ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Thúy Hằng

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Thuý Hằng

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo **PGS.TS Nguyễn Việt Hải**. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu và các đồng nghiệp của tôi ở trường THPT An Hải - Hải Phòng đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Thị Thúy Hằng

Mở đầu

Trong chương trình toán phổ thông, học sinh nhiều lần đã nghe khái niệm "lớn nhất, nhỏ nhất, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu", đó chính là các khái niệm liên quan đến bài toán cực trị. Ngay khi học ở Trung học cơ sở, học sinh đã gặp các bài toán như: "Tìm diện tích lớn nhất của tam giác, của tứ giác" hay "xác định vị trí của đường thẳng a để diện tích tam giác ABC là nhỏ nhất",... Các đại lượng hình học được học ở phổ thông là: Độ dài, số đo góc, diện tích, thể tích. Liên quan đến các đại lượng hình học là các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các đại lượng mà ta gọi tắt là bài toán cực trị hình học.

Nhiều bài toán về cực trị hình học dẫn đến các cách chứng minh đặc sắc. Chúng có tác dụng phát triển tư duy lôgic, phát huy tính linh động và sáng tạo khi nghiên cứu toán. Chính vì vậy nhiều bài toán về cực trị hình học đã được chọn trong các kỳ thi học sinh giỏi toán toàn quốc bậc THCS và THPT.

Bài toán về cực trị hình học thường được phát biểu dưới các dạng sau: Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất, hay giá trị nhỏ nhất của một đại lượng nào đó; Dạng 2: Xác định vị trí của (điểm, đường thẳng, mặt phẳng...) để đại lượng hình học nào đó đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất. Bài toán tìm cực trị chỉ xuất hiện khi có sự chuyển động của đối tượng hình học hoặc có đại lượng hình học biến thiên.

Ý nghĩa của bài toán cực trị: Bài toán cực trị hình học thường liên quan đến thực tiễn. Để giải các bài toán này người làm toán phải biết tổng hợp các kiến thức khác nhau của Toán học thường là các kiến thức về đại số, về hình học, về giải tích,... Mở rộng hơn các bài toán cực trị là các bài toán về tối ưu hóa, chính vì thế bài toán cực trị hình học còn có tính ứng dụng cao trong lý thuyết cũng như trong thực hành. Đó cũng là lý do để tác giả chọn đề tài luận văn "Cực trị trong hình học".

Phạm vi của luận văn là tìm và hệ thống lại các phương pháp giải toán cực trị hình học bằng các công cụ toán học đã có.

Ngoài phần mở đầu nội dung luận văn chia làm ba chương

Chương 1 dành để trình bày Giải toán cực trị hình học bằng công cụ hình học tuần túy.

Chương 2 đề cập đến Giải toán cực trị hình học bằng công cụ đại số.

Chương 3 trình bày các phương pháp khác để giải các bài toán khó hơn là Phương pháp đường mức và kết hợp các phương pháp khác.

Khi gặp một bài toán cực trị ta thường suy nghĩ theo một trong các hướng sau:

Thứ nhất: Dùng phương pháp của hình học thuần túy để khảo sát biểu thức cần tìm cực trị.

Thứ hai: Đặt một đại lượng thay đổi nào đó bằng biến t rồi viết biểu thức cần khảo sát thành một hàm của biến t. Sau đó khảo sát hàm vừa tìm được bằng các phương pháp của đại số.

Thứ ba: Dùng các bất đẳng thức đại số để đánh giá biểu thức cần khảo sát.

Dưới đây là một ví dụ sử dụng cả ba hướng suy nghĩ trên

Ví dụ 0.1. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(1;2)$ và cắt các trục* Ox, Oy *lần lượt tại A, B khác O sao cho* $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ *bé nhất.*

Giải.

Ở ví dụ này, ta trình bày theo ba hướng:

Hướng 1: Hạ $OH\perp\Delta$, trong tam giác vuông OAB, ta có:

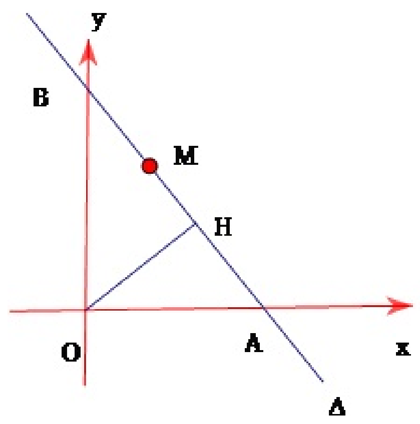
$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}\geq\frac{1}{OM^2}$$

(không đổi).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$H\equiv M\Leftrightarrow OM\perp\Delta.$$

Vậy $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ đạt giá trị bé nhất khi đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2)$ và có vectơ là $\overrightarrow{OM}(1;2)$.



Hình 1:

Vậy đường thẳng Δ cần tìm là

$$(x-1)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0.$$

Nhận xét:

- Phép biến đổi $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{1}{OH^2}$ là chuyển biểu thức ban đầu với hai đại lượng biến thiên OA, OB về biểu thức còn một đại lượng biến thiên OH.

- Cách giải trên không mở rộng được cho bài toán tổng quát hơn: xác định vị trí của đường thẳng Δ để $\dfrac{a}{OA^2}+\dfrac{b}{OB^2}$ nhỏ nhất $(a>0, b>0)$.

Hướng 2: Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2)$ và không qua gốc nên nó là đường thẳng có hệ số góc k với $k \neq 0, k \neq 2$

Khi đó: $\Delta : y-2=k(x-1) \Leftrightarrow y=kx-k+2$.

Ta có: $A\left(\dfrac{k-2}{k};0\right), B(0;2-k)$ và $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{k^2+1}{(k-2)^2}$.

Xét hàm số:

$f(k)=\dfrac{k^2+1}{(k-2)^2}\ (k\neq 0,2)$.

$f'(k)=\dfrac{-4k^2+6k+4}{(k-2)^4}$.

Ta có $f'(k)=0 \Leftrightarrow -4k^2+6k+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ta dễ lập được bảng biến thiên của hàm số $f(k)$. Từ đó suy ra

Vậy $f(k)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $k=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $k=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x+2y-5=0$.

Hướng 3: Giả sử $A(m;0), B(0;n), m,n\neq 0$.

Khi đó $\Delta : \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ đi qua điểm $M\left(1;2\right)$ nên $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Svars ta có:

$$1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)^2 \leq \left(1^2 + 2^2\right)\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1 \\ m = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{5}{2} \\ m = 5 \end{cases}$$

Như vậy $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 5, n = \frac{5}{2}$ nghĩa là $x + 2y - 5 = 0$.

Trong phần tiếp theo tôi sẽ đi trình bày chi tiết nội dung của từng phương pháp và minh họa bằng các ví dụ cụ thể.

Chương 1

Giải toán cực trị hình học bằng hình học thuần túy

1.1 Các tính chất, định lý về so sánh các đại lượng hình học

1.1.1 Bất đẳng thức tam giác

Ta có các kết quả sau đây xem [10]

• Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

• Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

• Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài của hai cạnh còn lại

$$AB \leq AC + CB$$

(Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi C ở giữa A,B)

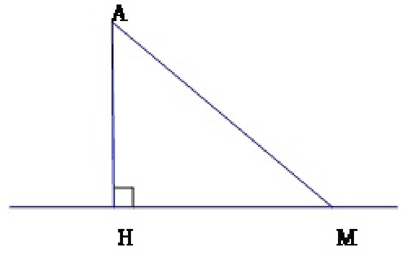
• Đoạn thẳng nối hai điểm có độ dài ngắn nhất so với mọi đường gấp khúc nói hai điểm đó.

• Trong một tam giác, đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

• Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

1.1.2 So sánh đường xiên - hình chiếu và ngược lại

• Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên.



Hình 1.1:

• Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.

• Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

a) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn;

b) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn;

c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

1.1.3 Quan hệ đường kính và dây của đường tròn

• Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

• Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

1.1.4 Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Trong một đường tròn:

a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Trong một đường tròn:

a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

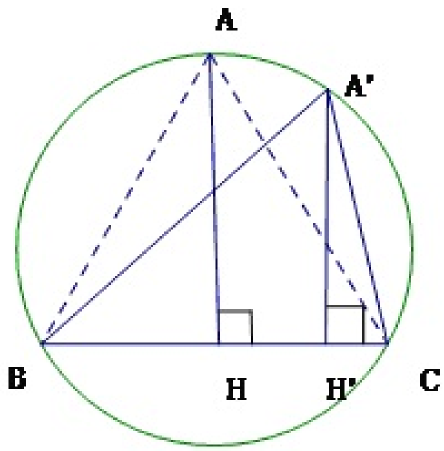
b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Áp dụng các kết quả trên vào bài toán cực trị.

1.1.5 Quan hệ giữa diện tích và chu vi của một hình

• Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

• Trong các tam giác có chung đáy và góc đối diện không đổi, tam giác cân có diện tích lớn nhất.



Hình 1.2:

1.2 Các ví dụ

xem [10, 11]

1.2.1 Ví dụ sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu

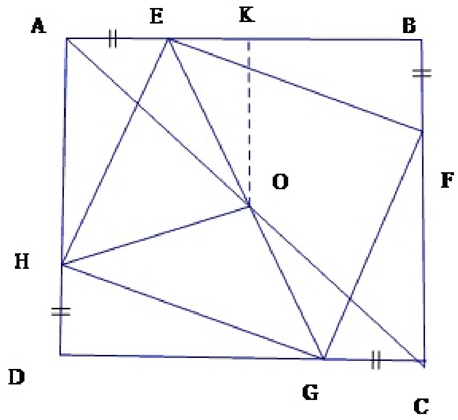
Ví dụ 1.1. *Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.*

Giải.

$$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GHD \Rightarrow HE = EF = FG = GH$$

Suy ra $EFGH$ là hình thoi.

$$\widehat{AHE} = \widehat{BEF} \Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HEF} = 90^0$$



Hình 1.3:

$\Rightarrow EFGH$ là hình vuông

$O = AC \cap EG$. Tứ giác $AECG$ có $AE = CG, AE//CG$ nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG, do đó O là tâm của cả hai hình vuông $ABCD$ và $EFGH$.

ΔHOE vuông cân: $HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$.

Chu vi $EFGH = 4HE = 4\sqrt{2}OE$. Do đó chu vi $EFGH$ nhỏ nhất $\Rightarrow OE$ nhỏ nhất.

Kẻ $OK \perp AB \Rightarrow OE \geq OK$ (OK không đổi) $OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$. Do đó $\min OE = OK$

Như vậy, chu vi tứ giác $EFGH$ nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ví dụ 1.2. *Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ là góc tù, điểm D di chuyển trên cạnh BC. Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.*

Giải.

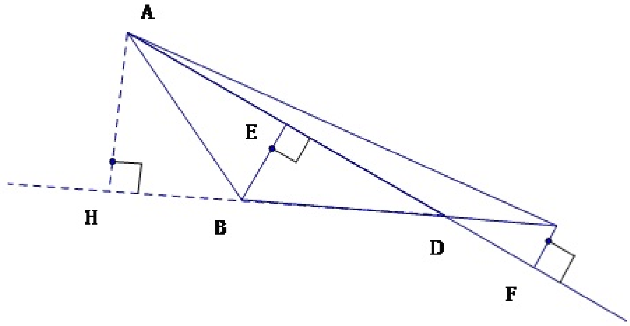
Gọi S là diện tích ΔABC khi D di chuyển trên cạnh BC ta có:

$$S_{ADB} + S_{ACD} = S.$$

Kẻ $BE \perp AD, CF \perp AD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AD.BE + \frac{1}{2}AD.CF = S$$

$$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}.$$



Hình 1.4:

Do đó $BE + CF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ hình chiếu HD nhỏ nhất

Do $HD \geq HB$ (do $\widehat{ABD} > 90^0$) và $HD = HB \Leftrightarrow D \equiv B$.

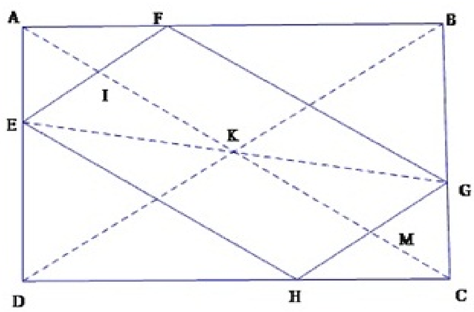
Vậy khi $D \equiv B$ thì tổng khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất.

1.2.2 Ví dụ sử dụng mối quan hệ giữa đoạn thẳng và đường gấp khúc

Ví dụ 1.3. *Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm E thuộc cạnh AD. Xác định vị trí các điểm: F thuộc cạnh AB, G thuộc cạnh BC, H thuộc cạnh CD sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.*

Giải.

Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, GH.



Hình 1.5:

ΔAEF vuông tại A và có AI là trung tuyến $\Rightarrow AI = \dfrac{1}{2}$EF.

Tương tự $MC = \dfrac{1}{2}GH$

IK là đường trung bình của $\Delta EFG \Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}FG$

Tương tự $KM = \dfrac{1}{2}EH$.

Do đó: chu vi $EFGH = EF + FG + GH + HE = 2\,(AI + IK + KM + MC)$.

Ta lại có: $AI + IK + KM + MC \geq AC$ (so sánh độ dài đoạn thẳng và đường gấp khúc)

Suy ra: chu vi $EFGH \geq 2AC$ (không đổi)

Chu vi $EFGH$ nhỏ nhất bằng $2AC \Leftrightarrow A, I, K, M, C$ thẳng hàng.

