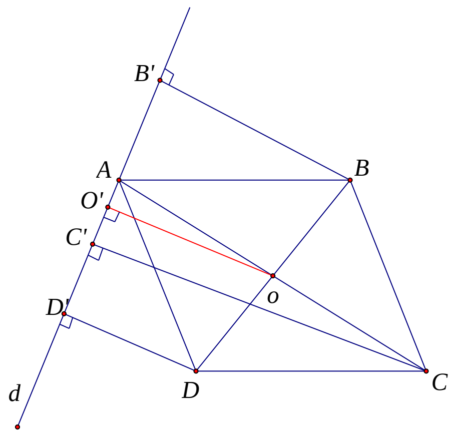
CHUYÊN ĐỀ TỨ GIÁC

Bài 1: Cho HBH ABCD có AB và BD cắt nhau tại O, Gọi d là đường thẳng đi qua A và không cắt đoạn BD, gọi BB’, CC’, DD’ là khoảng cách từ B, C, D đến đường thẳng d, (B’, C’, D’ nằm trên d)
CMR: BB’ + DD’ = CC’

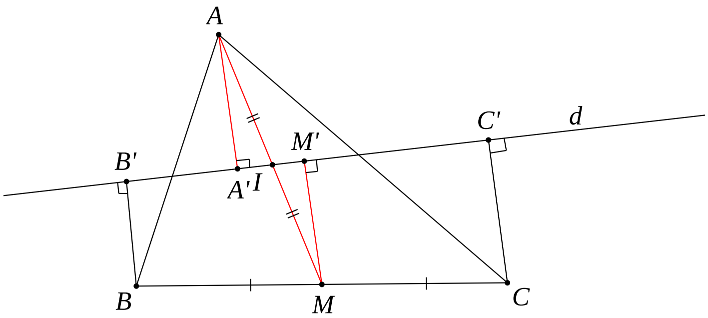
HD:

Vẽ OO’ $\perp$ d (O’ $\in$ d)
Khi đó ta có: BB’D’D là hình thang



có OO’ là đường trung bình nên:
2.OO’= BB’ + DD’ (1)
Tương tự ΔACC’ có OO’ là đường trung bình nên:
2.OO’ = CC’ (2)
Từ (1) và (2) => BB’ + DD’ = CC’

Bài 2: Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến, vẽ đường thẳng d đi qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB, AC, Gọi A’, B’, C’ lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên đường thẳng d
CMR: $AA' = \dfrac{BB' + CC'}{2}$



HD:

Gọi H, K lần lượt là giao của d với AB và AC

Lấy N là hình chiếu của M trên đường thẳng d

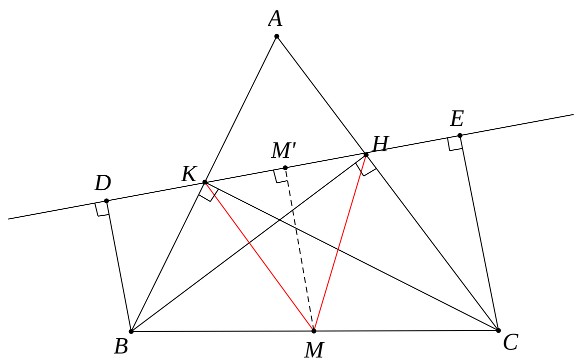
=> ΔAA’I = ΔMNI (cạnh huyền- góc nhọn)

=> AA’ = MN

Hình thang BB’C’C có MN là đường trung bình nên:
$$MN = AA' = \frac{BB' + CC'}{2}$$

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BH, CK, Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng HK,
CMR: DK = EH.

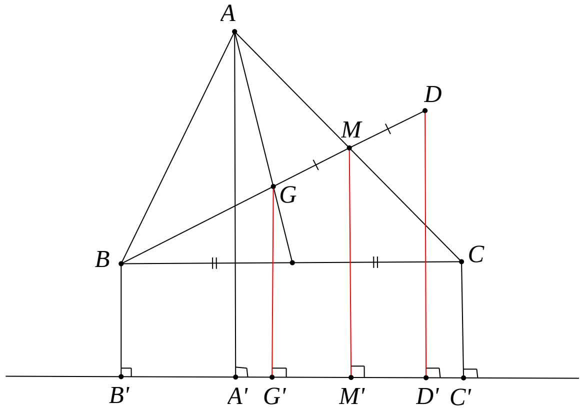
HD:
Gọi M, M’ lầ lượt là trung điểm của BC và DE,



Xét ΔBHC vuông tại H có HM là đường trung tuyến nên:
$$HM = \frac{1}{2}BC \qquad (1)$$
ΔBKC vuông tại K có KM là đường trung tuyến nên:
$$KM = \frac{1}{2}BC \qquad (2)$$
Từ (1) và (2) => MH = MK => KM’ = HM’
Vậy DM’ = EM’

Bài 4: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, đường thẳng d không cắt các cạnh của tam giác ABC, Gọi A', B', C', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, G trên đường thẳng d,

CMR: $GG' = \dfrac{AA' + BB' + CC'}{3}$



HD:

Gọi M là trung điểm của AC, và D đối xứng với G qua M, M' là hình chiếu của M trên d, Khi đó ta có :

$GM = DM = \dfrac{BG}{2}$

=> G là trung điểm của BD

=> GG' là đường trung bình của hình thang BB'D'D

=> MM' là đường trung bình của hình thang GG'D'D

Nên: $GG' = \dfrac{BB' + DD'}{2}$ (1)

$MM' = \dfrac{AA' + CC'}{2}; MM' = \dfrac{DD' + GG'}{2}$

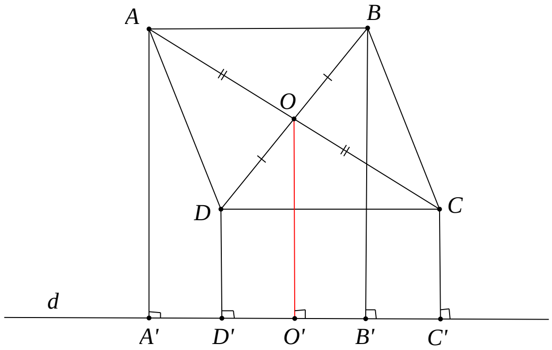
=> DD' + GG' = AA' + CC' => DD' = AA' + CC' - GG'

Thay (1) vào ta được: 2GG' = BB' + AA' + CC' - GG'

=> 3GG' = AA' + BB' + CC' => ĐPCM

Bài 5: Cho HBH ABCD và đường thẳng d nằm bên ngoài HBH, Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D trên d,

CMR: AA'+ CC' = BB' + DD'



HD:

Vì ABCD là hình bình hành

nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD

O' là hình chiếu của O xuống d

Khi đó ta có: OO' là đường trung bình của hình thang AA'C'C

nên: 2OO' = AA' + CC' (1)

Tương tự OO' là đường trung bình của hình thang DD'B'B

nên: 2.OO' = DD' + BB' (2)

Từ (1) và (2) => AA' + CC' = BB' + DD'

Bài 6: Cho tam giác ABC có trọng tâm G (G nằm bên trong tam giác), Vẽ đường thẳng d đi qua G, cắt AB, AC, Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên (d), Khi đó AA', BB', CC' có mối quan hệ gì?

HD:

Gọi I trên AG sao cho AI = IG

Kẻ MM' $\perp$ (d)

Khi đó ta có:

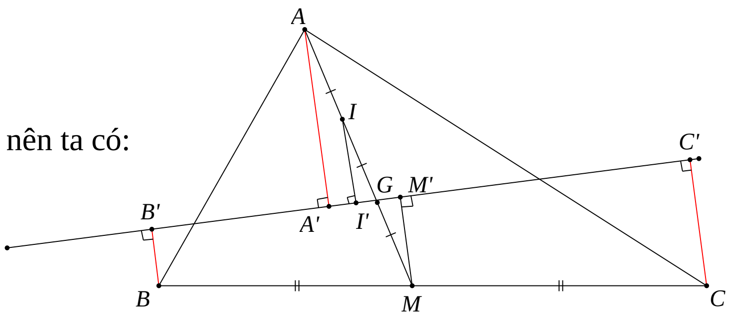
ΔGII' = ΔGMM' (cạnh huyền = góc nhọn)

=> II' = MM' mà II' = $\dfrac{1}{2}$AA' => AA' = 2. MM'

Hình thang BB'C'C có MM' là đường trung bình nên ta có:

2. MM' = BB' + CC'

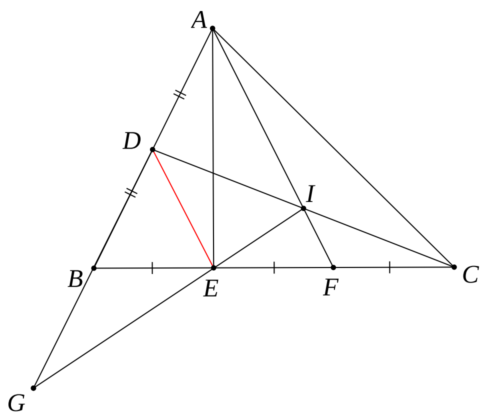
Nên ta có : AA' = BB' + CC'



Bài 7: Cho tam giác ABC, Gọi D là trung điểm cạnh AB, trên BC lấy các điểm E, F sao cho BE = EF = FC, trên tia đối của tia BA lấy điểm G sao cho BG = BD

CMR: AF, CD, GE đồng quy

HD:



Gọi I là giao điểm của CD và GE

=> E là trọng tâm của ΔDGC => DI = IC

ΔDEC có IF là đường trung bình nên IF // DE

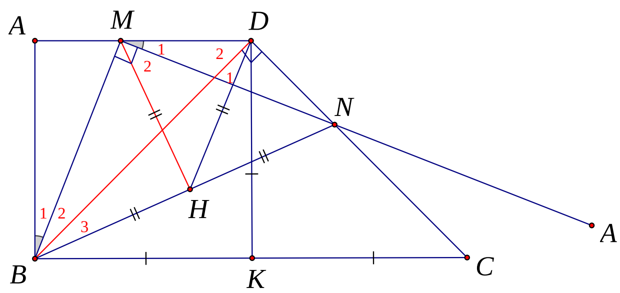
Lại có: DE là đường trung bình ΔABF => DE // AF

Khi đó A, I, F thẳng hàng hay AF có đi qua I

Bài 8: Cho hình thang ABCD có $A = B = 1v, BC = 2AB = 2AD$, Gọi M là 1 điểm nằm trên đáy nhỏ AD, kẻ Mx vuông góc với BM và Mx cắt CD tại N

CMR: MB = MN

HD:



Kẻ DK //AB, chứng minh ΔBDC vuông tại D

=> $ADC = 90^0 + 45^0 = 135^0$,

Gọi H là trung điểm của BN,

Chứng minh MH $\perp$ BN vì ΔBMN vuông

$MH = \frac{1}{2}BN, DH = \frac{1}{2}BN \Rightarrow MH = DH$

$HMD = HDM$ mà $HDM = ABH = DMN + MBH$ (1)

Và $HMD = HMN + DMN$ (2)

Từ (1) và (2) => $MBH = HMN$

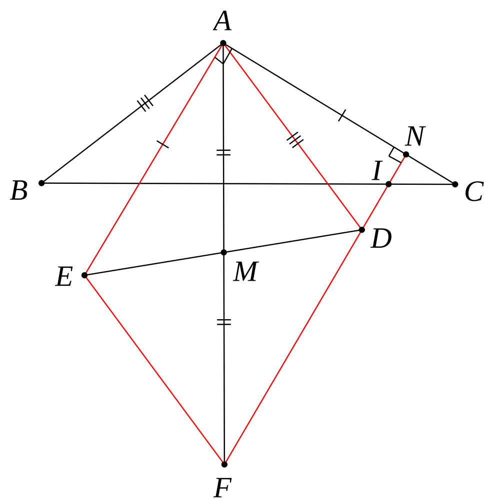
Mà: $MBH + MNH = 90^0 \Rightarrow HMN + MNH = 90^0$

Vậy HM $\perp$ BN => ΔBMN có MH vừa là đường cao vừa là trung tuyên nên MB = MN

Bài 9: Cho tam giác ABC có góc A tù, AC > AB, H là chân đường cao hạ từ A, về phía trong góc BAC, dựng D và E sao cho AD vuông góc với AB, AD = AB, AE vuông góc với AC và AE = AC, M là trung điểm DE

CMR: A, H, M thẳng hàng

HD:



Dựng HBH DAEF => M là trung điểm AF => AE = DF

Mà AE $\perp$ AC => DF $\perp$ AC

ta có: $DAE + BAC = DAE + BAD + DAC = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà: $DAE + ADF = 180^0 \Rightarrow BAC = ADF$

ΔADF = ΔABC (c.g.c) => $B = DAF$ và $C = F$

Gọi FD cắt BC tại I, cắt AC tại N và AF cắt BC tại H’

=> $\begin{cases} H'IF = NIC\left(d^2\right) \\ C = F \end{cases} \Rightarrow IH'F = N = 90^0$,

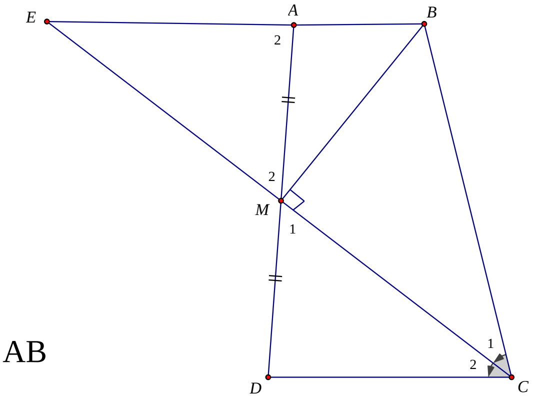
Hay AF $\perp$ BC tại H

=> A, F, H thẳng hàng => A, H, M thẳng hàng

Bài 10: Cho hình thang ABCD (AB // CD) tia phân giác góc C đi qua trung điểm M của AD, CMR:

a, $BMC = 90^0$ b, BC = AB + CD

HD:



a, Giả sử MC cắt AB tại E

Khi đó $\Delta CMD = \Delta EMA(g.c.g)$

=> CM = EM và CD = AE

Xét ΔBEC có: $E = C_2 = C_1$ => ΔBEC cân

Mà BM là đường trung tuyến

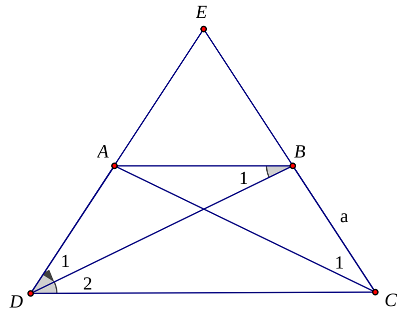
=> BM là đường cao

Vậy BM $\perp$ EC

b, Vi ΔBEC cân nên EB = BC => BC = EA + AB = DC + AB

Bài 11: Cho hình thang ABCD (AB // CD), có $C = 60^0$, DB là phân giác của góc D, Biết chu vi của hình thang là 20cm, Tính mỗi cạnh của hình thang

HD:



Đặt BC= a, ta có ngay:AD = AB = BC = a

Mà: $C = 60^0 => D_2 = 30^0 => DBC = 90^0$

Xét ΔBDC có $D_2 = 30^0, C = 60^0 => DC = 2a$

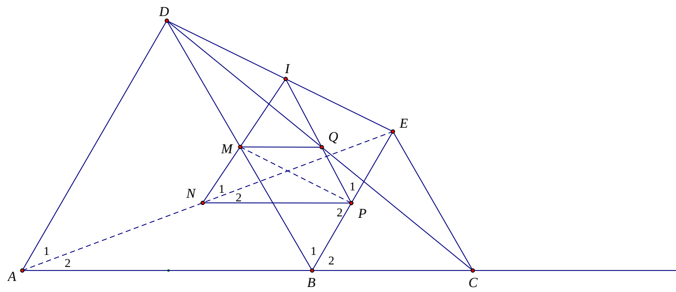
Mà Chu vi hình thang là 20 cm nên a + a + a + 2a = 20 => a = 4

