VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A.KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1.Tính chất của đường nối tâm

-Đường nối tâm (đường thẳng đi qua tâm 2 đường tròn) là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn.

Chú ý:

• Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

-Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

2.Liên hệ giữa vị trí của hai đường tròn với đoạn nối tâm *d* và các bán kính *R* và r

Vị trí tương đối của hai đường tròn (O;R) và (O';r) với R>r	***Số điểm chung***	***Hệ thức giữa d và R, r***
Hai đường tròn cắt nhau	*2*	$R-r<d<R+r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau	*1*	
- Tiếp xúc ngoài		$d = R + r$,
- Tiếp xúc trong		$d = R-r$
Hai đường tròn không giao nhau	*0*	
- Ở ngoài nhau		$d> R + r$
- (O) đựng (O')		$d<R-r$
- (O) và (O') đồng tâm		$d = 0$

B.CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1: Nhận biết vị trí tương đối của hai đường tròn.

Phương pháp giải: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn ...

Bài 1: Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường tròn tâm O' bán kính r $(R \geq r)$.Viết các hệ thức tương ứng giữa r, R và OO' vào bảng sau.

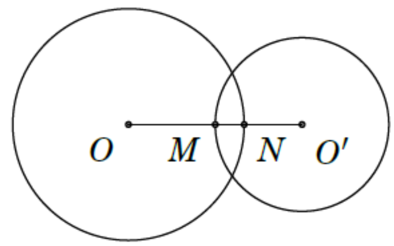
Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' r và R
Hai đường tròn cắt nhau	2	
Hai đường tròn tiếp xúc nhau +) Tiếp xúc ngoài +) Tiếp xúc trong	1	
Hai đường tròn không giao nhau +) (O) và (O') ở ngoài nhau +) (O) đựng (O')	0	

Bài 2: Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường tròn tâm O' bán kính r. Điền vào chỗ trống trong bảng sau.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	OO'	R	r
	14	8	6
Hai đường tròn tiếp xúc trong		17	5
	9	6	4
	36	11	17

Dạng 2: Bài tập về hai đường tròn cắt nhau

Phương pháp: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường họp hai đường tròn cắt nhau.



Bài 3: Cho đường tròn $(O, 6\text{ cm})$ và đường tròn $(O', 5\text{ cm})$ có đoạn nối tâm $OO' = 8$ cm. Biết đường tròn (O) và (O') cắt OO'

lần lượt tại N, M (hìnhbên).

Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Bài 4: Cho hai đường tròn (O ; 4 cm) và (O' ; 3 cm) có $OO' = 5$ cm. Hai đường tròn trên cắt nhau tại A và B. Tính độ dài AB.

Bài 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài dây cung chung DF của đường tròn đường kính AE và đường tròn đường kính CD.

Bài 6: Cho hai đường tròn $(O_1;R),(O_2;R')$ cắt nhau tại K và H đường thẳng O_1H cắt (O_1) tại A cắt (O_2) tại B, đường thẳng O_2H cắt (O_1) tại C, cắt (O_2) tại D.

1) Chứng minh ba điểm A, K, D thẳng hàng.

2) Chứng minh ba đường thẳng AC, BD, HK đồng quy tại một điểm.

Bài 7: Cho hai đường tròn $(O_1;R),(O_2;R)$ cắt nhau tại A, B (O_1, O_2 nằm khác phía so với đường thẳng AB). Một cát tuyến PAQ xoay quanh A $\left(P \in (O_1), Q \in (O_2)\right)$ sao cho A nằm giữa P và Q. Hãy xác đinh vị trí của cát tuyến PAQ trong mỗi trường hợp.

1) A là trung điểm của PQ

2) PQ có độ dài lớn nhất

3) Chu vi tam giác BPQ lớn nhất

4) $S_{\Delta BPQ}$ lớn nhất.

Dạng 3: Bài tập về hai đường tròn tiếp xúc

Phương pháp: Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn không cắt nhau.

Bài 8: Cho hai đường tròn $(I; 2\text{ cm})$ và $(J; 3\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài nhau. Tính độ dài đoạn nối tâm IJ.

Bài 9: Cho hai đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và $(O'; 11\text{ cm})$. Biết khoảng cách $OO' = 2a + 3\ (\text{cm})$ với a là số thực dương. Tìm a để hai đường tròn tiếp xúc nhau.

Bài 10: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A với $(R > R')$. Đường nối tâm OO' cắt $(O), (O')$ lần lượt tại B, C. Dây DE của (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

1) Chứng minh $BDCE$ là hình thoi

2) Gọi I là giao điểm của EC và (O'). Chứng minh D, A, I thẳng hàng

3) Chứng minh KI là tiếp tuyến của (O').

Bài 11: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại C, cắt đường tròn (O') tại D

1) Chứng minh $OC // O'D$

2) Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN, gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M, N qua OO'. Chứng minh $MNQP$ là hình thang cân và $MN + PQ = MP + NQ$

3) Tính góc $\widehat{MAN}$. Gọi K là giao điểm của AM với (O'). Chứng minh ba điểm N, O', K thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN

Dạng 1: Nhận biết vị trí tương đối của hai đường tròn.

Bài 1: Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường tròn tâm O' bán kính r ($R \ge r$).Viết các hệ thức tương ứng giữa r, R và OO' vào bảng sau.

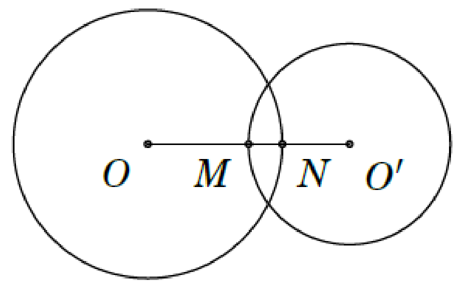
Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' r và R
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau +) Tiếp xúc ngoài +) Tiếp xúc trong	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau +) (O) và (O') ở ngoài nhau +) (O) đựng (O')	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$

Bài 2: Cho đường tròn tâm O bán kính R và đường tròn tâm O' bán kính r. Điền vào chỗ trống trong bảng sau.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	OO'	R	r
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài	14	8	6
Hai đường tròn tiếp xúc trong	12	17	5
Hai đường tròn cắt nhau	9	6	4
(O) và (O') ở ngoài nhau	36	11	17

Dạng 2: Bài tập về hai đường tròn cắt nhau

Bài 3: Cho đường tròn $(O, 6\text{ cm})$ và đường tròn $(O', 5\text{ cm})$ có đoạn nối tâm $OO' = 8$ cm. Biết đường tròn (O) và (O') cắt OO' lần lượt tại N, M (hìnhbên).



Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Lời giải: Ta có

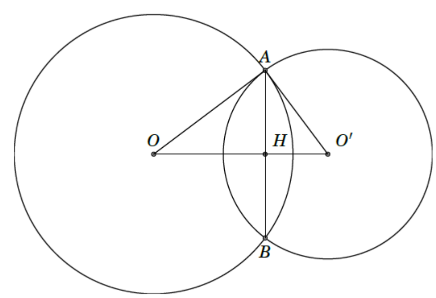
$OM + MN = ON \Rightarrow OM + MN = 6$.

$O'N + MN = O'M \Rightarrow O'N + MN = 5$.

Suyra $OM + MN + O'N + MN = 11 \Rightarrow OO' + MN = 11 \Rightarrow MN = 3$ cm.

Bài 4: Cho hai đường tròn (O ; 4 cm) và (O' ; 3 cm) có $OO' = 5$ cm. Hai đường tròn trên cắt nhau tại A và B. Tính độ dài AB.

Lờigiải



Áp dụng định lý Py ta go đảo cho $\triangle OAO'$ ta có

$OO'^2 = OA^2 + O'A^2 \Leftrightarrow 5^2 = 4^2 + 3^2$.

Suy ra $\triangle OAO'$ vuông tại A.

Gọi H là giao của AB và OO'. Vì hai đường tròn (O ; 4 cm) và (O' ; 3 cm) cắt nhau tại A và B suy ra $OO' \perp AB$ (Tính chất đường nối tâm với dây chung)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $OO'A$

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{3^2} \Leftrightarrow AH = \dfrac{12}{5} = 2,4$ cm.

Do đó $AB = 2AH = 2.2,4 = 4,8$ cm.

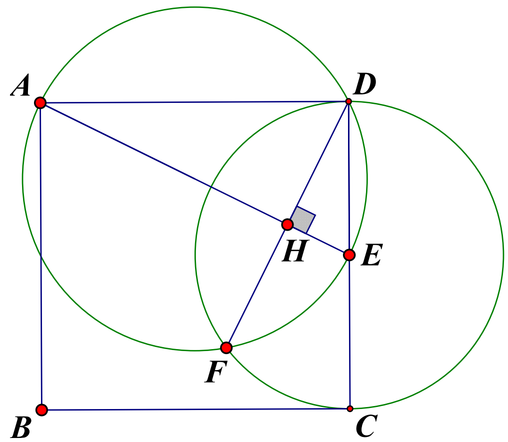
Bài 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài dây cung chung DF của đường tròn đường kính AE và đường tròn đường kính CD.

Lờigiải

Gọi DF cắt AE tại H. $\Rightarrow AE \perp DF$

Tam giác DAE vuông tại D nên ta có: $\dfrac{1}{DH^2}=\dfrac{1}{DE^2}+\dfrac{1}{AD^2}$.