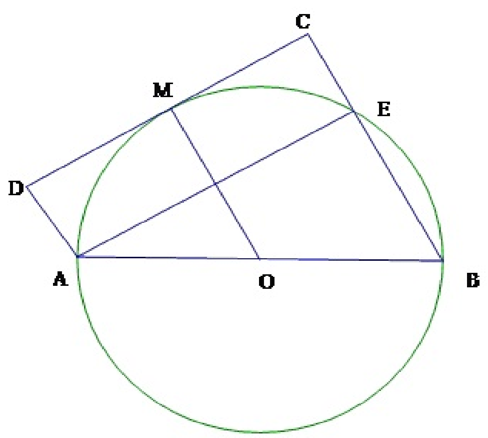
Nhận xét về phương pháp giải bằng cách vẽ trung điểm các cạnh EF, GH và trung điểm của đường chép EG, ta tính được chu vi của tứ giác $EFGH$ bằng hai lần độ dài đường gấp khúc $AIKMC$, độ dài đường gấp khúc trên nhỏ nhất khi đường gấp khúc đó trở thành đoạn thẳng AC.

1.2.3 Ví dụ áp dụng bất đẳng thức trong đường tròn

Ví dụ 1.4. *Nửa đường tròn (O, R) đường kính AB. M là điểm di động trên nửa đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, gọi D, C lần lượt là hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến ấy. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất.*

Giải.

Ta có: $AD \perp DC(gt), BC \perp DC(gt) \Rightarrow AD//BC \Rightarrow ABCD$ là hình thang mà



Hình 1.6:

$\hat{D} = 90^0$ nên $ABCD$ là hình thang vuông

$OM \perp DC$ nên $OM // AD$ và O là trung điểm của AB nên OM là đường trung bình của hình thang $ABCD$

$$\Rightarrow OM = \frac{AD + BC}{2}$$

Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2}.DC = OM.DC$

Vẽ $AE \perp BC$, tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

$$\left(\widehat{ADC} = \widehat{DCE} = \widehat{AEC} = 90^0\right) \Rightarrow DC = EA$$

$\widehat{AEB} = 90^0 \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AB,

⇒AE là dây cung của đường tròn (O)

$\Rightarrow DC \leq 2R$ (trong đường tròn đường kính là dây cung lớn nhất).

Do đó $S_{ABCD} \leq R.2R = 2R^2$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AE$ là đường kính của (O)

$\Leftrightarrow OM \perp AB \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB.

1.2.4 Ví dụ ứng dụng diện tích tìm cực trị.

Ví dụ 1.5. *Hãy tìm trong tam giác ABC một điểm M sao cho tích các khoảng cách từ M đến ba cạnh có giá trị lớn nhất.(Hình 1.7)*

Giải.

Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến ba cạnh BC, AC, AB; h_a, h_b, h_c tương ứng là đường cao xuất pháp từ các đỉnh A, B, C.

Ta có $S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{x}{h_a} + \dfrac{y}{h_b} + \dfrac{z}{h_c}$.

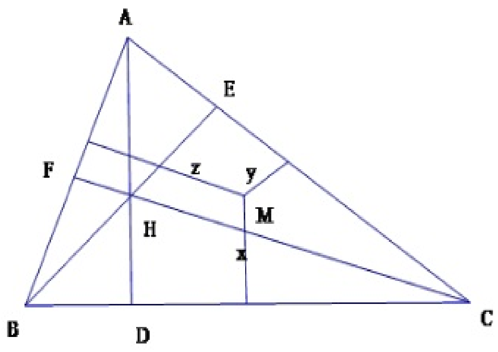
Như vậy, các số $\dfrac{x}{h_a}, \dfrac{y}{h_b}, \dfrac{z}{h_c}$ có tổng không đổi, do đó tích $\dfrac{x}{h_a}.\dfrac{y}{h_b}.\dfrac{z}{h_c}$ lớn nhất (cũng có nghĩa là $x.y.z$ lớn nhất) khi và chỉ khi

$$\frac{x}{h_a} = \frac{y}{h_b} = \frac{z}{h_c} = \frac{1}{3}.$$

Khi đó M là trọng tâm tam giác của ABC.

Nhận xét Để giải bài toán cực trị trong hình học ngoài việc vận dụng các kiến thức đa dạng, phong phú của hình học, còn thường dẫn về sử dụng một trong những khẳng định sau:

- Nếu tổng các đại lượng không đổi, thì tích của chúng đạt cực đại, khi các đại lượng bằng nhau.



Hình 1.7:

- Nếu tích các đại lượng không đổi, thì tổng đạt cực đại, khi các đại lượng bằng nhau.

Ví dụ 1.6. *(Đề thi Olympic Toán Ba Lan) xem [12], [124-127]*
Hãy cắt từ tam giác cho trước thành một hình chữ nhật với diện tích cực đại.

Giải.

Xét các khả năng đặt hình chữ nhật trong tam giác.

Trường hợp thứ nhất:

Tất cả các đỉnh của hình chữ nhật đều nằm trên biên của tam giác.

Trường hợp này chỉ xảy ra khi 2 đỉnh của hình chữ nhật đều nằm trên một cạnh của tam giác, 2 đỉnh còn lại nằm trên hai cạnh kia của tam giác.

Giả sử trong tam giác ABC đặt hình chữ nhật $MNPQ$ với cạnh MN nằm trên AB, đỉnh Q nằm trên cạnh AC, đỉnh P thuộc BC. Khi đó diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ phụ thuộc vào vị trí của P, Q.

1. Q nằm giữa AC, tức $AQ = QC$ (Hình 1.8).

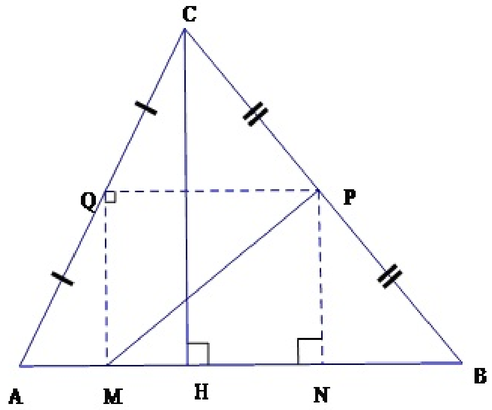
Khi đó PQ là đường trung bình của tam giác ABC, nên các tam giác MPQ, MNP có chiều cao $MQ = NP = \frac{1}{2}CH$ và cạnh đáy $MN = PQ = \frac{1}{2}AB$

Bởi vậy

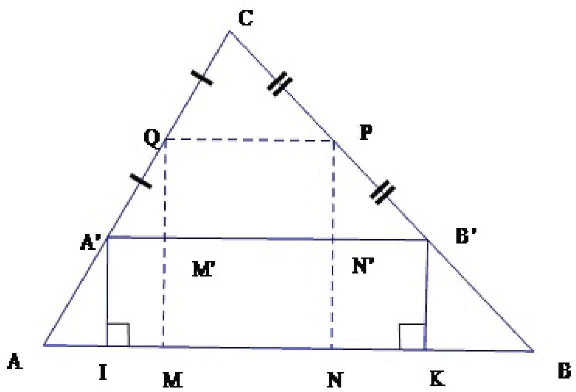
$$S_{MNPQ} = S_{MPQ} + S_{MNP} = \frac{1}{2}MQ.PQ + \frac{1}{2}MN.PQ$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.CH.\frac{1}{2}.AB + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.CH.\frac{1}{2}.AB = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}CH.AB\right) = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

2. Q nằm gần C hơn A, tức $AQ > QC$ (Hình 1.9).

Giả sử A', B' là các điểm đối xứng với C qua Q và P. Khi đó các điểm A', B' nằm trên đoạn AQ và BP, đồng thời đoạn $A'B'$ cắt các cạnh MQ và NP tại các điểm M' và N'.



Hình 1.8:



Hình 1.9:

Khi đó PQ là đường trung bình của tam giác $A'B'C'$ và hình chữ nhật $MM'N'N$ có cạnh đáy $MN = M'N' = \frac{1}{2}A'B'$,
cạnh bên $MM' = IA'$, nên:

$S_{MM'N'N} = \frac{1}{2}S_{IA'B'K} \leq \frac{1}{2}S_{AA'BB'}$ (1.6.1)

Theo (1.6.1) có : $S_{M'QPN'} = \frac{1}{2}S_{A'CB'}$ (1.6.2)

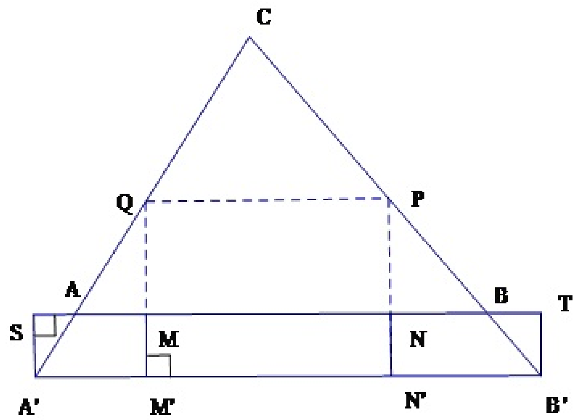
Từ (1.6.1) và (1.6.2) có :

$$S_{MNPQ} = S_{M'QPN'} + S_{MM'N'N} < \frac{1}{2}S_{A'CB'} + \frac{1}{2}S_{\mathrm{AA}'BB'} = \frac{1}{2}S_{ABC'}$$

3. Q nằm gần A hơn C, tức $AQ < QC$ (Hình 1.10)

Tương tự như phần 2, A', B' là các điểm đối xứng với C qua Q và P.

Khi đó tam giác $\Delta A'CB'$ nhận PQ làm đường trung bình, nên theo phần



Hình 1.10:

1

$$S_{M'QPN'} = \frac{1}{2} S_{A'CB'} \ (1.6.3)$$

Hình chữ nhật $M'MNN'$ có cạnh : $M'N' = \dfrac{1}{2} C'B'$ và cạnh bên $MM' = SA'$ nên :

$$S_{MM'N'N} = \frac{1}{2} S_{A'STB'} > \frac{1}{2} S_{A'ABB'} \ (1.6.4)$$

Từ (1.6.3) và (1.6.4) có

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} = S_{M'QPN'} - S_{MM'N'N} &= \frac{1}{2} S_{A'CB'} - S_{M'MNN'} \\ &< \frac{1}{2} S_{A'CB'} - \frac{1}{2} S_{AA'BB'} = \frac{1}{2} S_{ABC}. \end{aligned}$$

Trường hợp thứ hai: Trường hợp không phải tất cả các đỉnh đều nằm trên biên của tam giác.

Trường hợp này cũng có hai khả năng cần xét:

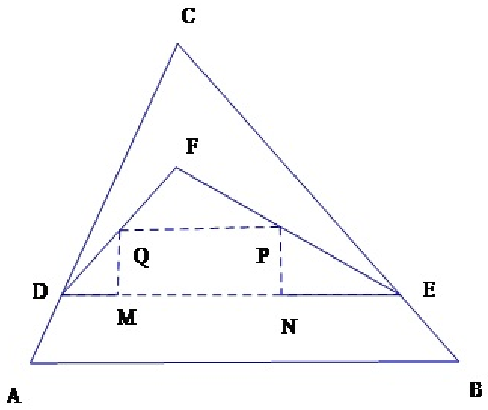
1. Hình chữ nhật có hai cạnh đối diện song song với một trong các cạnh của tam giác:

Giả sử các cạnh MN, PQ của hình chữ nhật song song với cạnh AB của tam giác ABC. Trong đó cạnh MN nằm trên dải giữa AB và PQ.

Giả sử D, E là giao điểm của đường thẳng MN với các cạnh AC, BC của tam giác.

Vì tia DQ cắt đoạn EC, tia ED cắt đoạn DC, nên các tia này cắt nhau tại một điểm (F) thuộc tam giác DCE(Hình 1.11)

Các đỉnh M, N, P, Q của hình chữ nhật nằm trên biên của tam giác DEF,



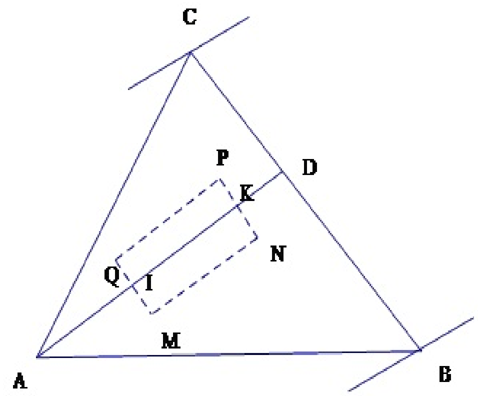
Hình 1.11:

nên theo trường hợp thứ nhất, diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ không vượt quá một nửa diện tích của tam giác DEF. Mặt khác diện tích tam giác DEF lại nhỏ hơn diện tích của tam giác ABC. Bởi vậy diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ nhỏ hơn một nửa diện tích của tam giác ABC.

2. Không có cạnh nào của hình chữ nhật song song với cạnh của tam giác.

Qua các đỉnh A, B, C của tam giác kẻ các đường thẳng song song với các cạnh MN của hình chữ nhật.

