titu Andreescu

Lời giải.

Cho $a = b = 0$ vào (1) được $P(0) = 0$. Do đó $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1x$ với $n \le 1, c_n \neq 0$.

Giả sử rằng $a^2+b^2 = ab$. Ta sẽ khẳng định rằng với mọi $k \le 1$, tồn tại một hằng số f sao cho $a^k + b^k = f_k(a+b)^k$.

Thật vậy $f_1 = 1$. Ta có

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a+b)^2 - 2(a^2+b^2)$$

Suy ra: $a^2+b^2 = \frac{1}{3}(a+b)^2$. Do đó $f_2 = \frac{1}{3}$.

Với mọi $k \ge 2$. Ta lại có

$$f_{k+1}(a+b)^{k+1} = a^{k+1}+b^{k+1} = (a^k+b^k)(a+b) - ab(a^{k-1}+b^{k-1}) = f_k(a+b)^{k+1} - \frac{1}{3}f_{k-1}(a+b)^{k+1}$$

Hay $f_{k+1} = f_k - \frac{1}{3}f_{k-1}$. Đặc biệt thấy $f_3 = 0$ và $f_4 = -\frac{1}{9} = f_5$. Từ đây, ta dùng phương trình sai phân tuyến tính được

$$f_k = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}}\right)^k$$

Do đó, với mọi $k \ge 6$ thì

$$|6f_k| \le 12\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}\right|^k = 12\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \le \frac{12}{27} < 1 \ (2)$$

Từ (1) có $P(a+b) = 6\big(P(a)+P(b)\big) + \frac{5}{3}(a+b)^5$ (3). Cân bằng hệ số $(a+b)^k$ của (3) được $(1-6f_k)c_k = 0$ với $k \neq 5$, do (2) suy ra $c_k = 1$ với mọi $k \neq 5$

Cân bằng hệ số $(a+b)^5$ của (3) được $c_5 = 6f_5c_5 + \frac{5}{3}$ suy ra $c_5 = 1$. Do đó được $P(x) = x^5$ thoả mãn bài toán.

Bài toán 2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$\frac{P(x)}{yz} + \frac{P(y)}{zx} + \frac{P(z)}{xy} = P(x-y) + P(y-z) + P(z-x)$$

Với mọi số thực x, y, z khác 0 mà $2xyz = x+y+z$.

USAMO 2019

Lời giải.

Dễ thấy $P(x) = 0$ thoả mãn bài toán. Bây giờ xét trường hợp $degP = n \ge 1$. Phương trình đã cho được viết lại

$$xP(x) + yP(y) + zP(z) = xyz[P(x-y) + P(y-z) + P(z-x)] \ (1)$$

Cố định $x > 0$. Chọn $0 < z < \frac{1}{2x}$. Bây giờ, để thoả mãn điều kiện giả thiết, ta chọn $y = \frac{x+z}{2xz-1}$.

Khi đó phương trình (1) viết lại thành

$$xP(x) + \frac{x+z}{2xz-1}P\left(\frac{x+z}{2xz-1}\right) + zP(z) = \frac{xz(x+z)}{2xz-1}\left[P\left(x - \frac{x+z}{2xz-1}\right) + P\left(\frac{x+z}{2xz-1} - z\right) + P(z-x)\right]$$

Lấy đạo hàm hai vế theo z được

$$-\frac{2x^2+1}{(2xz-1)^2}P\left(\frac{x+z}{2xz+1}\right)-\frac{(x+z)(2x^2+1)}{(2xz-1)^3}P'\left(\frac{x+z}{2xz-1}\right)-P(z)+zP'(z)$$
$$=\frac{x(2xz^2-x-2z)}{(2xz-1)^2}\left[P\left(x-\frac{x+z}{2xz-1}\right)+P\left(\frac{x+z}{2xz-1}-z\right)+P(z-x)\right]$$
$$+\frac{xz(x+z)}{2xz-1}\left\{\frac{2x^2-1}{(2xz-1)^2}P'\left(x-\frac{x+z}{2xz-1}\right)-\left[\frac{2x^2+1}{(2xz-1)^2}+1\right]P'\left(\frac{x+z}{2xz-1}-z\right)+P'(z-x)\right\}$$

Bây giờ cho $z\to 0^+$, ta được

$$(2x^2+1)[xP'(-x)-P(-x)]+P(0)=-x^2[P(2x)+2P(-x)]\ (2)$$

Hai đa thức ở hai vế của phương trình trên nhận giá trị bằng nhau tại vô số giá trị dương của x nên chúng đồng nhất với nhau.

1) Nếu $P(x)=ax+b$ với $a\neq 0$ khi đó phương trình (2) được viết lại thành

$$(2x^2+1)(2ax-b)+b=-3bx^2,\forall x\in R$$

So sanh hệ số x^3 hai vế được $a=0$, mâu thuẫn.

2) Nếu $degP=2$. Khi đó đa thức $P(x)$ có dạng $P(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$. Thay lại vào phương trình (2) và rút gọn, ta được

$$4bx^3+(c-3a)x^2+2bx=0,\forall x\in R$$

Từ đó suy ra $b=0$ và $c=3a$. Do đó $P(x)=a(x^2+3),\forall x\in R$.

3) Nếu $degP=n\geq 3$. Gọi c là hệ số cao nhất của $P(x)$. So sánh hệ số x^{n+2} ở hai vế của phương trình (2) được,

$$2[na(-1)^{n-1}-a(-1)^n]=-[2^na+2a(-1)^n]$$

Hay

$$n(-1)^n=2^{n-1}$$

Tuy nhiên phương trình này không có nghiệm với mọi $n\geq 3$.

Vậy $P(x)=0$ và $P(x)=a(x^2+3)$ với mọi $x\in R$ thoả mãn bài toán.

Bài toán 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$(x+4y)P(z)+(y+4z)P(x)+(z+4x)P(y)=xP(2y-z)+yP(2z-x)+zP(2x-y)\ (1)$$

Với mọi $x,y,z\in R$ thoả mãn $3(x+y+z)=xyz(2)$.

TST KHTN 2020-2021

Lời giải.

Dễ thấy hai bộ nghiệm $(x,y,z)=(3,3,3);(-3,-3,-3)$ thoả (2), do đó thay từng bộ vào (1) được $P(3)=P(-3)=0(3)$.

Với bộ $(x,y,z)=(0,a,-a)$ với $a\in R$ thoả mãn (2), thay bộ này vào (1) được

$$4aP(-a)-3aP(0)-aP(a)=aP(-2a)-aP(-a),\forall a\in R$$

Hay

$$5xP(-x)=P(x)+P(-2x)+3P(0),\forall x\in R\ (4)$$

Dễ thấy $P(x)=0$ thoả mãn bài toán.

Xét $degP=n\geq 1$, gọi hệ số bậc n của đa thức $P(x)$ là b khác 0.

Khi đó cân bằng hệ số bậc n của (4) được

$$5b(-1)^n=b+b(-2)^n$$

Hay

$$5(-1)^n = 1 + (-2)^n$$

Suy ra $n = 2$ thoả mãn phương trình trên với mọi $n \geq 1$.Tức là, $P(x) = bx^2 + cx + d$ với $b \neq 0$.

Kết hợp với (3) suy ra $P(x) = a(x^2 - 9), \forall x \in R$.

Thử lại $P(x) = a(x^2 - 9), \forall x \in R$ và kết hợp với điều kiện (2) suy ra thoả mãn.

Vậy $P(x) = 0$ và $P(x) = a(x^2 - 9)$ với mọi $x \in R$ thoả mãn bài toán.

Bài toán 4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

Là một đa thức hằng.

Canadian MO 2013

Lời giải.

Cách 1 Gọi A là biểu thức $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$.

Dễ thấy $P(x) = T$ với T là hằng số thoả mãn bài toán. Ta đi xét $P(x)$ khác hằng.

Cho $x = -1$ vào A được $2P(-1)$ và cho $x = 1$ vào A được $2P(0)$. Từ $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ là một đa thức hằng nên $P(-1) = P(0)$.

Đặt $c = P(-1) = P(0)$ và $Q(x) = P(x) - c$, ta có $Q(-1) = Q(0) = 0$. Do đó -1,0 là nghiệm của $Q(x)$. Suy ra đa thức $Q(x)$ có dạng $Q(x) = x(x+1)R(x)$ với mọi đa thức $R(x)$. Dẫn đến $P(x) = x(x+1)R(x) + c$. (1)

Từ (1) dẫn đến biểu thức A được viết lại thành

$$(x+1)((x-1)xR(x-1) + c) - (x-1)(x(x+1)R(x) + c)$$

Là một đa thức hằng.

Hay

$$x(x-1)(x+1)(R(x-1) - R(x)) + 2c$$

Là một đa thức hằng.Do đó $R(x-1) - R(x) = 0$ là một đa thức. Do đó $R(x-1) = R(x), \forall x \in R$.

