CHUYÊN ĐỀ: TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG, TA-LÉT VÀ LIÊN QUAN

MỤC LỤC

Chủ đề 1: ĐỊNH LÝ TALET TRONG TAM GIÁC

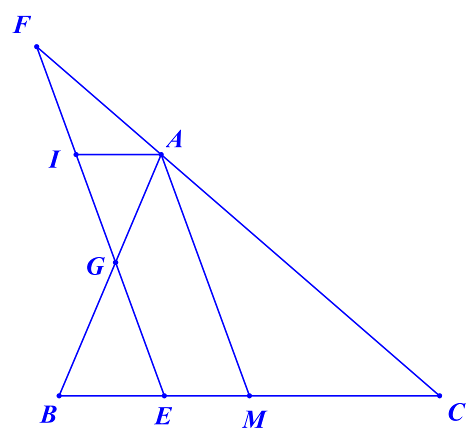
Bài 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Từ một điểm E trên cạnh BC ta kẻ đường thẳng Ex song song với AM và cắt tia CA, BA lần lượt tại F và G. Chứng minh: $EF + EG = 2.AM$.

- ***Tìm cách giải.***

- Để chứng minh $EF + EG = 2.AM$, suy luận thông thường là dựng đoạn thẳng trên tia EF, EG bằng đoạn thẳng AM, rồi biến đổi cộng trừ đoạn thẳng. Chẳng hạn trong ví dụ này, qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt EF tại I. Dễ dàng nhận thấy EI = AM, do vậy chỉ cần chứng minh GI = IF là xong. Tuy nhiên để chứng minh GI = IF bằng cách ghép vào hai tam giác bằng nhau là khó khăn, chính vì vậy chúng ta chứng minh tỉ số bằng nhau có cùng mẫu số. Quan sát kỹ nhận thấy GI và IF có thể đặt trên mẫu số là IE! Từ đó vận dụng định lý và hệ quả Ta-let để chứng minh $\frac{FI}{IE} = \frac{IG}{IE}$ là xong.

- Ngoài cách trên, chúng ta có thể biến đổi kết luận thành tổng tỉ số và chứng minh $\frac{FF}{AM} + \frac{EG}{AM} = 2$ là xong. Do đó vận dụng định lý Ta-lét và biến đổi linh hoạt tỷ lệ thức là yêu cầu tất yếu trong dạng toán này.

- ***Trình bày lời giải***



Cách 1. Giả sử E thuộc đoạn BM.

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại I. Ta có AMEI là hình bình hành, suy ra EI = AM.

Áp dụng định lý Ta-lét, xét ΔEFC có AI // CE,

AM//EF $\Rightarrow \frac{IF}{IE} = \frac{FA}{AC} = \frac{EM}{MC} (1)$

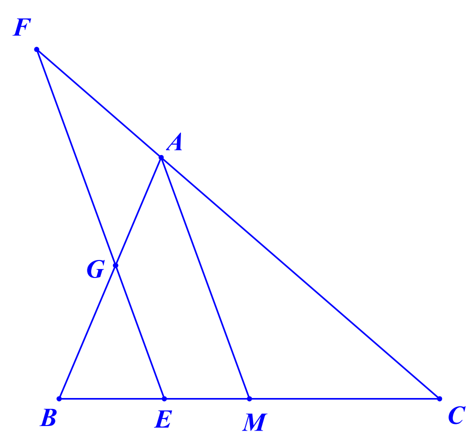
Xét ΔGEB có AI // BE, AM // GE

$\Rightarrow \frac{IG}{IE} = \frac{AG}{AB} = \frac{EM}{BM} (2)$

Từ (1) và (2), kết hợp với BM = MC

Suy ra IG = IF.

Ta có: $EF + EG = EI + IF + EI - IG = 2.EI = 2.AM$



Cách 2. Giả sử E thuộc đoạn BM.

Theo hệ quả định lý Ta-lét:

Xét ΔEFC có $EF//AM \Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{EC}{CM} \quad (3)$

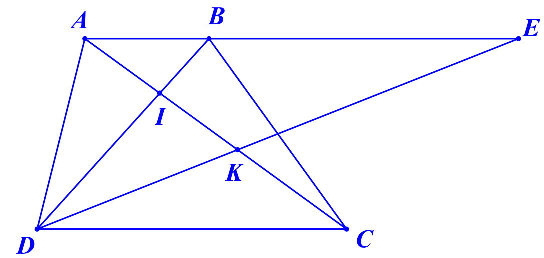
Xét ΔABM có $EG//AM \Rightarrow \frac{EG}{AM} = \frac{BE}{BM} \quad (4)$

Cộng vế theo vế (3) và (4) ta có:

$\frac{EF}{AM} + \frac{EG}{AM} = \frac{EC}{CM} + \frac{BE}{BM}$ hay $\frac{EF + EG}{AM} = \frac{BC}{BM} = 2.$

Suy ra $EF + EG = 2.AM$.

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB//CD). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = CD. Gọi giao điểm của AC với DB và DE theo thứ tự là I và K. Chứng minh hệ thức $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$.



- ***Tìm cách giải.***

Nhận thấy rằng: chúng ta không thể chứng minh trực tiếp $\frac{AK}{KC}=\frac{AC}{CI}$, do vậy nên sử dụng tỉ số trung gian. Khai thác BE = CD và AB//CD rất tự nhiên chúng ta vận dụng hệ quả định lý Ta-lét.

- ***Trình bày lời giải***

Đặt AB = a, BE = CD = b. Theo hệ quả định lý Ta-lét

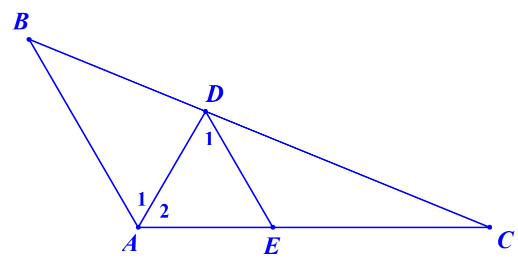
Ta có: $AE//CD \Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{AE}{CD}=\frac{a+b}{b}$ (1)

$AB//CD \Rightarrow \frac{AI}{CI}=\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{AI+CI}{CI}=\frac{a+b}{b} \Rightarrow \frac{AC}{CI}=\frac{a+b}{b}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AK}{KC}=\frac{AC}{CI}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120°$, AD là đường phân giác. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$.

- ***Lời giải***



Kẻ DE // AB, ta có:

$\widehat{D_1}=\widehat{A_1}=60°; \widehat{A_2}=60°$ nên tam giác ADE đều. Suy ra AD = AE = DE.

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét: $\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{AC}$ hay $\frac{AD}{AB}=\frac{CE}{AC}$.

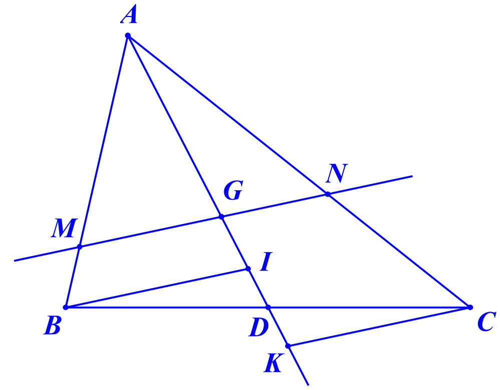
Mặt khác $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AC}$ nên $\frac{AD}{AB}+\frac{AD}{AC}=\frac{CE}{AC}+\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AC}=1.$

Suy ra $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AD}$.

Nhận xét. Những bài toán chứng minh đẳng thức có nghịch đảo độ dài đoạn thẳng, bạn nên biến đổi và chứng minh hệ thức tương đương có tỉ số của hai đoạn thẳng.

Bài 4. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3;$ b) $\frac{BM}{AM}+\frac{CN}{AN}=1.$



- ***Tìm cách giải.***

Để tạo ra tỉ số $\frac{AB}{AM};\frac{AC}{AN}$ chúng ta cần vận dụng định lý Ta-let, mà hình vẽ chưa có yếu tố song song do vậy chúng ta cần kẻ thêm yếu tố song song. Kẻ đường thẳng song song với MN từ B và C vừa khai thác được yếu tố trọng tâm, vừa tạo ra được tỉ số yêu cầu.

- ***Trình bày lời giải***

Trường hợp 1. Nếu MN // BC, thì lời giải giản đơn

Trường hợp 2. Xét MN không song song với BC.

a) Gọi giao điểm của AG và BC là D $\Rightarrow BD = CD$.

Kẻ BI // CK // MN $(I, K \in AD)$

Xét ΔBDI và ΔCDK có $BD = CD; \widehat{IBD} = \widehat{KCD}; \widehat{IDB} = \widehat{KDC}$ nên $\Delta BDI = \Delta CDK\,(g.cg)$

$\Rightarrow DI = DK$.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AI}{AG}$ (vì MG // BI);

$\dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AK}{AG}$ (vì GN // CK).

Suy ra $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{2.AD}{AG} = 3$ (1) (vì $AD = \dfrac{3}{2}.AG$).

b) Xét $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{GI}{AG}; \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{KG}{AG}$ hay $\dfrac{BM}{AM} + \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{GI + GK}{AG} = \dfrac{2.GD}{AG} = 1,$ suy ra $\dfrac{BM}{AM} + \dfrac{CN}{AN} = 1.$

Nhận xét. Từ kết quả (1), chúng ta thấy rằng bởi G là trọng tâm nên $\dfrac{2AD}{AG} = 3$.

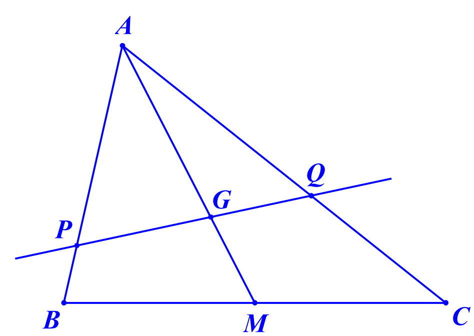
Vậy nếu G không phải là trọng tâm thì ta có bài toán sau:

- Một đường bất kỳ cắt cạnh AB, AC và đường trung tuyến AD của tam giác ABC lần lượt tại M, N và G. Chứng minh rằng: $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = 2.\dfrac{AD}{AG}$.
- Nếu thay yếu tố trung tuyến bằng hình bình hành, ta có bài toán sau: Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng bất kỳ cắt AB, AD và AC lần lượt tại M, N và G. Chứng minh rằng: $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AC}{AG}$.

Bài 5. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng: $\dfrac{PB}{PA}.\dfrac{QC}{QA} \le \dfrac{1}{4}$

- ***Tìm cách giải.***

Vẽ hình xong và quan sát, chúng ta nhận thấy tỉ số $\dfrac{PB}{PA}; \dfrac{QC}{QA}$ đã có ở câu b, bài 1.4 và có kết quả là $\dfrac{PB}{PA} + \dfrac{QC}{QA} = 1$. Do vậy khai thác yếu tố này, kết hợp với bất đẳng thức đại số cho lời giải đẹp.



- ***Trình bày lời giải***

Dựa vào ví dụ 4, ta có: $\dfrac{BP}{AP} + \dfrac{CQ}{AQ} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \ge 4xy;$

Ta có: $1 = \left(\dfrac{BP}{AP} + \dfrac{CQ}{AQ}\right)^2 \ge 4.\dfrac{BP}{PA}.\dfrac{QC}{QA}$ hay $\dfrac{BP}{PA}.\dfrac{QC}{QA} \le \dfrac{1}{4}$.

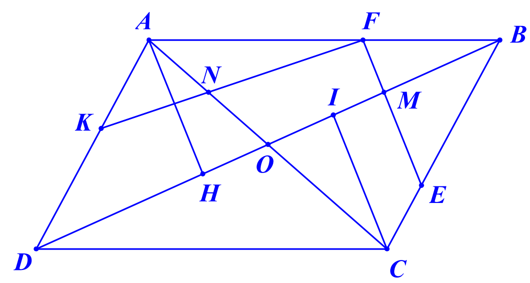
Bài 6. Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Gọi M, N là trung điểm BO; AO. Lấy F trên cạnh AB sao cho FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{BA}{BF} + \dfrac{BC}{BE} = 4;$ b) $BE + AK \ge BC.$

- ***Tìm cách giải.***

Với phân tích và suy luận như câu a, bài 1.4 thì ta có:

Tương tự câu a, chúng ta có kết quả: $\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}=4$ và suy ra $\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}+\frac{AB}{BF}+\frac{BC}{BE}=8$ để liên kết được BE + AK với nhau, mà với suy luận trên thì BE, AK cùng nằm ở mẫu số, do đó chúng ta liên tưởng tới bất đẳng thức đại số $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ sẽ cho chúng ta yêu cầu. Với suy luận đó, chúng ta có lời giải sau:



- ***Trình bày lời giải***

a) Kẻ CI //AH // EF (với $I,H\in BD$)

Xét ΔAOH và ΔCOI có $\widehat{AOH}=\widehat{COI}$ (đối đỉnh); OA = OB; $\widehat{HAO}=\widehat{ICO}$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta AOH=\Delta COI$ (c.g.c)$\Rightarrow IO=OH$. Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{BA}{BF}+\frac{BC}{BE}=\frac{BH}{BM}+\frac{BI}{BM}=\frac{BH+BI}{BM}=\frac{BO+OH+BO-OI}{BM}=\frac{2.BO}{BM}=4.$$

b) Tương tự ta có:

$$\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}=4\Rightarrow\frac{AD}{AK}+\frac{AB}{AF}+\frac{AB}{BF}+\frac{BC}{BE}=8\ \Rightarrow BC.\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\right)+AB\left(\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}\right)=8\qquad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ (với $x;y>0$)

Ta có: $\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}\ge\frac{4}{AF+BF}=\frac{4}{AB}\Rightarrow AB\left(\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}\right)\ge 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BC.\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\right)\le 4$

Mà $\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\ge\frac{4}{AK+BE}\Rightarrow BC\left(\frac{1}{AK}+\frac{1}{BE}\right)\ge\frac{4BC}{AK+BE}\ \Rightarrow\frac{4BC}{AK+BE}\le 4\Rightarrow AK+BE\ge BC.$

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Trên AH, AB, AC lần lượt lấy điểm D, E, F sao cho $\widehat{EDC}=\widehat{FDB}=90^\circ$. Chứng minh rằng: $EF//BC$.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2011-2012)

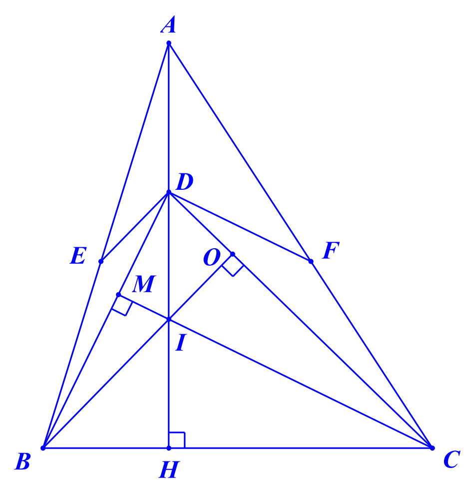
- ***Tìm cách giải.***

Để chứng minh $EF//BC$, suy luận một cách tự nhiên chúng ta cần vận dụng định lý Ta-let đảo.

Do vậy cần chứng minh tỉ lệ thức $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$. Nhận thấy để định hướng tỉ lệ thức ấy cũng như khai thác được $\widehat{EDC}=\widehat{FDB}=90^\circ$ chúng ta cần kẻ $BO\perp CD$; $CM\perp DB$, để có các đường thẳng song song rồi vận dụng định lý Ta-let. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

- ***Trình bày lời giải.***

Kẻ $BO\perp CD; CM\perp DB$, BO và CM cắt nhau tại I $\Rightarrow$D là trực tâm của $\Delta BIC\Rightarrow DI\perp BC\Rightarrow$ I, D, A thẳng hàng.



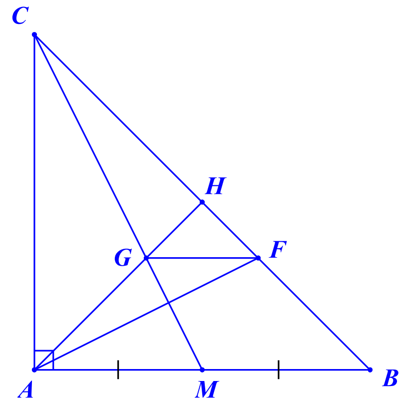
$DE//BI\Rightarrow\frac{AI}{AD}=\frac{AB}{AE}$. $IC//FD\Rightarrow\frac{AI}{AD}=\frac{AC}{AF}$ suy ra $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}\Rightarrow EF//BC$

(Định lý Ta-let đảo).

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có BM là đường trung tuyến. Lấy điểm F trên cạnh BC sao cho $FB=2.FC$. Chứng minh $AF \perp BM$.

- ***Tìm cách giải.***

Nhận thấy từ $FB=2.FC$ suy ra: $\frac{BF}{CF}=2$ mang tính chất trọng tâm tam giác. Do vậy nếu gọi G là trọng tâm tam giác, AH là đường trung tuyến thì dễ dàng nhận được GF // AC và $AH \perp BC$ nên G là trực tâm tam giác ABF. Do đó ta có lời giải sau:



- ***Trình bày lời giải.***

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và AG kéo dài cắt BC tại H$\Rightarrow$AH là đường trung tuyến của tam giác ABC.
Mặt khác, ΔABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$

Ta có: $\frac{BG}{GM}=2$ (vì G là trọng tâm); Và $\frac{BF}{FC}=2$ (giả thiết)

$\Rightarrow \frac{BG}{GM}=\frac{BF}{FC} \Rightarrow FG//AC$ (theo định lý Ta-let đảo)

$\Rightarrow FG \perp AB$ nên G là trực tâm $\Delta ABF \Rightarrow$ $BG \perp AF$ hay $BM \perp AF$.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Biết tồn tại điểm M, N lần lượt trên cạnh AB, BC sao cho $2.\frac{BM}{AM}=\frac{BN}{CN}$ và $\widehat{BNM}=\widehat{ANC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

- ***Lời giải***

Cách 1. Gọi P là trung điểm của AM, Q là giao điểm của AN với CP

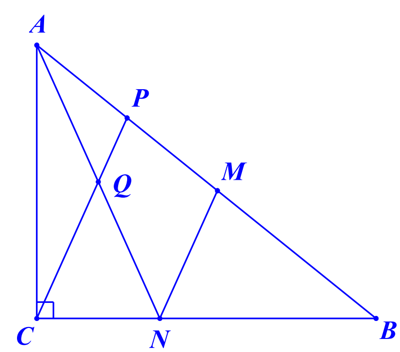
Ta có: $\frac{BM}{PM}=2.\frac{BM}{AM}=\frac{BN}{CN} \Rightarrow MN//CP$ (định lý Ta-let đảo).

$\Rightarrow \widehat{QCN}=\widehat{MNB}=\widehat{ANC} \Rightarrow \Delta QCN$ cân tại Q.

Mặt khác:

$PA=PM, PQ//MN \Rightarrow QA=QN$ nên $QA=QC=QN$

ΔCAN vuông tại C$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.



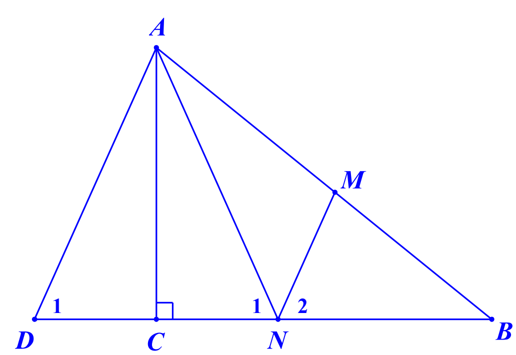
Cách 2. Dựng D là điểm đối xứng của N qua C $\Rightarrow ND=CN+CD=2.CN$

Ta có: $2\frac{MB}{MA}=\frac{BN}{CN} \Rightarrow \frac{MB}{MA}=\frac{BN}{2.CN}=\frac{BN}{DN}$

$\Rightarrow MN//AD$ (định lý Ta-let đảo).

$\Rightarrow \widehat{D}=\widehat{N_1}=\widehat{N_2} \Rightarrow \Delta AND$ cân. Do đó đường trung tuyến AC cũng là đường cao.

Vậy $AC \perp CB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.



Bài 10. Cho tam giác ABC có AD là đường trung tuyến. Gọi M là điểm tùy ý thuộc khoảng BD. Lấy E thuộc AB và F thuộc AC sao cho ME // AC; MF // AB. Gọi H là giao điểm MF và AD. Đường thẳng qua B song song với EH cắt MF tại K. Đường thẳng AK cắt BC tại I. Tính tỉ số $\frac{IB}{ID}$?

- ***Lời giải***

Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt tia AI tại P. Áp dụng định lý Ta-let, cho các đoạn thẳng song song ta có:

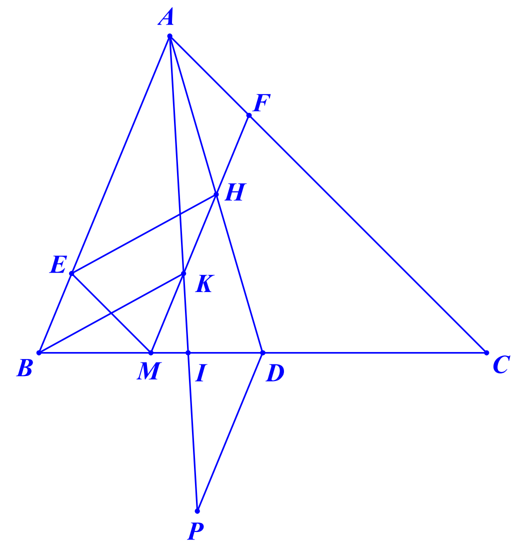
$DP//AB \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{DP} = \frac{AB}{HK}.\frac{HK}{DP}$ (1).

$ME//AC \Rightarrow \frac{AB}{HK} = \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BM}$ (2).

$HK//DP$ và $MH//AB \Rightarrow \frac{HK}{DP} = \frac{AH}{AD} = \frac{BM}{BD}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

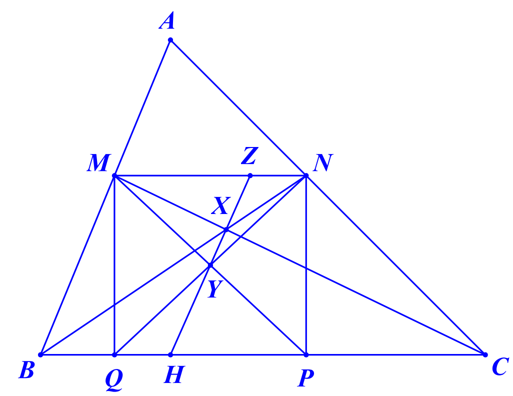
$\frac{IB}{ID} = \frac{BC}{BM}.\frac{BM}{BD} = \frac{BC}{BD} = 2$. Vậy $\frac{IB}{ID} = 2.$



Bài 11. Cho ΔABC nhọn. Hình chữ nhật MNPQ thay đổi thỏa mãn M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Gọi giao điểm của BN với CM là X của QN với PM là Y. Gọi H là giao điểm của XY với BC. Chứng minh rằng đường thẳng AH vuông góc với BC.

- ***Tìm cách giải.***

Bài toán có nhiều yếu tố song song, do vậy để chứng minh đường thẳng AH vuông góc với BC, chúng ta nên chứng minh AH song song với NP hoặc MQ. Với định hướng ấy chúng ta tìm cách vận dụng định lý Ta-let đảo. Chẳng hạn nếu chứng minh AH song song với NP, chúng ta cần chứng minh $\frac{HP}{HC} = \frac{AN}{AC}$. Bằng cách vận dụng định lý Ta-lét cùng hệ quả và biến đổi khéo léo các dãy tỉ số bằng nhau, chúng ta sẽ có lời giải đẹp.



- ***Trình bày lời giải.***

Gọi Z là giao điểm của XY với MN vì tứ giác MNPQ là hình chữ nhật, HP = ZM và MN // BC

nên: $\frac{HP}{HC} = \frac{ZM}{HC} = \frac{XM}{XC} = \frac{MN}{CB} = \frac{AN}{AC}$

Do đó AH // NP (định lý Ta-let đảo) mà $NP \perp BC$ nên $AH \perp BC$.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD có I; E là trung điểm của BC; AD. Qua điểm M tùy ý trên AB kẻ đường thẳng MI cắt đường thẳng AC tại K. Đường thẳng KE cắt CD tại N. Chứng minh rằng: AD = MN.

- ***Lời giải***

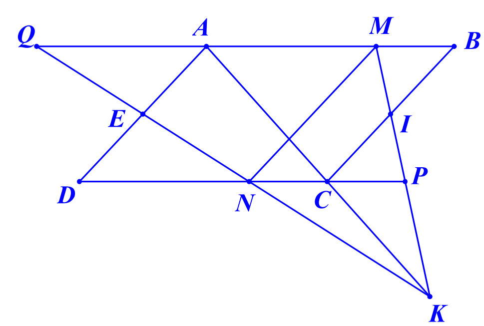
Gọi P là giao điểm của đường thẳng MI và CD

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng KN và AB.

Nhận thấy: $\Delta IBM = \Delta ICP$ (g.c.g) nên BM = CP.

Ta có theo định lý Ta-lét AM//CP nên $\frac{AM}{MB} = \frac{AM}{CP} = \frac{KA}{KC}$ (1)

Nhận thấy $\Delta EAQ = \Delta EDN$ (g.c.g) nên DN = AQ.



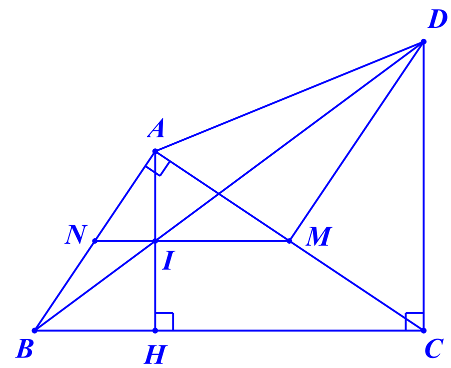
Theo định lý Ta-lét, ta có: AQ // CN nên $\dfrac{DN}{NC}=\dfrac{AQ}{NC}=\dfrac{KA}{KC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{DN}{NC}\Rightarrow\dfrac{AM}{AM+MB}=\dfrac{DN}{DN+NC}\Rightarrow\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{DN}{DC}$

Suy ra AM = DN. Do đó ADNM là hình bình hành suy ra AD = MN.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH. Đường vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng BI tại D. Chứng minh DA = DC.

- ***Lời giải***



Gọi M là trung điểm của AC, N là giao điểm của MI và AB. Tam giác AHC có MI là đường trung bình nên MI // HC, tức là MN // BC.

Theo định lý Ta-lét:

Do AH // CD nên $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{HB}{HC}$ (1)

Do MN // BC nên $\dfrac{IN}{HB}=\dfrac{AI}{AH}=\dfrac{IM}{HC}$,

Tức là $\dfrac{IN}{IM}=\dfrac{HB}{HC}$ (2)

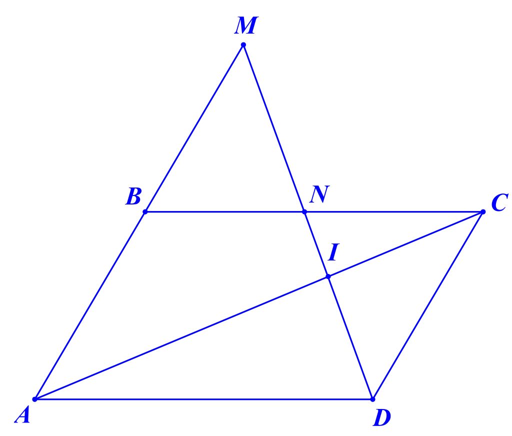
Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{IN}{IM}$, do đó BN // DM (định lý Ta-let đảo).

Ta lại có: $BN\perp AC$ nên $DM\perp AC$. Vậy DM là đường trung trực của AC, suy ra DA = DC.

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo AC lấy một điểm I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{DM}{DN}=\dfrac{CB}{CN}$; b) $ID^2=IM.IN$.

- ***Lời giải***



a) Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác BMN với BM // CD, ta có:

$\dfrac{MN}{ND}=\dfrac{BN}{NC}\Rightarrow\dfrac{MN+ND}{ND}=\dfrac{BN+NC}{NC}$ (tính chất tỉ lệ thức)

$\Rightarrow\dfrac{MD}{ND}=\dfrac{BC}{NC}$(1)

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác MAD với BN // AD

ta có: $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{DM}{DN}$(2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{DM}{DN}=\dfrac{CB}{CN}$.

b) Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác ADI với AD // NC, ta có: $\dfrac{ID}{IN}=\dfrac{IA}{IC}$ (3)

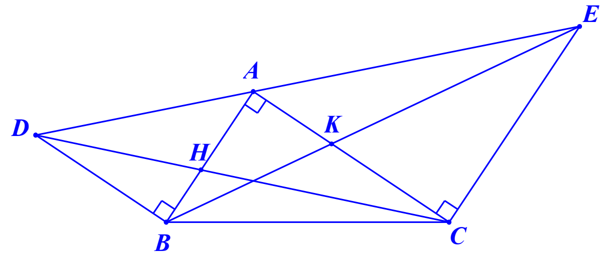
Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét vào tam giác DIC với DC // AM, ta có: $\dfrac{IM}{ID}=\dfrac{IA}{IC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{ID}{IN}=\dfrac{IM}{ID}$ hay $ID^2=IM.IN$.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ về phía ngoài hai tam giác ABD và ACE vuông cân tại B và E. Gọi H là giao điểm của AB và CD; K là giao điểm của AC và BE. Chứng minh rằng:

a) AH = AK   b) $AH^2 = BH.CK$.

- **Lời giải**



a) $BD//AC(\perp AB)$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BH}=\frac{AC}{BD}\Rightarrow \frac{AH}{AH+BH}=\frac{AC}{BD+AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BD+AC}$$

Mà BD = AB nên $AH=\dfrac{AB.AC}{AB+AC}$ (1)

$$AB//CE(\perp AC)\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{AB}{CE}\Rightarrow \frac{AK}{AK+KC}=\frac{AB}{BD+EC}\Rightarrow \frac{AK}{AC}=\frac{AB}{BD+EC}$$

Mà CE = AC nên $AK=\dfrac{AB.AC}{AB+AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AH = AK.

b) $BD//AC\Rightarrow \dfrac{AH}{BH}=\dfrac{AC}{BD}$ (3); $CE//AB\Rightarrow \dfrac{CK}{AK}=\dfrac{CE}{AB}$ (4)

Mà AC = CE, BD = AB.

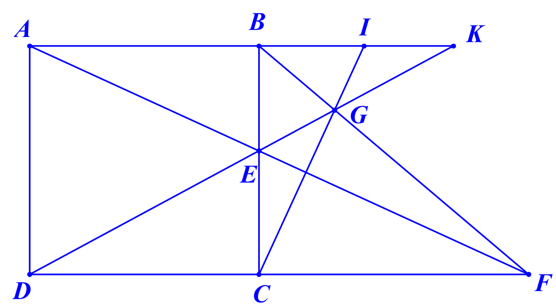
Kết hợp với (3) và (4) ta có $\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{CK}{AK}$, suy ra $AH^2 = BH.CK$.

Bài 16. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Gọi F là giao điểm của AE và CD, G là giao điểm của DE và BF.

a) Gọi I và K theo thứ tự là giao điểm của AB và CG và DG. Chứng minh rằng IE song song với BD.

b) Chứng minh rằng AE vuông góc với CG.

- **Lời giải**



a) Ta sẽ chứng minh $\dfrac{IK}{IB}=\dfrac{KE}{ED}$. Do BK // DF nên theo định lý Ta-lét, ta có: $\dfrac{IK}{CD}=\dfrac{IG}{GC}=\dfrac{IB}{CF}$

suy ra $\dfrac{IK}{IB}=\dfrac{CD}{CF}$ (1)

Cũng theo định lý Ta-lét với AK // DF, ta có: $\dfrac{KE}{ED}=\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{CF}$ (2)

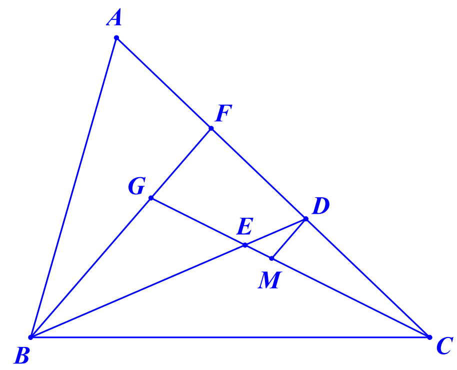
Ta lại có: AB = CD nên từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{IK}{IB}=\dfrac{KE}{ED}$.

Theo định lý đảo Ta-lét ta có: IE // BD.

b) Ta có: $BD\perp AC$ và IE // BD nên $IE\perp AC$.

Tam giác ACI có $CB\perp AI, IE\perp AC$ nên E là trực tâm của tam giác ACI. Suy ra $AE\perp CG$.

Bài 17. Cho tam giác ABC và D là một điểm tùy ý trên AC. Gọi G là trọng tâm ΔABD. Gọi E là giao điểm của CG và BD. Tính $\frac{EB}{ED}-\frac{CA}{CD}$.

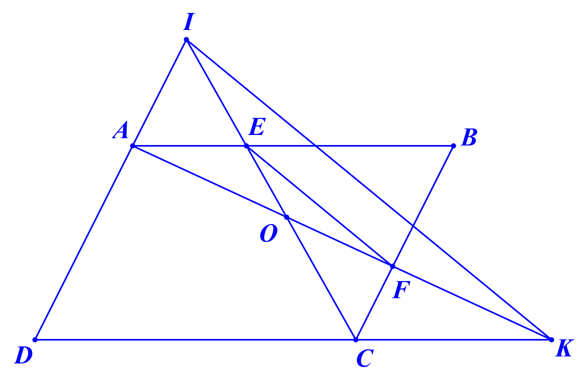


- **Lời giải**

Gọi F là giao điểm BG với AC thì AF = FD.
Lấy M thuộc CG sao cho DM // BG.
Ta có: $CA+CD=CF+FA+CF-FD$ hay
$CA+CD=2.CF \Rightarrow CA=2.CF \Rightarrow CA=2.CF-CD$
Vì G là trọng tâm ΔABD nên $GB=2.GF$
Vì $MD//BG \Rightarrow \frac{EB}{ED}-\frac{CA}{CD}=\frac{GB}{MD}-\frac{2.CF-CD}{CD}=\frac{2.GF}{MD}-\frac{2.CF}{CD}+1\ (1)$
Mà GF // MD nên $\frac{GF}{MD}=\frac{CF}{CD}$ do vậy, từ (1) suy ra: $\frac{EB}{ED}-\frac{CA}{CD}=1.$

Bài 18. Cho hình bình hành ABCD, điểm E thuộc cạnh AB, điểm F thuộc cạnh BC. Gọi I là giao điểm của CE và AD, gọi K là giao điểm của AF và DC. Chứng minh rằng EF song song với IK.

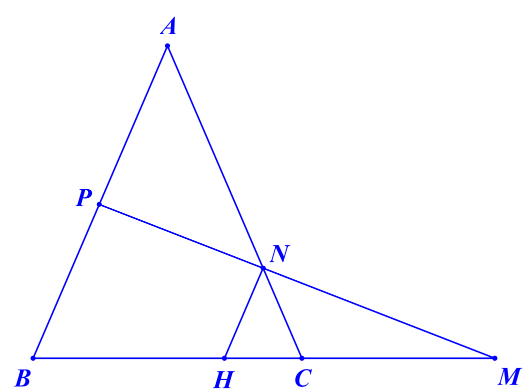
- **Lời giải**



Gọi O là giao điểm của AF và CE.
Theo định lý Ta-let:
$AE//CK \Rightarrow \frac{OE}{OC}=\frac{OA}{OK}.$
$DI//CF \Rightarrow \frac{OC}{OI}=\frac{OF}{OA}.$
Ta có: $\frac{OE}{OI}=\frac{OE}{OC}.\frac{OC}{OI}=\frac{OA}{OK}.\frac{OF}{OA}=\frac{OF}{OK}.$
$\frac{OE}{OI}=\frac{OF}{OK}\Rightarrow EF//IK$ (theo định lý Ta-let đảo).

Bài 19. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC kéo dài về phái C lấy điểm M. Một đường thẳng Δ đi qua M cắt các cạnh CA, AB lần lượt tại N và P. Chứng minh rằng $\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CN}$ không đổi khi M và Δ thay đổi.

- **Lời giải**



Kẻ NH // AB (Với $H\in BC$) suy ra:
$\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CN}=\frac{MH}{NH}-\frac{CM}{CN}=\frac{MH}{CN}-\frac{CM}{CN}=\frac{CH}{CN}$
Mặt khác NH //AB
$\Rightarrow \frac{CH}{BC}=\frac{CN}{AC}\Rightarrow \frac{CH}{CN}=\frac{BC}{AC}.$
Vậy $\frac{BM}{BP}-\frac{CM}{CN}=\frac{BC}{AC}$ không đổi khi M và Δ thay đổi.

Bài 20. Giả sử O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F, H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C và O đến AD. Chứng minh rằng: $AD.BE.CF \le AC.BD.OH$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

- **Lời giải**

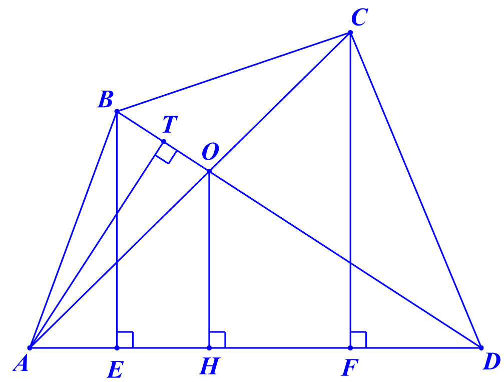
Kẻ $AT \perp BD\left(T \in BD\right)$, thì $AT \le AO$

Nên $AD.BE = BD.AT\left(= 2.S_{ABD}\right)$

Suy ra $AD.BE \le BD.AO$

$\Rightarrow AD.BE \le AC.BD\dfrac{AO}{AC}$ $\quad (1)$

Mặt khác, OH // CF nên $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{OH}{CF}\,(2)$



Từ (1) và (2) suy ra: $AD.BE \le AC.BD.\dfrac{OH}{CF} \Leftrightarrow AD.BE.CF \le AC.BD.OH$.

Đẳng thức xảy ra khi T trùng với O hay AC vuông góc với BD.

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các tứ giác MNPQ và AXYZ là các hình vuông sao cho $M \in AB; Q,P \in BC; N \in AC;$ X, Y, Z tương ứng thuộc AB, BC, AC. Chứng minh $MN < AX$.

11. Đặt x; y là cạnh hình vuông MNPQ; AXYZ; và a, b, c là độ dài BC, AC, AB. Kẻ $AH \perp BC$; đặt AH = h. Từ đó suy ra: $a.h = b.c\left(= 2.S_{ABC}\right)$ và $a^2 = b^2 + c^2$.

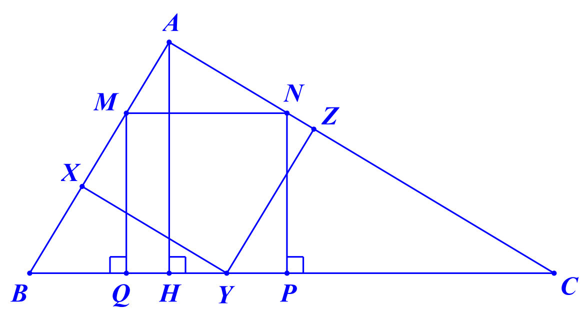
- **Lời giải**

Ta có

$\left(a+h\right)^2 = a^2 + h^2 + 2ah > b^2 + c^2 + 2bc = \left(b+c\right)^2$

$\Rightarrow a + h > b + c$

$\Rightarrow \dfrac{a+h}{ah} > \dfrac{b+c}{bc} \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{h} > \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ $\quad (1)$



Theo định lý Ta-let, ta có:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{h} = \dfrac{MN}{BC} + \dfrac{MQ}{AH} = \dfrac{AM}{AB} + \dfrac{MB}{AB} = 1$

$\dfrac{y}{b} + \dfrac{y}{c} = \dfrac{XY}{AC} + \dfrac{ZY}{AB} = \dfrac{BY}{BC} + \dfrac{CY}{BC} = 1 \Rightarrow x\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{h}\right) = y\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x < y$ hay $MN < AX$.

Bài 22. Gọi M là điểm bất kì trên đường trung tuyến trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC. Gọi P là giao điểm của BM và AC, gọi Q là giao điểm của CM và AB. Chứng minh PQ // BC.

- **Lời giải**

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, lần lượt cắt BP và CQ kéo dài tại E và F.

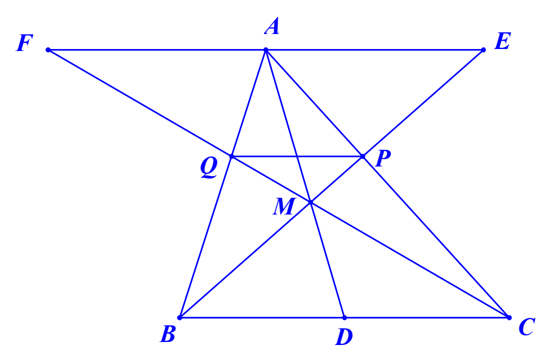
Áp dụng hệ quả định lý Ta-let, ta có:

$$\frac{AF}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{AE}{BD}$$

Mà CD = BD nên AF = AE.

Áp dụng hệ quả định lý Ta-let, ta có:

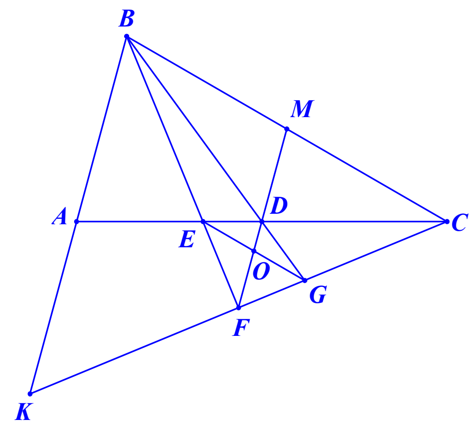
$$\frac{AF}{BC} = \frac{AQ}{QB}; \frac{AE}{BC} = \frac{AP}{PC}$$



Suy ra: $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB} \Rightarrow PQ // BC$ (định lý đảo Ta-let).

Bài 23. Cho tam giác ABC có $AB<BC$, đường phân giác BE và đường trung tuyến BD (E;D thuộc AC). Đường thẳng vuông góc với BE qua C cắt BE, BD lần lượt tại F, G. Chứng minh rằng đường thẳng DF chia đôi đoạn thẳng GE.

- **Lời giải**



Gọi giao điểm của CG và AB là K và giao điểm của DF và BC là M.

Ta có ΔBCK cân (vì có BF vừa là đường phân giác, vừa là đường cao) $\Rightarrow$ F là trung điểm của CK.

ΔACK có FK = FC, AD = CD suy ra DF là đường trung bình $\Rightarrow FD//AK$.

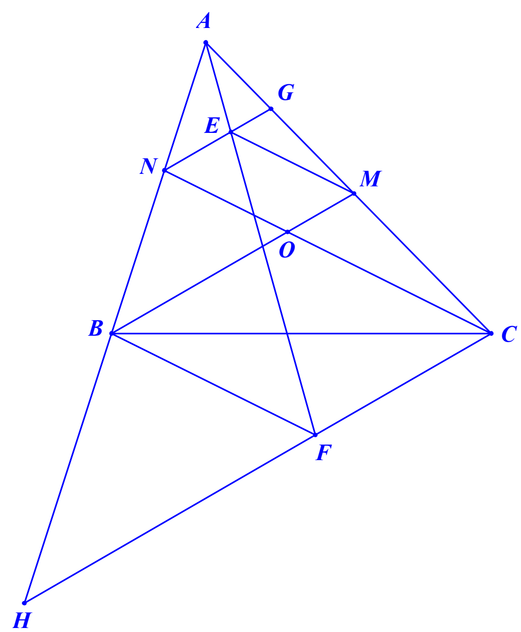
ΔBCK có FK = FC, FM // BK suy ra M là trung điểm của BC.

Xét tam giác DBC có trung tuyến DM, ta có GE//BC, suy ra $\frac{OE}{BM}=\frac{OG}{MC}$. Mà BM = MC, do đó OE = OF hay DF chia đôi đoạn thẳng GE.