Bài 12: Cho 3 điểm A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng d, (AB > BC), Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, vẽ các $\Delta ADB, \Delta BEC$ đều, Gọi M, N, P, Q, I theo thứ tự là Trung điểm của các đoạn thẳng BD, AE, BE, CD, DE

a, CMR: 3 điểm I, M, N thẳng hàng b, CMR: 3 điểm I, Q, P thẳng hàng

c, CMR: MNPQ là thình thang cân d, $NQ = \frac{1}{2} DE$

HD:



a, Dễ thấy AD // BE

IN là đường trung bình ΔADE => IN // AD

IM là đường trung bình ΔDBE => IM // BE // AD

=> 3 điểm I, M, N thẳng hàng

b, Chứng minh tương tự

c, Trong ΔAEB có NP là đường trung bình => NP // (d)

Tương tự MQ // (d) => MQ // NP

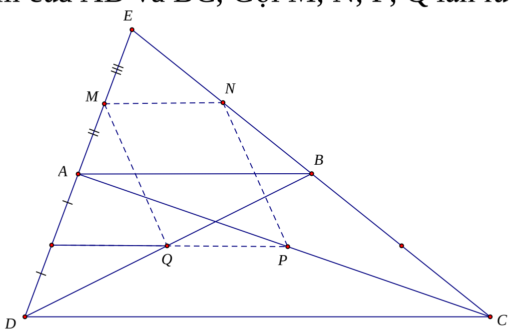
=> $\begin{cases} N_1 = A_1 \\ N_2 = A_2 \end{cases} => N = A = 60^0$,

Chứng minh tương tự ta có: $\begin{cases} D_1 = B_1 \\ P_2 = B_2 \end{cases} => QPN = 180^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$

d, Vì MNPQ thang cân => NQ = MP, Mà MP là đường trung bình ΔBED nên:

$MP = \frac{1}{2} DE => NQ = MP = \frac{1}{2} DE$

Bài 13: Cho hình thang ABCD (AB // CD), Gọi E là giao điểm của AD và BC, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, BE, AC, BD,
CMR: MNPQ là hình thang
HD:



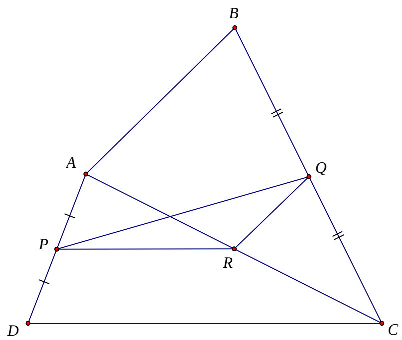
Dễ dạng chứng minh được MN // AB
Gọi R là trung điểm của AD khi đó ta có: RQ // AB
RP // DC // AB
Nên RP // AB => R, Q, P thẳng hàng => PQ / / AB
Vậy MNPQ là hình thang

Bài 14: Cho tứ giác ABCD, Gọi P, Q theo thứu tự là trung điểm của AD và BC

a, CMR: $PQ \le \frac{AB+CD}{2}$

b, Tứ giác ABCD là hình thang khi và chỉ khi $PQ = \frac{AB+CD}{2}$

HD:



a, Tự chứng minh

b, Ta chứng minh ABCD là hình thang => $PQ = \frac{AB+CD}{2}$

Thật vậy : ΔADC có pR là đường trung bình => $PR = \frac{1}{2}DC$ (1)

RQ là đường trung bình Δ ABC => $RQ = \frac{1}{2}AB$ (2)

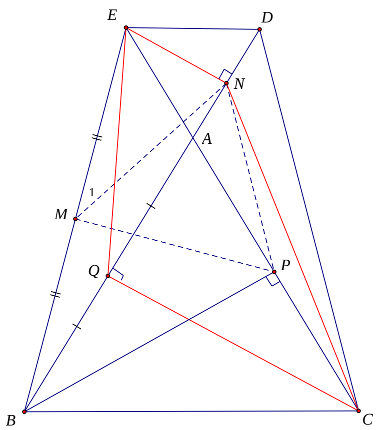
Cộng theo vế (1) và (2) ta được : $PQ + RQ = \frac{AB+CD}{2}$

Ta chứng minh nếu $PQ + RQ = \frac{AB+CD}{2}$ thì ABCD là hình thang

Thật vậy $PQ = \frac{AB+CD}{2}$ => $PQ = PR + RQ$ => 3 điểm P, Q, R thẳng hàng,

Mà : PQ // DC và RQ // AB => AB // CD => ABCD là hình thang

Bài 15: Cho ΔABC đều, Trên tia đối của tian AB, lấy D, trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho AD=AE, Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của BE, AD, AC, AB, CMR:
a, Tứ giác BCDE là hình thang cân b, Tứ giác CNEQ là hình thang
c, ΔMNP là tam giác đều
HD:



a, ΔAED đều => $D = 60^0 = B => ED//BC$
Lại có 2 đường chéo bằng nhau => là hình thang cân
b, ΔABC đều => CQ $\perp$ AD
ΔAED đều => EN $\perp$ AD => CQ // En => là hình thang

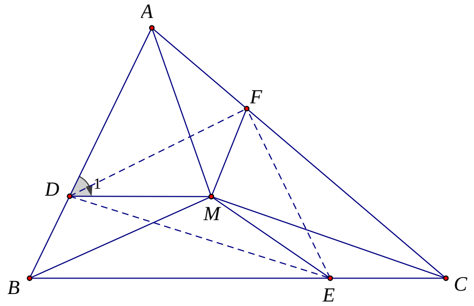
c, Ta có: NP là đường trung bình => $NP = \frac{1}{2}DC$

Xét ΔBEP có $P = 90^0$, MP là đường trung tuyến => $MP = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}DC$

Xét ΔENB có $N = 90^0$ và MN là đường trung tuyên => $MN = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}DC$

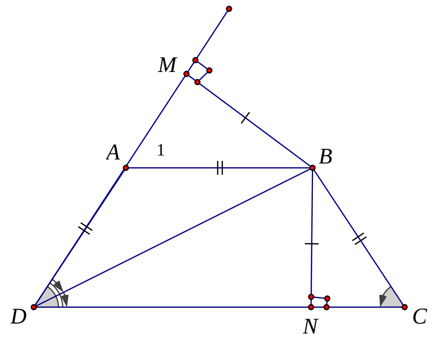
Vậy ΔNMP có 3 cạnh bằng nhau nên là tam giác đều

Bài 16 : Cho tam giác ABC đều, M là điểm nằm trong tam giác, Đường thẳng qua M và // với BC cắt AB ở D, đường thẳng qua M và // với AC cắt BC tại E,đường thẳng qua M và // với AB cắt AC ở F, CMR :
a, Tứ giác : ADMF, BDMF, CFME là các hình thang cân
b, $|MB - MC| < MA < MB + MC$
HD:



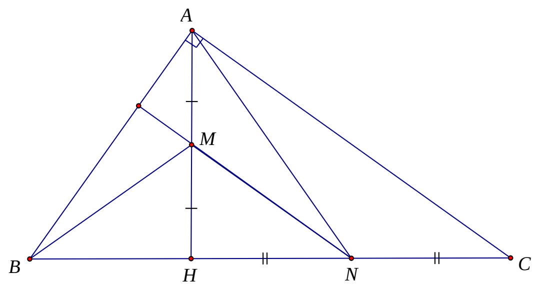
a, Vì ΔABC đều => $A = B = C = 60^0$
và $D_1 = B$ (đồng vị)
=> hình thang ADMF có hai góc ở đáy bằng nhau
Nên ADMF là hình thang cân
Các hình thang còn lại CMTT
b, Ta có:
MA=DF. MB=DE, MC=EF
Xét Δ DEF => $|DE - EF| < DF < DE + EF$ (Bất đẳng thức trong tam giác)

Bài 17 : Cho tứ giác ABCD, có : $A + C = 180^0, AB = BC = AD$
CMR : ABCD là hình thang cân
HD:



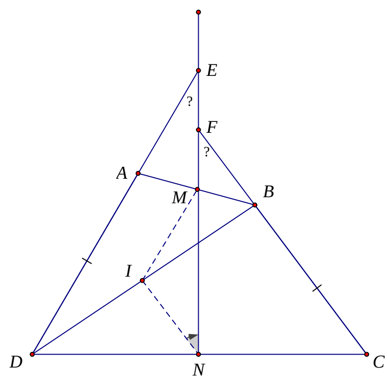
Vẽ $BM \perp AB, BN \perp CD$
=> ΔABM =ΔCBN (cạnh huyền- góc nhọn)
=> BM =BN
=> BD là tia phân giác góc D
Mà Δ ABD cân => AB// DC=> $\begin{cases} A_1 = D \\ A_1 = C \end{cases}$ => $D = C$
Vậy ABCD là hình thang cân

Bài 18 : Cho tam giác ABC vuông tại A, Vẽ AH vuông góc với BC tại H, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH CH, CMR :
MN vuông góc với AB và BM vuông góc với AN
HD:



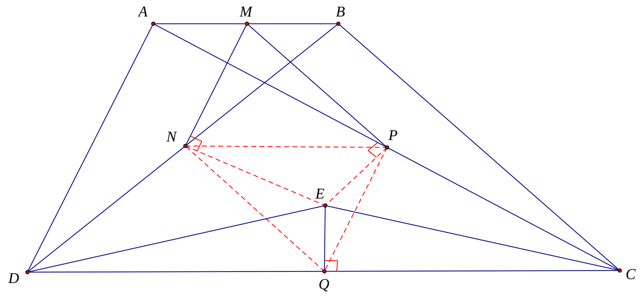
Vì MN là đường trung bình
=> MN//AC mà AC $\perp$AB
=> MN $\perp$AB=> M là trực tâm của ΔABN
ΔABN có M là trực tâm => BM $\perp$AN

Bài 19 : Cho tứ giác ABCD có AD = BC, đường thẳng đi qua trung điểm M và N của các cạnh AB và CD cắt AD và BC lần lượt ở E và F, CMR : $AEM = MFB$
HD :



Gọi I là trung điểm của BD
Ta có: MI, NI lần lượt là đường trung bình
=> $MI = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} = IN$ => ΔIMN cân
=> $M = E$ (đồng vị)
và $N = F$ (so le trong)
Vậy $E = F$

Bài 20 : Cho hình thang ABCD, (AB<CD), GQi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BD, AC, đường thẳng vuông góc với MN tại N và đường thẳng vuông góc với MP tại P cắt nhau tại E, CMR: EC = ED
HD:



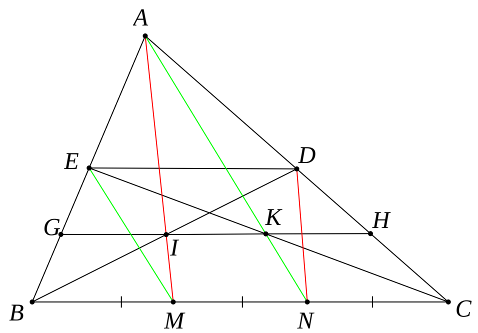
Gọi Q là trung điểm của CD

MN là đường trung bình => $MN = \frac{1}{2}AD, MN // AD$

PQ là đường trung bình => $PQ = \frac{1}{2}AD, PQ // AD$

Chứng minh tương tự => MNPQ là hình bìn hành

Bài 21: Cho tam giác ABC có BC = a, các đường trung tuyến BD, CE, lấy các điểm M, N trên các cạnh BC sao cho BM=MN=NC, GQi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE, Tính IK
HD:



Vì DN là đường trung bình của Δ ACM => DN // AM

ΔBDN có: $\begin{cases} BM = MN \\ AM // DN \end{cases}$ => I là trung điểm của BD

Chứng minh tương tự=> K là trung điểm của EC

Kéo dài IK cắt AB và AC lần lượt tại G và H

Khi đó Δ BED có GI đi qua trung điểm I của BD và // ED

nên GE=GB ΔCED có KH đi qua trung điểm K của EC và // ED
nên HD=HC

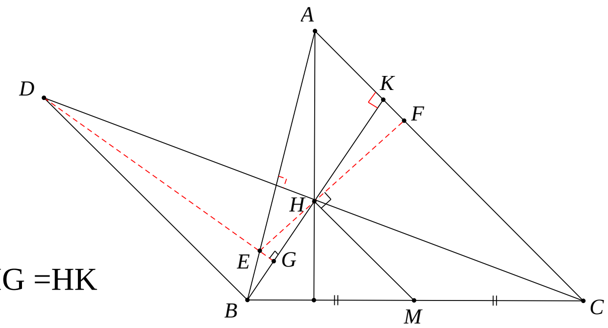
Khi đó ta có: $GI = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{4}a, KH = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{4}a$

Còn $2GH = a + \frac{1}{2}a = \frac{3a}{2} => GH = \frac{3a}{4}$

Nên IK= GH - GI- HK= $\frac{3a}{4} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a = \frac{a}{4}$

Vậy $IK = \frac{a}{4}$

Bài 22: Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H, M là trung điểm của BC, qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM, cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F
a, Trên Tia đối tia HC, lấy điểm D sao cho HD=HC, CMR E là trực tâm của tam giác DBH
b, CMR: HE=HF
HD:
a, Ta có MH là đường trung bình ΔBCD
=> MH// BD,
Mà EF // MH => EF $\perp$ BD
Ta lại có: BA $\perp$ DH => ΔBDH có E là trực tâm



b, Gọi G là giao điểm của DE và BH
=> K là giao điểm BH và AC
=> ΔDHG = ΔCHK (cạnh huyền - góc nhọn) => HG =HK
=> ΔHGE = Δ HKF (c. g. c) => HE= HF

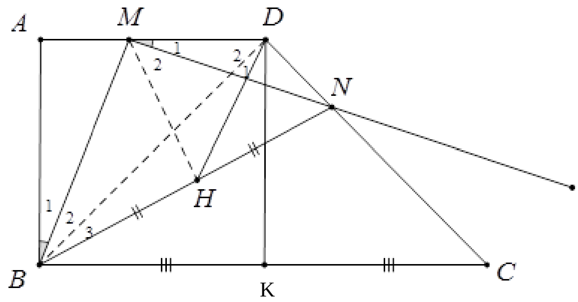
Bài 23: Cho hình thang ABCD, có $A = B = 1v$ và BC=2AB=2AD, gọi M là 1 điểm trên dây nhỏ AD, Kẻ Mx vuông góc với BM và Mx cắt CD tại N, CMR: MB =MN

HD:

Kẻ DK // AB, CMR ΔBDC vuông tại D

=> $ADC = 90^0 + 45^0 = 135^0$

Gọi H là trung điểm của BN,



=> MH $\perp$ BN vì ΔBMN vuông

=> $\begin{matrix} MH = \frac{1}{2}BN \\ DH = \frac{1}{2}BN \end{matrix}$ => MH= DH

$HMD = HDM$, Mà $HDM = ABH = DMN + MBH$

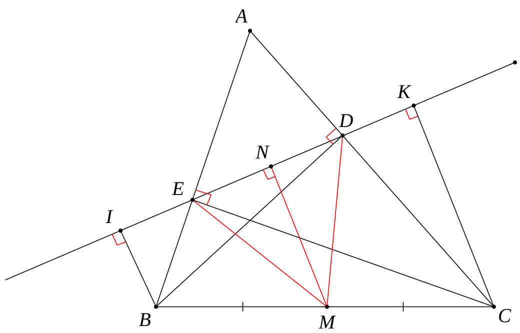
và $HMD = HMN + DMN$ => $MBH = HMN$

Mà: $MBH + MNH = 90^0$ => $HMN + MNH = 90^0$

Vậy HM $\perp$ BN

Bài 24: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, các đường cao BD và CE, gọi I và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng ED, CMR: IE=DK

HD:



Gọi M là trung điểm của BC, kẻ MN $\perp$ ED

Tứ giác BIKC là hình thang => NI= NK (1)

ΔBEC vuông có EM = $\frac{1}{2}$. BC

Δ BDC vuông có DM = $\frac{1}{2}$. BC => EM =DM

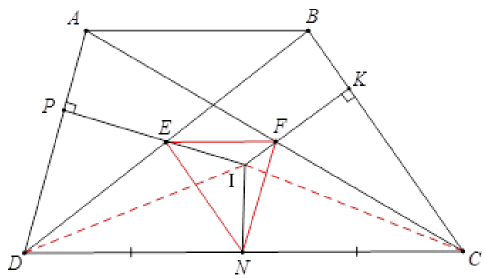
=> ΔEDM cân có MN đường cao và là trung tuyến

=> NE = ND (2)

Từ (1) và (2) => IE= DK

Bài 25: Cho hình thang ABCD (AB//CD), Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của BD và AC, Vẽ đường thẳng đi qua E và vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC, cắt nhau tại I, CMR: IC=ID