Khi đó $R(x)$ là một đa thức nhận các giá trị nhất định với các giá trị vô hạn của x. Gọi k là một giá trị như vậy. Khi đó $R(x) - k$ có vô số nghiệm nguyên, có thể xảy ra khi và chỉ khi $R(x) - k = 0$. Do đó $R(x)$ đồng nhất với hằng số k. Do đó $Q(x) = kx(x+1)$ với một hằng số k. Khi đó $P(x) = kx(x+1) + c = kx^2 + kx + c$.

Thử lại $P(x) = kx^2 + kx + c$ là một nghiệm của phương trình trên.

Vậy $P(x) = T$ với mọi hằng số T và $P(x) = kx^2 + kx + c$ với mọi hằng số k khác 0 thoả mãn bài toán.

Cách 2

Dễ thấy $P(x) = T$ với mọi T là hằng số thoả mãn bài toán.

Bây giờ ta xét $degP = n$ với mọi $n \geq 1$. Gọi $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ với $a_n \neq 0$.

Do đó phương trình đề bài được viết lại thành

$$(x+1)\sum_{i=1}^{n} a_i (x-1)^i - (x-1)\sum_{i=1}^{n} a_i x^i = C \ (2)$$

Với C là hằng số. Vì C là hằng số với mọi $n \geq 1$ nên hệ số của x^n phải bằng 0.

Hệ số x^n của vế trái của (2) là $a_{n-1} - na_n + a_n - a_{n-1} + a_n = (2-n)a_n$.

Do đó $(2-n)a_n = 0$ vì $a_n \neq 0$ nên $n = 2$. Tức là đa thức $P(x)$ có dạng $P(x) = ax^2 + bx + c$ với mọi a, b, c là bà số thực và$a \neq 0$. Thay lại vào phương trình của đề bài có

$$(x+1)(a(x-1)^2 + b(x-1) + c) - (x-1)(ax^2 + bx + c) = C$$

Suy ra $(b-a)x + 2c = 2C$. Đồng nhất hệ số suy ra $a = b$ và $C = c$

Vậy $P(x) = T$ với mọi hằng số T và $P(x) = ax^2 + ax + c$ với mọi số thực a khác 0 thoả mãn bài toán.

Bài toán 5. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$P(P(a+b)) - 2ab(2P(a+b) - ab) \geq P(a^2) + P(b^2) \geq P(a^2+b^2) - P(\sqrt{2}ab) \text{ (*)}$$

Karthik Vedula

Lời giải.

Cho $b = 0$ vào (*) được

$$P(P(a)) \geq P(a^2) + P(0) \geq P(a^2) - P(0) \text{ (1)}$$

Cho $a = 0$ vào (1) được

$$P(P(0)) \geq 2P(0) \geq 0 \text{ (2)}$$

Cho $b = -a$ vào (*) được

$$P(P(0)) + 4a^2P(0) + 2a^4 \geq 2P(a^2) \text{ (3)}$$

Bây giờ, ta sẽ xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. $degP = 0$ hay $P(x) = C$ với C là hằng số.

Từ (1) có

$$P(P(0)) \geq 2P(0) \geq 0 \Leftrightarrow C \geq 2C \geq 0$$

Suy ra $C = 0$ hay $P(x) = 0$ thử lại vào (*) thấy thoả.

Trường hợp 2. $degP = 1$ hay $P(x) = cx + d$ với c, d là hằng số.

Thay $P(x) = cx + d$ vào (*) được

$$2a^2b^2 - 4ab(ca + cb + d) + c(ca + cb + d) + d \geq c(a^2 + b^2) + 2d \geq c(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$$

Suy ra $2d \geq c(-ab\sqrt{2})$. Tuy nhiên, nếu $c \neq 0$ thì vế phải nhận được các giá trị bất kỳ, điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy $c = 0$ mâu thuẫn với $degP = 1$, suy ra trường này loại.

Trường hợp 2. $degP = 2$ hay $P(x) = cx^2 + dx + e$ với c, d, e là hằng số.

Từ (1) có

$$P(P(a)) \geq P(a^2) + P(0) \Rightarrow c^3a^4 + O(a^3) \geq ca^4 + O(a^3) \Rightarrow c^3 \geq c \text{ (4)}$$

Với mọi a đủ lớn, ta cũng có $P(a^2) \leq a^4$ suy ra $c \leq 1$. (5)

Từ (4) và (5) được $c = 1$ hoặc $-1 \leq c < 0$.

Bây giờ, theo (*) ta có

$$P(a^2) + P(b^2) \geq P(a^2 + b^2) - P(ab\sqrt{2})$$

Suy ra

$$c(a^4 + b^4) + d(a^2 + b^2) + 2e \geq c(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) + d(a^2 + b^2) - c(2a^2b^2) - d(ab\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2e \geq -d(ab\sqrt{2})$$

Suy ra $d = 0, e \geq 0$

Bây giờ, ta có $P(x) = cx^2 + e$ với $c \in [-1, 0) \cup \{1\}$ và $e \geq 0$. Từ (2), ta có

$$P(P(0)) \geq 2P(0) \Leftrightarrow ce^2 + e \geq 2e \Leftrightarrow ce^2 \geq e$$

Suy ra $e=0$ hoặc $c>0$ dẫn đến $e=0$ hoặc $c=1$

Nếu $c=1$ thì $P(x)=x^2+e$ dẫn đến (3) được

$$P(P(0))+4a^2P(0)+2a^4\geq 2P(a^2)\Leftrightarrow (e^2+e)+4ea^2+2a^4\geq 2a^4+2e \text{ (**)}$$

Tuy nhiên, nếu $e\neq 0$ thì tồn tại a đủ lớn thoả mãn vế trái(**)$<2a^4$, mâu thuẫn. Điều nãy dẫn đến $e=0$ tức là $P(x)=cx^2$ thay lại vào (*) được

$$c^3(a+b)^4+2a^2b^2-4cab(a+b)^2\geq ca^4+cb^4\Leftrightarrow c^2(a+b)^4+2a^2b^2\geq c(a+b)^4+2a^2b^2c$$

Suy ra

$$(1-c)((-c^2-c)(a+b)^4+2a^2b^2)\geq 0$$

Từ $c\in[-1,0)\cup\{1\}$, nếu c nằm trong khoảng âm thì $-c^2-c\geq 0$ và nếu $c=1$ thì vế trái bằng 0. Do đó, với mọi $c\in[-1,0)\cup\{1\}$ đều có nghĩa.

Bây giờ, ta sẽ xét trường hợp cuối

Trường hợp 4. $degP\geq 3$. Nếu ta chọn hệ số cao nhất của $P(x)$ là $l>0$ thì có a đủ lớn sao cho

$$2P(a^2)\geq 2la^6\geq 2a^4>P(P(0))+4a^2P(0)+2a^4$$

Mâu thuẫn. Do đó $l<0$. Ta có (1) suy ra rằng

$$P(a^2)-P(P(a))+P(0)\leq 0 \text{ (***)}$$

Lấy a đủ lớn và âm có nghĩa là hệ số cao nhất của vế phải (***) là âm và hệ số có bậc cao nhất là bậc chẵn (Ta biết rằng nếu bậc lẻ thì $P(x)$ có thể đạt $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Tuy nhiên, số hạng có bậc cao nhất của $P(a^2)$ là la^{2degP} (1) và số hạng cao nhất của $P(P(x))$ là $l^{degP+1}x^{(degP)^2}$ (2). Từ $degP\geq 3$ thì bậc cao nhất của (2) là $(degP)^2$ và bậc cao nhất của (1) là $2degP$. Điều này có nghĩa là số hạng cao nhất của vế phải (***) là $-l^{degP+1}x^{(degP)^2}$. Điều này có nghĩa là $-l^{degP+1}$ là số âm và $(degP)^2$ là số chẵn. Tuy nhiên, từ $l<0$ cho ta $degP+1$ chẵn mà $degP$ chẵn nên suy ra mâu thuẫn. Điều này dẫn đến $degP$ không được lớn hơn 2. Vì vậy trường hợp này loại.

Vậy $P(x)=0$ và $P(x)=cx^2$ với $c\in[-1,0)\cup\{1\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 6. Tìm tất cả các hàm đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn: với mọi số thực x,y,z phân biệt mà $x+y+z=0$ thì

$$\frac{P(x)-P(y)}{x-y}=\frac{P(x)-P(z)}{x-z}$$

Lời giải.