Bài 24. Cho tam giác ABC. Lấy điểm O nằm trong tam giác, các tia BO và CO cắt AC và AB lần lượt tại M và N. Vẽ hình bình hành BOCF. Qua N kẻ đường thẳng song song với BM cắt AF tại E. Chứng minh rằng:

a) MONE là hình bình hành b) $\frac{AE}{AF}=\frac{AM.AN}{AB.AC}=\frac{OM.ON}{OB.OC}$.

- **Lời giải**



a) Gọi G là giao điểm của NE và AC, H là giao điểm CF và AB.

Theo định lý Ta-let, ta có:

$NE//CH\Rightarrow \frac{GE}{EN}=\frac{CF}{FH}$

$NE//BM//CH\Rightarrow \frac{GM}{MC}=\frac{NB}{BH}\left(=\frac{NO}{OC}\right)$.

$CN//BF\Rightarrow \frac{CF}{FH}=\frac{BN}{BH}$.

Suy ra $\frac{GE}{EN}=\frac{GM}{MC}\Rightarrow ME//NC$

$\Rightarrow MONE$ là hình bình hành.

b) Ta có BM // HC và NE // HF, theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{AM.AN}{AB.AC}=\frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AB}=\frac{AB}{AH}.\frac{AN}{AB}=\frac{AN}{AH}=\frac{AE}{AF}\quad(1)$$

Ta có: OM // NG; OB // CH. Theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{OM.ON}{OB.OC}=\frac{OM}{OC}\cdot\frac{ON}{OB}=\frac{NG}{NC}\cdot\frac{NC}{HC}=\frac{NG}{HC}$$

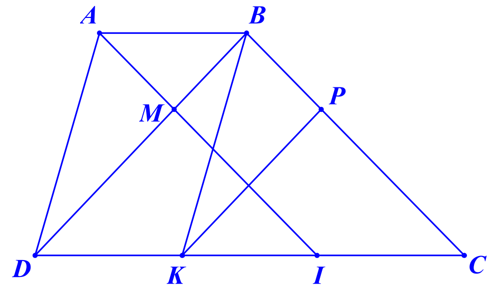
Mà $NG//HC\Rightarrow \frac{NG}{HC}=\frac{AN}{AH}$

$$NE//HF\Rightarrow \frac{AN}{AH}=\frac{AE}{AF}\Rightarrow \frac{OM.ON}{OB.OC}=\frac{AE}{AF}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 25. Cho hình thang ABCD có đáy lớn CD. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD tại M và cắt CD tại I. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt cạnh CD tại K. Qua K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC tại P. Chứng minh rằng: MP//DC.

- ***Lời giải***



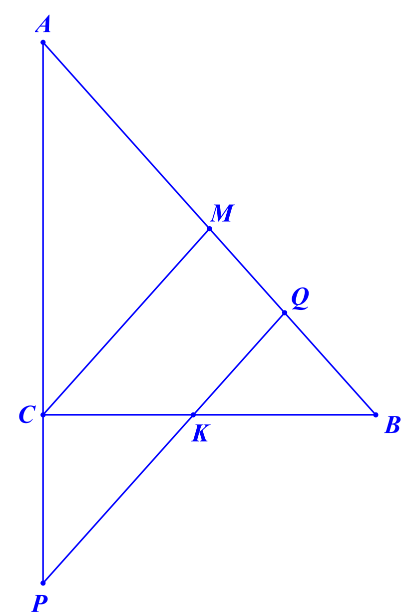
Tứ giác ABKD có AB // DK; BK //AD nên ABKD là hình bình hành, suy ra: DK = AB (1)
Tứ giác ABCI có AB // CI, AI // BC nên ABCI là hình bình hành, suy ra: CI=AB (2)
Từ (1) và (2) ta có: $DK = CI \Rightarrow DI = KC$
Áp dụng định lý Ta-lét vào ΔABM với AB // DI, ta có: $\frac{BM}{MD} = \frac{AB}{DI}$.

Áp dụng định lý Ta-lét vào ΔCBD với KP // BD, ta có: $\frac{BP}{PC} = \frac{DK}{KC}$ hay $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{KC}$.

Mà $DI = KC \Rightarrow \frac{AB}{DI} = \frac{AB}{KC} \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{BP}{PC}$, do đó MP //CD (định lý Ta-lét đảo).

Bài 26. Cho tam giác ABC có CM là trung tuyến. Qua điểm Q trên AB vẽ đường thẳng d song song với CM. Đường thẳng d cắt AC, BC lần lượt tại P, R. Chứng minh rằng nếu QA.QB = QP.QR thì tam giác ABC vuông tại C.

- ***Lời giải***



Trong tam giác BQR có CM//QR
Nên $\frac{CM}{QR} = \frac{MB}{QB}$ (hệ quả định lý Ta-let)

$\Rightarrow CM = \frac{QR}{QB}.MB = \frac{QA}{QP}.MB$

(do $QA.QB = QP.QR \Rightarrow \frac{QR}{QB} = \frac{QA}{QP}$).

Mặt khác, trong tam giác ACM có PQ // CM

Nên: $\frac{QA}{QP} = \frac{AM}{CM}$

Vì $CM = \frac{QA}{QP}.MB$ nên $CM = \frac{AM}{CM}.MB$

$\Rightarrow CM^2 = MA.MB = AM^2$ (vì MA = MB)
$\Rightarrow CM = AM = BM$. Vậy ΔABC vuông tại C.

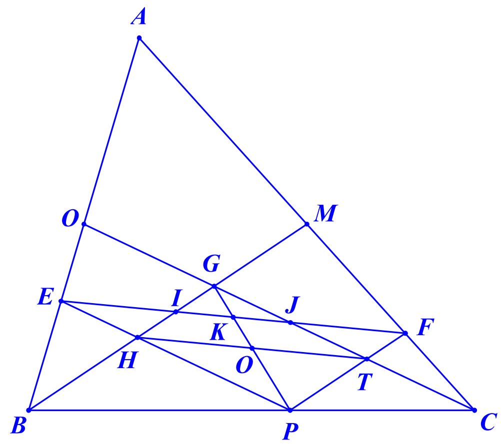
Bài 27. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Một điểm P thuộc cạnh BC. Các đường thẳng qua P theo thứ tự song song với CG và BG cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Gọi giao điểm của BG và CG với EF lần lượt là I, J. Chứng minh rằng:

a) EI = IJ = JF;
b) PG đi qua trung điểm của EF.

- ***Lời giải***

a) Gọi BM và CN là các đường trung tuyến của tam giác ABC. Gọi giao điểm của BG và EP là H, của CG và FP là T.

Từ HI // PF, EP // CN, theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{EI}{EF} = \frac{EH}{EP} = \frac{NG}{NC} = \frac{1}{3}$



Suy ra $EI = \frac{1}{3}EF$

Tương tự ta có: $FJ = \frac{1}{3}EF$.

Do đó: $EI = IJ = FJ = \frac{1}{3}EF$.

b) Từ PE // CN, theo định lý Ta-let, ta có:

$$\frac{PH}{PE} = \frac{CG}{CN} = \frac{2}{3}.$$

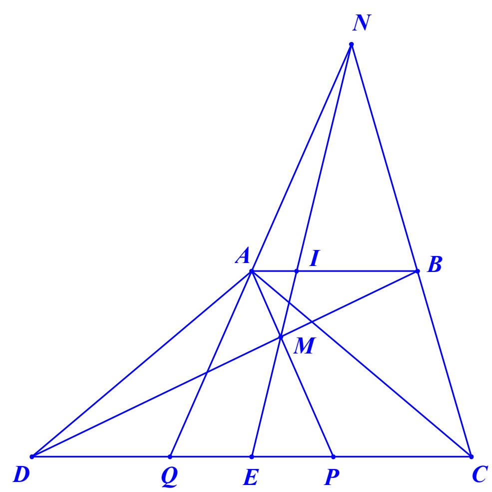
Từ PF // BM, theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{PT}{PF} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{PH}{PE} = \frac{PT}{PF}$, do đó TH // EF (định lý Ta-let đảo).

Gọi O, K là giao điểm của PG với HT và EF. Ta có PHGT là hình bình hành $\Rightarrow OH = OT$.

Theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $\frac{HO}{EK} = \frac{PO}{PK} = \frac{OT}{KF}$. Từ đó suy ra KE = KF, điều phải chứng minh.

Bài 28. Cho hình thang ABCD ($AD<CD, AB//CD$) có đường chéo AC bằng cạnh bên AD. Một đường thẳng d đi qua trung điểm E của CD cắt BD và BC tại M; N. Gọi P; Q là giao điểm của AM; AN với CD. Chứng minh $\widehat{MAD} = \widehat{QAC}$.

- ***Lời giải***



Gọi I là giao điểm của đường thẳng d và AB.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$$AB//CD \Rightarrow \frac{DP}{AB} = \frac{DE}{BI} = \frac{EC}{AI} = \frac{NC}{NB} = \frac{QC}{AB}$$

Do đó DP = QC theo giả thiết AC = AD $\Rightarrow \Delta ADC$ cân tại A

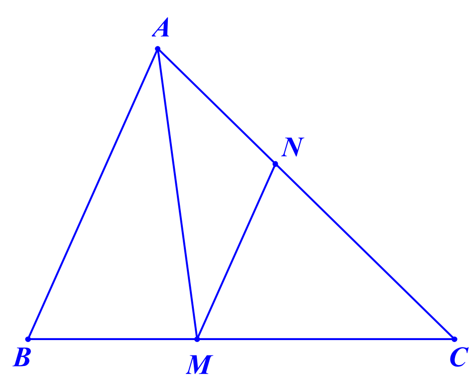
$\Rightarrow \widehat{ADP} = \widehat{ACQ} \Rightarrow \Delta ADP = \Delta ACQ$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{QAC}$

Bài 29. Cho tam giác ABC. M là điểm thuộc BC. Chứng minh rằng:

$$MA.MB < MC.AB + MB.AC.$$

- ***Lời giải***



Kẻ MN // AB (hình vẽ). Ta có:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow MN = AB.\frac{MC}{BC}.$$

$$\frac{NA}{AC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow NA = AC.\frac{MB}{BC}.$$

Mà $AM < MN + NA$ (bất đẳng thức tam giác),

Hay $AM < AB.\frac{MC}{BC} + AC.\frac{MB}{BC}$

Vậy $AM.BC < MC.AB + MB.AC$.

Bài 30. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A} = 45°$, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Đường vuông góc với AB tại B cắt AC ở I. Đường vuông góc với AC tại C cắt AB ở K. Gọi F là giao điểm của BI và CK, G là giao điểm của FH và EI. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác AIK.

- ***Lời giải***

Tam giác vuông ACK có $\widehat{A} = 45°$ nên là tam giác vuông cân, CE là đường cao nên AE = EK, IE là đường trung tuyến của ΔAIK.

Ta sẽ chứng minh IG = 2.GE (bằng cách chứng minh FI = 2EH).

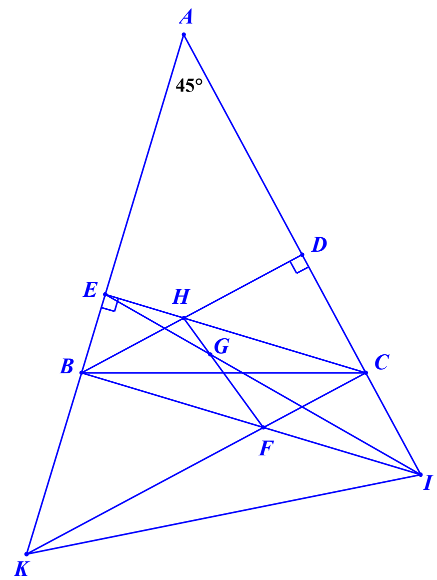
Ta có: $FI = CF\sqrt{2}$ (vì ΔCIF vuông cân),

CF = BH (vì BFCH là hình bình hành).

$BH = EH\sqrt{2}$ (vì ΔBEH vuông cân) nên FI = 2EH. Do EH // FI nên theo định lý Ta-let, ta có:

$\dfrac{IG}{GE} = \dfrac{FI}{EH} = 2$ suy ra IG = 2GE.

Vậy G là trọng tâm của ΔAIK.



Bài 31. Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB tại M, cạnh AC tại N và tia CB tại P. Chứng minh rằng: $\dfrac{AB^2}{AM.BM} + \dfrac{AC^2}{AN.CN} - \dfrac{BC^2}{BP.CP} = 9$

- ***Lời giải***

Qua A và C kẻ đường thẳng song song với đường thẳng d, cắt đường thẳng BG lần lượt tại A' và C'.

Áp dụng *ví dụ 4,* ta có:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3; \frac{AC}{CN} + \frac{BC}{CP} = 3 \quad (1)$$

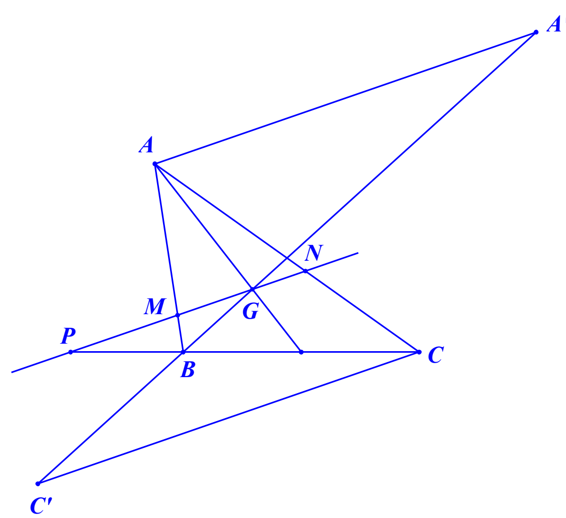
Vì MN cắt tia CB tại P nên tương tự cách chứng minh *ví dụ 4*, ta có:

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BA'}{BG}; \frac{BA}{BP} = \frac{BC'}{BG} \Rightarrow \frac{BA}{BM} - \frac{BC}{BP} = 3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} + \frac{AC}{CN} + \frac{BC}{CP} + \frac{AB}{BM} - \frac{BC}{BP} = 9$$

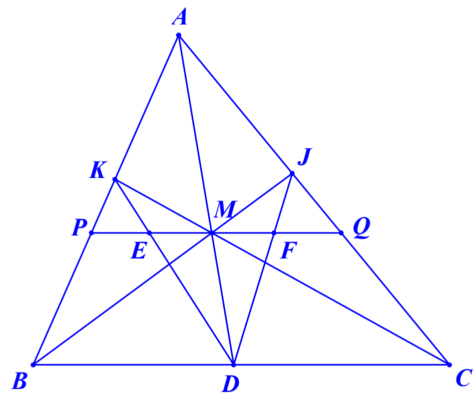
$$\frac{AB(AM+MB)}{AM.BM} + \frac{AC(AN+NC)}{AN.CN} - \frac{BC(CP-BP)}{BP.CP} = 9 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AM.BM} + \frac{AC^2}{AN.CN} - \frac{BC^2}{BP.CP} = 9 \text{ (đpcm).}$$



Nhận xét. Dựa trên bài toán trên, chúng ta giải được bài toán sau: Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác đều ABC, cạnh a, cắt cạnh AB tại M, cạnh AC tại N và tia CB tại P. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{AM.BM} + \dfrac{1}{AN.CN} - \dfrac{1}{BP.CP} = \dfrac{9}{a^2}$.

Bài 32. Cho tam giác ABC với điểm M thuộc miền trong tam giác. Gọi I, J, K thứ tự là giao điểm của các tia AM, BM, CM với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng qua M và song song với BC cắt IK, IJ tại E,F. Chứng minh: ME = MF.

- ***Lời giải***



Gọi EF cắt AB, AC tại P, Q. Theo định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{MP}{MQ}=\frac{IB}{IC}$ (1)

$\frac{ME}{MP}=\frac{IC}{BC}$ (2)

$\frac{MQ}{MF}=\frac{BC}{BI}$ (3)

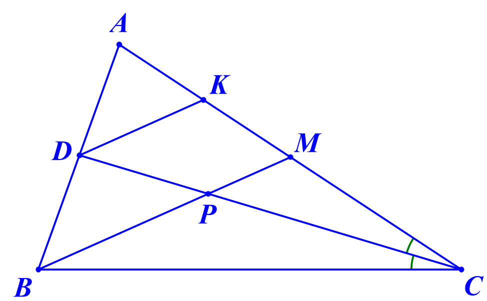
Từ (1), (2) và (3) nhân vế với vế ta được: $\frac{MP}{MQ}.\frac{ME}{MP}.\frac{MQ}{MF}=\frac{IB}{IC}.\frac{IC}{BC}.\frac{BC}{IB}$

$\Rightarrow \frac{ME}{MF}=1$ hay ME = MF.

Chủ đề 2. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Bài 2.1 Cho tam giác ABC, trung tuyến BM cắt phân giác CD tại P. Chứng minh rằng: $\frac{PC}{PD}-\frac{AC}{BC}=1$.

- ***Lời giải***



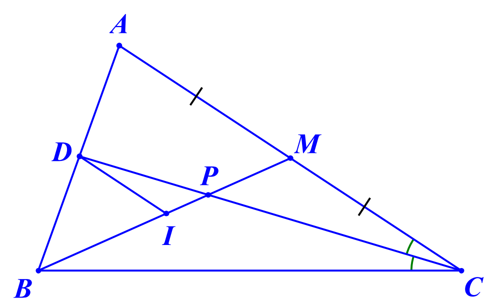
Dựa vào định ý Ta-lét: $\frac{PC}{PD}-\frac{AC}{BC}=1\Leftrightarrow \frac{PC}{PD}=\frac{AC}{BC}+1$.

CD là phân giác của ΔABC nên

$\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow \frac{DA}{DB}+1=\frac{AC}{BC}+1\Leftrightarrow \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{BC}+1$

Vì vậy chỉ cần chứng minh: $\frac{PC}{PD}=\frac{AB}{DB}$.

Cách 1. Vẽ $DK \parallel BM$ (K thuộc AM), theo định lý Ta-lét, ta có: $\frac{PC}{PD}=\frac{MC}{MK}=\frac{MA}{MK}=\frac{AB}{DB}$.



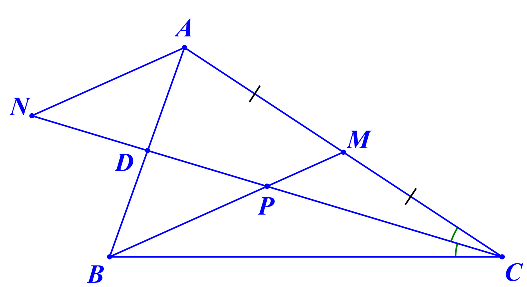
Cách 2.

Vẽ $DI \parallel AC$ (I thuộc BM),

Theo định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{PC}{PD}=\frac{MC}{DI}=\frac{MA}{DI}=\frac{AB}{DB}$.

Cách 3.



Vẽ $AN \parallel BM$ (N thuộc tia CD)

Do $MA=MC$ suy ra $PC=PN$ $\Rightarrow \frac{PC}{PD}=\frac{PN}{PD}$

Mặt khác $\frac{ND}{PD}=\frac{DA}{DB}$ (do $AN \parallel BP$),

Suy ra $\frac{PN}{PD}=\frac{ND}{PD}+1=\frac{DA}{DB}+1=\frac{AB}{DB}\Rightarrow \frac{PC}{PD}=\frac{AB}{DB}$

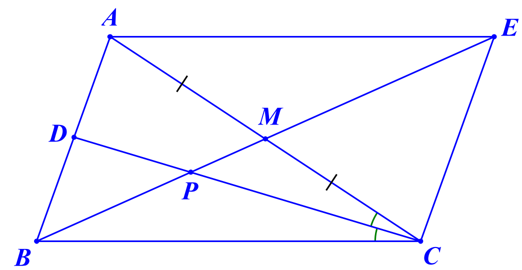
Cách 4.

Vẽ $AH // CD$ (H thuộc tia BM),

Ta có: $\Delta AMH = \Delta CMP\left(c.g.c\right)$

Suy ra $PC = AH \Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AH}{PD}$.

Mặt khác, do $PD // AH$ nên theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $\dfrac{AH}{PD} = \dfrac{AB}{DB} \Rightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{AB}{DB}$.



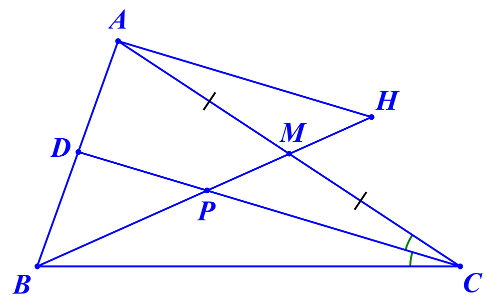
Cách 5.

Trên tia đối của tia MB, lấy điểm E sao cho $MB = ME$. Suy ra $ABCE$ là hình bình hành.

Suy ra $AB // CE$ và $AB = CE$.

Theo hệ quả của định lý Ta-lét, ta có:

$\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{CE}{BP} = \dfrac{AB}{DB}$.

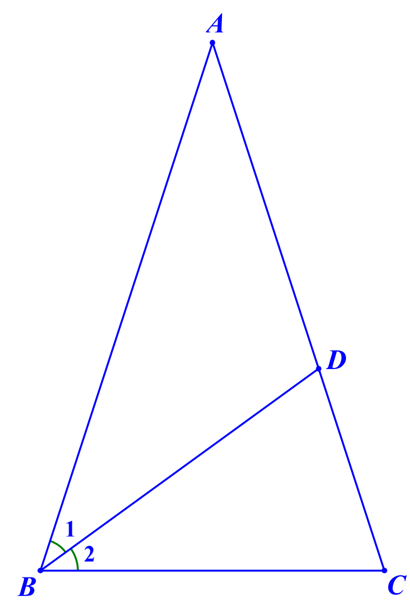


Bài 2.2 Cho ΔABC cân tại $\widehat{A}$ và $\widehat{A} = 36°$. Chứng minh rằng: $AB^2 = AB.BC + BC^2$

- ***Lời giải***

- ***Tìm cách giải.*** Phân tích đề bài, chúng ta thu được $\widehat{B} = \widehat{C} = 72°$, nhận thấy $72° = 2.36°$ do đó chúng ta nên kẻ phân giác góc B (hoặc góc C) là suy luận tự nhiên. Từ đó vận dụng tính chất dường phân giác trong tam giác và biến đổi linh hoạt tỉ lệ thức ta được lời giải hay.

- ***Trình bày lời giải.***



Kẻ phân giác BD của $\widehat{ABC}\left(D \in AC\right)$, khi đó $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 36°$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại D và ΔBCD cân tại $B \Rightarrow AD = BC = BD.$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABC,

ta có: $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BC}{AC - AD}$

Mà $AB = AC; AD = BC$ nên $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BC}{BA - BC}$

$\Leftrightarrow BA\left(BA - BC\right) = BC^2$

$\Leftrightarrow BA^2 - BA.BC = BC^2 \Leftrightarrow AB^2 = AB.BC + BC^2$.

Nhận xét. Tương tự chúng ta giải được bày toán sau: Cho ΔABC cân tại A và $\widehat{A} = 108°$. Chứng minh rằng: $AB^2 = BC^2 - AB.BC$..

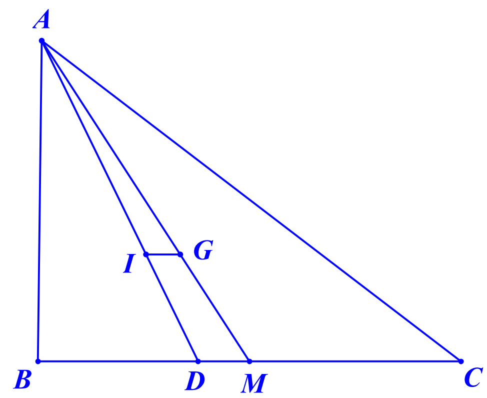
Bài 2.3 Cho tam giác ABC có trọng tâm G và I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Biết rằng $IG // BC$. Chứng minh rằng: $AB + AC = 2.BC$.

- ***Lời giải***

- ***Tìm cách giải.*** Nhận thấy để khai thác $IG // BC$ chúng ta nên kẻ đường phân giác góc A và trung tuyến ứng với cạnh BC thì sẽ vận dụng được giả thiết đó.

Từ suy luận đó chúng ta có kết quả $\dfrac{AI}{ID} = 2$. Mặt khác, tỉ số $\dfrac{AI}{ID}$, kết hợp với I là giao điểm của ba đường phân giác trong cho phép chúng ta liên tưởng tới khả năng vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ACD. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

- **Trình bày lời giải**



Gọi D, M lần lượt là giao điểm của AI, AG với BC.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ACD, ta có:

$$\frac{IA}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{CA}{CD} = \frac{AB+AC}{BD+CD} = \frac{AB+AC}{BC}$$

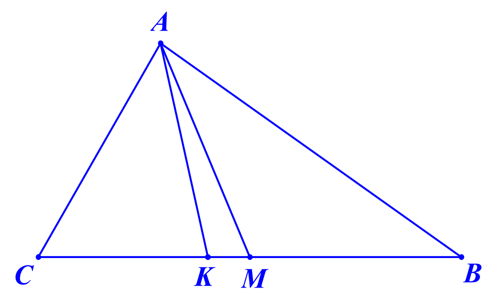
$$IG \,//\, BC \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{GA}{GM} = 2 \Rightarrow \frac{AB+AC}{BC} = 2$$

Hay $AB + AC = 2BC$.

Nhận xét. Với kỹ thuật và lối tư duy trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và I là giao điểm ba đường phân giác trong. Biết rằng $AB + AC = 2.BC$. Chứng minh rằng: $IG \,//\, BC$.

Bài 2.4 Cho tam giác ABC có tỉ số giữa hai cạnh chung đỉnh A là 3:2. Vẽ đường trung tuyến AM và đường phân giác AK. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác AKM và AKB.

- ***Lời giải***

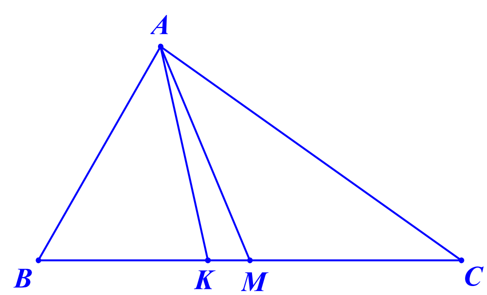


- ***Trường hợp 1.*** Xét $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$.

Chú ý rằng: $KM = \frac{KB - KC}{2}$ và $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$

Ta có: $\frac{S_{AKM}}{S_{AKB}} = \frac{KM}{KB} = \frac{KB-KC}{2KB} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{KC}{KB}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{AC}{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$



- ***Trường hợp 2.*** Xét $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$.

Chú ý rằng $KM = \frac{KC - KB}{2}$ và $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$

Ta có: $\frac{S_{AKM}}{S_{AKB}} = \frac{KM}{KB} = \frac{KC-KB}{2KB} = \frac{1}{2}\left(\frac{KC}{KB} - 1\right)$

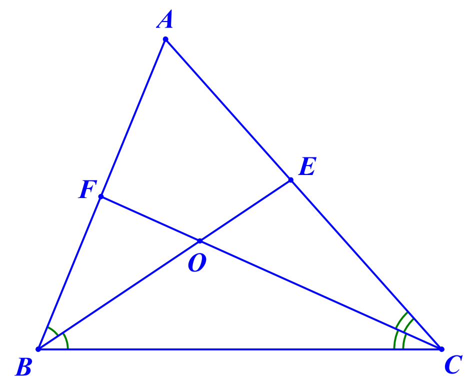
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{AB} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{1}{4}$$

Nhận xét. Bài này dễ bỏ sót trường hợp.

Bài 2.5 Cho tam giác ABC có BE và CF là hai đường phân giác cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu $OB.OC = \frac{1}{2}BE.CF$ thì ΔABC vuông tại A.

- ***Tìm cách giải.*** Với giả thiết $OB.OC = \frac{1}{2}BE.CF$ và chứng minh ΔABC vuông tại A, dễ dàng nhận thấy từ mối quan hệ về độ dài mà chứng minh tam giác vuông, tất yếu chúng ta nghĩ tới định lý Py-ta-go đảo. Do đó chúng ta cần biểu diễn $OB.OC = \frac{1}{2}BE.CF$ thông qua các cạnh của tam giác ABC. Định hướng cuối cùng là $a^2 = b^2 + c^2$.

- ***Trình bày lời giải.***



Đặt $BC = a, AC = b, AB = c.$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BF}{BF+FA} = \frac{BC}{BC+AC}$

$\Rightarrow \frac{BF}{c} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow BF = \frac{ac}{a+b}.$

$\frac{OF}{OC} = \frac{BF}{BC} = \frac{c}{a+b} \Rightarrow \frac{OF+OC}{OC} = \frac{a+b+c}{a+b} \Rightarrow \frac{CF}{OC} = \frac{a+b+c}{a+b}.$

Tương tự, ta có: $\frac{BE}{OB} = \frac{a+b+c}{a+c}.$

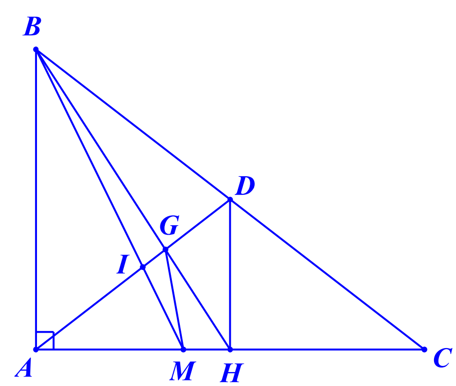
Từ giả thiết $OB.OC = \frac{1}{2}BE.CF \Rightarrow \frac{BE.CF}{OB.OC} = 2 \Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{(a+c)(a+b)} = 2$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = 2a^2+2ab+2ac+2bc \equiv a^2 = b^2+c^2$$

suy ra ΔABC vuông tại A.

Bài 2.6 Cho tam giác ABC vuông tại A có G là trọng tâm, BM là đường phân giác. Biết rằng $GM \perp AC$. Chứng minh rằng BM vuông góc với trung tuyến AD.

- ***Lời giải***



Cách 1. (Không dùng tính chất đường phân giác). Gọi I là giao điểm của BM và AD, H là trung điểm $AC \Rightarrow DH \,//\, AB$ và $DH = \frac{1}{2}AB$ (vì DH là đường trung bình ΔABC).

Lại có $GM \,//\, AB$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow GM \,//\, DH$. Áp dụng hệ quả định lý ta-lét:

Xét ΔADH có $\Rightarrow GM \,//\, DH$

$$\Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{2}{3}.$$

Xét ΔABI có $GM \,//\, AB \Rightarrow \frac{GI}{AI} = \frac{GM}{AB} = \frac{GH}{BH} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{GI+AI}{AI} = \frac{A+3}{3} \Rightarrow AI = \frac{3}{4}.AG = \frac{3}{4}.\frac{2}{3}.AD \Rightarrow AI = \frac{AD}{2}$ $\Rightarrow I$ là trung điểm của AD.

ΔABD có BI vừa là đường phân giác, vừa là đường trung tuyến, suy ra ΔABD cân tại B nên BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác. Do đó $BM \perp AD$.

Cách 2. ΔADH có $GM \,//\, DH \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3.AM = 2.AH = AC = AM + MC$

hay $MC = 2.AM$.

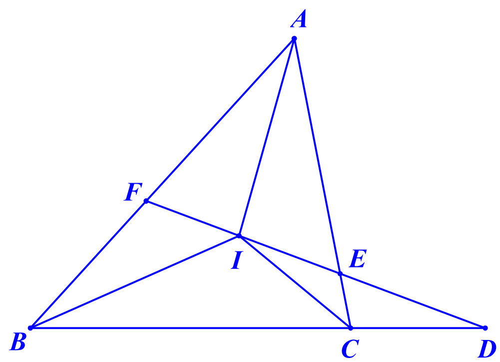
Áp dụng tính chất đường phân giác trong ΔABC, ta có: $\frac{BC}{AB} = \frac{MC}{MA} = 2 \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = BD.$

Vậy ΔABD cân tại B nên BI vừa là phân giác vừa là đường cao.

Do đó $BM \perp AD$

Bài 2.7 Cho tam giác ABC có I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng qua I cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F sao cho D, E nằm cùng phía đối với điểm I. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{ID} + \frac{AC}{IE} = \frac{AB}{IF}.$

- **Lời giải**



Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác, ta có:

$\frac{BD}{ID}=\frac{BF}{IF};\frac{CE}{IE}=\frac{CD}{ID};\frac{AF}{IF}=\frac{AE}{IE}$

Ta có: $\frac{BC}{ID}=\frac{BD}{ID}-\frac{CD}{ID}=\frac{BF}{IF}-\frac{CE}{IE}$ (1)

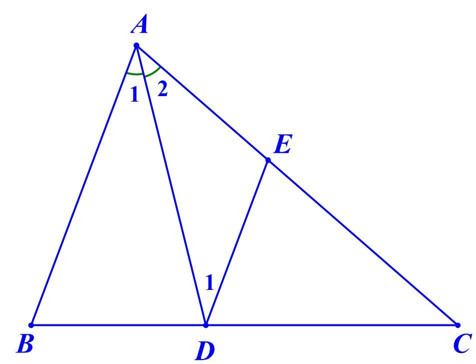
Ta có: $\frac{AC}{IE}=\frac{AE}{IE}+\frac{CE}{IE}=\frac{AF}{IF}+\frac{CE}{IE}$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, suy ra:

$$\frac{BC}{ID}+\frac{AC}{IE}=\frac{BF}{IF}+\frac{AF}{IF}=\frac{AB}{IF}.$$

Bài 2.8 Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Đặt $AC=b, AB=c$. Chứng minh rằng $AD<\frac{2bc}{b+c}$.

- **Lời giải**



Cách 1. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E.

Ta có : $\widehat{D_1}=\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ nên $AE=DE$.

Ta tính DE theo b và c.

Do $DE // AB$ nên theo định lý Ta-lét thì $\frac{DE}{AB}=\frac{DC}{BC}$(1).

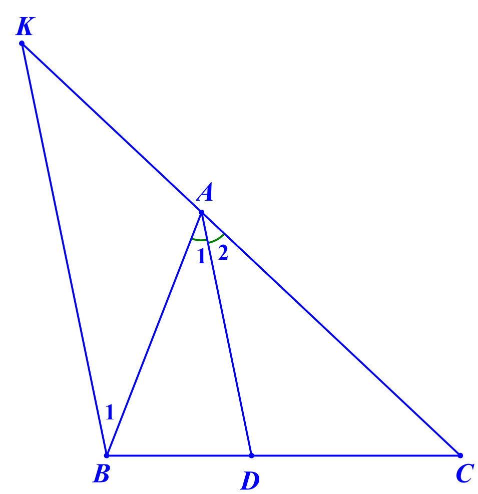
Theo tính chất đường phân giác $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$

Nên $\frac{DC}{DC+DB}=\frac{b}{b+c}$ tức là: $\frac{DC}{BC}=\frac{b}{b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{DE}{c}=\frac{b}{b+c}$.

Do đó $DE=\frac{bc}{b+c}$. Tam giác ADE có $AD<AE+DE=2DE=\frac{2bc}{b+c}$.

Cách 2. (không dùng tính chất đường phân giác).



Qua B kẻ đường thẳng song song với AD, cắt đường thẳng AC ở K.

Ta có: $\widehat{K_1}=\widehat{A_2};\widehat{B_1}=\widehat{A_2}\Rightarrow\widehat{K_1}=\widehat{B_1}$

$\Rightarrow \Delta ABK$ cân tại K, nên $AK=AB=c$.

Do $BK // AD$ nên theo định lý Ta-lét thì

$\frac{AD}{BK}=\frac{AC}{KC}=\frac{b}{b+c}\Rightarrow AD=\frac{b}{b+c}.BK$ (1)

Tam giác ABK có $BK<AB+AK=2c$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AD<\frac{2bc}{b+c}$.

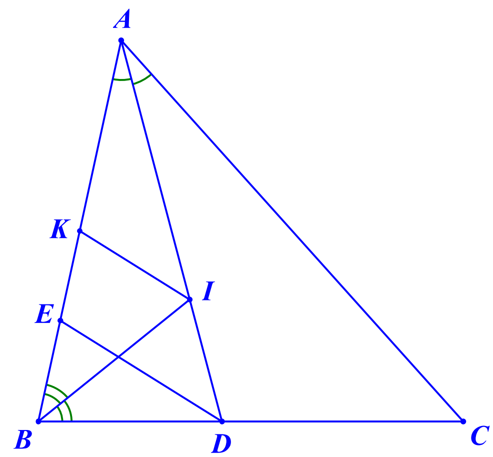
Nhận xét. Từ kết luận bài toàn, suy ra:

$$\frac{1}{AD}>\frac{b+c}{2bc}\Rightarrow\frac{1}{AD}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Tương tự như vậy đối với đường phân giác góc B và góc C, thì chúng ta giải được bài toán hay và khó sau: Cho tam giác ABC. Gọi l_a, l_b, l_c là độ dài đường phân giác góc A, B, C. Đặt $BC = a, AC = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài 2.9 Cho ΔABC có AD là đường phân giác, I là giao điểm của ba đường phân giác và K là trung điểm của AB. Biết rằng $\widehat{KIB} = 90°$. Chứng minh rằng: $AB + AC = 3BC$.

- ***Lời giải***



Trên BA lấy điểm E sao cho $BE = BD$

Ta có: ΔBDE cân tại B có BI là đường phân giác nên $BI \perp BE$

do đó $DE // KI(\perp BI) \Rightarrow \frac{KE}{KA} = \frac{DI}{AI}$ (1)

Áp dụng tính chất đường phân giác trong $\Delta ABD, \Delta ACD$ ta có : $\frac{BD}{BA} = \frac{ID}{IA} = \frac{CD}{CA}$ (2)

Do đó $\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{BA + CA}$ (3)

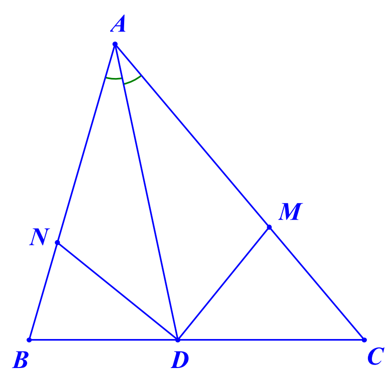
Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{KE}{KA} = \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BA} = \frac{BE}{2.KA}$

Hay $2KE = BE \Rightarrow BE = \frac{2}{3}BK \Rightarrow BD = \frac{1}{3}BA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{1}{3}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{BC}{BA + CA} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB + AC = 3.BC.$

Bài 2.10 Gọi AI là đường phân giác của tam giác $ABC; IM, IN$ thứ tự là các đường phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$

- ***Lời giải***



Áp dụng tính chất đường phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC} =; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$

$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$

$\Rightarrow BI.AN.CM = BN.IC.AM$

Bài 2.11 Cho tam giác ABC có chu vi bằng $18cm$. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M, đường phân giác của góc C cắt AB tại N. Biết rằng: $\frac{MA}{MC} = \frac{1}{2}; \frac{NA}{NC} = \frac{3}{4}$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

- ***Lời giải***

Xét ΔABC có BC là đường phân giác của ΔABC nên:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC.$$

Gọi CN là đường phân giác của ΔACB, suy ra:

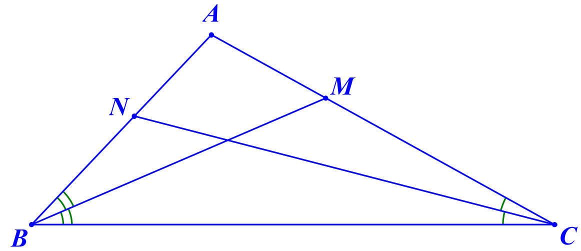
$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4}.BC$$

Ta có:

$AB+BC+AC=18 \Leftrightarrow \frac{BC}{2}+BC+\frac{3}{4}BC=18$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4}.BC=18 \Rightarrow BC=8(cm)$

Từ đó ta tính được $AB=4(cm); AC=6(cm)$



Bài 2.12 Cho ΔABC vuông cân tại A. Đường cao AH và đường phân giác BE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $CE=2.HI$

- ***Lời giải***

Ta có:

$\widehat{AIE}=\widehat{BAH}+\widehat{ABI}=\frac{1}{2}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=45°+\frac{1}{2}\hat{B}=45°+\frac{1}{2}\hat{C}=\widehat{AEI}$

Suy ra ΔAIE cân tại $A \Rightarrow AI=AE$ (1).

Áp dụng tính chất đường phân giác của ΔABH và ΔBAC, ta có:

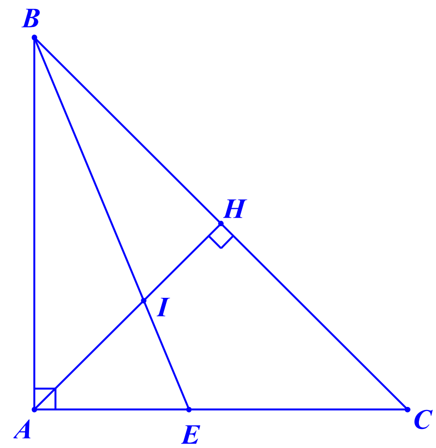
$\frac{IH}{IA}=\frac{BH}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AI}=\frac{BH}{IH}$ (2)

$\frac{EC}{EA}=\frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BC}{EC}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra : $\frac{BH}{IH}=\frac{BC}{EC}$ (4)

Vì ΔABC vuông cân tại v nên $BC=2.BH$.

Từ đó kết hợp với (4), suy ra $EC=2.IH$.



Bài 2.13 Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm AD, N là trung điểm BC. Trên tia đối của tia DC lấy điểm P, đường thẳng PM cắt AC tại Q và cắt BC tại S. Đường thẳng QN cắt DC tại R. Chứng minh rằng:

a) ΔNPR là tam giác cân.　　　b) $\frac{MQ}{MP}=\frac{SQ}{SP}$.

- ***Lời giải***

a) Ta có: $CN // DM; CN=DM$ và $\widehat{NCD}=90°$ nên $CDMN$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN // CD$

Gọi O là giao điểm của AC và MN.

ΔAOM và ΔCON có:

$AM=CN; \widehat{AMO}=\widehat{CNO}=90°; \widehat{MAO}=\widehat{NCO}$

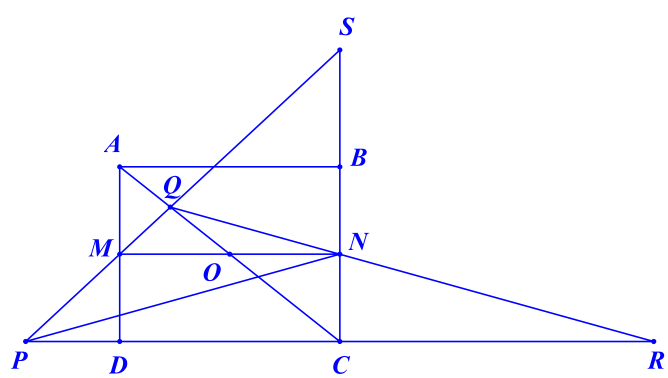
$\Rightarrow \Delta AMO=\Delta CNO(c.g.c) \Rightarrow MO=ON.$

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét, ta có:

$MO // CP \Rightarrow \frac{MO}{CP}=\frac{QO}{QC}, NO // CR \Rightarrow \frac{NO}{CR}=\frac{QO}{QC}$

Suy ra $\frac{NO}{CR}=\frac{MO}{CP}$ mà $MO=NO$ suy ra $CR=CP$.

ΔNRP có $NC \perp PR, CR=CP$ nên ΔNRP cân.



b) $MN // RP$ nên $\widehat{QNM}=\widehat{NRP}, \widehat{MNP}=\widehat{NPR}$

mà $\widehat{NRP} = \widehat{NPR} \Rightarrow \widehat{QNM} = \widehat{MNP} \Rightarrow NM$ là tia phân giác QNP.

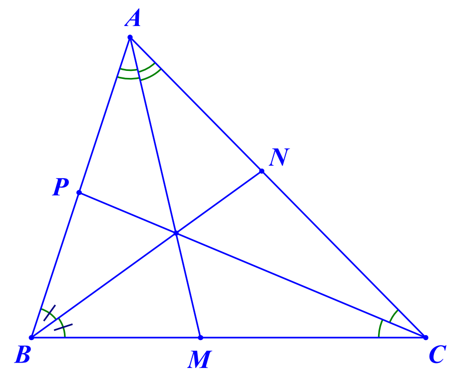
Ta có: $NS \perp MN$ nên NS là tia phân giác góc ngoài đỉnh N của ΔPNQ.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của ΔNPQ,

ta có: $\frac{MQ}{MP} = \frac{NQ}{NP}; \frac{SQ}{SP} = \frac{NQ}{NP} \Rightarrow \frac{MQ}{MP} = \frac{SQ}{SP}$.