HD:



Gọi N là trung điểm của DC

=> FN là đường trung bình của ΔADC

=> $\begin{cases} FN // AD \\ PE \perp AD \end{cases}$ => $PE \perp FN$ => $EI \perp FN$

Chứng minh tương tự:

$FQ \perp EN$ => $FI \perp EN$ => I là trực tâm

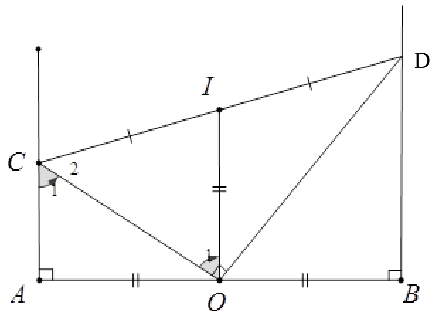
=> IN $\perp$ EF, mà EF // DC => IN $\perp$ DC

ΔIDC có IN vừa trung tuyến vừa đường cao => ΔIDC cân => ID=IC

Bài 26: Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó, trên cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ AB, vẽ hai tia Ax và By vuông góc với AB, Một góc vuông đỉnh O cắt Ax tại C, cắt By tại D

a, AC+BD=CD b, CO là tia phân giác của ACD

HD



a, Gọi I là trung điểm của CD

AC// BD => OI là trung bình của hình thang ABCD

=> $OI = \dfrac{AC+BD}{2}$

=> $AC + BD = 2.OI$

Lại có Δ COD vuông => OI là đường trung tuyến

=> OI= CI= ID=> 2OI = IC +ID = CD

b, ta có Δ OCD vuông tại O có OI là đường trung tuyến nên OI = IC

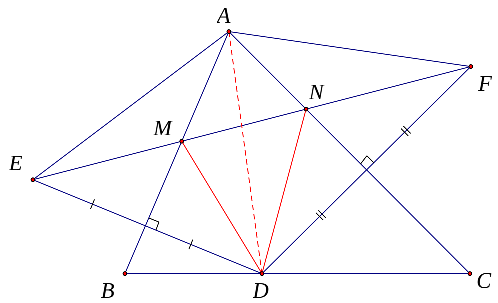
=> Δ IOC cân tại I=> $C_2 = O_1$

Mà: $O_1 = C_1$ Nên => $C_1 = C_2$ vậy OC là tia phân giác góc ACD

Bài 27: Cho ΔABC nhọn, trong đó $A = 60^0$, Lấy D là điểm bất kì trên BC, gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của D qua cạnh AB, AC. EF cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a, CMR: AE=AF và Tính EAF b, CMR: AD là tia phân giác ΔDMN

HD:



a, Ta có: D và E đối xứng với nhau qua AB

nên AB là đường trung trực của ED=> AE=AD

Tương tự AD= AF

khi đó AE=AF, Ta có: $\begin{matrix} EAD = 2.MAD \\ DAF = 2.DAM \end{matrix}$

=> $EAF = 2\left(MAD + DAM\right) = 2.A = 120^0$

b, Do đối xứng nên ta có:

$\begin{matrix} AEM = ADM \\ AFN = ADN \end{matrix}$ và ΔAEF cân tại A nên $AEM = AFN$ => $ADM = ADN$

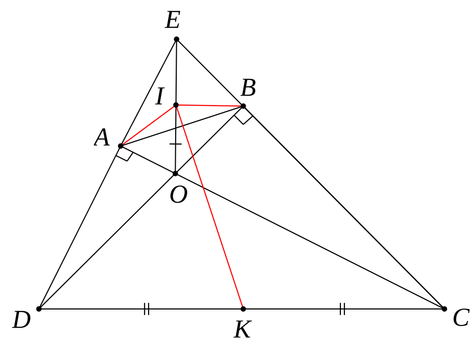
Vậy AD là phân giác góc MDN

Bài 28: Cho tứ giác ABCD, có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, và AD vuông góc AC, BD vuông góc với CB, Gọi E là giao điểm của AD và BC, d là đường thẳng đi qua các trung điểm của EO và CD

a, CMR: A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d

b, Tứ giác ABCD sẽ như thế nào nếu D trùng EO

HD:



a, Ta có: Gọi I, K lần lượt là trung điểm của OE và BC

Ta có:

ΔAOE vuông tại A có Ai là trung tuyến

nên AI= IE=IO (1)

ΔBOE vuông tại B có BI là đường trung tuyến

nên BI=EI=IO (2)

Từ (1) và (2) ta có: IA = IB

Tương tự ΔADC vuông tại A có AK là đường trung tuyến

=> AK = DK=CK

ΔBDC có BK là đường trung tuyến của tam giác vuông nên BK = KD= KC

Nên KA= KB hay K nằm trên đường trung trực AB

Vậy IK là trung trực của AB hay A và B đối cứng với nhau qua (d)

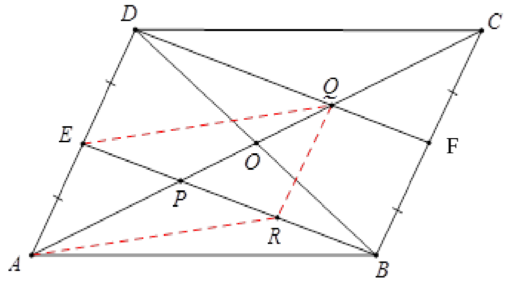
b, Ta thấy EO là đường thẳng chứa đường cao của ΔEDC

Nếu d trùng với Eo thì d vừa là đường trung trực AB và CD nên ABCD là hình thang cân

Bài 29: Cho HBH ABCD, Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC, đường chéo AC cắt BE, DF lần lượt tại P và Q, gọi R là trung điểm của đoạn thẳng BP, CMR:

a, AP=PQ=QC   b, Tứ giác ARQE là hình bình hành

HD:



a, Trong ΔBDC có CO và DF là hai đường trung tuyến nên Q là trọng tâm

=> $OQ = \frac{1}{2}QC = \frac{1}{3}OC$

Tương tự ΔABD có P là trọng tâm

=> $OP = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{3}AO$

Từ (1) và (2) ta có AP= QC

Ta lại có :

$$PQ = AC - AP - QC = AC - (2AP) = AC - \frac{2}{3}AO = AC - \frac{AC}{3} = \frac{2}{3}AC = AP$$

vậy AP= PQ= QC

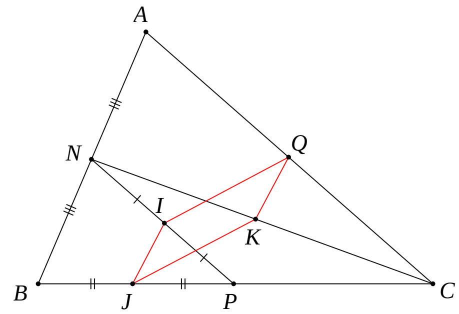
b, Vì P là trọng tâm ΔABD nên $EP = \frac{1}{2}PB = PR$

Tứ giác ARQE có hai đường chéo cắt nhau tịa trung điểm mỗi đường nên là HBH

Bài 30: Cho tam giác ABC, ba điểm N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, AC, và I, J, K lần lượt là TĐ của các đoạn thẳng NP, BP, NC.

CMR: IJKQ là hình bình hành

HD:



Ta có:

Δ NPB có IP =IN (gt) và JP =JN (gt)

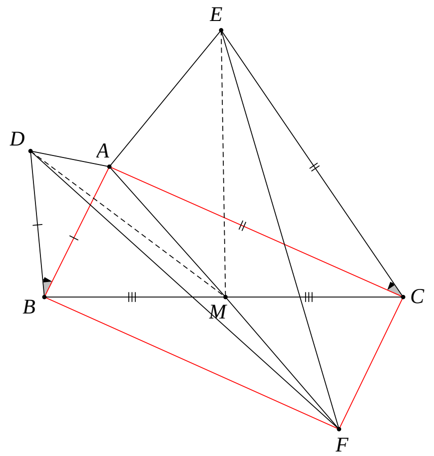
Nên Ị là đường trung bình => IJ // NB và IJ =$\frac{1}{2}$NB

Tương tự ta có: QK // AN và QK =$\frac{1}{2}$. AN=$\frac{1}{2}$NB

Từ đó ta có: IJKQ là hình bình hành

Bài 31: Cho tam giác ABC (AB<AC), Dựng về phía ngoài Δ các ΔABD cân tại B, ΔACE cân tại C sao cho $ABD = ACE$, Gọi M là trung điểm BC, so sánh MD và ME

HD:



Dựng HBH ABFC

Ta chứng minh được ΔBDF= ΔCFE => FD= FE

Ta chứng minh AD<AE

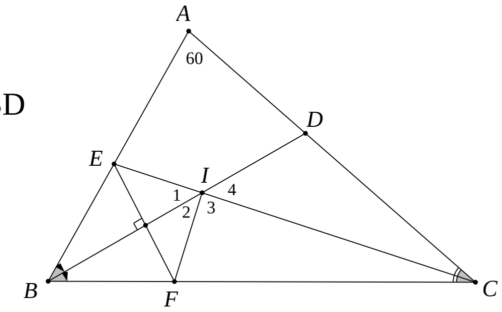
Từ đó $AFD = AFE => MD < ME$

Bài 32: Cho ΔABC có $A = 60^0$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I, qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC ở F, CMR:

a, E và F đối xứng nhau qua BD b, IF là phân giác BIC

c, D và F đối xứng nhau qua IC

HD:



a, ΔEBF cân tại B, BD là tia phân giác góc B,

nên BD là đường trung trực EF, vậy E, F đối xứng với nhau qua BD

b, Tính $BIC = 120^0$ nên $I_1 = 60^0, I_2 = 60^0, I_3 = 60^0$,

vậy IF là tia phân giác BIC

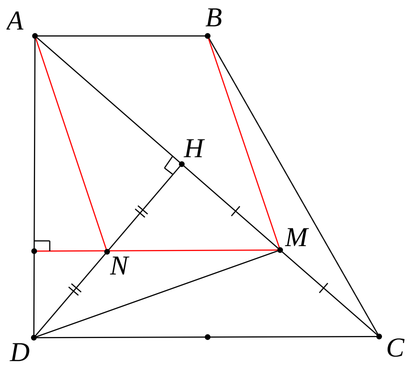
c, $\Delta IDC = \Delta IFC$ (g.c.g) => IF =ID, CF= CD

Do đó: CI là đường trung trực của DF

Vậy D, F đối xứng với nhau qua CI

Bài 33: Cho hình thang vuông ABCD $\left(A = D = 90^0\right)$, có CD= 2AB, gọi H là hình chiếu của D trên AC, M là trung điểm của HC, CMR: $BMD = 90^0$

HD:



Gọi N là trung điểm của HD, ta có: MN là đường trung bình

=> $MN = \frac{1}{2}DC, MN // DC$

Mà: $AB // DC, AB = \frac{1}{2}DC$

nên AB// MN và AB= MN => ABMN là hình bình hành

=> AN//BM

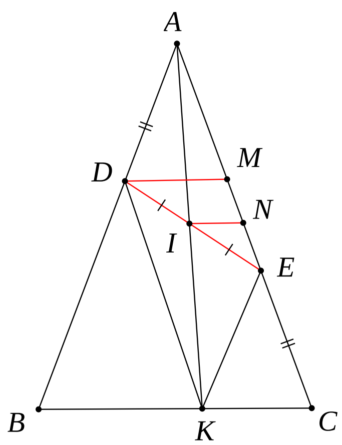
Δ ADM có DH $\perp$ AM, MN $\perp$ AD, AN $\perp$ DM

Khi đó $BMD = 90^0$

Bài 34: Cho Δ ABC cân tại A, lấy điểm D trên AB, E trên AC sao cho AD=CE, gọi I là trung điểm của DE, K là giao điểm AI và BC

CMR: ADKF là HBH

HD:



Kẻ DM, IN // BC, Hãy chứng minh AM = CE

Vì MN =NE=> N là trung điểm AC

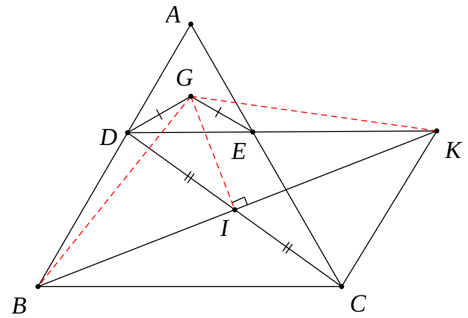
=> I là trung điểm AK

Tứ giác ADKE có hai đường chéo cắt nhau

tại trung điểm mỗi đường nên là HBH

Bài 35: Cho tam giác ABC đều, một đường thẳng // với BC cắt AB, AC ở D và E, Gọi D là trọng tâm của tam giác ADE, I là trung điểm của CD, Tính số đo các góc của tam giác GIB

HD:



Qua C vẽ đường thẳng song song với BD, cắt DE tại K

Ta có: BDKC là hình bình hành=> B, I, K thẳng hàng

Chứng minh ΔGDB= ΔGEK (c.g.c)

Để ΔGBK cân tại G có $BGK = 120^0$,

do đó các góc của ΔGBI lần lượt là $90^0, 60^0, 30^0$

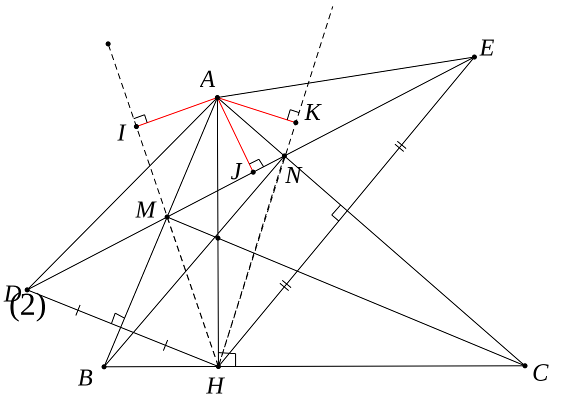
Bài 36: Cho ΔABC, kẻ đường cao AH, Gọi D và E theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua AB và AC, đường thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a, CMR: ΔDAE cân b, CMR: HA là phân giác MHN

c, CME : 3 đường thẳng BN, CM, AH thẳng hàng

d, CMR : BN, CM là các đường cao của Δ ABC

HD:



a, Ta có: AD= AH, AE = AH => AD = AE

b, Do Tính chất đối xứng ta => AB là phân giác DMH

Kẻ $\begin{cases} AI \perp HM \\ AJ \perp DM \end{cases}$ => $AI = AJ$ (1)

AC là phân giác ENH, Kẻ AK $\perp$HN=> AK= AJ (2)

Từ (1) và (2) ta có: AI = AK

Vậy A cách đều 2 cạnh góc MHN

=> HA là phân giác góc MHN

c, Chứng minh tương tự ta cũng có: CM là tia phân giác HMN

BN là tia phân giác góc MNH

Trong ΔMHN các đường phân giác trong HA, MC, NB cùng đồng quy tại 1 điểm

d, AB là phân giác góc DMH

MC là phân giác góc MHN, mà 2 góc DMH, MHN kề bù => MC$\perp$AB

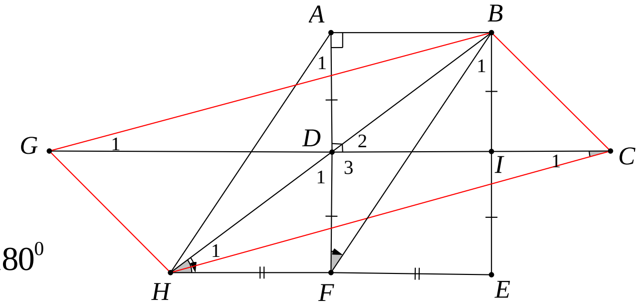
=> MC là đường cao Δ ABC

Chứng minh tương tự BN là đường cao của ΔABC

Bài 37: Cho hình thang vuông ABCD, (AB//CD), gọi E , F theo thứ tự là các điểm đối xứng của B và điểm A qua đường thẳng DC, G, H theo thứ tự là các điểm đối xứng của C và E qua AD

a, CMR: D là trung điểm của BH b, CMR: AH// BF, CH// BG

HD:



a, Gọi I là giao BE và DC, do tính chất đối xứng ta có:

