
CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 6: SỐ NGUYÊN

Chuyên đề 1. TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

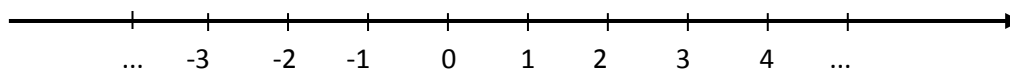
1. Kiến thức cơ bản

a) Tập hợp các số nguyên:

Tập hợp $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ gồm có số 0, các số 1; 2; 3; ... (số nguyên dương) và các số -1; -2; -3; ... (số nguyên âm) được gọi là tập hợp các số nguyên, kí hiệu là $\mathbb{Z}$.

Nhận xét: Mọi số tự nhiên đều là số nguyên hay $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

b) Trục số nguyên:



Điểm biểu diễn số nguyên a trên trục gọi là điểm a .

c) Số đối:

Trên trục số, hai điểm -2 và 2 cách đều điểm gốc 0 về hai phía. Ta nói -2 và 2 là hai số đối nhau. Số đối của a kí hiệu là $-a$.

d) Thứ tự trong $\mathbb{Z}$:

Trên trục số, điểm a nằm bên trái điểm b thì $a < b$ hay $b > a$.

Ta luôn có: Số nguyên âm $< 0 <$ số nguyên dương.

Với hai số nguyên a, b bất kì ta luôn có hoặc $a < b$, hoặc $a = b$, hoặc $a > b$.

Nếu a lớn hơn b hoặc $a = b$ thì ta viết $a \geq b$.

Với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu).

e) Giá trị tuyệt đối của số nguyên a , kí hiệu là $|a|$, là khoảng cách từ điểm a đến gốc 0.

• Nếu $a = 0$ thì $|a| = 0$.

• Nếu $a > 0$ thì $|a| = a$.

• Nếu $a < 0$ thì $|a| = -a$.

Nhận xét: Với mọi $a \in \mathbb{Z}$, ta có: $|a| \geq 0$.

$$|-a| = |a|.$$

2. Nâng cao

a) Khi ta nói $x < -2$ hoặc $x > 3$ thì ta viết $\begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$

còn khi nói $x > -1$ và $x \leq 4$ thì ta viết $\begin{cases} x > -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$.

b) Với $a \geq 0$ và $|x| = a$ thì ta suy ra $x = a$ hoặc $x = -a$.

c) Với $a \in \mathbb{Z}$ và $|x| = |a|$ thì suy ra $x = a$ hoặc $x = -a$.

d) Nếu $a < b < 0$ thì $|a| > |b|$.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tập hợp $A = \{-3; 2; 0 - 1; 5; 7\}$.

- Viết tập hợp B gồm các phần tử là số đối của các phần tử trong tập hợp A.
- Viết tập C gồm các phần tử thuộc tập hợp A và là số dương.
- Xác định quan hệ giữa các tập hợp A, C, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$.

Giải

a) Số đối của số -3 là 3; của số 2 là -2; của số 0 là 0; ...

$$\text{Vậy } B = \{3; -2; 0; 1; -5; -7\}.$$

b) Có 3 phần tử của tập hợp A là số nguyên dương, đó là: 2; 5; 7.

$$\text{Vậy } C = \{2; 5; 7\}.$$

c) Ta có: $C \subset A \subset \mathbb{Z}$ và $C \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$.

Nhận xét: Số đối của $-a$ là a . Vậy số đối của $-a$ lại là a , tức là: $-(-a) = a$.

$\mathbb{N}^*$ là tập hợp các số nguyên dương. Ta kí hiệu: $\mathbb{Z}^*$ là tập hợp các số nguyên khác 0, $\mathbb{Z}_+$ là tập hợp các số nguyên không âm (lớn hơn hoặc bằng 0), $\mathbb{Z}_-$ là tập hợp các số

nguyên không dương (nhỏ hơn hoặc bằng 0) $\Rightarrow \mathbb{Z}_+^*$ là tập hợp các số nguyên dương.
Vậy $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2. Khẳng định sau là đúng hay sai? Nếu $a > b$ thì $|a| > |b|$.

Giải

Khẳng định “Nếu $a > b$ thì $|a| > |b|$ ” là sai.

Chẳng hạn: Với $a = 3$; $b = -7$ thì $a > b$, tuy nhiên, vì $|a| = 3$; $|b| = |-7| = 7$ nên $|a| < |b|$.

Nhận xét: Để chứng tỏ một khẳng định nào đó là sai, ta chỉ cần đưa ra một ví dụ cụ thể nào đó mà khẳng định sai. Ví dụ như thế được gọi là phản ví dụ.

Ví dụ 3: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x| + |-3| = 5$.

b) $|x| + |y| = 1$.

Giải

a) Ta có: $|-3| = 3$.

Do đó: $|x| + 3 = 5 \Rightarrow |x| = 5 - 3 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$.

Đôi khi ta viết gộp là: $x = \pm 2$.

b) Vì $|x| \geq 0$ và $|y| \geq 0$ nên ta có hai trường hợp:

- $|x| = 1$ và $|y| = 0$:

Ta có: $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

$$|y| = 0 \Rightarrow y = 0.$$

- $|x| = 0$ và $|y| = 1$:

Ta có: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

$$|y| = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ hoặc } y = -1.$$

Vậy bài toán trên có bốn đáp số sau đây:

2.2. Khẳng định sau đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.” Nếu $a \in \mathbb{Z}$ thì $|a| \in \mathbb{N}^*$ “.

2.3. Tìm các giá trị thích hợp của chữ số a sao cho:

a) $\overline{a00} > 801$. b) $-560 < \overline{-56a}$. c) $\overline{-a99} > -649 > \overline{-6a0}$.

2.4. Hãy viết số nguyên âm:

- a) Nhỏ nhất có một chữ số.
- b) Lớn nhất có một chữ số.
- c) Nhỏ nhất có 10 chữ số khác nhau.
- d) Lớn nhất có 10 chữ số khác nhau.

2.5. Chứng tỏ rằng: Với mọi số nguyên a , ta đều có: $|a| \geq a$.

2.6. Chứng tỏ rằng: Với $a \in \mathbb{N}$ và $|x| = a$ thì suy ra $x = a$ hoặc $x = -a$.

2.7. Chứng tỏ rằng: Với $a \in \mathbb{N}$ và $|x| = |a|$ thì suy ra $x = a$ hoặc $x = -a$.

2.8. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x| + |-23| = | +17|$.

b) $|-5| \cdot |x| = |-20|$.

2.9. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x| = |-14|$ và $x > 0$.

b) $|x| = |23|$ và $x < 0$.

2.10. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x| < -5$.

b) $12 \leq |x| < 15$.

2.11. Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 7\}; B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x < 7\}; C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 5\} .$$

Hãy tìm các tập hợp: $A \cap B$; $B \cap C$; $C \cap A$.

2.12. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x| + |y| = 0$;

b) $|x| + |y| = 2$.

2.13. Cho $x \in \mathbb{Z}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x| + 7$.

2.14. Cho $x \in \mathbb{Z}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = 9 - |x|$.

Chuyên đề 2. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ CÁC SỐ NGUYÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

a) Để cộng hai số nguyên cùng dấu, ta cộng hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt trước kết quả dấu của chúng.

b) Cộng hai số nguyên khác dấu:

Nếu hai số đối nhau thì tổng của chúng bằng 0.

Nếu hai số không đối nhau thì ta tính hiệu hai giá trị tuyệt đối (số lớn trừ số nhỏ) và đặt trước kết quả dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

c) Hiệu của hai số nguyên a và b là tổng của a với số đối của b : $a - b = a + (-b)$.

d) Tính chất của phép cộng số nguyên: Với mọi số nguyên a, b và c , ta có:

• Tính chất giao hoán: $a + b = b + a$.

• Tính chất kết hợp: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

• Cộng với số 0: $a + 0 = 0 + a = a$.

• Cộng với số đối: $a + (-a) = 0$.

2. Nâng cao

a) Với hai số nguyên a và b , ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$; $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$.

b) Giá trị tuyệt đối của một tổng hai số nguyên nhỏ hơn hoặc bằng tổng các giá trị tuyệt đối của chúng: $|a + b| \leq |a| + |b|$, với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$ và $|a + b| = |a| + |b|$ khi và chỉ khi a và b cùng dấu hoặc khi $a = 0$, hoặc khi $b = 0$.

c) Giá trị tuyệt đối của một hiệu hai số nguyên lớn hơn hoặc bằng hiệu các giá trị tuyệt đối của chúng: $|a - b| \geq |a| - |b|$, với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$ và $|a - b| = |a| - |b|$ khi và chỉ khi $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq 0$.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Chứng minh các tính chất

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng $a - b$ và $b - a$ là hai số đối nhau.

Giải

Để chứng minh $a - b$ và $b - a$ là hai số đối nhau ta chứng minh tổng của chúng bằng 0.

Thật vậy: $(a - b) + (b - a) = [a + (-b)] + [b + (-a)] = [a + (-a)] + [b + (-b)] = 0$.

Vậy $a - b$ và $b - a$ là hai số đối nhau.

Nhận xét: Từ kết quả trên ta suy ra: $-(a - b) = b - a$ và $|a - b| = |b - a|$.

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng: Số đối của một tổng hai số bằng tổng hai số đối của chúng.

Giải

Xét hai số nguyên a, b . Số đối của tổng a và b là: $-(a + b)$ và tổng hai số đối của chúng là: $(-a) + (-b)$.

Để chứng minh $(-a) + (-b)$ là số đối của $a + b$, ta chứng minh tổng của chúng bằng 0.

Thật vậy: $[(-a) + (-b)] + [a + b] = [a + (-a)] + [b + (-b)] = 0$.

Vậy: $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Nhận xét: Tương tự ta cũng có: Số đối của một hiệu hai số bằng hiệu hai số đối của chúng. Tức là: $-(a - b) = (-a) - (-b)$.

Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức

Ví dụ 3. Tính hợp lí: $P = (-123) + 77 + (-257) + 23 - 43$.

Giải

Ta có: $P = (-123) + 77 + (-257) + 23 + (-43)$.

Cách 1:

$$\begin{aligned} P &= [(-123) + (-257) + (-43)] + [77 + 23] \\ &= (-423) + 100 = -323. \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} P &= [(-123) + 23] + [(-257) + (-43)] + 77 \\ &= (-100) + (-300) + 77 \\ &= (-400) + 77 = -323. \end{aligned}$$

Nhận xét:

- Việc chuyển từ phép trừ về phép cộng là để ta có thể áp dụng các tính chất của phép cộng như giao hoán, kết hợp. Điều này giúp ta tính toán thuận lợi hơn.

