

CHUYÊN ĐỀ 3. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.
CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC
BÀI 2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN,
ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Phân biệt được đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu.
- + Phát biểu được quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu.

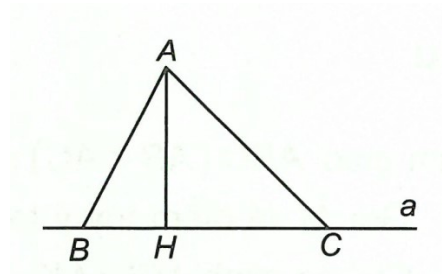
❖ **Kĩ năng**

- + Vận dụng được mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu trong bài tập.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Định lý 1: Trong các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.



Trong hình vẽ

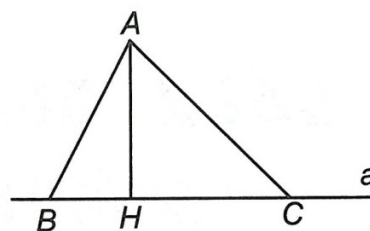
$$AH \perp a \Rightarrow AH < AB, AH < AC.$$

Quan hệ giữa các đường xiên và hình chiếu của chúng

Định lý 2: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau

và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.



Trong hình vẽ

$$AH \perp a, HC > HB \Rightarrow AC > AB.$$

$$AH \perp a, AC > AB \Rightarrow HC > HB.$$

$$AB = AC \Leftrightarrow HB = HC.$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: So sánh hai đường xiên hoặc hai hình chiếu

Phương pháp giải

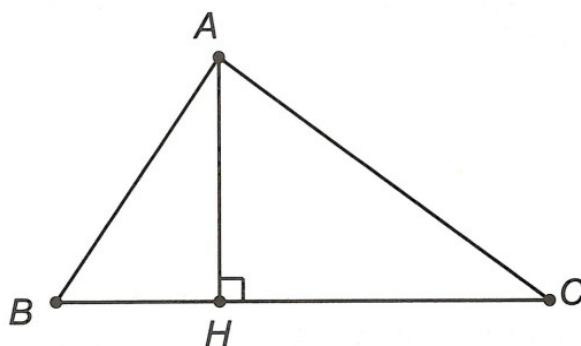
- **Định lý:** Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

- Thực hiện theo hai bước

Bước 1. Xác định xem hai đoạn thẳng cần so sánh là đường xiên hay hình chiếu của đường xiên lên đường thẳng.

Ví dụ: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường cao AH . So sánh HB và HC .



Hướng dẫn giải

Ta có $AH \perp BC$ nên AH là đường vuông góc còn AB và AC là các đường xiên và BH , CH tương ứng là hình chiếu của AB , AC lên đường thẳng BC .

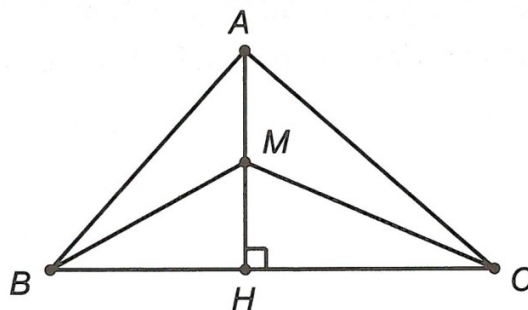
+ Nếu là đường xiên thì cần so sánh hai hình chiếu của chúng (dựa vào giả thiết bài toán).

+ Nếu là hình chiếu của hai đường xiên thì cần so sánh hai đường xiên (dựa vào giả thiết bài toán).

Bước 2. So sánh hai đoạn thẳng dựa vào định lý Vì $AB < AC$ nên $HB < HC$.
đường xiên – hình chiếu.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi M là điểm tùy ý trên đoạn thẳng AH . Chứng minh $MB < MC$.



Hướng dẫn giải

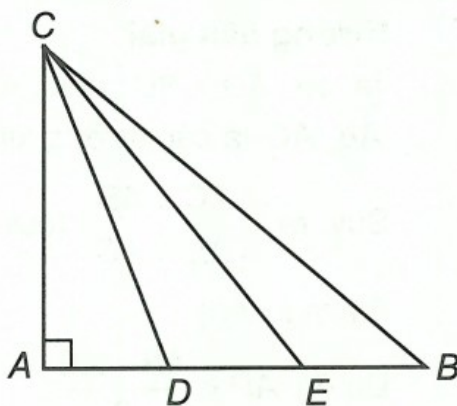
Ta có BH, CH tương ứng là hình chiếu của hai đường xiên AB, AC trên đường thẳng BC .