Ta có $DE=\dfrac{a}{2}$; $DA=a \Rightarrow DH=\dfrac{\sqrt{5}a}{5} \Rightarrow DF=2DH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

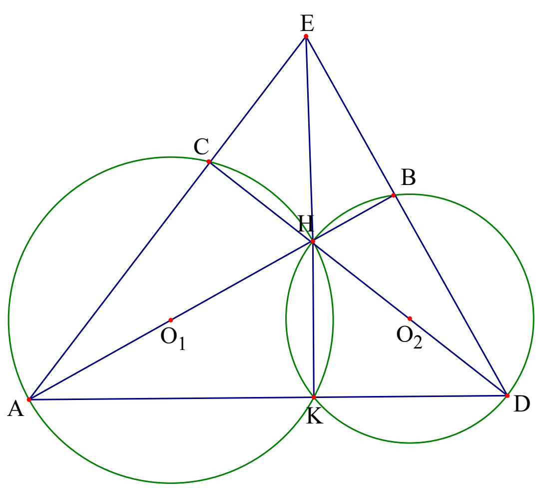


Bài 6: Cho hai đường tròn $(O_1;R),(O_2;R')$ cắt nhau tại K và H đường thẳng O_1H cắt (O_1) tại A cắt (O_2) tại B, đường thẳng O_2H cắt (O_1) tại C, cắt (O_2) tại D.

1) Chứng minh ba điểm A,K,D thẳng hàng.

2) Chứng minh ba đường thẳng AC,BD,HK đồng quy tại một điểm.

Lời giải:



1) Ta có tam giác HKD nối tiếp dường tròn (O_2) có cạnh HD là đường kính nên tam giác HKD vuông tại K suy ra: $HK\perp KD$

Tương tự ta có $HK\perp KA$ suy ra A,K,D thẳng hàng

2) Các tam giác ACH, AKH nội tiếp đường tròn (O_1) có cạnh HA là đường kính nên tam giác ACH vuông tại C, tam giác AKH vuông tại K suy ra $DC\perp AC \Rightarrow DH\perp AC$ (1),

Tương tự ta có $HA \perp BD$ (2).

Lại có $HK \perp KA \Rightarrow HK \perp DA$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra AC, BD, HK đồng quy.(Ba đường cao của tam giác AHD)

Bài 7: Cho hai đường tròn $(O_1;R),(O_2;R)$ cắt nhau tại A, B (O_1, O_2 nằm khác phía so với đường thẳng AB). Một cát tuyến PAQ xoay quanh A $\left(P \in (O_1), Q \in (O_2)\right)$ sao cho A nằm giữa P và Q. Hãy xác đinh vị trí của cát tuyến PAQ trong mỗi trường hợp.

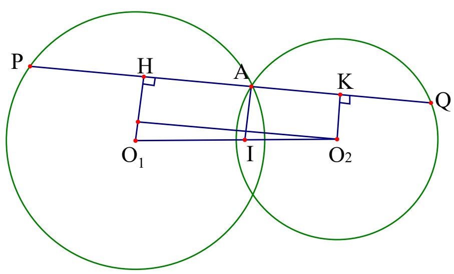
1) A là trung điểm của PQ

2) PQ có độ dài lớn nhất

3) Chu vi tam giác BPQ lớn nhất

4) $S_{\Delta BPQ}$ lớn nhất.

Lời giải:



1) Giả sử đã xác định được vị trí của cát tuyến PAQ sao cho $PA = AQ$.

Kẻ O_1H vuông góc với dây PA thì $PH = HA = \frac{1}{2}PA$.

Kẻ O_2K vuông góc với dây AQ thì $AK = KQ = \frac{1}{2}AQ$.

Nên $AH = AK$.

Kẻ $Ax//O_1H//O_2K$ cắt O, O_2 tại I thì $O_1I = IO_2$ và $Ax \perp PQ$. Từ đó suy ra cách xác định vị trí của cát tuyến PAQ đó là cát tuyến PAQ vuông góc với IA tại A với I là trung điểm của đoạn nối tâm O_1O_2.

2) Trên hình, ta thấy $PA = HK$.

Kẻ $O_2M \perp O_1H$ thì tứ giác $MHKO_2$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật do đó $HK = MO_2$. Lúc đó O_2M là đường vuông góc kẻ từ O_2 đến đường thẳng O_1H, O_2O_1 là đường xiên kẻ từ O_2 đến đường thẳng O_1H.

Nên $O_2M \le O_1O_2$ hay $PQ = 2HK = 2O_2M \le 2O_1O_2$ (không đổi). dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O$ hay $PQ//O_1O_2$. Vậy ở vị trí cát tuyến $PAQ//O_1O_2$ thì PQ có độ dài lớn nhất.

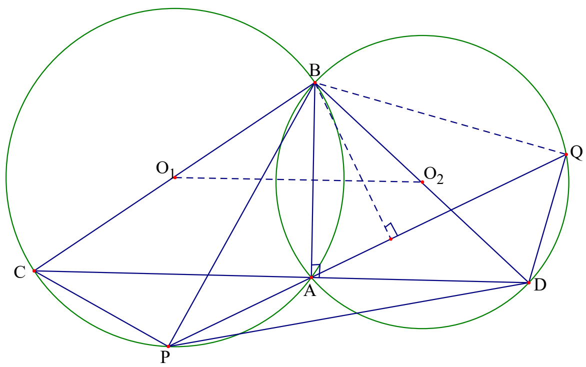
3) Qua A kẻ cát tuyến CAD vuông góc với BA.

Thì tam giác ABC và ABD vuông tại A lần lượt nội tiếp các đường tròn (O_1), (O_2) nên O_1 là trung điểm của BC và O_2 là trung điểm của BD. Lúc đó O_1O_2 là đường trung bình của tam giác BCD nên $O_1O_2 // CD$ suy ra $PQ \le 2O_1O_2$ (1) (theo câu b).

Lại có $BQ \le BD$ (2), $BP \le BC$ (3). Từ (1),(2),(3) suy ra chu vi tam giác

$BPQ, C = PQ + BQ + BP \le 2(O_1O_2 + R_1 + R_2)$ (không đổi). Dấu bằng có khi $P \equiv C, Q \equiv D$.

Vậy chu vi tam giác BPQ đạt giá trị lớn nhất khi cát tuyến PAQ vuông góc với dây BA tại A.



4) Kẻ $BN \perp PQ$ thì $BN \le BA$.

Lúc đó $S_{BPQ} = \frac{1}{2}BN.PQ \le \frac{1}{2}BA.CD$ không đổi.

Vậy S_{BPQ} đạt giá trị lớn nhất khi cát tuyến PAQ vuông góc với dây chung BA tại A.

Dạng 3: Bài tập về hai đường tròn tiếp xúc

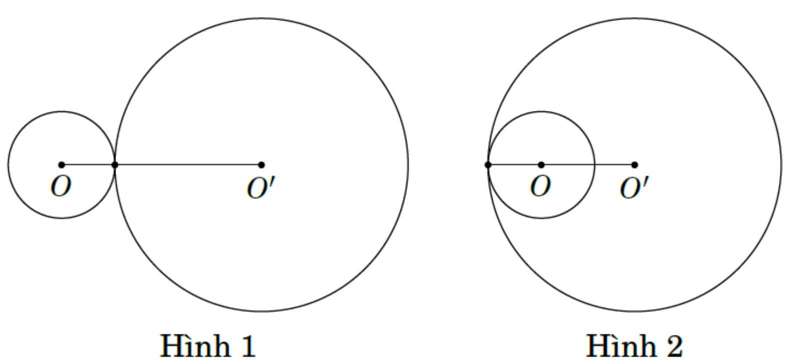
Bài 8: Cho hai đường tròn $(I; 2\text{ cm})$ và $(J; 3\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài nhau. Tính độ dài đoạn nối tâm IJ.

Lờigiải

Độ dài đoạn nối tâm IJ bằng : $2 + 3 = 5$ cm.

Bài 9: Cho hai đường tròn $(O; 4\text{ cm})$ và $(O'; 11\text{ cm})$. Biết khoảng cách $OO' = 2a + 3$ (cm) với a là số thực dương. Tìm a để hai đường tròn tiếp xúc nhau.

Lờigiải



Các trường hợp có thể xảy ra là

+) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài (xemhình1), ta có

$$OO' = R + R' \Leftrightarrow 2a + 3 = 15 \Leftrightarrow a = 6 \text{ cm}.$$

+) Hai đường tròn tiếp xúc trong (xemhình 2), ta có

$$OO' = |R - R'| \Leftrightarrow 2a + 3 = |4 - 11| \Leftrightarrow a = 2 \text{ cm}.$$

Vậy $a = 6$ cm và $a = 2$ cm.

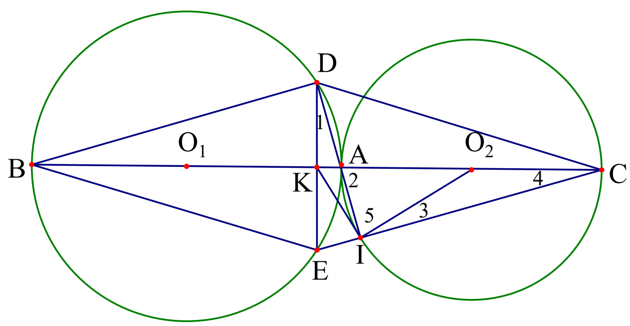
Bài 10: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A với $(R > R')$. Đường nối tâm OO' cắt $(O),(O')$ lần lượt tại B,C. Dây DE của (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

1) Chứng minh $BDCE$ là hình thoi

2) Gọi I là giao điểm của EC và (O'). Chứng minh D,A,I thẳng hàng

3) Chứng minh KI là tiếp tuyến của (O').