Giả sử đường thẳng đi qua đỉnh A cắt BC tại D, cắt các cạnh MQ, NP của hình chữ nhật tại I và K (Hình 1.12)



Hình 1.12:

Khi đó, theo (1.6.1):

$S_{IKPQ} < \frac{1}{2} S_{ADC}$ (1.6.5)

$S_{IKNM} < \dfrac{1}{2} S_{ABD}$ (1.6.6)
Từ (1.6.5) và (1.6.6) có
$S_{MNPQ} = S_{IKPQ} + S_{IKNM} < \dfrac{1}{2} S_{ACD} + \dfrac{1}{2} S_{ABD} = \dfrac{1}{2} S_{ABC}$.
Kết luận

Các chứng minh trên khẳng định được rằng diện tích của hình chữ nhật cắt ra từ hình tam giác không vượt quá một nửa diện tích tam giác.

Hình chữ nhật đạt diện tích cực đại (bằng nửa diện tích tam giác) khi và chỉ khi nó có hai đỉnh là trung điểm của hai cạnh và hai đỉnh còn lại nằm trên cạnh thứ ba của tam giác. Từ đó suy ra số cách cắt hình chữ nhật có diện tích lớn nhất từ một tam giác. Đối với

1. Tam giác nhọn có ba cách cắt
2. Tam giác vuông có hai cách cắt
3. Tam giác tù có một cách cắt

Bài tập *(Vận dụng quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc).*

Bài 1.1 Trong hình bình hành có hai đường chéo bằng 6cm và 8 cm, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

Bài 1.2 Cho đoạn thẳng AB có độ dài $2a$. Vẽ về một phía của AB các tia Axvà By vuông góc với AB. Qua trung điểm M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D. Xác định vị trí của điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Bài 1.3 Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A vẽ đường thẳng d không cắt hình bình hành. Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $BB' + CC' + DD'$ có giá trị lớn nhất.

Bài 1.4 Cho tam giác ABC nhọn. Dựng một tam giác có chu vi nhỏ nhất nội tiếp tam giác ABC, tức là có ba đỉnh nằm trên ba cạnh của tam giác ấy.

Bài tập *(Vận dụng quan hệ giữa đoạn thẳng và đường gấp khúc).*

Bài 1.5 Cho tam giác ABC nhọn. Dựng một tam giác có chu vi nhỏ nhất nội tiếp tam giác ABC, tức là có ba đỉnh nằm trên ba cạnh của tam giác ấy.

Bài 1.6 Cho tam giác đều ABC. và trung điểm M của AB. Trước tiên An chọn một điểm N trên BC, tiếp đó Bình chọn một điểm P trên AC. Mục tiêu của An là muốn tổng $d = MN + NP + PN$ lớn nhất, còn Bình thì muốn tổng d nhỏ nhất. Hỏi rằng nếu cả hai đều có cách chọn tốt nhất thì N và P là những điểm nào?

Bài 1.7 Cho hai điểm A và B nằm trong góc nhọn xOy. Xác định điểm M trên tia Ox, điểm N ấp khúc $AMNB$ có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập *(Áp dụng bất đẳng thức trong đường tròn tìm cực trị).*

Bài 1.8 Cho hai điểm A và B nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d, hai điểm M, N thuộc d và độ dài M, N không đổi. Xác định vị trí hai điểm M, N để đường gấp khúc AMNB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 1.9 Cho đường tròn (O, R), BC là dây cung cố định ($BC \neq 2R$). A là điểm chuyển động trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Bài tập *(Ứng dụng diện tích tìm cực trị của đại lượng hình học).*

Bài 1.10 Cho điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB. Vẽ các tam giác đều AMC và BMD về một phía của AB. Xác định vị trí điểm M để tổng diện tích hai tam giác đều trên là nhỏ nhất.

Bài 1.11 Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 12 cm, E là trung điểm của CD, điểm F thuộc cạnh BC sao cho $CF = 4cm$. Các điểm G và H theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AD sao cho $GH//EF$. Xác định vị trí của điểm G sao cho tứ giác $EFGH$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

1.3 Các tính chất, định lý về so sánh các đại lượng hình học trong không gian

1.3.1 Các tính chất, định lý

Ngoài các kết quả ta có trong hình học phẳng, trong không gian ta quan tâm đến các khái niệm và các tính chất sau:

- Độ dài đường vuông góc hạ từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng là độ dài ngắn nhất (hình chiếu nhỏ hơn đường xiên).

- Độ dài đoạn vuông góc chung là độ dài ngắn nhất giữa hai đường thẳng.

- Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

- Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu.

- Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu.

1.3.2 Ví dụ

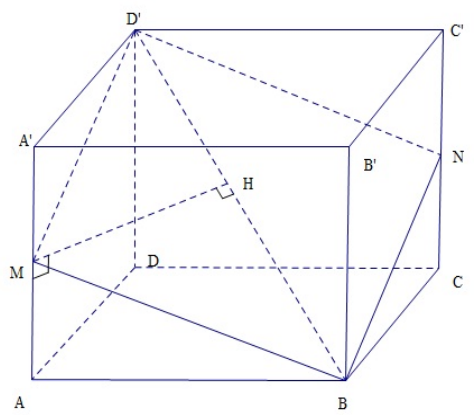
Giải bài toán cực trị hình học liên hệ giữa các yếu tố: độ dài đoạn vuông góc chung là khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm của hai đường thẳng chéo nhau

Ví dụ 1.7. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Xét các mặt phẳng đi qua BD' cắt AA' ở M, cắt CC' ở N. Xác định vị trí của M, N sao cho diện tích thiết diện tạo thành có diện tích nhỏ nhất.*

Giải.

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

Một mặt phẳng đi qua BD' cắt AA' ở M, cắt CC' ở N (Hình 1.13)



Hình 1.13:

Do các mặt bên đối diện song song với nhau, nên các cạnh đối của thiết diện song song; mặt phẳng đi qua BD' cắt hình hập phương theo thiết diện là hình bình hành $BMD'N$.

Gọi H là hình chiếu của M trên BD'.

Diện tích S của thiết diện bằng 2 lần diện tích của tam giác MBD'.

Ta có: $S = MH.BD'$

Vì $BD' = a\sqrt{3}$ không đổi. Suy ra S nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất.

Do M thuộc AA', H thuộc BD'. MH nhỏ nhất khi nó là đường vuông góc chung của AA' và BD'.

Khi đó dễ chứng minh rằng H là tâm của hình lập phương và M là trung điểm của AA', N là trung điểm của CC'.

Giải bài toán cực trị hình không gian thông qua bài toán cực trị trong hình học phẳng

Ví dụ 1.8. *Chứng minh rằng cạnh dài nhất của một hình tứ diện là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm thuộc tứ diện.*

Giải.

Trước tiên ta xét bài toán hình học phẳng: "Chứng minh rằng trong tam giác, cạnh dài nhất chính là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm thuộc tam giác".

Gọi 2 điểm bất kỳ thuộc tam giác là M, N. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp M, N trùng với hai đỉnh của tam giác ta có ngay:

$$MN \leq max(AB, AC, BC)$$

Trường hợp M hoặc N trùng với 1 đỉnh của tam giác (giả sử M trùng với A). Khi đó nếu N thuộc AB hoặc N thuộc AC thì ta có ngay lời giải. Nếu N thuộc BC thì tuỳ theo vị trí của N ta có $MN < AB$ hoặc $MN < AC$. Do đó $MN \leq (AB, AC, BC)$ max.

Trường hợp M và N không trùng với đỉnh của tam giác. Ta đưa về trường hợp trên bằng cách nối NB, ta có:

$$MN < max(AB, BN, NA) \leq max(AB, BC, CA).$$

Bài toán trên được chứng minh. Ta sử dụng kết quả để giải bài toán không gian.

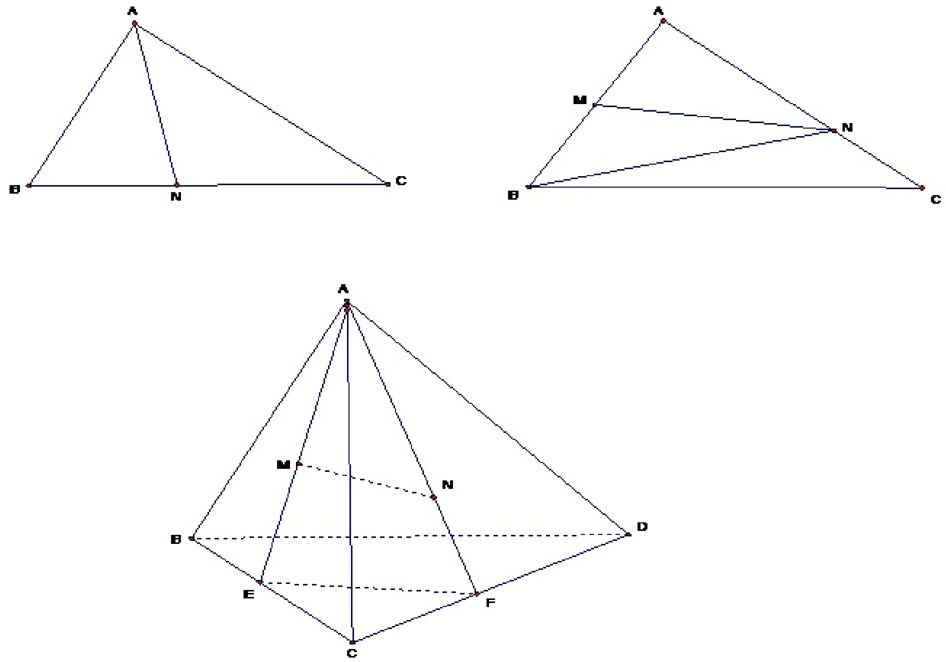
Xét khoảng cách giữa M và N là 2 điểm bất kỳ thuộc tứ diện $ABCD$. Bao giờ cũng dựng được một tam giác có 3 cạnh thuộc các mặt của tứ diện và chứa M, N (chỉ cần dựng 1 mặt phẳng chứa MN và 1 đỉnh của tứ diện (Hình vẽ 1.14). Nối AM cắt BC ở E, nối AN cắt CD ở F.

Theo kết quả bài toán phẳng: $MN \leq (AE, EF, FA)$.

Mà $AE \leq (AB, BC, CA)$; $EF \leq (BC, CD, BD)$; $AF \leq (AC, CD, DA)$

Từ đó suy ra $max(AE, EF, FA) \leq max(AB, AC, AD, BC, CD, DA)$.

Tức là MN không lớn hơn cạnh của tứ diện.



Hình 1.14:

Bài tập:

Bài 1.12 Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x-y+z-1=0$ và các điểm $A(1;2;-1)$, $B(1;0;-1)$, $C(2;1;-2)$. Tìm điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $MA^2+MB^2-MC^2$ nhỏ nhất.

Bài 1.13 Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x-3y+3z-11=0$ và các điểm $A(3;-4;5)$, $B(3;3;-3)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (α) sao cho $|MA-MB|$ lớn nhất.
(HD Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (α). Ta có $|MA-MB| = |MA'-MB| \leq A'B$)

1.4 Phương pháp biến hình

1.4.1 Hệ thống các phép biến hình phẳng và không gian

Các phép biến hình thường gặp, các ký hiệu. Các định nghĩa, tính chất chi tiết đã được trình bày trong các giáo trình "Hình học sơ cấp", xem [6]
1. Phép dời hình:

- Phép tịnh tiến theo vectơ v, ký hiệu là $T_{\vec{v}}$.

- Phép đối xứng trục Δ, ký hiệu là S_Δ.
- Phép đối xứng tâm O, ký hiệu là Z_O.
- Phép quay tâm O, góc quay α, ký hiệu là Q_α^O

Trong không gian có thêm

- Đối xứng qua mặt phẳng P, ký hiệu là S_P.
- Đối xứng qua đường thẳng Δ, ký hiệu là S_Δ.

2. Phép đồng dạng:

- Phép vị tự tâm O, tỉ số k, ký hiệu là V_k^O.
- Phép đồng dạng tỉ số k, ký hiệu là H_k.

3. Phép nghịch đảo cực O phương tích k, ký hiệu là I_k^O.

1.4.2 Nội dung phương pháp

• Dùng phép biến hình thích hợp để biến đổi một phần dữ liệu bài toán vào vị trí thích hợp;

• Phân tích và so sánh hệ thống mới hình thành, tìm ra mối liên hệ và lời giải của bài toán;

• Dựa vào tính chất của phép biến hình ta đi chứng minh hoặc xây dựng được kết quả mong muốn.

1.4.3 Áp dụng các phép biến hình trong mặt phẳng

Ví dụ 1.9. *Sử dụng phép tịnh tiến*

Hai thôn nằm ở vị trí A, B cách nhau một con sông (xem hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Người ta dự định xây một chiếc cầu MN bắc qua sông(cầu vuông góc với bờ sông) và làm hai đoạn đường AM, NB (như hình vẽ). Hãy xác định vị trí chiếc cầu MN sao cho $AM + NB$ ngắn nhất.

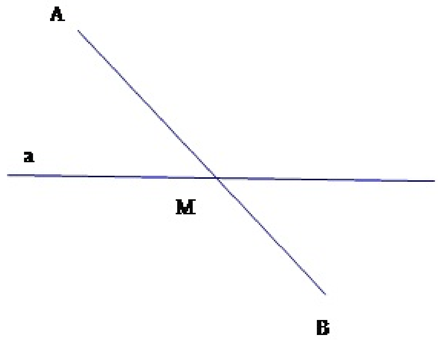
Giải.