- Ở cách 1, ta đã cộng các số cùng dấu với nhau trước. Cách này có ưu điểm là hạn chế việc nhầm dấu.
- Ở cách 2, ta kết hợp từng nhóm có tổng là các số tròn trăm. Cách này có ưu điểm là có thể nhầm ra kết quả.

Ví dụ 4. Tính hợp lý : $Q = 48 + |48 - 174| + (-74)$.

Giải

Cách 1:

$$Q = 48 + |-126| + (-74) = 48 + 126 - 74 = 100.$$

Cách 2:

$$\text{Vì } 48 - 174 < 0 \text{ nên } |48 - 174| = -(48 - 174) = 174 - 48.$$

Do đó:

$$Q = 48 + 174 - 48 + (-74) = (48 - 48) + (174 - 74) = 0 + 100 = 100.$$

Nhận xét: Trong cách 2, ta đã sử dụng tính chất đã chứng minh ở trên để bỏ dấu ngoặc. Sau khi bỏ dấu giá trị tuyệt đối, ta kết hợp thành từng nhóm có kết quả là số trong trăm. Dùng cách này ta có thể nhầm được kết quả.

Dạng 3. Tìm số chưa biết

Ví dụ 5. Tìm chữ số a, biết: $(-\overline{a5}) + (-85) = -150$.

Giải

Áp dụng quy tắc cộng hai số nguyên cùng dấu, ta có:

$$(-\overline{a5}) + (-85) = -(\overline{a5} + 85)$$

$$\text{Suy ra: } -(\overline{a5} + 85) = -150 \text{ hay } \overline{a5} + 85 = 150 \Rightarrow \overline{a5} = 150 - 85 = 65.$$

Vậy $a = 6$.

Ví dụ 6. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x - 1| + (-3) = 17$

b) $|-x| - (-4) = 3$.

Giải

a) Ta có: $|x - 1| + (-3) = 17$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = 17 - (-3)$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = 17 + 3 = 20$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm 20$$

Ta có hai trường hợp:

- Nếu $x - 1 = 20$ thì $x = 20 + 1 = 21$
- Nếu $x - 1 = -20$ thì $x = (-20) + 1 = -19$.

Vậy $x \in \{21; -19\}$.

b) Ta có: $|-x| - (-4) = 3$

$$\Leftrightarrow |-x| = 3 + (-4)$$

$$\Leftrightarrow |-x| = -1$$

Vì $|-x| \geq 0$ và $-1 < 0$ nên không có giá trị nào của x để $|-x| = -1$.

Ví dụ 7. Cho x và y là hai số nguyên cùng dấu thỏa mãn $|x| + |y| = 12$. Tính

$x + y$ **Giải**

Vì x và y cùng dấu nên ta có: $|x| + |y| = |x + y|$.

Do đó: $|x + y| = 12$.

Vì $12 > 0$ nên ta có hai trường hợp: $x + y = 12$ và $x + y = -12$.

Vậy $x + y = \pm 12$.

Nhận xét:

Vì x và y cùng dấu nên ta có thể chia làm hai trường hợp:

- x và y cùng dương: Khi đó: $|x| = x$, $|y| = y$ và do đó ta có $x + y = 12$.
- x và y cùng âm: Khi đó: $|x| = -x$, $|y| = -y$ và do đó ta có $(-x) + (-y) = 12$.

Vì $(-x) + (-y) = -(x + y)$, nên $-(x + y) = 12$. Tức là số đối của $x + y$ bằng 12. Suy ra $x + y = -12$.

Vậy $x + y = \pm 12$.

III. BÀI TẬP

2.15. Tính hợp lí:

a) $(-57) + (-159) + 47 + 169.$

b) $-2012 + (-596) + (-201) + (+496) + 301.$

2.16. Tìm giá trị của biểu thức:

a) $x + (-37)$, biết $x = -13.$

b) $|x| + (-78)$, biết $x = -86.$

2.17. Tính $x - y$, biết rằng: $|x| = 20$ và $|y| = 12$.

2.18. Tính tổng các số nguyên x , biết rằng:

a) $-15 \leq x < 17.$

b) $|x| < 35.$

2.19. Tìm chữ số a , biết rằng:

a) $37 + (\overline{-5a}) = -20$

b) $(\overline{-a9}) + 45 = 26.$

2.20. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $x + (-45) = (-62) + 17$

b) $x + 29 = |-43| + (-43)$

2.21. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết rằng:

a) $x + 23$ là số nguyên âm lớn nhất

b) $x + 99$ là số nguyên âm nhỏ nhất có hai chữ số

2.23. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $(-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + x = 600$

b) $2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots + (-x) = -2000$

2.24. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết rằng: $9 \leq |x - 3| < 11$

2.25. Tìm giá trị nguyên lớn nhất và nhỏ nhất của x sao cho:

$$1986 < |x + 2| < 2012$$

2.26. Cho 31 số nguyên. Hỏi tổng của 31 số nguyên đó là một số như thế nào nếu:

a) Tổng của 3 số bất kì trong chúng là 1 số nguyên âm?

b) Tổng của 3 số bất kì trong chúng là một số nguyên dương?

Kết quả trên còn đúng không nếu thay số 31 bằng số 32?

2.27. Trên bảng của một lớp học có viết các số: 1; 2; 3; ... ; 2011; 2012; 2013. Một học sinh tiến hành một công việc như sau: Xóa hai số bất kì trong các số đó rồi viết thay vào giá trị tuyệt đối của hiệu hai số đã xóa, sau đó lặp lại công việc trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số. Chứng tỏ rằng số cuối cùng còn lại không thể là số 0.

Chuyên đề 3. QUY TẮC DẤU NGOẶC VÀ QUY TẮC CHUYỂN VÉ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

- Quy tắc dấu ngoặc:

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “-” đằng trước, ta phải đổi dấu tất cả các số hạng trong dấu ngoặc: dấu “+” đổi thành dấu “-” và dấu “-” đổi thành dấu “+”

$$-(a - b + c) = -a + b - c$$

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu “+” đằng trước, ta giữ nguyên dấu của các số hạng trong dấu ngoặc.

$$+(a - b + c) = a - b + c$$

- Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển vế một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức ta phải đổi dấu số hạng tử đó: dấu “+” đổi thành dấu “-” và dấu “-” đổi thành dấu “+”

$$a - b = c + d \Leftrightarrow a = c + d + b \Leftrightarrow a - c = b + d$$

2. Nâng cao

- Quy tắc chuyển vế vẫn đúng đối với bất đẳng thức:

$$a - b < c + d \Leftrightarrow a < c + d + b \Leftrightarrow a - c < b + d$$

- Tổng đại số: Một dãy các phép tính cộng, trừ các số nguyên gọi là một *tổng đại số*. Trong một tổng đại số, ta có thể:

Thay đổi tùy ý vị trí của một số hạng kèm theo dấu của chúng.

Đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý; với chú ý rằng: Nếu trước dấu ngoặc là dấu “-” thì phải đổi dấu tất cả các số hạng trong ngoặc.

$$a - b - c + d = a - (b + c - d)$$

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Tính hoặc rút gọn các biểu thức

Ví dụ 1. Tính hợp lí:

a) $P = 54 + (-37 + 10 - 54 + 67)$

b) $Q = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 79 - 80 + 81$

Giải

- a) Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có:

$$P = 54 - 37 + 10 - 54 + 67$$

Áp dụng tính chất của tổng đại số, ta có:

$$P = (54 - 54) + (-37 + 67) + 10$$

$$= 0 + 30 + 10$$

$$= 40$$

b) Áp dụng quy tắc đặt dấu ngoặc, ta có:

$$Q = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (78 - 79 - 80 + 81)$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$= 1$$

Nhận xét: Ở câu b) ta có những cách đặt dấu ngoặc khác, chẳng hạn:

$$Q = 1 + (2 - 3) + (-4 + 5) + (6 - 7) + (-8 + 9) + \dots + (78 - 79) + (-80 + 81)$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1) + 1 = 1$$

Ví dụ 2. Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Rút gọn biểu thức sau:

$$P = (a + b - c) + (a - b) - (a - b - c)$$

Giải

Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có: $P = a + b - c + a - b - a + b + c$

Áp dụng tính chất của tổng đại số, ta có:

$$P = (a - a) + (b - b) + (-c + c) + a + b$$

$$= 0 + 0 + 0 + a + b = a + b$$

Vậy $P = a + b$

Dạng 2. Chứng minh

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng:

$$(a - b) - (b + c) + (c - a) - (a - b - c) = -(a + b - c)$$

Giải

Ta có:

Vế trái $= a - b - b - c + c - a - a + b + c$ (quy tắc bỏ dấu ngoặc)

$$= (a - a) + (-b + b) + (-c + c) - b - a + c \text{ (tính chất của tổng đại số)}$$

$$\Rightarrow \text{Vế trái} = 0 + 0 + 0 - a - b + c = -a - b + c$$

Áp dụng quy tắc đặt dấu ngoặc, ta có:

$$\text{Vế trái} = -(a + b - c) = \text{Vế phải}$$

$$\text{Vậy } (a - b) - (b + c) + (c - a) - (a - b - c) = -(a + b - c)$$

Ví dụ 4. Cho $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $a \neq 0$. Chứng tỏ rằng biểu thức P luôn âm, biết rằng:

$$P = a(b-a) - b(a-c) - bc$$

Giải

Vì $a, b, c \in \mathbb{N}$ nên áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ, ta có:

$$a(b-a) = a.b - a.a = ab - a^2; b(a-c) = ba - bc = ab - bc$$

$$\text{Do đó: } P = (ab - a^2) - (ab - bc) - bc$$

$$= ab - a^2 - ab + bc - bc \quad (\text{quy tắc bỏ dấu ngoặc})$$

$$= (ab - ab) + (bc - bc) - a^2$$

$$= 0 + 0 - a^2$$

$$= -a^2$$

Vì $a \neq 0$ nên $a^2 > 0$, do đó số đối của a^2 nhỏ hơn, hay: $-a^2 < 0$

Vậy $P < 0$, tức là P luôn có giá trị âm.