BI =IE, Mà DF =AD và AD=BI=> DF =BI

Ta cũng có: DI= HF

Hai tam giác vuông ΔBID và ΔDFH bằng nhau

cho ta DB= DH (1)

Và $B_1 = D_1$ => $D_1 + D_2 + D_3 = D_1 + B_1 + 90^0 = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> H, B, D thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) => D là trung điểm BH

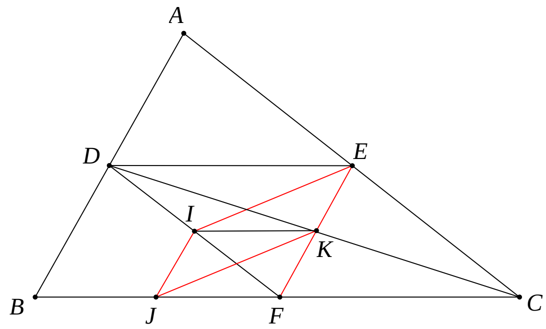
b, Dễ dạng chứng minh được ΔADH = ΔFDB => $A_1 = F_1$ => $AH // BF$

Dễ chứng minh được ΔBDG = Δ HDC => $C_1 = G_1 => CH//GB$

Bài 38: Cho ΔABC, Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC và I, J, K theo thứ tự là trung điểm của DF, BF, CD

a, CMR: Tứ giác IJFK và IEKJ là hình bình hành

b, 3 điểm E, K, F thẳng hàng



HD:

a, Ta có: $\begin{cases} IJ = BD, IJ//BD \\ KF = BD, KF//BD \end{cases}$ => IJFK là hình bình hành

Chứng minh tương tự cho tứ giác IEKJ

b, DE// FC và DE =FC

=> DECF là hình bình hành

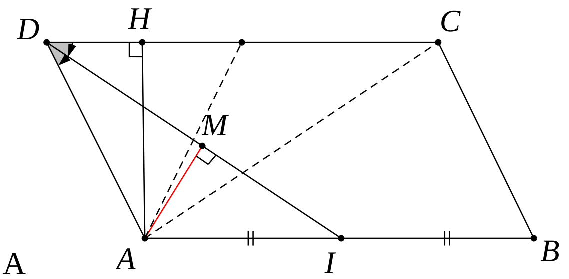
=> EF đi qua trung điểm K của DC

Vậy E, K, F thẳng hàng

Bài 39: Cho HBH ABCD có $A = 120^0$, Tia phân giác góc D đi qua trung điểm I của AB, Kẻ AH vuông góc với DC, CMR:

a, AB=2AD　　　　　b, DI=2AH　　　　　c, AC vuông góc AD

HD:



a, ΔDAI cân đỉnh A

=> AD = AI= $\frac{1}{2}AB$

b, Kẻ AH $\perp$ DC, AM $\perp$ DI

=> ΔADM = ΔADH => AH= DM = $\frac{1}{2}$ DI

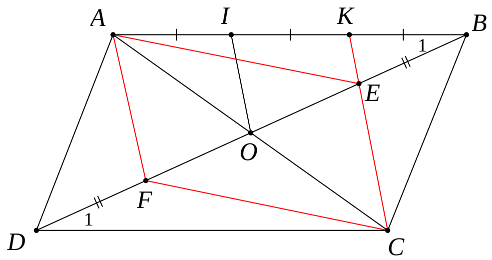
c, ΔADC có $D = 60^0 => CD = 2.AD => \Delta ADC$ vuông tại A

Bài 40: Cho HBH ABCD, lấy hai điểm E, F trên BD sao cho $BE = DF < \frac{BD}{2}$

a, CMR: AECF là HBH

b, Gọi K là giao điểm của CE và AB, I là trung điểm của AK, Xác định vị trí E sao cho AI=IK=KB

HD:



a, Xét Δ ABE và Δ CDF ta có:

AB= CD, $B_1 = D_1$ và BE= CF => ΔABE=ΔCDF (c. g.c)

=> AE= CF

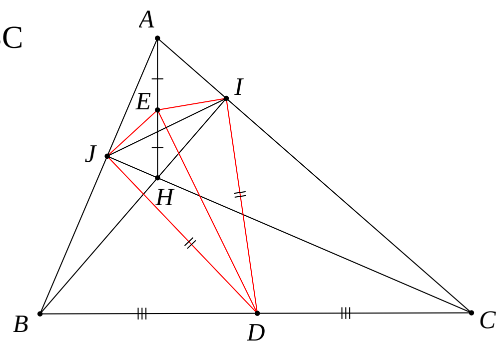
Chứng minh tương tự AF = CE=> AECF là hình bình hành

b, Ta có:

$\begin{cases} OA = OC \\ AI = KI \end{cases} => OI//CK$ Khi đó: $\begin{cases} BK = IK \\ KE//IO \end{cases}$ => E là trung điểm OB

Bài 41: Cho ΔABC, kẻ các đường cao BD và CJ, Gọi H là trực tâm của Δ, E là trung điểm của AH, D là trung điểm của BC, CMR: I và J đối xứng với nhau qua ED

HD:



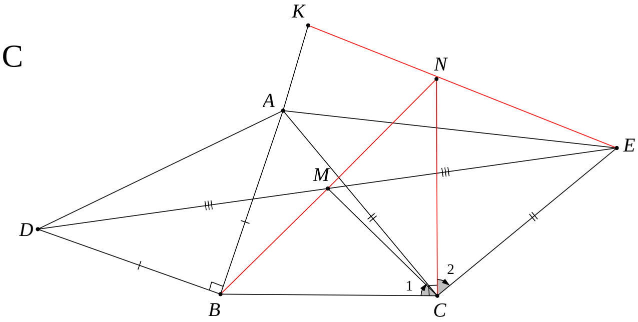
ΔBIC vuông tại I có ID là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

=> $ID = \frac{BC}{2}$

Chứng minh tương tự: $JD = \frac{BC}{2} => ID = JD$

Chứng minh tương tự: JE= EI

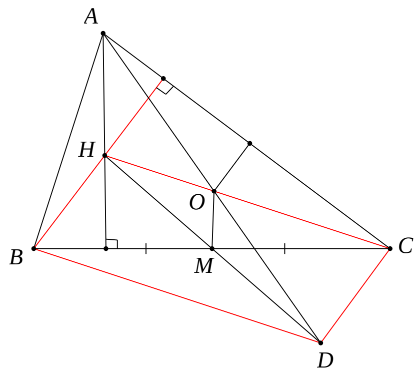
=> ED là đường trung trực của IJ
=> IJ đối xứng nhau qua ED
Bài 42: Cho ΔABC, Về phía ngoài tam giác vẽ các ΔABD vuông cân tại B, ΔACE vuông cân tại C, Gọi M là trung điểm của DE, CMR: ΔMBC vuông cân
HD:



Trên nửa mặt phẳng bờ BC, Vẽ ΔBCN vuông cân tại C
=> ΔABC = ΔENC (c.g.c)
=> $BAC = NEC \Rightarrow KAC + NEC = 180^0$
=> $AKE = 90^0$ (K là giao điểm cảu EN và AB)

Ta lại có : BD=NE (= AB)
=> BD// NE (Cùng vuông góc với AB)
=> BDNE là hình bình hành
=> M là trung điểm BN
Mà Δ CBN vuông cân tại C => ΔMBC vuông cân tại M

Bài 43: Cho ΔABC có ba góc nhọn (AB<AC), gọi H là trực tâm, O là giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O
a, CMR: Tứ giác BHCD là HBH
b, Gọi M là trung điểm của BC, CMR : AH=2.MO
HD:

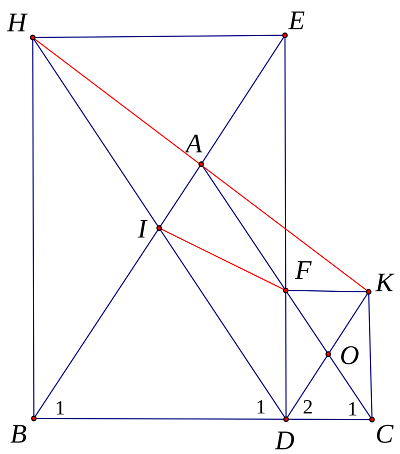


a, Từ AO= OC = OD
=> Chứng minh $ACD = 90^0$,
ta có: DC $\perp$ AC, BH $\perp$ AC (H là trực tâm của ΔABC)
=> BH // DC
Chứng minh tương tự ta cũng có: CH// DB
Vậy BHCD là Hình bình hành

b, M là trung điểm của BC
=> M là trung điểm của HD
Mà O là trung điểm của AD => OM là đường trung bình của ΔAHD
=> OM = $\frac{1}{2}$AH => AH= 2OM

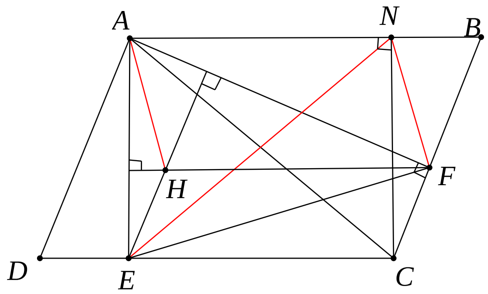
Bài 44: Cho ΔABC cân tại A, từ 1 điểm D bất kỳ trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC ở E và F, Vẽ các HCN BDEH, CDFK
CMR:A là trung điểm của HK

HD:
Gọi I và O là tâm của HCN BDEH và CDFK, Ta có:
$B_1 = D_1, C_1 = D_2$ Mà $B_1 = C_1 (gt) \Rightarrow B_1 = D_1 = C_1 = D_2$
=> BE// DK, DH// CA
=> AIDO là hình bình hành nên AO = ID
mà HI = ID, Nên AO = HI
Ta lại có: AO // HI nên AOIH là hình bình hành
Do đó:
AH // IO, AH= IO (1)
Chứng minh tương tự ta có:
AIOK là hình bình hành => AK// IO và AK=IO (2)
Từ (1) và (2) ta có: H, A, K thẳng hàng và AH= AK



Bài 45: Cho HBH ABCD, Các đường cao AE và AF, biết AC =25cm, EF=24cm, Tính khoảng cachs từ A đến trực tâm H của ΔAEF

HD:



Kẻ CN vuông góc với AB,

Tứ giác EHFC có EH // CF, HF// FC

nên EHFC là hình binh hành => AN = HF (= EC)

Tứ giác ANFH có AN = HF, AN// HF

nên là hình bình hành => AH + NF, AH// NF

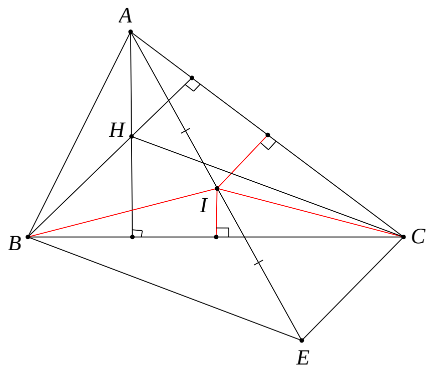
Lại có AH $\perp$ EF nên NF $\perp$ EF

ΔEFN vuông tại F có EF =24cm, NE = AC= 25cm nên

$NF^2 = NE^2 - EF^2 = 25^2 - 24^2 = 49 \Rightarrow NF = 7 \Rightarrow AH = 7cm$

Bài 46: Cho ΔABC, Trực tâm H, I là giao điểm các đường trung trực, Gọi E là điểm đối xứng với A qua I, CMR: BHCE là hình bình hành

HD:



Gọi I là giao của 3 đường trung trực => IA = IB = IC

Lại có: IA = IE nên IA= IB= IE= IC

Chứng minh AC $\perp$CE để suy ra BH// EC

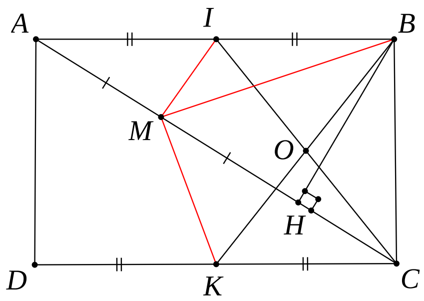
tương tự CH// BE

Bài 47: Cho H là hình chiếu của B trên đường chéo AC của HCN ABCD, M và K theo thứ tự là trung điểm của AH và CD

a, Gọi I và O theo thứ tự là trung điểm của AB và IC, CMR: $MO = \frac{1}{2}IC$

b, Tính số đo BMK ?

HD:



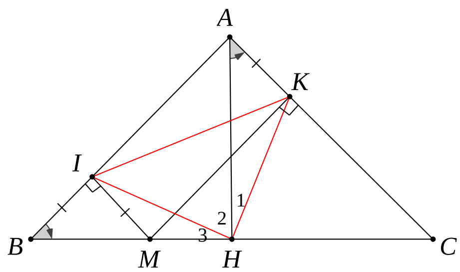
Ta có: BIKC là Hình chữ nhật nên O là trung điểm của IC và BK

Xét ΔIMC vuông, Ta có : MO= $\frac{1}{2}$ DC

b, ΔMBK có MD = $\frac{1}{2}$IC=$\frac{1}{2}$BK, Nên $BMK = 90^0$

Bài 48: Cho ΔABC vuông cân tại A có AH là đường cao, Gọi M là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC, I và K là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC, CMR: ΔIHK vuông cân

HD:



Chứng minh AIMK là hình chữ nhật

Vì Δ ABC vuông cân tại A

=> AK= IM = BI

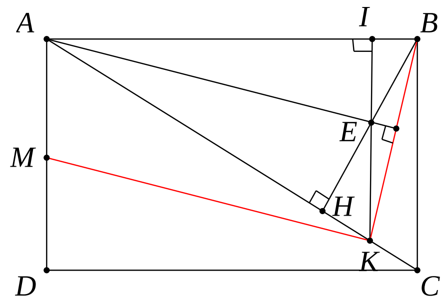
mà BH = HA => $HBI = HAK = 45^0$

=> ΔBHI = ΔAHK (c. g. c)

=> IH = HK

Mà $H_3 + H_2 = 90^0 \Rightarrow H_1 + H_2 = 90^0$

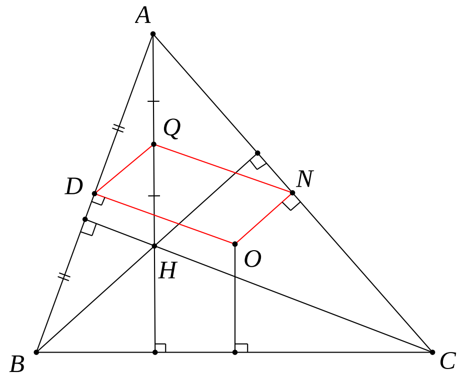
Bài 49: Cho HCN ABCD, Kẻ BH vuông góc với AC, Gọi M và K lầ lượt là trung điểm của HC và AD, CMR: BK vuông góc với KM



HD:

ΔAKB, kẻ đường cao KI cắt BH tại E
=> E là trực tâm của ΔAKB=> AE $\perp$BK
Ta có : KI// AD và KI //BC => KE // MA và KE =MA
=> Tứ giác AMKE là hình bình hành
=> AE//MK mà AE $\perp$BK=> MK $\perp$BK

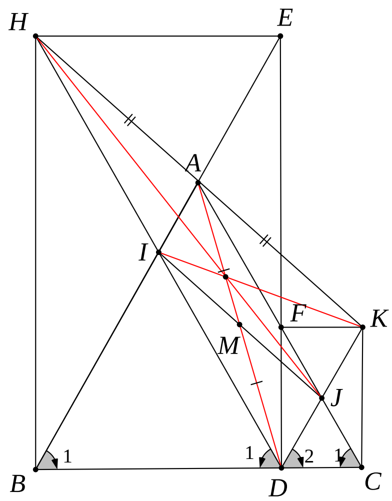
Bài 50: Cho ΔABC nhọn, Trực tâm H, giao điểm của các đường trung trực là O, Gọi P, Q, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AH, AC
a, CMR: OPQN là HBH
b, ΔABC cần có điều kiện gì để OPQN là HCN
HD:



a, Gọi O là giao của 3 đường trung trực nên $OP \perp AB, ON \perp AC$
Trong Δ AHC, QN là đường trung bình nên QN// HC
Và PO //HC (cùng vuông góc với AB)
Chứng minh tương tự ta có: OPQN là hình bình hành
b, ta có: tứ giác BCQN là hình chữ nhật có 2 đường chéo là NC và BQ
=> NC = BQ
=> $MP = \frac{1}{2}NC = \frac{1}{2}BQ$,
Xét ΔMQB có MP là đường trung tuyến nên MP = $\frac{1}{2}$BQ
nên ΔMBQ vuông tại M => MB $\perp$MQ