Trường hợp 1: Coi con sông rất hẹp. Bài toán trở thành: Cho hai điểm A, B nằm ở hai phía khác nhau so với đường thẳng a. Tìm vị trí M trên A để $AM + AN$ nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của AB với a.

Trường hợp 2: $a//b$

Nhận xét: a, b cố định $\Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cố định.

$T_{\overrightarrow{MN}}(A) = A' \Rightarrow A'N = AM$. Ta có $AM + BN = A'N + NB = A'B$



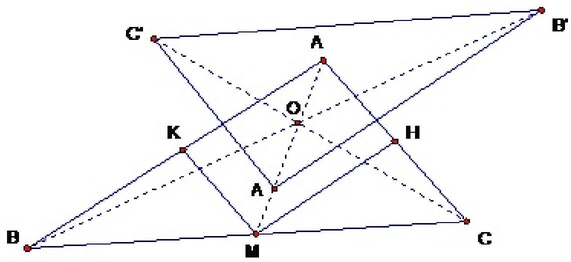
Hình 1.15:

Cách dựng: Dựng $A' = T_{\overrightarrow{MN}}(A)$. Nối A' với B cắt b tại N. Từ N hạ đường thẳng vuông góc với a tại M. Khi đó MN là vị trí xây cầu.

Ví dụ 1.10. *Sử dụng phép đối xứng tâm*

Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. Gọi $A'B'C'$ là ảnh của ABC của trong phép biến đổi Z_O. T là một đa giác được tạo bởi phần chung hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm vị trí của O sao cho T có diện tích lớn nhất.

Giải.



Hình 1.16:

- Ta xét trường hợp ảnh A' của A trong phép biến đổi Z_O nằm trong tam giác ABC.

Trường hợp này T là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp nằm trên AB và AC và một đường chéo AA'.

Gọi M là giao điểm của AA' với cạnh BC và dựng hình bình hành $AKMH$ có $MK//AC$ và $MH//AB$ ($K \in AB, H \in AC$).

Rõ ràng T bị chứa trong hình bình hành$AKMH$, do đó:

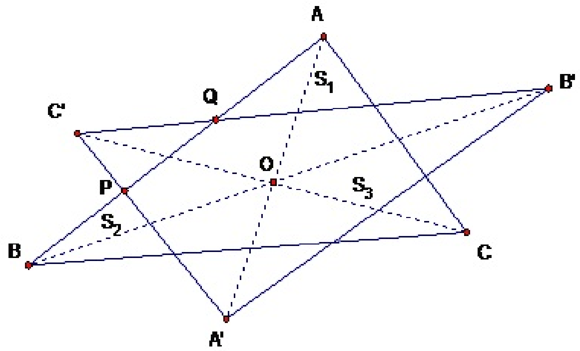
$$dt\,(T) \leq dt\,(AKMH)\,(K \in AB, H \in AC)\,.$$

Mặt khác ta chứng minh được: $dt\,(AKMH) \leq dt\,(ABC)$
Thật vậy ta có : $\dfrac{dt\,(AHK)}{dt\,(ABC)} = \dfrac{AK}{AB}.\dfrac{AH}{AC}$
Do $MK//AC$ và $MH//AB$, nên

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AM}{BC}, \frac{AH}{AC} = \frac{BM}{BC}, \frac{AK}{AB} + \frac{AH}{AC} = 1$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có : $\dfrac{AK}{AB}.\dfrac{AH}{AC} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{AK}{AB} + \dfrac{AH}{AC'}\right)^2$
Suy ra $dt\,(AHK) \leq \dfrac{1}{4}dt\,(ABC) \Leftrightarrow dt\,(AKMH) \leq \dfrac{1}{2}dt\,(ABC)$
Vậy $dt\,(T)\,max = \dfrac{1}{2}dt\,(ABC)$, khi O là trung điểm của trung tuyến AM.
- Trường hợp các đỉnh A', B', C' nằm ngoài tam giác ABC.

Trong trường hợp đó T là một lục giác có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau. Ta kí hiệu S_1, S_2, S_3 là diện tích các tam giác nhỏ bị cắt ra từ tam giác ABC bởi đường thẳng $A'B', B'C', C'A'$.



Hình 1.17:

Ta gọi P, Q là các giao điểm của $C'A'$ và $C'B'$ với cạnh AB; S là diện tích tam giác ABC.
Ta có :$\dfrac{S_1}{S} = \left(\dfrac{AQ}{AB}\right)^2; \dfrac{S_2}{S} = \left(\dfrac{BP}{AB}\right)^2; \dfrac{S_3}{S} = \left(\dfrac{PQ}{AB}\right)^2$
Suy ra $S_1 + S_2 + S_3 = S.\left[\left(\dfrac{AQ}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{BP}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{PQ}{AB}\right)^2\right].$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{AQ}{AB} + \frac{QP}{AB} + \frac{PB}{AB}\right)^2 = \frac{S}{3}.$$

Vậy min $S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{S}{3}$, khi $\dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{QP}{AB} = \dfrac{PB}{AB}$ hay O là trọng tâm tam giác ABC.

Ta xét diện tích của T.

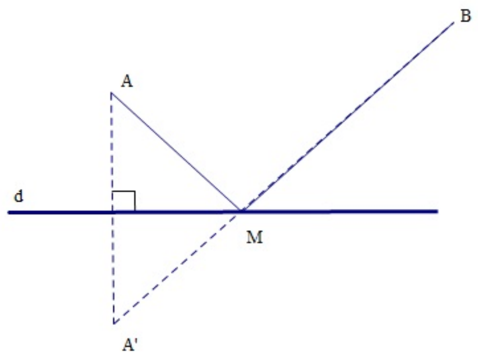
Rõ ràng $dt(T)$ lớn nhất khi $S_1 + S_2 + S_3$ nhỏ nhất.

Vậy max $dt\,(T) = \dfrac{2}{3}S$. Đối chiếu các trường hợp đã xét ta thấy diện tích của T lớn nhất khi O là trọng tâm tam giác ABC.

Ví dụ 1.11. *Sử dụng phép đối xứng trục.*
Cho hai điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d. Hãy xác định điểm M trên d sao cho $AM + MB$ bé nhất.

Giải.

Nhận xét: $A' = S_d\,(A) \Rightarrow AM = A'M$



Hình 1.18:

Vậy: $AM + MB = A'M + MB = A'B$

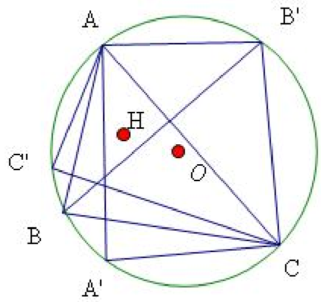
Cách dựng:

Dựng $A' = S_d\,(A)$

Nối A' với B cắt d tại M, khi đó $AM + MB$ nhỏ nhất.

Ví dụ 1.12. *Cho đường tròn (O, R) và tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường cao tam giác kẻ từ A, B, C với đường tròn. Hãy xác định kích thức 3 cạnh tam giác ABC để diện tích của một lục giác $AB'CA'BC'$ lớn nhất.*

Giải.



Hình 1.19:

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, vì ABC có 3 góc nhọn nên H nằm trong tam giác.

Rõ ràng ảnh của H trong các phép đối xứng qua các cạnh tam giác là các giao điểm A', B', C'.
Vì vậy $dt(AB'CA'BC') = 2S$ (S là diện tích tam giác ABC).

Diện tích lục giác lớn nhất khi S lớn nhất. Bây giờ ta tìm kích thước các cạnh tam giác ABC để S đạt max.

Từ các bất đẳng thức. $S \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$ và $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$, ta suy ra S đạt max khi dấu bằng trong cả hai bất đẳng thức xảy ra đồng thời (a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác ABC)

Từ đó suy ra ABC là tam giác đều mà độ dài cạnh bằng $R\sqrt{3}$.

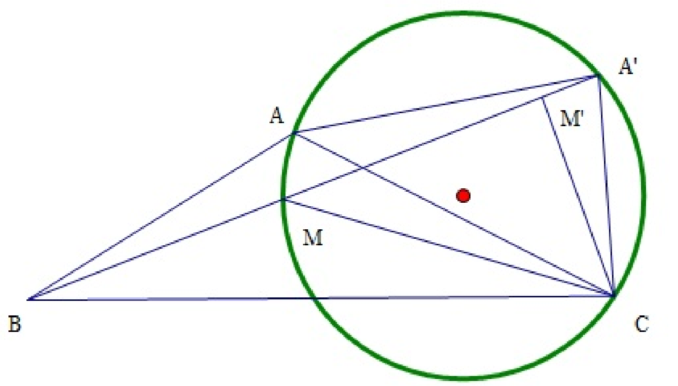
Ví dụ 1.13. *Sử dụng phép quay*
Tam giác ABC có $BC = a, AC = b$, $\hat{C} = \alpha$ $\left(\alpha < 120^0\right)$. Tìm điểm M trong mặt phẳng sao cho $MA + MB + MC$ nhỏ nhất.

Giải.

Thực hiện phép quay $Q^C_{-60^0} : M \to M'; A \to A'$, khi đó $MA = M'A'$.

Vì tam giác CMM' đều, nên $MM' = CM$.
Vậy $MA + MB + MC = BM + MM' + M'A'$.

Để $MA + MB + MC$ nhỏ nhất ta cần tìm vị trí M sao cho độ dài đường gấp khúc $BMM'A'$ ngắn nhất.



Hình 1.20:

Rõ ràng tam giác $A'BC$ có $CB = a, CA' = b$, $\widehat{BCA'} = \left(60^0 + \alpha\right)$

$$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(60^0 + \alpha\right)$$

Độ dài đường gấp khúc $BMM'A'$ ngắn nhất khi M và M' nằm trên BA'.

Ví dụ 1.14. *(Bài toán phụ của ví dụ phép nghịch đảo) Xem [3], [339-341]*

Cho điểm M trong ΔABC và số thực $0 < \alpha < 1$.

Chứng minh rằng $R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha \geq 2^\alpha\left(d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha\right)$.

Giải.

Trước hết ta đi chứng minh một bổ đề: $\forall x, y > 0$ và $0 < \alpha < 1$.

Thế thì: $(x+y)^\alpha \geq 2^{\alpha-1}.(x^\alpha + y^\alpha)$

Chứng minh : Bất đẳng thức cần chúng minh tương đương:

$\left(\dfrac{x}{y} + 1\right)^\alpha \geq 2^{\alpha-1}.\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha + 1\right]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = (z+1)^\alpha - 2^{\alpha-1}.(z^\alpha + 1) \geq 0 \\ z = \dfrac{x}{y} > 0 \end{cases}$

$f'(z) = \alpha\left[(z+1)^{\alpha-1} - (2z)^{\alpha-1}\right] = 0 \Leftrightarrow z = 1.$

Bởi vì: $z > 0$ và $0 < \alpha < 1$.

Ta dễ lập được bảng biến thiên của hàm số. Từ đó suy ra

$\Rightarrow f(z) \geq 0 \forall z > 0$ và $0 < \alpha < 1$.

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng

$$R_a \geq \frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a} \Rightarrow R_a^\alpha \geq \left(\frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a}\right)^\alpha \geq 2^{\alpha-1}\left[\left(\frac{bd_c}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{cd_b}{a}\right)^\alpha\right]$$

Áp dụng bổ đề với

$$x = \frac{bd_c}{a}; y = \frac{cd_b}{a}$$

Tương tự với hai bất đẳng thức nữa suy ra

$$R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha \geq 2^{\alpha-1}.d_a^\alpha\left[\left(\frac{b}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{b}\right)^\alpha\right] + d_b^\alpha\left[\left(\frac{a}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a}\right)^\alpha\right] + d_c^\alpha\left[\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha\right]$$

$$\geq 2^\alpha\left(d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha\right)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

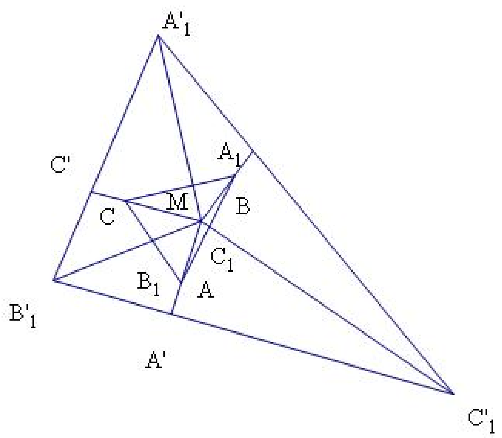
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là tâm của tam giác đều.

Ví dụ 1.15. *Sử dụng phép nghịch đảo*

Cho điểm M trong ΔABC và số thực $-1 < \alpha < 0$.

CMR : $2^\alpha\left(d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha\right) \geq R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha$.

Giải.



Hình 1.21:

Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M xuống các cạnh BC, CA, AB.

Thực hiện phép nghịch đảo cực M, phương tích đơn vị.

