CHUYÊN ĐỀ 3. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.
CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC
BÀI 5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Phát biểu được các định lí về tính chất các điểm thuộc tia phân giác.

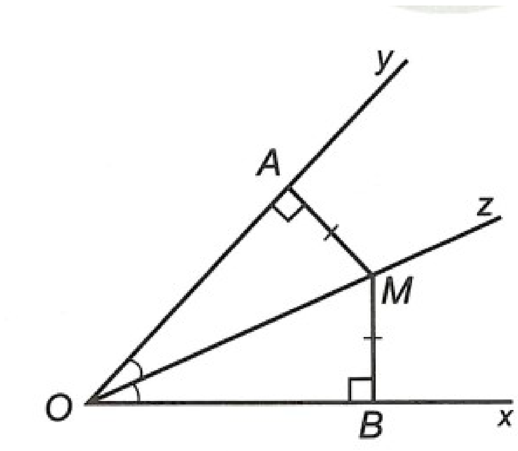
❖ **Kĩ năng**

+ Vận dụng được tính chất tia phân giác của một góc để chứng minh tính chất hình học.
+ Sử dụng được định lí đảo để chứng minh một tia là tia phân giác của một góc.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định lí thuận

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{xOz}=\widehat{zOy}\\ M\in Oz\\ MA\perp Oy;\ MB\perp Ox\end{array}\right\}\Rightarrow MA=MB.$$

Định lí đảo

- Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.
- Tập hợp các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.

Cho điểm M nằm bên trong góc xOy và khoảng cách từ M đến hai tia Ox, Oy là bằng nhau $(MA=MB)$. *Khi đó OM là tia phân giác của góc xOy.*

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

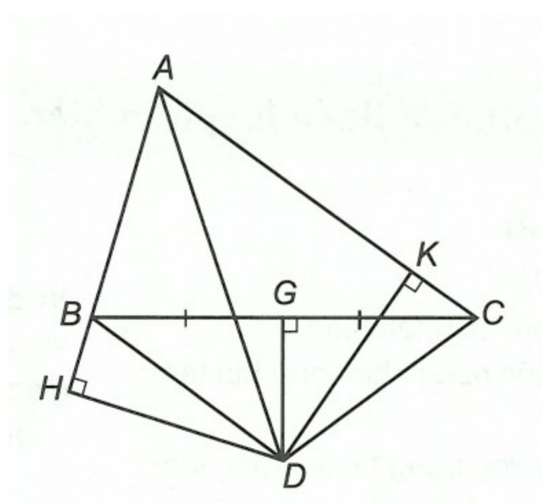
Dạng 1: Vận dụng tính chất phân giác của một góc để chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau

- **Phương pháp giải**

Áp dụng định lí thuận: Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

- **Ví dụ mẫu**

Ví dụ. Cho ΔABC có $AB<AC$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt đường thẳng vuông góc với BC tại trung điểm của BC ở D. Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng AB, AC. Chứng minh $BH=CK$.



Hướng dẫn giải

Ta có D thuộc phân giác của $\widehat{A}$; $DH\perp AB$; $DK\perp AC$

$\Rightarrow DH=DK$ (tính chất tia phân giác của một góc).

Gọi G là trung điểm của BC.

Xét ΔBGD và ΔCGD, có

$\widehat{BGD} = \widehat{CGD} = 90^\circ$ (*DG* là trung trực của *BC*),

$BG = CG$ (giả thiết),

DG là cạnh chung.

Do đó $\Delta BGD = \Delta CGD$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔBHD và ΔCKD, có

$\widehat{BHD} = \widehat{CKD} = 90^\circ$ (giả thiết);

$DH = DK$ (chứng minh trên);

$BD = CD$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta BHD = \Delta CKD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow BH = CK$ (hai cạnh tương ứng).

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt *BC* tại *D*. Tia phân giác của $\widehat{ADC}$ cắt *AC* tại *I*. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu của *I* trên đường thẳng *AB, BC*. Chứng minh $IH = IK$.

