

BÀI 6. TAM GIÁC CÂN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa về tam giác cân, tam giác vuông cân, tam giác đều.
- + Nắm được các tính chất và dấu hiệu nhận biết của tam giác cân, tam giác đều.

❖ Kỹ năng

- + Biết vẽ một tam giác cân, tam giác vuông cân và tam giác đều.
- + Nhận biết và chứng minh được một tam giác là tam giác cân, tam giác vuông cân và tam giác đều.
- + Vận dụng các tính chất của tam giác cân, tam giác vuông cân và tam giác đều để tính số đo góc, chứng minh các góc hay các cạnh bằng nhau.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Tam giác cân

Định nghĩa

Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Tam giác ABC có $AB = AC$ được gọi là tam giác

ABC cân đỉnh A, trong đó:

* AB, AC là cạnh bên và BC là cạnh đáy.

* \widehat{B}, \widehat{C} là các góc ở đáy; \widehat{A} là góc ở đỉnh.

Tính chất

Định lý 1: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau. Nếu ΔABC cân đỉnh A thì $\widehat{B} = \widehat{C}$.

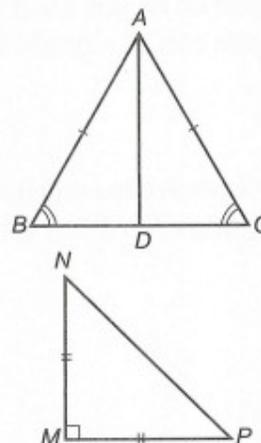
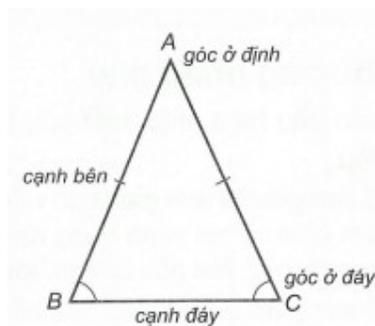
Định lý 2: Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân. Nếu ΔABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$ thì ΔABC cân đỉnh A.

Tam giác vuông cân

Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.

Nếu ΔMNP có $\begin{cases} MN = MP \\ MN \perp MP \end{cases}$ thì ΔMNP là tam giác

vuông cân tại M.



2. Tam giác đều

Định nghĩa

Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

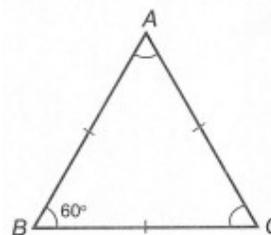
Tính chất

* Trong một tam giác đều, mỗi góc bằng 60° .

ΔABC là tam giác đều thì $\begin{cases} AB = BC = CA \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ \end{cases}$

* Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

* Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Nhận biết tam giác cân, tam giác đều

🔧 Phương pháp giải

Dựa vào dấu hiệu nhận biết của tam giác cân, tam giác đều.

1. Một tam giác là tam giác cân nếu:

- Tam giác có hai cạnh bằng nhau.
- Tam giác có hai góc bằng nhau.

2. Một tam giác là tam giác đều nếu:

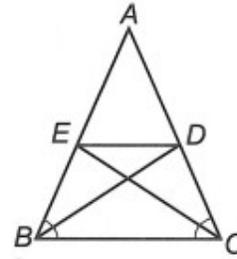
- Tam giác có ba cạnh bằng nhau.
- Tam giác có ba góc bằng nhau.
- Tam giác cân có một góc bằng 60° .

Bước 1. Xác định cặp cạnh (góc) bằng nhau của tam giác cần chứng minh thông qua phân tích dữ kiện bài toán.

Bước 2. Chứng minh cặp cạnh (góc) tương ứng bằng nhau và kết luận.

Quá trình chứng minh, có thể cần dựng thêm đường phụ.

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi BD, CE lần lượt là phân giác trong góc B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ADE là tam giác cân.



Hướng dẫn giải

Phân tích: Có hai cách để chứng minh $\triangle ADE$ cân là ta chứng minh $AD = AE$ hoặc $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$.

Ta có thể chứng minh cặp góc (cạnh) bằng nhau qua việc xét cặp tam giác bằng nhau.

