CHUYÊN ĐỀ 3. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

BÀI 3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC. BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Phát biểu được định lí và hệ quả của bất đẳng thức tam giác.

❖ **Kĩ năng**

+ Vận dụng được định lí và hệ quả của bất đẳng thức tam giác trong các bài toán.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

<table>
<tr>
<td>

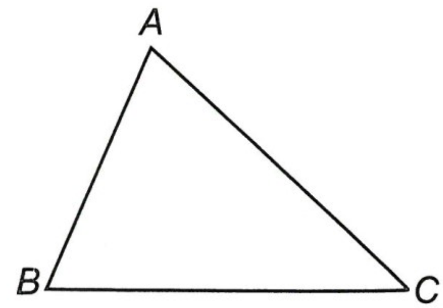
Định lí

Trong tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Hệ quả

Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

</td>
<td>



Cho ΔABC ta có các bất đẳng thức sau:

- $AB + AC > BC.$
- $AB + BC > AC.$
- $AC + BC > AB.$

$$AB - AC < BC < AB + AC.$$

</td>
</tr>
</table>

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Sử dụng điều kiện tồn tại một tam giác dựa vào yếu tố độ dài ba cạnh

Phương pháp giải

- Ba đoạn thẳng *a, b, c* lập thành một tam giác nếu

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \text{ hoặc } |b - c| < a < b + c.$$

- Trong trường hợp xác định được a là số lớn nhất trong ba số *a, b, c* thì điều kiện tồn tại tam giác chỉ cần $a < b + c$

Bước 1. Dựa vào bất đẳng thức tam giác xét các trường hợp

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \text{ hoặc } |b - c| < a < b + c.$$

Bước 2. Lựa chọn giá trị thích hợp.

Ví dụ: Cho tam giác ABC có $BC = 1cm,\ AC = 7cm.$ Tìm độ dài cạnh *AB,* biết độ dài này là một số nguyên (cm).

Hướng dẫn giải

Gọi độ dài cạnh AB là x (cm) $(x > 0)$.

Theo bất đẳng thức trong tam giác ABC, ta có

$|BC - AC| < AB < BC + AC$

$\Rightarrow |1 - 7| < x < 1 + 7 \Rightarrow 6 < x < 8.$

Vì x là số nguyên nên $x = 7.$

Vậy độ dài cạnh $AB = 7cm.$

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho tam giác ABC cân. Tính *AC, BC* biết chu vi tam giác ABC là 23 cm và $AB = 5cm.$

Hướng dẫn giải

- Nếu *AB* là cạnh bên và ΔABC cân tại *A*, ta có $AB = AC = 5cm$.

Do chu vi tam giác *ABC* bằng 23 cm nên

$BC = 23 - \left(AB + AC\right) = 23 - \left(5+5\right) = 13\left(cm\right) \Rightarrow BC - AB = 13 - 5 = 8 > 5 = AC$ hay $BC - AB > AC$

(không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác).

- Nếu *AB* là cạnh bên và ΔABC cân tại *B* ta có $AB = BC = 5cm \Rightarrow AC = 13cm$.

Lại có $AC - AB > BC$ $\left(13 - 5 > 5\right)$ (không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác).

- Nếu *AB* là cạnh đáy thì ΔABC cân tại *C*.

Suy ra $AC = BC = \left(23-5\right):2 = 9\left(cm\right)$ (thỏa mãn bất đẳng thức tam giác).

Vậy $AC = BC = 9\left(cm\right)$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Bộ ba độ dài sau đây có thể là ba cạnh của một tam giác?

a) 3cm; 4cm; 5cm. b) 2m; 3m; 6m.

Câu 2: Cho tam giác *MNP* với hai cạnh $MN = 1cm,\ NP = 3cm.$ Hãy tìm độ dài cạnh *MP*, biết rằng độ dài này là một số nguyên (cm). Tam giác *MNP* là tam giác gì?

Câu 3: Tính chu vi của tam giác cân *ABC* biết

a) $AB = 7cm,\ AC = 13cm.$ b) $AB = 5m,\ AC = 12m.$

Dạng 2: Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài

Phương pháp giải

- Sử dụng bất đẳng thức tam giác và các biến đổi về bất đẳng thức.