Lờigiải



1) Vì BC vuông góc với đường thẳng DE nên $DK = KE, BK = KC$ (theo giả thiết) do đó tứ giác $BDCE$ là hình bình hành, lại có $BC \perp DE$ nên là hình thoi.

2) Vì tam giác BDA nội tiếp đường tròn (O_1) có BA là đường kính nên ΔBDA vuông tại D. Gọi I' là giao điểm của DA với CE thì $\widehat{AI'C} = 90^0$ (1) (vì so le trong với $\widehat{BDA}$). Lại có ΔAIC nội tiếp đường tròn (O_2) có AC là đường kính nên tam giác AIC vuông tại I, hay $\widehat{AIC} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$. Vậy D,A,I thẳng hàng.

3) Vì tam giác DIE vuông tại I có IK là trung tuyến ứng với cạnh huyền DE nên $KD = KI = KE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{I_2}$ (1). Lại có $\widehat{D_1} = \widehat{C_4}$ (2) do cùng phụ với $\widehat{DEC}$ và $\widehat{C_4} = \widehat{C_3}$ (3), vì $O_2C = O_2I$ là bán kính của đường tròn (O_2).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\widehat{I_2} = \widehat{I_3} \Rightarrow \widehat{I_2} + \widehat{I_5} = \widehat{I_5} + \widehat{I_3} = 90^0$ hay $\widehat{KIO_2} = 90^0$ do đó KI vuông góc với bán kính O_2I của đường tròn (O_2). Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O_2).

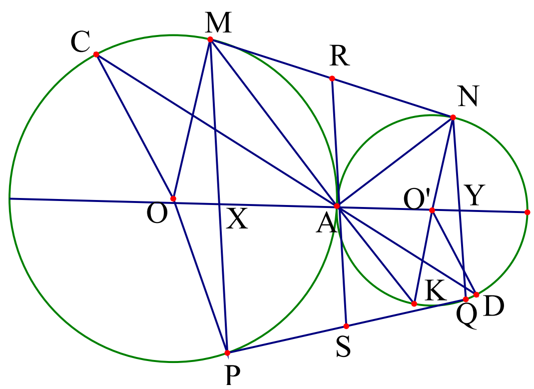
Bài 11: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại C, cắt đường tròn (O') tại D

1) Chứng minh $OC//O'D$

2) Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN, gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M, N qua OO'. Chứng minh $MNQP$ là hình thang cân và $MN + PQ = MP + NQ$

3) Tính góc $\widehat{MAN}$. Gọi K là giao điểm của AM với (O'). Chứng minh N, O', K thẳng hàng.

Lờigiải



a). Do hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A nên A nằm trên OO'.Ta có $\widehat{CAO} = \widehat{DAO'}$. Lại có $\widehat{OCA} = \widehat{OAD}, \widehat{O'AD} = \widehat{O'DA}$ vì các tam giác $\Delta COA, \Delta DO'A$ là tam giác cân. Từ đó suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{O'DA} \Leftrightarrow OC//O'D$

b). + Vì $MP \perp OO', NQ \perp OO' \Rightarrow MP//OO' \Rightarrow MNQP$ là hình thang . Vì M đối xứng với P qua OO', N đối xứng với Q qua OO' và O luôn đối xứng với O qua OO' nên $\widehat{OPM} = \widehat{OMP} = 90^0$. Mặt khác $\widehat{MPQ}, \widehat{PMN}$ cùng phụ với các góc $\widehat{OPM} = \widehat{OMP}$ nên $\widehat{MPQ} = \widehat{PMN}$ suy ra $MNQP$ là hình thang cân.

(Chú ý: Từ đây ta cũng suy ra PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn)

+ Kẻ tiếp tuyến chung qua A của hai đường tròn cắt MN, PQ tại R, S thì ta có: $RM = RA = RN, SA = SP = SQ$ suy ra $MN + PQ = 2RS$. Mặt khác RS cũng là đường trung bình của hình thang nên $MP + NQ = 2RS$ hay $MP + NQ = MN + PQ$

c). Từ câu b ta có $AR = RM = RN$ nên tam giác MAN vuông tại A, từ đó suy ra $\widehat{NAK} = 90^0 \Rightarrow KN$ là đường kính của (O'), hay N, O', K thẳng hàng.

C.TRẮC NGHIỆM RÈN PHẢN XẠ

Câu 1: Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì số điểm chung của hai đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 2: Nếu hai đường tròn không cắt nhau thì số điểm chung của hai đường tròn là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 3: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R>r$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt và $OO'=d$. Chọn khẳng định đúng?

A. $d=R-r$. **B.** $d>R+r$. **C.** $R-r<d<R+r$. **D.** $d<R-r$.

Câu 4: Cho hai đường tròn $(O;8cm)$ và $(O';6cm)$ cắt nhau tại A,B sao cho OA là tiếp tuyến của (O'). Độ dài dây AB là:

A. $AB=8,6cm$. **B.** $AB=6,9cm$. **C.** $AB=4,8cm$. **D.** $AB=9,6cm$.

Câu 5: Cho hai đường tròn $(O;6cm)$ và $(O';2cm)$ cắt nhau tại A,B sao cho OA là tiếp tuyến của (O'). Độ dài dây AB là:

A. $AB=3\sqrt{10}cm$. **B.** $AB=\frac{6\sqrt{10}}{5}cm$. **C.** $AB=\frac{3\sqrt{10}}{5}cm$. **D.** $AB=\frac{\sqrt{10}}{5}cm$.

Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') đường kính OA.

Câu 6: Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Nằm ngoài nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Câu 7: Dây AD của đường tròn cắt đường tròn nhỏ tại C. Khi đó:

A. $AC>CD$. **B.** $AC=CD$. **C.** $AC<CD$. **D.** $CD=OD$.

Cho đoạn OO' và điểm A nằm trên đoạn OO' sao cho $OA=2O'A$. Đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') bán kính $O'A$.

Câu 8: Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Nằm ngoài nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Câu 9: Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại C. Khi đó:

A. $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{AD}{AC}=3$. **C.** $OD\,//\,O'C$. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A và một đường thẳng d tiếp xúc với $(O_1);(O_2)$ lần lượt tại B,C.

Câu 10: Tam giác ABC là:

A. Tam giác cân. **B.** Tam giác đều. **C.** Tam giác vuông. **D.** Tam giác vuông cân.

Câu 11: Lấy M là trung điểm của BC. Chọn khẳng định **sai?**

A. AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(O_1);(O_2)$.

B. AM là đường trung bình của hình thang O_1BCO_2.

C. $AM = BC$.

D. $AM = \frac{1}{2}BC$.

Cho $(O_1;3cm)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2;1cm)$ tại A. Vẽ hai bán kính O_1B và O_2C song song với nhau cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ O_1O_2. Gọi D là giao điểm của BC và O_1O_2.

Câu 12: Tính số đo $\widehat{BAC}$.

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $100°$. **D.** $80°$.

Câu 13: Tính độ dài O_1D.

A. $O_1D = 4,5cm$. **B.** $O_1D = 5cm$. **C.** $O_1D = 8cm$. **D.** $O_1D = 6cm$.

Câu 14: Cho hai đường tròn $(O;20cm)$ và $(O';15cm)$ cắt nhau tại A và B. Tính đoạn nối tâm OO', biết rằng $AB = 24cm$ và O và O' nằm cùng phía đối với AB.

A. $OO' = 7cm$. **B.** $OO' = 8cm$. **C.** $OO' = 9cm$. **D.** $OO' = 25cm$.

Câu 15: Cho hai đường tròn $(O;10cm)$ và $(O';5cm)$ cắt nhau tại A và B. Tính đoạn nối tâm OO', biết rằng $AB = 8cm$ và O và O' nằm cùng phía đối với AB. (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

A. $OO' \approx 6,5cm$. **B.** $OO' \approx 6,1cm$. **C.** $OO' \approx 6cm$. **D.** $OO' \approx 6,2cm$.

Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính AO (cùng phía với nửa đường tròn (O)). Một cát tuyến bất kỳ qua A cắt $(O');(O)$ lần lượt tại C,D.

Câu 16: Chọn khẳng định sai?

A. C là trung điểm của AD.

B. Các tiếp tuyến tại C và D của các nửa đường tròn song song với nhau.

C. $O'C\,//\,OD$.

D. Các tiếp tuyến tại C và D của các nửa đường tròn cắt nhau.

Câu 17: Nếu BC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O') thì tính BC theo R (với $OA = R$)

A. $BC = 2R$. **B.** $BC = \sqrt{2}R$. **C.** $BC = \sqrt{3}R$. **D.** $BC = \sqrt{5}R$.

Cho hai đường tròn $(O);(O')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với $M \in (O); N \in (O')$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua $OO'; Q$ là điểm đối xứng với N qua OO'.

Câu 18: Khi đó, tứ giác $MNQP$ là hình gì?

A. Hình thang cân. **B.** Hình thang. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình bình hành.

Câu 19: $MN + PQ$ bằng

A. $MP + NQ$. **B.** $MQ + NP$. **C.** $2MP$. **D.** $OP + PQ$.

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ $(R > R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ các bán kính $OB\,//\,O'D$ với B, D ở cùng phía nửa mặt phẳng bờ OO'. Đường thẳng DB và OO' cắt nhau tại I. Tiếp tuyến chung ngoài GH của (O) và (O') với G, H nằm ở nửa mặt phẳng bờ OO' không chứa B, D.

Câu 20: Tính OI theo R và R'.

A. $OI = \dfrac{R+R'}{R-R'}$. **B.** $OI = \dfrac{R-R'}{R+R'}$. **C.** $OI = \dfrac{R(R-R')}{R+R'}$. **D.** $OI = \dfrac{R(R+R')}{R-R'}$.