Bài 2.14 Cho ΔABC có $AM.BN.CP$ là các đường phân giác. Đặt $BC = a; AC = b; AB = c$. Chứng minh rằng: $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

- ***Lời giải***



Theo tính chất đường phân giác của ΔABC, ta có:

$\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AN}{NC+AN} = \frac{AB}{BC+AB}$

$\Rightarrow \frac{AN}{b} = \frac{c}{c+a} \Rightarrow AN = \frac{bc}{c+a}$.

Tương tự, ta có: $AP = \frac{bc}{b+a}$.

Mặt khác: $\frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} = \frac{AN.AP}{AB.AC} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$ (1)

Tương tự: $\frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}$ (2)

và $\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}$ (3)

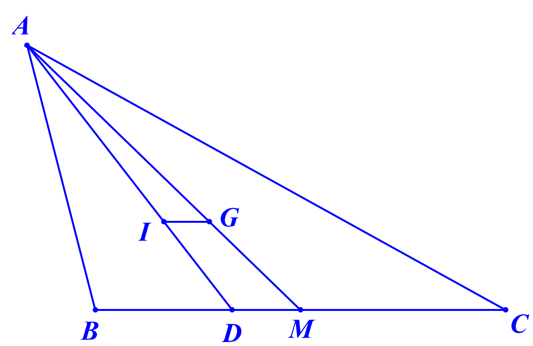
Từ (1), (2) và (3) ta có: $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CMN}}{S_{ABC}}$

$= 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)}$

$= \frac{(a+b)(a+c)(b+c) - bc(b+c) - ac(a+c) - ab(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

Bài 2.15 Cho ΔABC có $AB = 4cm; BC = 6cm; CA = 8cm$. Gọi I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC và G là trọng tâm. Tính độ dài đoạn thẳng IG.

- ***Lời giải***



Gọi D, M lần lượt là giao điểm của AI, AG với BC.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ta có:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BD+CD} = \frac{AB}{AB+AC}$.

$\Rightarrow \frac{BD}{6} = \frac{4}{4+8} \Rightarrow BD = \frac{6.4}{12} = 2cm.$

$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

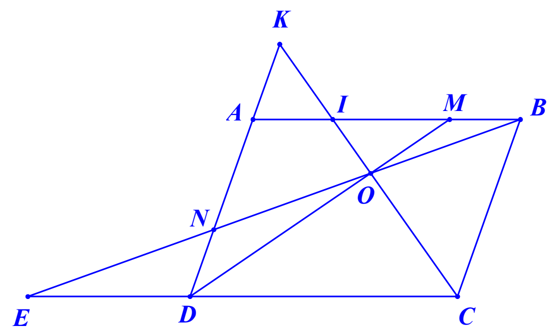
Mặt khác G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{GM}{AG}=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow \dfrac{ID}{IA}=\dfrac{GM}{GA}\left(=\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow IG \,//\, DM$ (theo định lý Ta-lét đảo)

$\Rightarrow \dfrac{IG}{DM}=\dfrac{AG}{AM}\Rightarrow \dfrac{IG}{DM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow IG=\dfrac{2}{3}DM$. $\Rightarrow IG=\dfrac{2}{3}.\left(BM-BD\right)=\dfrac{2}{3}.\left(3-2\right)=\dfrac{2}{3}cm$.

Bài 2.16 Cho hình bình hành $ABCD\left(AD<AB\right)$ các điểm M,N lần lượt thuộc AB,AD sao cho $BM=DN$. Gọi O là giao điểm của BN và DM. Đường thẳng CO cắt đường thẳng AB và AD theo thứ tự là I và K. Chứng minh rằng: $CD=DK;BI=BC$

- **Lời giải**



Gọi E là giao điểm của đường thẳng BN và CD

$BM \,//\, DE$ nên $\dfrac{BM}{ED}=\dfrac{BO}{OE}$

mà $BM=DN$ nên $\dfrac{BO}{OE}=\dfrac{DN}{ED}$ (1)

Ta có $DN \,//\, BC$ nên $\dfrac{DN}{ED}=\dfrac{BC}{CE}$ (2)

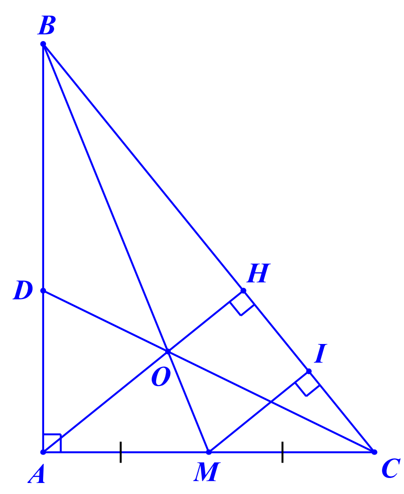
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BO}{OE}=\dfrac{BC}{CE}$

$\Rightarrow CO$ là đường phân giác $\widehat{BCD}$

$\Rightarrow \widehat{DKC}=\widehat{DCK}\left(=\widehat{BCK}\right)\Rightarrow \Delta CDK$ cân tại $D\Rightarrow CD=DK$

$\Rightarrow \widehat{BIC}=\widehat{DCI}\left(=\widehat{ICD}\right)\Rightarrow \Delta BCI$ cân tại $B\Rightarrow BI=BC.$

Bài 2.17 Cho tam giác ABC vuông tại A. Có đường cao AH, đường trung tuyến BM và đường phân giác CD đồng quy tại O. Chứng minh rằng: $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BH}{CH}$.



- **Lời giải**

Kẻ $MI\perp HC$ vì $AH\perp HC$ nên $MI \,//\, AH$.

Mặt khác $MA=MC$ nên $HI=CI\Rightarrow 2.HI=CH$.

Áp dụng tính chất đường phân giác và định lý ta-lét, ta có:

$\dfrac{BH}{CH}=\dfrac{BH}{2.HI}=\dfrac{BO}{2.OM}=\dfrac{BC}{2.CM}=\dfrac{BC}{AC}$.

Bài 2.18 Cho tam giác ABC vuông tại A. Hai đường phân giác BD và CE cắt nhau ở O. Biết số đo diện tích tam giác BOC bằng a. Tính tích $BD.CE$ theo a.

- **Lời giải**

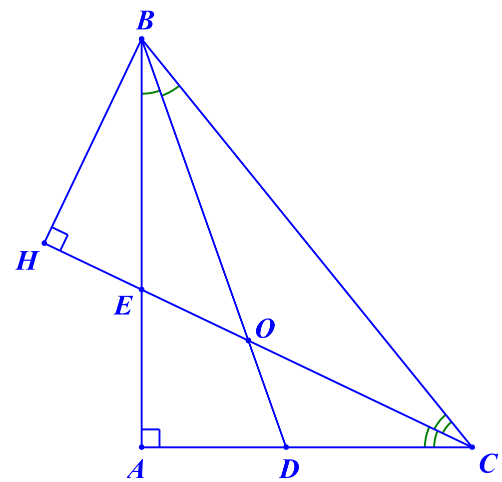
Đặt $BC=x;CA=y;AB=z$.

Theo tính chất đường phân giác của ΔABC, ta có:

$\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{z}{x}\Rightarrow \dfrac{DA}{DA+DC}=\dfrac{z}{z+x}\Rightarrow DA=\dfrac{yz}{z+x}$ (1)

AO là phân giác $\widehat{BAD}$ nên

$$\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{DA}\Rightarrow\frac{OB}{OB+OD}=\frac{AB}{AB+DA}\qquad(2)$$



Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{OB}{BD}=\dfrac{x+z}{x+y+z}$

Tương tự $\dfrac{OC}{CE}=\dfrac{x+y}{x+y+z}$. Từ đó

$$\frac{OB.OC}{BD.CE}=\frac{(x+y)(x+z)}{(x+y+z)^2}\Rightarrow\frac{OB.OC}{BD.CE}=\frac{x^2+xy+xz+yz}{2(x^2+xy+yz+zx)}=\frac{1}{2}$$

Vì $y^2+z^2=x^2$ nên $\dfrac{OB.OC}{BD.CE}=\dfrac{x^2+xy+xz+yz}{2(x^2+xy+yz+zx)}=\dfrac{1}{2}$

hay $BD.CE=2.OB.OC$ (3)

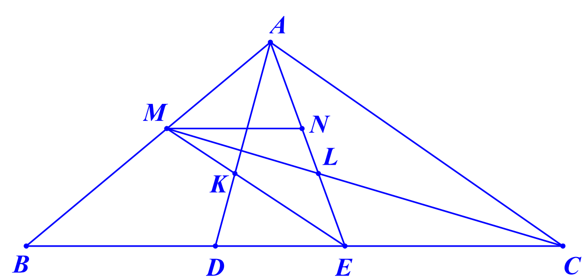
Để ý rằng nếu kẻ $BH\perp OC$, mặt khác dễ thấy $\widehat{BOC}=135°$, nên ΔBHO vuông cân tại H.

Do đó $S_{BOC}=\dfrac{1}{2}BH.OC=\dfrac{\sqrt{2}}{4}OB.OC$, suy ra $OB.OC=2a\sqrt{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: . $BD.CE=4a\sqrt{2}$

Bài 2.19 Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=3\widehat{ACB}$. Các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{BAD}=\widehat{DAE}=\widehat{EAC}$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, MC cắt AE tại L; gọi K là giao điểm ME và AD. Chứng minh rằng $KL\ //\ BC$.

- ***Lời giải***



Trên AE lấy điểm N sao cho $MN\ //\ BC$.

Từ giả thiết $\widehat{EAC}=\widehat{ECA}\Rightarrow\Delta EAC$ cân tại E
$\Rightarrow AE=EC$ (1)

Cũng theo giả thiết

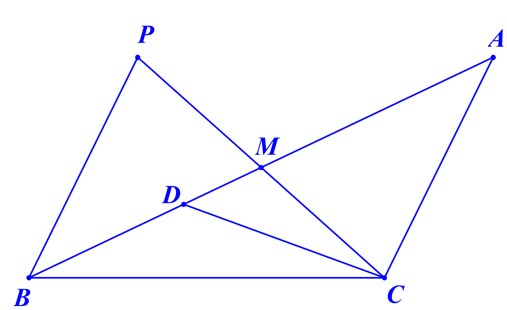
$\widehat{AEB}=\widehat{EAC}+\widehat{ECA}=2.\widehat{ECA}=\widehat{EAB}\Rightarrow\Delta BAE$
cân tại B $\Rightarrow$ °MAN cân tại M (vì $MN\ //\ BE$)
$\Rightarrow AM=NM$ (2)

Vậy ta có $\dfrac{LM}{LC}=\dfrac{NM}{EC}$ (vì $MN\ //\ EC$) $=\dfrac{AM}{AE}$ (theo (1) và (2)) $=\dfrac{KM}{KE}$ (theo tính chất đường phân giác)

Suy ra $KL\ //\ BC$ (định lý Ta-lét đảo)

Bài 2.20 Cho tam giác ABC với đường trung tuyến CM. Điểm D thuộc đoạn BM sao cho $BD=2.MD$. Biết rằng $\widehat{MCD}=\widehat{BCD}$. Chứng minh rằng: ΔACD là tam giác vuông.

- ***Lời giải***



ΔBCM có CD là đường phân giác nên

$$\frac{BC}{CM}=\frac{BD}{MD}=2\Rightarrow BC=2.CM$$

Trên tia đối của tia MC lấy điểm P sao cho
$MC=MP$ suy ra $CP=2.CM$
$\Rightarrow CP=BC\Rightarrow\Delta CBP$ cân tại C,
mà CD là phân giác nên $CD\perp BP$ (1)
Mặt khác: $\Delta CMA=\Delta PMB(c.g.c)$.

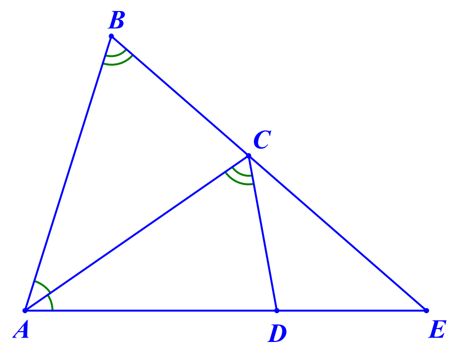
Do đó $\widehat{CAM} = \widehat{PBM}$ suy ra $AC // BP$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CD \perp AC$ hay ΔACD vuông tại C.

Chủ đề 3. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

Bài 1. Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$. Hai tia AD và BC cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $AB.DE = BC.CE$.

- ***Tìm cách giải.***



Để chứng minh đẳng thức tích, thông thường chúng ta biến đổi chúng dưới dạng tỉ lệ thức và chứng minh tỉ lệ thức ấy. Vậy để chứng minh $AB.DE = BC.CE$ chúng ta cần chứng minh $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DE}$. Nhận thấy tỉ số $\frac{AB}{BC}$ có thể vận dụng được tính chất đường phân giác và ta có $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$. Do vậy chúng ta cần chứng minh $\frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE}$.

Từ đó chúng ta tìm cách chứng minh $\Delta CDE \backsim \Delta ECA$, vậy chỉ cần chứng minh $\widehat{ECD} = \widehat{BAC}$ là xong.

- ***Trình bày lời giải***

Vì $\widehat{BAC} + \widehat{CBA} = \widehat{ECA}$ (góc ngoài tam giác) và $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ nên $\widehat{ECD} = \widehat{BAC}$

Do đó $\Delta CDE \backsim \Delta ECA$, suy ra $\frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE}$ (1)

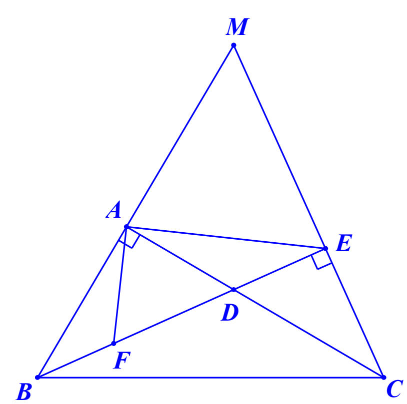
Trong ΔABE có AC là đường phân giác suy ra $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow AB.DE = BC.CE$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có điểm D nằm giữa A và C. Qua C dựng CE vuông góc với đường thẳng BD tại E. Chứng minh:

a) $\Delta ADE \backsim \Delta BDA$ b) $AB.CE + AE.BC = AC.\mathrm{BE}$

- ***Tìm cách giải.***



ΔADE và ΔBDA có $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$; để tìm một cặp góc nữa bằng nhau thật khó khăn. Do đó chúng ta tìm cách chứng minh cặp góc trên tỉ lệ thông qua hai tam giác khác. Chẳng hạn cần có $\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$ chúng ta nên chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta ECD$

- Để chứng minh $AB.CE + AE.BC = AC.\mathrm{BE}$, ta có vế trái là một tổng nên vế phải ta cần tách thành một tổng: $AC.\mathrm{BE} = AC.x + AC.y$ với $x + y = BE$. Do vậy ta chọn điểm F thuộc BD khi đó $x = BF$, $y = FE$ và chứng minh $AB.CD = AC.BF$, $AD.BC = AC.FE$. Từ đó chúng ta chỉ cần chọn điểm F sao cho $\Delta ABF \backsim \Delta ACE$, $\Delta AFE \backsim \Delta ABC$, là xong.

- ***Trình bày lời giải***

a) Xét ΔABD và ΔECD có $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$; $\widehat{BAD} = \widehat{CED} = 90°$ (gt)

Do đó: $\Delta ABD \backsim \Delta ECD \Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DE}{DC}$

Xét ΔADE và ΔBDA có $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$; $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DE}{DC}$. Do đó $\Delta ADE \backsim \Delta BDA$ (c.g.c)

b) ***Cách 1*****.** Gọi M là giao điểm AB và CE.

Xét ΔMBE và ΔMCA, ta có $\widehat{M}$ chung; $\widehat{MEB} = \widehat{MAC}\left(=90^0\right)$

Do đó $\Delta MBE \backsim \Delta MCA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MC}{MA}$

Xét ΔMAE và ΔMCB có $\dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MC}{MA}$, $\widehat{M}$ chung $\Delta MAE \backsim \Delta MCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MBC}$

Lấy $F \in BE$ sao cho $AF \perp AE$. Xét ΔABF và ΔACE có:

$\widehat{BAF} = \widehat{CAE}\left(=90° - \widehat{DAF}\right)$; $\widehat{ABF} = \widehat{ACE}\left(90° - \widehat{M}\right)$

Do đó: $\Delta ABF \backsim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BF}{CE} \Rightarrow AB.CE = AC.BF$ (1)

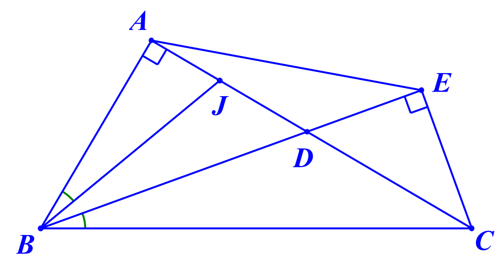
Xét ∆AFE và ΔABC có:

$\widehat{EAF} = \widehat{BAC}\left(=90°\right)$; $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Do đó: ∆AFE $\backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{EF}{BC} \Rightarrow AE.BC = AC.EF$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế ta được: $AB.CE + AE.BC = AC\left(BF + EF\right) = AC.BE$

Cách 2. Gọi J là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$.



Xét ΔABJ và ΔEBC có:

$\widehat{BAC} = \widehat{BEC}\left(=90°\right)$; $\widehat{ABJ} = \widehat{EBC}$

Do đó: $\Delta ABJ \backsim \Delta EBC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AJ}{CE} \Rightarrow AB.CE = BE.AJ$ (3)

Xét ΔABE và ΔJBC có: $\widehat{ABE} = \widehat{JBC}$; $\widehat{AEB} = \widehat{JCB}$

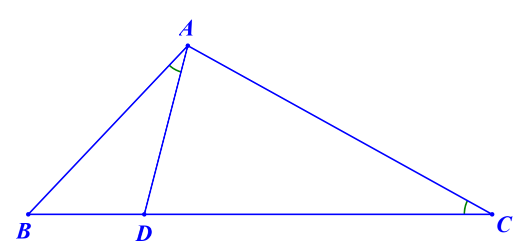
Do đó: $\Delta ABE \backsim \Delta JBC \Rightarrow \dfrac{AE}{JC} = \dfrac{BE}{BC} \Rightarrow AE.BC = BE.JC$ (4)

Từ (3) và (4) cộng vế với vế ta được: $AB.CE + AE.BC = BE\left(AJ + JC\right) = BE.AC$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm; $AC = 3$ cm; $BC = 4$ cm. Chứng minh rằng

$\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2.\widehat{ACB}$

- ***Tìm cách giải.***



Về mặt suy luận, muốn chứng minh một góc $\widehat{BAC}$ thành tổng các góc như đề bài. Ta có hai cách suy nghĩ:

Cách 1: trong góc $\widehat{BAC}$ dựng một góc $\widehat{BAD}$ hoặc $\widehat{DAC}$ bằng góc $\widehat{ABC}$ và chứng minh phần còn lại bằng $2.\widehat{ACB}$. Tuy nhiên cách này vẫn gặp khó khăn bởi còn hệ số 2.

Cách 2: trong góc $\widehat{BAC}$ dựng một góc $\widehat{BAD}$ bằng góc $\widehat{ACB}$ và chứng minh phần còn lại bằng $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$. Cách này có tính khả thi. Thật vậy, ta viết $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{ACB}$ nên nếu lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$, thì dễ dàng nhận thấy $\widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$ nên chúng ta chỉ cần chứng minh tam giác ACD cân tại C là xong.

Với suy luận như trên, chúng ta có hai cách trình bày sau:

- ***Trình bày lời giải***

Cách 1. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$ suy ra ΔABD ” ΔCBA $(g.g)$

Suy ra $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{AB}{CB} \Rightarrow \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow BD = 1$ cm $\Rightarrow CD = BC - BD = 3$ cm

$\Rightarrow CD = AC$ nên ΔACD cân tại C, do vậy $\widehat{DAC} = \widehat{ADC}$.

Mà $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$ (tính chất góc ngoài tam giác).

Suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} + 2.\widehat{ACB}$.

Cách 2. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $BD = 1$cm

$\Rightarrow CD = BC - BD = 3$ cm $\Rightarrow CD = AC$ nên ΔACD cân tại C

Do vậy $\widehat{DAC} = \widehat{ADC}$ (1)

Xét ΔABD và ΔCBA có $\widehat{ABD}$ chung và $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{1}{2}$.

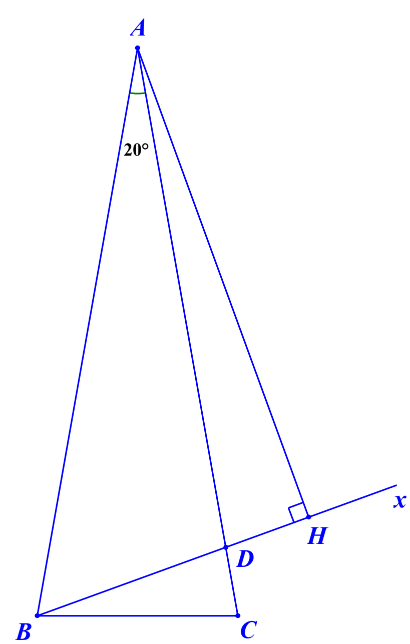
Suy ra ΔABD □ ΔCBA (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2.\widehat{ACB}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC ($AB = AC$) có góc ở đỉnh bằng 20°; cạnh đáy $BC = a$; cạnh bên $AB = b$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

- ***Lời giải***



Cách 1. Dựng tia Bx ở nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A sao cho $\widehat{CBx} = 20°$; tia Bx cắt AC ở D; kẻ $AH \perp Bx$. Tam giác ABC cân tại A, ta có:

$\widehat{A} = 20° \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 80° \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ABC} - \widehat{CBx} = 80° - 20° = 60°$

Suy ra ΔABH có $\widehat{ABH} = 60°$; $\widehat{AHB} = 90° \Rightarrow BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{b}{2}$.

Ta có: $AH^2 = AB^2 - BH^2$ (định lý Py-ta-go)

$\Rightarrow AH^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{3b^2}{4}$

ΔBDC có $\widehat{BCD} = 80°$; $\widehat{CBD} = 20° \Rightarrow \widehat{BDC} = 80°$

$\Rightarrow BCD$ cân tại B $\Rightarrow BD = BC = a$,

Do đó $DH = BH - BD = \dfrac{b}{2} - a$.

Nhận thấy: ΔABC ” ΔBDC $(g.g) \Rightarrow \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AC}{BC}$

$\Rightarrow CD = \dfrac{BC^2}{AC} = \dfrac{a^2}{b}$, mà $AD = AC - CD = b - \dfrac{a^2}{b}$

Và $AD^2 = AH^2 + DH^2 = \dfrac{3b^2}{4} + \left(\dfrac{b}{2} - a\right)^2 = b^2 - ab + a^2$.

Vậy $\left(b-\dfrac{a^2}{b}\right)^2 = b^2 - ab + a^2 \Leftrightarrow b^4 + a^4 - 2a^2b^2 = b^4 - ab^3 + a^2b^2$

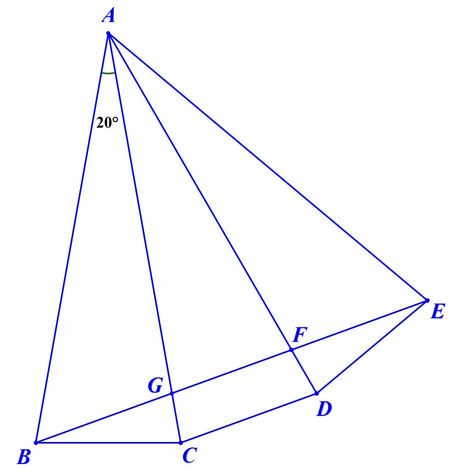
$\Leftrightarrow a\left(a^3+b^3\right) = 3a^2b^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$

Cách 2.

Dựng tam giác ABE đều sao cho E và C nằm cùng phía so với AB.

Dựng ΔACD cân tại A sao cho D; E nằm cùng phía với AC và $\widehat{CAD} = 20^0 \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ACD = \Delta ADE\,(c.g.c)$

Gọi F và G là giao điểm của BE với AD AC. Khi đó $BG = EF = a$. Vì $\widehat{ABE} = 60°$ nên $\widehat{CBG} = \widehat{BAC} = \widehat{CBE} = 20°$ và ΔCBG cân tại B.



$\Rightarrow \Delta BAC \backsim \Delta CBG\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CG}{GB}\ hay\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{CG}{A} \Rightarrow CG = \dfrac{a^2}{b}$

Ta có: $AG = AC - CG = b - \dfrac{a^2}{b}$

Ta có: $FG//CD$ nên theo định lý Ta-lét, ta có:

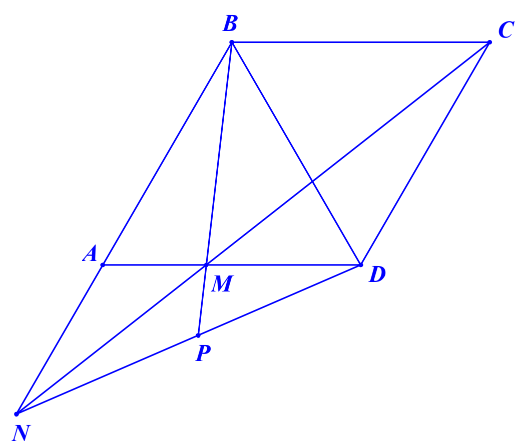
$\dfrac{GF}{CD} = \dfrac{AG}{AC} \Rightarrow \dfrac{GF}{a} = \dfrac{b-\dfrac{a^2}{b}}{b} \Rightarrow GF = \dfrac{ab^2 - a^3}{b^2}$

Mà $BE = BG + GF + FE \Rightarrow b = 2a + \dfrac{ab^2 - a^3}{b^2} \Leftrightarrow b^3 = 2ab^2 + ab^2 - a^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$

Bài 5. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60°$. Gọi M là một cạnh thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

a) Chứng minh $AB^2 = DM.BN$;
b) BM cắt DN tại P. Tính góc $\widehat{BPD}$.

- ***Lời giải***



a) Ta có: $AM//BC$ (do $AD//BC$),

suy ra: $\Delta NAM \backsim \Delta NBC \Rightarrow \dfrac{NA}{AM} = \dfrac{NB}{BC}$

hay $\dfrac{NA}{AM} = \dfrac{NB}{AB}$ (1) (vì $BC = AB$).

Ta có: $NA//DC$ (do $AB//DC$),

suy ra $\Delta NAM \backsim \Delta CDM \Rightarrow \dfrac{NA}{AM} = \dfrac{CD}{DM}$

Hay $\dfrac{NA}{AM} = \dfrac{AB}{DM}$ (2) (vì $CD = AB$).

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{NA}{AB} = \dfrac{AB}{DM}$ hay $AB^2 = DM.BN$.

b) Từ $\dfrac{NB}{AB} = \dfrac{AB}{DM} \Rightarrow \dfrac{NB}{BD} = \dfrac{BD}{DM}$

Xét ΔBND và ΔDBM có $\dfrac{NB}{BD} = \dfrac{BD}{DM}$ và $\widehat{NBD} = \widehat{BDM} = 60°$

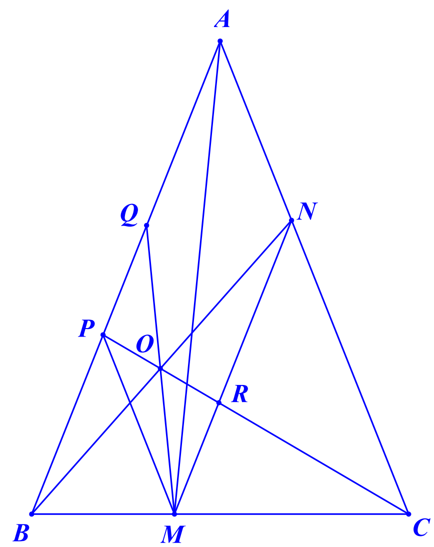
Suy ra $\Delta BND \backsim \Delta DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{BND} \Rightarrow \widehat{MBD} + \widehat{MBN} = \widehat{BND} + \widehat{MBN} = 60°$

Mà $\widehat{BPD}=\widehat{BND}+\widehat{MBN}$ nên $\widehat{BPD}=60^\circ$

Nhận xét. Với kỹ thuật như trên, bạn có thể giải bài toán sau. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A}=60^\circ$ vẽ đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA tại M và cắt tia đối của tia DA tại N. Gọi K là giao điểm của DM và BN. Tính số đo $\widehat{MKB}$.

Bài 6. Cho ΔABC cân tại A. Lấy M tùy ý thuộc BC, kẻ MN song song với AB (với $N\in AC$), kẻ MP song song với AC (với $P\in AB$). Gọi O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{OMP}=\widehat{AMN}$.

- ***Tìm cách giải.***



Nhận thấy $\widehat{BPM}=\widehat{MNC}\Rightarrow\widehat{QPM}=\widehat{ANM}$

Do đó $\widehat{OMP}=\widehat{AMN}\Leftrightarrow\Delta QPM\backsim\Delta ANM$

Mặt khác chúng ta thấy ΔQPM và ΔANM khó có thể tìm thêm được một cặp góc nữa bằng nhau. Do vậy chúng ta nên tìm cách biến đổi thêm hai cặp cạnh kề với hai góc $\widehat{OMP}$; $\widehat{AMN}$ tỉ lệ là xong.

- ***Trình bày lời giải***

Giả sử $MB\le MC$. Gọi Q là giao điểm MO và AB; K là giao điểm CP và MN.

Vì MNAP là hình bình hành nên $\widehat{QPM}=\widehat{ANM}$ (1)

Vì ΔABC cân tại A nên suy ra ΔPBM cân tại P và ΔNCM cân tại N.

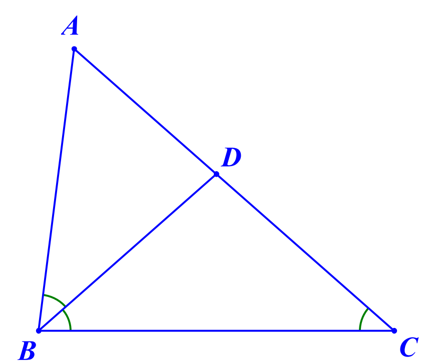
Do đó $PB=PM=AN$ và $NC=NM=AP$ kết hợp với $MN//AP$

suy ra: $\dfrac{PQ}{PM}=\dfrac{PQ}{PB}=\dfrac{KM}{KN}=\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{NA}{NM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta QPM\backsim\Delta ANM\ (c.g.c)\Rightarrow\widehat{QMP}=\widehat{AMN}$ hay $\widehat{OMP}=\widehat{AMN}$ (đpcm)

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB=2$ cm, $AC=3$ cm và $BC=2{,}5$ cm. Chứng minh rằng $\widehat{B}=2.\widehat{C}$.

- ***Tìm cách giải.***



Để chứng minh $\widehat{B}=2.\widehat{C}$, chúng ta cũng có hai hướng sau:

- ***Cách 1.*** Dựng phân giác BD và chứng tỏ $\widehat{ABD}=\widehat{C}$.
- ***Cách 2.*** Từ đỉnh C dựng thêm một góc bằng góc B và chứng minh cặp góc bằng nhau.

Vì bài toán biết khá nhiều độ dài đoạn thẳng nên chúng ta chứng minh cặp góc bằng nhau bằng cách chứng minh hai tam giác đồng dạng theo trường hợp cạnh-góc-cạnh.

- ***Trình bày lời giải***

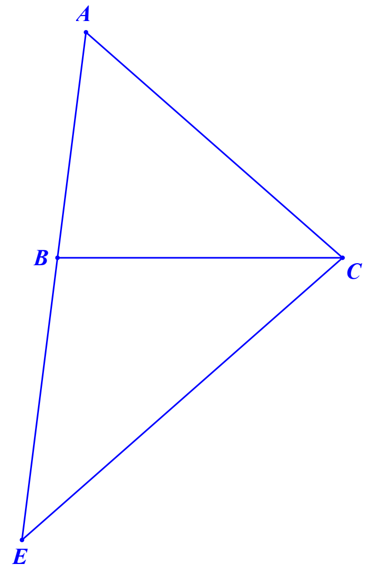
Cách 1.

Ta có: $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{2}{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{2}$ suy ra $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB}{AD}$.

Xét ΔABC và ΔADB có $\widehat{A}$ chung, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB}{AD}$

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta ADB$ (c.g.c)

Do đó: $\widehat{ACB}=\widehat{ABD}$, vậy $\widehat{ABC}=2.\widehat{C}$.



Cách 2.

Trên tia đối tia BA lấy điểm E sao cho $BE=BC$ suy ra:
$\widehat{ABC}=2.\widehat{BEC}=2.\widehat{BCE}$

Ta có $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{3}{2+2,5}=\dfrac{2}{3}$ suy ra $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AB}{AC}$.

Xét ΔABC và ΔACE có $\widehat{A}$ chung, $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AB}{AC}$

Do đó: $\Delta ABC \backsim \Delta ACE$ (c.g.c)

do đó $\widehat{ACE}=\widehat{ABC}$ suy ra $\widehat{ACE}=2.\widehat{BCE}\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{BCE}$

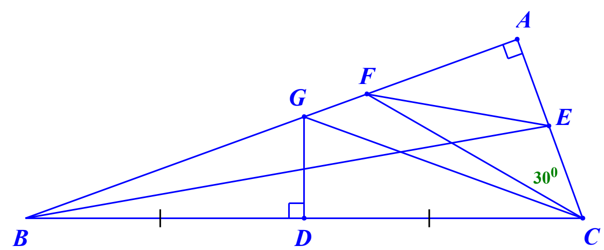
Hay $\widehat{ABC}=2.\widehat{ACB}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=90^\circ$ và $\widehat{B}=20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC và AB sao cho $\widehat{ABE}=10^\circ$ và $\widehat{ACF}=30^\circ$. Tính $\widehat{CFE}$.

(Thi Olympic Toán quốc tế Đài Loan TAIMC, năm 2012)

- ***Tìm cách giải.***

Những bài toán tính số đo góc thường khó, trước hết chúng ta nên vẽ hình chính xác, sau đó phân tích giả thiết để dự đoán kỹ thuật kẻ thêm yếu tố phụ. Trong giả thiết chúng ta nhận thấy $\widehat{ACF}=30^\circ \Rightarrow FC=2.AF$.



Từ $\widehat{B}=20^\circ \Rightarrow \widehat{C}=70^\circ$, khi đó $\widehat{BCF}=40^\circ$, chúng ta có liên tưởng gì góc 40^o này với góc 20^o và 30^o ở đề bài không? Với suy nghĩ ấy, chúng ta lấy điểm G trên AB sao cho $\widehat{BCG}=20^\circ$ khi đó bài toàn tạo nên những yếu tố mới: CF là phân giác góc ACG, tam giác BCG cân tại G. Với hình vẽ chính xác, chúng ta hoàn toàn có thể dự đoán được CG song song với FE. Từ đó định hướng để chứng minh dự đoán ấy bằng định lý Ta-lét đảo.

- ***Trình bày lời giải***

Xét ΔABC có $\widehat{A}=90^\circ$ và $\widehat{B}=20^\circ \Rightarrow \widehat{C}=70^\circ$

ΔACF có $\widehat{A}=90^\circ$ và $\widehat{ACF}=30^\circ \Rightarrow FC=2.AF$.

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho GD vuông góc với BC.

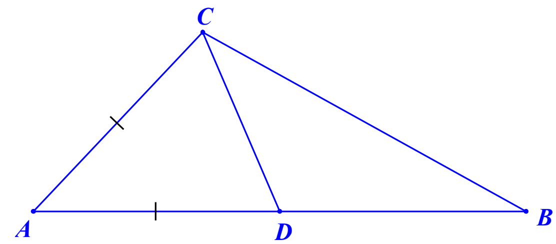
Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta DBG \Rightarrow \dfrac{BD}{BG}=\dfrac{BA}{BC}$; $\widehat{GCB}=\widehat{GBC}=20^\circ \Rightarrow \widehat{GCF}=20^\circ$

Mặt khác CG và BE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BCF}$ và $\widehat{ABC}$ nên $\dfrac{FC}{FG}=\dfrac{BC}{BG}$; $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{AE}{EC}$

Do đó: $\dfrac{AF}{FG}=\dfrac{\frac{1}{2}FC}{FG}=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{BG}=\dfrac{BD}{BG}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{AE}{EC}\Rightarrow \dfrac{AF}{FG}=\dfrac{AE}{EC}$

Từ đó ta có: $CD//EF$ (định lý Ta-lét đảo) $\Rightarrow \widehat{CFE}=\widehat{GCF}=20^\circ$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $3\widehat{A}+2\widehat{B}=180^\circ$. Tính số đo các cạnh của tam giác biết số đo ấy là ba số tự nhiên liên tiếp.



- **Lời giải**

Vì $3\widehat{A}+2\widehat{B}=180^\circ=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}\Rightarrow\widehat{C}=2.\widehat{A}+\widehat{B}\Rightarrow\widehat{C}>\widehat{A}$

và $\widehat{C}>\widehat{B}$ $\Rightarrow AB>BC$ và $AB>AC$

Trên AB lấy điểm D sao cho $AD=AC\Rightarrow$ D nằm giữa A và B.

Ta có: ΔACD cân tại A nên $\widehat{ADC}=\dfrac{180^\circ-\widehat{A}}{2}$

Mà $3\widehat{A}+2\widehat{B}=180^\circ\Rightarrow180^\circ-\widehat{A}=2\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\Rightarrow\widehat{ADC}=\dfrac{2\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)}{2}=\widehat{A}+\widehat{B}\Rightarrow\widehat{CDB}=180^\circ-\widehat{ADC}=\widehat{C}$

Vậy $\Delta ABC\backsim\Delta CBD\ (g.g)\Rightarrow\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{BD}\Rightarrow BC^2=AB.BD=AB\left(AB-AC\right)$ (*)

Do AB, BC, AC là ba số nguyên liên tiếp và $AB=\max\left\{AB,BC,AC\right\}$ nên $AB=BC+1$ hoặc $AB=BC+2$.

Trường hợp 1. Nếu $AB=BC+1$ thì $AC=BC-1$ thay vào (*), ta có:
$BC^2-2.BC-2=0$, không tồn tại BC là số nguyên.

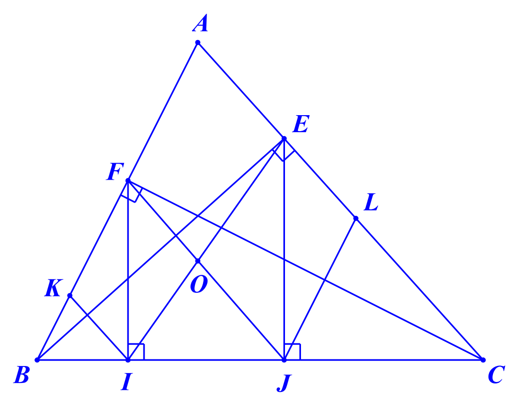
Trường hợp 2. Nếu $AB=BC+2$ thì $AC=BC+1$ thay vào (*), ta có:
$BC^2-BC-2=0\Leftrightarrow\left(BC-2\right)\left(BC+1\right)=0\Leftrightarrow BC=2$ (vì $BC>0$).

Vậy $BC=2$; $AC=3$ và $AB=4$.

Nhận xét. Vận dụng kỹ thuật trên, bạn có thể làm được bài toán đảo:

Cho tam giác MNP thỏa mãn $PN^2+MP.MN-MN^2=0$. Chứng minh rằng: $3.\widehat{M}+2.\widehat{N}=180^\circ$.

Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BE và CF. Kẻ FI và EJ cùng vuông góc với BC (I; J thuộc BC). Các điểm K, L lần lượt thuộc AB, AC sao cho $KI//AC$, $LJ//AB$. Chứng minh rằng ba đường thẳng EI, FJ và KL đồng quy.



- **Lời giải**

Gọi O là giao điểm của EI và FJ. Ta có:

$\widehat{KFI}=\widehat{FCB}=90^\circ-\widehat{ABC}=90^\circ-\widehat{LJC}=\widehat{EJL}$ (1)

Lại có: $\widehat{IKF}=\widehat{ELJ}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta KFI\backsim\Delta LJE\ (g.g)$

$\Rightarrow\dfrac{KF}{LJ}=\dfrac{FI}{EJ}$ (3)

Xét ΔFOI và ΔJOE có:

$\widehat{FOI}=\widehat{JOE}$ (đối đỉnh)

$\widehat{IFO}=\widehat{EJO}$ (so le trong)

Do đó: $\Delta FOI\backsim\Delta JOE$ suy ra $\dfrac{FO}{OJ}=\dfrac{FI}{JE}$ (4)

Lại có: $\widehat{KFO}=\widehat{LJO}$ (so le trong) (5)

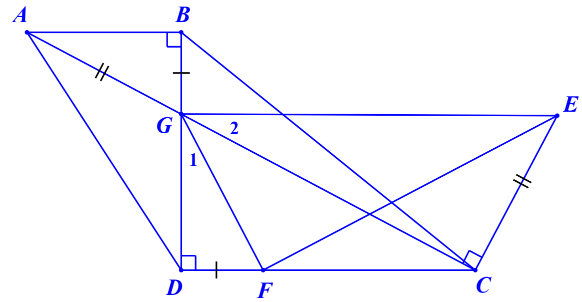
Từ (3), (4), (5) suy ra $\Delta KFO\backsim\Delta LJO$ (c.g.c). Do đó $\widehat{FOK}=\widehat{JOL}$, mà hai góc ở vị trí đối đỉnh. Suy ra K, O, L thẳng hàng, tức là FJ, EI, KL đồng quy.

Bài 11. (*Đề thi HSG lớp 9*) Cho hình thang ABCD $(CD > AB)$ với $AB//CD$ và $AB \perp BD$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại G. Trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm E sao cho $CE = AG$ và đoạn thẳng GE không cắt đường thẳng CD. Trên đoạn thẳng DC lấy điểm F sao cho $DF = GB$.

a) Chứng minh $\Delta FDG \backsim \Delta ECG$

b) Chứng minh $GF \perp EF$.

- **Lời giải**



a) Ta có: $AB//CD \Rightarrow \dfrac{BG}{AG} = \dfrac{GD}{GC}$.

Mà $AG = CE$; $BG = DF \Rightarrow \dfrac{DF}{CE} = \dfrac{GD}{GC}$.

Xét ΔFDG và ΔECG có: $\dfrac{DF}{CE} = \dfrac{GD}{CG}$;

$\widehat{GDF} = \widehat{GCE}$ nên $\Delta FDG \backsim \Delta ECG$ (c.g.c)

b) Ta có: $\Delta FDG \backsim \Delta ECG \Rightarrow \widehat{G_2} = \widehat{G_2}$; $\dfrac{GD}{GF} = \dfrac{GC}{GE}$

Xét ΔGDC và ΔGFE có $\dfrac{GD}{GF} = \dfrac{GC}{GE}$; $\widehat{DGC} = \widehat{FGE}$ (vì $\widehat{G_1} = \widehat{G_2}$)

Do đó: $\Delta GDC \backsim \Delta GFE \Rightarrow \widehat{GFE} = \widehat{GDC} = 90^0$. Do đó $GF \perp FE$.

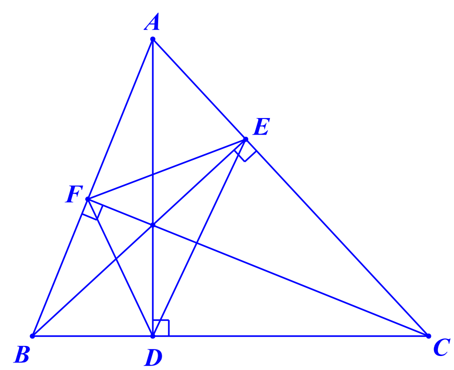
Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $AE.AC = AF.AB$;

b) Chứng minh rằng: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$;

c) Chứng minh rằng H là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔDEF.

- **Lời giải**



a) Xét ΔABE và ΔACF có $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90°$; $\widehat{BAC}$ chung

Do $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$

b) Từ $AE.\text{AC} = \text{AF}.\text{AB} \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$.