Dạng 3. Tìm x

Ví dụ 5. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $(-x + 31) - 39 = -69 + 11$

b) $-129 - (35 - x) = 55$

Giải

a) Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có:

$$-x + 31 - 39 = -69 + 11$$

$$\Leftrightarrow -x = -69 + 11 - 31 + 39 \quad (\text{quy tắc chuyển vế})$$

$$\Leftrightarrow -x = (-69 + 39) + (11 - 31) \quad (\text{tính chất của tổng đại số})$$

$$\Leftrightarrow -x = -30 + (-20)$$

$$\Leftrightarrow -x = -50$$

$$\Leftrightarrow x = 50$$

Vậy $x = 50$

b) Áp dụng quy tắc bỏ dấu ngoặc, ta có:

$$-29 - 35 + x = 55 \quad (\text{quy tắc chuyển vế})$$

$$\Leftrightarrow x = 55 + 29 + 35 \quad (\text{tính chất kết hợp})$$

$$\Leftrightarrow x = (55 + 35) + 29$$

$$\Leftrightarrow x = 90 + 35$$

$$\Leftrightarrow x = 219$$

Vậy $x = 219$

Nhận xét:

Ta có thể rút gọn riêng các số ở mỗi vế rồi mới thực hiện chuyển vế, chẳng hạn ở câu a):

$$-x + 31 - 39 = -69 + 11$$

$$\Leftrightarrow -x - 8 = -58$$

$$\Leftrightarrow x = -8 + 58 = 50$$

Tuy nhiên cách làm này không khai thác được tính chất của tổng đại số để tính nhẩm như lời giải ở trên.

Ví dụ 6. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $(-37) - |7 - x| = -127$

b) $|x - 14| + (-6) < -4$

Giải

a) Áp dụng quy tắc chuyển vế, ta có:

$$(-37) + 127 = |7 - x| \Leftrightarrow 90 = |7 - x| \Leftrightarrow 7 - x = \pm 90$$

Ta có hai trường hợp:

- Nếu $7 - x = 90$ thì $x = 7 - 90 = -83$
- Nếu $7 - x = -90$ thì $x = 7 + 90 = 97$

Vậy $x \in \{-83; 97\}$

b) Áp dụng quy tắc chuyển vế, ta có:

$$|x - 14| < -4 - (-6)$$

$$\Leftrightarrow |x - 14| < -4 + 6 \text{ hay } |x - 14| < 2$$

Suy ra: $|x - 14| \in \{0; 1\}$

+ Nếu $|x - 14| = 0$ thì $x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14$

+ Nếu $|x - 14| = 1 \Leftrightarrow x - 14 = \pm 1$

- Nếu $x - 14 = 1$ thì $x = 1 + 14 = 15$
- Nếu $x - 14 = -1$ thì $x = -1 + 14 = 13$

Vậy $x \in \{13; 14; 15\}$

III. BÀI TẬP

2.28. Tính hợp lí:

a) $(326 - 43) + (174 - 57)$

b) $(351 - 875) - (125 - 149)$

c) $-418 - \{-218 - [-118 - (318) + 2012]\}$

2.29. Tính hợp lí:

a) $(-2) + 7 + (-12) + 17 + \dots + (-52) + 57$

b) $(-30) + (-29) + \dots + 48 + 49 + 50$

2.30. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $M = (71 + x) - (-24 - x) + (-35 - x)$

b) $N = x - 34 - [(15 + x) - (23 - x)]$

c) $P = (-15 + |x|) + (25 - |-x|)$

2.31. Cho $x < y < 0$ và $|x| - |y| = 100$. Tính $x - y$

2.32. Cho $x \in \mathbb{Z}$. Hãy bỏ dấu giá trị tuyệt đối rồi rút gọn các biểu thức sau:

a) $|x - 3| + x - 5$ với $x < 3$

b) $|2 + x| - (x + 1)$ với $x \geq -2$

c) $|x + 1| + |x - 2|$ với $-1 \leq x \leq 2$

2.33. Cho $a - b = 1$. Tính S, biết rằng:

$$S = -(a - b - c) + (-c + b + a) - (a + b)$$

2.34. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(a - b) + (c - d) - (a + c) = -(b + d)$

b) $(a - b) - (c - d) + (b + c) = a + d$

2.35. Cho $P = a - b + c$; $Q = -a + b - c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ rằng P và Q là hai số đối nhau.

2.36. Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 100 theo một thứ tự bất kì. Sau đó cứ mỗi số cộng với thứ tự của nó sẽ được một tổng. Hãy tính tổng tất cả các số tổng nhận được.

2.37. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $43 + (9 - 21) = 317 - (x + 317)$

b) $(15 - x) + (x - 12) = 7 - (-5 + x)$

c) $x - \{57 - [42 + (-23 - x)]\} = 13 - \{47 + [25 - (32 - x)]\}$

2.38. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $-7 + |x - 4| = -3$

b) $13 - |x + 5| = 13$

c) $|x - 10| - (-12) = 4$

2.39. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x + 2| \leq 5$

b) $|x + 1| > 2$

2.40. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|x - 1| - x + 1 = 0$

b) $|2 - x| + 2 = x$

c) $|x - 40| + |x - y + 10| \leq 0$

2.42. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$

a) Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = 1001 - |x + 9|$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị đó.

b) Với giá trị nào của y thì biểu thức $B = |y - 2| + 34$ có giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị đó.

Chuyên đề 4. PHÉP NHÂN HAI SỐ NGUYÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

a) Quy tắc nhân: $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a.0 = 0.a = 0$$

Nếu a và b cùng dấu thì $a.b = |a|.|b|$

Nếu a và b trái dấu thì $a.b = -|a|.|b|$

Chú ý:

+ Nếu $a.b = 0$ thì hoặc $a = 0$, hoặc $b = 0$

+ Nếu đổi dấu một thừa số thì tích đổi dấu

+ Nếu đổi dấu hai thừa số thì tích không đổi

b) Tính chất của phép nhân:

Các tính chất giao hoán, kết hợp, nhân với 1 số, tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng các số tự nhiên đều có thể mở rộng cho phép nhân hai số nguyên.

Chú ý:

+ Phép nhân số nguyên cũng có tính chất phân phối đối với phép trừ:

$$a(b - c) = ab - ac$$

+ Nếu số thừa số âm chẵn thì tích là số dương. Nếu số thừa số âm lẻ thì tích là số âm.

2. Nâng cao

a) Lũy thừa bậc chẵn của một số âm là một số dương, lũy thừa bậc lẻ của một số âm là một số âm: $a < 0 \Rightarrow a^{2n} > 0$ và $a^{2n+1} < 0$

b) Tính chất của bất đẳng thức:

$$a < b \Leftrightarrow ac < bc, \text{ nếu } c > 0$$

$$a \geq b \Leftrightarrow ac \leq bc, \text{ nếu } c < 0$$

c) Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối: $|a.b| = |a|.|b|$

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1: Tính hoặc rút gọn biểu thức

Ví dụ 1. Tính hợp lí:

a) $A = (135 - 35).(-47) + 53.(-48 - 52)$

$$b) B = 25.(75 - 49) + 75.|25 - 49|.$$

Giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có: } A &= 100.(-47) + 53.(-100) \\ &= (-100).47 + (-100).53 \quad (\text{đổi dấu hai thừa số}) \\ &= (-100).(47 + 53) \quad (\text{đặt thừa số chung}) \\ &= (-100).100 \\ &= -10000. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Vì } 25 - 49 < 0 \text{ nên } |25 - 49| = -(25 - 49) = 49 - 25$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } B &= 25.(75 - 49) + 75.(49 - 25) \\ &= 25.75 - 25.49 + 75.49 - 75.25 \quad (\text{Tính chất phân phối}) \\ &= (25.75 - 75.25) + (-25.49 + 75.49) \\ &= 0 + 49.(-25 + 75) \quad (\text{đặt thừa số chung}) \\ &= 49.50 \\ &= 2450. \end{aligned}$$

Nhận xét:

Hai cách tính ở câu a) và câu b) là khác nhau: Trong khi ở câu a) ta thực hiện phép tính trong ngoặc trước thì ở câu b) ta lại áp dụng tính chất phân phối để nhân phá ngoặc. Mục đích của sự thay đổi trình tự tính toán này là để tạo ra các thừa số chung, các số tròn chục, tròn trăm ... giúp ta có thể tính nhanh được.

Ví dụ 2. Bỏ dấu ngoặc rồi rút gọn biểu thức sau:

$$P = (a - 1)(b - 2) - (ab + 2)$$

Giải:

Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép trừ, ta có:

$$x(b - 2) = x.b + x.2$$

Thay $x = a - 1$, ta có:

$$(a - 1)(b - 2)$$

$$= (a-1).b - (a-1).2$$

$$= (ab - b) - (2a - 2)$$

$$= ab - b - 2a + 2.$$

Do vậy: $P = ab - b - 2a + 2 - ab - 2$

$$= (ab - ab) + (2 - 2) - 2a - b$$

$$= -2a - b.$$

Vậy: $P = -2a - b.$

Dạng 2. Tìm số chưa biết

Ví dụ 3: Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

$$a) (x+2)(3-x) = 0$$

$$b) (2x-5)^2 = 9.$$

$$c) (1-3x)^3 = -8.$$

Giải:

a) Áp dụng : $a.b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ ta có:

$$(x+2)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 3-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy: $x \in \{-2; 3\}$

b) Ta có :

$$(2x-5)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 2x-5 = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=3 \\ 2x-5=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ 2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=1. \end{cases}$$

Vậy $x \in \{1; 4\}$

c) Vì $(-2)^3 = -8$ nên $(1-3x)^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow 1-3x = -2$

$$\Leftrightarrow 1+2 = 3x \Leftrightarrow 3 = 3x \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $x = 1$

Nhận xét:

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng tính chất so sánh hai lũy thừa cùng số mũ của số nguyên sau đây:

$$x^{2n} = a^{2n} \Leftrightarrow x = \pm a$$

$$x^{2n+1} = a^{2n+1} \Leftrightarrow x = a$$

Ví dụ 4. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết $(x+3)(x-2) < 0$

Giải

Vì $(x+3)(x-2) < 0$ nên suy ra $x+3$ & $x-2$ là hai số trái dấu.

Mặt khác: $(x+3)-(x-2) = x+3-x+2 = 5 > 0$ nên $x+3 > x-2$.

$$\text{Do vậy: } x-2 < 0 < x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 2.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; -1; 0; 1\}$

Nhận xét: Trong lời giải trên ta đã sử dụng tính chất được suy ra từ quy tắc chuyển vế sau đây:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

Ngoài ra, từ a và b trái dấu, ta có thể chia hai trường hợp:

$$a > 0 \text{ \& } b < 0$$

$$a < 0 \text{ \& } b > 0.$$

Ví dụ 5. Tìm $a, b \in \mathbb{Z}$, biết: $a.b = 12$ và $a+b = -7$

Giải:

Vì $a.b > 0$ nên hai số a và b cùng dấu, mà $a+b < 0$ nên suy ra a và b cùng âm.

$$\text{Do đó: } a.b = 12 = (-1).(-12) = (-2).(-6) = (-3).(-4)$$

$$\text{Trong các trường hợp đó chỉ có: } (-3)+(-4) = -7$$

Vậy ta có hai đáp số là: $a = -3; b = -4$ hoặc $a = -4; b = -3$.