+) Nếu chứng minh $AD = AE$ ta có thể ghép vào cặp tam giác $\triangle ADB$ và $\triangle AEC$.

+) Cách còn lại khó khăn hơn vì \widehat{ADE} ; \widehat{AED} chỉ là góc của $\triangle ADE$.

Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$ (do BD là phân giác của \widehat{ABC});

$\widehat{ACE} = \widehat{ECB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$ (do CE là phân giác của \widehat{ACB}).

Mà $\triangle ABC$ cân đỉnh A nên $AB = AC$

và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$.

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle AEC$ có

$\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (góc chung), $AB = AC$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

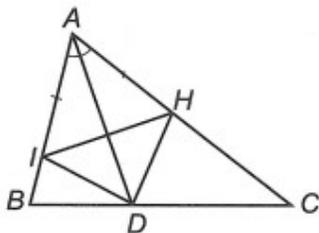
Do đó $\triangle ADB = \triangle AEC$ (g.c.g).

Suy ra $AD = AE$ (cặp cạnh tương ứng).

Vậy $\triangle ADE$ cân tại A.

🌈 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác trong góc A ($D \in BC$). Trên cạnh AB lấy điểm I, trên cạnh AC lấy điểm H sao cho $AI = AH$. Chứng minh rằng tam giác IDH là tam giác cân.



Hướng dẫn giải

Do AD là phân giác trong góc A nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Xét $\triangle ADI$ và $\triangle ADH$ có

$AI = AH$ (giả thiết),

$\widehat{IAD} = \widehat{HAD}$ (chứng minh trên),

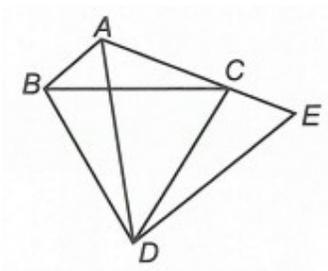
AD chung.

Do đó $\triangle ADI = \triangle ADH$ (c.g.c) $\Rightarrow DI = DH$ (cặp cạnh tương ứng).

Vậy tam giác DHI là tam giác cân đỉnh D.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Trên tia phân giác của góc A, lấy điểm D sao cho $AD = AB + AC$. Chứng minh rằng tam giác BCD đều.

Hướng dẫn giải



Do AD là phân giác trong góc A nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AD$.

Do $AD = AB + AC$ (giả thiết) nên ta có $AE = AB + AC$.

$\Rightarrow AE > AC$ hay C nằm giữa A và E.

Khi đó, ta có $AC + EC = AB + AC \Rightarrow EC = AB$.

Xét $\triangle ADE$ có $AD = AE$, $\widehat{DAE} = 60^\circ$. Suy ra $\triangle DAE$ đều.

Suy ra $DA = DE = AE$, $\widehat{DAE} = \widehat{DEA} = \widehat{ADE} = 60^\circ$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ECD$ có

$AB = EC$ (chứng minh trên),

$\widehat{BAD} = \widehat{CED} = 60^\circ$, $DA = DE$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle ABD = \triangle ECD$ (c.g.c).

Suy ra $DB = DC$ (hai cạnh tương ứng),

$\widehat{ADB} = \widehat{CDE}$ (hai góc tương ứng). (1)

Theo chứng minh trên, ta có $\widehat{ADE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{CDE} = 60^\circ$.

Do đó từ (1), ta có $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 60^\circ$.

Vậy tam giác BCD có $DB = DC$ và $\widehat{BDC} = 60^\circ$ nên $\triangle BCD$ đều.

Định hướng:

Cần chứng minh $\begin{cases} DB = DC \\ \widehat{BDC} = 60^\circ \end{cases}$

Bài tập tự luyện dạng 1

Chọn đáp án đúng từ câu 1 đến câu 2

Câu 1: Tam giác cân là tam giác

- A. có hai đường cao bằng nhau.
- B. có hai đường trung tuyến bằng nhau.
- C. có hai cạnh bằng nhau.
- D. có hai tia phân giác trong bằng nhau.

Câu 2: Cho tam giác ABC cân đỉnh A có các đường trung tuyến BD, CE. Tam giác nào dưới đây là tam giác cân?

- A. $\triangle ABD$. B. $\triangle BCE$. C. $\triangle ADE$. D. $\triangle BDE$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$.