- Cộng cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

- Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều

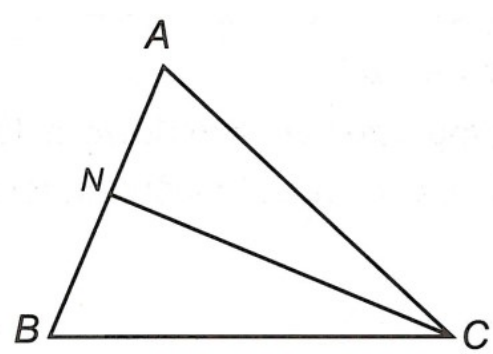
$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c < b + d.$$

Ví dụ: Cho tam giác *ABC*, điểm *N* thuộc cạnh *AB*.

a) So sánh *NC* với $AN + AC$.

b) Chứng minh $NB + NC < AB + AC$.

Hướng dẫn giải



a) Xét ΔANC, ta có

$NC < AN + AC$ (bất đẳng thức tam giác).

b) Theo câu a) ta có

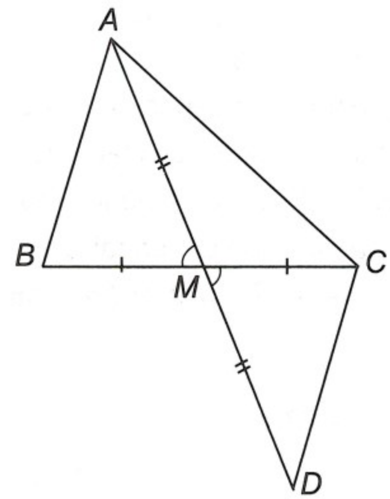
$NC < AN + AC \Rightarrow NB + NC < NB + AN + AC$

$\Rightarrow NB + NC < AB + AC$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho ΔABC có M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\left|\dfrac{AB - AC}{2}\right| < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

Hướng dẫn giải



Trên tia AM lấy điểm D sao cho $AM = MD$.

Xét ΔAMB và ΔDMC có

$AM = MD$; $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh); $BM = MC$ (giả thiết).

Do đó $\Delta AMB = \Delta DMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = DC$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔACD có

$|DC - AC| < AD < AC + DC$ (bất đẳng thức tam giác).

Do $AB = DC$ (chứng minh trên); $AD = 2AM$ nên ta có

$|AB - AC| < 2AM < AB + AC$.

Vậy $\left|\dfrac{AB - AC}{2}\right| < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tam giác OBC cân tại O. Trên tia đối của tia CO lấy điểm A. Chứng minh $AB > AC$.

Câu 2: Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn, trên Ox lấy hai điểm A và B (điểm A nằm giữa hai điểm O và B). Trên Oy lấy hai điểm C và D (điểm C nằm giữa O và D). Chứng minh $AB + CD < AD + BC$.

Câu 3: Cho tam giác ABC, điểm M bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh

$MA + MB + MC > \dfrac{AB + BC + CA}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có $(AB < AC)$ và AD là phân giác góc A $(D \in BC)$. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc cạnh AD (E khác A). Chứng minh $AC - AB > EC - EB$.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $AC = 4$. Gọi I là trung điểm của AC, d là đường trung trực của đoạn AC và điểm M tùy ý trên d.

a) Chứng minh rằng $MA + MB \geq 5$.

b) Xác định vị trí của M để tổng $MA + MB$ nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 6: Cho hai điểm A và B nằm về hai phía của đường thẳng d. Tìm điểm C thuộc đường thẳng d sao cho tổng $AC+CB$ là nhỏ nhất.

Câu 7: Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng về một phía của d và AB không song song với d. Một điểm H di động trên d. Tìm vị trí của H sao cho $\left|HA-HB\right|$ là lớn nhất.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BẢI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Điều kiện tồn tại một tam giác dựa vào yếu tố độ dài ba cạnh

Câu 1.

a) 3cm; 4cm; 5cm.

Xét bộ ba cạnh: 3cm; 4cm; 5cm.

Ta có 5cm là số lớn nhất mà $3+4>5$ (thỏa mãn) nên bộ ba cạnh 3cm; 4cm; 5cm. lập thành một tam giác.

b) 2m; 3m; 6m.

Xét bộ ba cạnh: 2m; 3m; 6m.

Ta có 6m là số lớn nhất mà $2+3<6$ (không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác) nên bộ ba cạnh 2m; 3m; 6m không lập thành một tam giác.

Câu 2.

Gọi độ dài cạnh MP là x (cm) $\left(x>0\right)$.

Theo bất đẳng thức trong tam giác MNP ta có

$\left|MN-NP\right|<MP<MN+NP$

$\left|1-3\right|<x<1+3 \Leftrightarrow 2<x<4.$

Vì x là số nguyên nên $x=3$.

Vậy độ dài cạnh $MP=3cm$.

Ta có $MP=NP=3cm$ nên ΔMNP cân tại P.