Xét ΔAEF và ΔABC có $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$; $\widehat{BAC}$ chung

Do đó: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

c) Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\Delta CAB \backsim \Delta CDE$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CED}$

Từ đó suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{CED} \Rightarrow$ EB là tia phân giác $\widehat{DEF}$.

Chứng minh tương tự, ta có DA là tia phân giác $\widehat{EDF}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 13. Cho hình hình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn DB. Gọi H, K là hình chiếu của C trên đường thẳng AB, AD. Chứng minh rằng $\Delta CHK \backsim \Delta BCA$.

- **Lời giải**

Xét ΔCBH và ΔCDK có:

$\widehat{CHB} = \widehat{CKD}\left(= 90°\right).\widehat{HBC} = \widehat{KDC}\left(= \widehat{BCD}\right)$

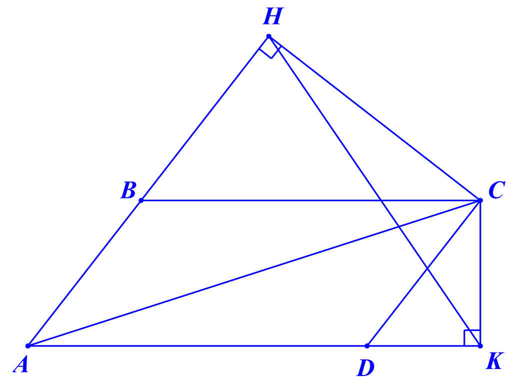
Do đó: ΔCBH và ΔCDK (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{CD}$

Mà $CD = AB$ nên $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{AB}$.

Xét ΔCHK và ΔBCA có: $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CK}{AB}$

và $\widehat{ABC} = \widehat{HCK}$ (cùng bù với $\widehat{BAD}$)

Do đó: $\Delta CHK \backsim \Delta BCA$ (c.g.c).



Bài 14. Cho tam giác ABC, đường phân giác CD. Chứng minh rằng $CD^2 < CA.CB$.

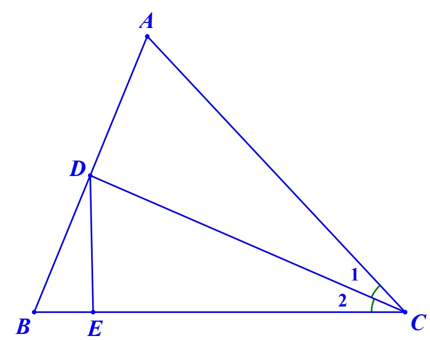
- **Lời giải**

Ta có $\widehat{CDB} > \widehat{A}$ (tính chất góc ngoài), do đó trên cạnh BC lấy E sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{A}$.

Xét ΔACD và ΔDCE có $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$; $\widehat{A} = \widehat{CDE}$

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta DCE\ (g.g)\ \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{CD}{CE}$

$\Rightarrow CD^2 = AC.CE < AC.BC$



Bài 15. Cho tam giác đều ABC. Trên tia BA lấy điểm E (A nằm giữa B và E). Gọi D là điểm đối xứng với E qua đường thẳng BC. Gọi F là giao điểm của đường thẳng CD và AB. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{BD} + \dfrac{1}{BF}$.

- **Lời giải**

Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{DBC} = \widehat{EBC} = 60°$

Vì $\widehat{DBC} = \widehat{ACB} = 60°$ nên $AC//BD$.

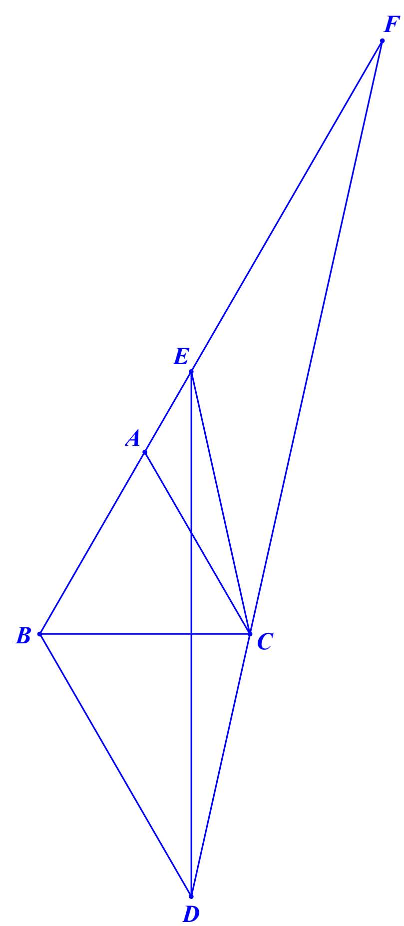
Suy ra: $\widehat{ACF} = \widehat{BDC} = \widehat{AEC} \Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta ACF\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow \dfrac{AB}{AB + AF} = \dfrac{AE}{AB + AE}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{AE}{BE} \Rightarrow \dfrac{AB}{BF} = 1 - \dfrac{AB}{BE}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BF} + \dfrac{AB}{BE} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{BF} + \dfrac{1}{BE} = \dfrac{1}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{BD} + \dfrac{1}{BF} = \dfrac{1}{BC}$. Điều phải chứng minh.



Bài 16. Cho hình bình hành ABCD có góc A tù. Từ A, vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, CD cắt CD, BC tương ứng tại E và F. Đường thẳng qua A vuông góc với BD, cắt EF tại M. Chứng minh $ME = MF$.

- **Lời giải**

Từ giả thiết suy ra C là trực tâm ΔAEF nên $AC \perp EF$.

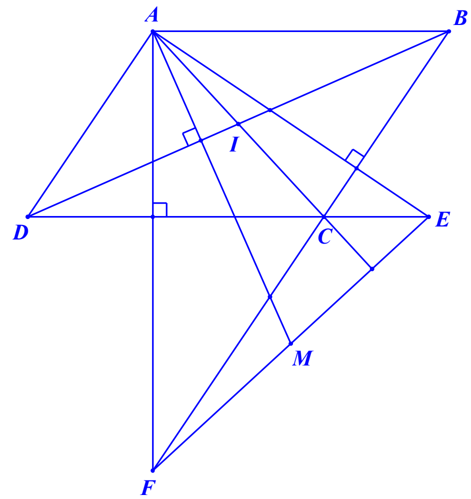
Kết hợp với $BD \perp AM$ và $ED \perp AF$

theo tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc ta có: $\widehat{ICD} = \widehat{MFA}$; $\widehat{CDI} = \widehat{MAF}$

Do đó: $\Delta ICD \backsim MFA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{MF}{MA}$ (1)

Tương tự $\Delta ICB \backsim \Delta MEA(g.g) \Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{ME}{MA}$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với giả thiết $IB = ID$ suy ra $ME = MF$.



Bài 17. Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc xMy bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

a) a) $BD.CE = \dfrac{BC^2}{4}$

b) DM; EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED;

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

- **Lời giải**

a) Trong tam giác BDM ta có $\widehat{D_1} = 120^\circ = \widehat{M_1}$

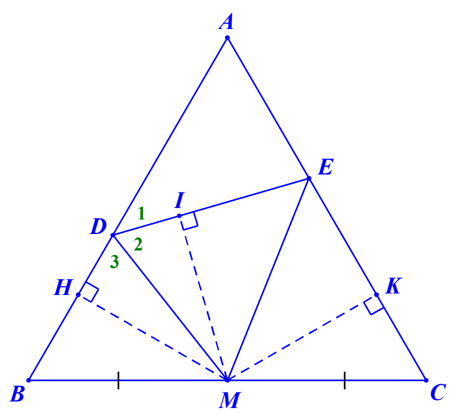
Vì $\widehat{M_2} = 60^\circ$ nên ta có: $\widehat{M_3} = 120^\circ - \widehat{M_1}$

Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{M_3}$ mà $\widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$

Do đó $\Delta BMD \backsim \Delta CEM$ (1)

Suy ra $\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{CM}{CE}$, từ đó: $BD.CE = BM.CM$

Vì $BM = CM = \dfrac{BC}{2}$, nên ta có: $BD.CE = \dfrac{BC^2}{4}$



b) Từ (1) suy ra $\dfrac{BD}{CM} = \dfrac{MD}{EM}$ mà $BM = CM$ nên ta có: $\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{MD}{EM}$

Do đó $\Delta BMD \backsim \Delta MED$. Từ đó suy ra: $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$, do đó DM là tia phân giác của góc BDE.

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của góc CED.

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC.

Theo tính chất đường phân giác, ta có: $DH = DI, EI = EK \Rightarrow AH = AK$.

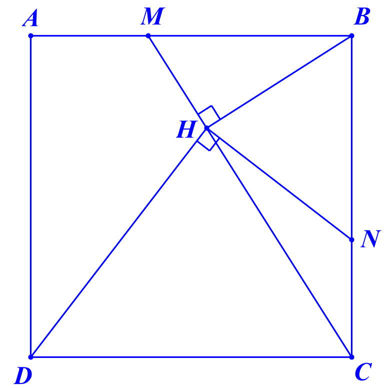
Từ đó suy ra chu vi tam giác ADE bằng:

$AD + DE + EA = AD + DH + EK + EA = 2AH$. Vậy chu vi tam giác ADE không đổi.

Bài 18. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M. Vẽ BH vuông góc với CM. Nối DM. Gọi HN vuông góc với DH (N thuộc BC).

a) Chứng minh rằng tam giác DHC đồng dạng với tam giác NHB;

b) Chứng minh rằng $AM.NB = NC.MB$



- **Lời giải**

a) Xét ΔDHC và ΔNHB có: $\widehat{DHC} = \widehat{NHB}\left(= 90° - \widehat{CHN}\right)$;

$\widehat{HCD} = \widehat{HBC}\left(= 90° - \widehat{BCH}\right)$

Suy ra: $\Delta DHC \backsim \Delta NHB$ (g.g)

b) Xét ΔMBH và ΔBCH có:

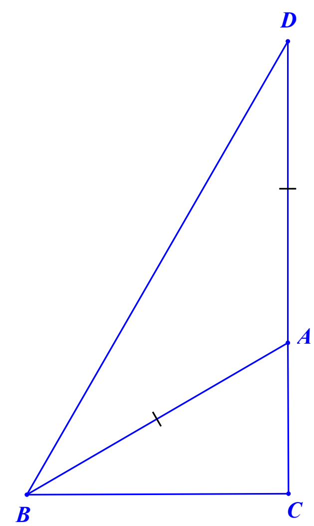
$\widehat{MHB} = \widehat{BHC}\left(= 90°\right); \widehat{MBH} = \widehat{HCB}\left(= 90° - \widehat{CBH}\right)$

Suy ra $\Delta MBH \backsim \Delta BCH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{HB}{HC}$ (1)

Mà $\Delta DHC \backsim \Delta NHB\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{NB}{DC} = \dfrac{HB}{HC}$ (2) và $BC = CD$

nên từ (1) và (2), suy ra: $MB = NB \Rightarrow AM = CN$, suy ra $AM.NB = NC.MB$.

Bài 19. Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB = 2.AC$ và $\widehat{A} = 2.\widehat{B}$. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông.



- **Lời giải**

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

Từ đó suy ra $DC = 3.AC$ và $\widehat{BAC} = 2\widehat{BDA}$ nên $\widehat{BDC} = \widehat{ABC}$.

Từ đó $\Delta ABC \backsim \Delta BDC \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{DC} \Rightarrow BC^2 = DC.AC$

$\Rightarrow BC^2 = 3.AC^2 \Rightarrow BC^2 + AC^2 = 4.AC^2 = (2AC)^2$

hay $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Vậy ΔABC là tam giác vuông tại C.

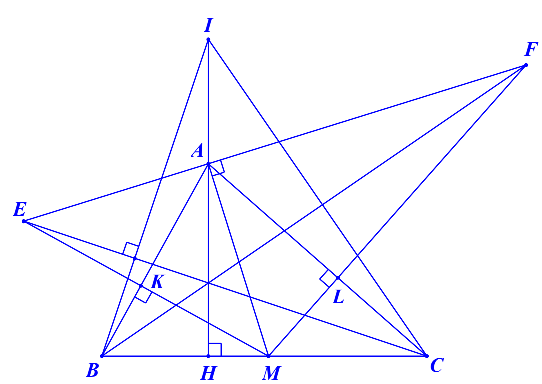
Bài 20. Cho ΔABC nhọn có AH là đường cao lấy điểm M thuộc đoạn BC, kẻ MK vuông góc với AB và ML vuông góc với AC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt MK, ML tại E và F. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với CE cắt AH tại I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AIB \backsim \Delta MCE$

b) $\dfrac{EM}{FM} = \dfrac{ML}{KM}$ và $\dfrac{BM}{FM} = \dfrac{AI}{AC}$;

c) AH, BF, CE đồng qui.

- **Lời giải**



a) Ta có: $\widehat{BIA} = \widehat{MCE}\left(= 90° - \widehat{IBH}\right)$ (1).

Lại có: $\widehat{IAB} + \widehat{BAH} = 180°; \widehat{CME} + \widehat{EMB} = 180°$;

và $\widehat{BAH} = \widehat{EMB}\left(= 90° - \widehat{ABC}\right) \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{CME}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta IAB \backsim \Delta MCE\ (g.g)$

b) Xét ΔMAK và ΔMEA có:

$\widehat{MKA} = \widehat{MAE}\left(= 90°\right), \widehat{AME}$ chung

$\Rightarrow \Delta MAK \backsim \Delta MEA\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MK}{MA} \Rightarrow MA^2 = ME.MK$ (3)

Tương tự: ΔMAL ” $\Delta MFA\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{MF} = \dfrac{ML}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ML$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $ME.MK = MF.ML \Rightarrow \dfrac{EM}{FM} = \dfrac{ML}{KM}$.

Ta có: $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \dfrac{AB.MK}{AC.ML}$. Mặt khác $\dfrac{EM}{FM} = \dfrac{ML}{MK} \Rightarrow \dfrac{MK}{ML} = \dfrac{MF}{ME}$

Suy ra $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB.MF}{AC.ME} \Rightarrow \dfrac{MB}{MF} = \dfrac{AB.MC}{AC.ME}$ (5)

Mặt khác ΔAIB ” ΔMCE, suy ra $\dfrac{MC}{ME} = \dfrac{AI}{AB}$ (6)

Từ (4) và (5) suy ra: $\dfrac{MB}{MF} = \dfrac{AB.AI}{AC.AB} = \dfrac{AI}{AC}$

c) Xét ΔMBF và ΔAIC có $\dfrac{MB}{AI} = \dfrac{MF}{AC}$ và $\widehat{IAC} = \widehat{BMF}$

Do đó ΔMBF □ ΔAIC (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIC} = \widehat{MBF}$

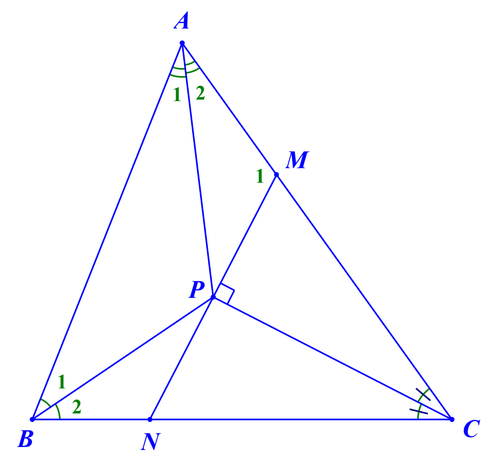
mà $\widehat{AIC} + \widehat{ICB} = 90^\circ\left(AI \perp BC\right) \Rightarrow \widehat{MBF} + \widehat{ICB} = 90^\circ$ hay BF vuông góc với CI.

Tam giác IBC có IH, BF, CE là đường cao, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 21. Cho ΔABC. Gọi P là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Một đường thẳng đi qua P vuông góc với CP, cắt AC và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{AM}{BN} = \left(\dfrac{AP}{BP}\right)^2$ b) $\dfrac{AM}{AC} + \dfrac{BN}{BC} + \dfrac{CP^2}{AC.BC} = 1$.

- ***Lời giải***



a) Ta có: $\widehat{APB} = 180^\circ - \widehat{A_1} - \widehat{B_1} = 180^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2} - \dfrac{\widehat{B}}{2}$

$= \dfrac{360^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}}{2} = \dfrac{180^\circ + \widehat{C}}{2} = \dfrac{180^\circ + \widehat{C}}{2} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

Xét ΔCMP có:

$\widehat{M_1} = \widehat{MPC} + \widehat{MCP} \Rightarrow M_1 = 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{M_1}$.

Xét ΔAPB và ΔAMP có:

$\widehat{APB} = \widehat{M_1}$; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Dp đó: ΔAPB □ ΔAMP (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AP} = \dfrac{AP}{AB} \Rightarrow AM.AB = AP^2$ (1)

Tương tự, ta có: ΔAPB ” $\Delta PNB\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BN}{BP} = \dfrac{BP}{AB} \Rightarrow BN.AB = BP^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AM}{BN} = \left(\dfrac{AP}{BP}\right)^2$, điều phải chứng minh.

b) Ta có: ΔAMP ” ΔAPB (chứng minh trên); ΔAPB ” ΔPNB (chứng minh trên).

ΔAMP ” $\Delta PNB \Rightarrow \dfrac{AM}{PN} = \dfrac{MP}{BN} \Rightarrow AM.BN = MP.PN$ hay $AM.BN = MP^2$

ΔCMN có CP là phân giác, CP là đường cao nên ΔCMN cân tại C

$\Rightarrow CM = CN; MP = PN$.

Xét $AM.BC + BN.AC + CP^2 = AM.BC + BN.AC + CM^2 - MP^2$

$$= AM.BC + BN.AC + CM^2 - AM.BN$$
$$= AM.(BC - BN) + BN.AC + CM^2$$
$$= CM.(AM + CM) + BN.AC$$
$$= CM.AC + BN.AC = AC.(CM + BN) = AC.BC$$

Do đó: $AM.BC + BN.AC + CP^2 = AC.BC$.

Suy ra $\dfrac{AM}{AC} + \dfrac{BN}{BC} + \dfrac{CP^2}{AC.BC} = 1$, điều phải chứng minh.

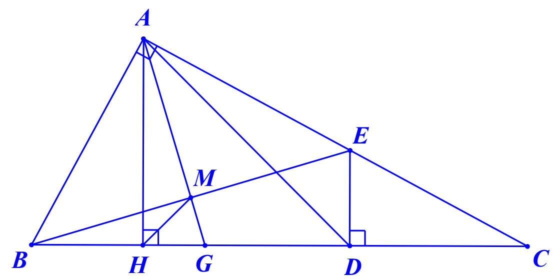
Bài 22. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC > AB)$, đường cao AH $(H \in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của góc AHM

c) Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: $\dfrac{GB}{BC} = \dfrac{HD}{AH + HC}$.

- ***Lời giải***



a) Xét ΔCDE và ΔCAB có:

$\widehat{CDE} = \widehat{CAB} = 90°$

$\widehat{DCE}$ chung,

suy ra $\Delta CDE \backsim \Delta CAB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CA}{CB}$

Xét ΔADC và ΔBEC có:

$\widehat{ACB}$ chung, $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CA}{CB}$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$ (c.g.c)

Suy ra: $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 135°$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết).

Nên $\widehat{AEB} = 45°$ do đó tam giác ABE vuông cân tại A.

Suy ra: $BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$

b) Ta có $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC}$ (do $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$)

mà $AD = AH\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

nên $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{AH\sqrt{2}}{AC} = \dfrac{BH}{AB\sqrt{2}} = \dfrac{BH}{BE}$ (do $\Delta ABH \backsim \Delta CBA$).

Xét ΔBHM và ΔBEC có $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BH}{BE}$ và $\widehat{CBE}$ chung

Do đó $\Delta BHM \backsim \Delta BEC$, suy ra $\widehat{BHM} = \widehat{BEC} = 135° \Rightarrow \widehat{AHM} = 45°$.

c) Ta có AG còn là phân giác góc $BAC \Rightarrow \dfrac{GB}{GC} = \dfrac{AB}{AC}$.

$\Delta ABC \backsim \Delta DEC$ (g.g) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{ED}{DC} = \dfrac{AH}{HD}\ (do\ ED // AH) = \dfrac{HD}{HC}$

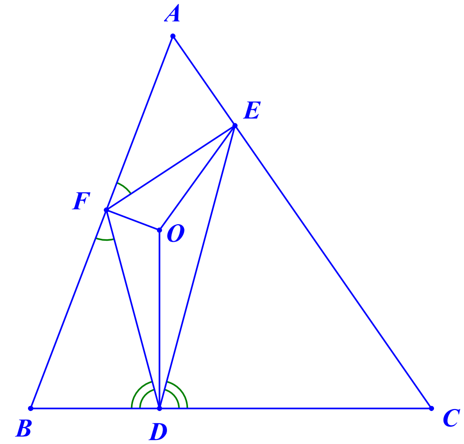
$\Rightarrow \dfrac{GB}{GC} = \dfrac{HD}{HC} \Rightarrow \dfrac{GB}{GB + GC} = \dfrac{HD}{HD + HC} \Rightarrow \dfrac{GB}{BC} = \dfrac{HD}{AH + HC}$.

Bài 23. Trong tam giác ABC, các điểm D, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho: $\widehat{AFE} = \widehat{BFD}$, $\widehat{BDF} = \widehat{CDE}$, $\widehat{CED} = \widehat{AEF}$.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$

b) Cho $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD.

- **Lời giải**



a) Đặt $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} = \omega, \widehat{BDF} = \widehat{CDE} = \alpha, \widehat{CED} = \widehat{AEF} = \beta$.

Ta có: $\widehat{BAC} + \beta + \omega = 180°$ (*)

Gọi O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF. Suy ra OD, OE, OF lần lượt vuông góc với BC, AC, AB.

$\Rightarrow \widehat{OFD} + \widehat{OED} + \widehat{ODF} = 90°$ (1)

Ta có: $\widehat{OFD} + \omega + \widehat{OED} + \beta + \widehat{ODF} + \alpha = 270°$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180°$ (**)

(*) và (**) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \alpha = \widehat{BDF}$.

b) Chứng minh tương tự câu a), ta có:

$\widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \omega \Rightarrow \Delta AEF$ ” ΔDBF ” ΔDEC ” ΔABC

Suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{BD}{BF} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{7}{8} \\ \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \dfrac{5BF}{8} \\ CD = \dfrac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \dfrac{5BF}{8} \\ CD = \dfrac{7CE}{8} \\ 7(7 - CE) = 5(5 - BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \dfrac{5BF}{8} \\ CD = \dfrac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{cases}$$

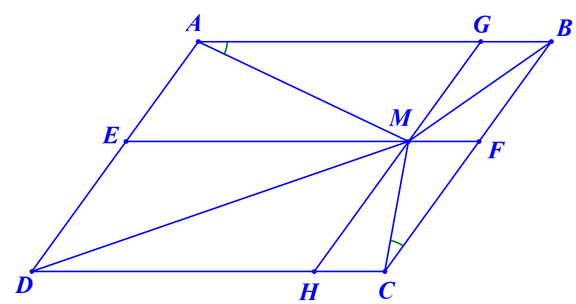
$\Rightarrow CD - BD = 3$ (3)

Ta lại có: $CD + BD = 8$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow BD = 2,5$.

Bài 24. Cho ABCD là hình bình hành. Giả sử $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Chứng minh rằng $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$.

- **Lời giải**



Kẻ từ M các đường thẳng song song với các cạnh AB, BC cắt các cạnh tại E, F, G, H (hình vẽ)

Ta có: $\widehat{AGM} = \widehat{CFM} \left(= \widehat{ABC}\right)$

Mặt khác $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$ do đó ΔAGM ” ΔCFM

$\Rightarrow \dfrac{AG}{CF} = \dfrac{MG}{MF}$.

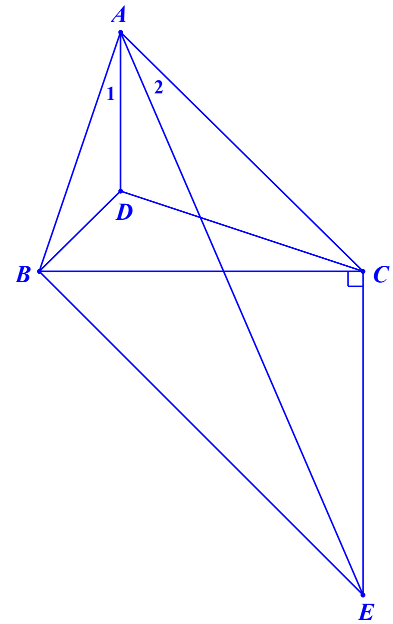
Mặt khác, $AG = DH; CF = MH;$ MG = FB nên $\dfrac{DH}{MH} = \dfrac{BF}{MF}$ (1)

Ta lại có: $\widehat{DHM} = \widehat{BFM} \left(= \widehat{BCD}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ΔDHM ” $\Delta BFM \Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MBC}$

Bài 25. Giả sử D là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90°$ và $AC.DB = AD.BC$. Chứng minh $\dfrac{AB.CD}{AD.BC} = \sqrt{2}$.

- **Lời giải**



Về phía ngoài ΔABC vẽ ΔBCE vuông cân tại C

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACE}\left(= \widehat{ACB} + 90°\right)$

Mà $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$ (vì $AC.BD = AD.BC$)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{CE}$ do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ACE\ (c.g.c)$ (1)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DAC}$

Từ (1) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$ do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ADC\ (c.g.c)$

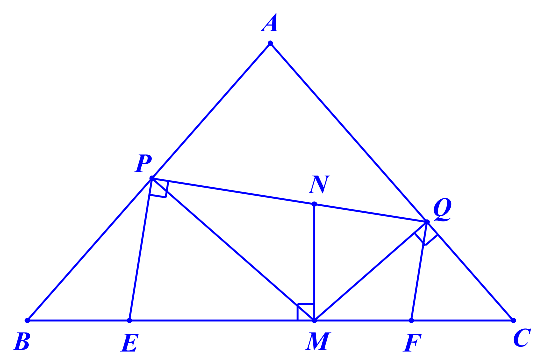
$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BE}{DC} \Rightarrow AB.CD = AD.BE$.

Mặt khác, ΔABE vuông cân nên $BE = \sqrt{2}.BC$

Do đó $AB.CD = \sqrt{2}.AD.BC$ hay $\dfrac{AB.CD}{AD.BC} = \sqrt{2}$.

Bài 26. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ điểm M thuộc cạnh BC vẽ $MB \perp AB$; $MQ \perp AC$; $\left(P \in AB; Q \in AC\right)$. Vẽ $PE \perp PQ$; $QE \perp PQ\left(E; F \in BC\right)$. Chứng minh rằng: $BE = CF$

- **Lời giải**



Lấy N trên PQ sao cho $MN \perp BC$.

Ta có: $\widehat{PBE} = \widehat{PMN}$ (cùng phụ với $\widehat{PMB}$)

$\widehat{BPE} = \widehat{MPN}$ (cùng phụ với $\widehat{EPM}$)

nên $\Delta PBE \backsim \Delta PMN\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{MN} = \dfrac{BP}{MP} \Rightarrow BE = MN.\dfrac{BP}{MP}$ (1)

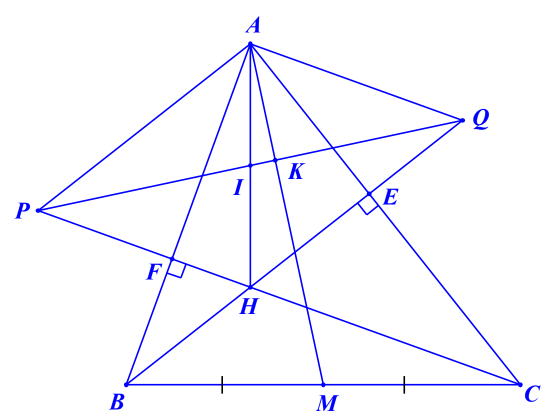
Tương tự, ta có: $CF = MN.\dfrac{CQ}{MQ}$ (2)

Mặt khác: $\Delta BPM \backsim \Delta CQM\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BP}{MP} = \dfrac{CQ}{MQ}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $BE = CF$.

Bài 27. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao BE, CF. Qua A vẽ các đường thẳng song song với BE, CF lần lượt cắt các đường thẳng CF, BE tại P và Q. Chứng minh rằng: PQ vuông góc với trung tuyến AM.

- **Lời giải**



Gọi H là giao điểm của BE và CF. Gọi I là giao điểm của AH và PQ.

Ta có: $\widehat{ABQ} = \widehat{ACP}\left(= 90° - \widehat{BAC}\right); \widehat{BAQ} = \widehat{PAC}$

suy ra $\Delta ABQ \backsim \Delta ACP\ (g.g)$

$\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{AP}{AC}$.

Mặt khác APHQ là hình bình hành nên $AP = HQ \Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{HQ}{AC}$.

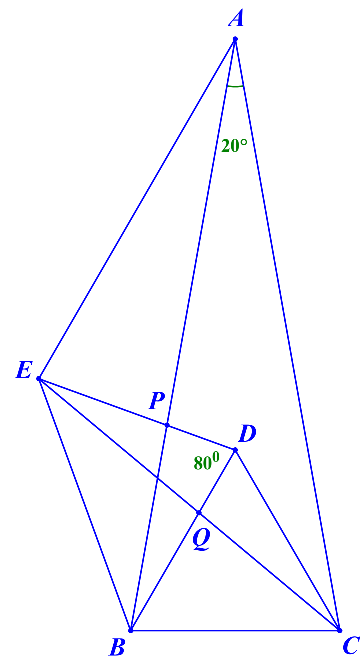
Ta lại có: $\widehat{BAC} = \widehat{AQH}\left(=180^\circ - \widehat{PAQ}\right)$ suy ra ΔABC ” ΔGHA $(c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{QAH}; \dfrac{AB}{QA} = \dfrac{BC}{AH} = \dfrac{BM}{AI}$ (vì $BC = 2.BM.AH = 2.AI$).

Do đó: ΔABM ” ΔQAI $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{AQI} \Rightarrow \widehat{QAM} + \widehat{AQI} = 180^\circ \Rightarrow AM \perp PQ$

Bài 28. Cho tam giác BAC cân tại A có góc $BAC = 20^\circ$. Dựng tam giác đều BDC sao cho D, A cùng phía so với BC. Dựng tam giác DEB cân tại D có góc $EDB = 80^\circ$ và C, E khác phía so với DB. Chứng minh tam giác AEC cân tại E.

- **Lời giải**



Gọi P là giao điểm của AB và DE;
Q là giao điểm của BD và CE.
ΔDEC có $DC = DE\,(=DB)$ và $\widehat{EDC} = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$

nên $\widehat{DEC} = \widehat{DCE} = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{EDC}\right) = 20^\circ$.

Ta có: $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABD} = 20^\circ$.

ΔBDP và ΔEDQ có $\widehat{DEQ} = \widehat{DBP} = 20^\circ; BD = ED; \widehat{EDB}$ chung

$\Rightarrow \Delta BDP = \Delta EDQ$ $(g.c.g) \Rightarrow EQ = BP$; $PD = DQ$

Xét ΔBPD và ΔABC có:

$\widehat{PDB} = \widehat{ABC} = 80^0$; $\widehat{DBA} = \widehat{BAC} = 20^0$

Do đó: ΔBPD ” ΔABC $(g.g)$

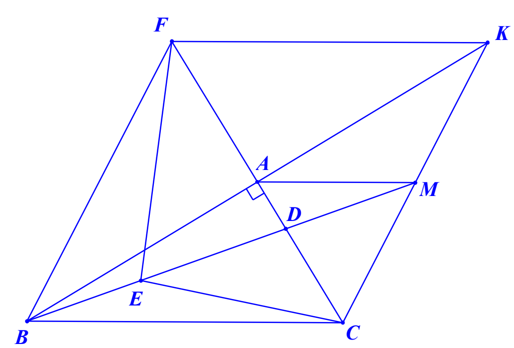
$\Rightarrow \dfrac{AB}{BP} = \dfrac{BC}{PD} = \dfrac{BD}{PD} = \dfrac{ED}{PD}$ hay $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{ED}{PD} \Rightarrow AE\,//\,BD$ (định lý Pa-lét đảo)

$\Rightarrow \widehat{EAP} = \widehat{PBD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{EAP} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{EAC} = 40^\circ$.

Mặt khác $\widehat{ACE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{ACE} \Rightarrow \Delta ACE$ cân tại E.

Bài 29. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Lấy điểm D thuộc đoạn thẳng AC sao cho $CD = 2.AD$. Gọi E là điểm thuộc đoạn thẳng BD sao cho $\widehat{CED} = \widehat{ABC}$. Gọi F là điểm đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng $\widehat{DEF} = 2.\widehat{ABC}$.

- **Lời giải**



Gọi K là điểm đối xứng với B qua A.
Gọi M là giao điểm của BD và CK.
ΔBCK có CA là đường trung tuyến $(AB = AK)$,
mà $CD = 2.AD$ nên D là trọng tâm tam giác
$\Rightarrow MC = MK$.
ΔBCK có $AK = AB, MC = MK$ nên AM là đường trung bình $\Rightarrow AM\,//\,BC \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{EBC}$

mà $\widehat{ABC} = \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} = \widehat{DEC} - \widehat{EBC} = \widehat{ECB}$

ΔAMB và ΔEBC có $\widehat{AMB} = \widehat{EBC}, \widehat{ABM} = \widehat{ECB} \Rightarrow \Delta AMB$ ” ΔEBC $(g.g) \Rightarrow \dfrac{BC}{MB} = \dfrac{BE}{AM}$

Ta có: $AB = AK, AC = AF$ và $BK \perp CF$ nên BCKF là hình thoi

$\Rightarrow BC = CK \Rightarrow AM = MC$.

$\frac{BF}{MB}=\frac{BC}{MB}=\frac{BE}{AM}=\frac{BE}{MC}\Rightarrow\frac{BF}{MB}=\frac{BE}{MC}$

mà $\widehat{EBF}=\widehat{CMB}\Rightarrow\Delta EBF$ " ΔCMB $(c.g.c)\Rightarrow\widehat{BEF}=\widehat{MCB}$

kết hợp với BCKF là hình thoi nên:

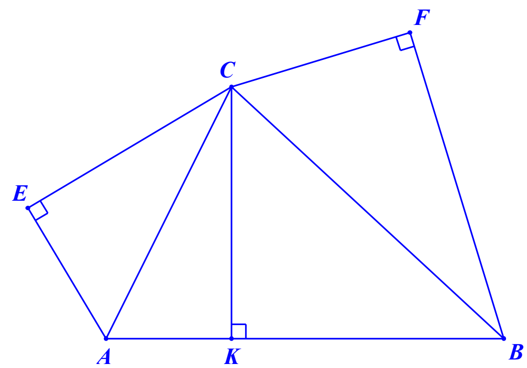
$\widehat{DEF}=180^\circ-\widehat{BEF}=180^\circ-\widehat{MCB}=\widehat{FBC}=2.\widehat{ABC}$ hay $\widehat{DEF}=2.\widehat{ABC}$.

Chủ đề 4. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao CK. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai tam giác ACE và CBF tương ứng vuông góc tại E; F và thỏa mãn $\widehat{ACE}=\widehat{CBA}; \widehat{BCF}=\widehat{CAB}$. Chứng minh rằng: $CK^2=AE.BF$.

- ***Tìm cách giải.***

Để chứng minh $CK^2=AE.BF$ chúng ta không thể vận dụng định lý Ta-lét hay xét một cặp tam giác đồng dạng là xong ngay được. Do vậy, chúng ta suy luận để tạo ra CK^2, chúng ta cần ghép CK vào hai cặp tam giác đồng dạng. Mỗi cặp tam giác đồng dạng đó đều biểu thị CK dưới dạng biểu thức (chứa AE hoặc BF). Dễ dạng nhận thấy có hai cặp tam giác đồng dạng thỏa mãn điều kiện trên.



- ***Trình bày lời giải***

ΔACK và ΔCBF có : $\widehat{CKA}=\widehat{BFC}=90^\circ; \widehat{CAK}=\widehat{BCF}$

$\Rightarrow$ ΔACK # ΔCBF (g.g) $\Rightarrow\frac{CK}{CA}=\frac{BF}{BC}$ (1).

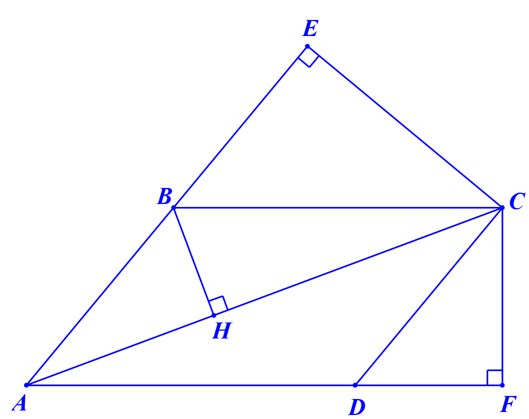
Tương tự, ta có: ΔBCK # ΔCAE (g.g) $\Rightarrow\frac{CK}{CB}=\frac{AE}{AC}$ (2)

Nhân từng vế của (1) và (2) ta được: $\frac{CK}{CA}.\frac{CK}{CB}=\frac{BF}{BC}.\frac{AE}{AC}\Rightarrow CK^2=AE.BF$.

Bài 2. Cho hình bình hành ABDC (AC > BD) vẽ CE vuông góc với AB tại E, vẽ CF vuông góc với AD tại F. Chứng minh rằng: $AB.AE+AD.AF=AC^2$.

- ***Tìm cách giải.***

Để chứng minh $AB.AE+AD.AF=AC^2$, ta có vế trái là một tổng nên vế phải cần tách ra một tổng: $AB.AE+AD.EF=AC.x+AC.y$ với $x+y=AC$. Do vậy ta chọn điểm H thuộc AC khi đó $x=AH, y=HC$ và chứng minh $AB.AE=AC.AH, AD.EF=AC.CH$. Từ đó chúng ta chỉ cần chọn điểm H sao cho ΔABH # ΔACE là xong. Nhận thấy tam giác ACE vuông tại E, nên tất yếu cần kẻ BH vuông góc với AC.



- ***Trình bày lời giải***

Vẽ $BH\perp AC\left(H\in AC\right)$

Xét ΔABH và ΔACE có

$\widehat{ABH} = \widehat{AEC} = 90°$; $\widehat{BAC}$ chung.

Suy ra $\Delta ABH \# \Delta ACE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AH$. (1)

Xét ΔCHB và ΔCAF có $\widehat{BCH} = \widehat{CAF}$ (so le trong); $\widehat{CHB} = \widehat{CFA}\left(= 90°\right)$

Suy ra $\Delta CHB \# \Delta CAF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CH}{AF} \Rightarrow BC.AF = AC.CH$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$AB.AE + BC.AF = AC.AH + AC.CH \Rightarrow AB.AE + AD.AF = AC\left(AH + CH\right) = AC^2$.

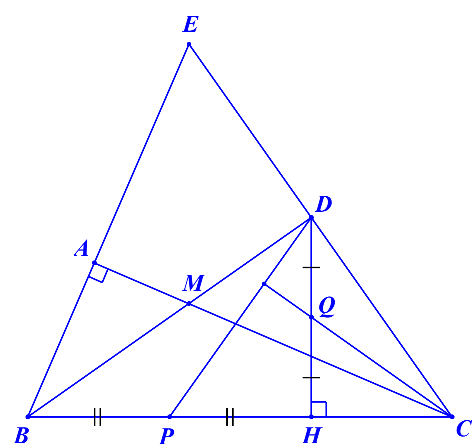
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BA tại E.

a) Chứng minh: $EA.EB = ED.EC$.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi.

c) Kẻ $DH \perp BC, \left(H \in BC\right)$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, DH. Chứng minh $CQ \perp PD$.

- ***Lời giải***



a) Chứng minh $EA.EB = ED.EC$

Xét ΔEBD và ΔECA có:

$\widehat{ADB} = \widehat{EAC} = 90°, \widehat{BEC}$ chung nên

$\Delta EBD \# \Delta ECA$ (g-g)

Từ đó suy ra $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{ED}{EA} \Rightarrow EA.EB = ED.EC$

b) Kẻ MI vuông góc với BC $\left(I \in BC\right)$.

Ta có: ΔBIM và ΔBDC có:

$\widehat{BIM} = \widehat{BDC} = 90°$, $\widehat{MBC}$ chung

Do đó: $\Delta BIM \# \Delta BDC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BI}{BD} \Rightarrow BM.BD = BC.BI$. (1)

Tương tự: $\Delta ACB \# \Delta ICM$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{CI}{CA} \Rightarrow CM.CA = BC.CI$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, suy ra:

$BM.BD + CM.CA = BC.BI + BC.CI = BC\left(BI + CI\right) = BC^2$ (không đổi)

c) Xét $\Delta BHD \# \Delta DHC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{DH} = \dfrac{HD}{HC} \Rightarrow \dfrac{2.HP}{2.HQ} = \dfrac{HD}{HC} \Rightarrow \dfrac{HP}{HQ} = \dfrac{HD}{HC}$

$\Rightarrow \Delta HPD \# \Delta HQC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{PDH} = \widehat{QCH}$

Mà $\widehat{HDP} + \widehat{DPC} = 90° \Rightarrow \widehat{HCQ} + \widehat{DPC} = 90° \Rightarrow CQ \perp PD$

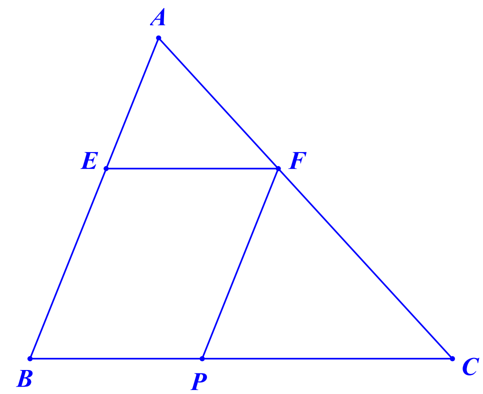
Bài 4. Cho tam giác ABC. Lấy điểm E, F, P lần lượt thuộc AB, AC, BC sao cho BEFP là hình bình hành. Biết rằng diện tích ΔAEF và CFP lần lượt là $16cm^2$; $25cm^2$. Tính diện tích ΔABC.

- ***Tìm cách giải.***

Khi vẽ hình xong, chúng ta có hai hướng suy luận:

Vì tam giác AEF, FPC cùng đồng dạng với tam giác ABC nên chúng ta tìm mối liên hệ giữa tỷ số hai tam giác đồng dạng.

Hướng thứ hai, để tính diện tích tam giác ABC, chúng ra tìm cách tính diện tích hình bình hành. Nhận thấy tam giác BEF và BPF có diện tích bằng nhau, mặt khác tam giác AEF và BEF có chung đường cao kẻ từ F; tam giác BPF và CPF có chung đường cao kẻ từ F. sử dụng tính chất đó, kết hợp với định lý Ta-lét, chúng ta có lời giải hay.



- ***Trình bày lời giải***

Cách 1. Ta có: $\Delta AEF \# \Delta ABC$; $\Delta FPC \# \Delta ABC$ nên:

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\frac{EF}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_{AEF}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{EF}{BC};\quad \frac{S_{FPC}}{S_{ABC}}=\left(\frac{CP}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_{FPC}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{CP}{BC}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{\sqrt{S_{AEF}}+\sqrt{S_{FPC}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\dfrac{EF}{BC}+\dfrac{CP}{BC}=1$

Hay $\sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{S_{AEF}}+\sqrt{S_{FPC}}=4+5 \Rightarrow S_{ABC}=9^2=81cm^2$.

Cách 2. Đặt $S_{BFE}=S_{BFP}=x\ \ cm^2$.

Tam giác AEF và BEF có chung đường cao kẻ từ F, suy ra: $\dfrac{S_{FEA}}{S_{FEB}}=\dfrac{AE}{BE} \Rightarrow \dfrac{16}{x}=\dfrac{AE}{BE}$;

Tam giác BPF và CPF có chung đường cao kẻ từ F, suy ra: $\dfrac{S_{FBP}}{S_{FPC}}=\dfrac{BP}{CP} \Rightarrow \dfrac{x}{25}=\dfrac{BP}{CP}$.

Áp dụng định lý Ta-let, ta có: $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{BP}{CP} \Rightarrow \dfrac{16}{x}=\dfrac{25}{x} \Rightarrow x^2=400 \Rightarrow x=20$.

Vậy $S_{ABC}=16+20+20+25=81\ cm^2$.

Nhận xét.