Câu 21: Chọn câu đúng.

A. BD, OO' và GH đồng quy. **B.** BD, OO' và GH không đồng quy.

C. Không có ba đường nào đồng quy. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Câu 22: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính $AOB; AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(D \in (O); E \in (O'))$. Gọi M là giao điểm của BD và CE. Tính diện tích tứ giác $ADME$ biết $\widehat{DOA} = 60^\circ$ và $OA = 6cm$.

A. $12\sqrt{3}\,cm^2$. **B.** $12\,cm^2$. **C.** $16\,cm^2$. **D.** $24\,cm^2$.

Câu 23: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính $AOB; AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(D \in (O); E \in (O'))$. Gọi M là giao điểm của BD và CE. Tính diện tích tứ giác $ADME$ biết $\widehat{DOA} = 60°$ và $OA = 8cm$.

A. $12\sqrt{3}\,cm^2$. **B.** $\frac{64}{3}\sqrt{3}\,cm^2$. **C.** $\frac{32}{3}\sqrt{3}\,cm^2$. **D.** $36\,cm^2$.

Câu 24: Cho hai đường tròn $(O);(O')$ cắt nhau tại A, B. Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O'). Chọn khẳng định sai?

A. $OO' = \frac{DC}{2}$. **B.** C, B, D thẳng hàng. **C.** $OO' \perp AB$. **D.** $BC = BD$.

Câu 25: Cho hai đường tròn $(O);(O')$ cắt nhau tại A, B trong đó $O' \in (O)$. Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O). Chọn khẳng định sai?

A. $AC = CB$. **B.** $\widehat{CBO'} = 90°$.

C. CA, CB là hai tiếp tuyến của (O'). **D.** CA, CB là hai cát tuyến của (O').

Cho các đường tròn $(A;10cm),(B;15cm),(C;15cm)$ tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Hai đường tròn (B) và (C) tiếp xúc với nhau tại A'. Đường tròn (A) tiếp xúc với đường tròn (A) và (B) lần lượt tại C' và B'.

Câu 25: Chọn câu đúng nhất.

A. AA' là tiếp tuyến chung của đường tròn (B) và (C). **B.** $AA' = 25cm$.

C. $AA' = 15cm$. **D.** Cả A và B đều đúng.

Câu 26: Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

A. $36\,cm^2$. **B.** $72\,cm^2$. **C.** $144\,cm^2$. **D.** $96\,cm^2$.

Câu 27: Cho đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ không giao nhau. Gọi M là một điểm di động trên xy. Vẽ đường tròn đường kính OM cắt đường tròn (O) tại A và B. Kẻ $OH \perp xy$. Chọn câu đúng:

A. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là H.

B. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là trung điểm OH.

C. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là giao của OH và AB.

D. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là giao của OH và $(O;R)$.

HƯỚNG DẪN

1. Lời giải:

Hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì có một điểm chung duy nhất.

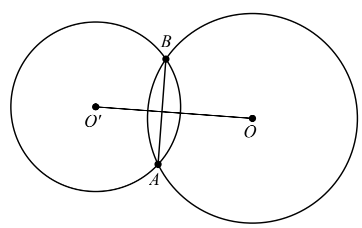
Đáp án cần chọn là A.

2. Lời giải:

Hai đường tròn không cắt nhau thì không có điểm chung duy nhất.

Đáp án cần chọn là D.

3. Lời giải:



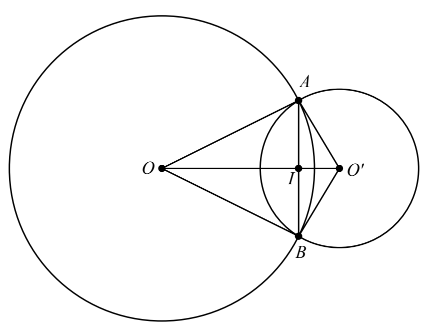
Hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ $(R>r)$ cắt nhau.

Khi đó (O) và (O') có hai điểm chung và đường nối tâm là đường trung trực của đoạn AB.

Hệ thức liên hệ $R-r<OO'<R+r$.

Đáp án cần chọn là C.

4. Lời giải:



Vì OA là tiếp tuyến của (O') nên $\Delta OAO'$ vuông tại A.

Vì (O) và (O') cắt nhau tại A,B nên đường nối tâm OO' là trung trực của đoạn AB.

Gọi giao điểm của AB và OO' là I thì $AB \perp OO'$ tại I là trung điểm của AB.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác OAO' ta có:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{O'A^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{6^2} \Rightarrow AI = 4,8cm \Rightarrow AB = 9,6cm.$$

Đáp án cần chọn là D.

5. Lời giải:

Vì OA là tiếp tuyến của (O') nên $\Delta OAO'$ vuông tại A.

Vì (O) và (O') cắt nhau tại A, B nên đường nối tâm OO' là trung trực của đoạn AB.

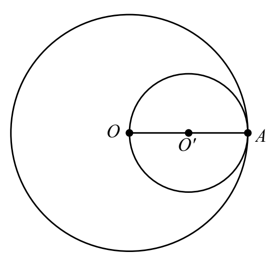
Gọi giao điểm của AB và OO' là I thì $AB \perp OO'$ tại I là trung điểm của AB.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác OAO' ta có:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{O'A^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{2^2} \Rightarrow AI = \frac{3\sqrt{10}}{5}cm \Rightarrow AB = \frac{6\sqrt{10}}{5}cm.$$

Đáp án cần chọn là B.

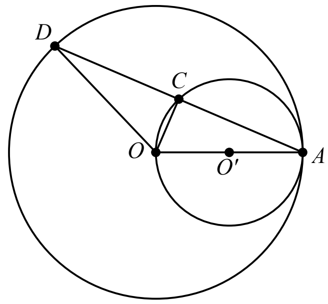
6. Lời giải:



Vì hai đường tròn có một điểm chung là A và $OO' = OA - \frac{OA}{2} = R - r$ nên hai đường tròn tiếp xúc trong.

Đáp án cần chọn là D.

7. Lời giải:

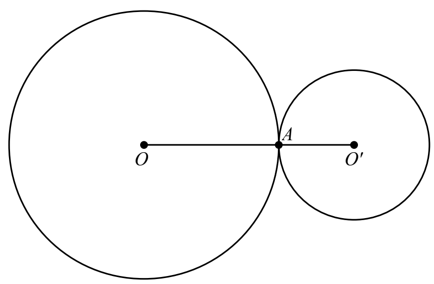


Xét đường tròn (O') có OA là đường kính và $C \in (O')$ nên ΔACO vuông tại C hay $OC \perp AD$.

Xét đường tròn (O) có $OA = OD \Rightarrow \Delta OAD$ cân tại O có OC là đường cao cũng là đường trung tuyến nên $CD = CA$.

Đáp án cần chọn là B.

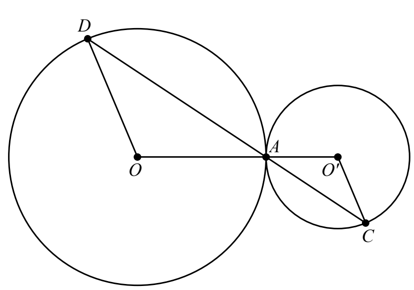
8. Lời giải:



Vì hai đường tròn có một điểm chung là A và $OO' = OA + O'A = R + r$ nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Đáp án cần chọn là C.

9. Lời giải:



Xét đường tròn (O') và (O) có $O'A = \dfrac{1}{2}OA$ nên $\dfrac{OA}{O'A} = 2$.

Xét $\Delta O'AC$ cân tại O' và ΔOAD cân tại D có $\widehat{OAD} = \widehat{O'AD}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{OAD} = \widehat{O'CA}$.

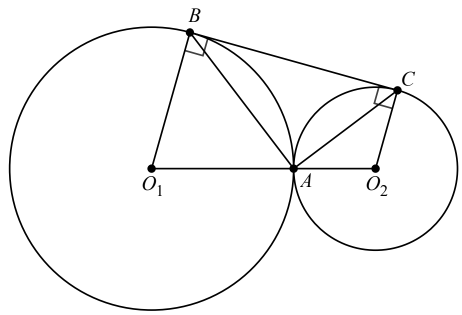
Suy ra $\widehat{OAD} = \widehat{O'AD}$

Suy ra $\Delta OAD \backsim \Delta O'AC$ (g - g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{OA}{O'A} = 2$

Lại có vì $\widehat{OAD} = \widehat{O'CA}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên $OD // O'C$.

Đáp án cần chọn là C.

10. Lời giải:



Xét (O_1) có $O_1B = O_1A \Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A \Rightarrow \Delta O_2CA$ cân tại $O_2 \Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$

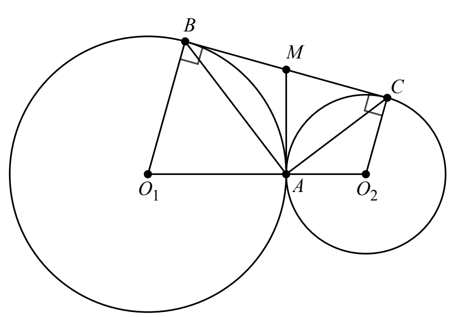
Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360^\circ - \widehat{C} - \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180^\circ - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Đáp án cần chọn là C.

11. Lời giải:



Vì ΔABC vuông tại A có AM là trung tuyến nên $AM = BM = DM = \dfrac{BC}{2}$.