Rõ ràng các đa thức hằng và các đa thức bậc nhất luôn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét trường hợp $\deg P=n\geq 2$. Thay $y=-2x+t$ và $z=x-t$ với $x>t>0$ vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{P(x)-P(-2x+t)}{3x-t}=\frac{P(x)-P(x-t)}{t}$$

Cho $t\to 0^+$ với chú ý $P(x)$ liên tục và khả vi trên R, ta được

$$P(x)-P(-2x)=3xP'(x),\ \forall x>0$$

Vì hai đa thức $P(x)-P(-2x)$ và $3xP'(x)$ nhận giá trị bằng nhau tại mọi $x>0$ nên ta có

$$P(x)-P(-2x)=3xP'(x),\ \forall x\in R \quad (1)$$

Gọi $a(a\neq 0)$ là hệ số cao nhất của $P(x)$. Khi đó na là hệ số cao nhất của $P'(x)$. So sánh hệ số bậc n của hai đa thức ở hai vế của phương trình (1) ta được $a-a(-2)^n=3na$, hay

$$1-(-2)^n=3n$$

Giải phương trình này với chú ý $n \geq 2$, ta được $n = 3$. Suy ra $P(x)$ có dạng

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Thay vào phương trình (1) và rút gọn, ta được $b = 0$. Thử lại, $P(x) = ax^3 + cx + d$ thỏa mãn phương trình đã cho ở đề bài.

Vậy tất cả các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $P(x) = ax^3 + cx + d$ với a, c, d là các hằng số thực nào đó.

Bài toán 7. Tìm các đa thức P, Q với hệ số thực và n nguyên dương thoả mãn

$$P(x+1)Q(x^n) - Q(x+1)P(x^n) = 2021$$

TST Hưng Yên 2021-2022

Lời giải(Thầy Nguyễn Song Minh).

Giả sử P, Q là các đa thức thoả mãn yêu cầu bài toán. Rõ ràng thấy $P, Q \neq 0$, cho nên ta giả sử $degP = k$ và $degQ = l$ với $k, l \in N$ và ta thấy nếu (P, Q) thoả mãn yêu cầu thì với hằng số thực a tùy ý cũng sẽ có $(P, Q + aP)$ thoả mãn, ta xét các trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $n = 1$ ta luôn có đẳng thức đầu bài được viết lại thành

$$P(x)Q(x-1) - Q(x)P(x-1) = 2021$$

Từ đó, ta có

$$P(x)(Q(x+1) + Q(x-1)) = Q(x)(P(x+1) + P(x-1))$$

Do $1 \in I(P, Q)$ nên $P(x)|P(x+1) + P(x-1)$, so sánh bậc và hệ số của bậc cao nhất cho ta

$$P(x+1) + P(x-1) = 2P(x)$$

Từ đó mà ta có được $P(x) = ax + b$, cũng tương tự ts cũng có $Q(x) = cx + d$ với điều kiện cần thoả mãn sau thử lại là $ad - bc = 2021$.

Trường hợp 2. Nếu $n > 1$ thì vì P, Q không thể cùng là đa thức hằng, nêu có $k = l$ do

$$k + nl = deg(P(x+1)Q(x^n)) = deg(Q(x+1)P(x^n) + 2021) = l + nk$$

Nhưng như thế, thì với chú ý ngay từ đầu về việc chọn $a = -\dfrac{b_l}{a_k}$ trong đó a_k, b_l lần lượt là các hệ số bậc cao nhất của P và Q cho ta luôn mâu thuẫn.

Tóm lại, với $n = 1$ thì $P(x) = ax + b$ và $Q(x) = cx + d$ với các hằng số thực a, b, c, d thoả mãn điều kiện $ac - bd = 2021$ là đáp ứng đủ yêu cầu của bài toán.

Bình Luận.

Với bài toán trên, nếu ta xét trường hợp với $n = 1$ ta thấy bài toán trên ý tưởng giống với một bài toán trong cuộc thi **Putnam 2010**,

Bài toán. Tìm các đa thức P, Q với hệ số thực và n nguyên dương thoả mãn

$$P(x+1)Q(x) - Q(x+1)P(x) = 1$$

Bài toán 8. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$[P(x)]^3 - 3[P(x)]^2 = P(x^3) - 3P(-x), \forall x \in R (1)$$

TST QUẢNG NAM 2019-2020

Lời giải.

Ta xét các trường hợp

Trường hợp 1. $P(x)$ là hằng số, tức là $P(x) = c$ với c là hằng số.

Thay $P(x) = c$ vào (1) được $c^3 - 3c^2 = c - 3c \Leftrightarrow c \in \{0,1,2\}$, thử lại thoả mãn.

Trường hợp 2. $P(x)$ khác hằng, tức là $degP = n \geq 1$ và $a \neq 0$ là hệ số bậc cao nhất của $P(x)$. Khi đó ta có thể viết $P(x) = ax^n + Q(x)$ trong đó $Q(x)$ là đa thức hệ số thực có $degQ(x) = k \geq n-1$. Cân bằng hệ số của bạc cao nhất (bậc 3n) trong (1) ta có

$$a^3 = a \Leftrightarrow a \in \{-1,1\}$$

Nếu $a = 1$, ta có $P(x) = x^n + Q(x)$. Thay vào (1) được

$$(x^n + Q(x))^3 - 3(x^n + Q(x))^2 = x^{3n} + Q(x^3) - 3((-x)^n + Q(-x))$$

Suy ra

$$3x^{2n}Q(x) + 3x^n(Q(x))^2 + (Q(x))^3 - 3x^{2n} - 6x^nQ(x) - 3(Q(x))^2 = Q(x^3) - 3Q(-x) - 3.(-1)^n x^n \ (2)$$

Trong (2), nếu $k > 0$ thì bậc của vế trái là $2n+k$ và bậc của vế phải là $h \leq max\{3k,n\}$ nên cân bằng bậc ta phải có $2n+k = h \leq max\{3k,n\}$, vô lý vì $2n+k > 3k$ và $2n+k > n$.

Do vậy $k = 0$, tức lad $Q(x) = t$ với t là hằng số. Thay vào (2) được

$$3tx^{2n} + 3t^2x^n + t^3 - 3x^{2n} - 6tx^n - 3t^2 = t - 3t - 3(-1)^n x^n$$

Suy ra

$$3(t-1)x^{2n} + 3(t^2 - 2t + (-1)^n)x^n + t^3 - 3t^2 + 2t = 0 \ (3)$$

Đẳng thức (3) đúng với mọi $x \in R$ nghĩa là

$$\begin{cases} t - 1 = 0 \\ t^2 - 2t + (-1)^n = 0 \\ t^3 - 3t^2 + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ n = 2m (m \in N^*) \end{cases}$$

Khi đó ta có $P(x) = x^{2m} + 1$ với $m \in N^*$ và $x \in R$, thử lại thoả mãn.

Nếu $a = -1$, ta có $P(x) = -x^n + Q(x)$. Thay vào (1) được

$$(-x^n + Q(x))^3 - 3(-x^n + Q(x))^2 = -x^{3n} + Q(x^3) - 3(-(-x)^n + Q(-x))$$

Suy ra

$$3x^{2n}Q(x) - 3x^n(Q(x))^2 + (Q(x))^3 - 3x^{2n} + 6x^nQ(x) - 3(Q(x))^2 = Q(x^3) - 3Q(-x) + 3.(-1)^n x^n \ (4)$$

Trong (4), nếu $k > 0$ thì bậc của vế trái là $2n+k$ và bậc của vế phải là $h \leq max\{3k,n\}$ nên cân bằng bậc ta phải có $2n+k = h \leq max\{3k,n\}$, vô lý vì $2n+k > 3k$ và $2n+k > n$.

Do vậy $k = 0$, tức lad $Q(x) = t$ với t là hằng số. Thay vào (4) được

$$3tx^{2n} - 3t^2x^n + t^3 - 3x^{2n} + 6tx^n - 3t^2 = t - 3t + 3(-1)^n x^n$$

Suy ra

$$3(t-1)x^{2n} - 3(t^2 - 2t + (-1)^n)x^n + t^3 - 3t^2 + 2t = 0 \ (5)$$

Đẳng thức (5) đúng với mọi $x \in R$ nghĩa là

$$\begin{cases} t - 1 = 0 \\ t^2 - 2t + (-1)^n = 0 \\ t^3 - 3t^2 + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ n = 2m (m \in N^*) \end{cases}$$

Khi đó ta có $P(x) = -x^{2m} + 1$ với $m \in N^*$ và $x \in R$, thử lại thoả mãn.
Vậy có 5 đa thức thoả mãn bài toán là

$$P(x) = 0; P(x) = 1; P(x) = 2; P(x) = x^{2m} + 1 \text{ và } P(x) = -x^{2m} + 1 \text{ với } m \in N^* \text{ và } x \in R.$$

Bình Luận.
Với bài toán trên ta thấy ý tưởng giống với bài toán trong đề thi **Greece TST 2014**,
Bài toán. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$[P(x)]^3 + 3[P(x)]^2 = P(x^3) - 3P(-x), \forall x \in R$$