Từ kết quả $\sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{S_{AEF}}+\sqrt{S_{FPC}} \Rightarrow S_{ABC}=(a+b)^2 \Rightarrow S_{BEFP}=(a+b)^2-a^2-b^2=2ab$

Từ đó ta có thể giải được bài toán sau:

Cho tam giác ABC. Lấy điểm E, F, P lần lượt thuộc AB, AC, BC sao cho BEFP là hình bình hành. Đặt $S_{AEF}=a^2$; $S_{CFP}=b^2$ (với $a;b>0$).

a) Tính diện tích hình bình hành BEFP.

b) Xác định vị trí điểm E, F, P trên AB, AC, BC để diện tích hình bình hành BEFP đại giá trị lớn nhất.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ MN //BC, PQ // AB, IK // AC. ($I,M \in AB$; $N,P \in AC$; $Q,K \in BC$). Biết rằng: $S_{IMF}=9cm^2; S_{PFN}=16cm^2; S_{FQK}=25cm^2$. Tính diện tích ΔABC.

- ***Tìm cách giải.***

Với lối tư duy như ví dụ trên, chúng ta hoàn toàn nghĩ tới hai cách giải. Song trong ví dụ này sẽ trình bày một cách giải, mà bản chất của bài toán là vận dụng kết quả $\dfrac{MF}{BC}+\dfrac{QK}{BC}+\dfrac{FN}{BC}=1$ kết hợp với tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng,

- ***Trình bày lời giải***

Nhận thấy BMFQ, CNFK là các hình bình hành.

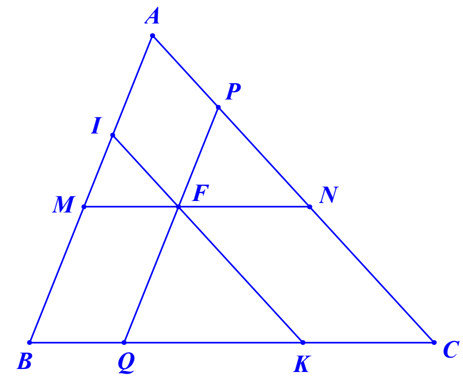
Ta có: ΔFQK # ΔABC; ΔIMF # ΔABC; ΔPFN # ΔABC

Thì $\frac{\sqrt{S_{IMF}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{MF}{BC}$; $\frac{\sqrt{S_{PQK}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{QK}{BC}$; và $\frac{\sqrt{S_{PFN}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{FN}{BC}$;

$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_{IMF}}+\sqrt{S_{PQK}}+\sqrt{S_{PFN}}}{\sqrt{S_{ABC}}}=\frac{MF+QK+FN}{BC}=1$

$\Rightarrow \sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{S_{IMF}}+\sqrt{S_{PQK}}+\sqrt{S_{PFN}}=3+5+4=12$

$\Rightarrow S_{ABC}=144\,cm^2$.



Nhận xét: Như vậy, với các giải trên, chúng ta hoàn toàn làm được bài toán tổng quát sau: Cho tam giác ABC. Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ $MN//BC; PQ//AB; IK//AC$ $\left(I,M\in AB; N,P\in AC; Q,K\in BC\right)$.

Đặt $S_{IMF}=a^2; S_{PFN}=b^2; S_{FQK}=c^2\left(a;b;c>0\right)$

Chứng minh rằng: $S_{ABC}=\left(a+b+c\right)^2$.

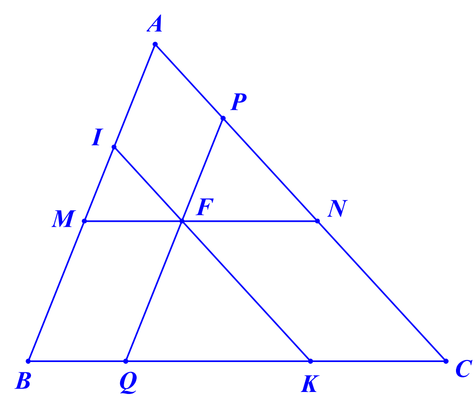
Bài 6. Cho tam giác ABC. Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ MN // BC, PQ // AB, IK // AC ($I,M\in AB$, $N,P\in AC$; $Q,K\in BC$). Đặt diện tích tam giác ABC là S. Tìm vị trí điểm F để tổng $\mathrm{T}=\mathrm{S}_{APFI}+S_{MBQF}+S_{CNFK}$ đạt giá trị lớn nhất.

- ***Tìm cách giải.***

Tương tự ví dụ trên, chúng ta đặt:

$S_{IMF}=a^2; S_{PFN}=b^2; S_{FQK}=c^2\left(a;b;c>0\right)$

Chúng ta hoàn toàn biểu thị tổng $\mathrm{T}=\mathrm{S}_{APFI}+S_{MBQF}+S_{CNFK}$ theo a, b, c. Vậy hiển nhiên để tìm giá trị lớn nhất chúng ta dùng cực trị đại số với chú ý rằng $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2$.



- ***Trình bày lời giải***

Đặt $S_{IMF}=a^2; S_{PFN}=b^2; S_{FQK}=c^2\left(a;b;c>0\right)$

Ta có: $\Rightarrow \sqrt{S_{ABC}}=\sqrt{S_{IMF}}+\sqrt{S_{FQK}}+\sqrt{S_{PFN}}$ Hay $S_{ABC}=\left(a+b+c\right)^2$.

$\Rightarrow \mathrm{S}_{APFI}+S_{MBQF}+S_{CNFK}=S_{ABC}-\left(S_{IMF}+S_{PFN}+S_{FQK}\right)\Rightarrow T=\left(a+b+c\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$

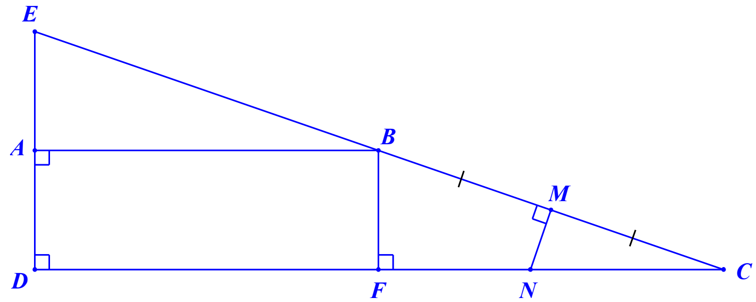
$T=2\left(ab+bc+ca\right)\le\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)^2=\frac{2}{3}S$

Vậy $T=\frac{2}{3}S$ khi $a=b=c$ hay F là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 7. Cho tấm bìa hình thang ABCD có $\widehat{A}=\widehat{D}=90°$, $AD=4cm$; $AB=32cm$, $CD=64cm$. Gấp tấm bìa lại để cho hai điểm C và B trùng nhau. Tính độ dài của nếp gấp.

- ***Tìm cách giải.***

Trước hết chúng ta hãy vẽ và xác định đường nếp gấp: Gọi M là trung điểm của BC, qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt CD tại N. Độ dài nếp gấp cần tính chính là độ dài đoạn



thẳng MN.

Từ đề bài $\widehat{A}=\widehat{D}=90^\circ$;

$AD=4cm;\ AB=32cm,\ CD=64cm$, dễ dàng tính được độ dài BC bằng định lý Py-ta-go. Từ đó tính được độ dài CM. Do vậy để tính được CM trong tam giác vuông CMN, chúng ta chỉ cần tính được độ dài hai cạnh của một tam giác vuông đồng dạng với tam giác vuông CMN là xong. Từ đó, chúng ta có hai cách vẽ thêm đường phụ:

Cách 1. Vì $\widehat{A}=\widehat{D}=90^\circ$ nên chỉ cần gọi giao điểm DA và CB là E. Sau đó tính độ dài cạnh của tam giác vuông CDE.

Cách 2. Kẻ BF vuông góc với CD, khi đó ΔMCN # ΔFCB. Bài toán cũng được giải.

- ***Trình bày lời giải***

Gọi M là trung điểm của BC, qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt CD tại N. Độ dài nếp gấp cần tính chính là độ dài đoạn thẳng MN.

Cách 1. Gọi E là giao điểm của AD và BC; F là chân đường vuông góc kẻ từ B tới CD. Dễ thấy F là trung điểm của CD, từ đó:

$BC^2=BF^2+FC^2=24^2+32^2=1600$. Suy ra $BC=40cm\Rightarrow MC=20\left(cm\right)$

Cũng từ F là trung điểm của CD, Suy ra B và A lần lượt là trung điểm của CE và DE,

Suy ra $DE=2AD=48cm$.

Ta nhận thấy ΔMCN # ΔDCE nên $\dfrac{MC}{DC}=\dfrac{MN}{DE}\Rightarrow\dfrac{20}{64}=\dfrac{MN}{48}\Rightarrow MN=15cm$

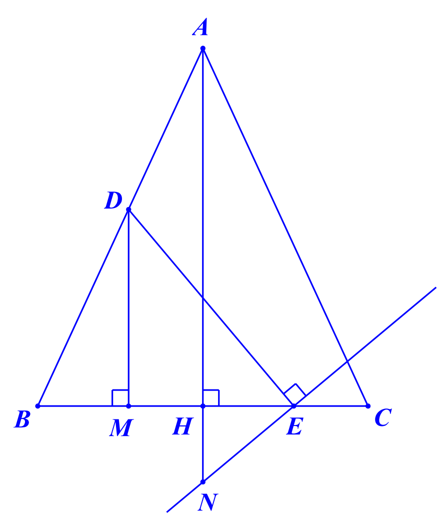
Vậy độ dài nếp gấp là 15cm.

Cách 2. Ta có ΔMCN # ΔFCB suy ra: $\dfrac{MC}{CF}=\dfrac{MN}{BF}\Rightarrow\dfrac{20}{32}=\dfrac{MN}{32}\Rightarrow MN=15cm$

Vậy độ dài nếp gấp là 15cm.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên AB lấy điểm D và trên BC lấy điểm E sao cho hình chiếu của DE lên BC bằng $\dfrac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng đường vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

- ***Lời giải.***



Gọi M, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và A trên BC. Giả sử đường thẳng qua E vuông góc với DE cắt đường thẳng AH tại N.

Ta có: $BH=\dfrac{1}{2}BC\Rightarrow BM=HE$.

Mặt khác ta có: $\widehat{HNE}=\widehat{MED}$ (cùng phụ với $\widehat{HEN}$);

$\widehat{DME}=\widehat{NHE}$, nên ΔHNE # ΔMED

$\Rightarrow\dfrac{HN}{ME}=\dfrac{HE}{DM}\Rightarrow\dfrac{2HN}{BC}=\dfrac{HE}{DM}\Rightarrow\dfrac{2HN}{BC}=\dfrac{BM}{DM}$

Mặt khác $\dfrac{BM}{DM}=\dfrac{BH}{HA}\Rightarrow\dfrac{2HN}{BC}=\dfrac{BH}{HA}\Rightarrow HN=\dfrac{BH.BC}{2.HA}$

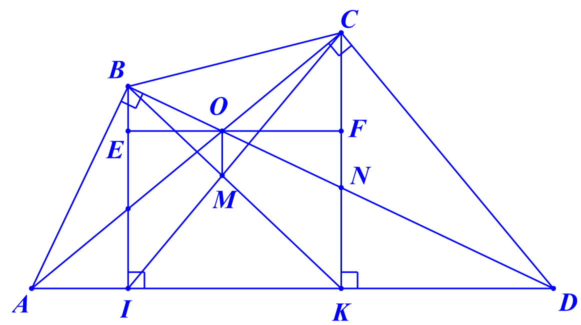
Vậy N là điểm cố định

Nhận xét: Điểm mấu chốt của bài là khai thác điều kiện

"Hình chiếu của DE bằng $\frac{1}{2}BC$" để từ đó xác định việc kẻ thêm đường phụ.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^\circ$. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của B, C trên cạnh AD. Gọi M là giao điểm của CI và BK, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $OM\perp AD$.

- **Lời giải.**



Kẻ $HI\perp BC$ tại I.

ΔBIH và ΔDBC có $\widehat{BIH}=\widehat{BDC}=90^\circ$ mà $\widehat{DBC}$ chung do **4.4.** Qua O kẻ đường thẳng song song với AD, cắt đường thẳng BI, CK lần lượt tại E, F $OE\perp BI, OF\perp CK$.

Xét ΔBEO và ΔAIB có: $\widehat{BEO}=\widehat{AIB}$;

$\widehat{ABI}=\widehat{BOE}\left(=90^\circ-\widehat{OBI}\right)$

$\Delta BEO\#\Delta AIB\,(\text{g.g})\Rightarrow\dfrac{BO}{AB}=\dfrac{EO}{IB}$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có: ΔCFO # ΔDKC (g.g) $\Rightarrow\dfrac{CO}{CD}=\dfrac{OF}{CK}$ (2)

Xét ΔAOB và ΔDOC có: $\widehat{AOB}=\widehat{DOC}$; $\widehat{ABO}=\widehat{DCO}$

$\Rightarrow$ ΔAOB # ΔDOC(g.g) $\Rightarrow\dfrac{BO}{AB}=\dfrac{OC}{CD}$ (3)

Từ 91), (2), và (3) suy ra: $\dfrac{EO}{IB}=\dfrac{OF}{CK}\Rightarrow\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{IB}{CK}$ (4)

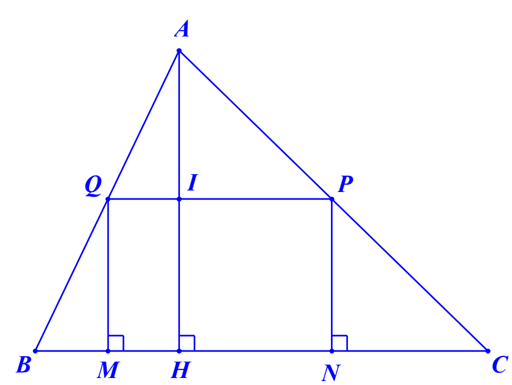
Ta có: $BI//CK$ nên $\dfrac{IB}{CK}=\dfrac{BM}{MK}$. (5)

Ta có: ΔBEO # ΔNFO (g.g) $\Rightarrow\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{BO}{ON}$ (5)

Từ (5) và (6) suy ra $\dfrac{BM}{MK}=\dfrac{BO}{ON}$, do đó $OM//NK$ (định lý Ta-lét đảo) hay $OM\perp AD$.

Bài 10. Cho ΔABC cố định có các góc B, C nhọn và hình chữ nhật MNPG thay đổi nhưng luôn có M, N trên cạnh BC còn P, Q lần lượt trên cạnh AC và AB. Xác định vị trí của các điểm P, Q sao cho hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất.

- **Lời giải.**



Gọi AH là đường cao của ABC, AH cắt PQ tại I.

Đặt $BA=a;\ AH=h;\ PQ=x;\ MQ=y$

Ta có: $AI=h-y$

Vì ΔAPQ # ΔACB nên

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AI}{AH}\Leftrightarrow\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h}\Rightarrow x=\frac{a(h-y)}{h}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ}=xy=\frac{a}{h}(h-y)y$$

Vì a, h là các hằng số dương nên S lớn nhất khi $(h-y)y$ lớn nhất.

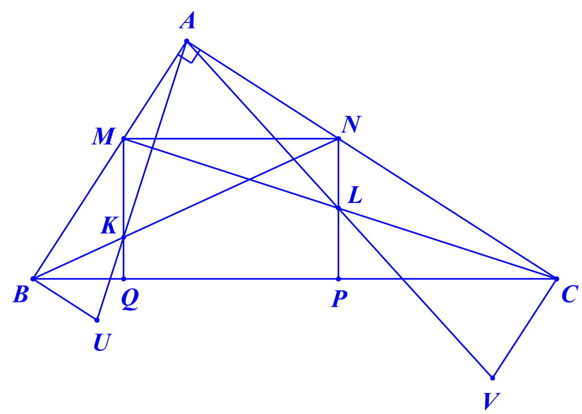
Áp dụng hệ thức: $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, ta có: $(h-y)y \le \left(\frac{h-y+y}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4} \Rightarrow S_{MNPQ} \le \frac{a}{h}.\frac{h^2}{4} = \frac{ah}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{ah}{4}$

Khi $h-y=y \Leftrightarrow y=\frac{h}{2}$ tức P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AB.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật MNPQ thay đổi thỏa mãn M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Gọi giao điểm của BN với MQ là K, của CM và NQ là L. Chứng minh rằng $\widehat{KAB}=\widehat{LAC}$.

- **Lời giải.**



Lấy U, V theo thứ tự thuộc AK, AL sao cho $\widehat{ABU}=\widehat{ACV}=90°$, Ta có:

$NA//BU \Rightarrow \frac{BU}{NA}=\frac{BK}{NK}$ (1)

$MN//BC \Rightarrow \frac{NA}{MA}=\frac{BK}{NK}$ (2)

$MA//VC \Rightarrow \frac{MA}{CV}=\frac{ML}{CL}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$\frac{BU}{NA}.\frac{NA}{MA}.\frac{MA}{CV}=\frac{BK}{NK}.\frac{BK}{NK}.\frac{ML}{CL} \Rightarrow \frac{BU}{CV}=\frac{BQ}{NM}.\frac{CA}{BA}.\frac{MN}{CP}=\frac{BQ.CA}{BA.CP}=\frac{BQ}{MQ}.\frac{CA}{BA}.\frac{NP}{CP}$ (vì $MQ=NP$)

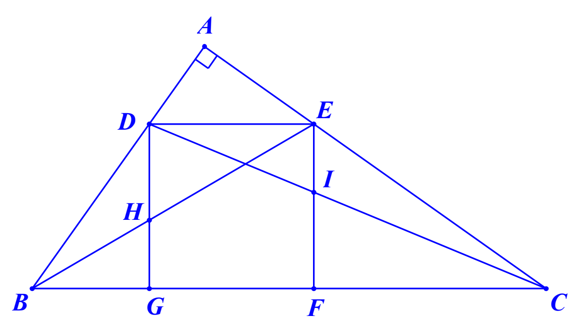
$\Rightarrow \frac{BU}{CV}=\frac{BA}{CA}.\frac{CA}{BA}.\frac{BA}{CA}$ (Vì ΔBMQ # ΔBCA; ΔCNP # ΔCBA)

Hay $\frac{BU}{CV}=\frac{AB}{AC}$ và $\widehat{ABU}=\widehat{ACV}\left(=90°\right)$ do đó ΔABU # ΔACV (c.g.c)

Vậy $\widehat{KAB}=\widehat{LAC}$

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Một hình vuông nối tiếp tam giác ABC với D thuộc cạnh AB, E thuộc AC và F, G thuộc cạnh BC. Gọi H là giao điểm của BE và DG, I là giao điểm của CD và EF. Chứng minh rằng IE = HG.

- **Lời giải.**



Ta có: $\widehat{ADE}+\widehat{EDG}+\widehat{BDG}=180°$, mà $\widehat{EDG}=90°$

Nên $\widehat{ADE}+\widehat{BDG}=90°$.

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{ADE}+\widehat{AED}=90°$

nên $\widehat{BDG}=\widehat{AED}$.

$\Rightarrow$ ΔBGD # ΔDAE (g.g) (1)

Chứng minh TT, ta có ΔEFC # ΔDAE (g.g) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ΔBGD # ΔEFC $\Rightarrow \frac{BG}{DG}=\frac{EF}{FC}$ (3)

Sử dụng định lý Ta-lét trong ΔBHG, ta có: $DE//BG \Rightarrow \frac{HG}{HD}=\frac{BG}{DE}$

Mà $DE = DG$ (tính chất hình vuông) nên $\dfrac{HG}{HD} = \dfrac{BG}{DG}$ (4)

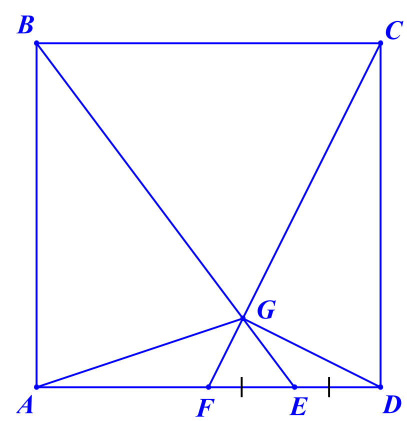
Tườn tự, ta có: $\dfrac{IE}{EF} = \dfrac{DE}{FC} = \dfrac{EF}{FC}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) ta có: $\dfrac{HG}{HD} = \dfrac{IE}{IF}$, suy ra: $\dfrac{HG}{HG+HD} = \dfrac{IE}{IE+IF}$

Hay $\dfrac{HG}{DG} = \dfrac{IE}{EF}$. Mà $DG = EF$ nên ta có $HG = IE$

Bài 13. Cho hình vuông ABCD, F là trung điểm của AD và E là trung điểm của FD, Các đường thẳng BE và CF cắt nhau tại G. Tính tỉ số diện tích của tam giác EFG với diện tích hình vuông ABCD.

- **Lời giải.**



Vì $ED = EF$ nên $S_{GED} = S_{EFG}$ mà $AF = 2.EF$

nên $S_{GAF} = 2.S_{EFG}$.

Ta lại có $\Delta GBC \# \Delta GEF$

nên $\dfrac{S_{GBC}}{S_{EFG}} = \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2 \Rightarrow S_{GBC} = 16S_{EFG}$

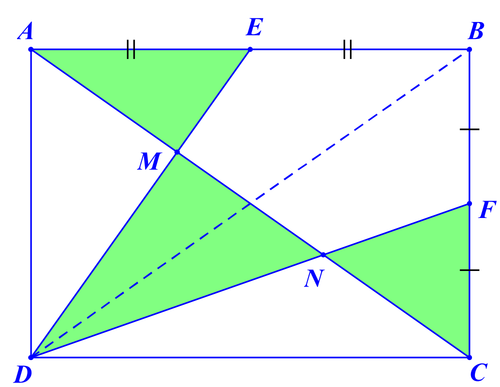
Do đó $S_{EFG} + S_{GED} + S_{GBC} = (1+1+2+16).S_{EFG} = 20.S_{EFG}$

Mà $S_{EFG} + S_{GED} + S_{GAF} + S_{GBC} = \dfrac{1}{2}.S_{ABCD}$

Vậy $S_{EFG} = \dfrac{1}{40}.S_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{S_{EFG}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{40}$

Bài 14. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích $150cm^2$ (như hình vẽ). Gọi E, F là trung điểm của AB và BC. Gọi M, N là giao điểm của DE. DF với AC. Tính tổng diện tích phần tô đậm.

- **Lời giải.**



Ta có: $\Delta AME \# \Delta CMD$

$\Rightarrow \dfrac{EM}{DM} = \dfrac{AE}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DM = 2.EM$

Đặt $S_{AEM} = x$. Ta có: $\dfrac{S_{AEM}}{S_{ADM}} = \dfrac{EM}{DM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{ADM} = 2x$.

Ta có:

$S_{AEM} + S_{ADM} = S_{ADE} = \dfrac{1}{2}S_{ABD} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} \Rightarrow x + 2x = 37,5cm^2$

$\Rightarrow x = 12,5cm^2 \Rightarrow S_{AMD} = 25cm^2$.

Tương tự, ta có: $S_{CNE} = 12,5cm^2$; $S_{CND} = 25cm^2$.

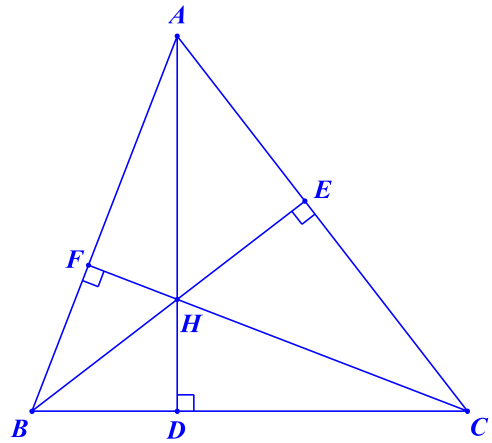
$\Rightarrow S_{DMN} = S_{ACD} - S_{AMD} - S_{CND} = 75 - 25 - 25 = 25cm^2$

$\Rightarrow$ diện tích phần tô đậm là: $12,5 + 12,5 + 25 = 50cm^2$

Bài 15. Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là đường cao cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng: $\dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HC.HA}{BC.BA} + \dfrac{HA.HB}{CA.CB} = 1$.

- **Lời giải.**



Dễ thấy ΔCHE # ΔCAF (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CE}{CF}$.

Do đó: $\dfrac{HB.HC}{AB.AC} = \dfrac{\frac{1}{2}HB.CE}{\frac{1}{2}AB.CF} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

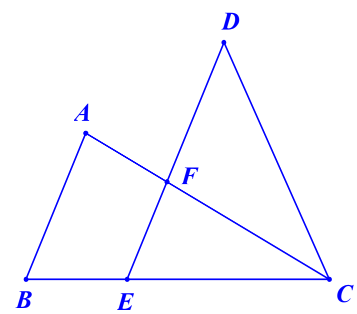
Tương tự ta có: $\dfrac{HC.HA}{BC.BA} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \dfrac{HA.HB}{CA.CB} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HC.HA}{BC.BA} + \frac{HB.HA}{CA.CB} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HBC}}{S_{ABC}} = 1$$

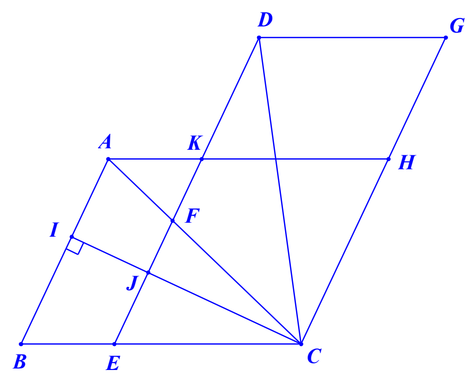
Bài 16. Trong hình vẽ dưới đây các tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau và F là giao điểm của CA và DE. Biết AB song song với DE. AB = 9cm và EF = 6cm. Tính độ dài theo cm của DE

(*Olympic Toán học trẻ quốc tế Bulgaria (BICMC)*)



- **Lời giải.**

Cách 1. Vẽ hai hình bình hành DECG và ABCH, do đó điểm H thuộc đoạn GC. Gọi K là giao điểm của AH và DF.



Ta có: $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$ và $CE = 2.BE$.

Vì hai tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau nên hai hình bình hành ABCH và DECG có diện tích bằng nhau.

Do đó $CH = 2.HG$. Suy ra:

$DE = GC = 9 + 4,5 = 13,5cm$ và

$DF = DE - EF = 13,5 - 6 = 7,5cm$

Cách 2. Kẻ đường cao CI của ΔABC, CI cắt EF tại J.

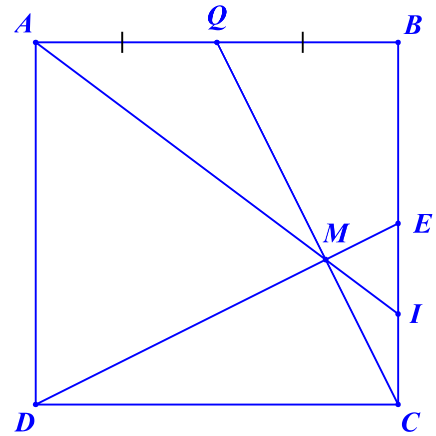
Ta có: $\dfrac{CJ}{CI} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

Hai tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau nên $AB.CI = DE.CJ$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CJ}{CI} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3} \Rightarrow DE = \frac{2}{3}.AB = \frac{3}{2}.9 = 13,5cm$$

Suy ra: $DF = DE - EF = 13,5 - 6 = 7,5cm$

Bài 17. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q, E lần lượt là trung điểm của AB, BC. Gọi M là giao điểm của DE và CQ; gọi I là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng AM = 4.MI.



- **Lời giải.**

Ta có $\Delta CBQ = \Delta DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BCQ} = \widehat{CDE}$

Mà $\widehat{CDE} + \widehat{CED} = 90°$ nên $\widehat{BCQ} + \widehat{CED} = 90°$

Do đó: $\widehat{EMC} = 90°$

Vậy tam giác vuông DCE, DMC, CME đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{DC}{CE} = \dfrac{DM}{MC} = \dfrac{MC}{ME}$ mà $DC = 2.CE$

$\Rightarrow DM = 2.MC;\ MC = 2.ME \Rightarrow DM = 4.ME$

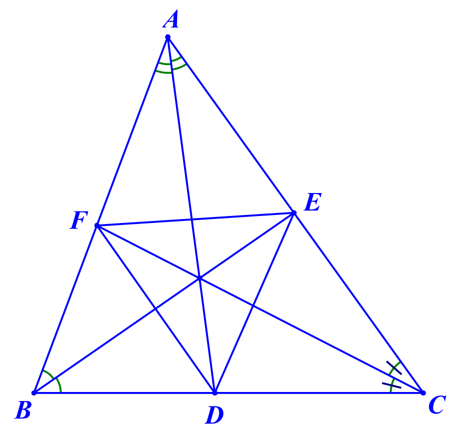
Mà $EI // AD$ nên $\dfrac{AM}{MI} = \dfrac{DM}{ME} = 4 \Rightarrow AM = 4.MI$

Bài 18. Giả sử AD, BE và CF là các đường phân giác của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi diện tích tam giác DEF bằng $\dfrac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Hòa Bình, năm học 2013 – 2014)

- **Lời giải.**

- ***Chứng minh điều kiện cần.*** Cho tam giác ABC đều, AD, BE và CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC ta cần chứng minh:



$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Do tam giác ABC đều và AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác nên ta có:

$\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta DEF \# \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{DE}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

- ***Chứng minh điều kiện đủ.*** Cho tam giác ABC, AD, BE và CF là các đường phân giác của tam giác, thỏa mãn $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4}$, ta cần chứng minh : ΔABC là tam giác đều.

Đặt BC = a, AC = b; AB = c (a, b, c >0)

Vì AD là đường phân giác $\widehat{BAC}$ nên ta có:

$\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \dfrac{DB}{DB+DC} = \dfrac{c}{c+b} \Rightarrow \dfrac{DB}{a} = \dfrac{c}{c+b} \Rightarrow DB = \dfrac{ac}{c+b} \Rightarrow DC = a - DB = a - \dfrac{ac}{c+b} = \dfrac{ab}{c+b}$

Chứng minh tương tự, ta có: $EC = \dfrac{ab}{a+c};\ EA = \dfrac{bc}{a+c};\ FA = \dfrac{bc}{a+b};\ FB = \dfrac{ca}{a+b}$.

Ta có: $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{AF.AE}{AB.AC} - \dfrac{BF.BD}{BA.BC} - \dfrac{CE.CD}{CA.CB}$

$$= 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{ac}{(a+c)(b+c)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

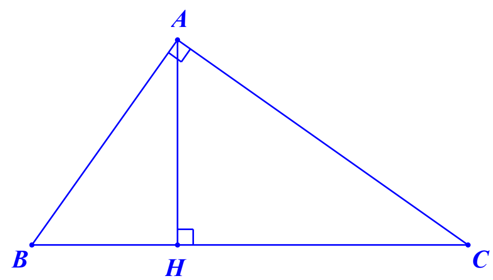
Theo giả thiết ta có: $\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=8abc \Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(b-a)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Biết rằng chu vi tam giác ABH, ACH lần lượt là 30cm, 40cm. tính chu vi tam giác ABC.

- **Lời giải.**



Ta có: ΔABH ” ΔCAH nên tỉ số chu vi bằng tỉ số đồng dạng, suy ra: $\dfrac{AH}{HC}=\dfrac{30}{40}\Rightarrow \dfrac{AH}{HC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \dfrac{AH}{3}=\dfrac{HC}{4}$.

Đặt $\dfrac{AH}{3}=\dfrac{HC}{4}=k\ (k>0) \Rightarrow AH=3k,\ HC=4k$

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AH^2+HC^2=AC^2 \Rightarrow AC=5k$.

Mà chu vi ΔCAH là 40 (cm) nên $3k+4k+5k=40 \Rightarrow k=\dfrac{10}{3}\,(cm)$.

Suy ra $AH=10\,(cm),\ HC=\dfrac{40}{3}\,(cm),\ AC=\dfrac{50}{3}(cm)$.

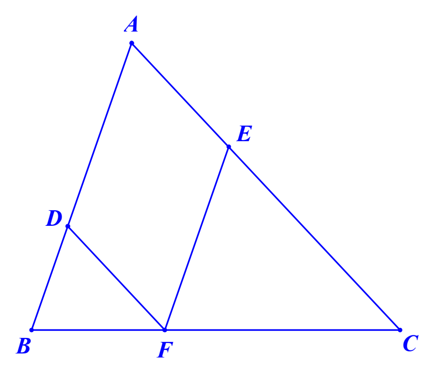
Ta có ΔABC # ΔHAC nên tỉ số chu vi bằng tỉ số đồng dạng, suy ra:

$$\frac{2P_{ABC}}{2P_{HAC}}=\frac{AC}{HC}=\frac{\frac{50}{3}}{\frac{40}{3}}=\frac{5}{4}\Rightarrow 2P_{ABC}=\frac{5}{4}\cdot 40=50\ (cm)$$

Bài 20. Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của điểm M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015

- **Lời giải.**



Qua điểm M trên cạnh BC vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E, vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB tại D.

Ta có ΔDBM # ΔABC # ΔEMC

$\Rightarrow \dfrac{S_{DBM}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{BM}{BC}\right)^2;\ \dfrac{S_{EMC}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{CM}{BC}\right)^2$

Ta có: $\dfrac{S_{MDAE}}{S_{ABC}}=1-\dfrac{S_{DBM}}{S_{ABC}}-\dfrac{S_{EMC}}{S_{ABC}}=1-\left[\left(\dfrac{BM}{BC}\right)^2+\left(\dfrac{CM}{BC}\right)^2\right]\le 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{BM}{BC}\right)^2+\left(\dfrac{CM}{BC}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

(áp dụng bất đẳng thức đại số: $x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}$) $\Rightarrow S_{MDAE}\le\dfrac{1}{2}.S_{ABC}$

Vậy khi M là trung điểm của BC thì hình bình hành AEMD có diện tích lớn nhất là: $\dfrac{1}{2}.S_{ABC}$

Chủ đề 5. ĐỊNH LÝ MENELAUS, ĐỊNH LÝ CE-VA, ĐỊNH LÝ VAN-OBEN

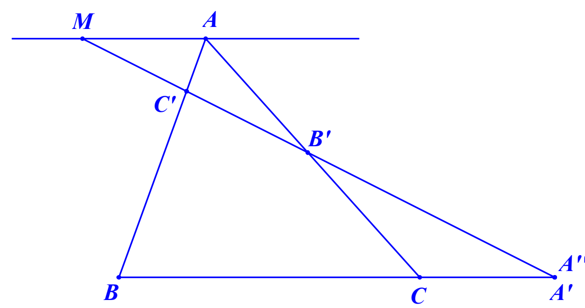
A. Kiến thức cần nhớ

1. Định lý Menelaus

Menelaus sinh ra khoảng năm 70 và mất khoảng năm 130, những gì được biết về cuộc đời ông rất ít, thông qua một số tác phẩm khoa học của những người sau. Chỉ biết chung chung rằng ông có một thời là sinh viên trường đại học Alexandrie cổ đại, rồi làm cán bộ giảng dạy cũng ở đó và về sau thành nhà thiên văn học ở La Mã. Trong hình học ông có một định lý nổi tiếng mang tên ông: định lý Menelaus.

Định lý: Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' (không trùng với các đỉnh của tam giác) lần lượt trên các đường thẳng BC, CA và AB sao cho cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm nằm trên phần kéo dài một cạnh và hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác. Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là: $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$.

- ***Chứng minh***



Trường hợp 1. Nếu trong ba điểm A', B', C' có đúng hai điểm thuộc cạnh của tam giác ABC, chẳng hạn là điểm B' và C'.

- Nếu A', B', C' thẳng hàng.

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt $B'C'$ tại M, ta có: $\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B'}; \frac{B'C}{B'A}=\frac{A'C}{AM}$.

Vậy: $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{AM}{A'B}.\frac{A'C}{AM}.\frac{A'B}{A'C}=1$.

- Ngược lại, nếu $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$.

Gọi A'' là giao điểm của $B'C'$ với BC.

Theo phần thuận: $\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$. Suy ra: $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$.

Do B', C' lần lượt thuộc cạnh CA, AB nên A'' nằm ngoài cạnh BC.

Vậy $\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}$ và A'', A' cùng nằm ngoài đoạn BC.

Suy ra $A'' \equiv A'$. Vậy ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Trường hợp 2. Trong ba điểm A', B', C' không có điểm nào thuộc cạnh của tam giác được chứng minh tương tự.

Ví dụ 1. Trong tam giác ABC, gọi M là trung điểm của cạnh BC, cho $AB=12$ và $AC=16$. Điểm E và F lấy lần lượt trên hai cạnh AC và AB sao cho $AE=2AF$. Các đường EF và AM cắt nhau tại G. Hãy tính tỉ số $\frac{EG}{GF}$

- ***Lời giải.***

Kéo dài BC và FE cắt nhau tại H.

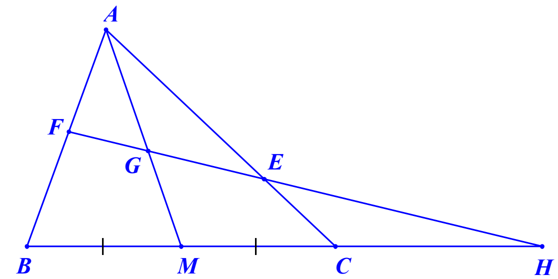
Áp dụng Định lí Menelaus vào ΔFBH với 3 điểm G, A, M: $\frac{GH}{GF}.\frac{AF}{AB}.\frac{MB}{MH}=1$ (1)

Áp dụng Định lí Menelaus vào ΔECH với 3 điểm G, A, M:

ta có : $\frac{GH}{GE}.\frac{AE}{AC}.\frac{MC}{MH}=1$ (2)

Vì $MB=MC$ và $EA=2FA$ nên chia vế theo vế của (1) cho (2) ta được:

$\frac{1}{2}.\frac{GE}{GF}.\frac{AC}{AB}=1$, hay $\frac{GE}{GF}=2.\frac{AB}{AC}=2.\frac{12}{16}=\frac{3}{2}$.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC với $AB>AC$. Gọi P là giao điểm của đường trung trực của BC và đường phân giác trong của góc A. Dựng các điểm X trên AB và Y trên AC sao cho PX vuông góc với AB và PY vuông góc với AC. Gọi Z là giao điểm của XY và BC. Xác định giá trị tỉ số $\frac{BZ}{ZC}$

- ***Lời giải.***

Vì $\widehat{PAX}=\widehat{PAY}$ và $\widehat{PXA}=\widehat{PYA}=90°$ nên các tam giác ΔPAX và ΔPAY bằng nhau, suy ra $AX=AY$ và $PX=PY$.

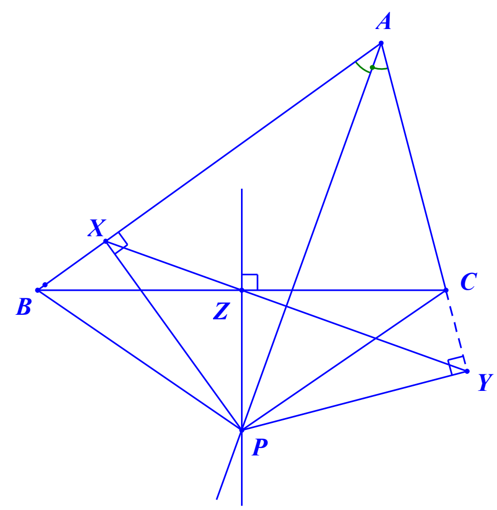
Do P nằm trên trung trực của BC, a có $PC=PB$

Như thế, ΔPYC và ΔPXB là hai tam giác vuông bằng nhau, suy ra $CY=BX$.

Vì X,Y,Z thẳng hàng, áp dụng Định lí Menelaus ta được: $\frac{AY}{YC}.\frac{CZ}{ZB}.\frac{BX}{XA}=1$.

Nhưng $AX=AY$ và $CY=BX$ nên đẳng thức này cho ta:

$BZ=ZC=1$. Vậy tỉ số $\frac{BZ}{ZC}$ bằng 1.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và ba điểm A_1,B_1,C_1 tương ứng nằm trên ba cạnh BC,CA,AB sao cho các đường thẳng AA_1,BB_1 cắt nhau tại O.

- ***Lời giải.***

Giả sử ba cặp đường thẳng AB và A_1B_1, BC và B_1C_1, CA và C_1A_1 lần lượt cắt nhau tại ba điểm C_2,A_2,B_2. Chứng minh rằng C_2,A_2,B_2 thẳng hàng.

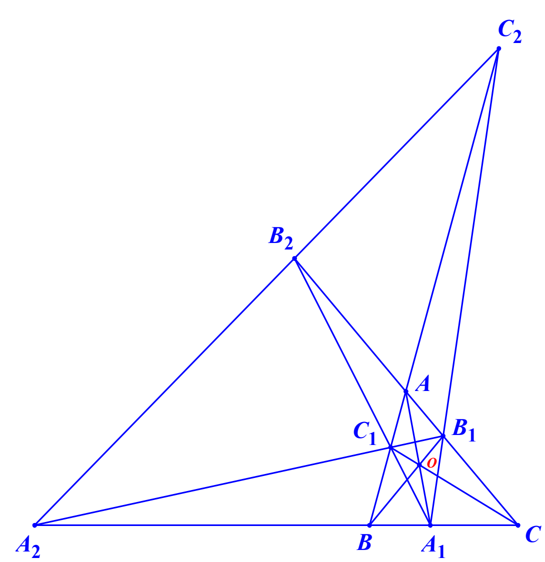
Giải. Áp dụng Định lí Menelaus vào các tam giác và các điểm:

ΔOAB và A_1,B_1,C_2, ta có: $\frac{AA_1}{OA_1}.\frac{OB_1}{BB_1}.\frac{BC_2}{AC_2}=1$; (1)

ΔOBC và B_1,C_1,A_2, ta có: $\frac{OC_1}{CC_1}.\frac{BB_1}{OB_1}.\frac{CA_2}{BA_2}=1$; (2)

ΔOAC và A_1,C_1,B_2, ta có: $\frac{OA_1}{AA_1}.\frac{CC_1}{OC_1}.\frac{AB_2}{CB_2}=1$; (3)

Nhân (1), (2) và (3) vế theo vế ta được: $\frac{BC_2}{AC_2}.\frac{CA_2}{BA_2}.\frac{AB_2}{CB_2}=1$.



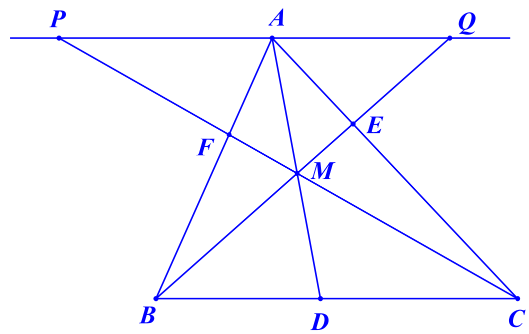
Áp dụng Định lí Menelaus (phần đảo) ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Định lý Ce-va.

Ce-va là kỹ sư người Ý, nhưng yêu thích Toán học. Ông sinh năm 1648, mất năm 1734. Thời thanh niên Ce-va theo học ở Đại học Pise rồi giúp việc cho Quận công vùng Mantoue. Công trình nghiên cứu của ông là về Cơ học và Hình học. Đời sau biết đến ông thông qua một định lý hình học mang tên ông: định lý Ce-va.

Định lý: Cho ba điểm D,E,F nằm trên ba cạnh tương ứng BC,CA,AB của tam giác ABC (không trùng với ba đỉnh của tam giác) khi đó ba đường thẳng AD,BE,CF đồng quy khi và chỉ khi $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$.

- **Chứng minh**



- Xét đường thẳng AD,BE,CF đồng quy

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt đường thẳng BE,CF lần lượt tại Q và P.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{FA}{FB}=\frac{AP}{BC};\frac{EC}{EA}=\frac{BC}{AQ}$

$\frac{AP}{CD}=\frac{AQ}{BD}\left(=\frac{AM}{MD}\right)\Rightarrow\frac{AP}{AQ}=\frac{CD}{BD}$.

Từ đó suy ra: $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{AQ}{AP}.\frac{BC}{AQ}.\frac{AP}{BC}=1$.

Ngược lại, nếu $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1$.

Gọi M là giao điểm của BE và CF. Gọi D' là giao điểm của AM và BC.

Theo phần thuận, ta có: $\frac{D'B}{D'C}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1\Rightarrow\frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow\frac{D'B}{D'B+D'C}=\frac{DB}{DB+DC}$

$\Rightarrow\frac{D'B}{BC}=\frac{DB}{BC}\Rightarrow BD'=BD\Rightarrow D\equiv D'$.