Ta có $\begin{cases} A \to A' \\ B \to B' \\ C \to C' \end{cases}$ và $\begin{cases} A_1 \to {A_1}' \\ B_1 \to {B_1}' \\ C_1 \to {C_1}' \end{cases}$

Theo định nghĩa phép nghịch đảo ta có:
$MA.MA' = 1; MB.MB' = 1; MC.MC' = 1$
suy ra
$MA' = \dfrac{1}{MA}; MB' = \dfrac{1}{MB}; MC' = \dfrac{1}{MC}$
$MA_1.{MA_1}' = 1; MB_1.{MB_1}' = 1; MC_1.{MC_1}' = 1$
suy ra

$$ {MA_1}' = \frac{1}{MA_1}; {MB_1}' = \frac{1}{MB_1}; {MC_1}' = \frac{1}{MC_1} $$

Áp dụng bài toán phụ ở trên trong $\Delta {A_1}'{B_1}'{C_1}'$ với chú ý $-1 < \alpha < 0$:
ta có
$\left({MA_1}'\right)^{-\alpha} + \left({MB_1}'\right)^{-\alpha} + \left({MC_1}'\right)^{-\alpha} \geq 2^{-\alpha}.\left[(MA')^{-\alpha} + (MB')^{-\alpha} + (MC')^{-\alpha}\right].$
$\Leftrightarrow 2^{\alpha}\left(MA_1^{\alpha} + MB_1^{\alpha} + MC_1^{\alpha}\right) \geq MA^{-\alpha} + MB^{-\alpha} + MC^{-\alpha} \geq MA'^{\alpha} + MB'^{\alpha} + MC'^{\alpha}$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{{MA_1}'}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{1}{{MB_1}'}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{1}{{MC_1}'}\right)^{\alpha} \geq \dfrac{1}{2^{\alpha}}\left[\left(\dfrac{1}{MA'}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{1}{MB'}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{1}{MC'}\right)^{\alpha}\right]$
$\Leftrightarrow 2^{\alpha}\left(d_a^{\alpha} + d_b^{\alpha} + d_c^{\alpha}\right) \geq R_a^{\alpha} + R_b^{\alpha} + R_c^{\alpha}$
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là tâm ΔABC đều.

Bài tập xem [12], [121]

Bài 1.14 Sử dụng phép đối xứng trục.

Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$, điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox, điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Bài 1.15 Sử dụng phép đối xứng trục.

Cho góc $\widehat{xOy}$ cố định và hai điểm A, B nằm trong góc đó. Hãy tìm điểm M trên Ox, điểm N trên Oy sao cho tổng độ dài các đoạn thẳng AM, MN, NB ngắn nhất.

Mục đích của chương là hệ thống lại các kiến thức của hình học liên quan chặt chẽ đến bài toán cực trị trong hình học, mà chủ yếu là hình học phẳng. Mặc dù các kiến thức rất đơn giản, cơ bản như so sánh các đại lượng hình học với nhiều công cụ hình học đơn giản nhưng khi áp dụng vào các bài toán cụ thể ta thu được phương pháp không thể thiếu được khi giải bài toán cực trị hình học, đó là phương pháp hình học thuần túy. Ngoài ra ta dùng các phép biến hình để tìm cực trị cũng rất hiệu quả dưới dạng bài toán dựng hình, đó là dựng một điểm hoặc một đường thẳng.

Chương 2

Giải toán cực trị hình học bằng công cụ đại số

Đại số là một công cụ mạnh để giải bài toán cực trị hình học. Liên quan trực tiếp đến đề tài này là các bất đẳng thức đại số. Sau đó là tìm cực trị của một hàm số (một hay nhiều biến). Dùng tọa độ cũng được coi là một công cụ mạnh của đại số.

2.1 Bất đẳng thức đại số

2.1.1 Định nghĩa bất đẳng thức trong đại số

Một bất đẳng thức là một phát biểu về quan hệ thứ tự giữa hai đối tượng.

. Ký hiệu $a < b$ có nghĩa là a nhỏ hơn b và

. Ký hiệu $a > b$ có nghĩa là a lớn hơn b.

Những quan hệ nói trên được gọi là bất đẳng thức nghiêm ngặt; ngoài ra ta còn có

. Ký hiệu a $\leq$ b có nghĩa là a nhỏ hơn hoặc bằng b và

. Ký hiệu a $\geq$ b có nghĩa là a lớn hơn hoặc bằng b.

2.1.2 Các bất đẳng thức cơ bản hay dùng

Bất đẳng thức AM-GM

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}, x_i \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Ý nghĩa hình học khi $n = 2$

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\begin{array}{l} (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \\ \qquad \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2\right); x_i, y_i \geq 0 \end{array}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$.

Bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình bình phương

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Bất đẳng thức Minkovski

$$\begin{array}{l} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + ... + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + ... + c_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + ... + c_n^2} \\ \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2 + ... + (c_1 + c_2 + ... + c_n)^2} \end{array}.$$

$a_i, b_i, c_i \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$a_1 : b_1 : ... : c_1 = a_2 : b_2 : ... : c_2 = a_n : b_n : ... : c_n.$$

Ý nghĩa hình học:

Trong tất cả các đường gấp khúc nối hai điểm cho trước thì đoạn thẳng nối hai điểm này có độ dài ngắn nhất.

Một số bài toán bất đẳng thức đại số hay được chứng minh bằng phương pháp hình học.

Bài toán 2.1 Chứng minh rằng: với $a, b > 0$ ta luôn có:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

(Gọi là bất đẳng thức AG-MG cho hai số dương)

Bài toán 2.2 Cho hai số $a, b > 0$. Ta có

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Hệ quả 2.1

1. Nếu $a + b = k$ (hằng số) thì

a) Tích $a.b$ có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{k^2}{4}$ khi $a = b$.

b) Tổng $a^2 + b^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{k^2}{2}$ khi $a = b$.

2. Nếu $ab = k$ (hằng số) thì

a) Tổng $a + b$ có giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{k}$ khi $a = b$.

b) Tổng $a^2 + b^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $2k$ khi $a = b$.

3. Nếu $a^2 + b^2 = k$ (hằng số) thì

a) Tích $a.b$ có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{k}{2}$ khi $a = b$.

b) Tổng $a + b$ có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2k}$ khi $a = b$.

2.1.3 Nội dung của phương pháp

• Áp dụng các bất đẳng thức đại số vào các đại lượng hình học, thường là các đại lượng độ dài, góc, diện tích, thể tích.

• Đặt các đại lượng tương ứng của các đối tượng hình học thành các biến số.

• Áp dụng bất đẳng thức cho mối liên hệ vừa thiết lập.

• Chú ý đến dấu "=" trong bất đẳng thức để rút ra kết luận.

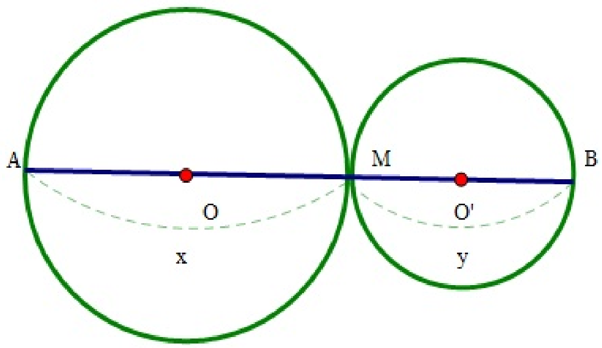
2.1.4 Các ví dụ (hình học phẳng và hình học không gian)

a) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM

Ví dụ 2.1. *Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB. Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất.*

Giải.

Đặt $MA = x, MB = y$



Hình 2.1:

Ta có $x + y = AB(0 < x, y < AB)$.

Gọi S và S' theo thứ tự là diện tích của hai đường tròn có đường kính là MA và MB.

Ta có $S + S' = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi\frac{x^2 + y^2}{4}$.

Bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ nên

$$S + S' \geq \pi\frac{(x+y)^2}{8} = \pi\frac{AB^2}{8}.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

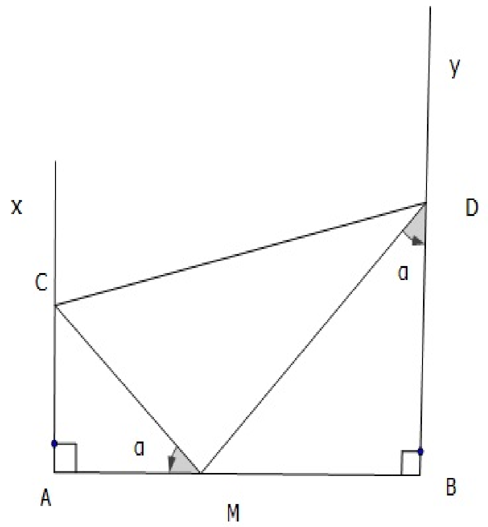
Do đó $min(S + S') = \pi\frac{AB^2}{8}$.Khi đó M là trung điểm của AB.

Ví dụ 2.2. *Cho điểm M nằm trên đoạn AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.*

Giải.

Ta có: $S_{MCD} = \frac{1}{2}MC.MD$. Đặt

$$\begin{aligned} &MA = a, MB = b \\ &\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha \\ &MC = \frac{a}{cos\alpha}, MD = \frac{B}{sin\alpha} \\ &S_{MCD} = \frac{1}{2}.\frac{ab}{cos\alpha sin\alpha} \end{aligned}.$$



Hình 2.2:

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ 2cosαsinα lớn nhất.

Theo bất đẳng thức $2xy \leq x^2 + y^2$ ta có:

$2cos\alpha sin\alpha \leq \sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ nên $S_{MCD} \geq ab$

$S_{MCD} = ab \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(9)0^0 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

ΔAMC và ΔBMD vuông cân

Vậy $minS_{MCD} = ab$. Khi đó các điểm C, D được xác định trên tia Ax, By sao cho $AC = AM, BD = BM$.

Ví dụ 2.3. *Cho ΔABC điểm M di động trên cạnh BC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành $ADME$ có diện tích lớn nhất.*

Giải.

$S_{ADME}max \Leftrightarrow \dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}}max$. Kẻ

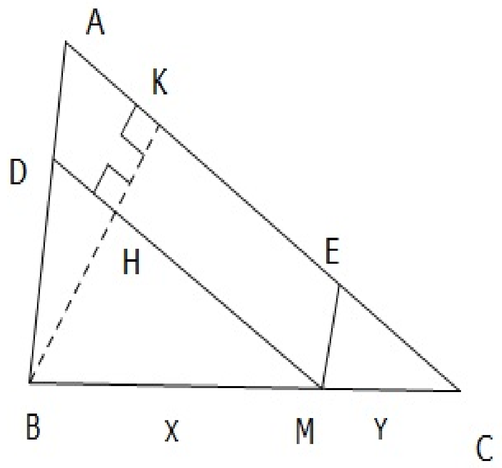
$BK \perp AC, BK \cap MD = H$.

$S_{ADME} = MD.HK$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BK$

$\dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2\dfrac{MD}{AC}.\dfrac{HK}{BK}$

Đặt $MB = x, MC = y$



Hình 2.3:

$MD//AC$ ta có $\dfrac{MD}{AC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{x}{x+y}; \dfrac{HK}{BK} = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{y}{x+y}$

Theo bất đẳng thức

$\dfrac{xy}{(x+y)^2} \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \dfrac{2xy}{(x+y)^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$

Vậy $maxS_{ADME} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$ khi đó M là trung điểm của BC.

Ví dụ 2.4. *(Thi tuyển sinh ĐH Hàng Hải 1995)*

Cho góc tam diện vuông $Oxyz$. Điểm N cố định nằm trong góc tam diện, mặt phẳng (P) qua N cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Gọi khoảng cách từ N đến các mặt phẳng $(OBC), (OCA), (OAB)$ là a, b, c.

a. Tính OA, OB, OC để thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b. Tính OA, OB, OC để $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải.