Bài toán 9. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i P(x+i) = 0$$

với mọi số thực x.
Lời giải.
Đầu tiên, ta sẽ nêu bổ đề sau:
Cho t là một số thực khác không. Nếu một trong đa thức $P(x)$ có bậc cao nhất $d \geq 1$ với hệ số cao nhất $a_d \neq 0$, thì đa thức $P(x+t) - P(x)$ có bậc $d-1$ và hệ số cao nhất dta_d.
Chứng minh bổ đề trên,
Bây giờ, nếu $P(x)$ là đa thức có $\deg P(x) = d \geq 2$ với hệ số cao nhất a_d thì

$$P(x+2) - 2P(x+1) + P(x) = (P(x+2) - P(x+1)) - (P(x+1) - P(x))$$

là một đa thức có bậc $d-2$ với hệ số cao nhất $d(d-1)a_d$. Nếu $d < 2$ thì $P(x+2)-2P(x+1)+P(x) = 0$.
Tương tự như trên, nếu nếu $P(x)$ là đa thức có $\deg P(x) = d \geq 3$ với hệ số cao nhất a_d thì

$$P(x+3) - 3P(x+2) + 3P(x+1) - P(x)$$

là một đa thức có bậc $d-3$ với hệ số cao nhất $d(d-1)(d-2)a_d$. Nếu $d < 3$ thì $P(x+3) - 3P(x+2) + 3P(x+1) - P(x) = 0$.
Bây giờ, giả sử $Q(x)$ là đa thức cố định có bậc d và xét phương trình

$$P(x+1) - P(x) = Q(x)$$

Theo bổ đề, cho ta biết $P(x)$ là một đa thức có bậc $d+1$ thì $P(x+1) - P(x)$ là một đa thức có bậc d. Như vậy, ta sẽ có thể tìm được nghiệm $P(x)$ là đa thức bậc $d+1$. Điều này xảy ra khi ta dùng phương pháp quy nạp vào d. Nếu $Q(x) = C$ với C là hằng số thì $P(x) = Cx$ (cụ thể hơn là $P(x) = Cx + C^{'}$). Theo quy nạp, ta có thể tìm được tất cả các đa thức $P(x)$ có bậc nhỏ hơn d. Gọi a_d là hệ số cao nhất của $Q(x)$ và $Q(x) = a_d x^d + R(x)$ với $\deg Q(x) < d$. Theo bổ đề, ta có thể viết

$$P_0(x) = \frac{a_d}{d+1} x^{d+1}$$

thì $P_0(x+1) - P_0(x) = a_d x^d + S(x)$ với mọi đa thức $S(x)$ có bậc nhiều nhất là $d-1$. Từ $R(x) - S(x)$ có bậc nhiều nhất là $d-1$, nên theo quy nạp cho biết rằng $P_1(x)$ có bậc nhiều nhất là d sao cho $P_1(x+1) - P_1(x) + R(x) - S(x)$. Khi đó, ta sẽ có

$$P(x+1) - P(x) = P_0(x+1) - P_0(x) + P_1(x+1) - P_1(x) = a_d x^d + S(x) + R(x) - S(x) = Q(x)$$

Lưu ý rằng nếu ta có hai nghiệm

$$P(x+1)-P(x)=Q(x), T(x+1)-T(x)=Q(x)$$

thì $P(x)-T(x)$ là đa thức tuần hoàn, tức là đa thức hằng. Khi đó, hai nghiệm bất kỳ khác nhau bởi một hằng số. Bổ đề đã được chứng minh xong.
Vào bài toán, từ bổ đề trên nếu $\deg P(x)=d>0$ và có hệ số cao nhất a_d thì $P(x+1)-P(x)$ là một đa thức có bậc $d-1$ với hệ số cao nhất là da_d. Ta kí hiệu $\delta P=P(x+1)-P(x)$.
Sử dụng cái trên 2 lần, ta có được

$$\delta^2 P=\delta(\delta P)=P(x+2)-2P(x+1)+P(x)$$

Tương tự, ta lặp lại điều này cho k lần ta có được

$$\delta^k P=P(x+k)-\binom{k}{1}P(x+k-1)+...+(-1)^k P(x)$$

Nếu $\deg P(x)=d\ge k$ với hệ số cao nhất a_d thì đa thức $\delta^k P$ có bậc $d-k$ và hệ số cao nhất

$$d(d-1)...(d-k+1)a_d=\frac{d!}{(d-k)!}a_d$$

(và nếu $d<k$ thì $\delta^k P=0$). Đặt biệt, $\delta^d P=d!a_d$.
Theo kí hiệu δ, ta thấy ra bài toán trên nói rằng với mọi đa thức $P(x)$ thoả mãn ${}^nP=0$. Do đó, tất cả các đa thức $P(x)$ có $\deg P\le n-1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bình luận.

Bài toán trên là trường hợp tổng quát cho bài toán trong đề thi

Norwegian Mathematical Olympiad 2018 – Abel Competition,

Bài toán. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$P(x)+3P(x+2)=3P(x+1)+P(x+3)$$

Với mọi số thực x.

Bài toán 10. Tìm đa thức $P(x)$ với hệ số thực, có bậc nhỏ hơn $n\in N^*$. Sao cho tồn tại n số thực đôi một phân biệt là $a_1,a_2,...,a_n$ thoả mãn điều kiện với mỗi $i,j\in\{1,2,...,n\}$ ta có

$$|P(a_i)-P(a_j)|=n|a_i-a_j|$$

Lời giải.

Cách 1

Không mất tính tổng quát, ta sắp xếp thứ tự $a_1<a_2<...<a_n$. Rõ ràng các giá trị $P(x_i)$ đôi một phân biệt và nếu $P(x)$ thoả mãn yêu cầu thì $-P(x)$ cũng thế. Do vậy, không mất tính tổng quát ta giả sử $P(a_1)<P(a_n)$, ta cũng giả sử luôn

$$P(a_m)=\min_{1\le i\le n} P(x_i)$$

Ta có được $m=1$ từ $P(a_m)=P(a_1)$, nhờ các biến đổi sau đây

$P(a_n)-P(a_1)=n(a_n-a_1)=n(a_n-a_m)+n(a_m-a_1)=|P(a_n)-P(a_m)|+|P(a_m-P(a_1)|$

$=P(a_n)+P(a_1)-2P(a_m)$

Bây giờ với mọi số nguyên dương k nhỏ hơn $n+1$, ta lại có

$$P(a_k)-P(a_1)=|P(a_k)-P(a_1)|=n(a_k-a_1)$$

Vậy đa thức $f(x)=P(x)-nx-P(a_1)+na_1$ sẽ nhận $a_1,a_2,...,a_n$ làm n nghiệm phân biệt, mà bậc của nó nhỏ hơn n cho nên nó phải là đa thức 0. Từ đó, ta thấy đa thức $P(x)$ có dạng

$$P(x)=nx+c, c: const \text{ và } n\in N^*$$

Thử lại và để ý lý luận từ đầu, cho ta thấy có đúng hai đa thức thoả mãn bài toán là

$$P(x)=nx+c \text{ và } P(x)=-nx+c \text{ với } c=const, n\in N^*$$

Cách 2

Xét các điểm M_k có hoành độ là a_k trên đồ thị hàm số $y=\frac{1}{n}P(x)$ với $n\in N^*$. Cố định mỗi một chỉ số k, thì từ giả thiết ta có ngay các điểm M_i còn lại sẽ chỉ thuộc một trong hai đường thẳng d_k hoặc $d_k^{'}$. Trong đó d_k đi qua M_k và hệ số góc bằng 1, còn $d_k^{'}$ đi qua M_k và hệ số góc bằng -1. Để ý rằng, d_k vuông góc với $d_k^{'}$.

Nếu n điểm này không thẳng hàng, thì phải có 3 điểm không thẳng hàng trong n điểm đó giả sử là A,B,C. Ta có ngay điều mâu thuẫn là tam giác ABC có 3 góc vuông.

Vậy là, n điểm M_k phải thẳng hàng, các điểm đó lại là giao điểm của một đường thẳng với độ thị một hàm đa thức có bậc bé hơn n, cho nên cái đồ thị kia chính là đường thẳng kẻ qua n điểm, tức là hàm $y=\frac{1}{n}P(x)$ là hàm bậc nhất. Nó lại có đồ thị, là đường thẳng có hệ số góc là -1 hoặc 1, cho nên là

$$\frac{1}{n}P(x)=\pm x+c \text{ với } c=const, n\in N^*$$

Cách 3

Xét các điểm M_k có hoành độ là a_k trên đồ thị hàm số $y=\frac{1}{n}P(x)$ với $n\in N^*$. Cố định mỗi một chỉ số k, thì từ giả thiết ta có ngay các điểm M_i còn lại sẽ chỉ thuộc một trong hai đường thẳng d_k hoặc $d_k^{'}$. Trong đó d_k đi qua M_k và hệ số góc bằng 1, còn $d_k^{'}$ đi qua M_k và hệ số góc bằng -1. Để ý rằng, d_k vuông góc với $d_k^{'}$.