Vậy AD,BE,CF đồng quy.

Ví dụ. Cho hình thang $ABCD$ với $AB>CD$; E là giao điểm hai cạnh bên AD và BC; F là trung điểm AB.

a) Chứng minh AC,BD,EF đồng quy.

b) Biết diện tích hình thang bằng 1. Đường chéo hình thang có thể lấy giá trị bé nhất bằng bao nhiêu?

- **Lời giải**

a) Theo Định lí Céva, xét tam giác ABE, ba đường thẳng EF,BD và AC đồng quy khi và chỉ khi $\frac{FA}{FB}.\frac{CB}{CE}.\frac{DE}{DA}=1\Leftrightarrow\frac{CB}{CE}.\frac{DE}{DA}=1$ (do $FA=FB$).

Điều này hiển nhiên đúng do $AB\,//\,CD$.

b) Gọi D_1,C_1 lần lượt là hình chiếu của D và C lên AB

Đặt $d_1=BD,d_2=AC,p_1=BD_1,p_2=AC_1,CC_1=h,AB=a,CD=b.$

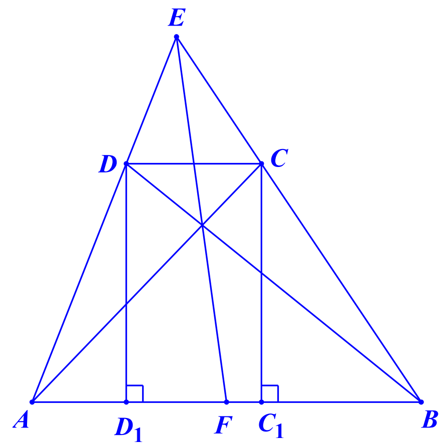
Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $d_1\geq d_2$, khi đó, $p_1\geq p_2$.

Dễ thấy $p_1 + p_2 \geq a + b$.

Ta có $p_1 \geq \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{S_{ABCD}}{h} = \dfrac{1}{h} \Rightarrow d_1^{\,2} = p_1^{\,2} + h^2 \geq \dfrac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$,

dấu bằng xảy ra khi $p_1 = p_2 = h$.

Lúc đó, $d_1 = \sqrt{2}$. Vậy đường chéo hình thang có thể lấy giá trị bé nhất là $\sqrt{2}$.



3. Định lý Van Oben.

Van Oben (Van Aubel) sinh ngày 20.11.1830 tại Maastricht (Hà Lan), mất ngày 03.02.1906 tại Anlwerpen (Bỉ). Ông nghiên cứu và dạy Toán cho các lớp dự bị đại học ở Atheneum, Maastricht (Hà Lan) và đại học Gent (Bỉ). Trong quá trình nghiên cứu, ông công bố nhiều tính chất, định lý hình học đặc sắc mang tên ông

Định lý: Cho M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM với các cạnh BC, AC, AB. Khi đó thì: $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AE}{EC} + \dfrac{AF}{FB}$.

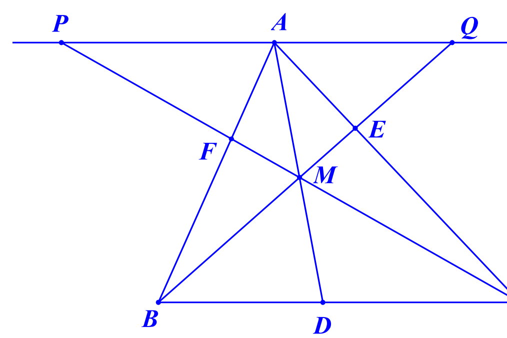
- **Chứng minh**

Cách 1. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng CM và BM lần lượt tại P và Q

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$AQ // BC \Rightarrow \dfrac{AF}{FB} = \dfrac{AQ}{BC}$.

$AP // BC \Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AP}{BC}$.



$\Rightarrow \dfrac{AF}{FB} + \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AQ+AP}{BC} = \dfrac{PQ}{BC}$.

Mặt khác $PQ // BC \Rightarrow \dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{PM}{MB} = \dfrac{AM}{MD}$ từ đó suy ra $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AF}{FB} + \dfrac{AE}{EC}$.

Cách 2. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABD và ba điểm F, M, C thẳng hàng ta có:

$\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BC}{CD} \cdot \dfrac{MD}{AM} = 1 \Rightarrow \dfrac{AF}{FB} = \dfrac{CD}{BC} \cdot \dfrac{AM}{MD} \qquad (1)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACD và ba điểm E, M, B thẳng hàng ta có:

$\dfrac{AE}{EC} \cdot \dfrac{BC}{BD} \cdot \dfrac{MD}{AM} = 1 \Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{BD}{BC} \cdot \dfrac{MA}{MD} \qquad (2)$

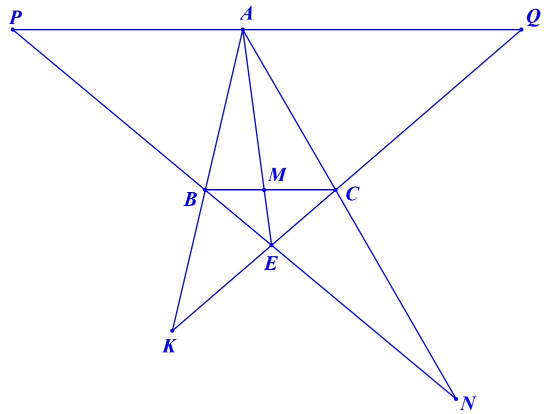
Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{AF}{FB} + \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AM}{MD} \cdot \left(\dfrac{CD}{BC} + \dfrac{BD}{BC} \right) = \dfrac{AM}{MD}$.

B. Bài tập vận dụng

Bài 1. *(Mở rộng Van-Oben)* Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K, trên tia đối của tia CA lấy điểm N. Gọi E là giao điểm CK và BN; gọi M là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng: $\frac{AE}{EM}=\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}$.

- ***Tìm cách giải.***

Với cách suy luận như định lý Van-Oben, chúng ta cũng có thể chứng minh bằng hai cách.



- ***Trình bày lời giải***

Cách 1. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng BN và BK lần lượt tại P và Q.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$AQ//\text{BC}\Rightarrow\frac{AK}{KB}=\frac{AQ}{BC}$.

$AP//BC\Rightarrow\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{BC}\Rightarrow\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AQ+AP}{BC}=\frac{PQ}{BC}$.

Mặt khác $PQ//BC\Rightarrow\frac{PQ}{BC}=\frac{PE}{BE}=\frac{AE}{ME}$ từ đó suy ra: $\frac{AE}{EM}=\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}$.

Cách 2. Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABM và ba điểm K,E,C thẳng hàng ta có: $\frac{AK}{KB}.\frac{BC}{CM}.\frac{ME}{AE}=1\Rightarrow\frac{AK}{KB}=\frac{CM}{BC}.\frac{AE}{ME}\quad(1)$.

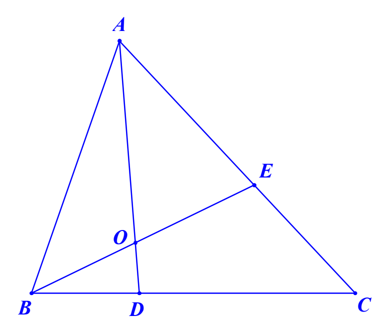
Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACM và ba điểm E,N,B thẳng hàng, ta có:

$\frac{AN}{NC}.\frac{BC}{BM}.\frac{ME}{EA}=1\Rightarrow\frac{AN}{NC}=\frac{BM}{BC}.\frac{EA}{ME}\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AK}{KB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AE}{ME}.\left(\frac{CM}{BC}+\frac{BM}{BC}\right)=\frac{AE}{ME}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lần lượt lấy điểm D sao cho $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$. Lấy điểm O trên đoạn thẳng AD sao cho $\frac{AO}{OD}=4$. Gọi E là giao của hai đường thẳng AC và BO. Tính tỷ số $\frac{AE}{EC}$.

- ***Lời giải.***



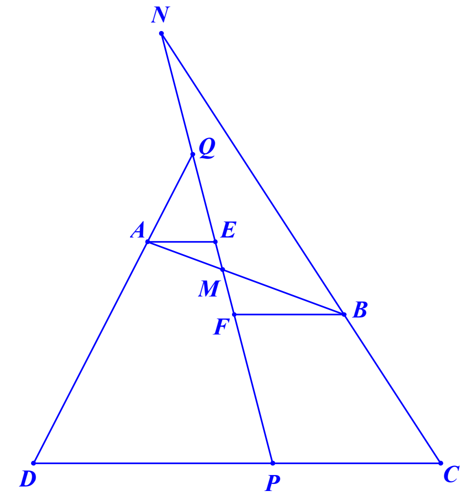
Từ $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{BC}{BD}=3$.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔADC với ba điểm B,O,E thẳng hàng, ta có:

$\frac{AE}{EC}.\frac{BC}{BD}.\frac{OD}{OA}=1\Rightarrow\frac{AE}{EC}.3.\frac{1}{4}=1\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{4}{3}$.

Nhận xét. Ngoài cách vận dụng định lý, chúng ta có thể kẻ thêm đường thẳng song song để vận dụng định lý ta-lét.

Bài 3. *(Định lý Menelaus trong tứ giác)* Cho tứ giác $ABCD$. Đường thẳng d cắt AB,BC,CD,DA tại M,N,P,Q. Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=1$.



- ***Tìm cách giải.***

Tương tự như chúng ta chứng minh định lý Menelaus trong tam giác, chúng ta có nhiều cách chứng minh. Sau đây là một cách.

- ***Trình bày lời giải***

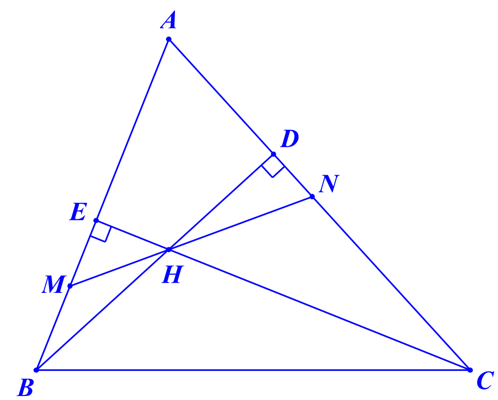
Từ A,B vẽ $AE//BF//CD\ (E;F\in d)$

Theo hệ quả của định lý Ta-lét:

$\frac{MA}{MB}=\frac{AE}{BF};\frac{NB}{NC}=\frac{BE}{CP};\frac{QD}{QA}=\frac{DP}{AE}$

Suy ra: $\frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PD}.\frac{QD}{QA}=\frac{AE}{BF}.\frac{BE}{CP}.\frac{PC}{PD}.\frac{DP}{AE}=1$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn có $BD;CE$ là đường cao, H là trực tâm. Qua H kẻ đường thẳng cắt cạnh AB,AC tại M,N. Chứng minh rằng: $\left(\frac{HM}{HN}\right)^2=\frac{BM.EM}{DN.CN}$



- **Lời giải.**

Áp dụng định lý Menelaus cho B,H,D thẳng hàng đối với ΔAMN, ta có: $\frac{HM}{HN}.\frac{DN}{DA}.\frac{AB}{BM}=1\quad(1)$

Áp dụng định lý Menelaus cho C,H,E thẳng hàng đối với ΔAMN, ta có: $\frac{HM}{HN}.\frac{CN}{CA}.\frac{AE}{EM}=1\quad(2)$

Từ (1), (2) nhân vế ta có:

$\frac{HM^2}{HN^2}.\frac{DN}{DA}.\frac{CN}{CA}.\frac{AB}{BM}.\frac{AE}{EM}=1\quad(3)$

Mặt khác $\Delta AEC\sim\Delta ADB\ (g.g)\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow AB.AE=AC.AD$.

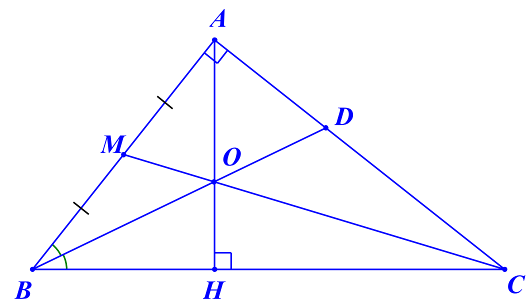
Thay vào (3) suy ra: $\frac{HM^2}{HN^2}.\frac{DN.CN}{BM.EM}=1$ hay $\left(\frac{HM}{HN}\right)^2=\frac{BM.EM}{DN.CN}$ (điều phải chứng minh).

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại điểm O. Chứng minh rằng $BH=AC$

- ***Tìm cách giải.***

Để chứng minh $BH=AC$ bằng cách ghép vào hai tam giác là không khả thi bởi không khai thác được tính đồng quy của giả thiết. Để khai thác được tính đồng quy của giả thiết này, chúng ta liên tưởng tới định lý Ce-va. Vận dụng định lý Ce-va, chúng ta suy ra được $\frac{BH}{HC}.\frac{DA}{DB}=1$. Đã xuất hiện BH song chưa có AC. Để xuất hiện AC, chúng ta vận dụng tiếp yếu tố giả thiết CD là phân giác. Từ đó chúng ta suy ra được: $BH.AC=HC.BC$. Để có $BH=AC$, phần cuối cùng là chứng minh $HC.BC=AC^2$.

- ***Trình bày lời giải***



Theo định lý Ce-va ta có:

$\frac{BH}{HC}.\frac{MC}{MA}.\frac{DA}{DB}=1$

mà $MA=MC$ nên $\frac{BH}{HC}.\frac{DA}{DB}=1 \quad (1)$

Vì CD là phân giác nên $\frac{DA}{DB}=\frac{AC}{BC} \quad (2)$

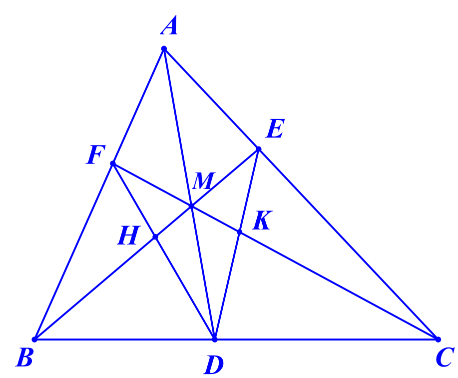
Từ (1) và (2) ta có: $\frac{BH}{HC}.\frac{AC}{BC}=1 \Rightarrow BH.AC=HC.BC \quad (3)$

Nhận thấy $\Delta ABC \sim \Delta HAC\,(g.g) \Rightarrow \frac{HC}{AC}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2=HC.BC \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $BH.AC=AC^2$ hay $BH=AC$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Gọi H là giao điểm của DF và BM. Gọi K là giao điểm của CM và DE. Chứng minh AD, BK, CH đồng quy.

- ***Tìm cách giải.***



Để chứng minh AD, BK, CH đồng quy, dễ dàng nghĩ tới việc vận dụng định lý Ce-va đảo trong tam giác MBC. Để vận dụng định lý Ce-va, chúng ta cần chứng minh $\frac{KM}{KC}.\frac{BH}{HM}.\frac{CD}{BD}=1$. Muốn xuất hiện tỉ số $\frac{KM}{KC};\frac{BH}{HM};\frac{CD}{BD}$ chúng ta cần linh hoạt trong các tam giac để vận dụng định lý Menelaus hoặc Ce-va.

- ***Trình bày lời giải***

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác $AMC; AMB$

Ta có: $\frac{KM}{KC}.\frac{EC}{EA}.\frac{DA}{DM}=1;\ \frac{BH}{HM}.\frac{DM}{DA}.\frac{FA}{FB}=1$

Suy ra $\frac{KM}{KC}=\frac{EA}{EC}.\frac{DM}{DA};\ \frac{BH}{HM}=\frac{FB}{FA}.\frac{DA}{DM} \quad (1)$

Áp dụng định lý Ce-va trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{CD}{BD}.\frac{BF}{FA}.\frac{AE}{EC}=1 \Rightarrow \frac{CD}{BD}=\frac{EC}{AE}.\frac{FA}{BF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta được:

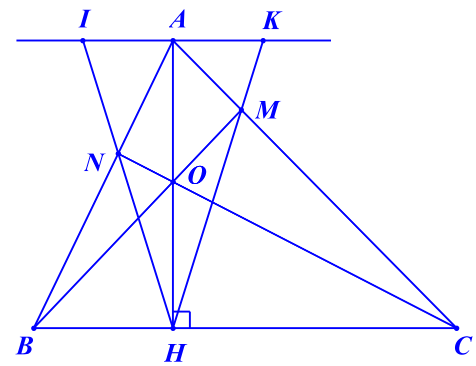
$$\frac{KM}{KC}.\frac{BH}{HM}.\frac{CD}{BD}=\frac{EA}{EC}.\frac{DM}{DA}.\frac{FB}{FA}.\frac{DA}{DM}.\frac{EC}{AE}.\frac{FA}{BF} \Rightarrow \frac{KM}{KC}.\frac{BH}{HM}.\frac{CD}{BD}=1.$$

Theo định lý Ce-va đảo ta có AD, BK, CH đồng qui.

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Lấy điểm O tùy ý thuộc đoạn AH (O khác $A; H$). Các tia BO và CO cắt $AC; AB$ tương ứng tại M, N. Chứng minh rằng HA là tia phân giác của $\widehat{MHN}$.

- ***Lời giải***

Cách 1. Qua A kẻ đường thẳng xy song song với BC. Gọi $I; K$ lần lượt là giao điểm của các tia $HN; HM$ với đường thẳng xy.



Theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{AI}{BH}=\frac{AN}{BN};\frac{AK}{CH}=\frac{AM}{MC}$.

Áp dụng định lý Ce-va trong tam giác ΔABC đối với ba đường thẳng đồng qui AH, BM, CN ta có:

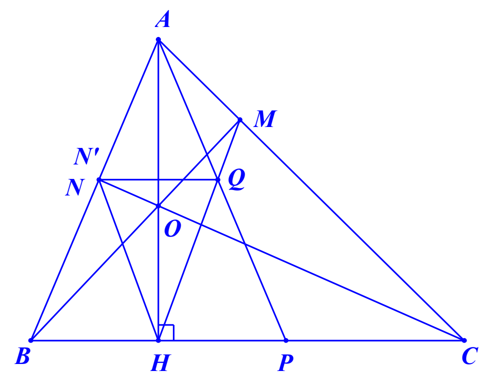
$\frac{AN}{BN}.\frac{BH}{CH}.\frac{CM}{MA}=1 \Rightarrow \frac{AI}{BH}.\frac{BH}{CH}.\frac{CH}{AK}=1$

$\Rightarrow \frac{AI}{AK}=1 \Leftrightarrow AI=AK$.

Xét ΔHKI có $HA \perp IK; AI=AK$

$\Rightarrow \Delta HIK$ cân tại $H \Rightarrow HA$ là đường phân giác $\widehat{MHN}$.

Cách 2. Xét trường hợp $\Delta ABC\left(AC>AB\right)$.



Dựng ΔABP cân tại A có AH là đường cao. AP cắt HM tại Q. Gọi N' là điểm đối xứng với Q qua AH. Vì A, Q, P thẳng hàng suy ra A, N', B thẳng hàng. Khi đó HA là đường phân giác của $\widehat{QHN'}$ và $\frac{QA}{QP}=\frac{N'A}{N'B}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔACP với ba điểm thẳng hàng H, Q, M ta có:

$\frac{HP}{HC}.\frac{MC}{MA}.\frac{QA}{QP}=1 \Rightarrow \frac{HB}{HC}.\frac{MC}{MA}.\frac{N'A}{N'B}=1$, theo định lý đảo của Ce-va thì AH, BM, CN' đồng quy.

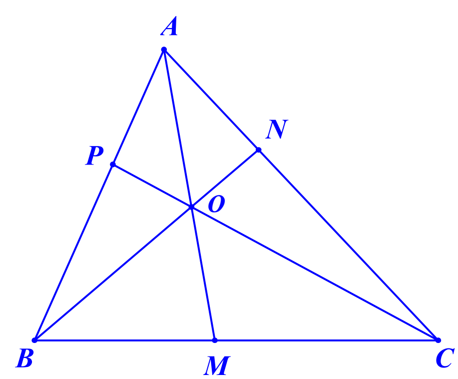
Theo giả thiết AH, BM, CN đồng quy $\Rightarrow N \equiv N'$. Vậy HA là đường phân giác $\widehat{MHN}$

Xét trường hợp $\Delta ABC\left(AC<AB\right)$. Chứng minh tương tự như trên.

Xét trường hợp $\Delta ABC\left(AC=AB\right)$. Chứng minh tương tự

Bài 8. Giả sử O là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC các tia AO, BO, CO lần lượt cắt BC, AC, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng: $\frac{AO.AP}{OP}.\frac{BO.BM}{OM}.\frac{CO.CN}{ON}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O.

- ***Tìm cách giải.***



Nhận thấy phần kết luận của chúng ta là một tích các tỉ số nên chúng ta liên tưởng tới hai định lý có thể dùng là Menelaus hoặc Ce-va. Nhận thấy nếu muốn có $\frac{AO.AP}{OP}$ thì $\frac{AO}{OP}$ hay $\frac{AP}{OP}$ không thể xuất hiện được nếu vận dụng định lý trên (bởi cả hai định lý đều không xuất hiện tỉ số trên). Song nếu đảo mẫu số, tức là $\frac{AO.AP}{OM}$ thì tỉ số $\frac{AO}{OM}$ có thể xuất hiện được nhờ vận dụng định lý Menelaus trong tam giác AMC hoặc AMB. Nhận thấy ý tưởng đó khả thi. Tiếp tục biểu diễn các tỉ số $\frac{BO}{ON};\frac{CO}{OP}$ một cách tương tự, chúng ta có một lời giải hay.

- ***Trình bày lời giải.***

Áp dụng định lý Menelaus trong:

ΔAMC với ba điểm B,O,N thẳng hàng ta có: $\frac{AO}{OM}.\frac{BM}{BC}.\frac{CN}{NA}=1\Rightarrow\frac{AO}{OM}=\frac{BC}{BM}.\frac{AN}{CN}$ (1)

ΔBCN với ba điểm A,O,M thẳng hàng, ta có: $\frac{BO}{ON}.\frac{AN}{AC}.\frac{CM}{MB}\Rightarrow\frac{BO}{ON}=\frac{AC}{AN}.\frac{BM}{CM}$ (2)

Xét ΔACP với ba điểm B,O,N thẳng hàng ta có: $\frac{CO}{OP}.\frac{BP}{BA}.\frac{AN}{NC}=1\Rightarrow\frac{CO}{OP}=\frac{AB}{BP}.\frac{NC}{AN}$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có: $\frac{AO.AP}{OP}.\frac{BO.BM}{OM}.\frac{CO.CN}{ON}=\frac{AO}{OM}.\frac{BO}{ON}.\frac{CO}{OP}.AP.BM.CN$

$=\frac{BC}{BM}.\frac{AN}{CN}.\frac{AC}{AN}.\frac{BM}{CM}.\frac{AB}{BP}.\frac{CN}{AN}.AP.BM.CN=BC.AC.AB.\frac{BM.AP.CN}{CM.BP.NA}$ (4)

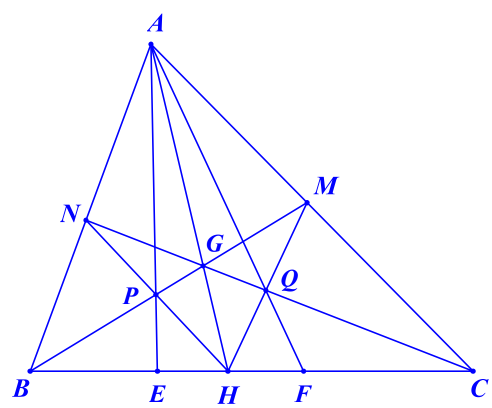
Mặt khác, áp dụng định lý Ce-va đối với ΔABC có ba đường thẳng AM,BN,CP đồng quy ta có: $\frac{BM}{CM}.\frac{CN}{AN}.\frac{AP}{BP}=1$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{AO.AP}{OP}.\frac{BO.BM}{OM}.\frac{CO.CN}{ON}=BC.AC.AB$.

Không phụ thuộc vào vị trí điểm O

Bài 9. Trên ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H,M,N sao cho AH,BM,CN đồng quy tại G. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm của HN và BM; HM và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=3.\left(\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}\right)$

- ***Tìm cách giải.***



Định hướng và sự lựa chọn định lý để vận dụng vấn đề quan trọng, nó quyết định sự thành công của bài toán. Trong bài toán này, nhận thấy có nhiều đường đồng quy, mặt khác phần kết luận lại xuất hiện tổng các tỉ số nên việc vận dụng định lý Van-Oben là điều chúng ta nên nghĩ tới. Để xuất hiện $\frac{AP}{PE}$ nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ABH đối với AE,BG và HN đồng quy. Để xuất hiện $\frac{AQ}{QF}$ nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ACH đối với AF,CG và HM đồng quy. Sau đó, vì vế phải chỉ xuất hiện $\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}$, chúng ta nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ABC đối với AH,CN và BM đồng quy. Từ đó chúng ta có lời giải hay.

- ***Trình bày lời giải.***

Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔABH với AE,BG,HN đồng quy tại P, ta có:

$\frac{AP}{PE}=\frac{AN}{NB}+\frac{AG}{GH}$ (1)

Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔACH

Với AF,CG,HM đồng quy tại Q, ta có: $\frac{AQ}{QF}=\frac{AM}{MC}+\frac{AG}{GH}$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, ta được: $\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}+2.\frac{AG}{GH}$ (3)

Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔABC đối với AH, BM, CN đồng quy tại G, ta có:

$\frac{AG}{GH} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}$ $\quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3.\left(\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}\right)$ (Điều phải chứng minh).

Nhận xét. Từ kết luận của bài toán, chúng ta nhận thấy:

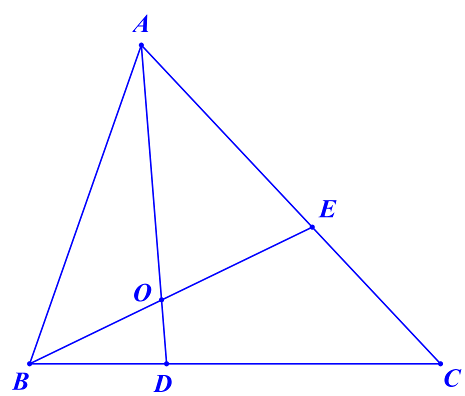
- Áp dụng định lý Van-Oben cho ΔABC đối với AH, BM, CN đồng quy tại G, ta có $\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = \frac{AG}{GH}$ do đó chúng ta giải được bài toán: Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và $BM; HM$ và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3.\left(\frac{AG}{GH}\right)$.

- Trường hợp H là trung điểm của BC thì $MN // BC$. Ta có kết quả sau: $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC}$ do đó ta giải được bài toán sau: Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và $BM; HM$ và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 6.\left(\frac{AN}{NB}\right)$.

- Trường hợp G là trung điểm của AH thì $\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = 1$. Do đó ta giải được bài toán sau: Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và $BM; HM$ và CN. Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3$.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC, CA lần lượt lấy điểm D và E thỏa mãn $\frac{BD}{DC} = \frac{CA}{EA} = \frac{1}{2}$. Gọi O là giao điểm của AD và BE. Tính tỷ số $\frac{AO}{OD}$ và $\frac{BO}{OE}$.

- ***Lời giải.***



Từ $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}; \frac{CD}{DB} = 2; \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔADC với ba điểm B, O, E thẳng hàng, ta có:

$$\frac{AO}{OD}.\frac{BD}{BC}.\frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OD}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OD} = 6.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔBEC với ba điểm A, O, D thẳng hàng, ta có:

$$\frac{BO}{OE}.\frac{AE}{AC}.\frac{CD}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OE}.\frac{2}{3}.\frac{2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OE} = \frac{3}{4}.$$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Có đường cao AH, đường trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy tại O. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{AC} = \frac{BH}{CH}$

- **Lời giải.**

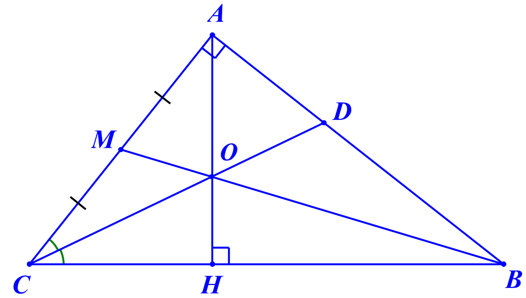
Trong tam giác ABC có AH, CD, BM đồng quy tại O.

Theo định lý Ce-va, ta có: $\frac{BH}{HC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AD}{DB}=1$

mà $\frac{CM}{MA}=1$ và $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}$

(Tính chất đường phân giác)

suy ra $\frac{BH}{HC}.1.\frac{AC}{BC}=1 \Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{BH}{CH}$.



Bài 12. Cho tam giác ABC có đường cao AH, đường trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy. Đặt a,b,c lần lượt là độ dài ba cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=2a^2b$.

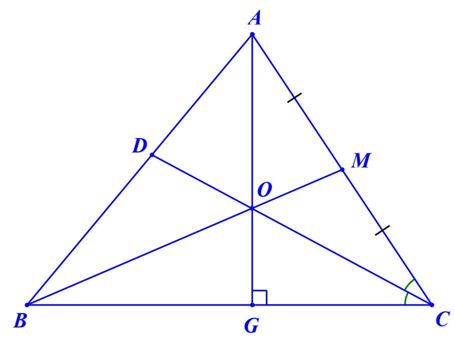
- **Lời giải.**

Áp dụng định lý Ce-va cho ba đường thẳng đồng quy AH, BM, CD, ta có: $\frac{AD}{BD}.\frac{BH}{CH}.\frac{CM}{AM}=1$ mà $AM=CM$

nên $\frac{AD}{BD}.\frac{BH}{CH}=1 \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{CH}{BH}$.

Mặt khác, CD là đường phân giác nên

$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$ suy ra $\frac{CH}{BH}=\frac{b}{a}$ hay $a.CH=b.BH$ (1)



Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông, ta có:

$a^2=BC^2=HB^2+HC^2+2.HB.HC$

$b^2=AC^2=HA^2+HC^2$

$c^2=AB^2=HA^2+HB^2$

Từ đó: $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=(a+b)(2a.CH)=2a.(a.HC+b.HC)$

$=2a.(b.BH+b.HC)$ (theo (1))

$=2a.ab=2a^2b$.

Bài 13. Cho tam giác $ABC(AB<AC)$, M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua M và song song với đường phân giác AD của góc BAC cắt AC, AB lần lượt ở E và F. Chứng minh rằng $CE=BF$

- **Lời giải.**

Cách 1. *(không dùng Menelaus)*

Ta giải vắn tắt như sau:

Từ $AD//FM$ và $ME//AD$

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

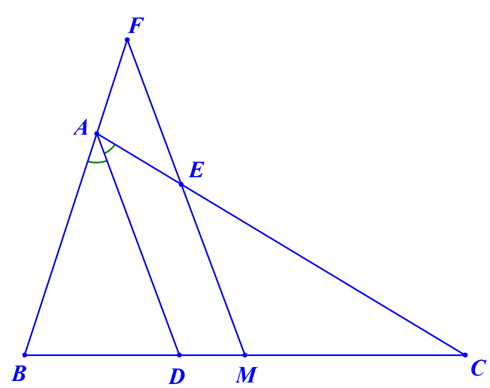
$\frac{BA}{BD}=\frac{BF}{BM}$ (1) và $\frac{CE}{CM}=\frac{CA}{CD}$ (2)

Mặt khác, theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{BA}{BD}=\frac{CA}{CD}$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra: $\frac{BF}{BM}=\frac{CE}{CM}$.

Do đó $BF=CE$ (do $BM=CM$).



Cách 2. (dùng Menelaus)

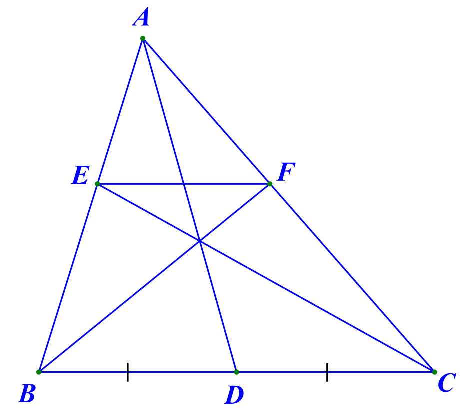
Xét tam giác ABC với ba điểm F, E, M thẳng hàng, ta có: $\frac{EA}{EC}.\frac{MC}{MB}.\frac{FB}{FA}=1 \quad (4)$

Do $\widehat{AEF}=\widehat{AFE}=\frac{\widehat{BAC}}{2}$ nên ΔAEF cân ở A. Suy ra $AE=AF \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra $BF=CE$. Điều phải chứng minh.

Bài 14. Cho tam giác ABC lấy điểm E thuộc cạnh AB và điểm F thuộc cạnh AC. Gọi AM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để EF song song với BC là AM, BF và CE đồng qui.

- ***Lời giải.***



Xét $\frac{AE}{EB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CF}{FA}=\frac{AE}{EB}.\frac{CF}{FA} \quad (1)$

- Nếu AM, BF, CE đồng qui thì theo định lý Ce-va: $\frac{AE}{EB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CF}{FA}=1$.

  Từ (1) suy ra: $\frac{AE}{EB}.\frac{CF}{FA}=1 \Leftrightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{CF}$

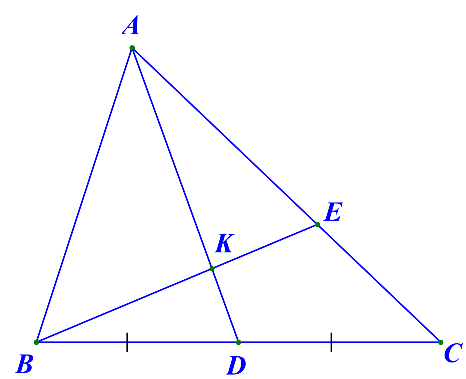
  $\Rightarrow EF // BC$ (định lý Ta-lét đảo).

- Nếu $EF // BC \Rightarrow \frac{AE}{BE}=\frac{AF}{CF}$. Từ (1) suy ra:

  $\frac{AE}{EB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CF}{FA}=\frac{AE}{EB}.\frac{CF}{FA}=1 \Rightarrow AM, BF, CE$ đồng qui (theo đinh lý Ce-va đảo).

Bài 15. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD. Trên AD lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{KD}=3$. Hỏi đường thẳng BK chia tam giác ABC theo tỉ số nào?

- ***Lời giải.***



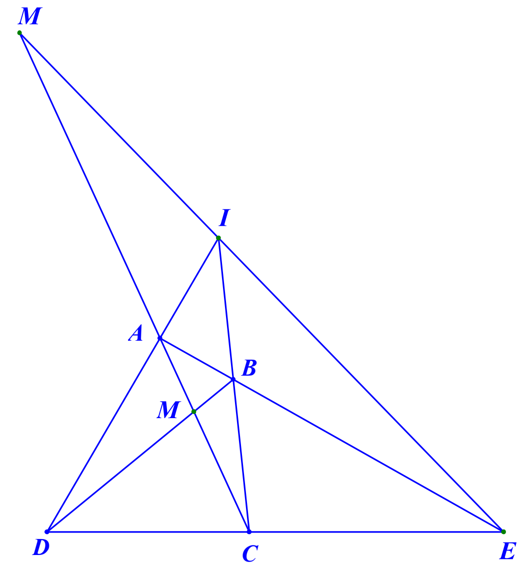
Gọi E là giao điểm của đường thẳng BK và AC. Áp dụng định lý Menelaus trong ΔACD đối với ba điểm B, K, E thẳng hàng, ta có: $\frac{AK}{KD}.\frac{BD}{BC}.\frac{CE}{EA}=1$

$\Rightarrow 3.\frac{1}{2}.\frac{CE}{EA} \Leftrightarrow \frac{CE}{EA}=\frac{2}{3}$.

Mặt khác ΔABE và ΔBCE có chung đường cao kẻ từ B, suy ra: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCE}}=\frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{BCE}}=\frac{3}{2}$.

Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$. Cạnh AB cắt CD kéo dài tại E, cạnh BC cắt AD kéo dài tại I. Đường chéo AC cắt BD và EI lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}$.

- **Lời giải.**



Áp dụng định lý Menelaus trong ΔAEC với ba điểm M, D, B thẳng hàng, ta có: $\frac{MA}{MC}.\frac{DC}{DE}.\frac{BE}{BA}=1$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm N, I, E thẳng hàng, ta có: $\frac{NA}{NC}.\frac{IC}{IB}.\frac{EB}{EA}=1$

Suy ra $\frac{MA}{MC}.\frac{DC}{DE}.\frac{BE}{BA}=\frac{NA}{NC}.\frac{IC}{IB}.\frac{EB}{EA}$

do đó $\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}.\frac{IC}{IB}.\frac{DE}{DC}.\frac{AB}{AE}$ (1)

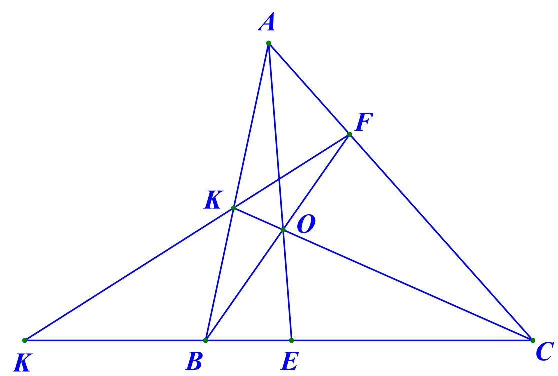
Áp dụng định lý Menelaus trong ΔBEC với ba điểm I, D, A thẳng hàng, nên

$$\frac{IC}{IB}.\frac{AB}{AE}.\frac{DE}{DC}=1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MA}{MC}=\frac{NA}{NC}$.

Bài 17. Cho tam giác ABC. Lấy K thuộc cạnh AB và T thuộc tia đối tia BC. Gọi F là giao điểm của TK với $AC; O$ là giao điểm của BF và CK. Gọi E là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng: $\frac{TB}{TC}=\frac{EB}{EC}$.

- **Lời giải.**



Áp dụng định lý Ce-va trong ΔABC với 3 đường thẳng đồng quy AE, BF, CK, ta có: $\frac{EB}{EC}.\frac{FC}{FA}.\frac{KA}{KB}=1$ (1)

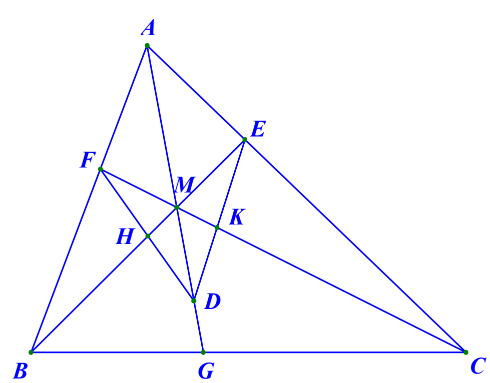
Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm T, K, F thẳng hàng, ta có:

$$\frac{TC}{TB}.\frac{KB}{KA}.\frac{FA}{FC}=1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta được: $\frac{TB}{TC}=\frac{EB}{EC}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC có D là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Lấy điểm M tùy ý thuộc AD. Gọi giao điểm của BM và AC là E; gọi giao điểm CM và AB là F. Các tia DE và CM giao nhau tại K; các tia DF và BM tại H. Chứng minh rằng $CH; AD; BK$ đồng quy.

- **Lời giải.**



Gọi BC giao với AD tại G.

Áp dụng định lý Menelaus trong $\Delta ABM, \Delta AMC$ ta được: $\frac{DM}{DA}.\frac{FA}{FB}.\frac{HB}{HM}=1$ (1)

$$\frac{DM}{DA}.\frac{EA}{EC}.\frac{KC}{KM}=1 \quad (2)$$

Chia (1) cho (2), ta được: $\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{KC}{KM}.\frac{HM}{HB}$ (3)

Vì AG, BE, CF đồng quy $\Rightarrow \dfrac{GB}{GC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}=1 \Rightarrow \dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{GC}{GA}$ (4)

Từ (3) và (4): $\dfrac{GC}{GB}=\dfrac{KC}{KM}.\dfrac{HM}{HB} \Rightarrow \dfrac{GB}{GC}.\dfrac{KC}{KM}.\dfrac{HM}{HB}=1$ (điều phải chứng minh)

Bài 19. Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BM, CN cắt nhau tại H. Chứng minh rằng: $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HM}{BM}+\dfrac{HN}{CN}=\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{MC}{MA}.\dfrac{NA}{NB}$.

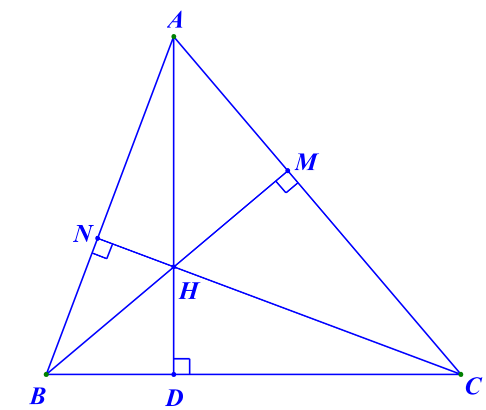
- **Lời giải.**

Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác có chung cạnh đáy, ta có:

$$\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HM}{BM}+\dfrac{HN}{CN}=\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HCA}}{S_{ABC}}+\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=1.$$

Áp dụng định lý Ce-va, ta có: $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{MC}{MA}.\dfrac{NA}{NB}=1$.

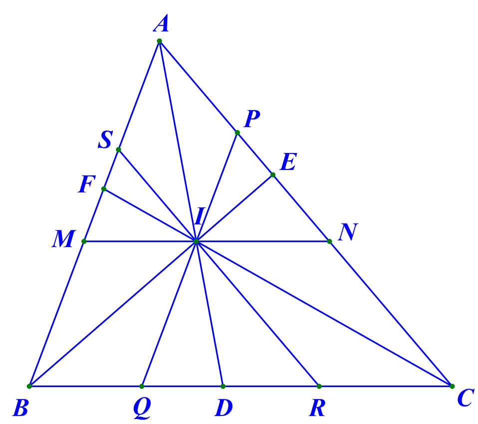
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



Bài 20. Từ điểm I thuộc miền trong tam giác ABC, kẻ AI cắt BC tại D. Qua I kẻ MN, PQ và RS lần lượt song song với BC, AB, AC (M, S thuộc $AB; Q, R$ thuộc $BC; N, P$ thuộc AC) Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{IM}{IN}=\dfrac{DB}{DC}$; b) $\dfrac{IM}{IN}.\dfrac{IP}{IQ}.\dfrac{IR}{IS}=1$.

- **Lời giải.**



a) Áp dụng hệ quả định lý ta-lét, ta có:

$MI // BD \Rightarrow \dfrac{MI}{BD}=\dfrac{AI}{AD}$

$IN // CD \Rightarrow \dfrac{IN}{CD}=\dfrac{AI}{AD}$

$\Rightarrow \dfrac{MI}{BD}=\dfrac{IN}{CD} \Rightarrow \dfrac{MI}{NI}=\dfrac{DB}{DC}$.

b) Gọi E là giao điểm của giao điểm của đường thẳng BI và $AC; F$ là giao điểm của đường thẳng CI và AB

Chứng minh tương tự câu a, ta có: $\dfrac{IP}{IQ}=\dfrac{AF}{BF}; \dfrac{IR}{IS}=\dfrac{CE}{AE}$

Áp dụng định lý Ce-va trong ΔABC đối với AD, BE, CF đồng quy, ta có:

$\dfrac{BD}{CD}.\dfrac{CE}{AE}.\dfrac{AF}{BF}=1 \Rightarrow \dfrac{IM}{IN}.\dfrac{IP}{IQ}.\dfrac{IR}{IS}=1$. Điều phải chứng minh.

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao CK. Vẽ đường phân giác CE của tam giác ACK. Đường thẳng qua B song song với CE cắt đường thẳng CK tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF chia đoạn thẳng AC thành hai phần bằng nhau.