Vì $AB < AC$ nên $BH < CH$.

Mặt khác BH, CH tương ứng là hình chiếu của hai đường xiên BM, CM lên đường thẳng BC .

Do $BH < CH$ nên $BM < CM$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh AB lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EB$. Chứng minh rằng $CA < CD < CE < CB$.



Hướng dẫn giải

Xét trên cạnh AB , ta có $AD = DE = EB \Rightarrow AD < AE < AB$.

Vì $CA \perp AB$ nên AD, AE, AB tương ứng là hình chiếu của các đường xiên CD, CE, CB lên đường thẳng AB .

Do $AD < AE < AB$ nên $CD < CE < CB$. (1)

Mặt khác $CA < CD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CA < CD < CE < CB$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho tam giác ABC có $AB > AC$, kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). So sánh BH và CH .

Câu 2: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường cao AH , $H \in BC$. Lấy điểm K bất kì thuộc AH ($K \neq H$).

a) Chứng minh rằng $HB < HC$.

b) $BK < CK$.

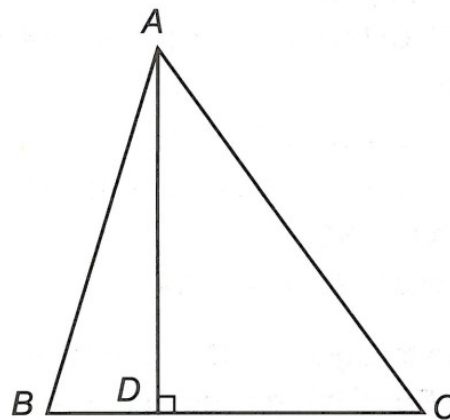
Dạng 2: Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Phương pháp giải

Sử dụng định lí: “Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên kẻ từ một điểm đến cùng một đường thẳng”.

Ví dụ: Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ đường cao AD vuông góc với BC ($D \in BC$).

Chứng minh rằng $AD < \frac{AB + AC}{2}$.



Hướng dẫn giải

Ta có $AD \perp BC$ nên AD là đường vuông góc; AB , AC là các đường xiên.

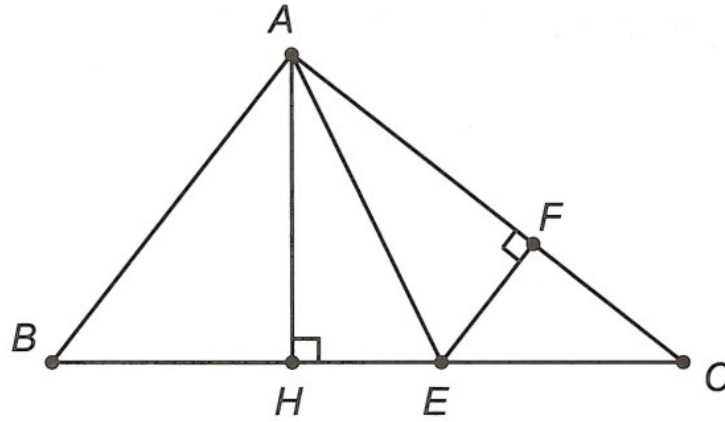
Suy ra $\begin{cases} AD < AB \\ AD < AC \end{cases}$ (đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên).

Do đó $AD < \frac{AB + AC}{2}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Chứng minh rằng

$$AH + \frac{BC}{2} < AB + AC < AH + BC.$$



Hướng dẫn giải

Ta có $AB > AH$, $AC > AH$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)

$$\Rightarrow AB + AC > AH + AH \text{ hay } AB + AC > 2AH. \quad (1)$$

Ta cũng có $AB > BH$, $AC > CH$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc)

$$\Rightarrow AB + AC > BH + CH \text{ hay } AB + AC > BC. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } 2(AB + AC) > 2AH + BC \Rightarrow AB + AC > AH + \frac{BC}{2}. \quad (*)$$

Kẻ EF vuông góc với AC tại F .