Câu 3.

a) Gọi độ dài cạnh BC là x (cm) $\left(x>0\right)$.

Xét ABC ta có

$\left|AB-AC\right|<BC<AB+AC$ (bất đẳng thức tam giác)

$\Leftrightarrow \left|7-13\right|<x<7+13 \Leftrightarrow 6<x<20.$

Tam giác ABC là tam giác cân $\Rightarrow BC=7cm$ hoặc $BC=13cm$.

- Nếu $BC=7cm$ thì chu vi tam giác ABC là $AB+AC+BC=7+13+7=27\left(cm\right)$.

- Nếu $BC=13cm$ thì chu vi tam giác ABC $AB+AC+BC=7+13+13=33\left(cm\right)$.

b) Gọi độ dài cạnh BC là x (cm) $\left(x>0\right)$.

Xét ABC ta có

$\left|AB-AC\right| < BC < AB+AC$ (bất đẳng thức tam giác) $\Rightarrow \left|5-12\right| < x < 5+12 \Leftrightarrow 7 < x < 17.$

Tam giác ABC là tam giác cân nên $BC = 12cm.$

Chu vi tam giác ABC là $AB+AC+BC = 5+12+12 = 29\left(cm\right).$

Dạng 2. Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài

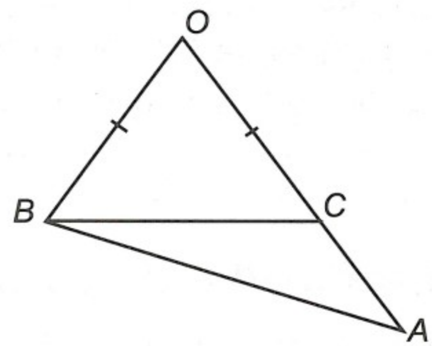
Câu 1.

Xét tam giác OBA có

$AO - OB < AB$ (bất đẳng thức tam giác)

$\Rightarrow AC + OC - OB < AB.$

Lại có $OB = OC$ (ΔOBC cân tại O) $\Rightarrow AC < AB$ (điều phải chứng minh).



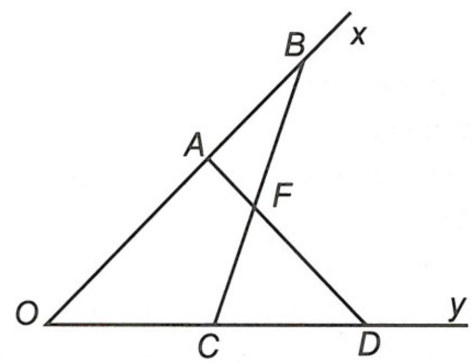
Câu 2.

Gọi F là giao điểm của AD và BC.

Xét $\Delta AFB,$ ta có $AB < AF + FB$ (bất đẳng thức tam giác). $\left(1\right)$

Xét $\Delta CFD,$ ta có $CD < CF + FD$ (bất đẳng thức tam giác). $\left(2\right)$

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ có $AB + CD < AF + FB + CF + FD = AD + BC$ hay $AB + CD < AD + BC.$ (điều phải chứng minh).



Câu 3.

Xét $\Delta AMB,$ ta có

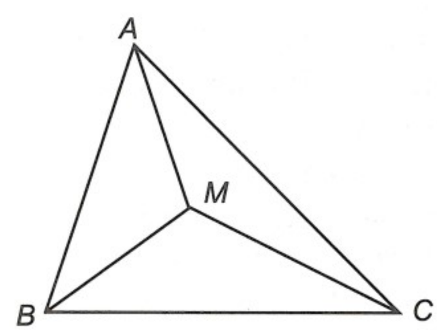
$MA + MB > AB$ (bất đẳng thức tam giác). $\left(1\right)$

Xét $\Delta AMC,$ ta có

$MA + MC > AC$ (bất đẳng thức tam giác). $\left(2\right)$

Xét $\Delta BMC,$ ta có

$MB + MC > BC$ (bất đẳng thức tam giác). $\left(3\right)$



Cộng từng vế $\left(1\right),\left(2\right)$ và $\left(3\right)$ ta được

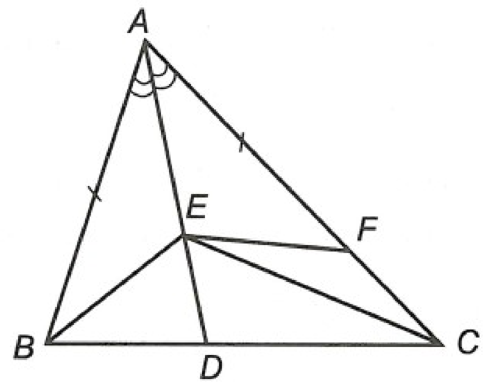
$MA + MB + MA + MC + MB + MC = AB + AC + BC$

$\Rightarrow 2\left(MA + MB + MC\right) > AB + AC + BC.$

Vậy $MA+MB+MC=\dfrac{AB+AC+BC}{2}$ (điều phải chứng minh).