- **Lời giải.**

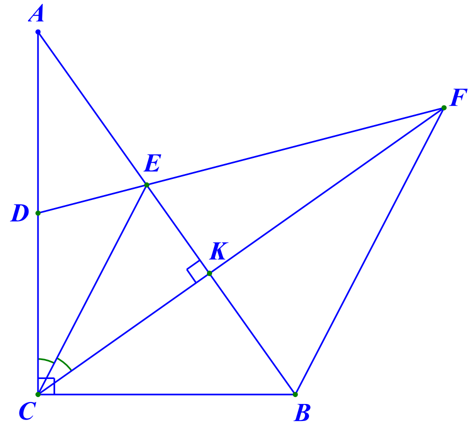
Ta có: $\widehat{BEC}=\widehat{A}+\widehat{ACE}=\widehat{KCB}+\widehat{KCE}=\widehat{BCE}$

Do đó ΔBCE cân tại B nên $BE=BC$.

Mặt khác $BF//CE$ nên theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{CK}{FK}=\frac{EK}{BK}\Rightarrow\frac{CK+FK}{FK}=\frac{EK+BK}{BK}\Rightarrow\frac{CF}{FK}=\frac{BE}{BK} \text{ mà } BC=BE \text{ nên } \frac{CF}{FK}=\frac{BC}{BK}\quad(1)$$

Vì CE là đường phân giác của góc $\widehat{ACK}$ nên: $\frac{AE}{KE}=\frac{AC}{CK}\quad(2)$



$\Delta ABC \backsim \Delta CKB\ (g.g)\Rightarrow\frac{BC}{BK}=\frac{AE}{CK}\quad(3)$

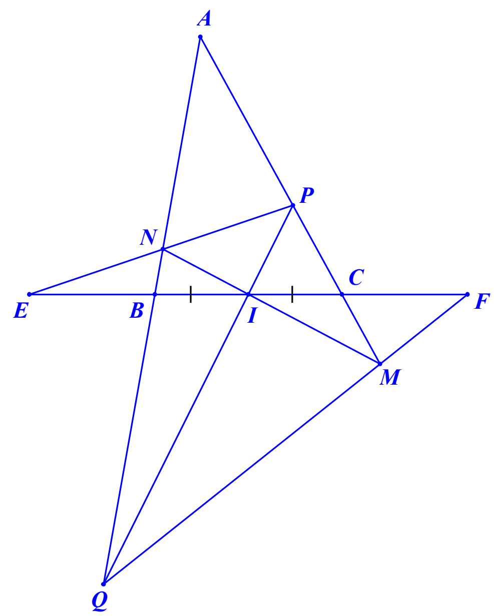
Từ (2) và (3) suy ra: $\frac{CF}{FK}=\frac{AE}{KE}\quad(4)$

Giả sử đường thẳng EF cắt AC tại D. Áp dụng định lý Mennenlaus vào tam giác ACK bị cát tuyến DEF cắt các cạnh, ta có: $\frac{AD}{CD}.\frac{CF}{KF}.\frac{KE}{AE}=1\quad(5)$

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{AD}{CD}=1$ hay ta có: $AD=CD$.

Bài 22. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Lấy M thuộc tia đối của tia CA. Tia MI cắt đường thẳng AB tại N. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E, tia EN cắt tia AC tại P. Tia PI cắt đường thẳng AB tại Q. Gọi F là giao điểm của QM và IC. Chứng minh $IE=IF$.

- **Lời giải.**



Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm M,N,I thẳng hàng, ta có:

$$\frac{IB}{IC}.\frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=1\Rightarrow\frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=1\quad(1)$$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm Q,P,I thẳng hàng, ta có:

$$\frac{IC}{IB}.\frac{PA}{PC}.\frac{QB}{QA}=1\Rightarrow\frac{PA}{PC}.\frac{QB}{QA}=1\quad(2)$$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm N,E,P thẳng hàng, ta có:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=1\quad(3)$$

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với ba điểm Q,M,F thẳng hàng, ta có:

$$\frac{FC}{FB}.\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC}=1\quad(4)$$

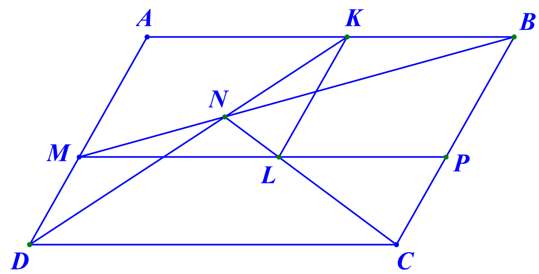
Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{MC}{MA}.\frac{NA}{NB}=\frac{QB}{QA}.\frac{PA}{PC}$ do đó $\frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC}$.

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{EB}{EC}.\frac{PC}{PA}.\frac{NA}{NB}=\frac{FC}{FB}.\frac{QB}{QA}.\frac{MA}{MC}$

Từ đó suy ra: $\frac{EB}{EC}=\frac{FC}{FB}\Rightarrow\frac{EB}{EB+EC}=\frac{FC}{FB+FC}\Rightarrow\frac{EB}{BC}=\frac{FC}{BC}\Rightarrow BE=FC\Rightarrow IE=IF$.

Bài 23. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm K. Qua K kẻ đường thẳng song song với AD. Trên đường thẳng đó lấy điểm L bên trong hình bình hành, trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = KL$. Chứng minh rằng ba đường thẳng CL, DK và BM đồng quy.

- **Lời giải.**



Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng BM và CL. Tứ giác $MLKA$ là hình bình hành. Giả sử đường thẳng ML cắt cạnh BC tại P. Khi đó, ta có: $LP = KP; MD = CP$. Ta sẽ chứng minh D, N, K thẳng hàng.

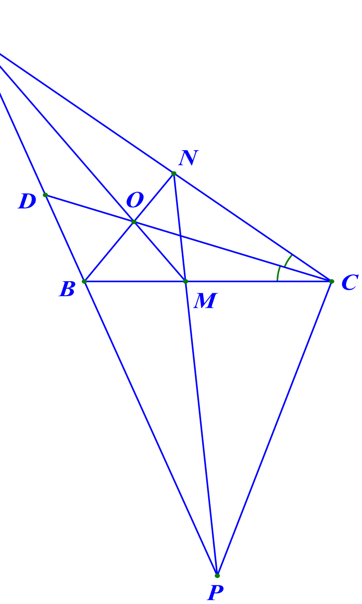
Áp dụng định lý Mennenlaus vào tam giác BMP bị cắt bởi cát tuyến CLN cắt các cạnh, ta có:

$$\frac{BN}{NM}.\frac{ML}{LP}.\frac{PC}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{BN}{NM}.\frac{AK}{KB}.\frac{MD}{AD} = 1$$

Suy ra ba điểm K, N, D thẳng hàng (theo định lý Menelaus đảo vào ΔABM)

Vậy ba đường thẳng CL, DK và BM đồng quy.

Bài 24. Cho ΔABC không cân có CD là đường phân giác. Lấy điểm O thuộc đường thẳng CD (O khác C và D). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AO, BO với BC và AC. Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và AB. Chứng minh rằng CD vuông góc với CP.



- **Lời giải.**

Áp dụng định lý Ce-va vào tam giác ABC, ta có:

$$\frac{CN}{NA}.\frac{AD}{DB}.\frac{BM}{MC} = 1 \quad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ABC với ba điểm N, M, P thẳng hàng, ta có:

$$\frac{CN}{NA}.\frac{AP}{PB}.\frac{BM}{MC} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CN}{NA}.\frac{AD}{DB}.\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA}.\frac{AP}{PB}.\frac{BM}{MC}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PB} \quad (3)$$

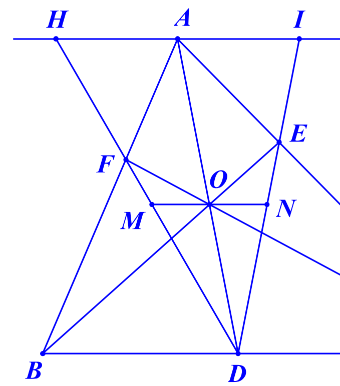
Từ giả thiết CD là đường phân giác của ΔABC

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CA}{CD} \Rightarrow CP$ là đường phângiác ngoài của tam giác ABC.

Từ đó suy ra $CD \perp CP$.

Bài 25. Cho tam giác ABC có điểm O nằm trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC, cắt DF, DE lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: $OM = ON$.

- **Lời giải.**



Qua A kẻ đường thẳng xy song song với BC cắt DM, DN lần lượt tại H và I.

Theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có:

$\frac{AH}{BD}=\frac{AF}{BF}; \quad \frac{AI}{CD}=\frac{AE}{EC}$

Áp dụng định lý Ce-va trong tam giác ABC với ba đường AD, BE, CF đồng quy tại O,

ta có: $\frac{AF}{BF}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{EA}=1 \Rightarrow \frac{AH}{BD}.\frac{BD}{CD}.\frac{CD}{AI}=1 \Rightarrow \frac{AH}{AI}=1$

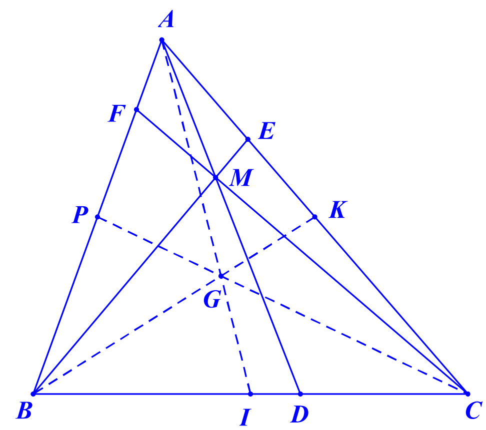
hay $AH=AI$

$MN//HI$ theo hệ quả định lý Ta-lét, ta có: $\frac{OM}{AH}=\frac{DO}{DA}=\frac{ON}{AI}$. Mà $AH=AI$ nên $OM=ON$

Bài 26. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác. Gọi D, E, F thứ tự là giao điểm của đường thẳng AM, BM, CM với các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng trong các tỉ số $\frac{AM}{MD}; \frac{BM}{ME}; \frac{CM}{MF}$ có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2.

(Thi vô địch Toán Quốc tế, IMO)

- **Lời giải.**



Kẻ ba đường trung tuyến AI, BK, CP của tam giác ABC có trọng tâm G chia tam giác thành 6 tam giác $BGI, BGP, CGK, AGK, AGP, CGI$. Do đó điểm M nằm trong một trong 6 tam giác đó kể cả trên cạnh.

Giải sử M nằm trong hoặc trên cạnh của ΔAGK.

Theo định lý Van-Oben, ta có:

$\frac{AM}{MD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}\le\frac{AF}{PB}+\frac{AE}{KC}\le 2$.

Mặt khác $\frac{BM}{ME}=\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}\ge\frac{BF}{PA}+\frac{BD}{IC}\ge 2$.

Dấu bằng xảy ra khi M trùng với G. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 27. Cho tam giác ABC, trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại K. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của $A'C'$ và BB'; $A'B'$ và CC'. Tia AM, tia AN lần lượt cắt BC tại E, F. Chứng minh rằng:

a) EN, FM, AA' đồng quy tại I

b) $IA.KA'=3.IA'.KA$.

- **Lời giải.**

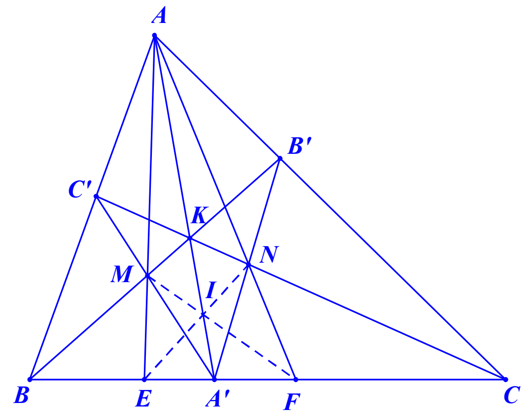
a) Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABE với 3 điểm thẳng hàng A', M, C',

ta có: $\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A}=1 \Rightarrow \frac{AM}{ME}=\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{EA'}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AFC với 3 điểm thẳng hàng A', N, B',

ta có: $\frac{FN}{NA}.\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'F}=1 \Rightarrow \frac{FN}{NA}=\frac{A'F}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}$

Xét $\frac{AM}{ME}.\frac{EA'}{A'F}.\frac{FN}{NA}=\left(\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{EA'}\right).\frac{EA'}{A'F}\left(\frac{A'F}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}\right)=\frac{C'A}{BC'}.\frac{A'B}{CA'}.\frac{B'C}{AB'}=1$



(Do AA', BB', CC' đồng quy tại K - định lý Ce-va)
Cũng theo định lý Ce-va ta có AA', EN và FM đồng quy tại I.

b) Áp dụng định lý Van-Oben cho tam giác $ABA'; ACA'; AEF$, ta có:

$$\frac{AM}{ME} = \frac{AK}{KA'} + \frac{AC'}{C'B} \quad (1);$$

$$\frac{AN}{NF} = \frac{AK}{KA'} + \frac{AB'}{B'C} \quad (2) \quad ;$$

$$\frac{AM}{ME} + \frac{AN}{NF} = \frac{AI}{IA'} \quad (3)$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được: $2.\frac{AK}{KA'} + \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AI}{IA'} \quad (4)$

Áp dụng định lý Van- Oben cho tam giác ABC, ta có: $\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AK}{KA'}$

Thay vào (4), ta được: $3.\frac{AK}{KA'} = \frac{AI}{IA'} \Rightarrow 3.IA'.AK = KA'.AI$.

PHẦN II. TỔNG HỢP VÀ MỞ RỘNG

I. Kiến thức mở rộng

1. Một số hệ thức trong tam giác vuông suy từ các tam giác đồng dạng

a) Hệ thức 1

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH.

Khi đó: $AB^2 = BH.BC;$ (1)

$AC^2 = CH.CB.$ (2)

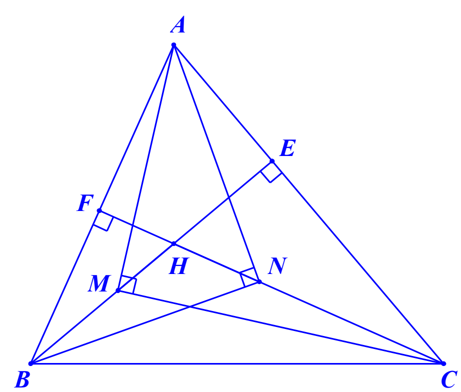
b) Hệ thức 2

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Khi đó: $AH^2 = BH.HC.$

II. Một số ví dụ

Ví dụ 4. Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Trên đoạn HB và HC lấy hai điểm M, N sao cho các góc AMC và ANB đều vuông. Chứng minh rằng $AN = AM$.

- **Lời giải.**



Vì tam giác ANB vuông tại N với đường cao NF nên

$AN^2 = AF.AB$ (1)

Do tam giác AMC vuông tại M với đường cao ME nên

$AM^2 = AE.AC$ (2)

Các tam giác AEB và AFC đồng dạng cho ta

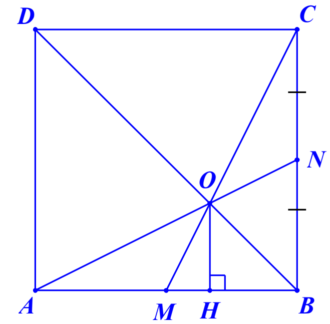
$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $AM = AN$.

2. Áp dụng Định lí Thales và tam giác đồng dạng trong việc tính diện tích và chứng minh các hệ thức hình học

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$; M là trung điểm của AB; N là trung điểm của BC; AN và CM cắt nhau tại O. Tính tỉ số diện tích của tứ giác $AOCD$ và diện tích của $ABCD$.

- **Lời giải.**



Gọi s là diện tích hình vuông. Vì O là giao điểm hai trung tuyến của tam giác ABC nên O là trọng tâm tam giác ABC, suy ra BO đi qua trung điểm của AC và do đó qua D.

Theo định lí Thales: ta có : $\frac{OH}{NB} = \frac{AH}{AB}$.

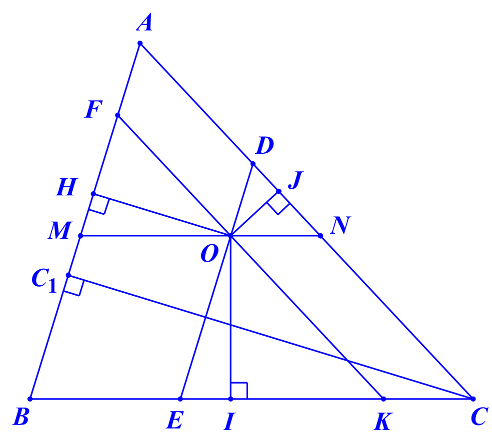
Mà $AB = 2NB$ nên $AH = 2OH = 2HB$. Suy ra $HB = \frac{1}{3}AB$. Ta có:

$S_{AOB} = \frac{1}{3}.S_{ABC}$ (chung đáy AB, đường cao $OH = \frac{1}{3}BC$) $= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.s = \frac{s}{6}$.

Tương tự: $S_{BOC} = \frac{s}{6}$. Vậy: $S_{AOCD} = s - \left(\frac{s}{6}\right) - \left(\frac{s}{6}\right) = \frac{2s}{3}$. Do đó tỉ số cần tính là $\frac{2}{3}$.

Ví dụ 6. Qua điểm O bất kì trong tam giác ABC, dựng các đường thẳng DE, FK, MN lần lượt song song với AB, AC, BC sao cho F, M ở trên AB; E, K ở trên BC và N, D ở trên AC. Chứng minh rằng: $\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1$.

- **Lời giải.**



Ta có $S = S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CAO}$ (1)

Gọi I, J, H lần lượt là hình chiếu của O lên các cạnh BC, CA, AB. Khi đó, (1) tương đương với

$2S = OI.BC + OJ.CA + OH.AB$ (2)

Mặt khác, tam giác MOF đồng dạng với tam giác BCA (do có hai cặp cạnh song song và cặp cạnh còn lại nằm trên cùng một đường thẳng) nên tỉ số hai đường cao bằng tỉ số đồng dạng; ngoài ra, $MOEB$ là hình bình hành nên $OM = BE$. Do đó, gọi CC_1 là đường cao kẻ từ C của tam giác ABC, ta có $\frac{OH}{CC_1} = \frac{OM}{BC} = \frac{BE}{BC}$ Suy ra $\frac{\frac{1}{2}OH.AB}{\frac{1}{2}CC_1.AB} = \frac{BE}{BC}$ (3)

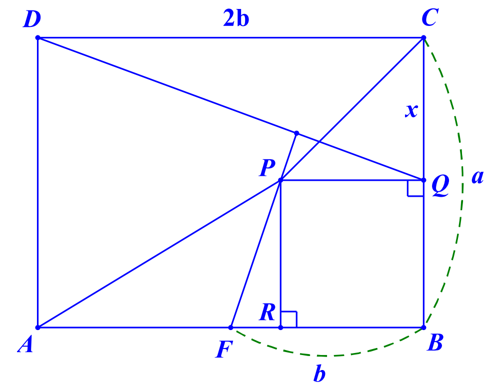
Tương tự, gọi BB_1 và AA_1 tương ứng là các đường cao kẻ từ B và A của tam giác ABC, ta cũng có $\frac{\frac{1}{2}OI.BC}{\frac{1}{2}AA_1.\text{BC}} = \frac{CN}{CA}$ (4) ; $\frac{\frac{1}{2}OJ.CA}{\frac{1}{2}BB_1.CA} = \frac{AF}{AB}$ (5)

Cộng vế theo vế của (3), (4), (5) và để ý (2), suy ra điều phải chứng minh.

3. Tam giác đồng dạng và mối liên hệ với các biến đổi đại số

Ví dụ 7. Trung điểm cạnh AB của hình chữ nhật $ABCD$ là F. Gọi P là điểm nằm trên đường phân giác của góc C. Hạ $PQ \perp BC\left(Q \in BC\right)$.Chứng minh rằng nếu: $PF \perp DQ$ thì $AP = BC$.

- **Lời giải.**



Gọi R là điểm trên đường thẳng AB sao cho $PR \perp AB$, kí hiệu a, b, x lần lượt là độ dài các đoạn thẳng CB, BF, CQ.

Giả sử PF vuông góc DQ, khi đó tam giác DCQ đồng dạng với tam giác PRF.

Suy ra $\frac{CQ}{CD} = \frac{RF}{RP}$, hay, $\frac{x}{2b} = \frac{b-x}{a-x}$,

do đó $ax - x^2 = 2b^2 - 2bx$.

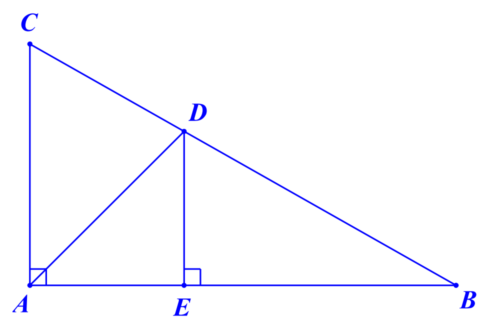
Biến đổi hệ thức trên ta được: $(2b-x)^2 + (a-x)^2 - a^2 = 0$

Do đó, $AP^2 = AR^2 + RP^2 = (2b-x)^2 + (a-x)^2 = a^2 = BC^2$, suy ra $AP = BC$

Chú ý. Dùng các hệ thức trên, dễ dàng chứng minh được điều ngược lại cũng đúng, với điều kiện $P \neq F$.

Ví dụ 8. Tam giác vuông ABC có các cạnh góc vuông $AC = b, AB = c$ và độ dài đường phân giác $AD = d$. Chứng minh: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

- **Lời giải.**



Hạ $DE \perp AB$.

Tam giác AED vuông cân tại E,

do đó: $d = AD = AE\sqrt{2}$.

Đặt $EA = ED = x$ thì $d = x\sqrt{2}$.

Vì $DE \,//\, AC$ nên theo định lí Thales ta có:

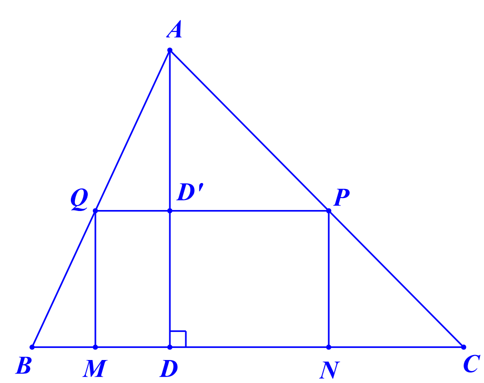
$\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BA}$ hay $\frac{x}{b} = \frac{c-x}{c} = \frac{x+c-x}{b+c} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow x = \frac{bc}{b+c}$.

Từ đó ta có: $d = x\sqrt{2} = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c} \Rightarrow bd + dc = bc\sqrt{2}$.

Chia cả hai vế của đẳng thức trên cho $dbc > 0$ ta được: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

Ví dụ 9. Trong tất cả các hình chữ nhật nội tiếp tam giác cho trước, tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

- **Lời giải.**



Giả sử hình tam giác cho trước có cạnh $BC = a$ không đổi và đường cao $AD = h$ không đổi.

Gọi các cạnh của hình chữ nhật là $MN = y, MQ = x$, thì $AD' = AD - DD = h - x$.

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là $S = xy$.

Dễ thấy ΔAQP ” ΔABC $(g.g)$ cho tỉ lệ:

$\frac{PQ}{BC} = \frac{AD'}{AD}$, hay $\frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow y = \frac{a}{h}(h-x)$.

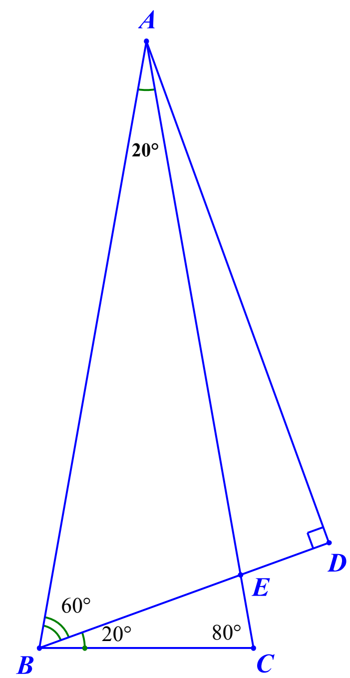
Do đó: $S = \frac{ax}{h}(h-x) = \frac{a}{h}(-x^2 + hx)$, hay

$$S=\frac{a}{h}\left(-x^2+2\frac{h}{2}.x-\frac{h^2}{4}+\frac{h^2}{4}\right)=\frac{a}{h}\left[-\left(x^2-xh+\frac{h^2}{4}\right)+\frac{h^2}{4}\right]=\frac{a}{h}\left[-\left(x-\frac{h}{2}\right)^2+\frac{h^2}{4}\right]\le\frac{ah}{4}.$$

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất bằng $\frac{ah}{4}$, khi $x=\frac{h}{2}$.

Kết luận: Trong tất cả các hình chữ nhật nội tiếp ΔABC cho trước thì hình có một cạnh bằng nửa đường cao tam giác ($\frac{h}{2}$), cạnh kia bằng nửa cạnh đáy tam giác ($y=\frac{a}{h}\left(h-\frac{h}{2}\right)=\frac{a}{2}$), thì hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất.

Ví dụ 10. Cho tam giác cân ABC có góc $BAC=20°$, $AB=AC=b, BC=a$. Chứng minh rằng $a^3+b^3=3ab^2$.



- **Lời giải.**

Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho góc $ABE=60°$.

Dựng $AD\perp BE$, suy ra $BD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}b$. Ta có

$AE^2=ED^2+AD^2, AB^2=BD^2+AD^2$, do đó

$AB^2=BD^2+EA^2-DE^2$. (*)

Tam giác ABC đồng dạng với tam giác BCE (hai tam giác cân có góc ở đỉnh bằng $20°$ và góc đáy bằng $80°$) nên

$\frac{CE}{BC}=\frac{BC}{AB}$, và $BE=BC=a$ nên suy ra $CE=\frac{a^2}{b}$.

Thay vào (*) ta được:

$$b^2=\frac{b^2}{4}+\left(b-\frac{a^2}{b}\right)-\left(\frac{b}{2}-a\right)^2=\frac{b^2}{4}+b^2+\frac{a^4}{b^2}-2a^2-\frac{b^2}{4}-a^2+ab$$

$\Leftrightarrow b^4=b^4+a^4-3a^2b^2+ab^3\Leftrightarrow a^3+b^3=3ab^2$ (đpcm).

Ví dụ 11. Cho a,b,c và a',b',c' là các độ dài các cạnh tương ứng của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai tam giác này đồng dạng là: $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$.

- **Lời giải.**

Cả hai vế đẳng thức đã cho đều dương, do đó đẳng thức đã cho tương đương với bình phương hai vế: $aa'+bb'+cc'+2\sqrt{aa'bb'}+2\sqrt{aa'cc'}+2\sqrt{bb'cc'}=(a+b+c)(a'+b'+c')$.

Biến đổi, đẳng thức trên tương đương với: $\left(\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b}\right)^2+\left(\sqrt{ac'}-\sqrt{a'c}\right)^2+\left(\sqrt{bc'}-\sqrt{b'c}\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b}=0\\ \sqrt{ac'}-\sqrt{a'c}=0\\ \sqrt{bc'}-\sqrt{b'c}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab'=a'b\\ ac'=a'c\\ bc'=b'c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\\ \frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}\\ \frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Leftrightarrow\Delta ABC \text{ đồng dạng với } \Delta A'B'C'.$$

4. Tam giác đồng dạng và bài toán quỹ tích

Ví dụ 12. Cho tứ giác $ABCD$. Điểm M di động trên đường chéo BD. Qua M vẽ đường thẳng song song BC cắt AB ở E. Qua M vẽ đường thẳng song song CD cắt AD ở F. Vẽ hình bình hành $MEKF$. Tìm tập hợp các điểm K.

- ***Lời giải.***

a) Phần thuận: Vẽ $BP // CD(P \in AD)$, vẽ $CQ // BC(Q \in AB)$. P, Q cố định. ΔBDQ có $EM // QD$ nên theo Định lí Thales ta có: $\frac{QE}{QB} = \frac{DM}{DB}$.

ΔBPD có $MF // PB$ nên: $\frac{MF}{BP} = \frac{DM}{DB}$.

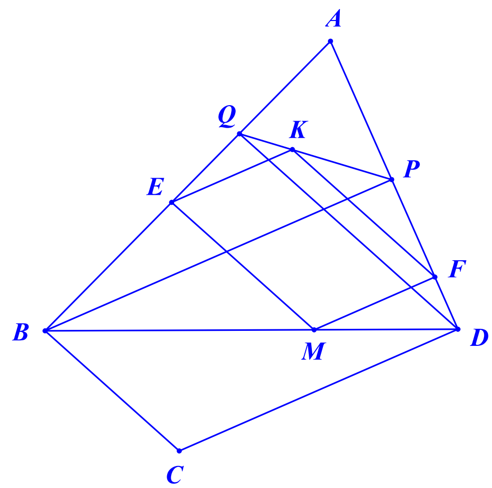
$MF = EK$ (tứ giác $MEKF$ là hình bình hành).

Do đó: $\frac{QE}{QB} = \frac{EK}{BP}$.

Xét ΔQEK và ΔQBP có $\widehat{QEK} = \widehat{QBP}(EK // BP)$,

$\frac{QE}{QB} = \frac{EK}{BP}$.

Vậy ΔQEK đồng dạng với ΔQPB, suy ra $\widehat{EQK} = \widehat{BQP}$, do đó P, K, Q thẳng hàng. Vậy K thuộc đường thẳng cố định PQ.



b) Giới hạn:

* Khi $M \equiv B$ thì $E \equiv B, F \equiv P$ ta có $K \equiv P$.

* Khi $M \equiv D$ thì $E \equiv Q, F \equiv D$ ta có $K \equiv Q$.

Vậy K di động trên đoạn thẳng PQ.

c) Phần đảo:

Lấy điểm K bất kì trên đoạn thẳng PQ.

Vẽ $KE // CD(E \in AB)$, $EM // BC(M \in BD)$, $MF // CD(F \in AD)$.

Ta sẽ chứng minh tứ giác $MEKF$ là hình bình hành.

Ta có $KE // CD$, $MF // CD$, suy ra $KE // MF$. (1)

ΔBDQ có $EM // QD$ nên theo Định lí Thales ta có: $\frac{QE}{QB} = \frac{DM}{DB}$ (2)

ΔBPD có $MF // BP$ (vì $MF // CD, BP // CD \Rightarrow MF // BP$) nên $\frac{DF}{DP} = \frac{DM}{DB}$. (3)

ΔQBP có $KE // BP$ (vì $KE // CD, BP // CD \Rightarrow KE // BP$), do đó $\frac{QK}{QP} = \frac{QE}{QB}$. (4)

Từ (2), (3) và (4) ta có $\frac{QK}{QP} = \frac{DF}{DP}$. Theo Định lí Thales đảo, $KF // QD$. Mà $EM // QD$ nên $KF // EM$. Kết hợp với (1), ta có $MEKF$ là hình bình hành.

Ví dụ 13. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Tìm trong tứ giác đó tập hợp các điểm O sao cho diện tích các tứ giác $OBCD$ và $OBAD$ bằng nhau.

- ***Lời giải.***

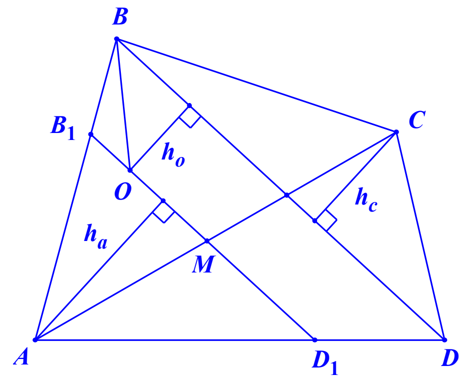
a) Phần thuận: Qua O kẻ các đường thẳng (d) song song với BD; (d) cắt AB, AD lần lượt tại B_1, D_1. Gọi h_a là khoảng cách từ A đến $B_1D_1; h_o$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song B_1D_1 và BD; h_c là khoảng cách từ C đến BD.

ΔABD có $B_1D_1 \,//\, BD$, suy ra: $\dfrac{B_1D_1}{BD} = \dfrac{h_a}{h_a + h_o}$.

$$\frac{S_{OBAD}}{S_{OBCD}} = 1 \Rightarrow \frac{B_1D_1\left(h_a + h_o\right)}{BD\left(h_c + h_o\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{h_a + h_o} \cdot \frac{h_a + h_o}{h_c + h_o} = 1 \Rightarrow h_a = h_c + h_o$$

Do đó, B_1D_1 đi qua trung điểm của AC. Vậy O thuộc đường thẳng d song song với BD và đi qua trung điểm M của AC.



b) Giới hạn: Điểm O nằm trong tứ giác $ABCD$ nên M chuyển động trên đoạn thẳng B_1D_1.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kì thuộc đường thẳng B_1D_1, Gọi h_a là khoảng cách từ A đến B_1D_1; h_c là khoảng cách từ C đến BD; h_o là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song BD và B_1D_1. M là trung điểm AC nên $h_a = h_o + h_c$.

Ta có: $\dfrac{B_1D_1}{BD} = \dfrac{h_a}{h_a + h_o}\left(B_1D_1 \,//\, BD\right)$, $\dfrac{S_{OBAD}}{S_{OBCD}} = \dfrac{B_1D_1\left(h_a + h_o\right)}{BD\left(h_c + h_o\right)} = \dfrac{h_a}{h_a + h_o} \cdot \dfrac{h_a + h_o}{h_c + h_o} = 1 \Rightarrow S_{OBAD} = S_{OBCD}$.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm O là đoạn thẳng B_1D_1 song song với BD và đi qua trung điểm của AC.

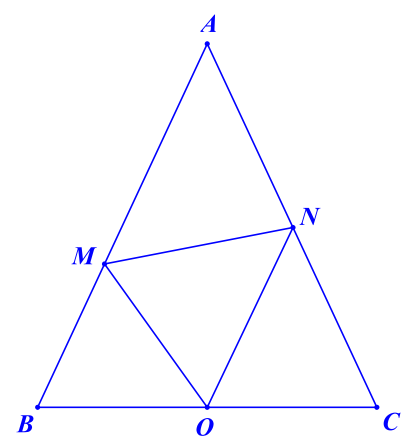
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho tam giác cân ABC đỉnh A, O là trung điểm BC. Hai điểm M, N chạy trên hai cạnh BA, CA thỏa mãn $BM.CN = OB^2 = OC^2$. Chứng minh ba tam giác MON, MBO, OCN đồng dạng.

- ***Lời giải.***

Từ giả thiết ta có: $\dfrac{BM}{OB} = \dfrac{OB}{CN} \Leftrightarrow \dfrac{BM}{OB} = \dfrac{OC}{CN}$ (do $OB = OC$). Kết hợp với hai góc đáy bằng nhau của tam giác cân, dễ dàng suy ra ΔMBO đồng dạng ΔOCN. Suy ra $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{ON}{NC} \Leftrightarrow \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OC}{NC}$.

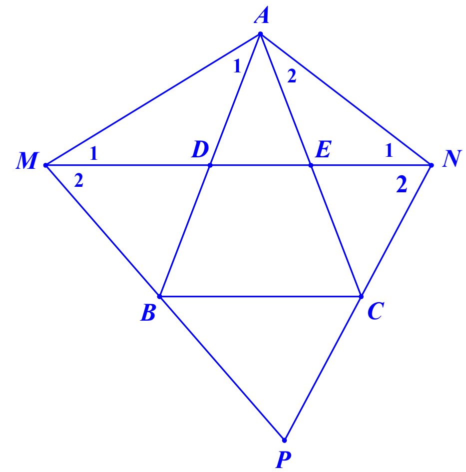
Mặt khác, dễ dàng chứng minh $\widehat{MON} = \widehat{C}$. Do đó ΔOCN đồng dạng với ΔMON, suy ra điều phải chứng minh.



Bài 2. Cho tam giác cân $ABC\left(AB = AC\right)$, có góc BAC bằng α. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia DE, lấy một điểm M tùy ý không trùng với D. Trên tia đối

của tia ED, lấy một điểm N sao cho góc MAN bằng $90° + \dfrac{1}{2}\alpha$. Hai đường thẳng MB và NC cắt nhau tại P. Tính góc BPC.

- **Lời giải.**



Mặt khác, trong tam giác AMD ta có
$\widehat{A_1}+\widehat{M_1}=\widehat{D_1}=\dfrac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}.$

Từ (1) và (2) suy ra
$\widehat{M_1}=\widehat{A_2}.$ (3)

Vì tam giác ABC cân và DE là đường trung bình nên
$\widehat{MDA}=\widehat{AEN}.$

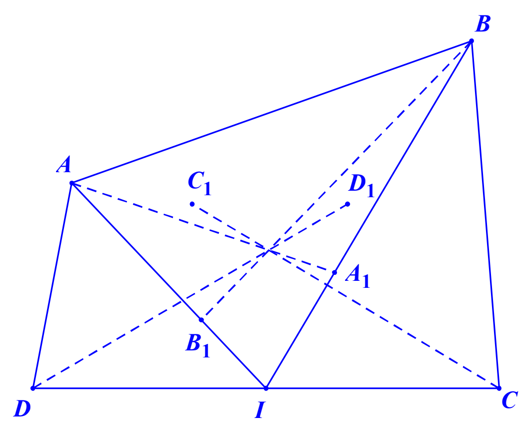
Kết hợp điều này với (3), hai tam giác MDA và AEN đồng dạng, từ đó $\dfrac{MD}{DA}=\dfrac{AE}{EN}\Rightarrow\dfrac{MD}{DB}=\dfrac{EC}{EN},$
suy ra hai tam giác MDB và CEN đồng dạng (có hai góc D và E bằng nhau xen giữa hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ).

Từ đó: $\widehat{N_2}=\widehat{MBD}$, suy ra $\widehat{M_2}+\widehat{N_2}=\widehat{BMD}+\widehat{MBD}=180^\circ-\widehat{D}_1$.

Mặt khác, trong tam giác MNP ta lại có
$\widehat{M_2}+\widehat{N_2}=180^\circ-\widehat{MPN}.$ Vì vậy, $\widehat{BPC}=\widehat{MPN}=\widehat{D_1}=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}.$

Bài 3. Chứng minh rằng trong một tứ giác bất kì, các đoạn thẳng nối đỉnh tứ giác với trọng tâm tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại đồng quy.

- **Lời giải.**



Gọi A_1,B_1,C_1,D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ACB. Các đường thẳng BA_1, AB_1 cùng đi qua trung điểm I của CD và ta có

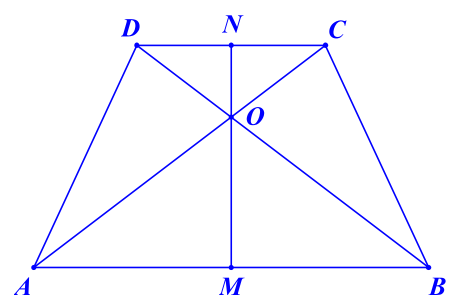
$$\frac{IB_1}{IA}=\frac{IA_1}{IB}=\frac{1}{3}\Rightarrow A_1B_1//AB,$$

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{1}{3}.$$

Vậy BB_1 cắt AA_1 tại O, điểm chia AA_1 theo tỉ lệ $3:1$.
Tương tự, CC_1 và DD_1 cũng cắt AA_1 tại điểm chia AA_1 theo tỉ lệ $3:1$, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4. Đường cao của một hình thang cân bằng h và diện tích bằng h^2. Hỏi góc tạo bởi hai đường chéo của nó bằng bao nhiêu?

- **Lời giải.**



Theo đề bài: $MN=h$. Theo tính chất hình thang cân; hai đường chéo bằng nhau, cắt nhau tạo thành hai tam giác cân AOB và COD. Qua O kẻ MN vuông góc với hai đáy,theo tính chất hình bình hành thì MN là trục đối xứng của hình thang cân nên M, N là trung điểm của AB và CD.

Ta có: $S=\dfrac{1}{2}(AB+CD)MN$. Thay $S=h^2$ và $MN=h$, ta có

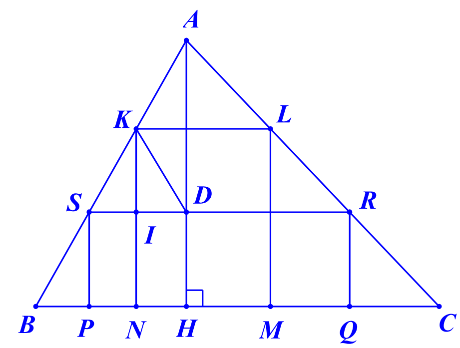
$$h^2=\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{CD})\text{h}\Leftrightarrow\text{h}=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD\Leftrightarrow h=AM+ND.$$

Từ đó, kết hợp với hai tam giác OMA và OND đồng dạng, cho ta: $\dfrac{OM}{AM}=\dfrac{ON}{DN}=\dfrac{OM+ON}{AM+DN}=1.$

Suy ra $AM = MO$ và $DN = NO$, nghĩa là các tam giác MAO và DON là các tam giác vuông cân. Từ đó ta có các đường chéo vuông góc với nhau.

Bài 5. Một hình chữ nhật được gọi là nối tiếp một tam giác khi hình chữ nhật có một cạnh trùng với một cạnh của tam giác, hai đỉnh còn lại của hình chữ nhật thuộc hai cạnh kia của tam giác. Tìm điều kiện của tam giác để hai hình chữ nhật nội tiếp tam giác có chu vi bằng nhau.

- ***Lời giải.***

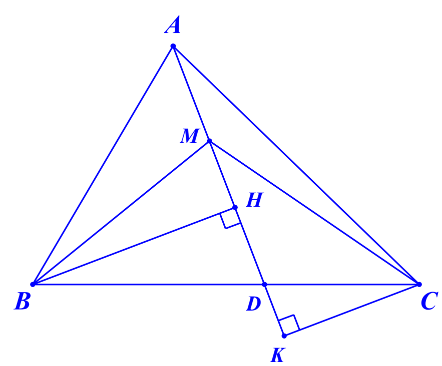


Trước hết, ta dựng hình chữ nhật PQRS nội tiếp ΔABC.RS cắt đường cao AH tại D.
Qua D kẻ $DK//AC$. Qua K kẻ $KL//BC$ và ta dựng được hình chữ nhật KLMN như hình vẽ. Q
Ta sẽ tìm điều kiện để hai hình chữ nhật này có chu vi bằng nhau.
Giả sử hai hình chữ nhật này có chu vi bằng nhau, ta phải có $SP + RS = KN + KL$ (1)

Nhưng KLRD là hình bình hành (theo cách dựng) nên $KL = DR = RS - SD$.
Ta có $KN = KI + IN$ và $SP = IN$. Thay chúng vào (1), ta có $IN + RS = KI + IN + RS - SD$, hay $KI = SD$. Mặt khác, dễ thấy $\Delta SKD \sim \Delta BAC(g-g)$ cho tỉ lệ:
$\dfrac{BC}{SD} = \dfrac{AH}{KI}$, nên phải có $BC = AH$. Đó chính là điều kiện cần tìm.
(Đảo lại, nếu $BC = AH$, đi ngược lại lí luận trên, ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng hai hình chữ nhật nội tiếp nói trên có chu vi bằng nhau).
Tóm lại, để hai hình chữ nhật nội tiếp tam giác có chu vi bằng nhau, ta phải có một đường cao bằng cạnh đáy tương ứng.

Bài 6. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\dfrac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = a$ ($a > 0$, a cho trước)

- ***Lời giải.***



- ***Phần thuận:*** Gọi D là giao điểm AM và BC.
  Vẽ $BH \perp AM$, $CK \perp AM (H, K \in AM)$, ta có
  $BH//CK \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BH}{CK}$.
  Mặt khác $\dfrac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = \dfrac{BH}{CK}$, mà $\dfrac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = a$, do đó:
  $\dfrac{DB}{DC} = a \Rightarrow \dfrac{DB}{DB + DC} = \dfrac{a}{a+1}$,
  hay $\dfrac{DB}{BC} = \dfrac{a}{a+1} \Rightarrow DB = \dfrac{a}{a+1}BC$, suy ra D cố định. Vậy M thuộc đường thẳng cố định AD.

- ***Giới hạn:*** $\dfrac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = a \quad (a \neq 0)$ nên suy ra M không nằm trên các đường thẳng AB, AC, do đó M không trùng A. Vậy M chuyển động trên đường thẳng cố định AD (trừ điểm A).

- ***Phần đảo:*** Lấy điểm M bất kì thuộc đường thẳng AD (trừ A).