III. BÀI TẬP

2.43. Tính hợp lí:

a) $(-8).25.(-2).4.(-5).125$

b) $(-167).83+167.(-17)-33$

2.44. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = 5a^3b^8$ với $a = -1; b = 1$

b) $B = -9a^4b^2$ với $a = -1; b = 2$

2.45. Tính giá trị của biểu thức

a) $ax + ay + bx + by$ biết $a + b = -3; x + y = 17$

b) $ax - ay + bx - by$ biết $a + b = -7; x - y = -18$

2.46. Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: $a(c - b) - b(-a - c) = c(a + b)$

2.47. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $3(2 - x) + 5(x - 6) = -98$

b) $(x + 7)(8 - x) = 0$

2.48. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $(x^2 + 1)(49 - x^2) = 0$

b) $(|x| + 2)(6 - 2|x|) = 0$

2.49. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $(x - 2)(7 - x) > 0$

b) $(x^2 - 13)(x^2 - 17) < 0$

2.50. Tìm $x \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $|6x - 13| = 15$

b) $|7x - 2| \leq 19$

2.51. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $x \cdot y = -28$

b) $(2x - 1)(4y + 2) = -42$

2.52. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = -(x + 1)^2 - |3 - y| + 35$

2.53. Cho 79 số nguyên trong đó tích của 6 số bất kì là một số âm. Chứng minh rằng tích của tất cả 79 số đó là một số dương.

2.54. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

a) $x + xy + y = 9$

(Đề thi tuyển vào lớp 10, Đại học Khoa học Tự nhiên, năm 2002)

b) $xy - 2x - 3y = 5$

Chuyên đề 5. BỘI VÀ ƯỚC CỦA MỘT SỐ NGUYÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

a) *Định nghĩa*: Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$

Nếu có số nguyên q sao cho $a = b \cdot q$ thì ta nói a chia hết cho b , kí hiệu là $a:b$. Khi đó ta còn nói a là bội của b và b là ước của a .

Chú ý:

+ Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0

+ Số 0 không là ước của bất kì số nguyên nào

+ Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên $\mathbb{Z}$

+ Nếu c vừa là ước của a , vừa là ước của b thì c gọi là *ước chung* của a . Nếu c vừa là *bội* của a , vừa là *bội* của b thì c gọi là *bội chung* của a và b .

b) *Tính chất chia hết trong $\mathbb{Z}$*

- Nếu $a:b$ và $b:c$ thì $a:c$
- Nếu $a:b$ và $a:m:b$ (với $m \in \mathbb{Z}$)
- Nếu $a:c$ và $b:c$ thì $(a \pm b):c$

2. Nâng cao

a) Các tính chất khác về chia hết (hay chia dư) đối với số tự nhiên vẫn đúng với số nguyên

b) Nếu số a có m ước tự nhiên thì sẽ có thêm m ước là các số nguyên âm (là các số đối của các ước tự nhiên). Vậy a có $2m$ ước nguyên.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm tất cả các ước chung của -12 và 30 .

Giải

Tập hợp các ước của -12 và 30 là:

$$U'(-12) = U'(12) = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Hoặc viết gộp: $U'(-12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

$$U'(30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}.$$

Suy ra tập hợp các ước chung của -12 và 30 là:

$$ƯC(-12; 30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}.$$

Nhận xét:

Ước chung của -12 và 30 là ước chung của $ƯCLN(12, 30) = 6$, nên:

$$ƯC(-12, 30) = Ư(6)$$

Ví dụ 2. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho:

a) $x - 5$ là bội của $x + 2$.

b) $x - 2$ là ước của $3x + 5$.

Giải

a) Vì $x - 5 = (x + 2) - 7$ nên $(x - 5) : (x + 2) \Leftrightarrow 7 : (x + 2)$

Suy ra: $x + 2 \in Ư(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$.

Ta có bảng giá trị sau:

$x + 2$	-7	-1	1	7
x	-9	-3	-1	5

Vậy $x \in \{-9; -3; -1; 5\}$.

b) Vì $3x + 5 = (3x - 6) + 11 = 3(x - 2) + 11$

nên $(3x + 5) : (x - 2) \Leftrightarrow 11 : (x - 2)$.

Suy ra: $x - 2 \in Ư(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$.

Ta có bảng giá trị sau:

$x - 2$	-11	-1	1	11
x	-9	1	3	13

Vậy $x \in \{-9; -1; 3; -13\}$

Nhận xét:

Ta có thể giải bài toán trên theo cách đã học ở chương I. Chẳng hạn, đối với câu b). ta có:

Vì $(3x + 5) : (x - 2)$ và $3(x - 2) : (x - 2)$

Nên $[(3x + 5) - 3(x - 2)] : (x - 2)$

$$\Leftrightarrow (3x + 5 - 3x + 6) : x - 2$$

$$\Leftrightarrow 11 : (x - 2).$$

Sau đó tiếp tục lập luận tương tự như trên.

Ví dụ 3. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: $6x + 11y$ là bội của 31 khi và chỉ khi $x + 7y$ là bội của 31.

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } (6x + 11y) - 6(x + 7y) &= 6x + 11y - 6x - 42y \\ &= (6x - 6y) + (11y - 42y) \\ &= -31y : 31\end{aligned}$$

Suy ra: $(6x + 11y) : 31 \Leftrightarrow 6(x + 7y) : 31$ (tính chất chia hết của một tổng)
 $\Leftrightarrow (x + 7y) : 31$ (vì 6 và 31 nguyên tố cùng nhau).

Vậy $6x + 11y$ là bội của 31 khi và chỉ khi $x + 7y$ là bội của 31.

Nhận xét:

Cách giải trên gọi là phương pháp “khử x”: Ta thấy số thứ nhất có số hạng $6x$, số thứ hai có số hạng x . Vậy để triệt tiêu hết x , ta nhân 6 vào số thứ hai và xét hiệu với số thứ nhất.

Tương tự, ta cũng có phương pháp “khử” :

$$7(6x + 11y) - 11(x + 7y) = 42x + 77y - 11x - 77y = 31x : 31.$$

Sau đó lập luận tương tự như trên.

III. BÀI TẬP

2.55. Tìm tập hợp các bội chung của 12 và -30 .

2.56. Tìm tập hợp các ước chung của $-60; 45; -105$.

2.57. Với $n \in \mathbb{Z}$, các số sau là chẵn hay lẻ ?

a) $(3n - 4)(3n + 19)$.

b) $n^2 - n + 1$.

2.58. Tìm các số nguyên a , biết:

a) $a + 2$ là ước của 7.

b) $2a$ là ước của -10 .

c) 12 là bội của $2a + 1$.

2.59. Chứng minh rằng nếu $a \in \mathbb{Z}$ thì:

a) $P = a(a + 2) - a(a - 5) - 7$ là bội của 7.

b) $Q = (a - 2)(a + 3) - (a - 3)(a + 2)$ là số chẵn.

2.60. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết:

- a) $(2x - 1)(y - 4) = -13$.
- b) $(5x + 1)(y - 1) = 4$.
- c) $5xy - 5x + y = 5$.

2.61. Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: $5x + 47y$ là bội của 17 khi và chỉ khi $x + 6y$ là bội của 17.

2.62. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho:

- a) $x - 4$ là bội của $x - 1$.
- b) $2x - 1$ là ước của $3x + 2$.

2.63. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho:

- a) $x^2 + 2$ là bội của $x + 2$.
- b) $x - 1$ là ước của $x^2 - 2x + 3$.

2.64. Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{Z}$ ta có:

- a) $(a - 1)(a + 2) + 12$ không là bội của 9.
- b) 49 không là ước của $(a + 2)(a + 9) + 21$.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phép chia với số dư âm

Chia số nguyên a cho số nguyên $b > 0$ ta được:

$$a = b.q + r \text{ với } 0 \leq r \leq b - 1.$$

- Nếu $r = 0$ thì a chia hết cho b (kí hiệu là $a : b$) hay a là bội của b ($a \in B(b)$), hay b là ước của a ($b \in U(a)$).
- Nếu $r \neq 0$ thì phép chia a cho b là phép chia có dư.
- Số dư r có thể chọn là số nguyên âm.

Ví dụ: Chia 19 cho 4, ta có: $19 = 4.4 + 3$ (thương là 4, dư 3)

$$\text{Hoặc } 19 = 4.5 - 1 \text{ (thương là 5, dư } -1).$$

*** Nhận xét :** Việc sử dụng số dư âm giúp ta có thể lựa chọn số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ.

Trong trường hợp tổng quát : $a = b.q + r$, ta có:

- Nếu b chẵn thì $r \in \left\{ -\frac{b}{2} + 1; -\frac{b}{2} + 2; \dots; 0; 1; \dots; \frac{b}{2} \right\}$.
- Nếu b lẻ thì $r \in \left\{ -\frac{b-1}{2}; -\frac{b-3}{2}; \dots; 0; 1; \dots; \frac{b-1}{2} \right\}$.

Ví dụ : Khi chia một số cho 6 thì số dư có thể là $-2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Khi chia một số cho 5 thì số dư có thể là $-2; -1; 0; 1; 2$.

2. Đồng dư

2.1. Định nghĩa

Cho a, b là các số nguyên và n là số nguyên dương. Ta nói a đồng dư với b theo môđun n , kí hiệu là $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) : n$.

Nhận xét: Nếu a chia b dư r thì $a \equiv r \pmod{b}$.

2.2. Tính chất: Với mọi $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$ và $n > 0$, ta có:

- a) $a \equiv a \pmod{n}$
- b) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$
- c) $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
- d) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{n}$
- e) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{n}$
- f) $ac \equiv bc \pmod{n}$ và $(c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$

$$g) a \equiv b(\text{mod } n) \Rightarrow a^k \equiv b^k(\text{mod } n), \forall k \geq 1.$$

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG

1. Chứng minh quan hệ chia hết

* *Phương pháp* : Để chứng minh $a : m$ ta chứng tỏ $a \equiv 0(\text{mod } m)$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$.

