

TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất cơ bản của phân thức

* Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$$

với M là đa thức khác đa thức 0.

* Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có:

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$$

với N là một nhân tử chung của cả A và B .

2. Quy tắc đổi dấu

* Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}.$$

* Nếu đổi dấu tử hoặc mẫu đồng thời đổi dấu của phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho. Ta có:

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

A. DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1: Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước.

Phương pháp giải: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử ở hai vế;

Bước 2. Triệt tiêu các nhân tử chung và rút ra đa thức cần tìm.

Bài 1: Tìm đa thức A thỏa mãn mỗi đẳng thức sau:

a. $\frac{A}{x-2} = \frac{2x^3 + 4x^2}{x^2 - 4}, x \neq \pm 2;$

b. $\frac{5(x+y)}{3} = \frac{5x^2 - 5y^2}{A}, x \neq y$

c. $\frac{x^2 + 8}{2x-1} = \frac{2x^3 + 16x}{A}, x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$

d. $\frac{y-x}{2-x} = \frac{x-y}{A}, x \neq 2$

Bài 2: Tìm bộ ba đa thức A, B, C thỏa mãn chuỗi đẳng thức sau:

$$\frac{A}{x-3} = \frac{B}{x^2 - 4x + 3} = \frac{C}{x^3 - 27}, x \neq 1, x \neq 3.$$

Bài 3: Tìm bộ ba đa thức A, B, C thỏa mãn chuỗi đẳng thức sau:

$$\frac{A(x-1)}{x^2 + 4x + 4} = \frac{B}{x^2 - 4} = \frac{C}{x^3 + 8}, x \neq \pm 2$$

Dạng 2: Biến đổi phân thức theo yêu cầu của đề bài.

Phương pháp giải: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử hoặc lựa chọn tử thức (hay mẫu thức) thích hợp tùy theo yêu cầu đề bài;

Bước 2. Sử dụng tính chất cơ bản của phân thức (xem phần Tóm tắt lý thuyết) để đưa về phân thức mới thỏa mãn yêu cầu.

Bài 4: Tìm một phân thức mới có tử thức là đa thức $1-2x$ và có giá trị bằng phân thức

$$\frac{12x^2 - 12x + 3}{(6x-3)(5-x)}, x \neq 2, x \neq 5$$

Bài 5: Biến đổi phân thức $\frac{1}{4x+3}$ thành một phân thức có mẫu thức là đa thức $4x^2 - x - 3$ và giá trị

của hai phân thức bằng nhau với $x \neq 1; x \neq \frac{-3}{4}$

Bài 6: Biến đổi cặp phân thức $\frac{x+4}{2x}$ và $\frac{x^2-16}{3x+1}$, $x \neq \frac{-1}{3}$, $x \neq 0$, $x \neq 4$ thành cặp phân thức mới có cùng tử thức và bằng phân thức ban đầu.

Dạng 3: Tính giá trị của phân thức.

Phương pháp giải: Thực hiện theo ba bước:

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức thành nhân tử;

Bước 2. Rút gọn từng phân thức;

Bước 3. Thay giá trị của biến vào phân thức và tính.

Bài 7: Tính giá trị phân thức sau:

a. $A = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$, $x \neq 1$ tại $3x - 1 = 0$

b. $B = \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$, $x \neq 2$; $x \neq 3$ tại $x^2 - 4 = 0$

Bài 8: Với giá trị x thỏa mãn $2x^2 - 7x + 3 = 0$, tính giá trị của các phân thức sau:

a. $\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$

b. $\frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$

Dạng 4: Chứng minh cặp phân thức bằng nhau.

Phương pháp giải: Thực hiện theo hai bước:

Bước 1. Phân tích tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức thành nhân tử;

Bước 2. Rút gọn từng phân thức, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Chú ý: Trong nhiều trường hợp, có thể sử dụng định nghĩa hai

phân thức bằng nhau: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C$

Bài 9: Các cặp phân thức sau có bằng nhau không. Vì sao?

a. $\frac{a+3}{a-4}; \frac{a+6}{a-8}$ với $x \neq 4; x \neq 8$

b. $\frac{9x-6}{3x^2+3x-(2x+2)}; \frac{3x^2-3x+3}{x^3+1}$ với $x \neq -1; x \neq \frac{2}{3}$

Bài 10: Cho cặp phân thức $\frac{x^2-1}{x^2-3x-4}$ và $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$ với $x \notin \{-1; 2; 4\}$

a. Hai phân thức này có luôn bằng nhau hay không?

b. Tìm giá trị cụ thể của x để hai phân thức bằng nhau.