Xét tam giác BMA cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$, mà $\widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$ (cmt) nên

$$\widehat{O_1BA} + \widehat{MBA} = \widehat{O_1AB} + \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{O_1AM} = \widehat{O_1BM} = 90^\circ.$$

$\Rightarrow MA \perp AO_1$ tại A nên AM là tiếp tuyến của (O_1)

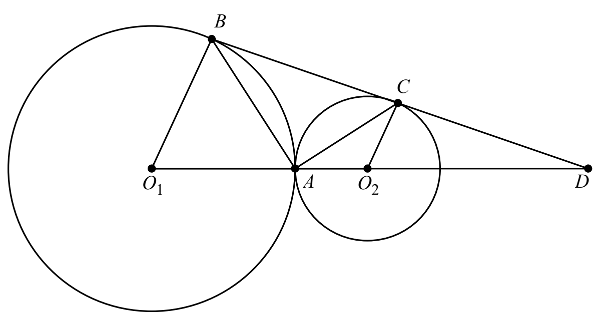
Tương tự ta cũng có $\Rightarrow MA \perp AO_2$ tại A nên AM là tiếp tuyến của (O_2)

Hay AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Vậy phương án A, C, D đúng. B sai.

Đáp án cần chọn là B.

12. Lời giải:



Xét (O_1) có $O_1B = O_1A \Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại O_1 $\Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A \Rightarrow \Delta O_2CA$ cân tại $O_2 \Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$

Lại có $O_1B // O_2C \Rightarrow \widehat{O_1BC} + \widehat{O_2CB} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía bù nhau)

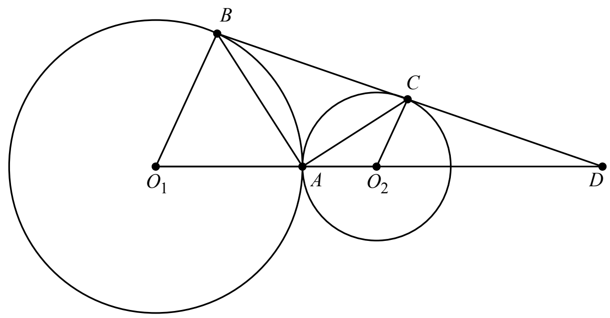
Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360^\circ - \widehat{O_2CB} - \widehat{O_1BC} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180^\circ - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180^\circ \Leftrightarrow 2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

Đáp án cần chọn là A.

13. Lời giải:



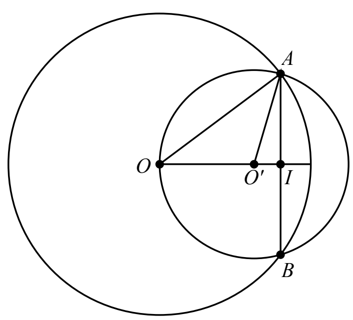
Vì ΔO_1BD có $O_1B\,//\,O_2C$ nên theo hệ quả định lý Ta-let ta có:

$$\frac{O_2D}{O_1D}=\frac{O_2C}{O_1B}=\frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{O_1O_2}{O_1D}=\frac{2}{3}.$$

Mà $O_1O_2=O_1A+O_2A=3+1=4\Rightarrow O_1D=\frac{3}{2}.O_1O_2=\frac{3}{2}.4=6cm$.

Đáp án cần chọn là D.

14. Lời giải:



Ta có $AI=\frac{1}{2}AB=12\,cm$.

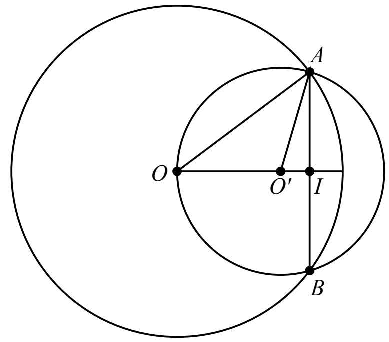
Theo định lý Pytago ta có: $OI^2=OA^2-AI^2=256\Rightarrow OI=16\,cm$

$$O'I=\sqrt{O'A^2-IA^2}=9cm$$

Do đó: $OO'=OI-O'I=16-9=7(cm)$.

Đáp án cần chọn là A.

15. Lời giải:



Ta có $AI = \frac{1}{2}AB = 4\,cm$.

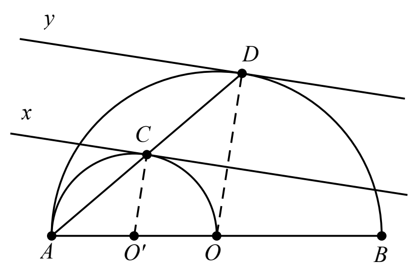
Theo định lý Pytago ta có: $OI^2 = OA^2 - AI^2 = 10^2 - 4^2 = 84 \Rightarrow OI = 2\sqrt{21}\,cm$

$$O'I = \sqrt{O'A^2 - IA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

Do đó: $OO' = OI - O'I = 2\sqrt{21} - 3 \approx 6,2(cm)$.

Đáp án cần chọn là D.

16. Lời giải:



Xét đường tròn (O') có OA là đường kính và $C \in (O')$ nên $\widehat{ACO} = 90° \Rightarrow AD \perp CO$

Xét đường tròn (O) có $OA = OD \Rightarrow \Delta OAD$ cân tại O có OC là đường cao nên OC cũng là đường trung tuyến hay C là trung điểm của AD.

Xét tam giác AOD có $O'C$ là đường trung bình nên $O'C\,//\,OD$

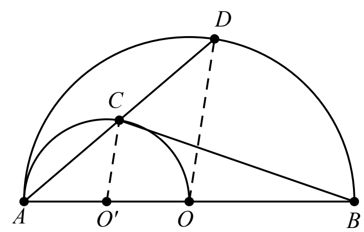
Kẻ các tiếp tuyến $Cx; Dy$ với các nửa đường tròn ta có $Cx \perp O'C; Dy \perp OD$ mà $O'C\,//\,OD$ nên $Cx \perp Dy$

.

Do đó phương án A, B, C đúng.

Đáp án cần chọn là D.

17. Lời giải:

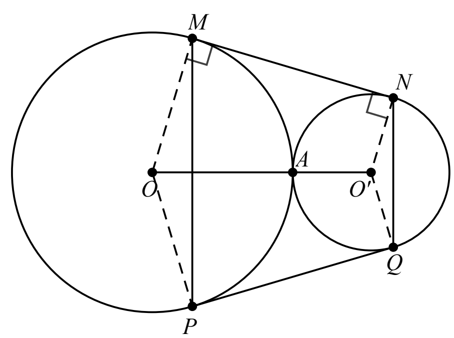


Ta có $OB = R; OO' = \dfrac{R}{2} \Rightarrow O'B = \dfrac{3R}{2}; O'C = \dfrac{R}{2}$

Theo định lý Pytago ta có: $BC = \sqrt{OB^2 - O'C^2} = \sqrt{\dfrac{9R^2}{4} - \dfrac{R^2}{4}} = \sqrt{2}R$.

Đáp án cần chọn là B.

18. Lời giải:



Vì P là điểm đối xứng với M qua OO'

Q là điểm đối xứng với N qua OO' nên $MN = PQ$.

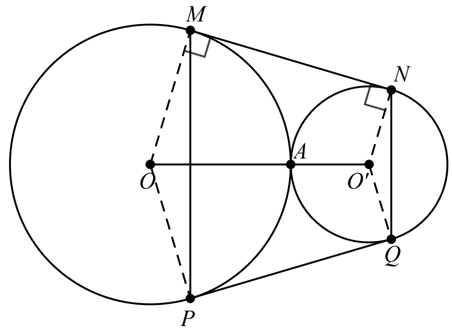
$P \in (O); Q \in (O')$

Mà $MP \perp OO'; NQ \perp OO' \Rightarrow MP // NQ$ mà $MN = PQ$

Nên $MNPQ$ là hình thang cân.

Đáp án cần chọn là A.

19. Lời giải:



Kẻ tiếp tuyến chung tại A của $(O);(O')$ cắt $MN;PQ$ lần lượt tại $B;C$

Ta có $MNPQ$ là hình thang cân nên $\widehat{NMP} = \widehat{QPM}$

Tam giác OMP cân tại O nên $\widehat{OMP} = \widehat{OPM}$ suy ra $\widehat{OMP} + \widehat{PMN} = \widehat{OPM} + \widehat{MPQ} \Rightarrow \widehat{QPO} = 90^\circ$

$\Rightarrow OP \perp PQ$ tại $P \in (O)$ nên PQ là tiếp tuyến của (O).

Chứng minh tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của (O').

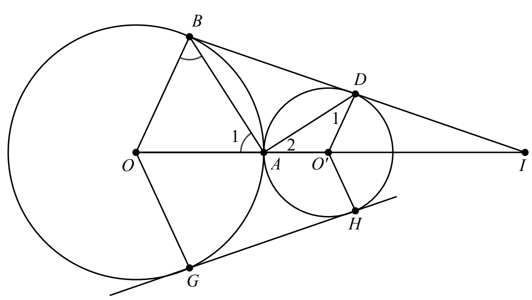
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $BA = BM = BN; CP = CA = CQ$ suy ra $B;C$ lần lượt là trung điểm của $MN;PQ$ và $MN + PQ = 2MB + 2PC = 2AB + 2AC = 2BC$.

Lại có BC là đường trung bình của hình thang $MNQP$ nên $MP + NQ = 2BC$.

Do đó $MN + PQ = MP + NQ$.

Đáp án cần chọn là A.