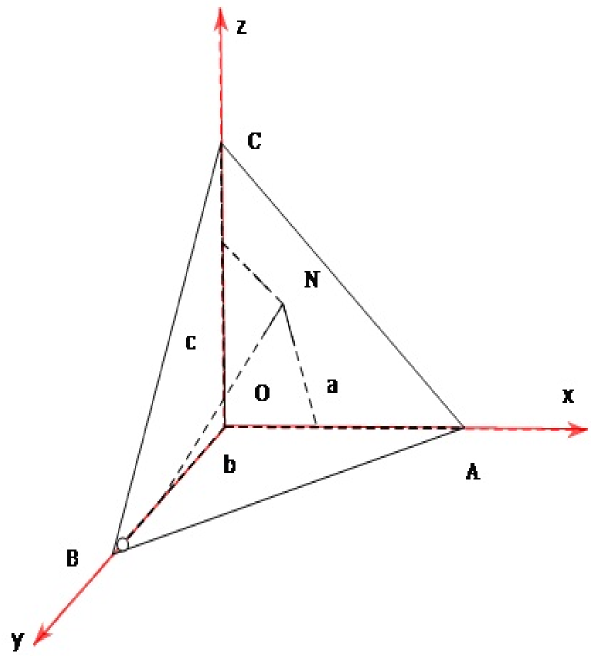
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, từ giả thiết ta được $N(a; b; c)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) đi qua N có dạng:

$$(P) : \alpha (x - a) + \beta (y - b) + \gamma (z - c) = 0 (\alpha, \beta, \gamma > 0)$$

Từ đó bằng cách lấy giao điểm của (P) với Ox, Oy, Oz ta được:

$A\left(\dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha}; 0; 0\right) \Rightarrow OA = \dfrac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha}$,



Hình 2.4:

$B\left(0;\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\beta};0\right)\Rightarrow OB=\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\beta},$
$A\left(0;0;\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\gamma}\right)\Rightarrow OC=\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\gamma},$
Ta có

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}\frac{(a\alpha+b\beta+c\gamma)^3}{\alpha\beta\gamma}$$
$$\geq\frac{1}{6}\frac{\left(3\sqrt[3]{a\alpha b\beta c\gamma}\right)^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{9abc}{2}$$

(Áp dụng BĐT AM-GM)
Vậy $MinV_{OABC}=\dfrac{9abc}{2}$ đạt được khi $a\alpha=b\beta=c\gamma$, khi đó:
$OA=\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha}=\dfrac{a\alpha+a\alpha+a\alpha}{\alpha}=3a,$
$OB=\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\beta}=\dfrac{b\beta+b\beta+b\beta}{\beta}=3b,$
$OC=\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\gamma}=\dfrac{c\gamma+c\gamma+c\gamma}{\gamma}=3c,$
b. Ta có

$$OA+OB+OC=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha}+\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\beta}+\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\gamma}$$
$$=a+b+c+\left(\frac{b\beta}{\alpha}+\frac{a\alpha}{\beta}\right)+\left(\frac{c\gamma}{\alpha}+\frac{a\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{c\gamma}{\beta}+\frac{b\beta}{\gamma}\right)$$

$\geq a + b + c + 2\sqrt{ba} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2$
(Áp dụng BĐT AM-GM)
Vậy $Min\,(OA + OB + OC) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2$ đạt được khi
$\dfrac{b\beta}{\alpha} = \dfrac{a\alpha}{\beta} v \dfrac{c\gamma}{\alpha} = \dfrac{a\alpha}{\gamma} v \dfrac{c\gamma}{\beta} = \dfrac{b\beta}{\gamma} \Leftrightarrow a\alpha^2 = b\beta^2 = c\gamma^2.$
Khi đó

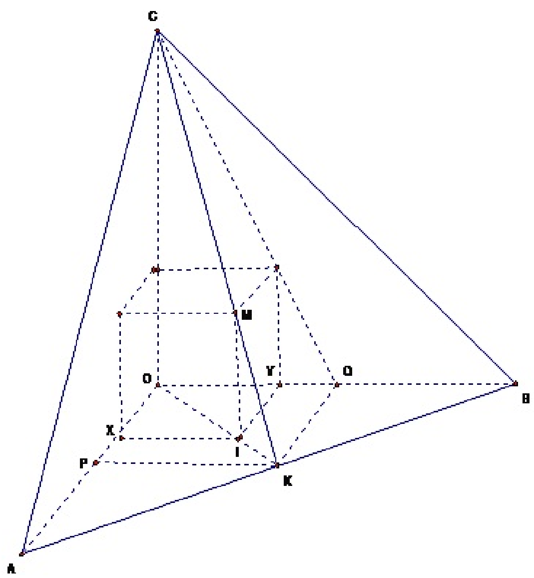
$$OA = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\alpha} = a + \frac{b\beta}{\alpha} + \frac{c\gamma}{\alpha} = a + b\sqrt{\frac{a}{b}} + c\sqrt{\frac{a}{c}}$$
$$= a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac},$$

tương tự $OB = b + \sqrt{ba} + \sqrt{bc}, OC = c + \sqrt{ca} + \sqrt{cb}$.

Ví dụ 2.5. *Cho tứ diện 3 mặt vuông $OABC$ đỉnh O, có $OA = a, OB = b, OC = c$. Gọi x, y, z là khoảng cách từ một điểm M trên mặt ABC đến các mặt OBC, OCA, OAB. Tìm giá trị lớn nhất của tích $T = x.y.z$.*

Giải.

Cho tứ diện vuông $OABC$, có $OA = a, OB = b, OC = c$, vẽ hình hộp chữ nhật nội tiếp có 1 đỉnh M nằm trên mặt ABC, các đỉnh còn lại nằm trên các mặt vuông của tứ diện (Hình 2.5).
Đặt các kích thước của hình hộp chữ nhật là



Hình 2.5:

$$OX = x, OY = y, OZ = z.$$

Khi đó x, y, z tương ứng bằng khoảng cách từ M đến các mặt OBC, OCA, OAB.

Ta có thể tích của hình hộp là $V = x.y.z$.

Vẽ CM cắt AB tại K; gọi I là hình chiếu của M trên mặt OAB và là đỉnh của hình hộp chữ nhật, ta có O, I, K thẳng hàng; gọi $KQ = x_1$, $KP = y_1$ tương ứng là các đoạn vuông góc từ K đến OB, OA.

Khi đó sử dụng tỷ số diện tích của hai hình chữ nhật $OXIY$ và $OPKQ$ đồng dạng với hệ số tỷ lệ là

$$\frac{OI}{OK} = \frac{ZM}{OK} = \frac{CZ}{CO} = \frac{(c-z)}{c}$$

ta được :

$$x.y = \frac{(c-z)^2.x_1.y_1}{c^2}$$

Do đó thể tích của hình hộp chữ nhật có ba kích thước: x, y, z là

$$V = x.y.z = \frac{(c-z)^2.z.x_1.y_1}{c^2} \; (2.5.1)$$

Từ đó suy ra nếu có đồng thời $x_1.y_1$ lớn nhất và $(c-z)^2.z$ lớn nhất thì V đạt giá trị lớn nhất.

Ta có hai lần diện tích tam giác OAB là $a.b = x_1.b + y_1.a$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được $x_1.y_1$ lớn nhất là $\frac{a.b}{4}$, khi $x_1 = \frac{a}{2}$ và $y_1 = \frac{b}{2}$. Khi đó K là trung điểm của AB.

Hàm số $F(z) = (c-z)^2.z$ đạt giá trị lớn nhất là: $\frac{4c^3}{27}$, khi $z = \frac{c}{3}$

Kết hợp lại V trong (2.5.1) đạt giá trị lớn nhất là:

$V = \frac{a.b.c}{27}$; khi $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}, z = \frac{c}{3}$ (tương thích).

Khi đó M là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy với M là trọng tâm của tam giác ABC, thì $T = x.y.z$ lớn nhất là $\frac{a.b.c}{27}$ với $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}, z = \frac{c}{3}$

Cách giải khác

Xét hệ tọa độ trực chuẩn $Oxyz$.

Ta có: $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c)$ (với x, y, z và a, b, c là các số dương)

Khi đó phương trình đoạn chắn của mặt phẳng đi qua A, B, C có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $1^3 \geq 3^3 \frac{x.y.z}{abc}$

Đẳng thức có khi $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{3}$

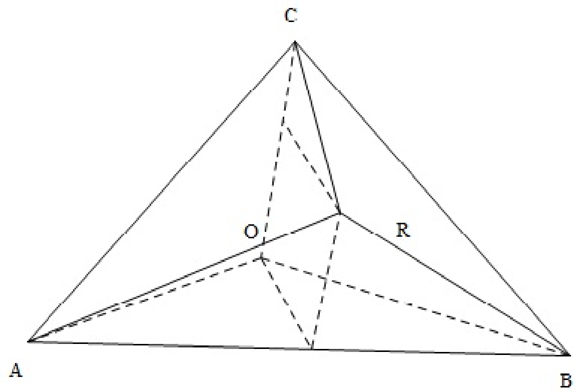
Hay $x.y.z \leq \dfrac{abc}{27}$. Đẳng thức có khi với $x = \dfrac{a}{3}, y = \dfrac{b}{3}, z = \dfrac{c}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $x.y.z$ là: $\dfrac{abc}{27}$ với $x = \dfrac{a}{3}, y = \dfrac{b}{3}, z = \dfrac{c}{3}$.

Ví dụ 2.6. *Trong các tứ diện vuông (tứ diện có 3 mặt vuông xuất phát từ một đỉnh) nằm trong một mặt cầu bán kính R, tìm kích thước tứ diện ngoại tiếp mặt cầu có bán kính lớn nhất.*

Giải.

Ta dễ thấy tứ diện vuông cần tìm nội tiếp trong mặt cầu bán kính R cho



Hình 2.6:

trước.

Giả sử tứ diện vuông $OABC$ có các mặt vuông OAB, OBC, OCA vuông ở O và $OA = a, OB = b, OC = c$.

Ta có $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

Thể tích tứ diện $OABC$ là $V = \dfrac{1}{6}a.b.c$ (2.6.1)

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC ta có

$$V = \frac{r}{3}\left(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC}\right)$$
$$= \frac{r}{6}\left(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right). \ (2.6.2)$$

Từ (2.6.1) và (2.6.2) suy ra: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$.

Do đó: $\dfrac{R}{r} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}\right)$.

Ta có: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{3.\sqrt[3]{a^2.b^2.c^2}} = \sqrt{3}.\sqrt[3]{a.b.c}$

đẳng thức có khi: $a = b = c$;

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

đẳng thức có khi: $a = b = c$.

Vì $\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{\left(a.\frac{1}{a}+b.\frac{1}{b}+c.\frac{1}{c}\right)^2} = 3,$

đẳng thức có khi :$a = b = c$.

Suy ra $\frac{R}{r} \geq = \frac{3.\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$, hay $r \leq \frac{2R}{3.(1+\sqrt{3})} = \frac{R.(\sqrt{3}-1)}{3}$

đẳng thức có khi $a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Vậy tứ diện vuông cần tìm có 3 cạnh $a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, chứa mặt cầu có bán kính lớn nhất là $r = \frac{R.(\sqrt{3}-1)}{3}$.

b) Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Ví dụ 2.7. *Trong không gian tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2;5;3)$ và cắt chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA + OB + OC$ nhỏ nhất.*

Giải.

Giả sử $A\,(a;0;0)\,, B\,(0;b;0)\,, C\,(0;0;c)$ (với a,b,c > 0).

Mặt phẳng (α) có phương trình : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ đi qua $M(2;5;3)$ nên

$\frac{2}{a} + \frac{5}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (2.6.3)

Ta có: $OA + OB + OC = a + b + c$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{c}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{a})^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + (\sqrt{c})^2\right]$$

$\geq \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$

hay $\left(\frac{2}{a}+\frac{5}{b}+\frac{3}{c}\right)(a+b+c) \geq \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$.

Suy ra $1.\,(a+b+c) \geq \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$). (do(2.6.3)

Dấu " $=$" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{c} \\ \frac{2}{a} + \frac{5}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{10} + \sqrt{6} \\ b = \sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = 5 + \sqrt{10} + \sqrt{15} \\ c = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = 3 + \sqrt{15} + \sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy $OA + OB + OC$ nhỏ nhất khi $a = 2 + \sqrt{10} + \sqrt{6}, b = 5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}$, $c = 3 + \sqrt{15} + \sqrt{6}$

Mặt phẳng (α) cần tìm là :

$$\frac{x}{2 + \sqrt{10} + \sqrt{6}} + \frac{y}{5 + \sqrt{10} + \sqrt{15}} + \frac{z}{3 + \sqrt{15} + \sqrt{6}} = 1$$

c) Sử dụng bất đẳng thức Minkovski .

Ví dụ 2.8. *Cho hình lập phương $ABCD$ $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$. Trên ba cạnh đôi một chéo nhau của hình lập phương thứ tự lấy 3 điểm M, N, P. Xác định vị trí M, N, P để tam giác MNP có:*

a) Chu vi nhỏ nhất.

b) Diện tích nhỏ nhất.

Giải.

Đây là bài toán khó mặc dù nội dung bài toán rất quen thuộc. Sử dụng phương pháp tọa độ và phương pháp véctơ tỏ ra thuận lợi hơn phương pháp hình học truyền thống .

Bài toán phụ Ta có bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2 + (z_1 + z_2 + z_3)^2}$$

trong đó các số $x_i, y_i, z_i \in R$

Chứng minh bài toán phụ: Xét các véc tơ

$\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1, z_1)\,; \overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2, z_2)\,; \overrightarrow{u_3} = (x_3, y_3, z_3)$, ta có

$\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3)\,.$

Từ bất đẳng thức

$|\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}| \leq |\overrightarrow{u_1}| + |\overrightarrow{u_2}| + |\overrightarrow{u_3}|$

(độ dài của tổng các véc tơ không vượt quá tổng độ dài của các véc tơ) ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_2} = k\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_3} = m\overrightarrow{u_1}, k, m \in R^+$.

Giải bài toán chính: Không mất tính chất tổng quát ta có thể giả thiết cạnh của hình lập phương bằng 1.

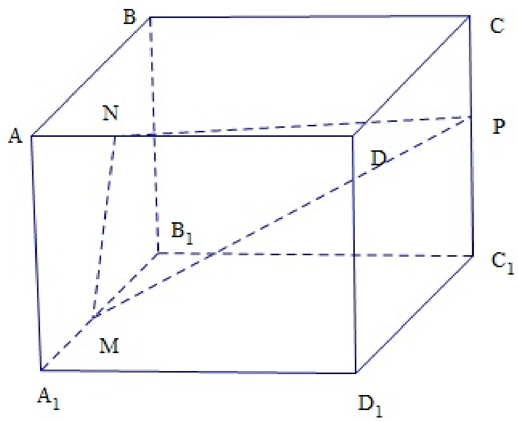
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ và giả sử tọa độ các điểm M,N,P là M(x;1;0), N(0;y;1), P(1;0;z) với x,y,z thuộc [0,1].