Dạng 5: Toán nâng cao.

Bài 11: Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$. Chứng minh rằng có vô số cặp phân thức cùng mẫu có dạng

$$\frac{A'}{E} \text{ và } \frac{C'}{E} \text{ thỏa mãn điều kiện } \frac{A'}{E} = \frac{A}{B}; \frac{C'}{E} = \frac{C}{D} .$$

HƯỚNG DẪN

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn từng phân thức thì ta có

a) $\frac{A}{x-2} = \frac{2x^2}{x-2} \Rightarrow A = 2x^2$

b) $\frac{5(x+y)}{3} = \frac{5(x-y)(x+y)}{3(x-y)} \Rightarrow A = 3(x-y)$

c) $\frac{x^2+8}{2x-1} = \frac{2x(x^2+8)}{A} \Rightarrow A = 2x(2x-1)$

d) $\frac{y-x}{2-x} = \frac{-(y-x)}{A} \Rightarrow A = x-2$

Bài 2:

$$\frac{A}{x-3} = \frac{B}{(x-3)(x-1)} = \frac{C}{(x^2+3x+9)(x-3)}, x \neq 1, x \neq 3.$$

$$\Rightarrow \frac{A}{1} = \frac{B}{(x-1)} = \frac{C}{(x^2+3x+9)}, x \neq 1, x \neq 3. \text{ Chọn } A=1 \Rightarrow C = x^2+3x+9; B = x-1$$

Bài 3:

Tương tự bài 2 ta rút gọn và chọn $A = x + 2 \Rightarrow B = (x-1)(x-2); C = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$

Bài 4:

$$\frac{12x^2 - 12x + 3}{(6x-3)(5-x)} = \frac{3(2x-1)^2}{3(2x-1)(5-x)} = \frac{2x-1}{5-x} \Rightarrow A = \frac{1-2x}{x-5}, x \neq 2, x \neq 5$$

Bài 5:

$$\frac{1}{4x+3} = \frac{B}{4x^2-x-3} = \frac{B}{(4x+3)(x-1)} \Rightarrow B = x-1$$

Vậy phân thức cần tìm là $\frac{x-1}{4x^2-x-3}$

Bài 6:

$$\frac{x+4}{2x} = \frac{(x+4)(x-4)}{2x(x-4)} = \frac{x^2-16}{2x(x-4)} \text{ Và ta giữ nguyên biểu thức thứ 2}$$

$$\frac{x^2-16}{3x+1}, x \neq \frac{-1}{3}, x \neq 0, x \neq 4$$

Bài 7:

$$A = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x-3}{x+1}$$

$$\text{Thay } x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -2$$

$$\text{b) ta có } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2(\text{loại}) \\ x = -2(\text{tm}) \end{cases} B = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow B = \frac{-1}{5}$$

Bài 8:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) $x \neq 1; \frac{1}{2}$ do vậy chỉ có $x = 3$ là thỏa mãn $\Rightarrow A = \frac{2}{7}$

b) $x \neq -1; 3$ do vậy ta chỉ nhận $x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{43}{6}$

Bài 9:

a) $\frac{a+3}{a-4}; \frac{a+6}{a-8}$ ta xét tích chéo $(a+3)(a-8) = a^2 - 5a - 24$; $(a-4)(a+6) = a^2 + 2a - 24$ do vậy hai phân thức không bằng nhau.

b) $\frac{9x-6}{3x^2+3x-(2x+2)} = \frac{3}{x+1}$; $\frac{3x^2-3x+3}{x^3+1} = \frac{3(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{3}{x+1}$

Bài 10:

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x-4} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-1}{x-4}; \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$$

a) Hai phân thức trên không bằng nhau với mọi x

b) ta xét $\frac{x-1}{x-4} = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

Bài 11:

Với hai phân thức $\frac{A}{B} = \frac{AD}{BD}$ và $\frac{C}{D} = \frac{CB}{BD}$, để ta thấy ta nhân cả tử và mẫu của hai phân thức trên với đa thức $M \neq 0$ thì ta luôn được mẫu số $E = BD.M$. Do có vô số đa thức M nên ta có vô số phân thức cùng mẫu bằng hai phân thức đã cho.