Bài 51: Cho ΔABC cân tại A, từ 1 điểm D bất kỳ trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC ở E và F, Vẽ các HCN BDEH, CDFK, Gọi I, J lần lượt là tâm các HCN BDEH và CDFK, M là trung điểm của AD
a, CMR: Trung điểm HK là 1 điểm có định không phụ thuộc vào vị trí của D trên BC
b, CMR: 3 điểm I, J, M thẳng hàng và 3 đường thẳng AD, HJ, KI đồng quy

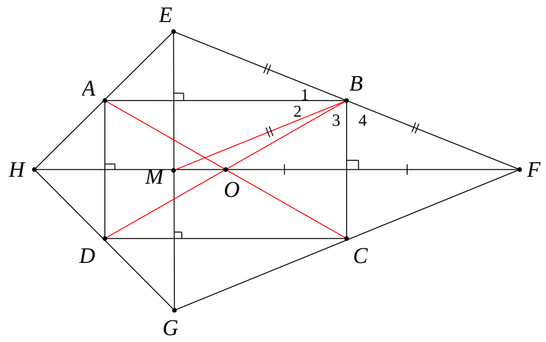
HD:



a, Ta có: $B_1 = D_1$ mà $B_1 = C_1 => D_1 = C_1 => ID // AC$
Chứng minh tương tự ta có: JD// AB
Khi đó AIDJ là hình bình hành=> AJ // ID, AJ = ID
=> Chứng minh AHIJ là hình bình hành
=> IJ // AH và IJ = AH và IJ //AK và IJ =AK
Khi đó 3 điểm A, H, K thẳng hàng và A là trung điểm của HK

b, Tứ giác AIDJ là hình bình hành
=> M là trung điểm của AD,
thì M nằm trên đường chéo của HBH

Bài 52: Cho HCN ABCD và 1 điểm M thuộc miền trong của HCN
a, Gọi E, F, G, H là các điểm đối xứng của M theo thứ tự qua các trục AB, BC, CD, DA, CMR: E, F đối xứng với nhau qua điểm B. E và H đối xứng với nhau qua A. G và H đối xứng với nhau qua D. F và G đối xứng với nhau qua C
b, Chọn M sao cho EFGH là HBH, khi đó EFGH là hình gì?



HD:

a, Do tính chất của đối xứng trục nên $B_1 = B_2, B_3 = B_4$

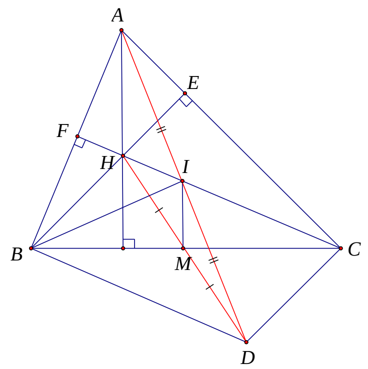
=> $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = EBF = 180^0$

=> 3 điểm E, B, F thẳng hàng
Mà BE = BM = BF

=> E, F đối xứng với nhau qua B
Các điểm khác chứng minh tương tự

b, Để EFGH là hình bình hành thì EF// HG//AO, Khi đó M trùng với O, Tâm của HCN
=> EFGH là hình thoi

Bài 53: Cho ΔABC có trực tâm H, Gọi M là trung điểm của BC, Gọi D là điểm đối xứng với H qua M, Gọi I là trung điểm của AD, CMR: IM vuông góc BC

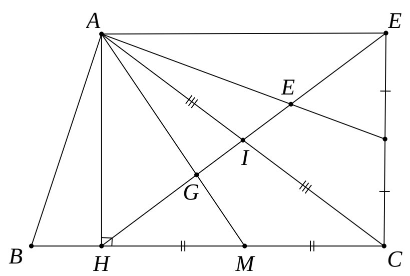


HD:

Vì IM là đường trung bình của ΔAHD
=> $\begin{cases} IM // AH \\ AH \perp BC \end{cases}$ => $IM \perp BC$

Bài 54: Cho ΔABC, kẻ đường cao AH, gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I, Gọi M và N lần lượt là trung điểm của HC và CE, các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K
a, CMR: Tứ giác AHCE là HCN b, CMR : HG=GK=KE

HD;



a, Tự chứng minh

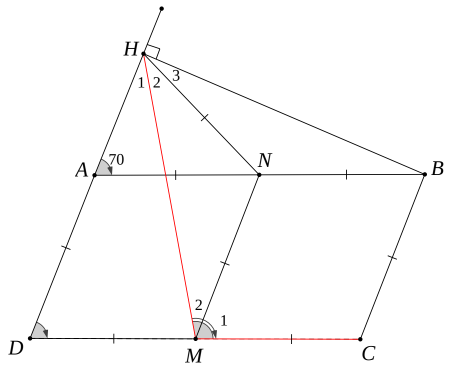
b, G là trọng tâm ΔAHC => HG = 2 GI

Chứng minh tương tự ta có: KE= 2. KI

mà IH = IE=> IG= IK => GK =2.GI=2.IK=> ĐPCM

Bài 55: Cho HBH ABCD có AB=2AD, Góc $D=70^0$ vẽ BH vuông góc với AD, $H\in AD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CD và AB

a, CMR: ANMD là hình thoi



b, Tính HMC

HD:

a, Tự chứng minh

b, Ta có:

$M_1=D=70^0$, Tính M_2

Ta có: $M_2=H_1$ (So le trong)

Mà : $M_2=H_3 \Rightarrow H_1=H_3$

Xét ΔHAN cân tại N => $H_1+H_3=A=70^0$

=> $H_1=35^0 \Rightarrow M_2=35^0$, Vậy $HMC=35^0+70^0=105^0$

Bài 56: Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, Gọi D và E theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC ,CMR:

a, AH= DE b, $HAB=MAC$ c, $AM\perp DE$

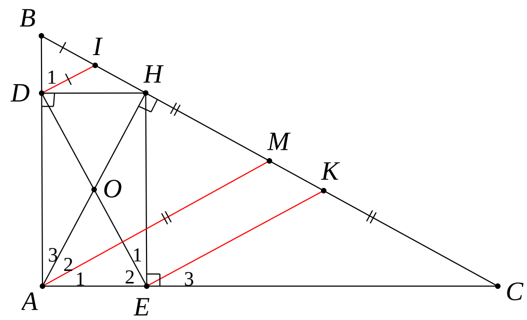
d, DI//EK, với I là trung điểm của HB, K là trung điểm của HC

HD:

a, Tứ giác ADHE có 3 góc vuông nên là HCN => AH= DE

b, ΔABC vuông tại A, Có AM là đường trung tuyến => AM= MB= MC

=> ΔAMC cân tại M => $MAC=C$



Mặt khác $HAB=C$,

Vì cùng phụ với $HAC \Rightarrow HAB=MAC\left(=C\right)$

c, Chứng minh AM$\perp DE$, Ta có: $A_1+E_2=90^0$, ta có:

$E_2+A_1=E_2+A_3=E_2+E_1=90^0$

d, Ta có: ΔHEC có EK = KH = KC => Δ EKC cân tại K

=> $E_3=C=A_1$

=> EK //AM => KE $\perp$DE, Chứng minh tương tự

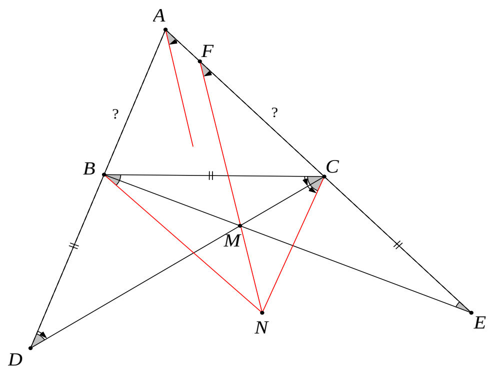
=> $DI\perp DE \Rightarrow DI//EK$

Bài 57: Cho ΔABC, Trên tia đối của tia BA lấy D, trên tia đối của tia CA lấy E sao cho BD=CE=BC, Gọi M là giao điểm của BE và CD, đường thẳng song song với tia phân giác của góc BAC cắt AC ở F, CMR:AB=CF

HD:

Vẽ Hình bình hành ABNC => AB = NC

=> CB= CE=> ΔBCE cân



=> $CBE=\frac{1}{2}CBN=\frac{1}{2}ACB$

=> BM là tia phân giác góc CBN, CM là tia phân giác C

=> NM // phân giác góc A

=> 3 điểm F, M, N thẳng hàng

=> $CNF=\frac{1}{2}BNC=\frac{1}{2}BAC=F$

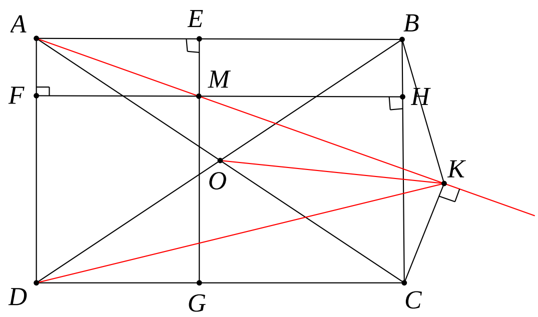
=> ΔNFC cân tại C

=> NC = CF mà NC = AB => AB= CF

Bài 58: Cho HCN ABCD, M là điểm bất kỳ nằm trong HCN, vẽ ME $\perp$ AB tại E, MF $\perp$ AD tại F, CK $\perp$ AM tại K, CMR:

a, $ME^2 + MF^2 = MA^2$ b, $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ c, $BKD = 90^0$

HD



a, Tứ giác AEMF là hình chữ nhật

=> MA= EF => $ME^2 + MF^2 = EF^2 = AM^2$

b, Gọi G là giao điểm của EM và CD,

H là giao điểm của FM và BC

=> Tứ giác DFMG, GMHC, EBHM là hình chữ nhật,

Do vậy $MC^2 = MH^2 + MG^2$

$MB^2 = ME^2 + MH^2$

$MD^2 = MG^2 + MF^2$ => ĐPCM

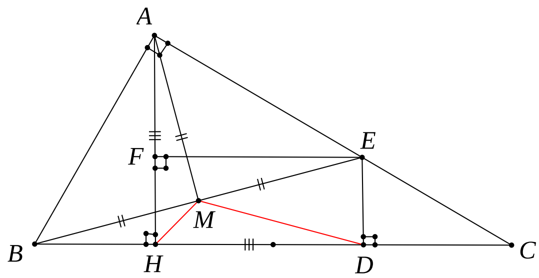
c, Gọi O là giao của 2 đường chéo AC và BD

=> $KO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2}$ => $BK \perp DK$ => $BKD = 90^0$

Bài 59: Cho ΔABC vuông tại A (AC>AB), đường cao AH, trên HC lấy HD=HA, đường $\perp$ BC tại D cắt AC tại E

a, CMR: AE =AB b, M là TĐ của BE, Tính AHM

HD:



a, Chứng minh AE=AB

Kẻ EF $\perp$ AH => tứ giác HDEF là hình chữ nhật

=> ΔHBA=ΔFAE (g.c.g) => AB=AE

b, ΔABE vuông cân tại A=> $AM = \dfrac{BE}{2}$

ΔBDE vuông cân tại D=> $MD = \dfrac{BE}{2}$

Từ đó ta có: AM=MD

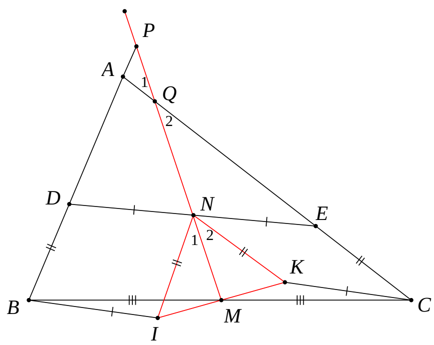
Xét ΔAHM = ΔDHM (c. c. c)=> $H_1 = H_2 = 45^0$

Bài 60: Cho ΔABC, D trên AB, E trên AC sao cho BD=CE, Gọi M, N là trung điểm của BC, DE, Vẽ các hình bình hành BDNI và CENK

a, CMR: I, M, K thẳng hàng

b, MN cắt AC tại Q, cắt BA tại P, CMR: ΔAPQ cân

HD:



a, Tứ giác BDNI là hình bình hành => $\begin{cases} BI // DN \\ BI = DN \end{cases}$ => $BI // DE$

Tứ giác NECK là hình bình hành => $\begin{cases} KC // NE \\ KC = NE \end{cases}$ => $KC // DE$

Từ đó ta có KC//DE và BI= KC

=> Tứ giác BICK là hình bình hành có M là trung điểm của BC

=> M đi qua trung điểm IK => I, K, M thẳng hàng

b, Ta có: NI=DB, NK= CE mà BD = CE => NI = NK => ΔNIK cân tại N

Mà MN là đường trung tuyến => NM là phân giác => $N_1 = N_2$

Lại có : NK // QC=> $N_2 = Q_2$ (đồng vị)

và NI// BD=> $N_1 = P$ (đồng vị)

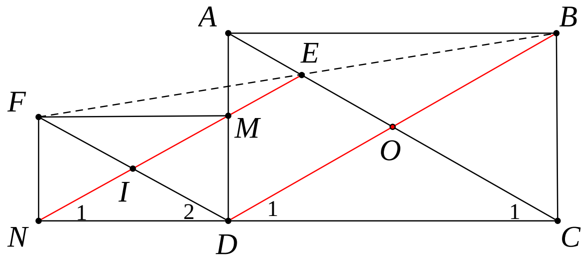
=> $Q_2 = P$ => $Q_1 = Q_2$ (đối đỉnh) => $P = Q_1$

Vậy ΔAPQ cân tại A

Bài 61: Cho HCN ABCD, qua E trên đường chéo AC, kẻ đường // với BD cắt AD và phần kéo dài của CD ở M và N, Vẽ HCN DMFN, CMR:

a, FD//AC b, E là trung điểm của FB

HD:



a, Chứng minh FD// AC

Tứ giác ABCD là hình chữ nhật,

AC cắt BD tại O => OC= OD => $D_1 = C_1$,

Mà EN // BD => $N_1 = D_1 = C_1$ Mà ΔIND cân

=> $N_1 = D_2 = D_1 = C_1$ => FD//AC

b, Chứng minh DIEO là hình bình hành => DI//EO và DI =EO => FI//EO và FI =EO

=> FIOE là hình bình hành

=> IO //EF và IO =EF (1)

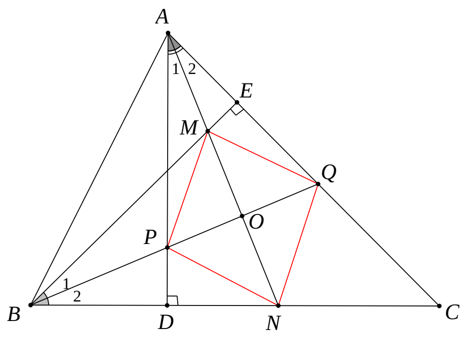
Mặt khác IO là đường trung bình của ΔDFB => OI =EB (2)

Từ (1) và (2) => EB= EF

Bài 62: Cho ΔABC nhọn, vẽ các đường cao AD và BE, Tia phân giác Ax của DAC cắt BE và BC lần lượt ở M và N, Tia phân giác By của EBC cắt AD và AC lần lượt tại P và Q, CMR:

a, AN$\perp$BQ b, Tứ giác MPNQ là hình thoi

HD:



a, Ta có: $EBC = DAC$ (cùng phụ góc C)

=> $A_1 = A_2 = B_1 = B_2$

ΔEBQ vuông => $B_1 + BQE = 90^0$ => $A_2 + BQE = 90^0$

=> $AOQ = 90^0$ => $AN \perp BQ$

b, ΔAPQ có AO vừa là đường phân giác vừa là đường cao

=> AO là đường trung trực

=> MP= MQ, NP= NQ

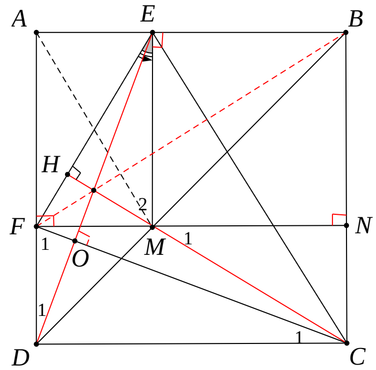
ΔBMN có BO vừa là đường phân giác vừa là đường cao=> là đường trung trực => ĐPCM