Nếu n điểm này không thẳng hàng, thì theo định lý Sylvester-Galai sẽ có đúng 2 điểm ở trong chúng (không mất tính tổng quát) giả sử M_1,M_2 mà trên đường thẳng M_1M_2 không chứa các điểm nào trong các điểm còn lại. Như thế thì, hai đường kẻ vuông góc với M_1M_2 tương ứng tại các điểm M_1 và M_2 kia mỗi đường đều chứa $n-2$ điểm còn lại. Nhưng mà, hai đường này song song với nhau nên không có điểm chung.

Vậy là, n điểm M_k phải thẳng hàng, các điểm đó lại là giao điểm của một đường thẳng với độ thị một hàm đa thức có bậc bé hơn n, cho nên cái đồ thị kia chính là đường thẳng kẻ qua n điểm, tức là hàm $y=\frac{1}{n}P(x)$ là hàm bậc nhất. Nó lại có đồ thị, là đường thẳng có hệ số góc là -1 hoặc 1, cho nên là

$$\frac{1}{n}P(x)=\pm x+c \text{ với } c=const, n\in N^*$$

Bình luận. Bài toán trên là dạng tổng quát từ môt bài toán trong đề thi

Trại hè Hùng Vương năm 2019,

Bài toán. Tìm đa thức $P(x)$ với hệ số thực, có bậc nhỏ hơn 2019. Sao cho tồn tại n số thực đôi một phân biệt là $a_1,a_2,...,a_{2019}$ thoả mãn điều kiện với mỗi $i,j\in\{1,2,...,2019\}$ ta có

$$|P(a_i)-P(a_j)|=2019|a_i-a_j|$$

Bài toán 11. Tìm tất cả các đa thức khác hằng $P(z)$ với hệ số phức thoả mãn tất cả các nghiệm phức của đa thức $P(z)$ và $P(z)-1$ có modun bằng 1.

USA TSTST 2020

Lời giải.

Gọi đa thức $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1x + c_0 = c_n(x+m_1)(x+m_2)...(x+m_n)$ biết $m_1, m_2, ..., m_n$ biết các nghiệm phức của $P(x)$

Mặt khác,$P(x)-1 = c_n(x+p_1)(x+p_2)...(x+p_n)$ biết $p_1, p_2, ..., p_n$ biết các nghiệm phức của $P(x)-1$ (1)

Bằng cách liên hợp nên (1) có,

$$c_n(x+m_1)(x+m_2)...(x+m_n) - 1 = c_n(x+p_1)(x+p_2)...(x+p_n)$$

Hay viết lại thành

$$(x+m_1)(x+m_2)...(x+m_n) = (x+p_1)(x+p_2)...(x+p_n) + (c_n)^{-1}$$

Suy ra

$$\left(x+\frac{1}{m_1}\right)\left(x+\frac{1}{m_2}\right)...\left(x+\frac{1}{m_n}\right) = \left(x+\frac{1}{p_1}\right)\left(x+\frac{1}{p_2}\right)...\left(x+\frac{1}{p_n}\right) + \left(\overline{\mathrm{c_n}}\right)^{-1} \ (2)$$

Bây giờ từ, ta sẽ đi chứng minh $c_k = 0$ với $k \in \{1, 2, .., n-1\}$.

Chứng minh như sau:

So sánh hệ số của x^k từ (2) có

$$\frac{c_{n-k}}{\prod_i m_i} = \frac{c_{n-k}}{\prod_i p_i}$$

Nhưng $\prod_i m_i - \prod_i p_i = \dfrac{1}{c_n} \neq 0$. Do đó, dẫn đến $c_k = 0$.

Do đó $P(x)$ phải có dạng $P(x) = ax^n - b$ sao cho $P(x) = ax^n - (b+1)$. Điều này yêu cầu, $|b| = |b+1| = |a|$ để thoả mãn bài toán.

Bài toán 12. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực và không có nghiệm bội sao cho với mỗi số phức z thì phương trình $zP(z) = 1$ thoả mãn khi và chỉ khi $P(z-1)P(z+1) = 1$.

SAFEST Olympiad 2020

Lời giải.

Xét các trường hợp,

Trường hợp 1. $P(x)$ là đa thức hằng, tức là $P(x) = c, \forall c \in R$ dẫn đến đầu bài được phương trình zc=1 thoả mãn khi vào chỉ khi $c^2 = 0$.

Nếu $c = 0$ thì $c^2 = 0$ nhưng $cz = 1$, ta thấy mâu thuẫn.

Nếu $c \neq 0$ thì $z = \dfrac{1}{c}$, điều này hiển nhiên mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $degP = 1$, tức là $P(x) = mx + b$ với $m \neq 0$ dẫn đến đầu bài được phương trình $mz^2 + bz = 1$ thoả mãn khi và chỉ khi $(m(z-1)+b)(m(z+1)+b) = 0$, vì vậy hai đa thức $mz^2 + bz - 1$ và $m^2z^2 + 2bmz + (b^2 - m^2)$ tương đương nhau, tức là hai đa thức này là bội của nhau. Bằng cách so sánh hệ số cao nhất, ta thấy nhân thêm m vào $mz^2 + bz - 1$ được $m^2z^2 + mz - m$ và từ $m \neq 0$ ta so sánh các hệ số còn lại ta được

$$\begin{cases} bm = 2bm \\ -m = b^2 - m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Dẫn đến $P(z) = z$, thử lại thỏa mãn.

Trường hợp 3. $degP = n \geq 2$

Ta xét đa thức $Q(x) = (z+1)P(z+1) - (z-1)P(z-1)$ (*). Dễ thấy rằng $degQ \leq degP$

Do đó, ta sẽ đi chứng tỏ rằng Q cũng tương đương với P

Chứng minh như sau:

Nếu $P(r) = 0$ với mọi số phức r, ta cho lần lượt $z = r+1$ và $z = r-1$ vào (*), cho ta được

$$(r-1)P(r-1) = 1 = (r+1)P(r+1)$$

và do đó $Q(r) = 0$. Điều này chứng tỏ rằng tất cả các của P cũng là nghiệm của Q. Vì P không có nghiệm kép và bậc của Q không thể lớn hơn bậc của P. Do đó, ta có Q là bội của P.

Đặt $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Dẫn đến

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\left((z+1)^{k+1} - (z-1)^{k+1}\right) \ (**)$$

Để so sánh Q và P, ta muốn viết lại dưới dạng $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$.

Để tính b_n, lưu ý rằng các số hạng duy nhất có trong (**) chứa z^n đến từ $k = n-1$ và $k = n$, ta có

$$b_n z^n = a_{n-1}(z^n - z^n) + a_n\left((n+1)z^n - (-(n+1)z^n)\right) = 2(n+1)a_n z^n$$

Do đó, $Q = 2(n+1)P$. Bây giờ, ta tính tiếp b_{n-1},lưu ý rằng các số hạng duy nhất có trong (**) chứa z^{n-1} đến từ $k = n-2$,$k = n-1$ và $k = n$, ta có

$$b_{n-1}z^{n-1} = a_{n-2}(z^{n-1} - z^{n-1}) + a_{n-1}(nz^{n-1} - (-n)z^{n-1}) + a_n\left(\binom{n+1}{2}z^{n-1} - \binom{n+1}{2}z^{n-1}\right) = 2na_{n-1}z^{n-1}$$

Nhưng nếu $Q = 2(n+1)P$ thì ta phải có $b_{n-1} = 2(n+1)a_{n-1}$, điều này mâu thuẫn. Dẫn đến không tồn tại đa thức nào có $degP = n \geq 2$.

Vậy $P(z) = z$ là đa thức thoả mãn bài toán.

Bài toán 13. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$P(a+b+c) = P(a) + 4P(b) + 22P(c) \ (1)$$

Với $a, b, c \in R$ sao cho $(a+b)(b+c)(c+a) = b^3 + 7c^3$ (2).

Nguyễn Phúc Thọ

Lời giải. Dễ thấy $P(x) = 0$ thoả mãn bài toán. Ta sẽ xét $P(x) \neq 0$,

Ta sẽ chọn các số a, b, c có dạng $(a, b, c) = (mx, nx, px)$ thoả (2).

Thay bộ số $(a, b, c) = (mx, nx, px)$ vào (2) được

$$(m+n)(n+p)(p+m) = n^3 + 7p^3$$

Dễ thấy cặp $(m, n, p) = (1, 1, 1)$ đơn giản và thoả (2). Như vậy bộ $(a, b, c) = (x, x, x)$ thoả (2).