B.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Dạng 1: Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước.

Bài 1: Hãy điền một đa thức thích hợp vào các chỗ trống trong mỗi đẳng thức sau:

a) $\frac{5(x+y)}{3} = \frac{5x^2-5y^2}{\dots}$ với $x \neq y$;

b) $\frac{2a^3+4a^2}{a^2-4} = \frac{\dots}{a-2}$ với $a \neq \pm 2$.

Bài 2: Tìm đa thức A thỏa mãn mỗi đẳng thức sau:

a) $\frac{6b^2 - 9b}{4b^2 - 9} = \frac{3b}{A}$ với $b \neq \pm \frac{3}{2}$;

b) $\frac{n-m}{2-m} = \frac{m-n}{A}$ với $m \neq 2$.

Bài 3: Dùng tích chất cơ bản của phân thức, hãy tìm đa thức A biết: $\frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x+y} = \frac{A}{y^2 - x^2}$

Dạng 2: Biến đổi phân thức theo yêu cầu của đề bài.

Bài 4: Cho phân thức $\frac{4x+3}{x^2-5}$. Biến đổi phân thức đã cho thành một phân thức bằng nó và có tử thức là đa thức $A = 12x^2 + 9x$.

Bài 5: Biến đổi phân thức $\frac{8x^2 - 8x + 2}{(4x-2)(15-x)}$ thành một phân thức bằng nó và có tử thức là

$$A = 1 - 2x$$

Bài 6: Dùng tích chất cơ bản của phân thức để biến đổi mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức bằng nó và có cùng tử thức:

a) $\frac{3}{x+2}$ và $\frac{x-1}{5x}$

b) $\frac{x+5}{4x}$ và $\frac{x^2-25}{2x+3}$

Dạng 3: Tính giá trị của phân thức.

Bài 7: Tính giá trị của phân thức:

a) $\frac{2x+2}{x^2+2x+1}$ với $x \neq -1$ tại $x = 1$

b) $\frac{3x^2+3x}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$ tại $x = -2$

Bài 8: Tính giá trị của phân thức: $\frac{x^2-1}{2x^2-3x+1}$ với $x \neq 1; x \neq \frac{1}{2}$ tại $3x-1=0$

Dạng 4: Chứng minh cặp phân thức bằng nhau.

Bài 9: Cho cặp phân thức $\frac{9x-6}{3x^2+3x-(2x+2)}$ và $\frac{3x^2-3x+3}{x^3+1}$ với $x \neq 1$ và $x \neq \frac{2}{3}$. Chứng tỏ cặp phân thức trên bằng nhau.

Bài 10: Cho hai phân thức $\frac{y^2+5y+6}{3y+6}$ và $\frac{2y^2+5y-3}{6y-3}$ với $y \neq 2$ và $y \neq \frac{1}{2}$. Cặp phân thức này có bằng nhau hay không?

Dạng 5: Toán nâng cao.

Bài 11: Cho cặp phân thức $\frac{x^2-1}{x^2-3x-4}$ và $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$ với $x \neq -1; x \neq 2$ và $x \neq 4$.

- Hai phân thức này có luôn bằng nhau hay không?
- Tìm giá trị cụ thể của x để hai phân thức bằng nhau.

Bài 12: Tính giá trị của phân thức:

a) $\frac{x^2-1}{2x^2-3x+1}$ với $x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$ tại $|2x+1|=3$;

b) $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-4x+3}$ với $x \neq 2; x \neq 3$ tại $x^2-8x+15=0$.

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Tìm đa thức thỏa mãn đẳng thức cho trước.

Bài 1:

a) Ta có:
$$\frac{5(x+y)}{3} = \frac{5(x+y)(x-y)}{3(x-y)} = \frac{5(x^2-y^2)}{3(x-y)} = \frac{5x^2-5y^2}{3(x-y)}$$

b) Ta có:
$$\frac{2a^3+4a^2}{a^2-4} = \frac{2a^2(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{2a^2}{a-2} \Leftrightarrow \dots = 2a^2$$

Bài 2:

a) Ta có:
$$\frac{6b^2-9b}{4b^2-9} = \frac{3b(2b-3)}{(2b)^2-3^2} = \frac{3b(2b-3)}{(2b-3)(2b+3)} = \frac{3b}{2b+3} \Rightarrow A = 2b+3$$

b) Ta có:
$$\frac{n-m}{2-m} = \frac{-(m-n)}{2-m} = \frac{m-n}{m-2} \Rightarrow A = m-2.$$