Bài 63: Cho hình vuông ABCD, Từ điểm M tùy ý trên đường chéo BD, kẻ ME, MF lần lượt vuông góc với AB và AD, CMR:

a, CF=DE, CF$\perp$DE b, CM=EF, OM$\perp$EF

c, CM, BF, DE đồng quy d, Xác định M để diện tích AEMF lớn nhất

HD:



a, BD là đường chéo của hình vuông ABCD

=> BD là phân giác góc D

=> $ADB = 45^0$ => ΔDFM cân tại F=> DF=FM=AE

ΔCDF= ΔDAE (c.g.c) => CF = DE và $C_1 = D_1$

Mà $C_1 + F_1 = 90^0$ => $D_1 + F_1 = 90^0$ => $FOD = 90^0$

b, AM =EF, BD là đường trung trực của AC

=> MA =MC=> MC= EF

Kéo dài FM cắt BC tại N => Tứ giác BEMN là hình vuông, => MN= ME

=>ΔEMF= ΔMNC(c. g. c) => $M_1 = MEF$, Mà $M_1 + M_2 = 90^0$ => $MEF + M_2 = 90^0$

=> $EHM = 90^0$ => ĐPCM

c, ΔEFC có CH$\perp$EF=> CM trùng CH là đường cao ứng với cạnh EF

Lại có ED$\perp$CF tại O=> ED là đường cao ứng với cạnh CF

Chứng minh tương tự câu a=> CE$\perp$BF=> BF là đường cao ứng với cạnh CE

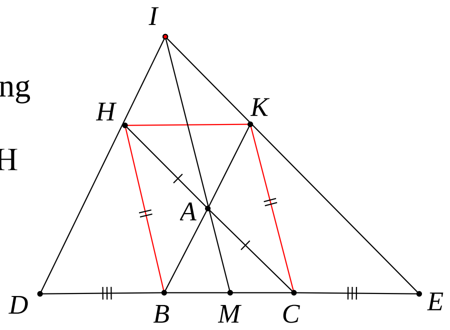
=> 3 đường CM, BF, DE đồng quy

Bài 64: Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia BC, lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD=BC=CE, Qua D kẻ đường thẳng // với AB cắt AC ở H, qua E kẻ đường thẳng // với AC cắt AB ở k, chúng cắt nhau ở I

a, Tứ giác BHKC là hình gì? b, Tia IA cắt BC tại M, CMR : MB=MC

c, Tìm điều kiện của ΔABC để tứ giác DHKE là hình thang cân

HD:



a, Tứ giác BHKC là hình bình hành vì
có 2 đường chéo BK và HC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

b, Tứ giác AHIK cũng là hình bình hành, nên AK// IH và AK= IH
AB//IH và AB=IH
=> ABHI là hình bình hành
=> IA// HB=> AM là đường trung bình của $\perp$HBC
=> BM = MC
c, Tứ giác DHKE là hình thang vì HK //DE,

để là hình thang cân => $D = E$

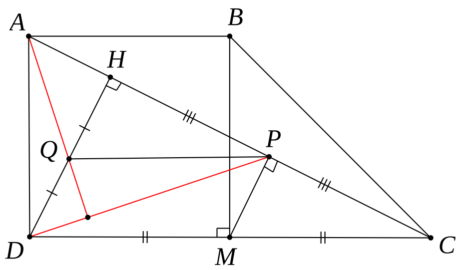
Hay $B = C => \Delta ABC$ cân tại A

Bài 65: Cho hình thang vuông ABCD, $A = D = 90^0$, CD=2AB=2AD, Gọi H là hình chiếu của D lên AC. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm của CD, HC và HD

a, CMR: Tứ giác ABMD là hình vuông và tam giác BDC là tam giác vuông cân

b, CMR: DMPQ là hình bình hành

c, CMR: AQ vuông góc với DP



HD:

a, Chứng minh tứ giác ABMD có 4 cạnh bằng nhau,

lại có $A = 90^0$ nên ABMD là hình vuông

ΔBCD có MB= MC=MD nên là tam giác vuông ,

lại có $BDC = 45^0$

Do đó: ΔBDC là tam giác vuông cân ở B

b, Tứ giác DMPQ là hình bình hành vì có PQ// DM và PQ = DM

c, Chứng minh Q là trực tâm của ΔADP

Bài 66: Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác vẽ hai hình vuong ABEF và ACGH, CMR: các đường BG và CE cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường cao AD của tam giác ABC

HD:

Trên tia đối của tia AD lấy điểm K sao cho AK= B

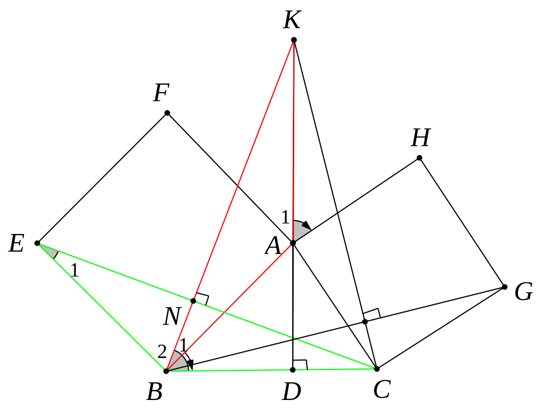
=> $FAK = ABC$ (cùng phụ BAD)

=> ΔEBC = ΔBAK (c.g.c)

=> $BCE = BKD$, Mà $BKD + KBC = 90^0$

=> $BCE + CBK = 90^0 => BNC = 90^0$ hay BK$\perp$EC

Chứng minh tương tự => CK $\perp$BG=> AD, BG, CE là ba đường cao ΔBCK

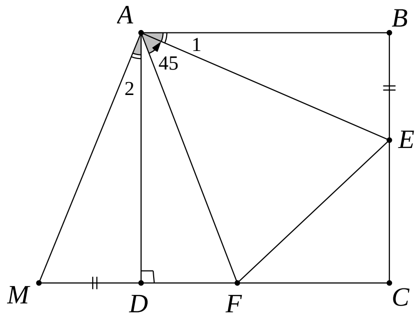


Bài 67: Cho hình vuông ABCD, các điểm E, F lần lượt trên các cạnh BC, CD sao cho $EAF = 45^0$, Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho DM =BE, CMR:

a, $\Delta ABE = \Delta ADM, MAF = 45^0$

b, Chu vu tam giác CEF bằng 1 nửa chu vi tứ giác ABCD

HD:



a, ΔABE = ΔADN (2 cạnh góc vuông)

=> $A_1 = A_2$

=> $MAE = 90^0 \Rightarrow MAF = 90^0 - 45^0 = 45^0$

b, ΔAEF = ΔAMF (c.g.c)

=> EF = MF, EF = MD+DF=BE+DF

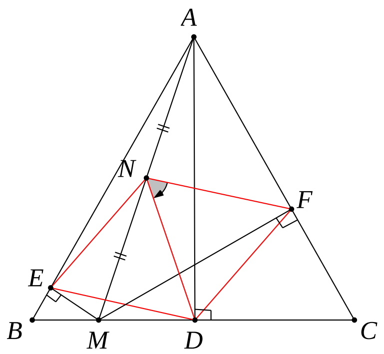
Chu vi ΔCEF = CE+EF+CF

= CK+BE+DF+CF= BC+CD= $\frac{1}{2}$ chu vi ABCD

Bài 68: Cho ΔABC đều, đường cao AD, M là điểm nằm giữa B và D, gọi N là Trung điểm của AM, vẽ ME vuông góc AB tại E, MF vuông góc AC tại F

CMR: DENF là hình thoi

HD:



Ta có: MN = EN = DF= FN $\left(= \frac{1}{2} AM \right)$

=> $END = ENM + MND = 2.EAM + 2MAD = 2.DAE = 60^0$

=> $DNF = MNF - MND$

=> $DNF = 2.MAC - 2.MAD = 2.DAC = 60^0$

=> Δ NED Đều, ΔNDF đều

vậy DENF là hình thoi

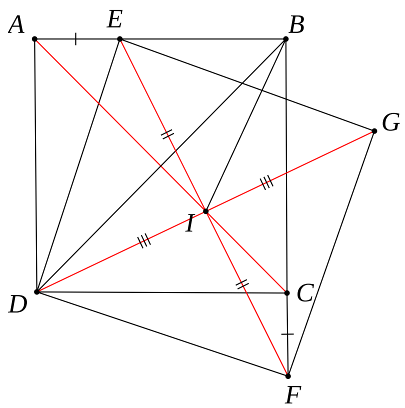
Bài 69: Cho hình vuông ABCD và 1 điểm E bắt kỳ nằm giữa 2 điểm A và B, trên tia đối của tia CB lấy 1 điểm F sao cho CF =AE

a, Tính EDF

b, Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF, tứ giác DEGF là hình gì?

c, CMR: AC, DG, EF đồng quy

HD:



a, ΔAED = ΔCFD (c.g.c)

=> $ADE = CDF \Rightarrow EDF = EDC + CDF = EDC + ADE$

=> $EDF = ADC = 90^0$

b, Tứ giác DEGF có I là trung điểm của EF (gt)

I là trung điểm của DG

Do đó: DEGF là hình bình hành

lại có: $EDF = 90^0$ => Là hình chữ nhật, lại có tiếp DE= DF

=> Là hình vuông

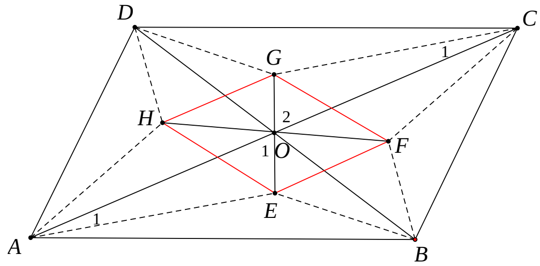
c, Ta có:

$DI = \frac{EF}{2}, BI = \frac{1}{2} EF \Rightarrow DI = BI$ => I nằm trên đường trung trực cảu BD

Mà AC cũng là đường trung trực của BD, (Tứ giác ABCD là hình vuông)

=> $I \in AC$ => 3 đường AC, DG, EF đồng quy tại I

Bài 70: Cho HBH ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O, gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔOAD
CMR: EFGH là hình thoi
HD:



Vì OH , OF là hai tia phân giác của các góc đối đỉnh nên H, O, F thẳng hàng

Tương tự ta có: G, O, E thẳng hàng

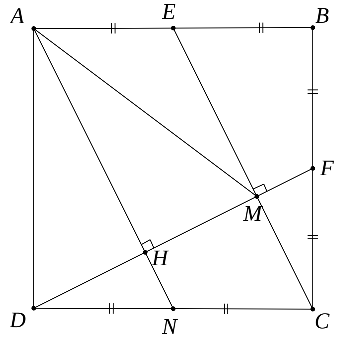
Lại có $OH \perp OG$ (Hai tia phân giác của hai góc kề bù)

Xét $\Delta OAE = \Delta OCG$ (c.g.c) => OG =OE

Chứng minh tương tự : OH= OF

=> EFGH là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau => là hình thoi

Bài 71: Cho hình vuông ABCD, Gọi E, F theo thứ tự là TĐ của AB, BC
a, CMR: CE vuông góc với DF
b, Gọi M là giao điểm của CE và DF, CMR : AM=AB
HD:



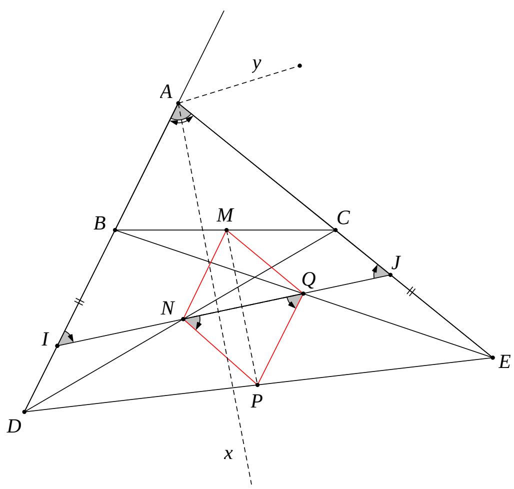
a, Tự chứng minh
b, Gọi N là trung điểm của DC,
Tứ giác AECN có AE //NC và AE=NC=> Là hình bình hành
=> AN // EC=> AN $\perp$ DF
Trong ΔDMC có: $\begin{cases} DN = NC \\ HN // MC \end{cases} \Rightarrow DH = HM$
=> ΔADM có AH là đường cao lại là đường trung tuyến nên AD= AM= AB

Bài 72: Cho ΔABC, trên tia AB ta lấy 1 điểm D, trên tia AC lấy 1 điểm E sao cho BD=CE, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CD, DE, EB
a, CMR: MNPQ là hình thoi
b, CMR: các đường chéo của hình thoi MNPQ // với các phân giác trong và ngoài của góc A

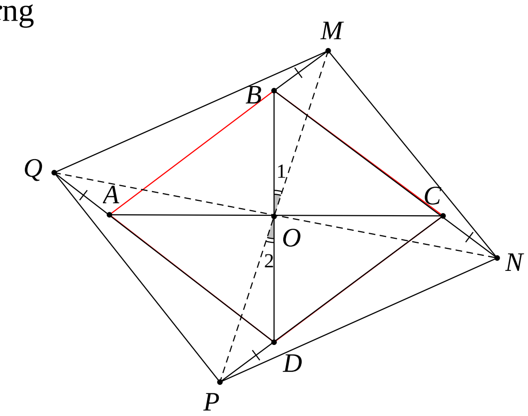
HD:

a, Tự chứng minh

b, Vì MNPQ là hình thoi, MP và NQ là hai đường chéo
=> MP $\perp$ NQ
Gọi I, J lầ lượt là giao NQ với AB và AC
=> PQ//AD=> $I_1 = Q_1$ (so le)
Tương tự: $N_1 = Q_1$ => ΔIAJ cân tại A
=> Phân giác Ax là đường cao => Ax $\perp$ IJ, Mà MP $\perp$ IJ
=> Ax //MP
Dễ dàng chứng minh được NQ// Ay



Bài 73: Cho hình thoi ABCD, trên tia đối của tia BA, ta lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy N, trên tia đối tia DC lấy P, trên tia đối tia AD lấy Q sao cho BM=CN=DP=AQ
a, CMR: MNPQ là hình bình hành
b, CMR : MNPQ là hình thoi và ABCD có cùng tâm đối xứng
c, Hình thoi ABCD phải có ĐK gì để MNPQ là hình vuông



HD:
a, ΔAQM = ΔNCP => QM= PN
ΔMBN= ΔPDQ => QP= MN

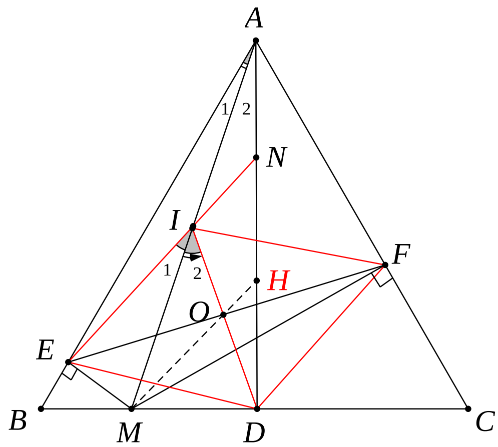
b, ΔOBM= ΔODN=> $O_1 = O_2$

=> $POM = POB + O_1 = POB + O_2 = BOD = 180^0$

=> P, O, M thẳng hàng
Chứng minh tương tự ta có: Q, O, N thẳng hàng
=> HBH MNPQ có tâm O

c, Để MNPQ là hình thoi thì Hình bình hành MNPQ có hai cạnh kề bằng nhau: QM= QD
Thật vậy:
Δ QAM= ΔMBN => $MBN = QAM$ => $QAM = BAD$,
Mà $QAM = BAD$ và $QAM + BAD = 180^0$ => $BAD = 90^0$
Hình thoi ABCD có 1 góc vuông => là hình vuông