Do đó, thay bộ $(a, b, c) = (x, x, x)$ vào (1) được

$$P(3x) = 27P(x) \ (*)$$

Ta gọi hệ số tự do và hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ là a_0 và $a_n \neq 0$.

Sau đó, ta đồng nhất hệ số tự do và hệ số bậc cao nhất được

$$\begin{cases} a_n 3^n = 27a_n \\ a_0 = 27a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Như vậy, đa thức $P(x)$ có dạng $P(x) = dx^3 + ex^2 + fx$, thay lại vào (*) có

$$27dx^3 + 9ex^2 + 3fx = 27dx^3 + 27ex^2 + 27fx$$

Đồng nhất hệ số suy ra $e = f = 0$, dẫn đến $P(x) = dx^3$ với $d \neq 0$.

Thử lại,
$P(a+b+c)=d(a+b+c)^3=d(a^3+b^3+c^3)+3d(a+b)(b+c)(c+a)=d(a^3+b^3+c^3)+3d(b^3+7c^3)=d(a^3+4b^3+22c^3)=P(a)+4P(b)+22P(c)$, Ta thấy thoả mãn.
Vậy $P(x)=0$ và $P(x)=dx^3$ với $d\neq 0$ thoả bài toán.

Bài toán 14. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn với mọi tất các số nguyên dương phân biệt từng cặp (x,y,z,t) với $x^2+y^2+z^2=2t^2$ và $gcd(x,y,z,t)=1$ thoả mãn

$$2(P(t))^2+2P(xy+yz+zx)=(P(x+y+z))^2\ (*)$$

UKRMO 2009-Grade 11

Lời giải. Đầu tiên, ta dễ dàng tim ra bộ số $(x,y,z,t)=(4,(2n-1)^2,(2n+1)^2,4n^2+3)$ với n nguyên dương thoả mãn $x^2+y^2+z^2=2t^2$ và $gcd(x,y,z,t)=1$. Từ bộ nghiệm trên, cho ta $xy+yz+zx=t^2$ và do đó có $x+y+z=2t$. Từ đó, (*) được viết lại thành

$$2(P(t))^2+2P(t^2)=(P(2t))^2,\forall t\in R$$

Hay $2(P(x))^2+2P(x^2)=(P(2x))^2,\forall x\in R$ (**) Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1. $degP=0$ tức là $P(x)=c$ với c là hằng số. Thay lại vào (**) cho ta được

$$2c^2+2c=c^2\Rightarrow \begin{cases} c=-2\\ c=0\end{cases}$$

Do đó, $P(x)=-2$ và $P(x)=0$ thoả mãn.

Trường hợp 2. $degP=1$ tức là $P(x)=ax+b$ với $a\neq 0,b$ là các hằng số. Thay lại vào (**) có

$$2(ax+b)^2+2(ax^2+b)=(2ax+b)^2$$

Suy ra

$$(2a^2+2a)x^2+4abx+(2b^2+2b)=4a^2x^2+4abx+b^2$$

Tới đây, ta đồng nhất hệ số với $a\neq 0$ được

$$\begin{cases} 2a^2+2a=4a^2\\ 2b^2+2b=b^2\end{cases}$$

Suy ra bộ nghiệm $(a,b)=(1,0);(1,2)$. Do đó, $P(x)=x$ và $P(x)=x-2$ thử lại thấy thoả mãn.

Trường hợp 3. $degP=n\geq 2$. Ta đặt $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. Từ (**) ta so sánh hệ số của x^{2n} có

$$(2^n.a_n)^2=2a_n+2a_n^2\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^{2n-1}-1}$$

Bây giờ, ta sẽ đi chứng minh $a_{n-i}=0$ với mọi $1\leq i\leq n$.

Chứng minh như sau: Với $i=1$, ta so sánh hệ số x^{2n-1} từ (**) được

$$2a_na_{n-1}=2.2^n.a_n.2^{n-1}a_{n-1}$$

mà $a_n\neq 0$ suy ra $a_{n-1}=0$, đúng.

Theo quy nạp, ta giả sử đúng với $n=k$ tức là $a_{n-i}=0$ với mọi $1\leq i\leq k$

Bây giờ, ta sẽ đi chứng minh với k+1 tức là a_{n-k-1}. Cuối cùng, ta sẽ so sanh hệ số của x^{2n-k-1} từ (**). Tới đây ta sẽ xử lí như sau:

Nếu k chẵn. Khi đó,vì trong khai triển của $P(x^2)$ chỉ có các hạng tử có số mũ chẵn, ta suy ra rằng $2n-k-1=0$. Ngoài ra, trong khai triển của $(P(x))^2$ và $(P(2x))^2$, số mũ của hạng tử

x^{2n-k-1} sẽ xác định với $p,q \le n$ thoả mãn $p+q = 2n-k-1$. Nếu ít nhất một trong 2 số p,q là $\ge n-k$ và $\le n-1$, thì hệ số $a_p a_q = 0$, do đó hệ số của các hạng tử của x^{p+q} bằng 0.
Do đó, ta chỉ có thể xét p,q là n hoặc $\le n-k-1$. Nếu cả hai đều $\le n-k-1$, ta có mâu thuẫn. Do đó, một trong hai bằng n và cái kia bằng $n-k-1$. Nghĩa là hệ số của x^{2n-k-1} trong $2(P(x))^2$ là $4a_n a_{n-k-1}$.
Tương tự,ta cũng xử lý với $(P(2x))^2$, do đó hệ số của x^{2n-k-1} trong $(P(2x))^2$ là $2.2^n.a_n.2^{n-k-1}.a_{n-k-1} = 2^{2n-k}a_n a_{n-k-1}$. Do đó, cân bằng hệ số x^{2n-k-1} của (**) được

$$4a_n a_{n-k-1} = 2^{2n-k}a_n a_{n-k-1}.$$

và từ $2n-k > n \ge 2$ và $a_n \ne 0$, dẫn đến $a_{n-k-1} = 0$. (1)
Nếu k lẻ. Tương tự với trường hợp k chẵn, mặc dù ta nhân hai vế cho hệ số $a_{\frac{2n-k-1}{2}}$ vào (**), do đó cân bằng hệ số x^{2n-k-1} của (**) được

$$(2^{2n-k}-4)a_n a_{n-k-1} = a_{\frac{2n-k-1}{2}}$$

Từ $\frac{2n-k-1}{2} = n-k+\frac{k-1}{2} > n-k$ và ta có $a_{\frac{2n-k-1}{2}} = 0$ bằng quy nạp. Từ đó, ta cũng có $a_{n-k-1} = 0$.(2)
Từ (1) và (2), dẫn đến điều quy nạp đúng. Dẫn đến, đa thức $P(x) = \frac{x^n}{2^{2n-1}-1}$ thoả mãn.
Vậy có 5 đa thức thoả mãn bài toán là

$$P(x) = -2, P(x) = 0, P(x) = x, P(x) = x-2, P(x) = \frac{x^n}{2^{2n-1}-1}, \text{ với } \forall x \in R \text{ và } n \ge 2.$$

Bài toán 15. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên sao cho tồn tại vô hạn cặp số nguyên (m,n) thoả mãn

$$P(m)+P(n) = 0$$

Lời giải.
Không mất tính tổng quát, xét đa thức thoả đề là $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$ với $a_k > 0$ và bỏ qua trường hợp $k = 0$. Gọi S là tập chứa các cặp số nguyên (m,n) thoả đ, vì tính đối xứng ở đây ta chỉ xét các cặp sao cho $P(x) \le 0$ và $P(x) \ge 0$. Ngoài ra, ta có thể xét $m \ne n$ mà S vẫn có vô số nghiệm, dẫn đến $P(x) = 0$, thoả mãn yêu cầu.
Nếu k chẵn thì tồn tại số thực dương x_0. Do đó, $|m| < x_0$ hay m chỉ có hữu hạn số giá trị, mà phương trình $P(x) = P(m)$ cũng hữu hạn nghiệm với mỗi giá trị m kể trên, dẫn đến n cũng có hữu hạn giá trị. Từ đó suy ra S có hữu hạn phân tử, vô lý. Vì vậy, k lẻ và tồn tại số thực dương x_0 để $P(x) > 0$ với mọi $x_0 > 0$.
Nếu chỉ chứa các cặp số nguyên dương thì $0 < m < x_0$nên rõ ràng số giá trị m là hữu hạn, tương tự như trên dẫn đến vô lí. Nếu S chỉ chứa các cặp số nguyên âm thì ta cũng xét tương tự như thế. Tóm lại, tồn tại (m_0,n_0) sao cho $m_0 n_0 \le 0$.
Do k lẻ, với mọi $(m,n) \in S$ thì nếu đặt $g(m,n) = a_k(m^{k-1} - m^{k-2}n + ... + n^{k-1})$ và $h(m,n) = a_{k-1}(m^{k-1}+n^{k-1}) + ... + a_1(m+n) + 2a_0$ thì

$$0 = P(m)+P(n) = (m+n)g(m,n) + h(m,n)$$

Đặt $f(m,n) = \frac{h(m,n)}{g(m,n)}$ thì $|m+n| = |f(m,n)|$. Dễ thấy các hàm theo x là $f(x,n_0)$ và $f(m_0,x)$ đều bị chặn nên $|m_0+n_0| < t_1$ với t_1 là số thực dương. Với $mn > 0$ thì như các nhận xét trên, ta cũng có tồn tại số thực dương t_2, t_3 sao cho $|m| < t_2$ và $|m| < t_3$. Tóm lại $|m+n| < max\{t_1, t_2, t_3\}$ hay tồn tại hằng số $c \in \{m+n|(m,n) \in S\}$ xuất hiện vô số lần.