Câu 2: Cho ΔABC vuông tại *A* có $AB = 3cm$, $AC = 6cm$. Gọi *E* là trung điểm *AC*, tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt *BC* tại *D*.

a) Tính *BC*.

b) Chứng minh $\Delta BAD = \Delta EAD$.

c) Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu của *D* trên *AB, AC*. Chứng minh điểm *D* cách đều *AB* và *AC*.

Câu 3: Cho $\widehat{xOy}$ $\left(0^\circ < \widehat{xOy} < 180^\circ\right)$, *Om* là tia phân giác $\widehat{xOy}$. Trên tia *Om* lấy điểm *I* bất kì. Gọi *E, F* lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ *I* đến *Ox* và *Oy*. Chứng minh:

a) $\Delta IOE = \Delta IOF$.

b) $EF \perp Om$.

Câu 4: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 100^\circ$. Gọi *CD* là tia đối của tia *CB*. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt tia phân giác của $\widehat{ACD}$ tại *K*. Tính số đo $\widehat{BAK}$.

Câu 5: Cho ΔABC có $\widehat{B} = 120^\circ$. Kẻ đường phân giác *BM*. Đường phân giác của góc ngoài ở đỉnh *C* cắt đường thẳng *AB* ở *P*. Đoạn thẳng *MP* cắt *BC* ở *K*. Tính số đo $\widehat{AKM}$.

Dạng 2: Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc

Phương pháp giải

Cách 1. Sử dụng định lí đảo.

Cach 2. Sử dụng định nghĩa tia phân giác.

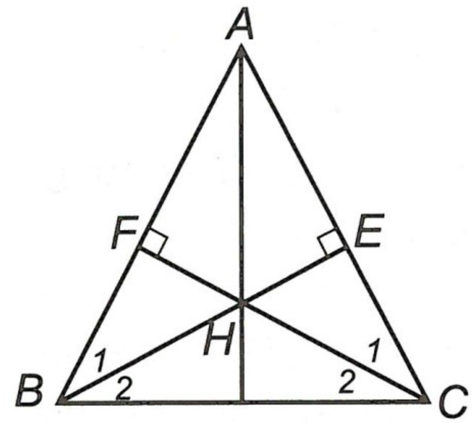
Cách 3. Chứng minh hai góc bằng nhau nhờ hai

Ví dụ: Cho ΔABC cân tại *A*, các đường cao *BE* và *CF* cắt nhau tại *H*. Chứng minh *AH* là phân giác của $\widehat{BAC}$.

tam giác bằng nhau.

Cách 4. Dùng tính chất đường trung tuyến trong tam giác cân đồng thời là đường phân giác.

Hướng dẫn giải



Xét ΔBEA có $\widehat{B_1}+\widehat{BAE}=\widehat{B_1}+\widehat{BAC}=90°$;

Và ΔCFA có $\widehat{C_1}+\widehat{FAC}=\widehat{C_1}+\widehat{BAC}=90°$.

Suy ra $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$). (1)

Lại có $\widehat{B}=\widehat{C}$ (ΔABC cân tại A). (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{B}-\widehat{B_1}=\widehat{C}-\widehat{C_1}$ hay $\widehat{B_2}=\widehat{C_2}$

$\Rightarrow \Delta BHC$ cân tại $H \Rightarrow BH=CH$.

Xét ΔBHF và ΔCHE, có

$\widehat{HFB}=\widehat{HEC}=90°$ (giả thiết);

$\widehat{FHB}=\widehat{EHC}$ (hai góc đối đỉnh)

$BH=CH$ (chứng minh trên).

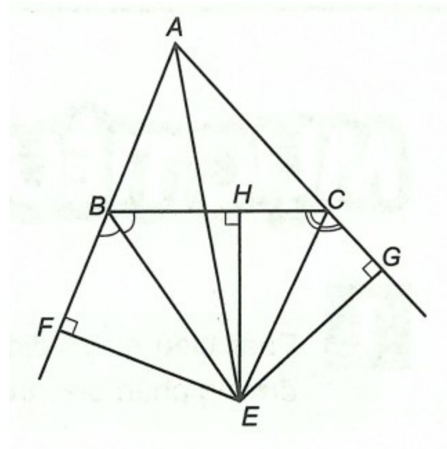
Do đó $\Delta BHF=\Delta CHE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HF=HE$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy AH là phân giác của $\widehat{BAC}$ (tính chất tia phân giác của một góc).