Bài 3:

Ta có:

$$\frac{-x^2+2xy-y^2}{x+y} = \frac{-(y^2-2xy+x^2)}{x+y} = \frac{-(y-x)^2}{y+x} = \frac{-(y-x)^2(y-x)}{(y+x)\cdot(y-x)} = \frac{-(y-x)^3}{y^2-x^2} \Rightarrow A = (x-y)^3$$

Dạng 2: Biến đổi phân thức theo yêu cầu của đề bài.

Bài 4:

Ta có:
$$\frac{4x+3}{x^2-5} = \frac{(4x+3)\cdot 3x}{(x^2-5)\cdot 3x} = \frac{12x^2+9x}{3x^3-15x}$$

Bài 5:

Ta có:
$$\frac{8x^2-8x+2}{(4x-2)(15-x)} = \frac{2(4x^2-4x+1)}{2(2x-1)(15-x)} = \frac{2(2x-1)^2}{2(2x-1)(15-x)} = \frac{2x-1}{15-x} = \frac{1-2x}{x-15}$$

Bài 6:

a) Ta có:
$$\frac{3}{x+2} = \frac{3\cdot(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3x-3}{x^2+x-2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x-1}{5x} = \frac{(x-1) \cdot 3}{5x \cdot 3} = \frac{3x-3}{15x}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{x+5}{4x} = \frac{(x+5) \cdot (x-5)}{4x \cdot (x-5)} = \frac{x^2-25}{4x^2-20x}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2-25}{2x+3}$$

Dạng 3: Tính giá trị của phân thức

Bài 7:

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A \text{ ta được: } A = \frac{2}{x+1} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{3x^2+3x}{x^2-1} = \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{x-1}$$

$$\text{Thay } x=-2 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } B \text{ ta được: } B = \frac{3x}{x-1} = \frac{3 \cdot (-2)}{(-2)-1} = 2.$$

Bài 8:

$$\text{Ta có: } 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } C = \frac{x^2-1}{2x^2-3x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{x+1}{2x-1}$$

$$\text{Thay } x=\frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } C \text{ ta được: } C = \frac{x+1}{2x-1} = \frac{\frac{1}{3}+1}{2 \cdot \frac{1}{3}-1} = -4.$$

Dạng 4: Chứng minh cặp phân thức bằng nhau.

Bài 9:

$$\text{Ta có: } \frac{9x-6}{3x^2+3x-(2x+2)} = \frac{9x-6}{3x^2+3x-2x-2} = \frac{9x-6}{3x^2+x-2} = \frac{3(3x-2)}{(x+1)(3x-2)} = \frac{3}{x+1} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{3x^2 - 3x + 3}{x^3 + 1} = \frac{3(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{3}{x+1} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1),(2)} \Rightarrow \frac{9x - 6}{3x^2 + 3x - (2x + 2)} = \frac{3x^2 - 3x + 3}{x^3 + 1}$$

Bài 10:

$$\text{Ta có: } \frac{y^2 + 5y + 6}{3y + 6} = \frac{(y+2)(y+3)}{3(y+2)} = \frac{y+3}{3} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{2y^2 + 5y - 3}{6y - 3} = \frac{(y+3)(2y-1)}{3(2y-1)} = \frac{y+3}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1),(2)} \Rightarrow \frac{y^2 + 5y + 6}{3y + 6} = \frac{2y^2 + 5y - 3}{6y - 3}.$$

Bài 11:

$$\text{a) Ta có: } \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-1}{x-4} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-3}{x-2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1),(2)} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4} \neq \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2}.$$

b) Với $x \neq -1; x \neq 2$ và $x \neq 4$

$$\text{thì } \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-4} = \frac{x-3}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = (x-4)(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - 7x + 12 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Vậy $x = \frac{5}{2}$ thì hai phân thức đã cho bằng nhau.

Bài 12:

a) Loại trường hợp $x = 1$ và thay $x = -2$ được kết quả $\frac{1}{5}$.

b) Loại trường hợp $x = 3$ và thay $x = 5$ được kết quả $\frac{7}{2}$.

===== TOÁN HỌC SƠ ĐỒ =====