20. Lời giải:



Xét tam giác IOB có $OB//O'D$ (gt)

Áp dụng định lí Ta-let ta có $\dfrac{OI}{O'I} = \dfrac{OB}{O'D} \Leftrightarrow \dfrac{OI}{O'I} = \dfrac{R}{R'}$ mà

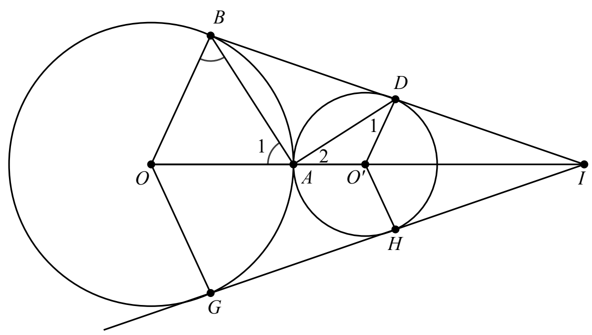
$O'I = OI - OO' = OI - (OA + AO') = OI - (R + R')$

Nên $\dfrac{OI}{OI-(R+R')}=\dfrac{R}{R'}\Rightarrow OI.R'=R[OI-(R+R')]\Leftrightarrow OI.R$ - $OI.R'=R(R+R')$.

$\Leftrightarrow OI(R-R')=R(R+R')\Leftrightarrow OI=\dfrac{R(R+R')}{R-R'}$.

Đáp án cần chọn là D.

21. Lời giải:



Gọi giao điểm của OO' và GH là I'

Ta có $OG//O'H$ (do cùng vuông góc GH)

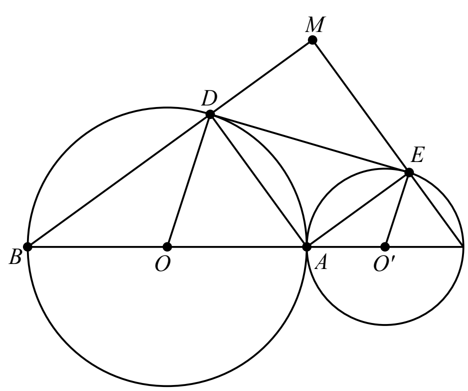
Theo định lí Talet trong tam giác OGI' ta có $\dfrac{I'O}{I'O'}=\dfrac{OG}{O'H}=\dfrac{R}{R'}$ hay $\dfrac{I'O}{I'O'}=\dfrac{OI}{O'I}=\dfrac{R}{R'}$

$\Rightarrow I'$ trùng với I

Vậy BD, OO' và GH đồng quy.

Đáp án cần chọn là A.

22. Lời giải:



Chứng minh tương tự câu trước ta có được $\widehat{DAE} = 90°$

Mà $\widehat{BDA} = 90°$ (vì tam giác BAD có cạnh AB là đường kính của (O) và $D \in (O)$) nên $BD \perp AD \Rightarrow \widehat{MDA} = 90°$.

Tương tự ta có $\widehat{MEA} = 90°$.

Nên tứ giác $DMEA$ là hình chữ nhật.

Xét tam giác OAD cân tại O có $\widehat{DOA} = 60°$ nên ΔDOA đều

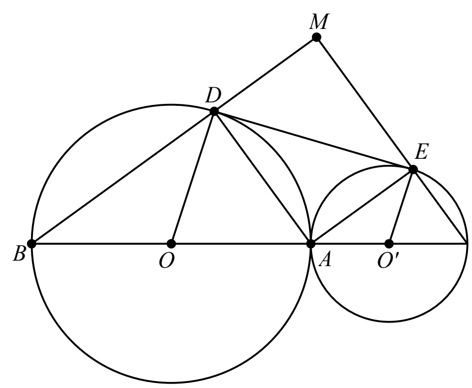
Suy ra $OA = AD = 6cm$ và $\widehat{ODA} = 60° \Rightarrow \widehat{ADE} = 30°$.

Xét tam giác ADE ta có: $EA = AD.\tan\widehat{EDA} = 6.\tan 30° = 2\sqrt{3}$

$S_{DMEA} = AD.AE = 6.2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\, cm^2$.

Đáp án cần chọn là A.

23. Lời giải:



Xét (O) có $OD = OA \Rightarrow \Delta OAD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{OAD}$

Xét (O') có $O'E = O'A \Rightarrow \Delta O'EB$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'EA} = \widehat{O'AE}$

Mà $\widehat{O} + \widehat{O'} = 360° - \widehat{O'ED} - \widehat{ODE} = 180°$

$\Leftrightarrow 180° - \widehat{ODA} - \widehat{OAD} + 180° - \widehat{O'EA} - \widehat{O'AE} = 180° \Leftrightarrow 2(\widehat{OAD} + \widehat{O'AE}) = 180°$

$\Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{O'AE} = 90° \Rightarrow \widehat{DAE} = 90° \Rightarrow ADE$ vuông tại A

Mà $\widehat{BDA} = 90^\circ$ (vì tam giác BAD có cạnh AB là đường kính

của (O) và $D \in (O)$) nên $BD \perp AD \Rightarrow \widehat{MDA} = 90^\circ$.

Tương tự ta có $\widehat{MEA} = 90^\circ$.

Nên tứ giác $DMEA$ là hình chữ nhật.

Xét tam giác OAD cân tại O có $\widehat{DOA} = 60^\circ$ nên ΔDOA đều

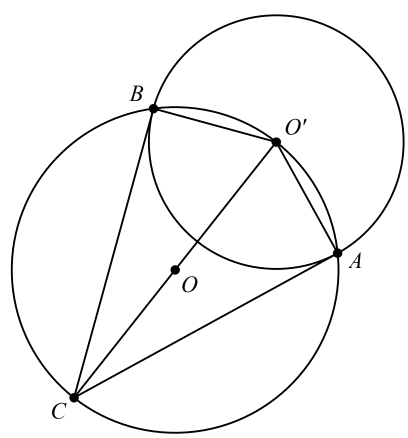
Suy ra $OA = AD = 6cm$ và $\widehat{ODA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = 30^\circ$.

Xét tam giác ADE ta có: $EA = AD.\tan \widehat{EDA} = 8.\tan 30^\circ = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

$S_{DMEA} = AD.AE = 8.\frac{8}{3}\sqrt{3} = \frac{64}{3}\sqrt{3}\,cm^2$.

Đáp án cần chọn là B.

24. Lời giải:



Hai đường tròn $(O);(O')$ cắt nhau tại A và B tại A và B nên OO' là đường trung trực của AB

$\Rightarrow OO' \perp AB$ (tính chất đường nối tâm) nên đáp án C đúng.

Xét đường tròn (O) có AC là đường kính, suy ra ΔABC vuông tại B hay $\widehat{CBA} = 90^\circ$.

Xét đường tròn (O) có AD là đường kính, suy ra ΔABD vuông tại B hay $\widehat{DBA} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{CBA} + \widehat{DBA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ hay ba điểm B, C, D thẳng hàng nên đáp án B đúng.

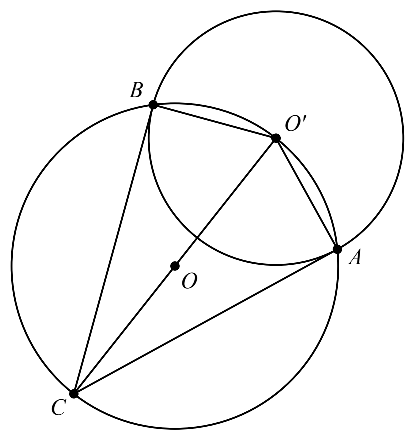
Xét tam giác ADC có O là trung điểm đoạn AC và O' là trung điểm đoạn AD nên OO' là đường trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow OO' = \dfrac{DC}{2}$ (tính chất đường trung bình) nên đáp án A đúng.

Ta chưa thể kết luận gì về độ dài BC và BD nên đáp án D sai.

Nên A, B, C đúng, D sai.

Đáp án cần chọn là D.

25. Lời giải:



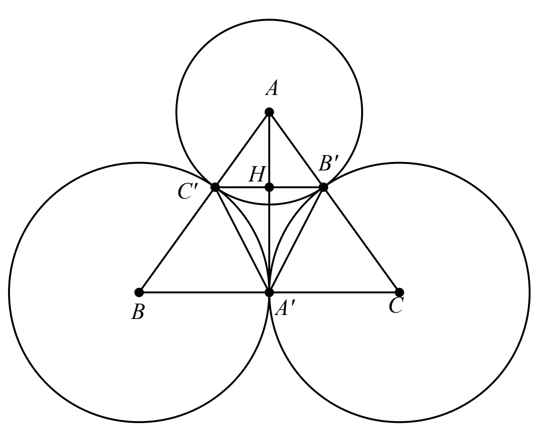
Xét đường tròn (O) có $O'C$ là đường kính, suy ra $\widehat{CBO'} = \widehat{CAO'} = 90°$ hay $CB \perp O'B$ tại B và $AC \perp AO'$ tại A.

Do đó AC, BC là hai tiếp tuyến của (O') nên $AC = CB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Nên A, B, C đúng.

Đáp án cần chọn là D.

25. Lời giải:



Theo tính chất đoạn nối tâm của hai đường tròn tiếp xúc ngoài ta có:

$AB = BC' + C'A = 25cm; AC = AB' + B'C = 25cm; BC = BA' + A'C = 30cm$ và A' là trung điểm của BC (vì $A'B = A'C = 15cm$)

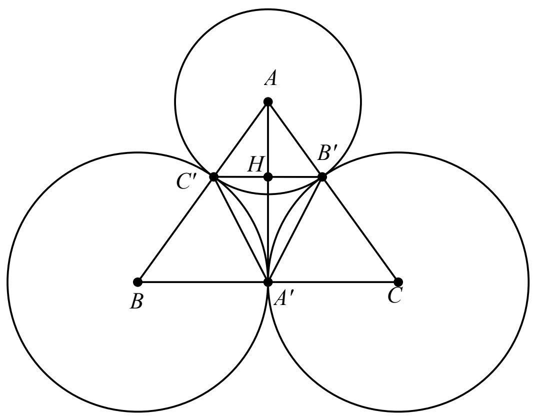
ΔABC cân tại A có AA' là đường trung tuyến nên cũng là đường cao $\Rightarrow AA' \perp BC$

$\Rightarrow AA'$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (B) và (C)

Xét tam giác $AA'C$ vuông tại A' ta có: $A'A^2 = AC^2 - A'C^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow A'A = 20cm$.