- a) Chứng minh rằng tam giác ABC cân.
- b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Chứng minh rằng tam giác BCD là tam giác vuông.

Câu 4: Cho tam giác nhọn ABC có AD là phân giác trong góc A ($D \in BC$). Đường thẳng qua D song song với AB cắt AC tại I, đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại K. Chứng minh rằng $\triangle IDK$ là tam giác cân.

Dạng 2: Tính số đo góc, chứng minh các góc bằng nhau

Phương pháp giải

* Sử dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều. **Ví dụ:** Cho tam giác ABC cân tại A. Tính số đo các

* Sử dụng tính chất tổng ba góc trong một tam giác. góc còn lại của tam giác ABC nếu

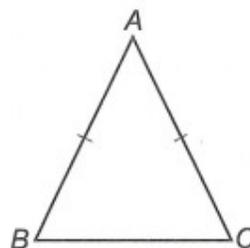
a) $\widehat{A} = 80^\circ$.

b) $\widehat{B} = 75^\circ$.

Hướng dẫn giải

Bước 1. Xác định cặp góc bằng nhau qua tính chất của tam giác cân.

Bước 2. Sử dụng tính chất tổng ba góc trong tam giác để tính góc tương ứng.



Do tam giác ABC cân đỉnh A nên ta có $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Mà ta luôn có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

a) Với $\widehat{A} = 80^\circ$ ta có

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

b) Do $\widehat{B} = 75^\circ$ nên $\widehat{C} = 75^\circ$.

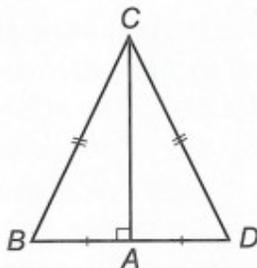
Suy ra

$$\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (75 + 75) = 30^\circ.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = \frac{1}{2}BC$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $DA = BA$.

Suy ra $BD = DA + AB = 2AB = BC$. (1)

Xét $\triangle CAB$ và $\triangle CAD$ có $\begin{cases} AB = AD \\ \widehat{CAB} = \widehat{CAD} = 90^\circ \\ CA \text{ chung} \end{cases}$

Do đó $\Delta CAB = \Delta CAD$ (c.g.c) $\Rightarrow CD = CB$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) ta có $BC = CD = DB$ nên ΔBCD là tam giác đều.

Suy ra $\widehat{CBD} = 60^\circ$ hay $\widehat{B} = 60^\circ$.

Mà ΔABC vuông tại A nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Vậy ΔABC có $\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 30^\circ$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tam giác ABC là tam giác gì nếu biết $\widehat{A} = 80^\circ$ và $\widehat{B} : \widehat{C} = 1 : 4$?

Câu 2: Cho tam giác nhọn ABC . Kẻ $AD \perp BC$ ($D \in BC$) và $BE \perp AC$ ($E \in AC$). Gọi H là giao điểm của AD và BE . Biết rằng $AH = BC$, tính số đo \widehat{BAC} .

Câu 3: Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\widehat{A} + \frac{3}{2}\widehat{B} = 150^\circ$ và $2\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B} = 150^\circ$?

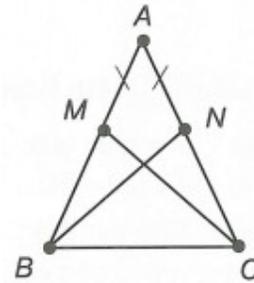
Dạng 3: Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải

* Sử dụng tính chất: Tam giác cân có hai cạnh bên bằng nhau (dành cho hai đoạn thẳng có một đầu mút chung).

* Gắn các đoạn thẳng cần chứng minh vào hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau (có thể áp dụng với mọi cặp đoạn thẳng).

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng $CM = BN$.



Hướng dẫn giải

Do CM và BN là hai đoạn thẳng không có đầu mút chung nên ta sẽ chứng minh $CM = BN$ thông qua hai tam giác bằng nhau.

Vì ΔABC cân đỉnh A nên $AB = AC$ và $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Suy ra $AM + MB = AN + NC$

Lại có $AM = AN$ nên $BM = CN$.