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho ΔABC, hai đường phân giác của hai góc ngoài đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại E. Chứng minh E thuộc phân giác trong của $\widehat{BAC}$.



Hướng dẫn giải

Từ E hạ $EH \perp BC$; $EF \perp AB$; $EG \perp AC$ với $H \in BC$; $F \in AB$; $G \in AC$.

Ta có

$EF = EH$ (E thuộc phân giác ngoài của $\widehat{B}$). (1)

Và $EH = EG$ (E thuộc phân giác ngoài của $\widehat{C}$). (2)

Từ (1) và (2) ta có $EF = EG \Rightarrow$ E thuộc tia phân giác trong của $\widehat{BAC}$ (tính chất tia phân giác của một góc).

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho ΔABC vuông tại A. Từ một điểm K bất kì trên cạnh BC, kẻ $KH \perp AC$ $(H \in AC)$. Trên tia đối của tia HK lấy điểm I sao cho $HI = HK$. Chứng minh

a) $AB // HK$.

b) $\widehat{KAH} = \widehat{IAH}$.

c) ΔAKI cân.

Câu 2: Cho $\widehat{xOy}$. Lấy các điểm A, B thuộc tia Ox sao cho $OA > OB$. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho $OC = OA$, $OD = OB$. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng

a) $AD = BC$.

b) $\Delta ABE = \Delta CDE$.

c) OE là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Câu 3: Cho ΔABC có phân giác AD thỏa mãn $BD = 2DC$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BC = CE$. Chứng minh ΔADE là tam giác vuông.

Câu 4: Cho ΔABC có ba góc nhọn, đường cao AH. Vẽ HM, HN lần lượt vuông góc với AB, AC. Trên tia đối của tia MH lấy $MD = MH$. Trên tia đối NH lấy điểm E sao cho $NE = NH$. Gọi I và K là giao điểm của DE với AB và AC. Chứng minh rằng

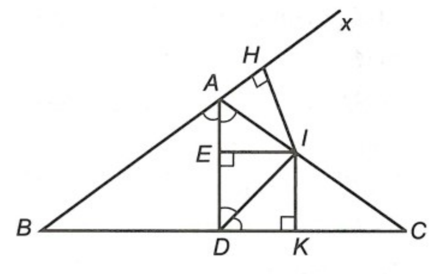
a) IB là tia phân giác của $\widehat{HID}$.

b) HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BẢI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Vận dụng tính chất phân giác của một góc để chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau

Câu 1.



Kẻ $IE \perp AD\ \left(E \in AD\right)$. Gọi Ax là tia đối của tia AB.

Vì $\widehat{BAC}$ và $\widehat{CAx}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BAC} = 120°$ nên $\widehat{CAx} = 60°.\ \left(1\right)$

Ta có AD là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60°.\ \left(2\right)$

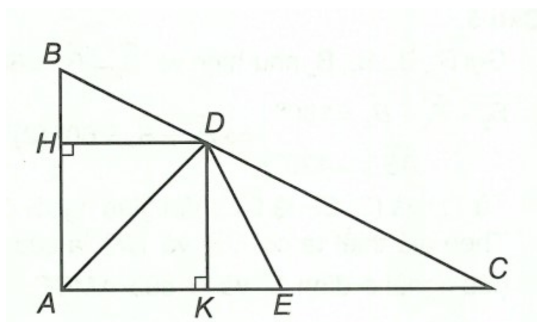
Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra AC là tia phân giác của $\widehat{DAx}$

$\Rightarrow IH = IE$ (tính chất tia phân giác của một góc). $\left(3\right)$

Vì DI là phân giác của $\widehat{ADC}$ nên $IK = IE$ (tính chất tia phân giác của một góc). $\left(4\right)$

Từ $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ suy ra $IH = IK$.