Đáp án cần chọn là A.

26. Lời giải:



Ta có: $\dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow B'C' // BC$ do đó $B'C' \perp AA'$

Lại có $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{AC'}{AB} \Rightarrow \dfrac{B'C'}{30} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow B'C' = 12cm$

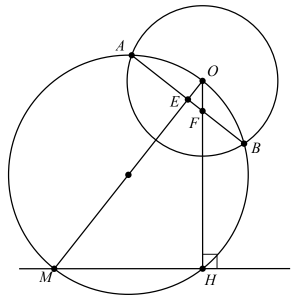
Xét $\Delta ABA'$ có $B'C' // BC$ nên theo định lý Ta lét ta có:

$$\frac{AH}{A'A} = \frac{BC'}{BA} \Rightarrow \frac{AH}{20} = \frac{15}{25} \Rightarrow AH = 12cm \text{ (do theo câu trước thì } AA' = 20cm\text{)}$$

Diện tích tam giác $A'B'C'$ là: $S = \dfrac{1}{2}B'C'.AH = \dfrac{1}{2}.12.12 = 72\left(cm^2\right)$.

Đáp án cần chọn là B.

27. Lời giải:



Vì $OH \perp xy$ nên H là một điểm cố định và OH không đổi.

Gọi giao điểm của AB và OM là E; giao điểm của AB với OH là F.

Vì $(O;R)$ và đường tròn đường kính OM cắt nhau tại $A;B$ nên $AB \perp OM$

Lại có điểm A nằm trên đường tròn đường kính OM nên $\widehat{AOM} = 90°$

Xét ΔOEF và ΔOHM có $\widehat{O}$ chung và $\widehat{OEF} = \widehat{OHM} = 90°$ nên $\Delta OEF \backsim \Delta OHM$ (g – g)

Suy ra $\dfrac{OE}{OH} = \dfrac{OF}{OM} \Rightarrow OE.OM = OF.OH$

Xét ΔMAO vuông tại A có AE là đường cao nên hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$OM.OE = OA^2 = R^2 \Rightarrow OF.OH = R^2 \Rightarrow OF = \frac{R^2}{OH}.$$

Do OH không đổi nên OF cũng không đổi.

Vậy F là một điểm cố định hay AB luôn đi qua một điểm cố định là giao của AB và OH.

Đáp án cần chọn là C.

D.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Bài 1: Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn đuờng kính OA .

a) Hãy xác đinh vị trí của hai dường tròn (O) và dường tròn durìmg kính OA.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C . Chứng minh rằng $AC = CD$.

Bài 2: Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn trong các trường hợp sau đây :

a) $R = 6cm; R' = 4cm$.

b) $R = 5cm : R' = 3cm$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hai điểm $A(-1;1)$ và $B(3;0)$. Vẽ các đường tròn $(A;r)$ và $(B;r')$. Khi $r=3$ và $r'=1$, hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Bài 4. Cho ΔABC $\left(\widehat{B},\widehat{C}\neq 90^0\right)$, đường cao AH. Từ H kẻ HK vuông góc với AB tại K, HI vuông góc với AC tại I. Xác định vị trí tương đối của đường tròn ngoại tiếp ΔBHK và đường tròn ngoại tiếp ΔCHI.

Dạng 2: Chứng minh các tính chất và hệ thức hình học

Bài 5: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài $BC, B\in(O), C\in(O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC lại I. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{SIO'}=90°$; b) $BC=2\sqrt{RR'}$.

Bài 6: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó O' nằm trên đường tròn (O). Kẻ đường kính $O'C$ của dường tròn (O).

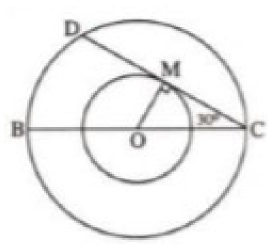
a) Chứng minh rằng CA, CB là hai liếp tuyến của (O').

b) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I. Đường vuông góc với AC tại C cắt **Bài 7**. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ (với $R_1\neq R_2$) tiếp xúc ngoài tại A; Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài BC và DE (với $B,D\in(O_1);C,E\in(O_2)$). Chứng minh rằng : $BC+DE=BD+CE$

Bài 8. Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ ngoài nhau, vẽ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD (với A,D thuộc (O_1) ; B,C thuộc (O_2)). Nối AC cắt (O_1) tại M ; cắt (O_2) tại N ($M\neq A, N\neq C$). Chứng minh rằng : $AM=NC$

Dạng 3: Tính độ dài đoạn thẳng

Bài 9: Trong hình dưới cho hai đường tròn đồng tâm O. Cho biết BC là đường kính của đường tròn lớn và có độ dài bằng 8. Dây CD là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ và $\widehat{BCD}=30°$. Hãy tính bán kính của đường tròn nhỏ.



Bài 10: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại M, N. Biết $OO'=24cm, MN=10cm$. Tính R.

Bài 11: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc $(O), N$ thuộc (O'). Biết $R=9cm.R'=4cm$. Tính độ dài đoạn MN.

Bài 12: Cho hai đường tròn $(O;3cm)$ và $(O';4cm)$ cắt nhau tại A và B. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại $M\left(M \neq A\right)$, cắt (O') tại $N\left(N \neq A\right)$. Nếu $OO'=5cm$, hãy tính giá trị lớn nhất của MN.

HƯỚNG DẪN

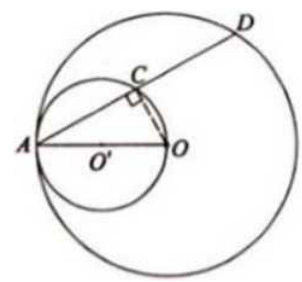
Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Bài 1: Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn đuòng kính OA.

c) Hãy xác đinh vị trí của hai dường tròn (O) và dường tròn dưìmg kính OA.

d) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C. Chứng minh rằng $AC=CD$.

Giải



a) Gọi O' là tâm dường tròn đường kính OA thì đoạn nối tâm $OO'=OA-OA'$ tức là $d=R-R'$. Vậy dường tròn (O') tiếp xúc trong với (O).

b) Vì tam giác ACO có cạnh AO là đường kính của (O') ngoại tiếp nên nó vuông tại C hay OC vuông góc với dây AD. Vậy $AC=CD$.

Bài 2: Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn trong các trường hợp sau đây :

c) $R=6cm; R'=4cm$.

d) $R=5cm : R'=3cm$.

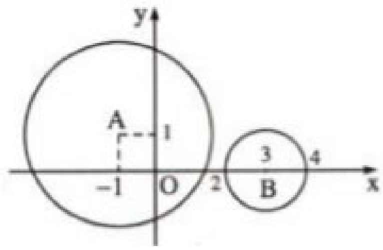
Giải

a) Vì $R-R'=6cm-4cm=2cm=d$ nên hai đường tròn tiếp xúc trong

b) Vì $R-R'=5cm+3cm=8cm>d$ do đó $R-R'<d<R+R'$. Vậy hai đường tròn cắt nhau.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hai điểm $A(-1;1)$ và $B(3;0)$. Vẽ các đường tròn $(A;r)$ và $(B;r')$. Khi $r=3$ và $r'=1$, hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Giải



Độ dài đoạn nối tâm:

$d = AB = \sqrt{(3+1)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ (1)

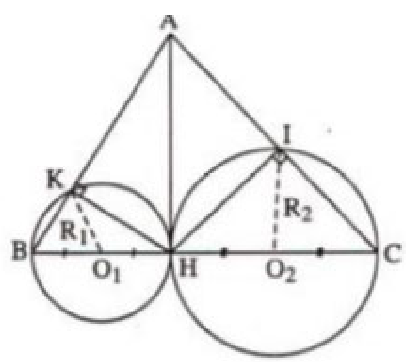
Tổng hai bán kính : $r + r' = 3 + 1 = 4$. (2)

Từ (1) và (2) ta thấy $\sqrt{17} > 4$ nên hai đường tròn không giao nhau ; hai đường tròn (A) và (B) nằm ngoài nhau.

Bài 4. Cho ΔABC $\left(\widehat{B}, \widehat{C} \neq 90^0\right)$, đường cao AH . Từ H kẻ HK vuông góc với AB tại K, HI vuông góc với AC tại I . Xác định vị trí tương đối của đường tròn ngoại tiếp ΔBHK và đường tròn ngoại tiếp ΔCHI .

Giãi

Trường hợp 1 :



Xét ΔABC có $\widehat{B} < 90°$ và $\widehat{C} < 90°$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của BH và CH .

Vì ΔBHK vuông tại K, O_1 là trung điểm của cạnh huyền BH nên

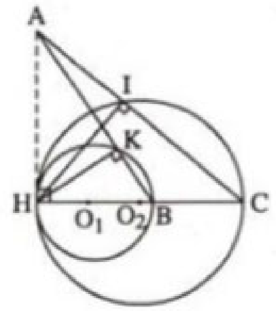
$$KO_1 = O_1B = O_1H = \frac{1}{2}BH = R_1$$

=> $(O_1; R_1)$ là đường tròn ngoại liếp ΔBHK .