Xét ΔBCM và ΔCBN có

$BM = CN$ (chứng minh trên),

$\widehat{MBC} = \widehat{NCB}$ (chứng minh trên),

Bước 1. Xác định phương pháp chứng minh tương ứng đối với hai đoạn thẳng.

Bước 2. Lập luận và chứng minh.

BC là cạnh chung

Do đó $\triangle BCM = \triangle CBN$ (c.g.c)

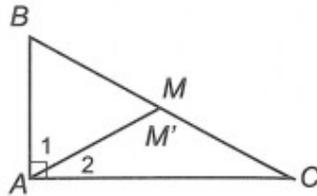
Suy ra $CM = BN$ (hai cạnh tương ứng).

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh huyền BC.

Chúng minh rằng $MA = MB = MC = \frac{1}{2} BC$.

Hướng dẫn giải



Gọi M' là điểm nằm trên cạnh BC thỏa mãn $M'B = M'A$.

Khi đó $\triangle M'AB$ cân đỉnh M' .

$$\Rightarrow \widehat{M'BA} = \widehat{M'AB} \text{ hay } \widehat{M'AB} = \widehat{B}. \quad (1)$$

Do $\triangle ABC$ vuông tại A nên ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ = \widehat{A}$.

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{M'AB} + \widehat{M'AC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được $\widehat{M'AB} + \widehat{C} = \widehat{M'AB} + \widehat{M'AC}$.

Suy ra $\widehat{C} = \widehat{M'AC}$ hay $\widehat{M'CA} = \widehat{M'AC}$.

Do đó $\triangle M'AC$ cân đỉnh M' , suy ra $M'A = M'C$.

Kết hợp với $M'B = M'A$ (cách dựng), ta có $M'B = M'C = M'A$ nên M' là trung điểm của đoạn BC.

Vậy $M' \equiv M$ nên ta chứng minh được $MB = MC = MA$.

Phân tích: Ta cần thiết lập mối quan hệ giữa MA và MB. Vì vậy, ta sẽ chứng minh bài toán dựa trên ý tưởng: Gọi điểm M' thỏa mãn $M' \in BC$ và $M'A = M'B$ sau đó ta chứng minh $M' \equiv M$.

Bình luận: Bạn đọc có thể tự chứng minh chiều ngược của bài toán trên: “Cho tam giác MAB cân đỉnh M. Trên tia đối của tia MB, lấy điểm C sao cho M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông”.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 36^\circ$. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại điểm D. Chứng minh rằng $DA = DB = BC$.

Câu 2: Cho tam giác ABC cân đỉnh A, gọi M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D. Từ D kẻ đường vuông góc với AM tại K và kéo dài cắt cạnh AC tại E. Chứng minh $AD = AE$.

Dạng 4: Các bài toán tổng hợp

🧩 Phương pháp giải

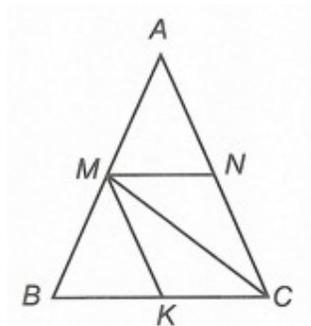
Sử dụng kết hợp tính chất của tam giác cân, quan hệ song song và một số kết quả đã được chứng minh trong các dạng trước đó.

🧩 Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho tam giác ABC cân đỉnh A có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Chứng minh rằng

$$MN \parallel BC \text{ và } MN = \frac{1}{2}BC.$$

Hướng dẫn giải



Do ABC cân đỉnh A nên $AB = AC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Lại do M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC nên $AM = BM = \frac{1}{2}AB$, $AN = CN = \frac{1}{2}AC$

Do đó $AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân đỉnh $A \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

Mà ΔAMN có $\widehat{AMN} + \widehat{ANM} + \widehat{MAN} = 180^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \frac{180^\circ - \widehat{MAN}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Mặt khác $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$. Mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel BC$.

Qua M dựng đường thẳng song song với AC , cắt cạnh BC tại điểm K .

$\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{ACB}$ (đồng vị). Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{MKB} = \widehat{ABC}$.

Xét ΔMBK có $\widehat{MKB} = \widehat{MBK}$ nên ΔMBK cân đỉnh $M \Rightarrow MK = MB$.