Giải

Ta có: $2222 \equiv 3(\text{mod } 7)$ hay $2222 \equiv -4(\text{mod } 7)$;

$$5555 \equiv 4(\text{mod } 7)$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv [(-4)^{5555} + 4^{2222}] (\text{mod } 7)$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv -4^{2222} (4^{3333} - 1) (\text{mod } 7)$$

Lại có $4^{3333} = (4^3)^{1111} = 64^{1111}$, mà $64 \equiv 1(\text{mod } 7)$ nên $4^{3333} \equiv 1(\text{mod } 7)$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0(\text{mod } 7) \Rightarrow -4^{2222} (4^{3333} - 1) \equiv 0(\text{mod } 7).$$

Do vậy $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv 0(\text{mod } 7)$

hay $(2222^{5555} + 5555^{2222}) : 7$

Như vậy ta có $a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow (a - b) : n$.

Nhận xét: Nếu a chia b dư r thì $a \equiv r(\text{mod } b)$.

2.2. Tính chất: Với mọi $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$ và $n > 0$, ta có:

$$a) a \equiv a(\text{mod } n)$$

$$b) a \equiv b(\text{mod } n) \Rightarrow b \equiv a(\text{mod } n)$$

$$c) a \equiv b(\text{mod } n), b \equiv c(\text{mod } n) \Rightarrow a \equiv c(\text{mod } n)$$

$$d) a \equiv b(\text{mod } n) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c(\text{mod } n)$$

$$e) a \equiv b(\text{mod } n) \Rightarrow ac \equiv bc(\text{mod } n)$$

$$f) ac \equiv bc(\text{mod } n); (c, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b(\text{mod } n)$$

$$g) a \equiv b(\text{mod } n) \Rightarrow a^k \equiv b^k(\text{mod } n), \forall k \geq 1$$

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG

1. Chứng minh quan hệ chia hết

* *Phương pháp*: Để chứng minh $a \vdots m$ ta chứng tỏ $a \equiv 0 \pmod{m}$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \vdots 7$

Giải

Ta có: $2222 \equiv 3 \pmod{7}$ hay

$$5555 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv [(-4)^{5555} + 4^{2222}] \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv -4^{2222}(4^{3333} - 1) \pmod{7}$$

Lại có $4^{3333} = (4^3)^{1111} = 64^{1111}$, mà $64 \equiv 1 \pmod{7}$ nên $4^{3333} \equiv 1 \pmod{7}$

$$\Rightarrow 4^{3333} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow -4^{2222}(4^{3333} - 1) \equiv 0 \pmod{7}$$

Do vậy $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \equiv 0 \pmod{7}$ hay $(2222^{5555} + 5555^{2222}) \vdots 7$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $A = (7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n) \vdots 19$

Giải

Ta có: $5^{2n} = (5^2)^n = 25^n \Rightarrow A = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n$

Vì $25 \equiv 6 \pmod{19}$ nên $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

$$\Rightarrow A = 7 \cdot 6^n + 12 \cdot 6^n \pmod{19} \Leftrightarrow A \equiv 19 \cdot 6^n \pmod{19}$$

Suy ra: $A \equiv 0 \pmod{19}$

Vậy $A \vdots 19$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $A = (2^{3^{2n}} + 5) \vdots 7$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải

Ta có: $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$. Ta đi tìm số dư của 2^{2n} khi chia cho 3.

Vì $4 \equiv 1 \pmod{3}$ $4^n \equiv 1 \pmod{3}$ hay $2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$.

$\Rightarrow 2^{2n}$ chia cho 3 dư 1. Giả sử $2^{2n} = 3k + 1, k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $A = 2^{3k+1} + 5 = 2 \cdot 8^k + 5$.

Vì $8^k \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 2 \cdot 8^k + 5 \equiv 2 + 5 \pmod{7}$

hay $A \equiv 0 \pmod{7}$

Vậy A chia hết cho 7.

2. Tìm số dư, chữ số tận cùng

2.1. Tìm số dư khi chia a cho $b > 0$

Nếu $a \equiv r \pmod{b}$ và $0 \leq r < b$ thì r là số dư khi chia a cho b .

Ví dụ 4. Tìm số dư khi chia 3^{2000} cho 7.

Giải

Ta có: $3^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 3^6 = (3^2)^3 \equiv 1 \pmod{7}$

$\Rightarrow (3^6)^{333} \equiv 1 \pmod{7}$ hay $3^{1998} \equiv 1 \pmod{7}$.

Mặt khác: $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$ nên $3^{2000} = 3^{1998} 3^2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{7}$

hay 3^{2000} chia cho 7 dư 2.

Nhận xét:

Để tìm số dư khi chia a^n cho $b > 0$, ta lấy lũy thừa với số mũ tăng dần của a chia cho b để tìm số dư. Ta sẽ dừng lại để xem xét khi tìm được số dư có giá trị tuyệt đối nhỏ hoặc là một giá trị đặc biệt có liên quan đến các tình huống của bài toán.

2.2. Tìm một chữ số tận cùng

* *Phương pháp:* Nếu $a \equiv r \pmod{10}$ và $0 \leq r < 10$ thì r là chữ số tận cùng của a .

- Nếu a có chữ số tận cùng là 0; 5; 6 thì a^n cũng có chữ số tận cùng như a , tức là:
 $a^n \equiv a \pmod{10}$.

- Nếu a có chữ số tận cùng là 4; 9 thì a^2 có chữ số tận cùng là 6; 1.

Nếu $a \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow a^2 \equiv 6 \pmod{10}$, nên $a^{2k} \equiv 6 \pmod{10}$.

Nếu $a \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{10}$, nên $a^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$.

$\Rightarrow$ Để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 2.

- Nếu a có chữ số tận cùng là 2; 3; 7; 8 thì ta áp dụng một trong các kết quả sau:

$$2^{44} \equiv 6 \pmod{10}; \quad 3^{44} \equiv 1 \pmod{10}; \quad 7^{44} \equiv 1 \pmod{10}; \quad 8^{44} \equiv 6 \pmod{10}.$$

$\Rightarrow$ Để tìm chữ số tận cùng của a^n ta chia n cho 4.

Ví dụ 5. Cho $A = 2012^{2013}$. Tìm chữ số tận cùng của A .

Giải

Ta có số mũ $2013 = 4 \cdot 503 + 1$

Vì $2012 \equiv 2 \pmod{10}$ nên $2012^4 \equiv 6 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{2012} \cdot 2012 \equiv 6 \cdot 2 \pmod{10} \text{ hay } 2012^{2013} \equiv 2 \pmod{10}$$

Vậy A có chữ số tận cùng là 2.

2.3. Tìm hai chữ số tận cùng

* *Phương pháp:* Nếu $a \equiv r \pmod{100}$ và $10 \leq r \leq 100$ thì r là hai chữ số tận cùng của a .

Ta có nhận xét sau:

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}; \quad 3^{20} \equiv 1 \pmod{100}; \quad 6^5 \equiv 76 \pmod{100};$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{100}; \quad 5^2 \equiv 25 \pmod{100}.$$

Mà $76^n \equiv 76 \pmod{100}$ và $25^n \equiv 25 \pmod{100}, n \geq 2$.

Suy ra: $a^{20k} \equiv 00 \pmod{100}$ nếu $a \equiv 0 \pmod{10}$

$$a^{20k} \equiv 1 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$$

$$a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}.$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta lấy số mũ n chia cho 20.

Ví dụ 6. Cho số $A = 2012^{2013}$. Tìm hai chữ số tận cùng của A .

Giải

Ta có: $2013 = 20 \cdot 100 + 13$

Vì $2012 \equiv 2 \pmod{10}$ nên $2012^{20} \equiv 76 \pmod{100}$

$$\Rightarrow (2012^{20})^{100} \equiv 76 \pmod{100} \text{ hay } 2012^{2000} \equiv 76 \pmod{100} \quad (1)$$

Mặt khác: $2012 \equiv 12 \pmod{100} \Rightarrow 2012^6 \equiv 12^6 \pmod{100}$

$$\text{Hay } 2012^6 \equiv 84 \pmod{100} \Rightarrow (2012^6)^2 \equiv 56 \pmod{100}$$

$$\text{Hay } 2012^{12} \equiv 56 \pmod{100} \Rightarrow 2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $2012^{2013} = 2012^{2000} \cdot 2012^{13} \equiv 76 \cdot 72 \pmod{100}$

Hay $2012^{2013} \equiv 72 \pmod{100}$.

Vậy A có hai chữ số tận cùng là 72.

III. BÀI TẬP

2.65. Chứng minh rằng: $(2^{2002} - 4) : 31$.

2.66. Tìm số dư trong phép chia: $5^{70} + 7^{50}$ cho 12

2.67. Tìm số dư của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 và khi chia cho 13.

2.68. Chứng minh rằng nếu x không chia hết cho 3 thì $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

2.69. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a \equiv 1 \pmod{2}$ thì $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$

b) Nếu $a \equiv 1 \pmod{3}$ thì $a^3 \equiv 1 \pmod{9}$

2.70. Giả sử $(x^2 + y^2) : 3$. Chứng minh rằng: $x : 3$ và $y : 3$.

2.71. Chứng minh rằng: $1924^{2003 \cdot 2004^n} + 1920 : 124$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2.72. Chứng minh rằng:

a) $(1991^{1997} - 1997^{1996}) : 10$

b) $(2^9 + 2^{99}) : 100.$

2.73. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có:

a) $(2^{2^{4n+1}} + 7) : 11$

b) $n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1$ chia hết cho $n-1$ (với $n > 1$).

2.74. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng :

a) $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

b) $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 168 \quad (n \geq 1).$

2.75. Chứng minh rằng $9^n + 1$ không chia hết cho 100, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

2.76. Tìm số tự nhiên n sao cho:

a) $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) : 19$

b) $(n.2^n + 1) : 3.$

2.77. Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau:

a) $A = 7^{9^{79}}$

b) $B = 29^{9^{2012}}$

2.78. Cho số $C = 1978^{1986}$

a) Tìm chữ số tận cùng của C.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của C.

----- CHÚC CÁC EM HỌC TỐT -----

THCS.TOANMATH.com

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ
CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 6
SỐ NGUYÊN

Chuyên đề 1

2.1. a)

b) $Z' \cap N = N^*$

2.2. Khẳng định: “Nếu $a \in Z$ thì $|a| \in Z^*$ ” là sai

Sửa lại là: “Nếu $a \in Z$ thì $|a| \in N$ hoặc “Nếu $a \in Z^*$ thì $|a| \in N^*$ ”

2.3. a) $a = 9$

b) $a \in \emptyset$

c) $a = 5$

Chú ý: $-a < -b \Leftrightarrow a > b$

2.4. a) -9 .

b) -1

c) -9876543210 .

d) -1023456789 .