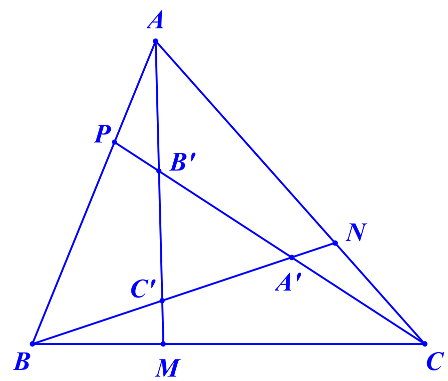
  Vẽ $BH \perp AB$, $CK \perp AD$, với $H, K \in AD$, ta có: $BH//CK \Rightarrow \dfrac{BH}{CK} = \dfrac{DB}{DC} = a.$

Do đó $\dfrac{S_{MAB}}{S_{MAC}}=\dfrac{BH}{CK}=a.$

- Kết luận: Tập hợp các điểm M là đường thẳng AD (trừ điểm A) (với $DB=\dfrac{a}{a+1}BC, D\in BC$).

Bài 7. Cho tam giác ABC. Các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BC,CA,AB sao cho $BM=\dfrac{1}{3}BC, CN=\dfrac{1}{3}CA, AP=\dfrac{1}{3}AB$.Gọi A',B',C' là các giao điểm của BN và CP, CP và AM, AM và BN tương ứng. Tính tỉ số diện tích của các tam giác $A'B'C'$ và ABC.

- **Lời giải.**



Qua A, kẻ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt CP ở D.

Khi đó $\dfrac{AB'}{B'M}=\dfrac{AD}{MC}=\dfrac{3AD}{2BC}=\dfrac{3}{2}.\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{3}{4}$, suy ra $\dfrac{AB'}{AM}=\dfrac{3}{4}$. (1)

Qua N, kẻ đường thẳng song song BC, cắt AM tại Q, ta có $\dfrac{MC'}{C'Q}=\dfrac{BM}{QN}=\dfrac{3BC}{3.2MC}=\dfrac{3}{4}$, do đó $\dfrac{MC'}{MQ}=\dfrac{3}{4}$,

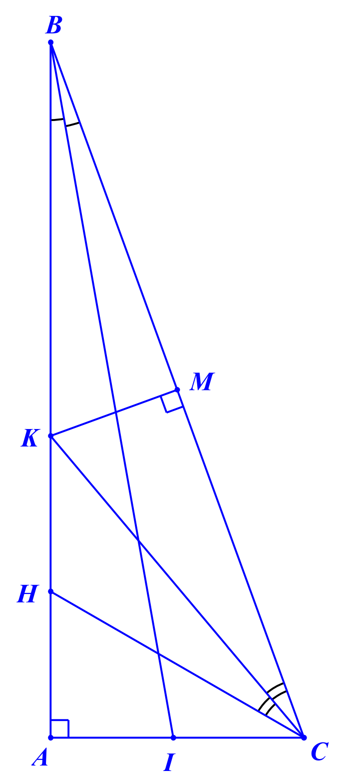
suy ra $\dfrac{MC'}{AM}=\dfrac{1}{7}$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $\dfrac{B'C'}{AM}=\dfrac{3}{7}$, do đó $AB'=B'C'$. Tương tự, ta có $CA'=A'B'$.

Từ đó suy ra $S_{A'B'C'}=\dfrac{3}{4}S_{A'B'M}=\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}s_{CB'M}=\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{7}S_{CAM}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông ở A, có góc $B=20°$; vẽ phân giác trong BI, vẽ góc $ACH=30°$ về phía trong tam giác $(H\in AB)$. Tính góc CHI.

- **Lời giải.**



Vẽ phân giác CK của góc HCB.ta có: $\dfrac{AH}{HK}=\dfrac{1}{2}\dfrac{BC}{BK}$.

Vẽ KM vuông góc với BC tại M, vì tam giác KCB cân tại K nên $BC=2BM$. Do ΔBMK đồng dạng ΔBAC (hai tam giác vuông có góc nhọn chung) nên suy ra $\dfrac{AH}{HK}=\dfrac{BM}{BK}=\dfrac{AB}{BC}$. (1)

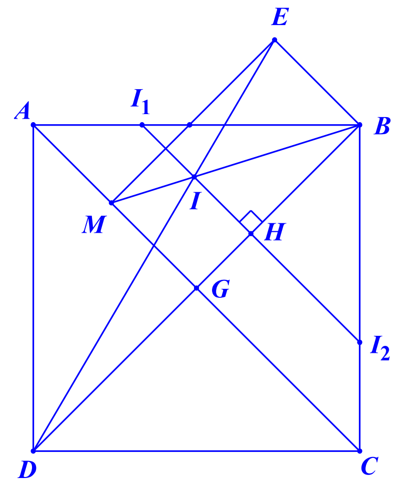
Lại do BI là phân giác của góc ABC nên $\dfrac{IA}{IC}=\dfrac{AB}{BC}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{AH}{HK}=\dfrac{AI}{IC}\Rightarrow CK//IH\Rightarrow \widehat{CHI}=\widehat{HCK}=20^0$

Vậy $\widehat{CHI}=20^0$

Bài 9. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, điểm M di động trên đường chéo AC. Vẽ hình chữ nhật $MOBE$. DE cắt MB tại I. Chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

- **Lời giải.**



Vẽ $IH \perp BD\left(K \in BD\right)$. Ta có $ME = OB$, $OB = \frac{1}{2}BD$,

suy ra $\frac{BD}{ME} = 2.$

Xét ΔIBD có $ME // BD$ nên

$\frac{BI}{IM} = \frac{BD}{ME} \Rightarrow \frac{BI}{IM} = 2 \Rightarrow \frac{BI}{BI + IM} = \frac{2}{2+1}$, hay $\frac{BI}{BM} = \frac{2}{3}.$

ΔOBM có $IH // OM$ (vì $IH \perp BD, OM \perp BD$ suy ra $IH // OM$)

nên $\frac{BH}{OB} = \frac{BI}{BM} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}OB.$

Mà $\frac{2}{3}OB$ không đổi, đường thẳng AC cố định. Vậy I thuộc

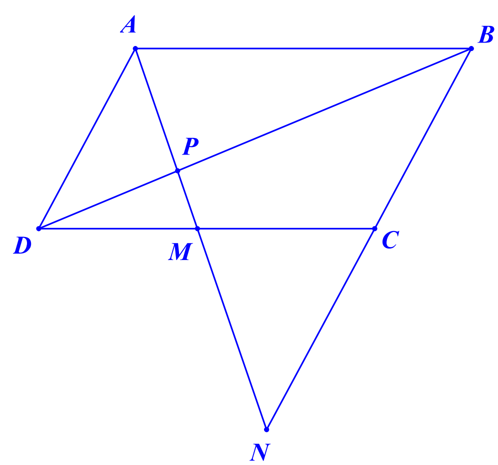
đường thẳng song song với AC và cách AC một khoảng bằng $\frac{2}{3}OB$

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A vẽ một đường thẳng sao cho đường thẳng này cắt đường chéo BD ở P và cắt DC, BC lần lượt ở M, N.

a) Chứng minh: $\frac{AP}{AM} + \frac{AP}{AN} = 1$ (*)

b) Có hay không hệ thức (*) khi đường thẳng vẽ qua A cắt các tia CD, CB, DB lần lượt ở M, N, P ? Vì sao?

- **Lời giải.**



a) Vì $DB // AB$ nên $\frac{AP}{AM} = \frac{BP}{BD}.$

Từ $AD // BN$, suy ra $\frac{AP}{AN} = \frac{DP}{BD}.$

Cộng từ vế của (1) và (2) ta có:

$\frac{AP}{AM} + \frac{AP}{AN} = \frac{BP + DP}{BD} = 1.$

b) *Trường hợp thứ nhất:* Điểm B nằm giữa D và P.

Ta có: $\widehat{DBA} < \widehat{CBA}$ nên $\widehat{ABP} > \widehat{ABN}$, suy ra N nằm giữa A và P.

Khi đó $AP > AN$ nên $\frac{AP}{AN} > 1 \Rightarrow \frac{AP}{AN} + \frac{AP}{AM} > 1.$

Trường hợp thứ hai: Điểm D nằm giữa B và P.

Tương tự ta có: $AP > AM$ suy ra $\frac{AP}{AM} + \frac{AP}{AN} > 1$.

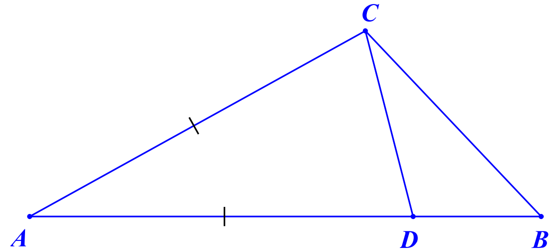
Tóm lại, không có hệ thức (*) khi đường thẳng vẽ qua A cắt tia CD, CB, DB ở M, N,

Bài 11.

1) Cho tam giác ABC có. $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180°$. Chứng minh rằng: $BC^2 = AB\left(AB - AC\right)$.

2) Biết rằng số đo độ dài các cạnh của tam giác là ba số tự nhiên liên tiếp, hãy tìm độ dài các cạnh của tam giác.

- ***Lời giải.***



1) Theo giả thiết, $3\widehat{A}+2\widehat{B}=180^\circ$ mà $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$, nên $3\widehat{A}+2\widehat{B}=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}$, do đó $\widehat{C}=2\widehat{A}+\widehat{B}$, suy ra $C>A$, $C>B$, vì thế, trong tam giác ABC ta có $AB>AC, AB>BC$.

Trên cạnh AB ta lấy điểm D sao cho $AD=AC$.

Tam giác ACD cân tại đỉnh A nên $\widehat{ADC}=\widehat{ACD}=\dfrac{180^\circ-\widehat{A}}{2}$. Ta có:

$$\widehat{CDB}=180^\circ-\widehat{ADC}=180^\circ-\frac{180-\widehat{A}}{2}=180^\circ-\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=180^\circ-\frac{\widehat{B}+2\widehat{A}+\widehat{B}}{2}=180^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=\widehat{ACB}.$$

Vậy ΔABC đồng dạng với ΔCBD $(g-g)$, nên $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{DB}{CB}$, suy ra $CB^2=AB.DB$, nhưng

$BD=AB-AD=AB-AC$, do đó: $BC^2=AB\left(AB-AC\right)$. (1)

2) Vì số đo độ dài các cạnh của tam giác ABC là ba số tự nhiên liên tiếp, nên dĩ nhiên chúng là ba số nguyên dương liên tiếp. Hơn nữa, do góc C lớn nhất nên AB là cạnh có độ dài lớn nhất trong tam giác, suy ra rằng $AB-BC=1$ hoặc $AB-BC=2$.

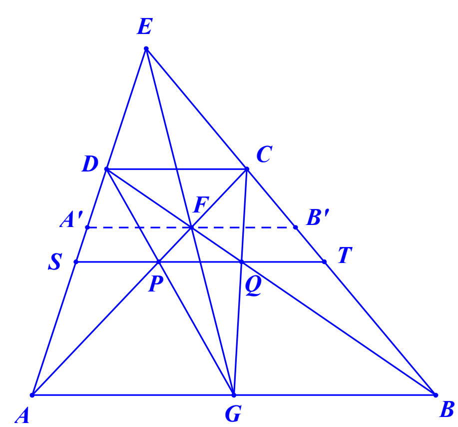
- Nếu $AB=BC=1$ thì $AB=BC+1$, còn $AC=BC-1$, từ đó (1) cho ta:
  $BC^2=2BC+2 \Leftrightarrow BC\left(BC-2\right)=2,$ dễ thấy phương trình này không có nghiệm nguyên.
- Nếu $AB-BC=2$ thì $AB=BC+2$, còn $AC=BC+1$, từ đó, thay vào (1) ta được:
  $BC^2=BC+2 \Leftrightarrow BC^2-BC-2=0 \Leftrightarrow \left(BC+1\right)\left(BC-2\right)=0,$

Nhưng $BC+1>0$ nên ta suy ra $BC-2=0$, tức là $BC=2$.

Vậy độ dài các cạnh của tam giác ABC là $BC=2, AC=3, AB=4$.

Bài 12. Cho hình thang có hai cạnh bên không song song nhau. Hãy dựng hai đường thẳng song song hai đáy sao cho đoạn thẳng nằm giữa hai cạnh bên của mỗi đường thẳng này được chia làm ba phần bằng nhau bởi hai đường chéo của hình thang (*không cần chứng minh rằng chỉ có hai đường thẳng dựng được thỏa mãn tính chất đó).*

- ***Lời giải.***



Xét hình thang ABCD có đáy lớn AB, đáy nhỏ CD. Gọi E là giao điểm AD và BC ; F là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Qua F, vẽ đường song song hai đáy, cắt hai cạnh bên AD, BC lần lượt tại A' và B'. Ta có $S\left(AFD\right)=S\left(ABD\right)-S\left(AFB\right)$

$=S\left(ABC\right)-S\left(AFB\right)=S\left(BFC\right).$

Từ đó, kí hiệu m là đường cao hình thang ABCD ta có : $S\left(AFD\right)=\dfrac{1}{2}m.A'F, S\left(BFC\right)=\dfrac{1}{2}m.FB',$

suy ra $A'F=FB'$. Tiếp theo, giả sử G là giao điểm EF và AB, từ Định lí Thales, suy ra G là trung điểm AB.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của DG và CG với các đường chéo AC và BD.

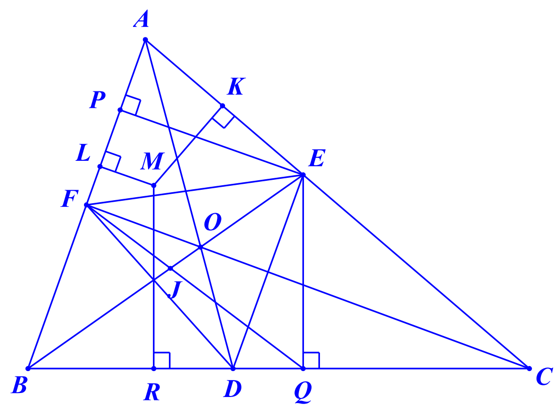
Ta có $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{AG}{DC}=\dfrac{GB}{DC}=\dfrac{BQ}{QD}$

Do đó, nếu gọi S,T lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với AD, BC, thì Định lí Thales cho ta $\dfrac{SP}{PQ}=\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{PQ}{QT}=1$ hay $SP=PQ=QT$.

Từ phân tích trên, các bạn dễ dàng suy ra cách dựng ST, đường thẳng này thỏa mãn tính chất đề bài.

Bài 13. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. Gọi MI, MK, ML lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng nếu MI, MK, ML là ba cạnh của một tam giác thì nằm trong tam giác DEF.

- **Lời giải.**



Giả sử AD, BE, CF là ba đường phân giác của tam giác ABC.

Ta khẳng định rằng nếu $M\in EF$ thì có $MI=MK+ML$.

Thật vậy, vẽ $EP\perp AB, EQ\perp BC$. Ta có $EP=EQ.FQ$ cắt BE tại J. ΔEFQ có $MJ//EQ$ $(MJ\perp BC, EQ\perp BC)$ suy ra $\dfrac{MJ}{EQ}=\dfrac{MF}{EF}$.

Tương tự: $\dfrac{ML}{EP}=\dfrac{MF}{EF}$. Do đó $MJ=ML$.

Lập luận tương tự, ta cũng có $MK=JI$. Vậy $MI=MJ+JI=MK+ML$.

Từ khẳng định trên, ta suy ra:

Nếu $MI<MK+ML$ thì M nằm trong tứ giác BFEC.

Tương tự: Nếu $MK<MI+ML$ thì M nằm trong tứ giác ACDF.

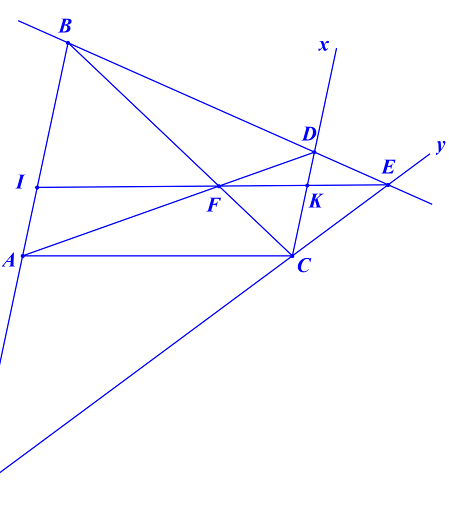
Nếu $ML<MI+MK$ thì M nằm trong tứ giác AEDB.

Do đó nếu MI, MK, ML là ba cạnh của một tam giác thì $\begin{cases}MI<MK+ML\\MK<MI+ML\\ML<MI+MK\end{cases}$

Vậy M nằm trong tam giác DEF.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Gọi Cx, Cy là các tia trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B sao cho tia Cx nằm giữa hai tia CB, Cy và $Cx\,//\,AB$. Một đường thẳng bất kì qua B cắt Cx, Cy tại D, E. Gọi F là giao điểm AD với BC. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

- **Lời giải.**



Gọi I, K lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF và AB, Cx. Hai tam giác IFA và KFD đồng dạng, FKC và FIB đồng dạng, từ đó

$\dfrac{KD}{IA}=\dfrac{FK}{FI}=\dfrac{KC}{IB}\Rightarrow\dfrac{KD}{KC}=\dfrac{IA}{IB}.\quad(1)$

Gọi J là giao điểm của đường thẳng CE và đường thẳng AB. Hiển nhiên A nằm giữa B và J và J là điểm cố định. Định lí Thales cho ta:

$\dfrac{KC}{IJ}=\dfrac{EK}{IE}=\dfrac{KD}{IB}\Rightarrow\dfrac{KD}{KC}=\dfrac{IB}{IJ}.\quad(2)$

Từ (1) và (2) ta được $IB^2=IA.IJ$, do đó

$(JB-JI)^2=(JI-JA).JI$

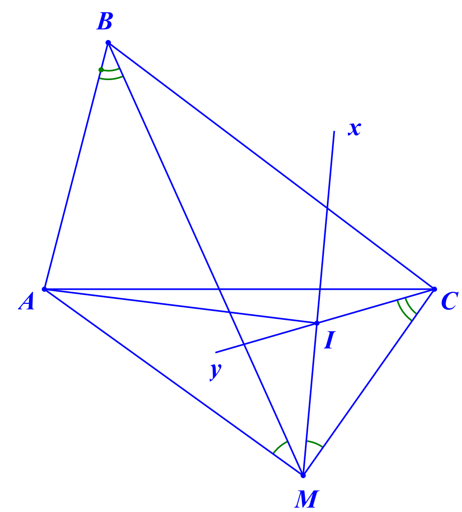
$\Rightarrow JB^2 - 2JB.JI + JI^2 = JI^2 - JA.JI \;\Rightarrow JB(JB - JI) = JI(JB - JA) \Rightarrow JB.IB = JI.BA$

$\Rightarrow \dfrac{BA}{BJ} = \dfrac{IB}{IJ} \Rightarrow \dfrac{BA}{BJ} = \dfrac{IA}{IB}$ (để ý (1) và (2)).

Vậy điểm I cố định, do A, B, J cố định.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Xét điểm M sao cho tứ giác $ABMC$ có $AM.BC = AB.CM + AC.BM$. Chứng minh $\widehat{BAM} = \widehat{BCM}$.

- **Lời giải.**



Vẽ tia Mx trong góc $\widehat{BMC}$ sao cho $\widehat{CMx} = \widehat{AMB}$,vẽ Cy sao cho $\widehat{MCy} = \widehat{BAM}$,Mx cắt Cy tại I.

Xét $\Delta BAM = \Delta ICM$ có $\widehat{BAM} = \widehat{ICM}, \widehat{BMA} = \widehat{IMC}$. Do đó ΔBAM đồng dạng ΔICM,

suy ra $\dfrac{AB}{IC} = \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{BM}{MI} \Rightarrow AB.CM = AM.IC.$

Xét ΔBMI và ΔAMC, ta có:

$\widehat{BMI} = \widehat{AMC}\left(\widehat{BMA} = \widehat{IMC}\right);\; \dfrac{BM}{MI} = \dfrac{AM}{CM}.$

Do đó ΔBMI đồng dạng ΔAMC suy ra

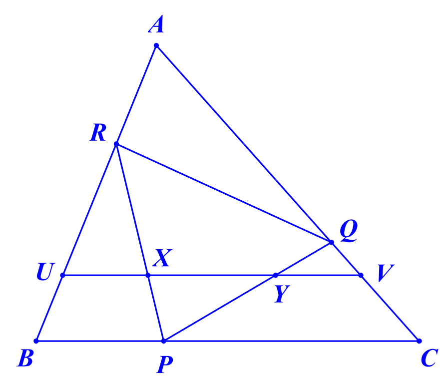
$\dfrac{BI}{AC} = \dfrac{BM}{AM} \Rightarrow AC.BM = AM.BI.$

Ta có $AB.CM + AC.BM = AM.IC + AM.BI$, suy ra $AM.BC = AM(IC + BI)$ hay $BC = IC + BI$,

suy ra B, I, C thẳng hàng. Do đó $\widehat{BAM} = \widehat{BCM}$

Bài 16. Cho 3 điểm P, Q, R lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB tương ứng của tam giác ABC sao cho $\dfrac{PB}{BC} = \dfrac{CQ}{AC} = \dfrac{RA}{AB} = \dfrac{1}{3}$.Các điểm X, Y tương ứng nằm trên RP và PQ sao cho $\dfrac{PX}{PR} = \dfrac{QY}{QP} = \dfrac{1}{3}$. Chứng minh rằng $XY \,//\, BC$.

- **Lời giải.**



Gọi U, V tương ứng là các điểm nằm trên AB và AC sao cho $BU = \dfrac{2}{9}BA, CV = \dfrac{2}{9}CA.$

Như thế, ta có $UV // BC$. Để chứng minh $XY // BC$, ta sẽ chứng minh X,Y nằm trên UV.

Ta có $\dfrac{BU}{BR} = \dfrac{BU}{BA}.\dfrac{BA}{BR} = \dfrac{2}{9}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{PX}{PR}$, do đó $UX // BP.$

Tương tự: $\dfrac{CV}{CQ} = \dfrac{CV}{CA}.\dfrac{CA}{CQ} = \dfrac{2}{9}.3 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{PY}{PQ}$, suy ra $YV // PC.$

Vậy X, Y nằm trên UV, ta có điều phải chứng minh.

Bài 17. Trong tam giác ABC, các điểm U và V chia cạnh BC thành 3 phần bằng nhau; W và X chia cạnh AC thành 3 phần bằng nhau; Y và Z chia cạnh AB thành 3 phần bằng nhau. AU và BX cắt nhau tại R, BW và CZ cắt nhau tại P, AV và CY cắt nhau tại Q.

Chứng minh rằng các cạnh của tam giác PQR song song với các cạnh của tam giác ABC.

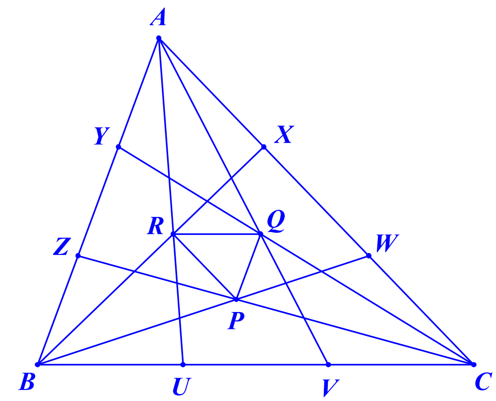
- **Lời giải.**

Dễ dàng chứng minh: $\frac{ZW}{BC}=\frac{AZ}{AB}=\frac{AW}{AC}=\frac{2}{3}$,

Suy ra $\frac{ZW}{BC}=\frac{ZP}{PC}=\frac{PW}{PC}=\frac{2}{3}$.

Tương tự như vậy ta được $\frac{XR}{RB}=\frac{2}{3}$, $\frac{QY}{QC}=\frac{2}{3}$.

Từ đó, sử dụng Định lí Thales đảo để đi đến điều phải chứng minh.



Bài 18. Cho hình vuông $ABCD$, I là điểm di động nằm trên cạnh AB. Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt AE tại M. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BM tại S. Chứng minh ta luôn có $\widehat{DSB}=90°$.

- **Lời giải.**

Trên tia đối của tia AB lấy N sao cho $AN=BE$. AE cắt NC, DN lần lượt tại K, L. DE cắt NC tại H.

Xét ΔBEA và ΔAND, ta có: $BE=AN$, $\widehat{ABE}=\widehat{DAN}\ (=90^0)$ và $AB=AD$.

Do đó $\Delta BEA=\Delta AND$ (c.g.c), suy ra $\widehat{BAE}=\widehat{ADN}$.

Ta có: $\widehat{BAE}=\widehat{LAN}=180^0-90^0=90^0$

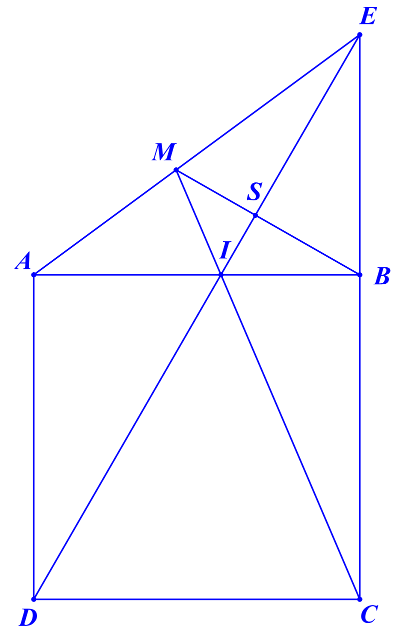
$\Rightarrow \widehat{ADL}+\widehat{LAD}=90^0 \Rightarrow \widehat{ALD}=90^0 \Rightarrow AL\perp DN$

Tương tự: $\Delta BCN=\Delta CDE$ nên $CN\perp DE$.

ΔEDN có EL và NH là hai đường cao, suy ra K là trực tâm ΔEDN. Do đó $DK\perp NE$. ΔCEN có NB và EH là hai đường cao, suy ra I là trực tâm ΔCEN, do đó $CI\perp NE$.

Hơn nữa: $DK\perp NE, CI\perp NE \Rightarrow DK//CI$;

ΔEKD có $IM//DK \Rightarrow \frac{EI}{ED}=\frac{EM}{EK}$;



ΔEDC có $IB//DC \Rightarrow \frac{EI}{ED}=\frac{EB}{EC}$; ΔEKC có $\frac{EM}{EK}=\frac{EB}{EC}\left(=\frac{EI}{ED}\right) \Rightarrow BM//CK$;

$BM//CK, DE\perp CK \Rightarrow BM\perp DE$. Vậy $\widehat{DSB}=90°$.

Bài 19. Trên hình vẽ bên, hình vuông $PQRS$ nội tiếp trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $AB\ge 3QR$. Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

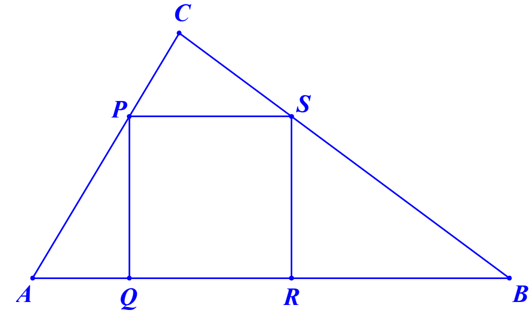
- **Lời giải.**

Cách 1. Vì $\hat{A}=\widehat{CPS}=\widehat{RSB}, \hat{B}=\widehat{CSP}=\widehat{QPA}$ và $\widehat{AQP}=\hat{C}=\widehat{SRB}=90°$ nên 2 tam giác ABC, SRB đồng dạng nhau.

Cho $AQ=1$ và $x=PQ=PS=QR=RS$, ta có:

$\frac{AQ}{RS}=\frac{PQ}{BR}\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{x}{BR}\Rightarrow BR=x^2$

$AB=BR+QR+AQ=x^2+x+1$.



Bất đẳng thức $AB \ge 3QR$ đúng vì nó tương đương với $x^2+x+1\ge 3x \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $QR = AQ = 1$, khi đó, tam giác ABC vuông cân.

Cách 2. Từ các tỉ lệ đồng dạng ta có: $\frac{AQ}{QR}=\frac{AQ}{PQ}=\frac{AC}{BC}, \frac{RB}{QR}=\frac{RB}{RS}=\frac{BC}{AC}$.

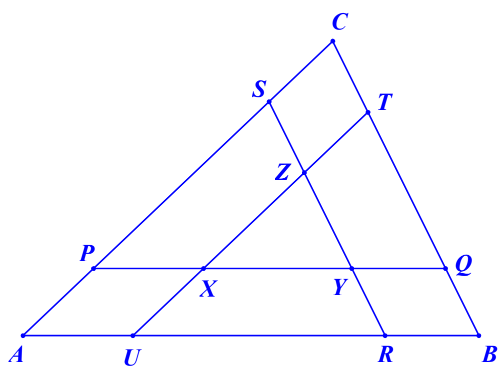
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\left(a+b\ge 2\sqrt{ab}\right)$ ta được:

$$AB = QR + AQ + RB = QR\left(1+\frac{AC}{BC}+\frac{BC}{AC}\right)\ge QR\left(1+2\sqrt{\frac{AC}{BC}.\frac{BC}{AC}}\right)=3QR,$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{AC}\Leftrightarrow AC = BC$. Khi đó , tam giác ABC vuông cân.

Bài 20. Trong tam giác ABC, như hình bên, các đoạn PQ, RS, TU tương ứng song song với các cạnh AB, BC, CA ; chúng giao nhau tại X, Y, Z. Hãy xác định diện tích tam giác ABC nếu mỗi một trong các cạnh PQ, RS và TU chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau và nếu diện tích tam giác XYZ bằng 1. Hãy viết đáp số của bạn dưới dạng $a+b\sqrt{2}$, với a, b là các số nguyên dương.

- **Lời giải.**



Đặt $AB = x$. Vì PQ chia tam giác ABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau nên $\left(\frac{PQ}{AB}\right)^2=\frac{1}{2}$,

suy ra $PQ=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Vì các tam giác PCQ, UTB và ASR đồng dạng nhau, hơn nữa, lại có cùng diện tích, nên chúng bằng nhau.

Từ đó: $PX = YQ = \frac{2x-x\sqrt{2}}{2}$,

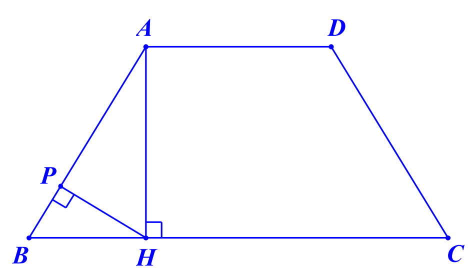
$$XY=\frac{x\sqrt{2}}{2}-\frac{4x-2x\sqrt{2}}{2}=\frac{3x\sqrt{2}-4x}{2}.$$

Hai tam giác XYZ và ABC đồng dạng nên: $\frac{dt(XYZ)}{dt(ABC)}=\left(\frac{XY}{AB}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)^2=\frac{17-12\sqrt{2}}{2}$.

Mà $dt(XYZ)=1$ nên ta có: $dt(ABC)=\frac{2}{17-12\sqrt{2}}=34+24\sqrt{2}$.

Bài 21. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn BC. Giả sử đường cao AH thỏa mãn $AH^2 = AD.BC$. Gọi P là hình chiếu của H lên AB. Chứng minh rằng: $AB = CD = \frac{1}{2}(AD+BC)$, $AP=\frac{2AD.BC}{BC+AD}$

- **Lời giải.**



Từ Định lí Pythagore ta có $AB^2 = BH^2 + CH^2$, (1)

và do ABCD là hình thang cân nên $2BH = BC - AD$. (2)

Giả thiết cho ta: $AH^2 = AD.BC$.

Từ (2) ta được: $BH^2=\frac{(BC-AD)^2}{4}$.

Thay (4) và (3) vào (1), biến đổi và cuối cùng ta có:

$AB^2 = \dfrac{(BC+AD)^2}{4} \Leftrightarrow AB = \dfrac{BC+AD}{2}$.

Từ các tam giác đồng dạng ta có: $\dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH^2 = AP.AB$. (5)

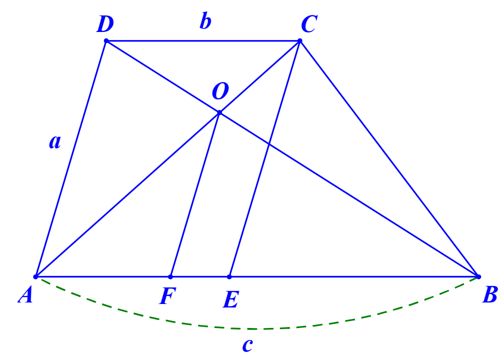
Kết hợp (3) và (5) ta suy ra: $AP = \dfrac{2AD.BC}{BC+AD}$.

Bài 22. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \,//\, CD$ và $AD = a$; $DC = b$; A và B là hai điểm cố định. AC cắt BD tại O. C và D di động .

a) Chứng minh rằng O cách một điểm cố định một đoạn không đổi.

b) Chứng minh rằng O cách một điểm cố định một đoạn không đổi.

- **Lời giải.**



a) Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AE = b \Rightarrow E$ cố định, Tứ giác AECD có $AE//DC, AE = DC(=b)$ nên là hình bình hành, từ đó, $EC = AD = a$, Do đó C thuộc đường tròn tâm E bán kính a.

b) Vẽ $OF//CE$ (F thuộc AB) vì $AD//EC$ nên $OF//AD$.

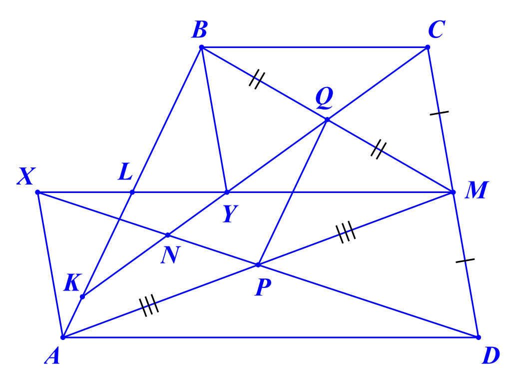
Đặt $AB = c$, ΔOAB có $AB//CD$, suy ra

$\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{DC} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \dfrac{OA}{OA+OC} = \dfrac{c}{c+b} \Rightarrow \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{c}{b+c}$.

ΔACE có $OF//CE$ nên $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{OA}{AE} = \dfrac{OF}{CE} \Rightarrow AF = \dfrac{bc}{b+c}, OF = \dfrac{ac}{b+c} \Rightarrow F$ cố định.

Bài 23. Tứ giác lồi $ABCD$ có $BC \,//\, AD$. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh CD, MA và MB. Các đường thẳng DP và CQ gặp nhau tại N. Chứng minh rằng N không nằm ngoài tam giác ABM.

- **Lời giải.**



Gọi L là trung điểm AB. Nếu $AD = BC$, ta có N trùng L, tức N nằm trên cạnh của tam giác ABM. Do đó, có thể giả sử $AD > BC$. Gọi X, Y tương ứng là đỉnh thứ tư của 2 hình bình hành MDAX và MCBY. Khi đó, Y nằm giữa L và M, và L nằm giữa X và M. Chú ý rằng N nằm trên các đường thẳng DX và CY, hai đường này tương ứng cắt AB tại H và K.

Hai tam giác HAD và HLX đồng dạng nên ta có: $HL : HX = HA : HD$.

Tương tự, $KL : LY = KB : BC$, từ đó suy ra: $\dfrac{HL}{LX} = \dfrac{HA}{AD} < \dfrac{LA}{AD} < \dfrac{KB}{AD} < \dfrac{KB}{BC} = \dfrac{KL}{LY}$, do đó $HL < HK$.

Điều này chứng tỏ N không nằm ngòai tam giác ABM.

Bài 24. Cho ABC là tam giác nhọn. Đường phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt AB tại điểm L. Gọi M, N tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ L xuống AC và BC. Giả sử P là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng $CP \perp AB$.

- **Lời giải.**

Gọi (d) là đường thẳng qua C song song với AB. Cho F và E lần lượt là các giao điểm của AN và BM với (d). Kí hiệu D là giao điểm của CP và AB.

Ta có $\frac{AD}{CF}=\frac{PD}{PC}=\frac{BD}{CE}$, suy ra $\frac{AD}{BD}=\frac{CF}{CE}$.

Mặt khác, $\frac{AM}{CM}=\frac{AB}{CE} \Leftrightarrow CM=\frac{AM.CE}{AB}$

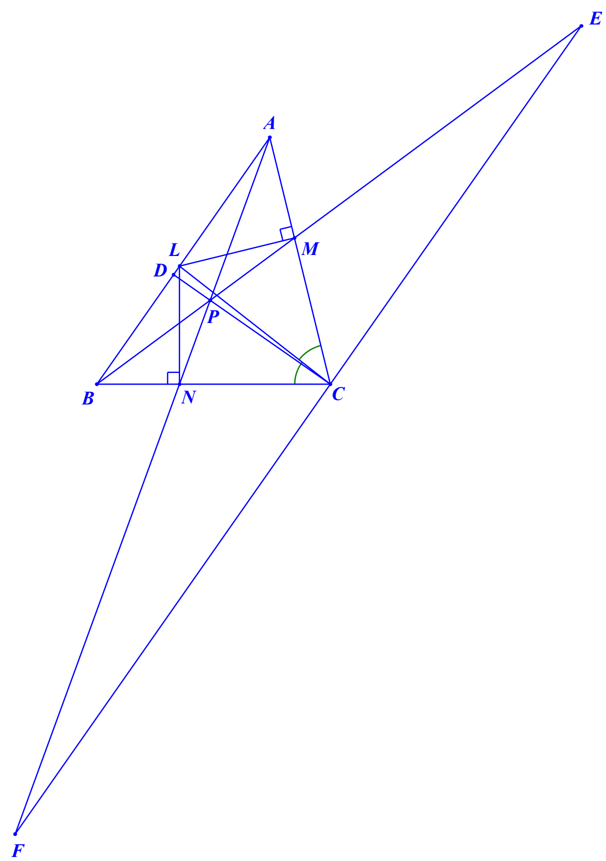
và $\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{CF} \Leftrightarrow CN=\frac{BN.CF}{AB}$.

Mà $CM=CN$ nên $\frac{AM}{BN}=\frac{CF}{CE}$.

Do đó, $\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{BN}$, suy ra $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BD}$. (1)

Ngoài ra, nếu $CH \perp AB (H \in AB)$ thì ΔALM đồng dạng ΔAHC, suy ra $\frac{AL}{AC}=\frac{AM}{AH}$. Tương tự, ta cũng có $\frac{BL}{BC}=\frac{BN}{BH}$.

Vì CL là phân giác nên $\frac{AL}{AC}=\frac{BL}{BC}$. Từ đó, ta được $\frac{AM}{AH}=\frac{BN}{BH}$. Kết hợp đẳng thức (1) ta có hai điểm D, H trùng nhau và do đó $CP \perp AB$.



Bài 25. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại một điểm K. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai trung điểm các đường chéo; gọi O là điểm đối xứng của K qua I. Chứng minh rằng bốn đoạn thẳng nối O với trung điểm các cạnh tứ giác thì chia tứ giác thành 4 đa giác có diện tích bằng nhau.

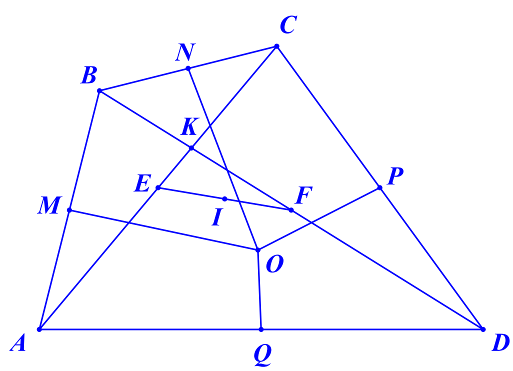
- **Lời giải.**

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CA, AD; E và F lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC và BD. Dễ thấy $OE//BD//QM$, suy ra $S_{MOQ}=S_{MEQ}$ và do đó

$S_{AMOQ}=S_{AMQ}+S_{MEQ}=S_{AMEQ}=S_{AME}+S_{AEQ}$.

Mà $\frac{S_{AME}}{S_{ABC}}=\frac{AM.AE}{AB.AC}=\frac{1}{4}, \frac{S_{EAQ}}{S_{ACD}}=\frac{AE.AQ}{AC.AD}=\frac{1}{4}$

nên $S_{AMOQ}=S_{AME}+S_{AEQ}=\frac{1}{4}\left(S_{ABC}+S_{ACD}\right)=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.



Tương tự ta cũng có $S_{BNOM}=S_{CPON}=S_{DQOP}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$, điều phải chứng minh.

Bài 26. Gọi M là điểm bất kì trong tam giác ABC. Qua M kẻ các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng: $\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M} \ge 6$.

- **Lời giải.**

Gọi diện tích các tam giác MAB, MBC, MCA lần lượt là a, b, c; A', A'' tương ứng là hình chiếu của A, M xuống cạnh BC.

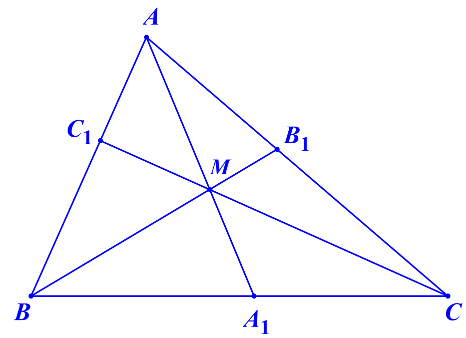
Vì $MA''//AA'$ nên

$$\frac{AA'}{MA''}=\frac{AA_1}{MA_1}\Rightarrow\frac{a+b+c}{b}=\frac{\frac{1}{2}AA'.BC}{\frac{1}{2}MA''.BC}=\frac{AA_1}{MA_1}.$$

Từ đó, $\frac{AM}{MA_1}=\frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}.$

Tương tự, ta có $\frac{BM}{B_1M}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c},\frac{CM}{C_1M}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}.$

Như vậy, $\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 6.$



Bài 27. Cho hai đường thẳng cố định a và b, hai đường thẳng di động c, d sao cho chúng luôn song song với nhau và theo thứ tự qua hai điểm A,B nằm trên a,C là giao điểm của c và b,D là gia điểm của d và b. Qua giao điểm M của AD và BC dựng đường thẳng song song với c, cắt a ở E và b ở F. Chứng tỏ M thuộc một đường thẳng cố định.

- **Lời giải.**

Xét hai trường hợp: a cắt b và $a//b$.

Trường hợp 1. a cắt b tại I.

Do $AC//BD$ nên $\frac{MA}{MD}=\frac{EA}{EB}=\frac{AC}{BD}=\frac{IA}{IB}$ không đổi.

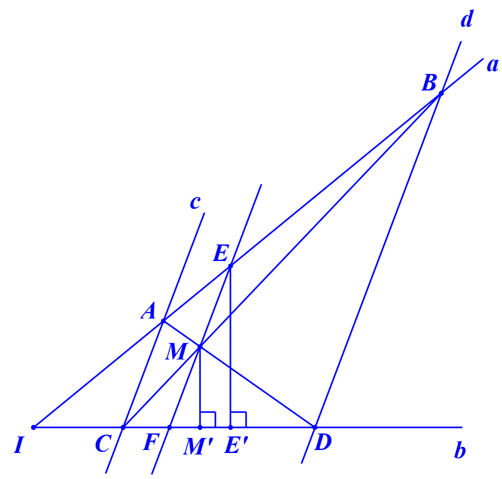
Mà $\frac{ME}{BD}=\frac{MA}{AD}=\frac{FC}{CD}=\frac{MF}{BD}$ nên suy ra $ME=MF$.

Vậy M là trung điểm của EF.

Vẽ $MM'\perp b,EE'\perp b,(M',E'\in b)$, ta có

$MM'//EE',MM'=\frac{1}{2}EE'.$

Do đó $MM'=\frac{1}{2}EE'$; EE' không đổi.



Vậy M thuộc đường thẳng song song với đường thẳng b và cách b một khoảng bằng nữa khoảng cách từ E đến b.

Trường hợp 2. $a//b$.

Tứ giác ABCD là hình bình hành. M là giao điểm hai đường chéo AD và BC, suy ra M là trung điểm của AD và BC. ΔABC có $ME//AC$, M là trung điểm BC, do đó E là trung điểm AB, suy ra E cố định. Ta có: $ME=MF=\left(=\frac{1}{2}AC\right).$

Tương tự như trường hợp (1), ta có M thuộc đường thẳng song song với đường thẳng b và cách b một khoảng bằng nửa khoảng cách từ trung điểm E của AB đến b.