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE \Rightarrow \triangle ABE$ cân ở B

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BEA}.$$

Mặt khác $\widehat{BAE} = \widehat{AEF}$ (cùng phụ với $\widehat{EAF}$) nên $\widehat{BEA} = \widehat{AEF}$

$$\Rightarrow \triangle AHE = \triangle AFE \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AH = AF \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

$$\text{Do đó } BC + AH = BE + EC + AH = BA + EC + AF.$$

Vì $EC > CF$ (đường xiên lớn hơn đường vuông góc) nên

$$BC + AH > BA + CF + AF \text{ hay } BC + AH > BA + AC \quad (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Kẻ AH vuông góc với BC . Trên đoạn thẳng AH lấy điểm M . Chứng minh rằng

a) $AH < \frac{AB + AC}{2}$.

b) $BM < CM$.

Câu 2: Cho tam giác ABC , điểm D nằm giữa B và C . Gọi H, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ D xuống các đường thẳng AB, AC . So sánh BC và tổng $DH + DK$.

Câu 3: Cho tam giác ABC , D là điểm nằm giữa B và C (AD không vuông góc với BC). Gọi H, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C xuống đoạn thẳng AD . Chứng minh rằng:

a) $AB + AC > BH + CK$.

b) $BH + CK > BC$.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , Bm là tia phân giác của góc B cắt AC tại D . Tại C kẻ $Cn \perp AC$ (AB và Cn thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là AC), Cn cắt Bm tại E . So sánh chu vi tam giác ABD và chu vi tam giác CDE .

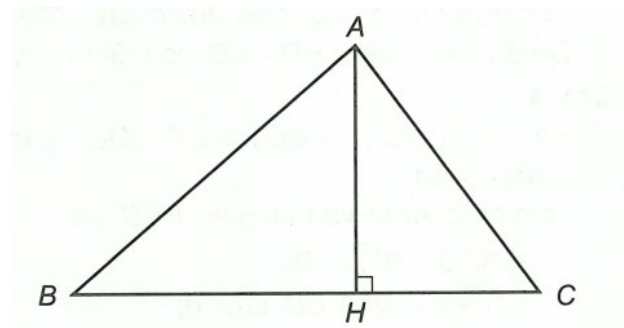
ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. So sánh hai đường xiên hoặc hai hình chiếu

Câu 1.

Ta có BH là hình chiếu của đường xiên AB lên đường thẳng BC và CH là hình chiếu của đường xiên AC lên đường thẳng BC .

Do $AB > AC$ nên $BH > CH$.



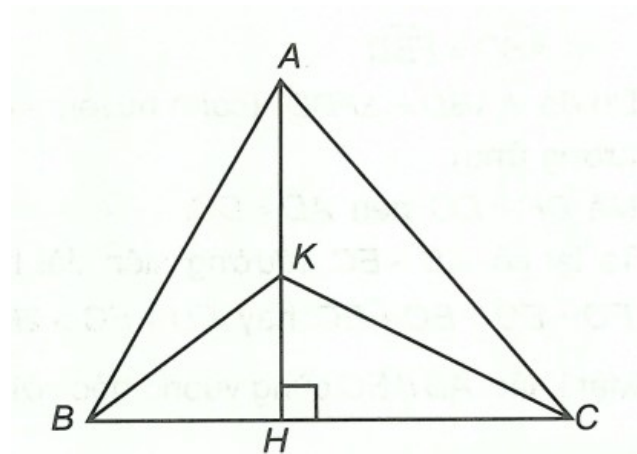
Câu 2.

a) Ta có AB, AC là các đường xiên và BH, CH tương ứng là hình chiếu của AB, AC lên đường thẳng BC .

Vì $AB < AC$ nên $BH < CH$ (đường xiên bé hơn thì hình chiếu bé hơn).

b) Ta có BH, CH lần lượt là hình chiếu của BK, CK lên BC .

Vì $BH < CH$ nên $BK < CK$.



Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Câu 1.

a) Ta có $AH \perp BC \Rightarrow AH$ là đường vuông góc còn AB là đường xiên $\Rightarrow AH < AB$. (1)

Lập luận tương tự AC là đường xiên còn AH là đường vuông góc $\Rightarrow AH < AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH + AH < AB + AC$

$$\Rightarrow AH < \frac{AB + AC}{2}.$$

b) Ta có BH và CH tương ứng là hình chiếu của đường xiên AB và AC lên đường thẳng BC .

Vì $AB < AC$ nên $BH < CH$.