Chú ý: Với $a \in N$, nếu a càng lớn thì $-a$ càng nhỏ, a càng nhỏ thì $-a$ càng lớn.

2.5. Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $a \geq 0$ thì $|a| = a$, do đó: $|a| \geq a$

- Nếu $a < 0$ thì $|a| = -a > 0$, do đó: $|a| > 0 > a$

Vậy $|a| \geq a$, với mọi $a \in Z$ và $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$

2.6. Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $x \geq 0$ thì $|x| = x$, nên từ $|x| = a$ suy ra $x = a$

- Nếu $x < 0$ thì $|x| = -x$, nên từ $|x| = a$ suy ra $-x = a$ hay $x = -a$

Vậy $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

Chú ý: Vì $|x| \geq 0$ nên nếu $a < 0$ thì không tồn tại x thỏa mãn $|x| = a$.

2.7. Ta xét 4 trường hợp sau:

- Nếu $\begin{cases} x \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} |x| = x \\ |a| = a \end{cases}$ Do đó: $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$

- Nếu $\begin{cases} x \leq 0 \\ a \leq 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} |x| = -x \\ |a| = -a \end{cases}$ Do đó: $|x| = |a| \Leftrightarrow -x = -a \Leftrightarrow x = a$

- Nếu $\begin{cases} x \geq 0 \\ a \leq 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} |x| = x \\ |a| = -a \end{cases}$. Do đó: $|x| = |a| \Leftrightarrow x = -a \Leftrightarrow x = -a$

- Nếu $\begin{cases} x \leq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} |x| = -x \\ |a| = a \end{cases}$. Do đó: $|x| = |a| \Leftrightarrow -x = a \Leftrightarrow x = -a$

Vậy $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$

2.8. a) $|x| + |-23| = |17| \Leftrightarrow |x| + 23 = 17 \Leftrightarrow |x| = -6$: vô nghiệm.

b) $|-5| \cdot |x| = |-20| \Leftrightarrow 5 \cdot |x| = 20 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

2.9. a) $|x| = |-14| \Leftrightarrow |x| = 14 \Leftrightarrow x = \pm 14$

Vì $x > 0$ nên $x = 14$.

b) $|x| = |23| \Leftrightarrow |x| = 23 \Leftrightarrow x = \pm 23$

Vì $x < 0$ nên $x = -23$.

2.10. a) $|x| < -5 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, vì $|x| \geq 0$ với mọi x .

b) $12 \leq |x| < 15 \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \leq x < 15 \\ -15 < x \leq -12 \end{cases}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{12; 13; 14; -14; -13; -12\}$

2.11. $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leq 7\} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} | 3 \leq |x| < 7\} = \{-6; -5; -4; -3; 3; 4; 5; 6\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} | |x| > 5\} = \{\pm 6; \pm 7; \pm 8; \dots\}$

Do vậy: $A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$, $B \cap C = \{-6; 6\}$, $C \cap A = \{6; 7\}$

2.12. a) Vì $|x| \geq 0$ và $|y| \geq 0$ nên $|x| + |y| \geq 0$ và

$$|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 0 \\ |y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

b) $|x| + |y| = 2$. Ta có các trường hợp sau:

$ x $	0	2	1
$ y $	2	0	1
x	0	± 2	± 1
y	± 2	0	± 1

2.13. Ta có: $|x| \geq 0 \Rightarrow |x| + 7 \geq 7$ hay $P \geq 7$, với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 7 (kí hiệu: $P_{\min} = 7$) khi $x = 0$.

2.14. Ta có: $|x| \geq 0 \Rightarrow -|x| \leq 0 \Rightarrow -|x| + 9 \leq 0 + 9$ hay $Q \leq 9$, với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 9 (kí hiệu: $Q_{\max} = 9$) khi $x = 0$.

Chuyên đề 2

2.15. a) 0.

b) -2012.

2.16. a) -50

b) 8.

2.17. Vì $|x| = 20 \Leftrightarrow x = \pm 20$ và $|y| = 12 \Leftrightarrow y = \pm 12$ nên ta có 4 trường hợp sau:

- $x = 20$ và $y = 12 \Rightarrow x - y = 20 - 12 = 8$
- $x = 20$ và $y = -12 \Rightarrow x - y = 20 - (-12) = 20 + 12 = 32$
- $x = -20$ và $y = 12 \Rightarrow x - y = -20 - 12 = -32$
- $x = -20$ và $y = -12 \Rightarrow x - y = -20 - (-12) = -20 + 12 = -8$

2.18. a) 16.

b) 0.

2.19. a) $37 + (\overline{-5a}) = -20 \Leftrightarrow 37 - \overline{5a} = -20 \Leftrightarrow \overline{5a} = 37 + 20 = 57$

$$\Rightarrow a = 7$$

b) $10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 21 \leq 2n + 1 \leq 199 \quad (\overline{-a9}) + 45 = 26 \Leftrightarrow \overline{a9} = 45 - 26 = 19 \Rightarrow a = 1$

2.20. a) $x = 0$

b) $x = -29$.

2.21. a) $|x| - (-2) = (-1) \Leftrightarrow |x| = -3 \Rightarrow$ không có số x nào thỏa mãn.

b) $5 - |x + 1| = 29 \Leftrightarrow |x + 1| = 5 - 29 = -24 \Rightarrow$ không có số x nào thỏa mãn.

2.22. a) $x + 23 = -1 \Rightarrow x = -24$.

b) $x + 99 = -99 \Rightarrow x = -198$.

2.23. a) $x = 1199$.

Ta có $(-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + x = 600$

$$\Leftrightarrow [(-1) + 3] + [(-5) + 7] + \dots + [-(x-2) + x] = 600 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 + \dots + 2 = 600$$

Suy ra về trái có 300 số hạng là 2, tương ứng về trái của (*) có 300 dấu ngoặc [].

Mặt khác, số dấu ngoặc [] bằng $(x-3):4+1$.

$$\Rightarrow (x-3):4+1=300 \Rightarrow x-3=299.4 \Rightarrow x=1199.$$

b) $x = 4000$.

Ngoài cách giải như câu a), ta có thể giải như sau.

Vì x là số tự nhiên chia hết cho 4 nên giả sử $x = 4n (n \in \mathbb{N})$. Khi đó

$$2 + (-4) + 6 + (-8) + \dots + (-x) = -2000$$

$$\Leftrightarrow [2 + 6 + \dots + (4n-2)] - [4 + 8 + \dots + 4n] = -2000$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + (4n-2)}{2} \cdot n - \frac{4 + 4n}{2} \cdot n = -2000$$

$$\Leftrightarrow n = 1000.$$

Vậy $x = 4.1000 = 4000$.

2.24. $x \in \{-7; -6; 12; 13\}$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $|x-3| \in \mathbb{Z}$. Từ $9 \leq |x-3| < 11 \Rightarrow |x-3| \in \{9; 10\}$.

+ Nếu $|x-3| = 9 \Leftrightarrow x-3 = \pm 9 \Leftrightarrow x = 12$ hoặc $x = -6$.

+ Nếu $|x-3| = 10 \Leftrightarrow x-3 = \pm 10 \Leftrightarrow x = 13$ hoặc $x = -7$.

Vậy $x \in \{-7; -6; 12; 13\}$.

$$\text{2.25. Ta có } 1986 < |x+2| < 2012 \Leftrightarrow \begin{cases} 1986 < x+2 < 2012 \\ -2012 < x+2 < -1986 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1984 < x < 2010 \\ -2014 < x < -1988 \end{cases}$$

Từ đó suy ra giá trị nguyên lớn nhất của x là 2009 và giá trị nguyên nhỏ nhất của x là -2013.

$$S = -a + b + c - c + b + a - a - b$$

$$S = -a + b$$

$$S = -(a - b)$$

Với $a - b = -1$, ta có $S = -1$.

$$2.34. \text{ a) } (a - b) + (c - d) - (a + c) = a - b + c - d - a - c = -b - d = -(b + d)$$

$$\text{ b) } (a - b) + (c - d) + (b + c) = a - b + c - d + b + c = a + d.$$

2.35. Chứng tỏ $P + Q = 0$.

2.36. Các số nguyên tố có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 100 gồm 199 số là $-99; -98; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; 99$

Suy ra các số chỉ thứ tự của các số nguyên là $1; 2; 3; \dots; 199$.

Chỉ tổng S cần tìm thành hai nhóm

- Nhóm các số nguyên từ -99 đến 99 , có tổng bằng 0 .

- Nhóm các số thứ tự của các số nguyên có tổng bằng

$$1 + 2 + 3 + \dots + 199 = (1 + 199).199 : 2 = 19900.$$

Vậy $S = 19900$.

$$2.37. \text{ a) } x = -31$$

$$\text{ b) } x = 9$$

$$\text{ c) } x = -11.$$

$$2.38. \text{ a) } -7 + |x - 4| = -3 \Leftrightarrow |x - 4| = 4 \Leftrightarrow x - 4 = \pm 4.$$

$$\text{ Vậy } x \in \{0; 8\}.$$

$$\text{ b) } 13 - |x + 5| = 13 \Leftrightarrow |x + 5| = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

$$\text{ c) } |x - 10| - (-12) = 4 \Leftrightarrow |x - 10| = -8 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$2.39. \text{ a) } |x + 2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow -5 - 2 \leq x \leq 5 - 2 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3.$$

$$\text{ Vì } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x \in \{-7; -6; -5; \dots; 1; 2; 3\}.$$

$$\text{ b) } |x + 1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3. \end{cases}$$

$$2.40. \text{ a) } |x - 1| - x + 1 = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy $x \in \{1; 2; 3; \dots\}$ hay $x \in \mathbb{N}^*$.

b) $|2 - x| + 2 = x \Leftrightarrow |2 - x| = x - 2 = -(2 - x) \Leftrightarrow 2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Vậy $x \in \{2; 3; 4; \dots\}$.

c) $|x + 7| = |x - 9| \Leftrightarrow x + 7 = \pm(x - 9)$.

- $x + 7 = x - 9 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -16 \Rightarrow$ không có giá trị nào của x thỏa mãn.
- $x + 7 = -(x - 9) \Leftrightarrow x - 7 = -x + 9 \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Vậy $x \in \{1\}$.