Câu 2.



a) Xét ΔABC vuông tại A, ta có

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (định lí Pi-ta-go)

$\Rightarrow BC^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$

$\Rightarrow BC = \sqrt{45}\left(\text{cm}\right)$.

b) Vì E là trung điểm của AC nên

$AE = \frac{1}{2}AC = 3\text{cm} \Rightarrow AE = AB.$

Xét ΔBAD và ΔEAD có

$\widehat{BAD} = \widehat{EAD}$ (AD là phân giác); AD cạnh chung;

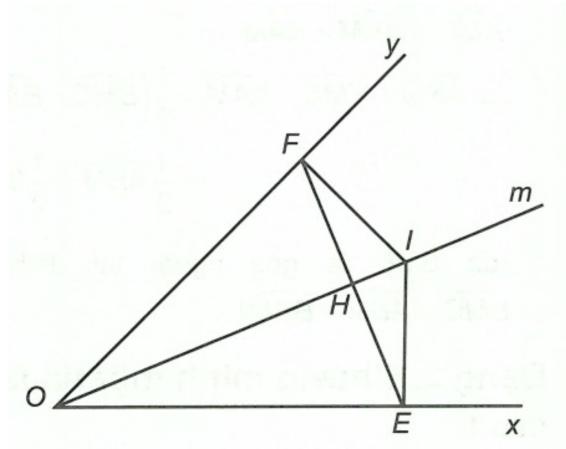
$AB = AE$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta BAD = \Delta EAD$ (c.g.c).

c) Vì D nằm trên tia phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $DH = DK$ (tính chất tia phân giác của một góc).

Vậy điểm D cách đều AB và AC.

Câu 3.



a) Xét ΔIOE và ΔIOF có

$\widehat{E}=\widehat{F}=90^\circ$ (giả thiết); OI cạnh chung;

$\widehat{EOI}=\widehat{FOI}$ (Om là tia phân giác).

Vậy $\Delta IOE=\Delta IOF$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) $\Delta IOE=\Delta IOF$ (chứng minh trên) $\Rightarrow OE=OF$ (hai cạnh tương ứng).

Gọi H là giao điểm của Om và EF.

Xét ΔOHE và ΔOHF, có

$OE=OF$ (chứng minh trên); $\widehat{EOH}=\widehat{FOH}$ (Om là tia phân giác); OH chung.

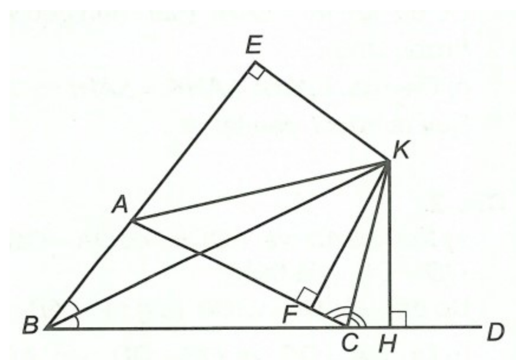
Do đó $\Delta OHE=\Delta OHF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OHE}=\widehat{FHO}$.

(hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{OHE}+\widehat{FHO}=180^\circ$ nên $\widehat{OHE}=\widehat{FHO}=90^\circ$

Vậy $EF\perp Om$.

Câu 4.



Từ K kẻ

$KE\perp AB;\ KF\perp AC;\ KH\perp BC$
$\left(E\in AB;\ F\in AC;\ H\in BC\right)$.

Do K thuộc tia phân giác của góc B nên $KE=KH$ (tính chất tia phân giác của một góc). (1)

Lại có K thuộc tia phân giác của $\widehat{ACD}$ nên $KF=KH$ (tính chất tia phân giác của một góc). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KE=KF$

$\Rightarrow$ K thuộc tia phân giác của $\widehat{CAE}$ (tính chất tia phân giác của một góc)

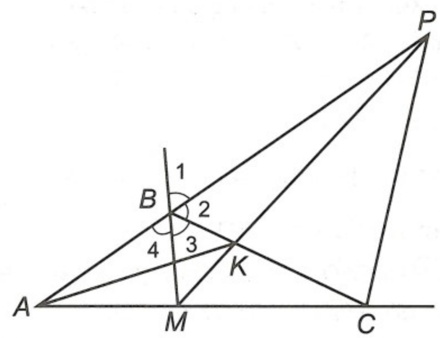
$$\Rightarrow \widehat{CAK}=\widehat{KAE}=\frac{\widehat{CAE}}{2}=\frac{180^\circ-\widehat{CAB}}{2}=\frac{180^\circ-100^\circ}{2}=40^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{BAK}=180^\circ-\widehat{KAE}=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

Vậy $\widehat{BAK}=140^\circ$.