Tương tự. ta có $(O_2; R_2)$ là đường tròn ngoại liếp ΔHIC .

Ta có $R_1 + R_2 = O_1H + O_2H = O_1O_2$ nên $(O_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài tai H với $(O_2:R_2)$.

Trường hợp 2 :



Xét ΔABC có $\widehat{B} = 90°$ (hoặc $\widehat{C} > 90°$) (Các hình vẽ khác ta chứng minh tương tự). Lập luận tương tự như trường hợp 1 ta có:

$O_1O_2 = R_2 - R_1$ nên $(O_1;R_1)$ và $(O_2:R_2)$ tiếp xúc trong tại H.

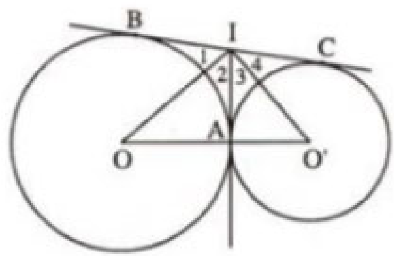
Dạng 2: Chứng minh các tính chất và hệ thức hình học

Bài 5: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài $BC, B \in (O), C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC lại I. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{SIO'} = 90°$; b) $BC = 2\sqrt{RR'}$.

Giải

a)



Ta có IB, IA là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}; IC, IA$ là hai tiếp tuyến của (O') nên $\widehat{I_3} = \widehat{I_4}$ Suy ra :

$\widehat{OIO'} = \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$

b) Ta có IB, IA là hai liếp tuyến của (O) nên $IB = IA$ và $IA \perp OA$; IC, IA là hai tiếp tuyến của (O') nên $IC = IA$ và $IA \perp O'A$. Suy ra : $IA = IB = IC$.

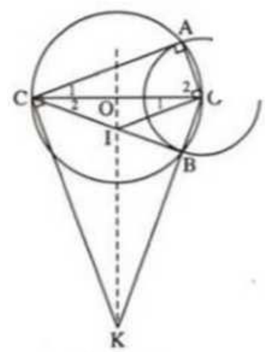
Ba điểm O,A,O' thẳng hàng và $IA \perp OO'$. Áp dụng hệ thức : $h^2 = b'.c'$ vào tam giác vuông OIO' , ta có : $IA^2 = OA.O'A \Rightarrow IA = \sqrt{R.R'}$.

Mặt khác : $BC = IB + IC = 2IA$ nên $BC = 2\sqrt{RR'}$.

Bài 6: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B , trong đó O' nằm trên đường tròn (O) . Kẻ đường kính $O'C$ của dường tròn (O) .

c) Chứng minh rằng CA, CB là hai liếp tuyến của (O’).

d) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB tại I . Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ ở K . Chứng minh rằng ba điểm O,I,K thẳng hàng.



a) Tam giác CAO' có đường trung tuyến AO ứng với cạnh CO' bằng nửa cạnh CO' nên $\widehat{CAO'} = 90°$. Mà $A \in (O')$ nên CA là liếp tuyến của (O') tại A .

Tương tự ta có CB là tiếp tuyến của (O').

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì :

Từ (3), (4) (5) suy ra O, I, K cùng thuộc đường trung trực của CO’.

Vây ba điểm O, I, K thẳng hàng.

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ (với $R_1 \neq R_2$) tiếp xúc ngoài tại A ; Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài BC và DE (với $B,D \in (O_1); C,E \in (O_2)$). Chứng minh rằng : $BC + DE = BD + CE$

Giải

Vẽ tiếp tuyến chung tại A lần lượt cắt BC, DE tại M và N. Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O_1) nên MA = MB.

Vì MA, MC là tiếp tuyến cúa (O_2) nên MA = MC => MA = MB = MC.

Chứng minh tương tự ta có : NA = ND = NE.

$\Rightarrow BC + DE = 2MN$. (1)

Gọi giao điểm của BC và DE là K, khi đó K thuộc đường thẳng O_1O_2 => KB = KD (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $O_1B = O_1D = R_1$ nên KO_1 là trung trực của đoạn BD => $O_1O_2 \perp BD$.

Chứng minh tương lự ta được $O_1O_2 \perp CE$

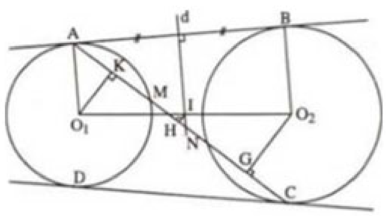
=> tứ giác BCED là hình thang (vì BD // CE).

Vì M, N lần lươt là trung điểm của BC và DE nên 2MN = BD + CE (2) (tính chất dường trung bình).

Từ (1) và (2) suy ra : BC + DE = BD + CE.

Bài 8. Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ ngoài nhau, vẽ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD (với A, D thuộc (O_1) ; B, C thuộc (O_2)). Nối AC cắt (O_1) tại M ; cắt (O_2) tại N ($M \neq A, N \neq C$). Chứng minh rằng : $AM = NC$

Giãi



Vẽ đường trung trực d của đoạn AB, d cắt O_1O_2 tại I. Khi đó IA = IB.

Ta có B và C đối xứng nhau qua O_1O_2 => $IB = IC$ => $IA = IC$.

Kẻ $IH \perp AC$ tại H ta có HA = HC (vì ΔIAC cân tại I).

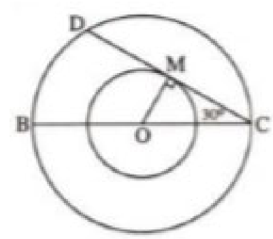
Kc $O_1K \perp AC$ tai K, $O_2G \perp AC$ tại G => $O_1K // IH // O_2G$.

Xét hình thang ABO2O| (vì $O_1A // O_2B$ do cùng vuông góc với AB) ta có $d // AO_1 // BO_2$ và d di qua trung điểm của AB nên d đi qua trung điểm của O_1O_2 hay I là trung điểm của O_1O_2.

Xét hình thang O_1KO_2G có $IH // O_1K // O_2G$ và I là trung điểm của O_1O_2 nên H là trung điểm của KG => $HK = HG$ => $HA - HK = HC - HG$ hay $AK = GC$ => $2AK = 2GC$ => $AM = CN$

Dạng 3: Tính độ dài đoạn thẳng

Bài 9: Trong hình dưới cho hai đường tròn đồng tâm O . Cho biết BC là đường kính của đường tròn lớn và có độ dài bằng 8. Dây CD là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ và $\widehat{BCD} = 30°$. Hãy tính bán kính của đường tròn nhỏ.

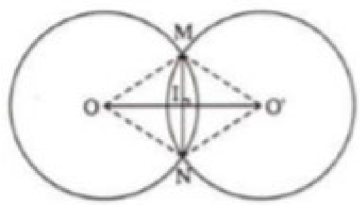


Giải

Ta có $BC = 8$ nên bán kính đường tròn lớn là $OC = 4$. Vì CA là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ nên $CD \perp OM \Rightarrow OM = OC\sin 30^0 = 2$.

Bài 10: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại M,N. Biết $OO' = 24cm, MN = 10cm$. Tính R.

Giải



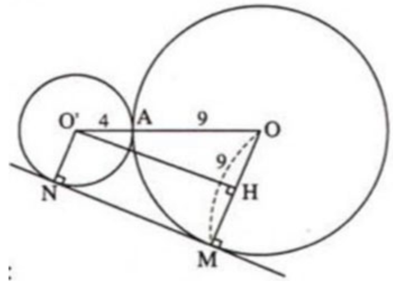
Gọi giao của OO' và MN là I. Vì $OM = ON = O'M = O'N = R$ nên tứ giác $OMO'N$ là hình thoi $\Rightarrow OO' \perp MN$ tại I là trung điểm của mỗi đoạn OO' và MN. Do đó

$IM = \frac{1}{2}MN = 5cm; IO = \frac{1}{2}OO' = 12cm$.

Áp dụng định lý Py ta go vào ΔMIO ta có $R = OM = \sqrt{IM^2 + IO^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(cm)$.

Bài 11: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc $(O), N$ thuộc (O') . Biết $R = 9cm.R' = 4cm$. Tính độ dài đoạn MN .

Giải



Ta có : OO' = OA + O'A = 9 + 4 = 13 (cm).

Kẻ $OH \perp OM$ tại H => tứ giác O'NMH là hình chữ nhật

=> MH = ƠN = 4 (cm); MN = O H

=> OH = OM - MH = 9- 4 = 5 (cm).

Áp dụng định lí Py-ta-go vào AOO H. ta có

$MN = O'H = \sqrt{OO'^2 - OH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm)

Bài 12: Cho hai đường tròn $(O;3cm)$ và $(O';4cm)$ cắt nhau tại A và B. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại $M\,(M \neq A)$, cắt (O') tại $N\,(N \neq A)$. Nếu $OO' = 5cm$, hãy tính giá trị lớn nhất của MN.

Giai

Kẻ $OH \perp AM$ tại $H, OK \perp AN$ tại K và $OI \perp O'K$ tại I.

=> HM = HA, KA = KN và tứ giác HOIK là hình chữ nhật => MN = 2HK và $HK = OI$.

Ta có : $OI \leq OO'$ (đường vuông góc và đường xiên)

$=> MN = 2HK = 2OI \leq 2OO' = 10(cm)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow OI = OO' <=> I \equiv O' \Leftrightarrow d // OO'$.

Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng 10cm khi cát tuyến d song song với OO'.

----------Toán Học Sơ Đồ---------