2.41. a) $|x + 25| + |-y + 5| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 25| = 0 \\ |-y + 5| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -25 \\ y = 5. \end{cases}$

b) $|x - 40| + |x - y + 10| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 40| = 0 \\ |x - y + 10| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 40 = 0 \\ x - y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50. \end{cases}$

2.42. a) $A = 1001 + |x + 9| \leq 1001$, với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

Vậy $A_{\max} = 1001$ khi $|x + 9| = 0$ hay $x = -9$.

b) $B = |y - 2| + 34 \geq 34$, với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

Vậy $B_{\min} = 34$ khi $|y - 2| = 0$ hay $y = 2$.

Chuyên đề 4

2.43. a) -1000000

b) -16733

2.44. a) $A = -5$

b) $B = -36$.

2.45. a) Với $a + b = -3; x + y = 17$, ta có

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y) = 17 \cdot (-3) = -51.$$

b) $a + b = -7; x - y = -18$, ta luôn có

$$ax - ay + bx - by = a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b) = (-7) \cdot (-18) = 126.$$

2.46. $a(c - b) - b(-a - c) = ac - ab + ba + bc = ac + bc = c(a + b)$.

2.47. a) $x = -37$;

b) $x \in \{-7; 8\}$.

2.48. a) $(x^2 + 1)(49 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ 49 - x^2 = 0 \end{cases}$

Vì $x^2 \geq 0$, với mọi $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 + 1 > 0$. Từ đó không có x để $x^2 + 1 = 0$.

Ta có $49 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7^2 \Leftrightarrow x = \pm 7$.

Vậy $x \in \{-7; 7\}$.

b) $x \in \{-3; 3\}$.

2.49. a) $(x - 2)(7 - x) > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 7) < 0 \Leftrightarrow x - 2$ và $x - 7$ trái dấu.

Mặt khác, vì $x - 2 > x - 7$ nên suy ra $x - 2 > 0 > x - 7$. Khi đó

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 7.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{3; 4; 5; 6\}$.

b) $(x^2 - 13)(x^2 - 17) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 13$ và $x^2 - 17$ trái dấu.

Mặt khác, $x^2 - 13 > x^2 - 17$ nên $x^2 - 13 > 0 > x^2 - 17$. Khi đó

$$\begin{cases} x^2 - 13 > 0 \\ x^2 - 17 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 13 \\ x^2 < 17 \end{cases} \Leftrightarrow 13 < x < 17.$$

Vì x^2 là số chính phương nên $x^2 = 16 = 4^2 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Vậy $x \in \{-4; 4\}$.

2.50. a) $|6x - 3| = 15 \Leftrightarrow 6x - 3 = \pm 15 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm 5$

• $2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3$.

• $2x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy $x \in \{-2; 3\}$.

b) $|7x - 2| \leq 19 \Leftrightarrow -19 \leq 7x - 2 \leq 19 \Leftrightarrow -17 \leq 7x \leq 21 \Leftrightarrow \frac{-17}{7} \leq x \leq 3$.

Vậy $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

2.51. a) $x, y = -28$.

Có 12 trường hợp sau:

x	-28	-14	-7	-4	-2	-1	1	2	4	7	14	28
y	1	2	4	7	14	28	-28	-14	-7	-4	-2	-1

b) $(2x-1)(4y-2) = -42 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1) = -21$.

Có 8 trường hợp:

$2x-1$	-21	-7	-3	-1	1	3	7	21
$2y-1$	1	3	7	21	-21	-7	-3	-1
x	-10	-3	-1	0	1	2	4	11
y	1	2	4	11	-10	-3	-1	0

2.52. $P = -(x+1)^2 - |3-y| + 35 \leq 35$, với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } P_{\max} = 35 \text{ khi } \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ |3-y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

2.53. Chọn 6 số bất kì. Vì tích của 6 số này là một số âm nên số các thừa số âm là số lẻ, do đó luôn tồn tại một trong 6 số là số âm, kí hiệu là a .

Chia 78 số còn lại (trừ số a) thành 13 nhóm, mỗi nhóm có 6 số. Vì tích của các số trong mỗi nhóm là một số âm nên tích của tất cả 78 số là một số âm (vì tích của 13 số âm), kí hiệu là b .

Vậy tích của tất cả 79 số (là $a.b$) là một số dương.

2.54. a) $x + xy + y = 9 \Leftrightarrow x(1+y) + y = 9 \Leftrightarrow x(1+y) + (y+1) = 9+1$

$$\Leftrightarrow (x+1)(1+y) = 10.$$

Ta có 8 trường hợp sau:

$x+1$	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
$y+1$	-1	-2	-5	-10	10	5	2	1
x	-11	-6	-3	-2	0	1	4	9

y	-2	-3	-6	-11	9	4	1	0
-----	------	------	------	-------	-----	-----	-----	-----

$$\text{b) } xy - 2x - 3y = 5 \Leftrightarrow x(y-2) - 3y + 6 = 5 + 6$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) - 3(y-2) = 11$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(y-2) = 11$$

Ta có 4 trường hợp sau

$x-3$	-11	-1	1	11
$y-2$	-1	-11	11	1
x	-8	2	4	14
y	1	-9	13	3

Chuyên đề 5

2.55. $\text{BC}(12, -30) = \text{B}(60) = \{0; \pm 60; \pm 120; \dots\} = \{60k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

2.56. $\text{ƯC}(-60, 45, -105) = \text{Ư}(15) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}.$

2.57. a) $(3n-4)(3n+19)$ là số chẵn, vì hiệu $(3n+19) - (3n-4) = 23$ nên trong hai số $3n-4$ và $3n+19$ có một số chẵn, một số lẻ.

b) $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ là số lẻ, vì $n(n-1)$ là số chẵn.

2.58. a) $a \in \{-9; -3; -1; 5\}.$

b) $a \in \{-5; -1; 1; 5\}.$

c) $a \in \{-2; -1; 0; 1\}.$

2.59. a) $P = a(a+2) - a(a-5) - 7 = 7(a-1):7.$

b) $Q = (a-2)(a+3) - (a-3)(a+2) = 2a$ là một số chẵn.

2.60. a) $(2x-1)(y-4) = -13 \Rightarrow 2x-1$ và $y-4$ là ước của 13.

$2x-1$	-13	-1	1	13
$y-4$	1	13	-13	-1
x	-6	0	1	7
y	5	17	-9	3

b) $(x = -1; y = 0)$ hoặc $(x = 0; y = 5)$.

c) $5xy - 5x + y = 5 \Leftrightarrow (5x + 1)(y - 1) = 4 \Rightarrow$ tương tự câu b).

2.61. Vì $(5x + 47y) - 5(x + 6y) = 17y$ nên $5x + 47y$ là bội của 17 khi và chỉ khi $x + 6y$ là bội của 17.

2.62. a) $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$;

b) $x \in \{-3; 0; 1; 4\}$.

2.63. a) $x^2 + 2 = x^2 + 2x - 2x - 4 + 6 = x(x + 2) - 2(x + 2) + 6 = (x + 2)(x - 2) + 6$ khi và chỉ khi $x + 2 \in U(6)$.

Vậy $x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}$.

b) $x \in \{-1; 0; 2; 3\}$.

2.64. Đặt $N = (a - 1)(a + 2) + 12$.

- Nếu $a = 3k$ thì $N = (3k - 1)(3k + 2) + 12$

$$\Rightarrow N \not\equiv 3 \pmod{12} \text{ vì } \begin{cases} (3k - 1)(3k + 2) \not\equiv 3 \pmod{3} \\ \not\equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \Rightarrow N \not\equiv 9 \pmod{12}.$$

- Nếu $a = 3k + 1$ thì $N = 3k(3k + 3) + 12 = 9k(k + 1) + 12 \Rightarrow N \equiv 9 \pmod{12}$ vì $\begin{cases} 9k(k + 1) \equiv 0 \pmod{9} \\ \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$.

- Nếu $a = 3k + 2$ thì $N = (3k + 1)(3k + 4) + 12$

$$\Rightarrow N \not\equiv 3 \pmod{12} \text{ vì } \begin{cases} (3k + 1)(3k + 4) \not\equiv 3 \pmod{3} \\ \not\equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \Rightarrow N \not\equiv 9 \pmod{12}.$$

Vậy trong mọi trường hợp thì N không là bội của 9.

b) Chứng minh tương tự câu a).

Chuyên đề nâng cao

2.65. Ta có $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{400} \equiv 1 \pmod{31}$ hay $2^{2000} \equiv 1 \pmod{31}$.

Mặt khác, $2^{2000} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 4 \pmod{31}$ hay $2^{2002} \equiv 4 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2002} - 4 \equiv 0 \pmod{31}$ hay $(2^{2002} - 4) : 31$.

2.66. Ta có $5^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow (5^2)^{35} \equiv 1 \pmod{12}$ hay $5^{70} \equiv 1 \pmod{12}$. (1)

$7^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow 7(5^2)^{35} \equiv 1 \pmod{12}$ hay $7^{50} \equiv 1 \pmod{12}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $5^{70} + 7^{50} \equiv 2 \pmod{12}$.

Vậy $5^{70} + 7^{50}$ chia cho 12 dư 2.

2.67. + Ta có $3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$ hay $3^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$. (1)

Mặt khác, $4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$ hay $4^{2005} \equiv 1 \pmod{11}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia cho 11 dư 2.

+ Lại có $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{668} \equiv 1 \pmod{13}$ hay $3^{2004} \equiv 1 \pmod{13}$
 $\Rightarrow 3^{2005} \equiv 3 \pmod{13}$. (3)

Mặt khác $4^3 = 64 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (4^3)^{668} \equiv 1 \pmod{13}$ hay $4^{2004} \equiv 1 \pmod{13}$
 $\Rightarrow 4^{2005} \equiv 4 \pmod{13}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra A chia cho 13 dư 7.

2.68. Ta có hai trường hợp:

- Nếu $x \equiv 1 \pmod{3}$ thì $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$.
- Nếu $x \equiv 2 \pmod{3}$ thì $x^2 \equiv 2^2 \pmod{3}$ hay $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Vậy ta luôn có $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

2.70. Chứng minh tương tự bài 2.68.

Giả sử phản chứng rằng $x \not\equiv 3$. Áp dụng kết quả bài 2.68, ta có

$$x^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow y^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Điều này không xảy ra vì $y \vdots 3$ thì $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$; còn nếu $y \not\vdots 3$ thì $y^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Vậy $x \vdots 3$. Chứng minh tương tự ta cũng có $y \vdots 3$.

2.71. Đặt $A = 1924^{2003^{2004^n}} + 1920$. Ta có $124 = 4 \cdot 31$. Dễ thấy A chia hết cho 4.