Câu 4.

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AF=AB$.



Xét ΔABE và ΔAFE có $AB=AF$ (cách vẽ); $\widehat{BAE}=\widehat{FAE}$ (giả thiết); AE chung.

Do đó $\Delta ABE=\Delta AFE$ (c.g.c) $\Rightarrow BE=EF$. (hai cạnh tương ứng)

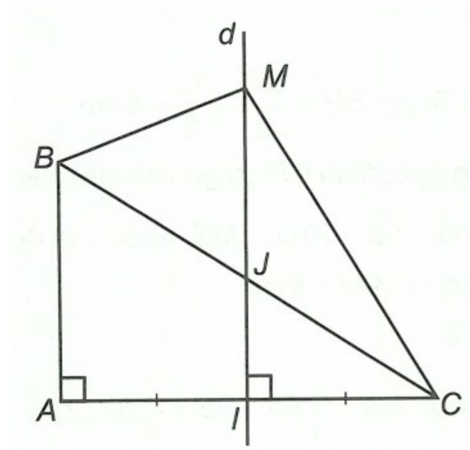
Xét ΔEFC có $FC>EC-EF$ (bất đẳng thức tam giác).

Mà $BE=EF$ nên $FC>EC-EB.\ (1)$

Lại có $FC=AC-AF$ mà $AF=AB$ nên $FC=AC-AB.\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AC-AB>EC-EB$.

Câu 5.



a) Xét ΔABC vuông tại A, ta có

$AB^2+AC^2=BC^2$ (định lí Pi-ta-go)

$\Rightarrow 3^2+4^2=BC^2$

$\Rightarrow 5^2=BC^2 \Rightarrow BC=5$.

Xét ΔAMI và ΔCMI có

$\widehat{MIA}=\widehat{MIC}=90^\circ$ (MI là trung trực của AC); $AI=CI$ (giả thiết); MI là cạnh chung.

Do đó $\Delta AMI=\Delta CIM$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow MA=MC$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow MA+MB=MC+MB$.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác trong ΔBMC, ta có

$MB+MC\ge BC=5\Rightarrow MA+MB\ge 5$.

b) Vì $MA+MB\ge 5$ (chứng minh trên) nên $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA+MB=BC$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi M nằm trên đoạn BC

$\Rightarrow M\equiv J$, với J là giao điểm của d và BC.

Câu 6.

Giả sử C là giao điểm của đoạn thẳng AB với đường thẳng d.

Vì C nằm giữa A và B nên ta có $AC+CB=AB.\ (1)$

Lấy điểm C' bất kỳ trên d $(C'\neq C)$.

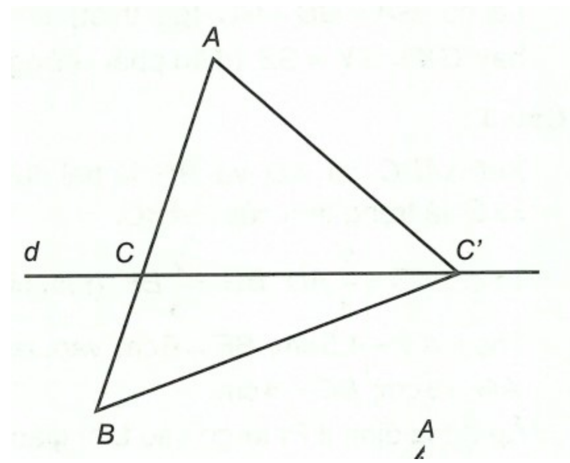
Nối AC', BC'.

Sử dụng bất đẳng thức tam giác vào $\Delta ABC',$ ta có

$$AC'+BC'>AB.\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC'+BC'>AC+CB.$

Vậy C là điểm cần tìm.



Câu 7.

Vì AB không song song với d nên AB cắt d tại I.

Với điểm H bất kì thuộc d mà H không trùng với I thì ta có tam giác HAB.

Xét tam giác HAB có $\left|HA-HB\right|<AB.$

Khi $H\equiv I$ thì $\left|HA-HB\right|=AB.$

Vậy $\left|HA-HB\right|$ lớn nhất là bằng AB, khi đó $H\equiv I$ là giao điểm của hai đường thẳng d và AB.