Ta có $MK = MB = MA = AN = CN$.

Lại có $MK \parallel AC$ nên $\widehat{BMK} = \widehat{MAN}$ (đồng vị).

Xét ΔAMN và ΔMBK có

$$\widehat{AMN} = \widehat{MBK}, AM = MB, \widehat{BMK} = \widehat{MAN}.$$

Do đó $\triangle AMN = \triangle MBK$ (g.c.g) $\Rightarrow MN = BK$ (hai cạnh tương ứng). (1)

Xét $\triangle MNC$ và $\triangle CKM$ có

$\widehat{NMC} = \widehat{KCM}$ (do $MN \parallel BC$), cạnh CM chung, $\widehat{NCM} = \widehat{KMC}$ (do $MK \parallel AC$).

Do đó $\triangle MNC = \triangle CKM$ (g.c.g) $\Rightarrow MN = CK$ (hai cạnh tương ứng). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN = BK = CK$.

Mà $BK + CK = BC$ nên K là trung điểm của BC .

Do đó $MN = BK = CK = \frac{BC}{2}$ (điều phải chứng minh).

Hướng tư duy:

* Chứng minh quan hệ song song có thể sử dụng mối quan hệ về góc (trụ tiên). Do đó ta chứng minh cặp góc so le trong hoặc đồng vị bằng nhau.

* Chứng minh hai góc bằng nhau qua tính chất của tam giác cân hoặc hai đường thẳng song song.

* Chứng minh quan hệ độ dài đoạn thẳng có thể sử dụng các đoạn thẳng tương ứng trong hai tam giác bằng nhau.

Bình luận: Đây là bài toán điển hình trong việc sử dụng các mối quan hệ từ tam giác cân cho đến các đường thẳng song song. Có thể mở rộng kết quả của bài toán này cho tam giác ABC bất kỳ: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó, ta có $MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC$.

Lưu ý việc chứng minh song song ($MN \parallel BC$) có thể thực hiện thông qua việc dựng đường thẳng $MN' \parallel BC$ với $N' \in BC$. Sau đó, ta tìm cách chỉ ra $N' \equiv N$.

📌 Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Cho tam giác ABC có $BC = 2AB$, M là trung điểm của cạnh BC , D là trung điểm của BM . Chứng minh rằng $AC = 2AD$.

Câu 2: Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} < 90^\circ$ kẻ BD vuông góc với AC . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = AD$. Chứng minh rằng

a) $DE \parallel BC$.

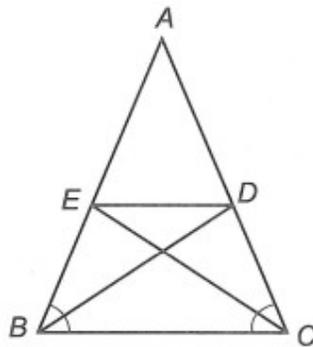
b) $CE \perp AB$.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Nhận biết tam giác cân, tam giác đều

Câu 1: Chọn C

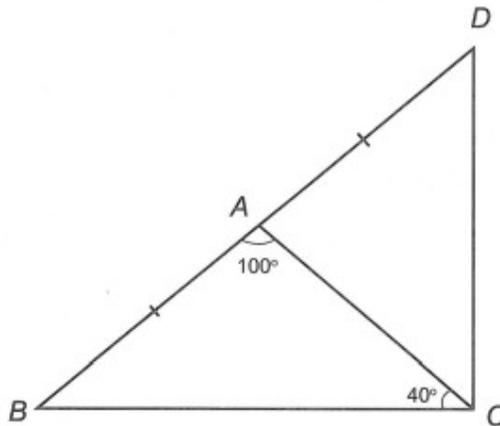
Câu 2: Chọn C



Xét $\triangle ADE$ có $AE = \frac{1}{2}AB$, $AD = \frac{1}{2}AC$ mà $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân), nên $AE = AD$.

Vậy $\triangle ADE$ cân tại A.