Để chứng minh A chia hết cho 124, ta chứng minh A chia hết cho 31.

Thật vậy, vì $1924 \equiv 2 \pmod{31}$ và $1920 \equiv -2 \pmod{31}$ nên

$$A \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2 \pmod{31}. \quad (1)$$

Lại có $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$. Ta cần tìm số dư của 2003^{2004^n} khi chia cho 5.

Vì $2004^n \vdots 4$ nên $2004^n = 4k \Rightarrow 2003^{2004^n} = 2003^{4k}$.

Vì $2003 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1 \pmod{5}$.

Vậy $A = 2003^{2004^n} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2003^{2004^n} = 5m + 1$.

Suy ra $2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2 \cdot (2^5)^m \equiv 2 \pmod{31}$.

Thay vào (1) ta suy ra $A \equiv 0 \pmod{31}$ hay $A \vdots 31$.

2.72. a) $1991 \equiv 1 \pmod{10}$ nên $1991^{1997} \equiv 1 \pmod{10}$;

$$1997 \equiv -3 \pmod{10} \Rightarrow 1997^2 \equiv 9 \pmod{10} \text{ hay } 1997^2 \equiv -1 \pmod{10}.$$

Suy ra $1997^{1996} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow (1991^{1997} - 1997^{1996}) \equiv 0 \pmod{10}$

Vậy $(1991^{1997} - 1997^{1996}) \vdots 10$.

b) Ta có: $(2^9 + 2^{99}) \vdots 4$. (1)

Mặt khác, $2^9 = 512 \equiv 12 \pmod{25}$ và $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$

$$\Rightarrow (2^{10})^9 \equiv -1 \pmod{25} \quad \text{hay} \quad 2^{90} \equiv -1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{90} \cdot 2^9 \equiv -1 \cdot 12 \pmod{25} \quad \text{hay} \\ 2^{90} \cdot 2^9 \equiv -12 \pmod{25}.$$

Do vậy $(2^9 + 2^{99}) \equiv 0 \pmod{25}$ (2)

Từ (1), (2) và $UCLN(4;25) = 1$ suy ra $(2^9 + 2^{99}) : 100$.

2.73. a) Ta có $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$.

Vì $2^{4n+1} = 2 \cdot 16^n$ mà $16 \equiv 1 \pmod{5}$ nên $2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4n+1} = 5k + 2$ (với $k \in \mathbb{N}$, k chẵn). Khi đó, $2^{2^{4n+1}} = 2^{5k+2} = 4 \cdot (2^5)^k \equiv 4 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}} + 7 \equiv 0 \pmod{11} \text{ hay } (2^{2^{4n+1}} + 7) : 11.$$

b) Ta có $n \equiv 1 \pmod{n-1}$, với mọi $n > 1$.

$$\Rightarrow n^k \equiv 1 \pmod{n-1}, \text{ với mọi } n > 1.$$

Do vậy $n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1 \equiv 1 + 1 + \dots + 1 + 1 \pmod{n-1}$ (vế phải có $n > 1$ số 1)

$$\Rightarrow n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n-1}.$$

Vậy $(n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1) : (n-1)$ (đpcm).

2.74. a) Ta có $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} = 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 64^n$.

Vì $64 \equiv 5 \pmod{59}$ nên $64^n \equiv 5^n \pmod{59}$.

$$\text{Do đó } 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} \equiv 51 \cdot 5^n + 8 \cdot 5^n \pmod{59}$$

$$\Leftrightarrow 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} \equiv 59 \cdot 5^n \pmod{59}$$

$$\Leftrightarrow 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} \equiv 0 \pmod{59}$$

Vậy $(5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}) : 59$.

b) Ta có $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$$\text{Vì } 3^{2n} + 7 = 9^n + 7 \equiv 1 + 7 \pmod{8} \text{ hay } 3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod{8} \quad (1)$$

$$\Rightarrow (3^{2n} + 7) : 8. \text{ Mặt khác } 4^{2n} = 16^n : 8 \text{ nên } (4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 8$$

$$\text{Vì } 4^{2n} \equiv 1 \pmod{3}; 7 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^{2n} - 7 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Do đó } (4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 3 \quad (2)$$

$$\text{Vì } 4^{2n} - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{7}; 3^{2n} = 9^n \equiv 2^n \pmod{7}$$

$$\text{nên } 4^{2n} - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{7}. \text{ Do đó } (4^{2n} - 3^{2n} - 7) : 7 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và $(8 \cdot 3 \cdot 7) = 1$ nên $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) : (8 \cdot 3 \cdot 7)$

2.75 Rõ ràng với $n = 0$ hoặc $n = 1$ thì $(9^n + 1) \not\equiv 100$

Với $n \geq 2$, ta xét hai trường hợp

$$n = 2k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 9^{2k} + 1 = 81^k + 1 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 10 \Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 100$$

$$n = 2k (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 9^n + 1 = 9^{2k+1} + 1 = 9 \cdot 81^k + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 4 \Rightarrow (9^n + 1) \not\equiv 100$$

Vậy $(9^n + 1) \not\equiv 100$, với mọi $n \in \mathbb{N}$

2.76 a) Ta có $2^{3n+4} + 3^{2n+1} = 16 \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n$

$$\text{Vì } 16 \equiv -3 \pmod{19} \Rightarrow 16 \cdot 8^n \equiv -3 \cdot 8^n \pmod{19}$$

$$\text{nên } (16 \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n) : 19 \Leftrightarrow (-3) \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Leftrightarrow 9^n - 8^n \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow 9^n \equiv 8^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow n = 0, \text{ vì trái lại, từ } 9^n \equiv 8^n \pmod{19} \Rightarrow 9 \equiv 8 \pmod{19} : \text{ vô lý!}$$

Vậy $n = 0$

b) Ta xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $n = 3k$ (với $k \in \mathbb{N}$) thì $n \cdot 2^n : 3 \Rightarrow n \cdot 2^n + 1$

Trường hợp 2: Nếu $n = 3k + 1$ (với $k \in \mathbb{N}$) thì

$$n \cdot 2^n + 1 : 3 \Rightarrow (3k + 1) \cdot 2^{3k+1} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k+1} = 3k \cdot 2^{3k+1} + 2 \cdot 8^k + 1$$

$$\text{Do đó: } n \cdot 2^n + 1 : 3 \Leftrightarrow (2 \cdot 8^k + 1) : 3$$

$$\text{Vì } 8 \equiv -1 \pmod{3} \Leftrightarrow 8^k \equiv (-1)^k \pmod{3}$$

$$\text{suy ra } 2 \cdot 8^k + 1 : 3 \Leftrightarrow 2 \cdot (-1)^k + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow k \text{ chẵn} \Leftrightarrow k = 2m (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Do đó: } n = 6m + 1 \text{ với } m \in \mathbb{N}$$

Trường hợp 3: Nếu $n = 3k + 2$ (với $k \in \mathbb{N}$) thì

$$n \cdot 2^n + 1 = (3k + 2) \cdot 2^{3k+2} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+2} + 2 \cdot 2^{3k+2} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+2} + 8^{k+1} + 1$$

$$\text{Do đó: } (n \cdot 2^n + 1) : 3 \Leftrightarrow (8^{k+1} + 1) : 3$$

$$\text{Vì } 8 \equiv -1 \pmod{3} \text{ nên } 8^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \pmod{3}$$

$$\text{suy ra: } (8^{k+1} + 1) : 3 \Leftrightarrow (-1)^{k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow k + 1 \text{ lẻ} \Leftrightarrow k \text{ chẵn} \Leftrightarrow k = 2m (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Do đó: } n = 6m + 2 \text{ (với } m \in \mathbb{N})$$

Vậy điều kiện cần tìm của m là $m \equiv 1 \pmod{6}$ hoặc $m \equiv 2 \pmod{6}$

2.77.

a) Vì $7^4 \equiv 01 \pmod{100}$ nên ta tìm số dư khi chia 9^{7^4} cho 4

$$\text{Ta có: } 9 \equiv 1 \pmod{4} \text{ nên } 9^{7^4} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{Do đó: } 9^{7^4} = 4k + 1 (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A = 7^{9^{7^4}} = 7^{4k+1} = 7 \cdot (7^4)^k \equiv 7 \cdot 01 \pmod{100} \Rightarrow 7^{9^{7^4}} \equiv 07 \pmod{100}$$

Vậy A có hai chữ số tận cùng là 07

b) Vì $29^{10} \equiv 01(\text{mod}100)$ nên ta tìm số dư khi chia 9^{2012} cho 10

Ta có: $9 \equiv -1(\text{mod}10)$ nên $9^{2012} \equiv 1(\text{mod}10) \Rightarrow 9^{2012} \equiv 10k + 1$ với $k \in N$

Do đó: $B = 29^{10k+1} = 29.(29^{10})^k \equiv 29.01(\text{mod}100)$

Hay $B \equiv 29(\text{mod}100)$

Vậy B có hai chữ số tận cùng là 29.

2.78.

$$C = 1978^{1986}$$

a) Vì $1978 \equiv 8(\text{mod}10) \Rightarrow 1978^4 \equiv 6(\text{mod}10)$

Mặt khác $1986^8 \equiv 0(\text{mod}4)$ nên $1986^8 = 4k(k \in N) \Rightarrow C = 1986^{4k} \equiv 6(\text{mod}10)$

Vậy chữ số tận cùng của C là 6

b) Vì $C \equiv 8(\text{mod}10)$ nên $C^{20} \equiv 76(\text{mod}100) \Rightarrow C^{20m} \equiv 76(\text{mod}100)$

Mặt khác $1986 \equiv 6(\text{mod}20) \Rightarrow 1986^8 \equiv 16(\text{mod}20)$

Do đó: $1986^8 = 20k + 16(k \in N)$

$$\Rightarrow C = 1978^{20k+16} = 1978^{16} \cdot (1978^{20})^k \equiv 1986^{16} \cdot 76(\text{mod}100)$$

Lại có: $1978 \equiv -22(\text{mod}100) \Rightarrow 1978^4 \equiv 56(\text{mod}100)$

$$\Rightarrow (1978^4)^4 \equiv 56^4(\text{mod}100) \text{ hay } 1978^{16} \equiv 96(\text{mod}100)$$

Từ đó ta có: $C \equiv 96.76(\text{mod}100) \Rightarrow C \equiv 76(\text{mod}100)$

Vậy C có hai chữ số tận cùng là 76

----- CHÚC CÁC EM HỌC TỐT -----

THCS.TOANMATH.com