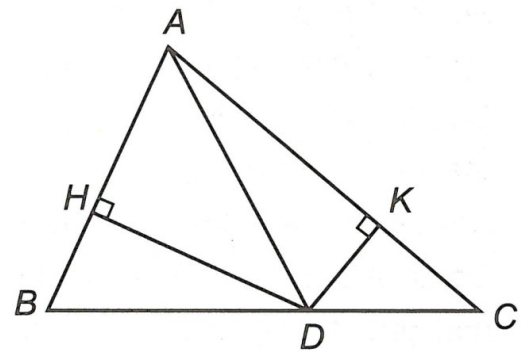
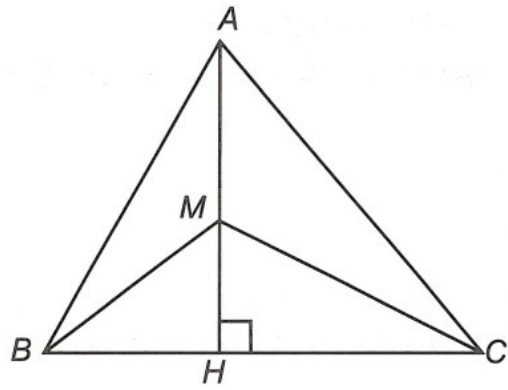
Mặt khác BH và CH là hình chiếu của đường xiên MB và MC trên BC và $BH < CH$ nên $MB < MC$.

Câu 2.

Ta có $DH < BD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên);

$DK < DC$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên);

Suy ra $DH + DK < BD + DC$ hay $DH + DK < BC$.



Câu 3.

a) Xét tam giác ABH có AB là đường xiên, BH là đường vuông góc

$$\Rightarrow AB > BH.$$

Xét tam giác AKC có AC là đường xiên, CK là đường vuông góc

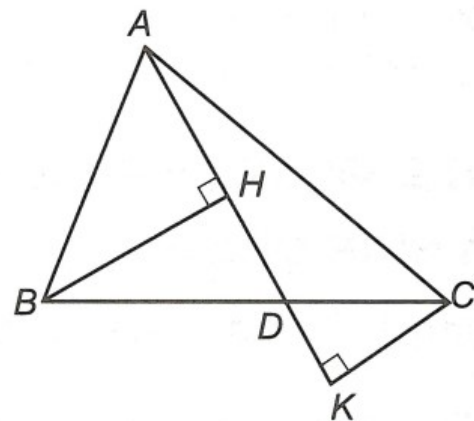
$$\Rightarrow AC > CK.$$

Do đó $AB + AC > BH + CK$.

b) Xét tam giác BHD có BH là đường vuông góc và BD là đường xiên nên $BH < BD$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

Tương tự ta chứng minh được $CK < CD$.

Do đó $BH + CK < BD + CD$ hay $BH + CK < BC$.



Câu 4.

Kẻ $DF \perp BC$ ($F \in BC$) $\Rightarrow DF < DC$ (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên).

Tam giác ABD và tam giác FBD có

$$+ \widehat{BAD} = \widehat{BFD} = 90^\circ;$$

+ Cạnh huyền BD chung;

$$+ \widehat{ABD} = \widehat{FBD}.$$

Do đó $\triangle ABD = \triangle FBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AD = FD$. (hai cạnh tương ứng)

Mà $DF < DC$ nên $AD < DC$.

Ta lại có $ED > EC$ (đường xiên dài hơn đường vuông góc). Do đó

$$ED + EC > EC + EC \text{ hay}$$

$$ED + EC > 2EC \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CED}. \quad (1)$$

Mặt khác $AB \parallel EC$ cùng vuông góc với AC (2 góc so le trong).

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ (BD là tia phân giác góc ABC) nên

$$\widehat{CED} = \widehat{CBE} \Rightarrow \triangle BCE \text{ cân ở } C \Rightarrow CB = CE. \quad (2)$$

Lại có $CA > AD \Rightarrow BC > BD$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn). (3)

Từ $(1), (2), (3)$ suy ra

$$ED + EC > 2EC = 2BC > 2BD. \quad (4)$$

$$\text{Vì } BD > BA \text{ nên } 2BD > BD + BA. \quad (5)$$

Từ $(4), (5)$ suy ra $ED + EC > BD + BA$.

Lại có $DC > AD$ (chứng minh trên).

Suy ra $ED + EC + DC > BD + BA + AD$ hay chu vi tam giác DCE lớn hơn chu vi tam giác ABD .