Câu 3:



a) Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ.$$

Do đó, $\triangle ABC$ cân đỉnh A.

b) $\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC$. Mà $AB = AD$ (giả thiết)

$$\Rightarrow AC = AD \Rightarrow \triangle ACD \text{ cân đỉnh A.}$$

Xét $\triangle ACD$ có \widehat{BAC} là góc ngoài đỉnh A

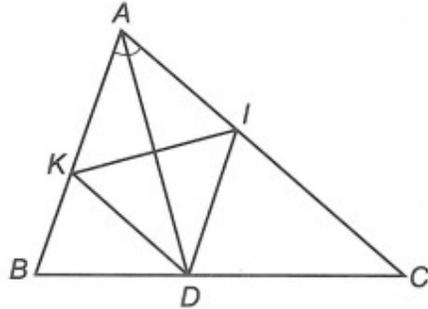
$$\Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{ADC} = \widehat{BAC} = 100^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{ACD} = \widehat{ADC} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Khi đó $\widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$.

Do đó $\triangle BCD$ vuông tại C.

Câu 4:



Ta có $\widehat{KAD} = \widehat{IAD}$ (tính chất đường phân giác).

Mà $DI \parallel AB \Rightarrow \widehat{IDA} = \widehat{DAK}$ (hai góc so le trong).

$DK \parallel AC \Rightarrow \widehat{KDA} = \widehat{DAI}$ (hai góc so le trong).

Suy ra $\widehat{IDA} = \widehat{KDA}$.

Xét $\triangle ADI$ và $\triangle ADK$ có

$\widehat{KAD} = \widehat{IAD}$, AD chung, $\widehat{KDA} = \widehat{IDA}$.

Do đó $\triangle ADI = \triangle ADK$ (g.c.g)

$\Rightarrow DI = DK$ (hai cạnh tương ứng).

Do đó $\triangle DIK$ cân tại D.

Dạng 2. Tính số đo góc, chứng minh các góc bằng nhau

Câu 1:

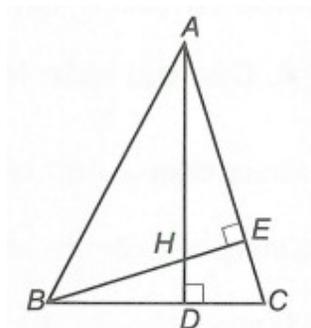
Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong tam giác). Vì $\widehat{A} = 80^\circ$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 100^\circ$

Theo giả thiết, ta có $\frac{\widehat{B}}{1} = \frac{\widehat{C}}{4}$. Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{\widehat{B}}{1} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{1 + 4} = \frac{100^\circ}{5} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 20^\circ, \widehat{C} = 4 \cdot 20 = 80^\circ.$$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{C} = 80^\circ$ nên $\triangle ABC$ cân đỉnh B.

Câu 2:



Ta có $\widehat{DAC} + \widehat{DCA} = 90^\circ$ (do $\triangle ADC$ vuông tại D) và $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 90^\circ$ (do $\triangle BCE$ vuông tại E).

Suy ra $\widehat{DAC} + \widehat{DCA} = \widehat{ECB} + \widehat{EBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{CBE}$.

Xét $\triangle AHE$ và $\triangle BCE$ có $\widehat{AEH} = \widehat{BEC} = 90^\circ$, $AH = BC$ (giả thiết), $\widehat{HAE} = \widehat{CBE}$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle AHE = \triangle BCE$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AE = BE$ (hai cạnh tương ứng).

Xét $\triangle ABE$ có $AE = BE$, $\widehat{AEB} = 90^\circ$. Suy ra $\triangle AEB$ là tam giác vuông cân tại E.

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{BAE} = 45^\circ$.

Câu 3:

Ta có $\widehat{A} + \frac{3}{2}\widehat{B} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 150^\circ - \frac{3}{2}\widehat{B}$.

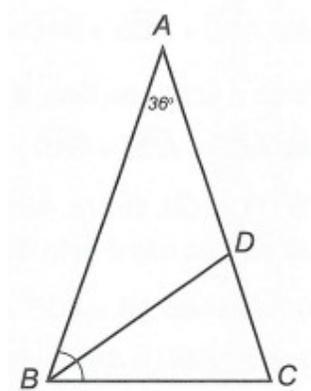
Mà $2\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B} = 150^\circ \Rightarrow 2\left(150^\circ - \frac{3}{2}\widehat{B}\right) + \frac{1}{2}\widehat{B} = 150^\circ \Rightarrow 300^\circ - 3\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{B} = 150^\circ \Rightarrow \frac{5}{2}\widehat{B} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{A} = 150^\circ - \frac{3}{2}.60^\circ = 60^\circ$.