Bài 74: Cho tam giác đều ABC, trực tâm H, kẻ đường cao AD, một điểm M thuộc cạnh BC, từ M kẻ ME vuông góc với AB và MF vuông góc với AC, Gọi I là trung điểm của AM, CMR:
a, DEIF là hình thoi
b, Đường thẳng HM đi qua tâm đối xứng của hình thoi DEIF



HD:
a, Δ ADM vuông có $DI = \frac{1}{2}AM$,

Tương tự $EI = \frac{1}{2}AM$ => $DI = EI$ => ΔEID cân

$EI = AI$ => ΔAIE cân có $I_1 = 2A_1$

tương tự : $I_2 = 2.A_2$ => $EID = I_1 + I_2 = 60^0$

=> ΔEID đều => EI=ED= IP

Chứng minh tương tự: IF=FD=ID

=> EIFD là hình thoi

b, Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình thoi DEIF và N là trung điểm AH, Ta có:

ΔAMH có IN là đường trung bình => IN//MH

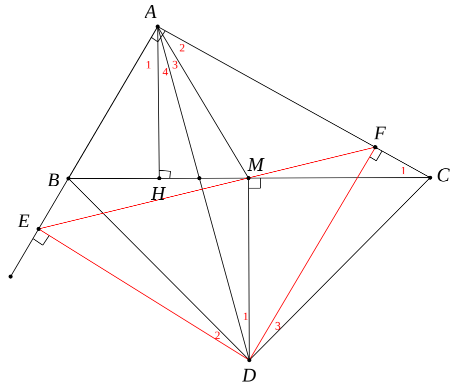
ΔIDN có OH là đường trung bình => OH//IN

Như vậy O, H, M thẳng hàng

=> MH đi qua giao điểm O của ID và EF

Bài 75: Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và trung tuyến AM, đường phân giác góc A, cắt đường trung trực BC tại D, Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

a, CMR: AD là phân giác HAM
b, 3 điểm E, M, F thẳng hàng
c, Tam giác BDC là tam giác vuông cân
HD:



a, Ta có: $C_1 = A_1$ (cùng phụ góc B)

Mà AM= $\frac{1}{2}$BC=> AM= MC=> $A_2 = C_1 \Rightarrow A_1 = A_2, A_3 = A_4$

=> AD là tia phân giác

b, AH // DM => $D_1 = A_4$,mà $A_4 = A_3 \Rightarrow D_1 = A_3 \Rightarrow \Delta ADM$ cân

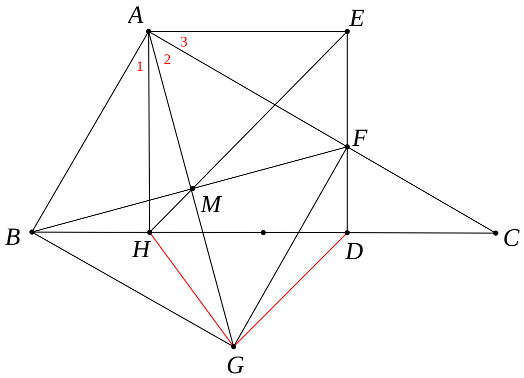
=> AM= MD
Chứng minh Tứ giác AEDF là hình vuông => EA= ED => FA=FD
Ta có: M, E, F đều nằm trên đường trung trực của AD=> Thẳng hàng

c, ΔBED = ΔCFD => $D_2 = D_3$

$BDC = BDF + D_3 = BDF + D_2 = EDF = 90^0$

=> ΔBDC vuông cân

Bài 76: Cho tam giác ABC vuông tại A, và AB<AC, kẻ đường cao AH, trong nửa mặt phẳng có chưa A bờ BC vẽ hình vuông AHDE
a, CMR: D nằm trên HC
b, Gọi F là giao của DE và AC, đường thẳng qua F và // với AB cắt đường thẳng qua B và // với AC tại G, CMR: ABGF là hình vuông
c, CMR: AG, BF, HE đồng quy
d, DEHG là hình thang
HD:



a, AC > AB => $B > C$

Mà: $B = HAC \Rightarrow HAC > C$
=> HC>AH=> AH= HD
=> HC>HD=> D nằm giữa H,C

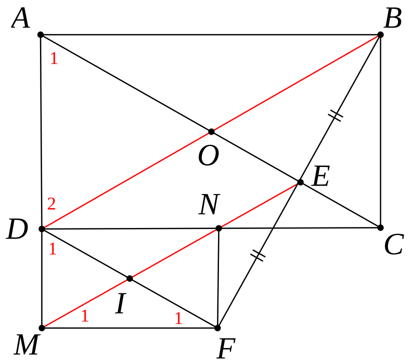
b, ta có:

$A_1 + A_2 = 90^0, A_2 + A_3 = 90^0 \Rightarrow A_1 = A_3$
kết hợp với AE= AH
=> ΔAEF = ΔAHB => AB= AF
Tứ giác ABGF là hìn bình hành có 1 góc vuông => HCN có AB = AF => là hình vuông

c, Gọi M là giao điểm BF, AG, Khi đó ΔBDF có DM = $\frac{1}{2}$BF, tương tự AM= $\frac{1}{2}$BF

=> M nằm trên đường trung trực AD,
Ta lại có: AE= ED, HA= HD
=> E, H cũng nèm trên đường trung trực của AD hay H, M, E thẳng hàng

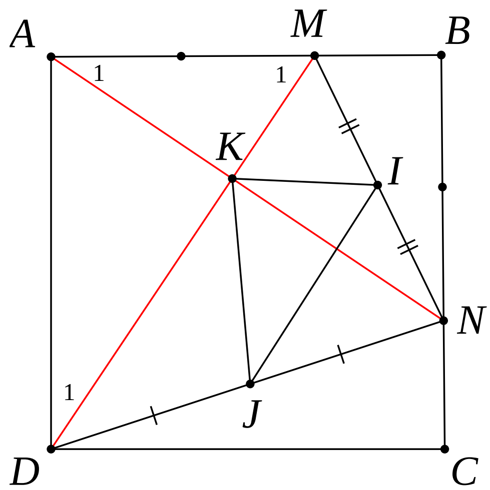
Bài 77: Cho HCN ABCD và E là điểm nằm trên đường chéo AC, trên tia đối của tia EB lấy F sao cho EF =BE, Gọi M, N là hình chiếu của F trên 2 đường thẳng AD, DC, CMR:
a, DF//AC và MN//BD
b, 3 điểm E, M, N thẳng hàng



HD:
a, Dễ thấy OE là đường trung bình của Δ BDF
=> DF// OE=> DF // AC
=> $\hat{A_1} = \hat{D_1}$ (Đồng vị)
=> ΔOAD cân => $\hat{A_1} = \hat{D_2} = \hat{D_1}$
=> ΔIDm cân => $\hat{D_1} = \hat{M_1}$
=> $\hat{D_2} = \hat{M_1}$ (đồng vị) => MN// DB

b, I là trung điểm DF => IE là trung bình
=> IE // DB mà MN // BD
vậy M, N, E thẳng hàng

Bài 78: Cho hình vuông ABCD cạnh a, trên AB lấy $AM = \frac{2a}{3}$, trên BC lấy BN sao cho $BN = \frac{2a}{3}$
a, CMR: AN vuông góc DM
b, Gọi I và J lần lượt là trung điểm của NM, DN và K là giao AN và DN, Tính IK , KJ và IJ
HD :
a, Ta chứng minh ΔABN = ΔDAM
=> $\hat{D_1} = \hat{A_1}$, Mà : $\hat{D_1} + \hat{M_1} = 90^0$
=> $\hat{A_1} + \hat{M_1} = 90^0$ => $\hat{K} = 90^0$



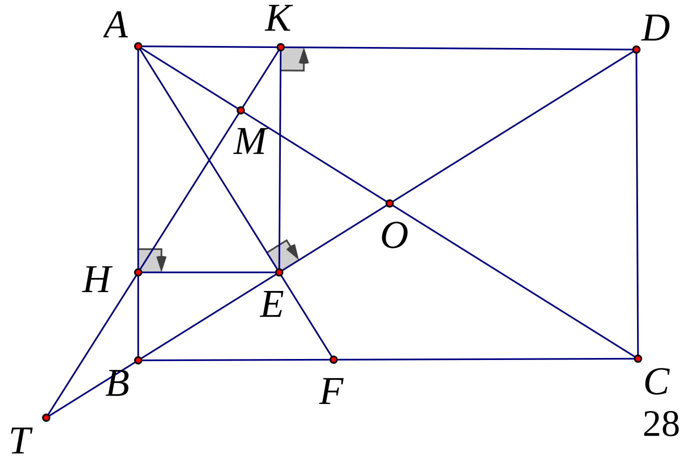
b, Ta có : $MN = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{5}$

$KI = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{6}\sqrt{5}$

Tương tự ta có : $DN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$ => $KJ = \frac{a}{6}\sqrt{10}$

Tương tự $DM = \frac{a}{3}\sqrt{13}$ => $IJ = \frac{a}{6}\sqrt{13}$

Bài 79 :



Bài 80: Cho Δ ABC đều có cạnh bằng 4cm, M và N là các điểm lần lượt chuyển động trên hai cạnh BC và AC sao cho BM= CN

a) Tính diện tích Δ ABC

b) Xác định vị trí của M, và N để độ dài MN nhỏ nhất, Tìm độ dài nhỏ nhất đó?

HD:

a) Tính được độ dài đường cao: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\left(cm\right)$

Suy ra diện tích: $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h = \frac{1}{2}4.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}(cm^2)$

b) Gọi P và Q là chân đường vuông góc kẻ từ M và N xuống AB

Ta có: Δ ANQ vuông ở Q, có: $A = 60^0 \Rightarrow AQ = \frac{1}{2}AN$

Tương tự đối với Δ MPB có : $PB = \frac{1}{2}BM$

Cộng theo vế ta được : $AQ + PB = \frac{1}{2}AN + \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\left(AN + NC\right) = \frac{1}{2}AC$

Kẻ $MH \perp QN$, Tứ giác MPQH là hình chữ nhật

Ta có: $MN \ge MH = PQ = AB - \left(AQ + BP\right) = AB - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB$

Như vậy khi M, N di chuyển ta luôn có: $MN \ge \frac{1}{2}AB$

Và $MN = \frac{1}{2}AB$, Khi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC

Suy ra vị trí của M,N cần xác định lần lượt là trung điểm BC và AC,

Khi đó độ dài nhỏ nhất của MN là : $MN = \frac{1}{2}AB = 2cm$

Bài 81: Cho Δ ABC vuông cân tại A, Gọi M là 1 điểm nằm giữa A và B, trên tia đối của tia AC lấy điểm I sao cho AI=AM

a) Chứng minh rằng : $CM \perp BI$

b) Trên BC lấy điểm P sao cho $BP = 2CP$, trên nửa mp bờ BC có chứa điểm A, vẽ Px sao cho $xPB = 60^0$, Tia Px cắt tia CA tại D, Tính số đo CBD

HD:

a) Tia IM cắt BC tại H

Δ ABC vuông cân tại A nên $C = 45^0$

Δ IAM vuông cân tại A nên $\hat{I} = 45^0$

Δ IHC có $C + \hat{I} = 90^0 \Rightarrow H = 90^0 \Rightarrow IH \perp BC$,

Chứng minh được M là trực tâm Δ IBC=>$CM \perp BI$

b) Gọi E là điểm đối xứng với B qua PD => $EP = PB = 2PC$

=> Δ BPE cân tại P nên đường trung trực PD cũng là tia phân giác góc P

$\Rightarrow BPD = DPE = 60^0 \Rightarrow EPC = 60^0$

Ta chứng minh được Δ EPC vuông tại C và CD là phân giác của Δ PCE

Đồng thời ED là phân giác ngoài tai đỉnh E của Δ PCE

Mặt khác: $yEP = 150^0, DEP = 75^0$, nên ta tính được: $PBD = 75^0$ hay $CBD = 75^0$

Bài 82: Cho Δ ABC có ba góc nhọn, Vẽ các đường cao BD, CE. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên ED, CMR:

a) $EH = DK$

b) $S_{BEC} + S_{BDC} = S_{BHKC}$

HD:

a) Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, ED

Chứng minh được Δ MED cân tại M=> $MI \perp ED$

Hình thàng BHKC có: BM=MC, MI//BH//CK nên IH=IK ,mà ID=IE=>EH=DK

b) Vẽ EE', II', DD' vuông góc với BC,

Ta chứng minh được II' là đường trung bình của Hình thang EE'D'D nên

$II' = \frac{1}{2}\left(EE' + \mathrm{DD}'\right) \Rightarrow S_{BEC} + S_{BDC} = \frac{1}{2}BC.EE' + \frac{1}{2}BC.DD' = \frac{1}{2}\left(EE' + DD'\right) = BC.II'$ (1)

Qua I vẽ đường thẳng song song với BC, cắt BH, CK tại P và Q

Chứng minh được: BPQC là hình thang nên $S_{BPQC} = BC.II'$ (2)

Chứng minh được: Δ PIH = Δ QIK=> $S_{BPQC} = S_{BHCK}$ (3)

Từ (1), (2), (3) => $S_{BEC} + S_{BDC} = S_{BHKC}$

Bài 83: Cho hình vuông ABCD, M là điểm bất kì trên cạnh BC, trong nửa mp bờ AB chứa C dựng hình vuông AMHN, Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, Cắt DC ở F

a) CMR: BM=ND

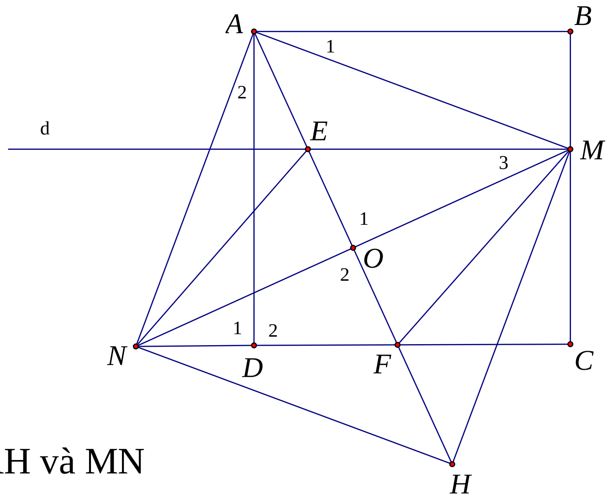
b) CMR: N, D, C thẳng hàng

c) EMFN là hình gì?

d) Chứng minh $DF + BM = FM$ và chu vi Δ MFC không đổi khi M thay đổi trên BC

HD :

a) Tứ giác ABCD là hình vuông=> $A_1 + MAD = 90^0$ (1)



Vì AMHN là hình vuông

$\Rightarrow A_2 + MAD = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $A_1 = A_2$

Ta có : Δ AND= Δ AMB (c.g.c)

$\Rightarrow B = D_1 = 90^0, BM = ND$

b) ABCD là hình vuông

$\Rightarrow D_2 = 90^0 \Rightarrow D_1 + D_2 = NDC = 180^0$,

nên N, D, C thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông AMHN

=> O là tâm đối xứng của hình vuông AMHN

=> AH là đường trung trực của đoạn MN, mà E, F $\in$ AH

=> EN=Em và FM=FN (3)

$\Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow EM = NF$ (4)

Từ (3) và (4) => EM=NE=NF=FM=> MENF là hình thoi (5)

d) Từ (5) suy ra FM=FN=FD+DN, mà DN=MB (cmt) => MF=DF+BM

Gọi chu vi của Δ MCF là P và cạnh hình vuông ABCD là a

Ta có : $P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$, Vì (MF=DF+MB)

$= \left(MC + MB\right) + \left(CF + FD\right) = BC + CD = a + a = 2a$

Hình vuông ABCD cho trước => a không đổi=> P không đổi

Bài 84: Gọi M là điểm nằm trong $xOy = m^0, (0 < \mathrm{m} < 90)$, và P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy, Gọi H, K lần lượt là trung điểm của OM, PQ

a) CMR: $HK \perp PQ$

b) Tính số đo HPQ theo m

HD:

a) Δ MPO vuông tại P=> đường trung tuyến $PH = \frac{1}{2}OM$

Δ MQO vuông tại Q=> đường trung tuyến $QH = \frac{1}{2}.OM$

Do đó: $PH = QH = \frac{1}{2}OM$

=> Δ HPQ cân tại H, K là trung điểm của PQ=> HK vuông góc với PQ

b) $MHQ = 2.MOQ, MHP = 2.MOP, PHQ = 2.POQ = 2.m^0$ $=> PHK = m^0 => HPQ = 90^0 - m^0$

Bài 85: Cho hình chữ nhật ABCD, điểm P thuộc đường chéo BD (P khác B và D), Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) chứng minh Am song song với BD

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB.