Câu 5.

Gọi $B_1;B_2;B_3;B_4$ như hình vẽ. $\widehat{B_1}=\widehat{B_4}=60^\circ$ (hai góc đối đỉnh) (1)



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B_2}+\widehat{B_3}+\widehat{B_4}=180^\circ\\ \widehat{ABC}=120^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{B_2}=\widehat{B_3}=60^\circ\ (2)$$

Từ (1) và (2) BP là tia phân giác ngoài ở đỉnh B của ΔBMC

Theo giả thiết ta có CP và BP là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh C và B của ΔMBC

$\Rightarrow$ MP là tia phân giác của $\widehat{BMC}$.

Lại có BK và MK là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh B và M của ΔAMB

$\Rightarrow$ AK là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{KMC}$ là góc ngoài tại đỉnh M của ΔAKM nên

$\widehat{KMC}=\widehat{AKM}+\widehat{KAM}$

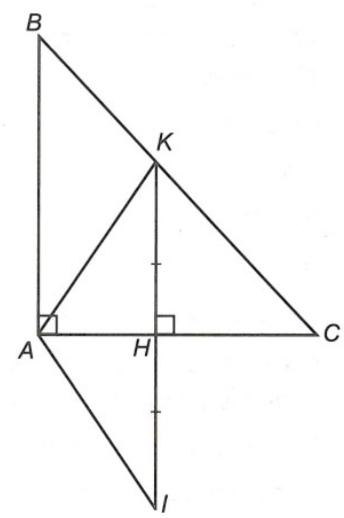
$$\Rightarrow \widehat{AKM}=\widehat{KMC}-\widehat{KAM}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BMC}-\widehat{BAM}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\widehat{ABM}=\frac{1}{2}60^\circ=30^\circ.$$

(do $\widehat{BMC}$ là góc ngoài tại đỉnh M của ΔAMB nên $\widehat{BMC}=\widehat{ABM}+\widehat{BAM}$)

Dạng 2. Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc

Câu 1.



a) Ta có $AB\perp AC$ (ΔABC vuông tại A),

$KH\perp AC$ (giả thiết) $\Rightarrow AB\,//\,KH$ (từ vuông góc đến song song)

b) Xét ΔAHK và ΔAHI, có

$HK=HI$ (giả thiết);

$\widehat{AHK}=\widehat{AHI}=90^\circ$ (giả thiết);

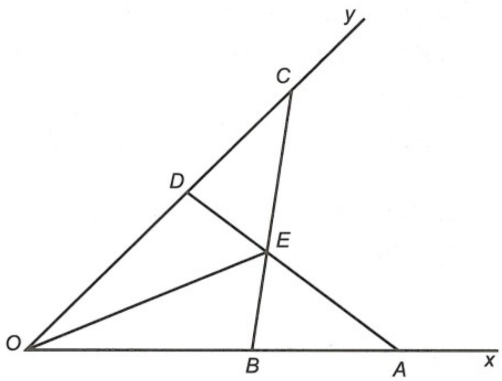
AH cạnh chung.

Do đó $\Delta AHK=\Delta AHI$ (hai cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{KAH}=\widehat{IAH}$ (2 góc tương ứng).

c) Theo câu b) ta có $\Delta AHK=\Delta AHI\Rightarrow AK=AI$. (hai cạnh tương ứng)

Suy ra ΔAKI cân tại A.

Câu 2.



a) Xét ΔOAD và ΔOCB, có $OA = OC$ (giả thiết); $\widehat{O}$ chung; $OD = OB$ (giả thiết).

Do đó $\Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = CB$ (hai cạnh tương ứng).

b) Do $OA = OC$ và $OB = OD$ nên $AB = CD$.

Lại có $\Delta OAD = \Delta OCB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{ODA}$; $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ (hai góc tương ứng)

Mặt khác $\widehat{ABE} + \widehat{OBC} = \widehat{CDE} + \widehat{ODA} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CDE}$.