Xét phương trình $G(x) = P(x) + P(c-x)$ thì $G(x) = 0$ có vô số nghiệm, nên $G(x) = 0$ hay $P(x) + P(c-x) = 0$

Từ đây đặt $Q(x) = P\left(\frac{c}{2} + x\right)$, được

$$Q(x) + Q(-x) = 0$$

Tới đây, dễ thấy $degQ = degP = k$ mà k lẻ nên $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_0$, dẫn đến

$$b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_0 - b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} - b_{k-2}x^{k-2} + ... - b_1 x + b_0 = 0$$

hay

$$b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_0 + b_{k-1}x^{k-1} - b_{k-2}x^{k-2} + ... - b_1 x + b_0 = 0(*)$$

So sánh bậc cao nhất của (*) có $k-1=0$ hay $k=1$. Do đó, $Q(x) = x + d$ dẫn đến $P(x) = x - \dfrac{c}{2} + d$ thay vào lại được

$$x - \frac{c}{2} + d - x - \frac{c}{2} + d = 0$$

dẫn đến $-\dfrac{c}{2} + d = 0$.

Vậy $P(x) = 0$ và $P(x) = x$ thoả mãn bài toán .

Bài toán 16. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho

$$\frac{1}{\dfrac{1}{P(x)} - \dfrac{1}{P(P(x))}}$$

Adapted from Oleg Mushkarov

Lời giải.

Cách 1. Đầu tiên, giả sử rằng cả $P(x)$ và $P(P(x)) - P(x)$ đều không phải là đa thức hằng. Ta viết lại đề bài,

$$\frac{P(P(x))P(x)}{P(P(x)) - P(x)}$$

và thấy rằng

$$\frac{P(P(x))P(x)}{P(P(x)) - P(x)} = P(x) + \frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)}$$

Khi đó

$$\frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)}$$

phải là một đa thức.

Nếu $\deg P(x) = d > 2$ thì $\deg P(x)^2 = 2d$ nhưng $\deg(P(P(x)) - P(x)) = d^2$ thì ta thấy được sự mâu thuẫn. Điều này dẫn đến $\deg P(x) \in \{1, 2\}$

Nếu $\deg P(x) = 1$ thì ta viết $P(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ và $a \neq 1$ từ đó $P(P(x)) - P(x)$ không phải là đa thức hằng. Khi đó

$$\frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)} = \frac{(x+b)^2}{(a^2-a)x + ab} = cx + d$$

với mọi c, d.

Viết lại thành,

$$(ax+b)^2 = ((a^2-a)x+ab)(cx+d)$$

So sánh hệ số x^2 ta tìm được $c = \frac{a}{a-1}$ và so sánh hệ số tự do ta tìm được $d = \frac{b}{a}$. Do đó,

$$(ax+b)^2 = ((a^2-a)x+ab)\left(\frac{a}{a-1}x+\frac{b}{a}\right)$$

Đúng với mọi $x \in R$, có $b = 0$. Do đó $P(x) = ax$ thoả mãn bài toán.

Nếu $\deg P(x) = 2$ thì $\deg P(x)^2 = \deg(P(P(x)) - P(x)) = 4$, do đó

$$P(P(x)) - P(x) = aP(x)^2$$

với a là hằng số. Do đó, có vô hạn t (tất cả t với $t = P(x)$ với mọi x) thoả mãn $P(t) = at^2 + t$. Do đó,

$$P(x) = ax^2 + x$$

thoả mãn.

Nếu $P(x)$ là hằng số, thì ta có một nghiệm, và nếu $P(P(x)) - P(x) = c$ với mọi c là hằng số thì $P(x) = x + c$ thoả mãn bài toán.

Cách 2. ầu tiên, giả sử rằng cả $P(x)$ và $P(P(x)) - P(x)$ đều không phải là đa thức hằng, thì

$$\frac{P(x)^2}{P(P(x)) - P(x)}$$

cũng là một đa thức. Do đó, tất cả nghiệm của $P(P(x) - P(x)$ cũng là nghiệm của $P(x)^2$. Do đó, tất cả nghiệm của $P(x)^2$ phải là nghiệm của $P(x)$. Gọi r là nghiệm bất kỳ của $P(P(x))$ thì $P(r) = 0$ và vì vậy có

$$P(P(r)) = P(r) = 0$$

Do đó, $P(P(r)) = P(0) = 0$. Do đó, 0 là nghiệm của $P(x)$, và vì vậy ta viết $P(x) = xS(x)$ với mọi đa thức $S(x)$. Ở đây, $P(P(x)) = P(x)S(P(x))$ và đo đó,

Còn nếu $P(x)$ là hằng sớ tương tự cách 1. **Bài toán 17.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ khác hằng với hệ số thực thoả mãn

$$P(Q(x)) = P(x)Q(x) - P(x)$$

Lời giải.

Gọi $\deg P(x) = m$ và $\deg Q(x) = n$ với $m, n \geq 1$. Dẫn đến,

$$\deg P(Q(x)) = mn, \deg(P(x)Q(x) - P(x)) = m + n$$

Do đó, ta có $mn = m + n$ hay $(m-1)(n-1) = 1$. Từ m, n là các số nguyên dương nên $m = n = 2$. Từ đó, ta có thể viết $P(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, do đó từ đề ta được

$$aQ(x)^2 + bQ(x) = P(x)Q(x) - (P(x) + c)$$

tức là $P(x)+c$ chia hết cho $Q(x)$. Từ $Q(x)$ và $P(x)$ cùng bậc, nên tồn tại với mọi d là số thực sao cho $P(x)+c=dQ(x)$. Ở đây, ta viết lại thành $P(x)=dQ(x)-c$. Thay thế điều này vào phương trình đề bài, được

$$dQ(Q(x))-c=(dQ(x)-c)Q(X)-(dQ(x)-c)$$

hay

$$dQ(Q(x))-c=dQ(x)^2-(d+c)Q(x)+c$$

Do đó, ta xét phương trình $dQ(t)=dt^2-(d+c)t+2c$ (*), thì ta thấy phương trình có $Q(x)$ là một nghiệm thực. Vì $Q(x)$ khác hằng, nên ta giả sử $Q(x)$ vô số nghiệm thực. Do đó, phương trình (*) có vô số nghiệm thực. Như vậy,

$$Q(x)=x^2-\left(1+\frac{c}{d}\right)x+\frac{2c}{d}$$

Từ $P(x)=dQ(x)-c$, dẫn đến

$$P(x)=dx^2-(d+c)x+c$$

.

Vậy $P(x)=dx^2-(d+c)x+c$ và $Q(x)=x^2-\left(1+\frac{c}{d}\right)x+\frac{2c}{d}$ thoả mãn bài toán.

Bài toán 18. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$P(x^2)=P(x)Q(1-x)+Q(x)P(1-x)$$

Belarusian MO 2015

Lời giải.

Thay $x\to 1-x$ vào phương trình đề bài, ta được

$$P(x^2)=P((1-x)^2)=P((x-1)^2)$$

Do đó, đa thức $P(x^2)$ là đa thức tuần hoàn, tức là $P(x)=c$ với c là hằng số. Dẫn đến đề bài được viết lại thành,

$$c=cQ(1-x)+cQ(x)$$

Nếu $c=0$, thì thoả mãn. Còn nếu $c\neq 0$ thì $Q(x)+Q(1-x)=1$. Ở đây, thay $x\to x+\frac{1}{2}$, ta được

$$Q\left(\frac{1}{2}+x\right)-\frac{1}{2}+Q\left(\frac{1}{2}-x\right)-\frac{1}{2}=0$$

Ở đây, ta đặt $R(x)=Q\left(\frac{1}{2}+x\right)-\frac{1}{2}$ là đa thức lẻ. Do đó,

$$Q\left(\frac{1}{2}+x\right)-\frac{1}{2}=xS(x^2)$$

với mọi đa thức $S(x)$. Vì thế

$$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)S\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}$$

Bài toán 19. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$P(Q(x)) = P(x)^{2017}$$

Lời giải.