Chứng mỉnh ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí của P

HD:

a) Ta có: O là trung điểm của AC (ABCD là hình chữ nhật)

P là trung điểm của CM (Vì M đối xứng với C qua P)

Nên Op là đường trung bình của Δ ACM, do đó: OP//AM=> AM//BD

b) Vì OP là đường trunh bình của Δ ACM nên OP//AM và OP=$\frac{1}{2}$ AM

Do đó: OP//AI và OP=AI=> tứ giác AIPO là hình bình hành=> PI//AC (1)

Kẻ ME//AB cắt AC tại K, ta có: $KAE = EAM \quad \left(= KDA\right)$

Nên AE là phân giác KAM. Mặt khác: $AE \perp KM => \Delta AKM$ cân

E là trung điểm của KM,

do đó EI là đường trung bình của Δ AMK=> EI//OA=>EI//AC (2)

Ta lại có : E, I, F thẳng hàng (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: E, F, P thẳng hàng.

Bài 86: Cho Δ ABC, đường vuông góc với AB tại A và đường vuông góc với BC tại C cắt nhau tại D, gọi H là trục tâm của Δ ABC

a) Chứng minh DH đi qua trung điểmt M của AC

b) Δ ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để B, H, D thẳng hàng

HD:

a) Chứng minh được tứ giác AHCD là hình bình hành

Hai đường chéo AC và DH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

b) Để B, H, D thẳng hàng thì:

$HD \perp AC <=>$ AHCD là hình thoi

$<=> HA = HC <=>$ Δ ABC cân ở B

Bài 87: Cho Δ ABC vuông tại A(AC>AB) , đường cao AH, trên HC lấy HD=HA, đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E

a) CMR: AE=AB

b) Gọi M là trung điểm của BE, TÍnh AHM

HD:

a) Chứng minh AE =AB

Kẻ $EF \perp AH$

Tứ giác HDEF là hình chữ nhật,

=> EF=HD mà HD=AH=> EF=AH

Xét Δ HBA và Δ FAE có:

$H = F = 90^0$

AH=EF

$FEA = BAH$ cùng phụ với FAE , Do đó: Δ HBA=Δ FAE (g.c.g) => AE=AB

b) Tính $AHM = ?$

Ta có: Δ BAE vuông tại A => AM =$\frac{1}{2}$ BE

Δ BDE vuông tại D => DM=$\frac{1}{2}$BE

Do đó: AM=DM

Xét Δ AHM và Δ DHM có:

AM=MD, AH=HD và HM là cạnh chung

=> Δ AHM=Δ DHM (c.c.c)

=> $AHM = MHD = \frac{AHD}{2} = \frac{90^0}{2} = 45^0$

Bài 88: Cho hình vuông ABCD, Gọi E là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC (E khác B và C), Qua A kẻ Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F, trung tuyến AI của Δ AEF cắt CD ở K, đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G

a) Chứng minh AE=AF và tứ giác EGFK là hình thoi

b) Chứng minh Δ AKF đồng dạng với Δ CAF và $AF^2 = FK.FC$

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh chu vi của Δ EKC không đổi

HD:

a) Xét Δ ABE vuông tại B và Δ ADF vuông tại D có:
AB=AD,

$BAE = CAF$

=> Δ ABE=Δ ADF

=> AE=AF

Vì AE=AF và AI là đường trung tuyến Δ AEF

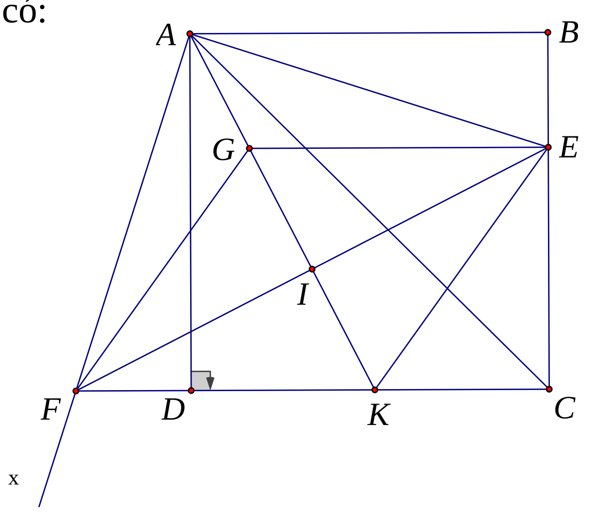
=> AI $\perp$ EF

Hai Δ IEG vuông tại I và Δ IFK vuông tại I có:
IE=IF,

$IEG = IFK$,

Nên Δ IEG=Δ IFK

=> EG=FK



Tứ giác EGFK có hai cạnh đối EG và FK song song và bằng nhau nên là hình bình hành.
Hình bình hành EGFK có hai đường chéo GK và EF vuông góc nên là hình thoi

b) Xét Δ AKF và Δ CAF có: $AFK = CFA$, $KAF = ACF = 45^0$

$$=> \Delta AKF \sim \Delta CAF(g.g) => \frac{AF}{FC} = \frac{FK}{AF} <=> AF^2 = FK.FC$$

c) Theo câu a ta có: Δ ABE =Δ ADF nên EB=FD, Tứ giác EGFK là hình thoi nên EK= KF

Do đó chu vi Δ EKC là: $C_{EKC} = EK + KC + CE = CF + CE = CD + DF + CE = 2CD$ (Không đổi)

Bài 89: Cho Δ ABC vuông tại A(AB<AC), M là trung điểm của BC, D đối xứng với A qua M
a, Tứ giác ABDC là hình gì?
b, Lấy điểm H bất kỳ trên MB(H khác B và M), Gọi I là điểm đối xứng của A qua H, CMR : BIDC là hình thang
c, Gọi E và F lầ lượt là hình chiếu của I trên BD và CD, O là giao của DI và EF, CMR : HODM lafhinhf bình hành
d, CMR : 3 điểm H, E, F thẳng hàng

Bài 90: Cho hình vuông ABCD, gọi E là điểm đối xứng của A qua D
a, CMR : Δ ACE là tam giác vuông cân
b, kẻ AH vuông góc với BE tại H, Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AH và HE, tứ giác BMNC là hình gì ?
c, Cho AC =5cm, Tính diện tích Δ BCE
d, CMR: ANC vuông

Bài 91: Cho HCN ABCD, kẻ CE $\perp$ DB (E$\in$ DB), Lấy điểm F đối xứng với C qua E, kẻ FG // BC (G$\in$ DB). CMR:
a, Tứ giác CGFB là hình thoi
b, Tứ giác AFBD là hình thang cân
c, Gọi H là hình chiếu của F trên đường thẳng AD, FG cắt AB tại K, Tứ giác AFHK là hình gì?
d, CMR: Ba điểm H, K, E thẳng hàng

Bài 92: Cho Δ ABC vuông tại A và M là điểm bất kì trên BC, Gọi P là điểm đối xứng với M qua AB, MP cắt AB tạo D, Gọi Q là điểm đối xứng với M qua AC, MQ cắt AC tại E
a, Các tứ giác ADME và BCQP là hình gì?
b, Cho Ab=6cm, AC=8cm, Tính đội dài BC và diện tích Δ ABC
c, Chứng minh A là trung điểm của PQ
d, Tìm vị trí của M trên BC để chu vi của tứ giác BCQP đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 93: Cho Δ ABC vuông tại A, các đường trung tuyến AM và CN cắt nhau tại I, lấy E thuộc tia đối của tia MN sao cho ME= MN, nối BE cắt AM tại F, Gọi D là trung điểm của CI, gọi K là trung điểm của CA
a, Tứ giác ANEC là hình gì?
b, CM : BF=2FE
c, Δ ABC phải có điều kiện gì để MKDF là hình thoi
d, Cho BC cố định, Tìm vị trí điểm A để diện tích tứ giác ACEN lớn nhất

Bài 94: Cho Δ ABC nhọn, trực tâm H, các đường cao BD, CE. Gọi M là trung điểm của BC, lấy điểm F đối xứng với C qua H
a, Qua F kẻ 1 đường thẳng song song với AC cắt AB tại P, nối PH cắt AC tại Q, CMR : HP=HQ
b, CM : MH $\perp$ PQ
c, Gọi I là trung điểm của DE, J là trung điểm của AH. CMR: I, J, M thẳng hàng
d, CMR: $S_{\Delta PBC} + S_{\Delta QBC} = 2S_{\Delta BHC}$

Bài 95: Cho HCN ABCD, kẻ AN và CM cùng vuông góc với BD
a, CMR: DN=BM
b, CM tứ giác ANCm là hình bình hành
c, Gọi K là điểm đối xứng với A qua N, tứ giác DKCB là hình gì?
d, Tia AM cắt KC tại P, CM các đường thẳng PN, AC, KM đồng quuy

Bài 96: Cho Δ ABC vuông tại A, Gọi E và M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AC, Từ A vẽ đường thẳng song song với BC cắt ME tại F
a, CMR: ABEF là hình bình hành
b, CH tứ giác AECF là hình thoi
c, Gọi N là điểm đối xứng với A qua E, tứ giác ABNC là hình gì ?
d, Δ ABC cần có thêm điều kiện gì để tứ giác AFCN là thang cân

Bài 97: Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH, Gọi D là trung điểm của AC, lấy E đối xứng với H qua D
a, CMR : AHCE là hình chữ nhật
b, Kẻ AI// HE(I thuộc BC) cm tứ giác AEHI là hình bình hành
c, Trên tia đối của HA lấy điểm K sao cho AH= HK, CM tứ giác CAIK là hình thoi
d, Δ ABC cần có thêm điều kiện gì để hình thoi CAIK là hình vuông, Khi đó tứ giác AHCE là hình gi ?

Bài 98: Cho hình thoi ABCD, đường chéo AC$\geq$ BD, M là 1 điểm tùy ý trên AC, đường thẳng qua M và song song với AB cắt AD tại E, Cắt BC tại G, đường thẳng qua M song song với AD cắt AB tại F, cắt CD tại H
a, CMR : Tứ giác MEAF là hình thoi, Từ đó EFGH là hình thang cân
b, xác định vị trí của điểm M sao cho EFGH là hình chữ nhật
c, Hình thoi ABCD thỏa mãn điều kiện gì để hình chữ nhật EFGH ở câu b là hình vuông

Bài 99: Cho HCN ABCD, Gọi M là trung điểm của BC và E là giao điểm của đường thẳng AM với DC
a, CMR : ABEC là hình bình hành
b, Gọi F là điểm đối xứng của B qua C, CMR : BEFD là hình thoi
c, CMR C là trọng tâm Δ AEF
d, Cho $AB^2 = 3.BC^2$, Gọi H là trung điểm của DF và K là giao điểm của AH với EF, CMR : AE=2. MK

Bài 100: Cho Δ ABC nhọn có $A = 60^0$, Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H, Gọi M là trung điểm của BC và I là điểm đối xứng của H qua M
a, CMR : CI =BH và BI$\perp$AB
b, Lấy K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BI, CMR : F, M, K thẳng hàng

c, CMR : EF $\perp$ EK
d, CMR : Δ MEF đều

Bài 101: Cho Δ ABC vuông tại A(AB<AC), trung tuyến AM, gọi D là điểm đối xứng của A qua M
a, CMR: ABCD là hình chữ nhật
b, Kẻ CH $\perp$ AD tại H, Gọi K là điểm đối xứng của C qua H, CMR tứ giác ABKD là hình thang cân
c, Gọi T là điểm đối xứng của D qua H, E là giao điểm của AC và KT, CMR : CK=2. EH
d, CMR : EH $\perp$ BC

Bài 102: Cho Δ MNP vuông tại N, biết MN=6cm, NP=8cm, đường cao NH, Qua H kẻ HC vuông góc với MN, HD vuông góc với NP
a, CMR : HDNC là hình chữ nhật
b, CMR : NH.MP=MN.NP
c, Tính độ dài CD
d, Tính diện tích Δ NMH

Bài 103: Cho Δ ABC vuông tại C, Gọi D là trung điểm của AB, Kẻ DM vuông góc với AC (M $\in$ AC), Gọi E là điểm đối xứng với D qua BC, DE cắt BC tại N
a, CMR: CMDN là hình chữ nhật
b, Tứ giác BDCE là hình gì ?
c, CMR : $S_{\Delta ABC} = 2.S_{CMDN}$
d, Δ ABC cần có thêm điều kiện gì để ABEC là hình thang cân

Bài 104: Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HD $\perp$ AB và HE $\perp$ AC , Gọi O là giao điểm của AH và DE
a, CMR : AH =DE
b, Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của BH và CH, CMR: DEQP là thang vuông
c, CMR: O là trực tâm của Δ ABQ
d, CMR : $S_{\Delta ABC} = 2.S_{APBC}$

Bài 105: Cho HBH ABCD có AB=8cm, AD=4cm, Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD
a, CMR : AMCN là hình bình hành, Hỏi tứ giác AMND là hình gì ?
b, Gọi I là giao điểm của AN và DM, K là giao điểm của BN và CM, Tứ giác MINK là hình gì ?
c, CM : IK//CD
d, HBH ABCD cần thêm điều kiện gì thì tứ giác MINK là hình vuông? Khi đó diện tích của MINK là bao nhiêu?

Bài 106: Cho Δ ABC cân tại A, Có AB=5cm, BC=6cm, phân giác AM (M $\in$ BC), Gọi O là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng với M qua O
a, Tính diện tích Δ ABC
b, CM: AK//MC
c, Tứ giác AMCK là hình gì?
d, Δ ABC có thêm điều kiện gì thì tứ giác AMCK là hình vuông

Bài 107: Cho Δ ABC vuông tại A, E là 1 điểm thuộc cạnh BC, Gọi D, F lần lượt là các điểm đối xứng với E qua AB và AC
a, CMR: D và F đối xứng với nhau qua A
b, Δ DEF là hình gì ?
c, CM BC=BD+CF
d, Tứ giác BDFC là hình gì, vì sao ?
e, Điểm E ở vị trí nào trên cạnh BC để tứ giác BDFC là HBH
f, Δ ABC có thêm điều kiện gì và E ở vị trí nào trên BC để BDFC là hình chữ nhật

Bài 108: Cho HBH ABCD, AB=2AD, Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD
a, Tứ giác APQD là hình gì? Vì sao ?
b, Gọi I là giao điểm của AQ và PD, Gọi K là giao điểm của BQ và CP, CM IPKQ là hình chữ nhật
c, CM: IK=AD và IK//AB
d, HBH ABCD phải có thêm điều kiện gì để IPKQ là hình vuông?

Bài 109: Cho HV ABCD, trên tia đối của tia CB lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho DN=BM, đường thẳng song song AN kẻ từ M và đường thẳng song song với AM kẻ từ N cắt nhau ở F
a, CMR: ANFM là hình vuông
b, Chứng minh F nằm trên đường phân giác của góc MCN
c, CM AC vuông góc với CF
d, Gọi O là trung điểm của AF, CMR 3 điểm B, D, O thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang

Bài 110: Cho HV ABCD có AC cắt BD tại O, Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC(M khác B và C), Tia AM cắt CD tại N, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE=CM
a, CMR : Δ OEM vuông cân
b, CM: ME song song với BN
c, Từ C kẻ CH vuông góc với BN tại H, CMR: O, M, H thẳng hàng

Bài 111: Cho Δ ABC, trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G, Gọi H và I lần lượt là trung điểm của GB và GC
a, CMR: DEHI là hình bình hành
b, lấy M, N lần lượt trên đoạn DE và HI sao cho DM= HN. CMR : M, G, N thẳng hàng
c, Lấy P và Q lần lượt trên BA và BC sao cho PA=QC,(Vẽ riêng hình), Gọi K là trung điểm của PQ, CMR: KD tạo với các đường thẳng BA và BC các góc nhọn bằng nhau.

Bài 112: Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O, trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (M khác B và C), Tia AM cắt CD tại N, Trên cạnh AB lấy E sao cho BE=CM
a, CMR: Δ OEM vuông cân
b, CMR: ME// BN
c, Từ C kẻ CH $\perp$ BN (H $\in$ BN), CMR: O, M, H thẳng hàng