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ$, suy ra $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Dạng 3. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

Câu 1:



Ta có $AB = AC$, $\widehat{B} = \widehat{C}$ (do $\triangle ABC$ cân đỉnh A).

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác).

$$\widehat{A} = 36^\circ \Rightarrow 36^\circ + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 144^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Do BD là tia phân giác góc B nên $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} = \frac{1}{2}\widehat{B} = 36^\circ$.

Xét $\triangle ABD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 36^\circ$ nên $\triangle DAB$ cân đỉnh $D \Rightarrow DB = DA$ (1)

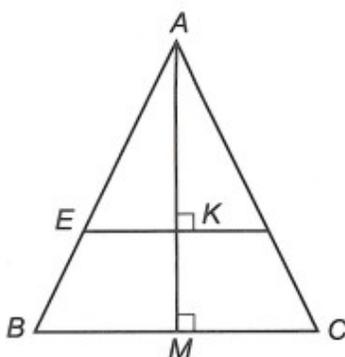
Có \widehat{BDC} là góc ngoài đỉnh D của $\triangle ABD$ nên

$$\widehat{BDC} = \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ.$$

Xét $\triangle BCD$ có $\widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 72^\circ$ nên $\triangle BCD$ cân đỉnh $B \Rightarrow BD = BC$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $DA = DB = BC$.

Câu 2:



Ta có $\triangle ABC$ cân đỉnh A nên $AB = AC$, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có $AB = AC$, $BM = CM$ (giả thiết), AM chung.

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 180^\circ$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$

$\Rightarrow AM \perp BC$.

Ta có $DE \perp AM$ (giả thiết) $\Rightarrow DE \parallel BC$ (cùng vuông góc với AM)

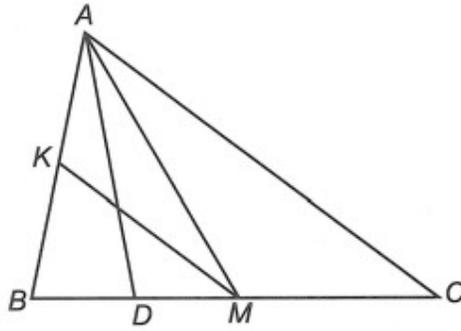
$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (các góc đồng vị).

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$.

Suy ra $\triangle ADE$ cân đỉnh A . Suy ra $AD = AE$.

Dạng 4. Các bài toán tổng hợp

Câu 1:



Do M là trung điểm của BC nên $BM = CM = \frac{BC}{2} = AB$.

Gọi K là trung điểm của AB nên $AK = BK = \frac{AB}{2}$.

Ta có D là trung điểm của BM nên $BD = MD = \frac{BM}{2}$.

Suy ra $AK = BK = BD = MD$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBK$ có $AB = MB$, \widehat{ABM} chung, $BD = BK$.

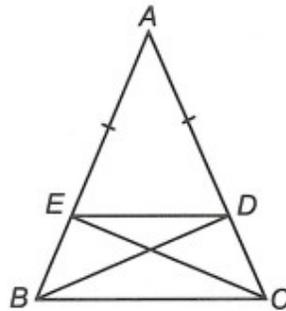
Do đó $\triangle ABD = \triangle MBK$ (c.g.c).

Suy ra $AD = MK$ (hai cạnh tương ứng).

Lại có $MK = \frac{AC}{2}$ (áp dụng kết quả phần ví dụ).

Suy ra $AD = \frac{AC}{2}$ hay $AC = 2AD$.

Câu 2:



a) Do $\triangle ABC$ cân đỉnh A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Mà $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. (1)

Ta có $\triangle ADE$ cân đỉnh A (do $AD = AE$) nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$.

Mà $\widehat{AED} + \widehat{ADE} + \widehat{EAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AED} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{DAE}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$.

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DE \parallel BC$.

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có $AB = AC$, \widehat{BAC} chung, $AD = AE$.

Do đó $\triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow CE \perp AB$ (điều phải chứng minh).