Để giải quyết bài toán trên, ta cần phải sử dụng để bổ đề sau:

Long-run Behavior Lemma. Cho $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0$ là một đa thức với hệ số thực, và xác định bởi $a = \sqrt[d]{|a_d|}$ và $b = \dfrac{a_{d-1}}{da_d}$ thì

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\sqrt[d]{|P(x)|} - a.|x+b|\right) = 0$$

Chứng minh bổ đề.

Vì ta có thể thay $P(x) \to -P(x)$ nếu cần. Không mất tình tổng quát, ta có thể giả sử $a_d > 0$ và phá đi giá trị tuyệt đối. Sau đó ta có,

$$\sqrt[d]{P(x)} - \sqrt[d]{a_d}x = \frac{P(x) - a_d x^d}{\sqrt[d]{P(x)^{d-1}} + ... + \sqrt[d]{a_d^{d-1}}x^{d-1}} = \frac{a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0}{\sqrt[d]{P(x)^{d-1}} + ... + \sqrt[d]{a_d^{d-1}}x^{d-1}}$$

Do đó,

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\sqrt[d]{P(x)} - \sqrt[d]{a_d}x\right) = \lim_{|x|\to\infty}\frac{a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0}{\sqrt[d]{P(x)^{d-1}} + ... + \sqrt[d]{a_d^{d-1}}x^{d-1}} = \frac{a_{d-1}}{d\sqrt[d]{a_d^{d-1}}}$$

Viết lại thành,

$$lim_{|x|\to\infty}\left(\sqrt[d]{P(x)} - a(x+b)\right) = 0$$

Điều phải chứng minh. Vào lại bài toán, nếu $(P(x), Q(x))$ là một nghiệm thì $(-P(x), Q(x))$ cũng là một nghiệm. Do đó, không mất tính tổng quát, giả sử rằng $P(x)$ có tất cả các hệ số dương. Đặt $\deg P(x) = d$ và có thể viết

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0$$

với $a_d \neq 0$. Từ $\sqrt[d]{P(Q(x))} = \sqrt[d]{P(x)^2}017$, áp dụng bổ đề vừa chứng minh trên, ta được

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[d]{a_d}\left|Q(x) + \frac{a_{d-1}}{da_d}\right| - \sqrt[d]{a_d^{2017}}\left(x + \frac{a_{d-1}}{da_d}\right)^{2017}\right) = 0$$

. Do đó,

$$Q(x) + \frac{a_{d-1}}{da_d} = \pm\sqrt[d]{a_d^{2016}}\left(x + \frac{a_{d-1}}{da_d}\right)^{2017}$$

Đặt $B = \dfrac{a_{d-1}}{da_d}$ và $A = \pm\sqrt[d]{a_d^{2016}}$, ta có thể viết điều này lại thành

$$Q(x) = A(x+B)^{2017} - B$$

Thay $Q(x)$ vào lại phương trình đầu bài, ta được

$$P(A(x+B)^{2017} - B) = P(x)^{2017}$$

Khi đó, $P(Ax^{2017}-B)=P(x-B)^{2017}$. Cho $R(X)=P(x-B)=a_dx^d+a_sx^s+....$ Khi đó $R(Ax^{2017})=R(x)^{2017}$. Ta xét hệ số của số hạng thứ hai khác không, ta thấy số hạng thứ hai của $R(Ax^{2017})$ và $R(x)^{2017}$ lần lượt là a_sx^{2017s} và $a_d^{2016}a_sx^{2016d+s}$. Từ đó, ta thấy được mâu thuẫn với sự tồn tại của s. Khi đó, $R(x)=a_dx^d$. Vậy $P(x)=a_d(x+B)^d$ và $Q(x)=A(x+B)^{2017}-B$ với $a_d\neq 0, B=\frac{a_{d-1}}{da_d}$ và $A=\pm\sqrt[d]{a_d^{2016}}$.

Bài toán 20. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$P(x-1)P(x+1)>P(x)^2-1$$

với mọi $x\in R$.

Nikolai Nikolov

Lời giải

Nếu $P(x)=c$ với c là hằng số thì phương trình đề bài trở thành $c^2>c^2-1$, điều này luôn đúng. Do đó, với mọi c là hằng số sao cho $P(x)=c$ đều thoả mãn. Ta viết lại đề bài,

$$P(x)^2-P(x-1)P(x+1)<1$$

Nếu $\deg P(x)=d>0$ và giả sử hệ số cao nhất của $P(x)$ là $a_d\neq 0$ thì $\deg(P(x)^2-P(x-1)P(x+1))=2d-2$ và hệ số cao nhất là da_d^2.

Nếu $d\geq 2$ thì $P(x)^2-P(x-1)P(x+1)$ sẽ là một đa thức khác hằng với các hệ số dương. Do đó, bất đẳng thức trên sẽ mâu thuẫn với mọi x đủ lớn.

Nếu $d=1$ thì $P(x)^2-P(x-1)P(x+1)=a_1^2$ là đa thức hằng và bất đẳng thức được viết lại thành $a_1^2<1$. Do đó, với mọi đa thức $P(x)=ax+b$ với mọi $a\in(-1,1)$ thoả mãn bài toán.

Bài Tập.

Bài toán 1. Tìm tất cả đa thức $P(x)$ với hệ số phức thoả mãn

$$P(a)+P(b)=2P(a+b)$$

Với a và b là các số phức sao cho $a^2+b^2+5ab=0$.

Titu Andreescu

Bài toán 2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$\frac{P(x)}{3x^3}+\frac{P(y^2)}{2y^2}+\frac{P(z^3)}{z}=zP\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^2}\right)+xP\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z}\right)+yP\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x^3}\right)$$

Với mọi số thực x,y,z khác 0 mà $x^3y^2z=x+2y+3z$.

Ẩn danh AZOT1

Bài toán 3. Tìm tất cả các đa thức P(x) hệ số thực thoả mãn

$$P(\sqrt{3}x)+P(\sqrt{3}y)+P(\sqrt{3}z)=P(x-y)+P(y-z)+P(z-x)$$

Với mọi x,y,z là ba số thực sao cho $x+y+z=0$.

Costa Rican MO 2008

Bài toán 4. Tìm tất cả các đa thức P(x) hệ số thực thoả mãn

$$P(x+P(x))=x^2P(x),\forall x\in R$$

Canadian MO Qualification Repechage 2021

Bài toán 5. Tìm tất cả các đa thức $a(x), b(x), c(x), d(x)$ với hệ số thực sao thoả mãn đồng thời các phương trình

$$\begin{cases} b(x)c(x)+a(x)d(x)=0 \\ a(x)c(x)+(1-x^2)b(x)d(x)=x+1 \end{cases}$$

South African MO 2021

Bài toán 6. Cho $m \neq 0$ là số nguyên. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$(x^3-mx^2+1)P(x+1)+(x^3+mx^2+1)P(x-1)=2(x^3-mx^2+1)P(x)$$

với mọi số thực x.

IMO Shorlist 2013

Bài toán 7. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thoả mãn

$$\begin{cases} |y^2-P(x)| \leq 2|x| \\ |x^2-P(x)| \leq 2|y| \end{cases}$$

với mọi số thực x, y

IMO Shorlist 2014

Bài toán 8. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho nếu

$$P(x)+P(y)+P(z)=0$$

với mọi số thực x, y, z thì $x+y+z=0$.

Bài toán 9. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực sao cho với mọi số thực x thì có bất đẳng thức sau

$$xP(x)P(1-x)+x^3+100 \geq 0$$

Czech-Slovakia MO 1995

Bài toán 9. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ khác hằng với hệ số thực thoả mãn

$$P(Q(x)^2)=P(x)Q(x)^2$$

Bài toán 10. Với mọi $m \geq 2$ và m nguyên. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ sao cho nếu $a^m+b^m=1$ thì $P(a)+P(b)=1$.

Bài toán 11. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thoả mãn

$$P(xy+yz+zx)=P(xy)+P(yz)+P(zx)+2P(x)P(y)P(z)$$

và $x+y+z=xyz$ với mọi $x, y, z \in R$

Tài liệu tham khảo

[1] Titu Andreescu, Navid Safaei, Alessandro Ventullo, *117 Polynomial Problems from the Awesome Math Summer Program*

[2] Titu Andreescu, Navid Safaei, Alessandro Ventullo, *Awesome Polynomials for Mathematics Competitions*

[3] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems From the Book*

[4] Titu Andreescu, Iurie Boreico, Oleg Mushkarov, and Nikolai Nikolov, *Topics in Functional Equations – 3rd Edition*