Ta có chu vi tam giác MNP là

$$C = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2 + 1} + \sqrt{y^2 + (1 - z)^2 + 1} + \sqrt{z^2 + (1 - x)^2 + 1}$$

Áp dụng bài toán phụ và bất đẳng thức quen thuộc $a^2+b^2 \geq \dfrac{1}{2}(a+b)^2, a, b \in R$ ta được

$C \geq \sqrt{(x+y+z)^2+(3-x-y-z)^2+3^2} \geq \sqrt{\dfrac{9}{2}+9} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$



Hình 2.7:

Do đó chu vi tam giác MNP có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. Giá trị đó đạt được khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$ hay M, N, P là trung điểm 3 cạnh đôi một chéo nhau của lập phương.

b) Ta có $\overrightarrow{MN} = (-x, y-1, 1); \overrightarrow{MP} = (1-x, -1, z)$.

Diện tích tam giác MNP theo ý nghĩa hình học của tích véc tơ là

$$S_{MNP} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{(xy-y+1)^2+(yz-z+1)^2+(zx-x+1)^2}.$$

Vì $x, y, z \in [0,1]$ nên $xyz+(1-x)(1-y)(1-z) \geq 0 \Rightarrow x+y+z-(xy+yz+zx) \leq 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số x, y, z có một số bằng 0, một số bằng 1, số còn lại có thể là số bất kỳ trong [0,1].

Đặt $t = x+y+z-(xy+yz+zx)$ suy ra $0 \leq t \leq 1$ và

$t = y(1-x)+z(1-y)+x(1-z) = z(1-x)+x(1-y)+y(1-z).$

Gọi biểu thức trong dấu căn ở trên là R, ta có

$R = (xy-y+1)^2+(yz-z+1)^2+(zx-x+1)^2$

$= (1-y(1-x))^2+(1-z(1-y))^2+(1-x(1-z))^2$

$= 3-2t+(y(1-x))^2+(z(1-y))^2+(x(1-z))^2$

$= 3-2t+t^2-2[y(1-x)z(1-y)+z(1-y)z(1-z)+x(1-z)y(1-x)].$

Lưu ý rằng với mọi số thực a ta có $a(1-a) \leq \dfrac{1}{4}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$, ta được

$$y(1-x)z(1-y) + z(1-y)x(1-z) + x(1-z)y(1-x)$$
$$\leq \frac{1}{4}\left[z(1-x) + x(1-y) + y(1-z)\right] = \frac{t}{4}.$$

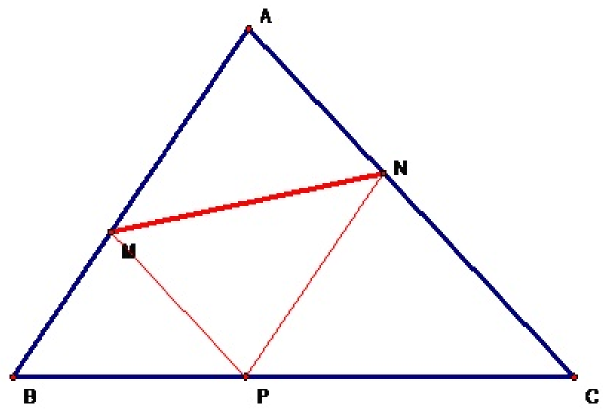
Suy ra $S_{MNP} \geq 3 - \frac{5t}{2} + t^2 = \frac{(1-t)(3-2t)}{2} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$.

Do đó, $S_{MNP} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Vậy $\min S_{MNP} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Giá trị đó đạt được khi trong 3 số x,y,z có một số bằng 0, một số bằng 1 và một số bằng $\frac{1}{2}$, nói cách khác 2 trong 3 điểm M, N, P là 2 đỉnh đối diện của hình lập phương, điểm thứ ba là trung điểm của cạnh không xuất phát từ 2 đỉnh kia.

Ví dụ 2.9. *Cho tam giác ABC, từ một điểm P trên cạnh BC kẻ $PN//AB$ cắt AC tại N, kẻ $PM//AC$ cắt AB tại M. Xác định vị trí của P trên BC sao cho MN nhỏ nhất.*

Giải.



Hình 2.8:

Lấy một hệ tọa độ tổng quát gốc A, véc tơ cơ sở là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Giả sử tỷ số đơn $(PCB) = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = x$,

suy ra tỷ số đơn $(PBC) = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = 1 - x$

Vì $MP//AC$ nên $x = (PCB) = (MAB) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1-x)\overrightarrow{AB}$;

Vì $PN//AB$ nên suy ra $1 - x = (PBC) = (NAC) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$.

Từ đó ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} - (1-x)\overrightarrow{AB} = x(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BA}$

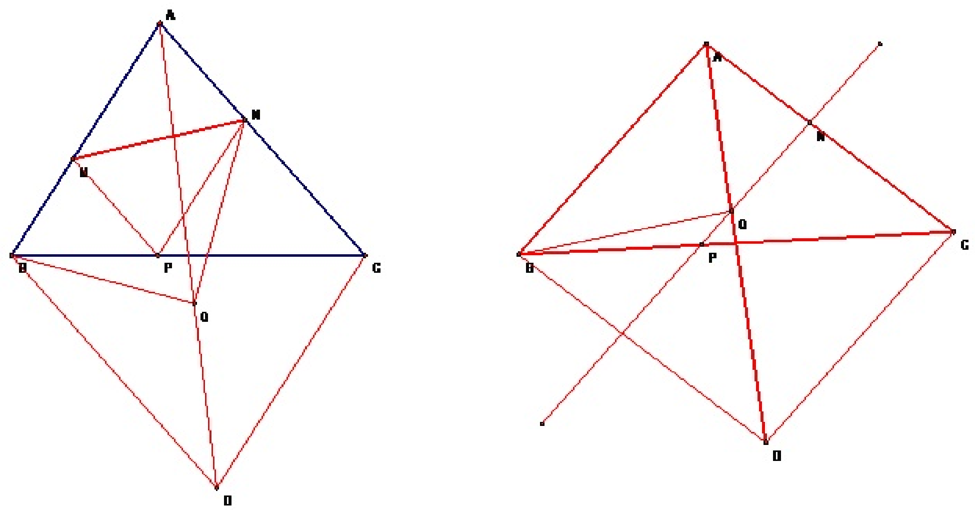
Thay $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ (D là đỉnh hình bình hành $ACDB$) ta có: $x\overrightarrow{AD}$=$\overrightarrow{AQ}$,$Q \in AD$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MN}$=$\overrightarrow{AQ}$+$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BQ}$ lập tức có $MBQN$ là hình bình hành.

Do tính chất hình bình hành, MN nhỏ nhất khi và chỉ khi BQ nhỏ nhất, tức Q là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AD.

Ta dựng P như sau:

- Dựng hình bình hành $ABCD$
- Hạ Bx vuông góc với AD, cắt AD ở Q.
- Qua Q kẻ $Qy//AB$ cắtAC ở N và cắt BC ở P. P là điểm cần tìm.



Hình 2.9:

Chứng minh: P là điểm thỏa mãn bài toán.

Từ P kẻ đường thẳng $PM//AC$ cần kiểm tra MN là đoạn thẳng ngắn nhất ứng với vị trí của P vừa dựng.

Làm ngược lại thứ tự phân tích ở trên ta có điều phải chứng minh.

Bài tập

Bài 2.1 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $M\,(9;4)$ .Viết phương trình đường thẳng đi qua $M\,(9;4)$ và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A, B khác O sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 2.2 Cho ΔABC vuông cân có cạnh huyền $BC = a$. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ E, D đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang $DEKH$. Khi đó hình thang trở thành hình gì?

Bài 2.3 Cho hình lập phương $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. M thuộc cạnh AB_1, N thuộc cạnh BD_1 với $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$. Tìm x để MN ngắn nhất.

Bài 2.4 Cho hình chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$ trong đó AA', BB', CC', DD' là các cạnh song song và $AA' = a$, $AB = b$, $AD = C$. Gọi P là mặt phẳng đi qua C, không cắt hình hộp nhưng cắt các cạnh AA', AB, AD kéo dài tại E, F, G(tương ứng).

a) Chứng minh rằng $\dfrac{a}{AE} + \dfrac{b}{\mathrm{AF}} + \dfrac{c}{AG} = 1$

b) Xác định vị trí của mặt phẳng P sao cho tứ diện $AEFG$ có thể tích nhỏ nhất.

(Áp dụng bất đẳng thức AM-GM)

Bài 2.5 Trong mặt phẳng P cho nửa đường tròn (O) đường kính AC, B là điểm thuộc đường tròn (O). Trên nửa đường thẳng $Ax\bot(P)$ ta lấy S sao cho $AS = AC$. Gọi H và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng SB, SC.

a)Tính độ dài đoạn HK theo AC và BC.

b)Xác định vị trí của B trên (O) sao cho tổng diện tích hai tam giác SAB và CAB lớn nhất.

2.2 Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

2.2.1 Hàm số và các giá trị cực trị của hàm số

Trong giải tích ta có định nghĩa sau:

Cho X, Y là hai tập hợp số, ví dụ tập số thực R, hàm số f xác định trên X, nhận giá trị trong Y là một qui tắc cho tương ứng mỗi số x thuộc X với một số y duy nhất thuộc Y.

Ký hiệu

$$f : X \to Y \text{ hoặc } f : x \to f(x) \text{ hoặc } y = f(x)$$

Với

- Tập X gọi là miền xác định.

- Tập Y gọi là miền giá trị.
- x gọi là biến độc lập hay còn gọi là đối số.
- y gọi là biến phụ thuộc hay còn được gọi là hàm số.
- $f(x)$ được gọi là giá trị của hàmf tại x.

Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Định lý Phecma.

Nếu hàm khả vi $f(x)$ có cực đại hoặc cực tiểu tại $x = x_0$ thì đạo hàm của nó triệt tiêu tại x_0, tức là $f'(x_0) = 0$. Điều đó nghĩa là tại x mà $f'(x_0) \neq 0$, hàm số không đạt cực trị.

Cực trị địa phương

Định nghĩa

Cho $U \subset R^n$ là tập mở và $f : U \to R$. Ta nói rằng f đạt cực đại (cực tiểu) địa phương tại $a \in U$ nên có lân cận V của $(V \subset U)$ sao cho $f(x) \leq f(a)(f(x) \geq f(a)$ khi $x \in V)$.

Nếu $f(x) \leq f(a)(f(x) \geq f(a)$ khi $x \in V \backslash a)$ thì ta nói f đạt cực đại (cực tiểu) địa phương thực sự tại a.

Cực đại (cực tiểu) địa phương gọi chung là cực trị.

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$ có thể đạt tại điểm mà hàm đạt cực đại, cực tiểu, có thể đạt tại hai đầu mút $f(a), f(b)$.

Cực trị toàn thể

Định nghĩa

Trong khoảng (a, b), hàm $f(x)$ đạt cực đại tại D và cực tiểu tại C . $f(x)$ cũng đạt cực đại tại B nhưng trong một lân cận nhỏ hơn (a, b). Điểm A cũng là điểm cực tiểu trong một lân cận nào đó. Ta gọi những điểm D, C là những điểm cực trị toàn thể trên (a, b), còn các điểm kia là cực trị địa phương.

Chú ý: Điểm E tuy có đạo hàm tại đó bằng 0 nhưng hàm $f(x)$ thì đạt giá trị cực đại hay cực tiểu tại đó. Điều kiện $f'(x) = 0$ chỉ là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ để $f(x)$ có cực trị (Định lý Fecme).

Điều kiện đủ để hàm số có cực trị (4 định lý)

Định lý

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b) và $f'(c) = 0$ tại thì ta có:

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; c)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (c; b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm c.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; c)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (c; b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm c.

Định lý

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm bậc hai trong lân cận của điểm c, và $f'(c) = 0$

a) Nếu $f''(x) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm c

b) Nếu $f''(x) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm c

Định lý Vaystorat

Cho $f(x)$ là hàm xác định trên đoạn $[a, b]$ và liên tục trên đoạn đó. Khi đó f có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trong $[a, b]$.

Định lý Bolsano

Cho hàm số f xác định và liên tục trong đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho$f(c) = 0$.

2.2.2 Nội dung của phương pháp:

- Đưa các đại lượng hình học về dạng các hàm số của biến t nào đó.
- Khảo sát giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng công cụ của giải tích. Có thể xảy ra trường hợp là cần tìm cực trị của hàm nhiều biến.
- Từ việc xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số quay trở lại kết luận cực trị của đại lượng hình học.

2.2.3 Các ví dụ (hình học phẳng và hình học không gian)

Ví dụ 2.10. *Lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. M, N, P, Q di động trên $AB, BB', D'C', DD'$ với $AM = BN = C'P = QD' = x$*

a) cm: M, N, P, Q đồng phẳng. Tính MP, NQ suy ra hình tính $MNPQ$

b) Tính $S(MNPQ)$. Định x để S đó nhỏ nhất, lớn nhất. Khí diện tích nhỏ nhất, chứng minh $A'C$ vuông góc (MNP).

Giải.

a) Chỉ cần chứng minh $MN//PQ$ và $MN = PQ = \sqrt{x^2 + (a-x)^2}$. Suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
Tính được $MP = NQ = \sqrt{2a^2 + 4x^2}$.