Xét ΔABE và ΔCDE có

$\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ (chứng minh trên);

$AB = CD$ (chứng minh trên);

$\widehat{ABE} = \widehat{CDE}$ (chứng minh trên);

Do đó $\Delta ABE = \Delta CDE$ (g.c.g).

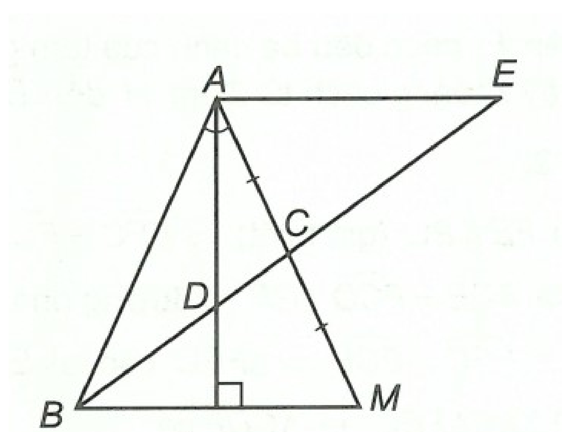
c) Vì $\Delta ABE = \Delta CDE$ (chứng minh trên) nên $AE = CE$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔAEO và ΔCEO có $AE = CE$ (chứng minh trên); OE cạnh chung; $OA = OC$ (giả thiết).

Do đó $\Delta AEO = \Delta CEO$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{COE}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow$ OE là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.

Câu 3.



Trên tia AC lấy điểm M sao cho $CM = CA$.

Xét ΔACE và ΔMCB có

$CE = CB$ (giả thiết); $\widehat{ACE} = \widehat{MCB}$ (hai góc đối đỉnh); $CM = CA$ (theo cách dựng hình).

Do đó $\Delta ACE = \Delta MCB$ (c.g.c).

Trong tam giác ABM có BC là trung tuyến, $BC = 2DC$

$\Rightarrow$ D là trọng tâm của ΔABM.

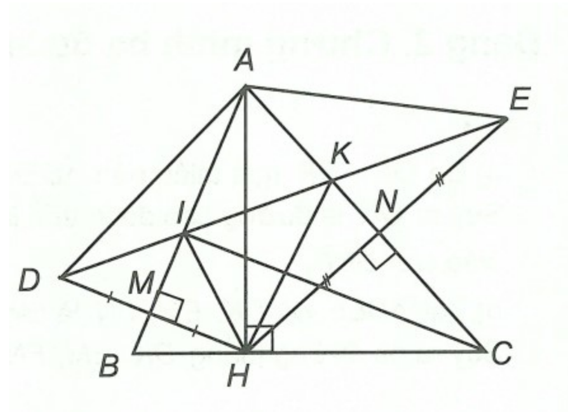
Đường thẳng AD là trung tuyến đồng thời là phân giác nên ΔABM cân tại A.

Do đó $AD \perp BM$.

Ta lại có $\widehat{AEC} = \widehat{MBC}$ (hai góc tương ứng) mà hai góc ở vị trí so le trong nên $AE \,//\, BM \Rightarrow AD \perp AE$.

Vậy tam giác ADE vuông tại A.

Câu 4.



a) Xét ΔDMI và ΔHMI có

$\widehat{DMI} = \widehat{HMI} = 90°$ (giả thiết); MI cạnh chung; $MD = MH$ (giả thiết).

Do đó $\Delta DMI = \Delta HMI$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{HIM}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow$ BI là tia phân giác của $\widehat{HID}$.

b) Chứng minh tương tự phần a ta có

$\Delta DAM = \Delta HAM$ (c.g.c);

và $\Delta ANH = \Delta ANE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = AH = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Do đó $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$. (1)

Xét ΔDAI và ΔHAI, có

AI cạnh chung; $AD = AH$ (chứng minh trên); $DI = HI$ (do $\Delta DMI = \Delta HMI$).

Do đó $\Delta DAI = \Delta HAI$. (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AHI}$. (2)

Chứng minh tương tự ta có

$\Delta EKA = \Delta HKA$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{AHK}$ (hai góc tương ứng). (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có HA là tia phân giác của $\widehat{IHK}$.