Như vậy, tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình chữ nhật. b) Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ bằng
$S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{\left(x^2 + (a-x)^2\right).\left(x^2 + a^2 + (a-x)^2\right)}$
$MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{(a-x)^2 + x^2}$
còn $MQ = \sqrt{MD^2 + DQ^2} = \sqrt{MA^2 + AD^2 + DQ^2}$
$MQ = \sqrt{x^2 + a^2 + (a-x)^2}$

Đến đây, xét tam thức bậc hai: $f(x) = x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + x^2$ với $0 \leq x \leq a$

Ta có hoành độ đỉnh parabol : x $= -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{a}{2} \in [0;a]$

Lập bảng biến thiên trên đoạn $[0;a]$

Suy ra $f(x) \geq f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2}{2}, \forall x \in [0;a]$

Nghĩa là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \dfrac{a}{2}$

Và $\min\limits_{[0;a]} f(x) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2}{2}$

Từ đó suy ra $S_{MNPQ} \geq \sqrt{\dfrac{a^2}{2}.(a^2+)\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Kết luận:

Diện tích hình chữ nhật đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \dfrac{a}{2}$

Và giá trị nhỏ nhất đó bằng $S_{\min} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2.11. *Cho đường thẳng* $(d) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ *và hai điểm* $A\,(0;0;3)$, $B\,(0;3;3)$. *Tìm tọa độ điểm* $M \in (d)$ *sao cho:*

a) $MA + MB$ *nhỏ nhất.*

b) $MA^2 + 2MB^2$ *nhỏ nhất.*

c) $|\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{MB}}|$ *nhỏ nhất.*

d) $|MA - MB|$ *lớn nhất.*

Giải.

a) Chuyển phương trình của (d) sang dạng tham số $(d) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Gọi tọa độ của $M \in (d)$ có dạng $M\left(t;t;t\right), t \in R$. Ta có

$P = MA + MB$

$= \sqrt{\left(0-t\right)^2 + \left(0-t\right)^2 + \left(3-t\right)^2} + \sqrt{\left(0-t\right)^2 + \left(3-t\right)^2 + \left(3-t\right)^2}$

$P = \sqrt{3t^2 - 6t + 9} + \sqrt{3t^2 - 12t + 18}$

$P = \sqrt{3}\left(\sqrt{t^2 - 2t + 3} + \sqrt{t^2 - 4t + 6}\right)$

$P = \sqrt{3}\left(\sqrt{\left(t-1\right)^2 + 2} + \sqrt{\left(t-2\right)^2 + 2}\right)$

$P = \sqrt{3}\left(\sqrt{\left(t-1\right)^2 + \left(0-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(t-2\right)^2 + \left(0-\sqrt{2}\right)^2}\right)$

Trong mặt phẳng Oxy xét các điểm $N\left(t;0\right) \in Ox$, $H\left(1;\sqrt{2}\right)$, $K\left(2;\sqrt{2}\right)$

Gọi $H'\left(1;-\sqrt{2}\right)$ là điểm đối xứng của điểm $H\left(1;\sqrt{2}\right)$ qua trục Ox.

Ta có $P = \sqrt{3}\left(NH + NK\right) = \sqrt{3}\left(NH' + NK\right) \geq \sqrt{3}H'K$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H'$, N, K thẳng hàng $\Leftrightarrow N = H'K \cap Ox$.

Đường thẳng $H'K$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{\mathrm{HK}}(1;2\sqrt{2})$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (2\sqrt{2}, -1)$.

$H'K$ lại đi qua $H'\left(1;-\sqrt{2}\right)$ nên có phương trình tổng quát

$2\sqrt{2}\left(x-1\right) - 1\left(y+\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x - y - 3\sqrt{2} = 0$

Tọa độ giao điểm N của đường thẳng $H'K$ và trục Ox là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x - y - 3\sqrt{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy $N\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

Vậy $\min P = \sqrt{3}H'K = \sqrt{3}.\sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}$.

Đạt được khi $N\left(t;0\right) \equiv N\left(\dfrac{3}{2};0\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$

Suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Làm như cách 1, đến đoạn

$$P = \sqrt{3}\left(\sqrt{\left(t-1\right)^2 + 2} + \sqrt{\left(t-2\right)^2 + 2}\right).$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \sqrt{\left(t-1\right)^2 + 2} + \sqrt{\left(t-2\right)^2 + 2}$

Ta có

$f'\left(t\right) = \dfrac{t-1}{\sqrt{\left(t-1\right)^2 + 2}} + \dfrac{t-2}{\sqrt{\left(t-2\right)^2 + 2}}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+2}} = -\frac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+2}} = \frac{-(t-2)}{\sqrt{[-(t-2)]^2+2}} \quad (2.11.1)$$

Xét hàm số $g(u) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+2}}$,

Ta có

$$g'(u) = \left(\sqrt{u^2+2} - u.\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right).\frac{1}{u^2+2} = \frac{2}{\sqrt{(u^2+2)^3}} > 0$$

nên hàm số g đồng biến trên R.

Do đó từ (2.11.1) ta có $g(t-1) = g[-(t-2)] \Leftrightarrow t-1 = -t+2 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$

Ta lập bảng biến thiên của hàm số f

Từ bảng biến thiên suy ra $\min f(t) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3$.

Vậy $\min(MA+MB) = 3\sqrt{3}$ đạt được tại $t = \dfrac{3}{2}$, tức là $M\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$

b). Làm tương tự câu a), ta tính được

$$Q = MA^2 + 2MB^2 = 3t^2 - 6t + 9 + 2\left(3t^2 - 12t + 18\right) = 9t^2 - 30t + 45$$

Biểu thức này là tam thức bậc hai với hệ số $a = 9 > 0$ nên đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = -\dfrac{-30}{2.9} = \dfrac{5}{3}$. Tức là $M\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Nhận xét: nếu không nhớ tính chất về đồ thị bậc hai thì có thể khảo sát hàm số $f(t) = 9t^2 - 30t + 45$ để tìm giá trị nhỏ nhất.

c). Theo câu a) , gọi $M(t;t;t)$. Ta có $\overrightarrow{\mathrm{MA}} = (-t; -t; 3-t)$,

$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = (-t; 3-t; 3-t)$. Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} &= (-t - 2(-t); -t - 2(3-t); 3 - t - 2(3-t)) \\ &= (t; t-6; t-3)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{t^2 + (t-6)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{3t^2 - 18t + 45}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{3(t-3)^2 + 18} \geq \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hay $M(3;3;3)$.

Vậy $\min\left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = 3\sqrt{2}$ đạt được tại $M(3;3;3)$.

Nhận xét: nếu không phân tích được $\left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{3(t-3)^2 + 18}$ thì có thể khảo sát hàm số $f(t) = \sqrt{3t^2 - 18t + 45}$ tìm giá trị nhỏ nhất.

d). Tương tự câu a), ta tính được

$|MA - MB| = \left|\sqrt{3}\left(\sqrt{t^2 - 2t + 3} - \sqrt{t^2 - 4t + 6}\right)\right|$

$|MA - MB| = \left|\sqrt{3}\left(\sqrt{(t-1)^2 + 2} - \sqrt{(t-2)^2 + 2}\right)\right|$

Trong mặt phẳng Oxy xét các điểm :

$N(t;0) \in Ox$, $H\left(1;\sqrt{2}\right)$, $K\left(2;\sqrt{2}\right)$

Khi đó $|MA - MB| = \sqrt{3}\,|NH - NK|$

Nhận thấy H, K nằm cùng phía so với trục Ox.

Suy ra $|MA - MB| = \sqrt{3}\,|NH - NK| \le \sqrt{3}HK$.

Bài toán này vô nghiệm vì $KH//Ox$.

Cách 2: Khảo sát hàm số như cách 2 ở câu a $\rightarrow$ Hàm số không có GTLN.

Ví dụ 2.12. *Cho mặt phẳng* $(P): x + y + z - 4 = 0$. *Tìm điểm* $M \in (P)$ *sao cho*

a) $MA + MB$ *nhỏ nhất, biết* $A(1;0;0)$, $B(1;2;0)$.

b) $|MA - MB|$ *lớn nhất, biết* $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$.

c) $MA^2 + 2MB^2$ *nhỏ nhất, biết* $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$.

d) $MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2$ *nhỏ nhất, biết* $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$.

e) $\left|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right|$ *nhỏ nhất, biết* $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$.

Giải.

a) Cách giải

Xét vị trí tương đối của A, B so với (P)

Đặt $f(x;y;z) = x + y + z - 4$.

Thay tọa độ của A, B vào và tính $f(x_A;y_A;z_A).f(x_B;y_B;z_B)$.

- Nếu $f(x_A;y_A;z_A).f(x_B;y_B;z_B) < 0$ thì A, B ở hai phần không gian khác nhau ngăn cách bởi (P).

- Nếu $f(x_A;y_A;z_A).f(x_B;y_B;z_B) > 0$ thì A, B ở cùng phía so với (P).

Nếu A, B ở khác phía so với (P) thì với $M \in (P)$ tùy ý ta có $MA + MB \ge AB$. Suy ra $\min(MA + MB) = AB$ đạt được khi $M = AB \cap (P)$.

- Viết phương trình đường thẳng AB.

- Tìm giao điểm M của $AB \cap (P)$. (Giải hệ phương trình của AB và (P)

- Kết luận.

+ Nếu A, B ở trong cùng phía so với (P), ta lấy điểm A' đối xứng với A qua (P).

Khi đó $MA' = MA \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B \Rightarrow$ $min\,(MA + MB) = A'B$ đạt được khi $M = A'B \cap (P)$

+ Tính tọa độ A':

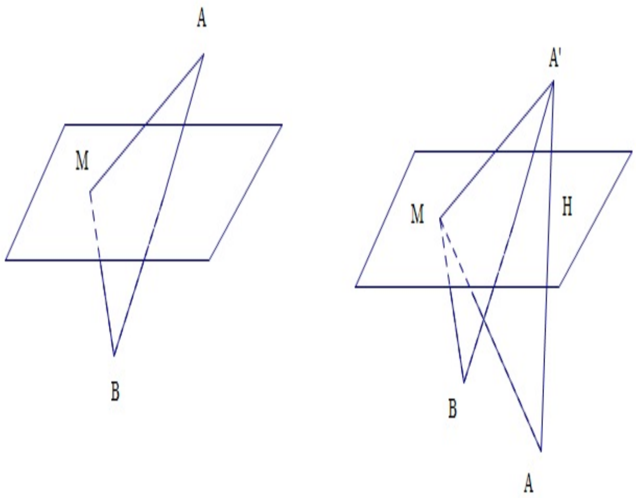
- Viết phương trình đường thẳng d qua A và $(d) \perp (P)$

- Giải hệ $\{(d)\,;(P)\}$ tìm được tọa độ của $H = (d) \cap (P)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

- H là trung điểm của $A'A$. Biết tọa độ của H suy ra tọa độ của A'.

+ Viết phương trình đường thẳng $A'B$.

+ Giải hệ $\{A'B; (P)\}$ tìm được tọa độ của $M = A'B \cap (P)$.



Hình 2.10:

b) Làm ngược lại của hai trường hợp trên câu a.

Nếu A, B ở trong cùng phía so với (P) thì $|MA - MB| \leq AB$

Nếu A, B ở trong cùng phía so với (P), ta lấy điểm A' đối xứng với A qua (P).

Khi đó $MA' = MA \Rightarrow |MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$

Cách làm mỗi trường hợp như câu a. c) Xét điểm I tùy ý, ta có

$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$

$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$. Suy ra

$MA^2 + 2MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + 2\left(\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}\right)$

Suy ra $MA^2 + 2MB^2 = 3\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}\right)$

Suy ra $MA^2 + 2MB^2 = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}\right)$

Giả sử $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IB}$, ta có tọa độ của I là:

$$I\begin{cases} x=\dfrac{x_A+2x_B}{1+2}=\dfrac{1+2.0}{3}=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{y_A+2y_B}{1+2}=\dfrac{2+2.1}{3}=\dfrac{4}{3}\\ z=\dfrac{z_A+2z_B}{1+2}=\dfrac{1+2.2}{3}=\dfrac{5}{3}\end{cases}. \text{ Hay } I\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$$

Vậy, với $I\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$, ta có $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ nên $MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2$.

Do I cố định nên IA^2, IB^2 không đổi.

Vậy MA^2+2MB^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P).

Đường thẳng d qua $I\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$ và vuông góc với (P) nhận vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(1;1;1)$ của (P) làm vecto chỉ phương nên có phương trình

$$(d):\begin{cases} x={}^1\!/_3+t\\ y={}^4\!/_3+t\\ z={}^5\!/_3+t\end{cases}$$

- Tọa độ giao điểm H của $(d)\cap(P)$ là: $H\left(\frac{5}{9};\frac{14}{9};\frac{17}{9}\right)$.

- H là hình chiếu của I trên (P).

Vậy M là hình chiếu của I trên (P) nên $M\equiv H$

Kết luận: MA^2+2MB^2 nhỏ nhất khi $M\left(\frac{5}{9};\frac{14}{9};\frac{17}{9}\right)$

d) Làm tương tự câu c) e) Cần rút gọn tổng $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$ thành một vectơ.

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MH}\right|=MH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của H trên (P). Làm như câu c) Bằng cách phân tích

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=8\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}$

Đến đây chỉ việc tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ rồi làm tiếp theo hướng dẫn trên.

Chú ý: $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}\right)$

Suy ra tọa độ của I là

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{1}{8}(x_A+3x_B+4x_C)\\ y_I=\dfrac{1}{8}(y_A+3y_B+4y_C)\\ z_I=\dfrac{1}{8}(z_A+3z_B+4z_C)\end{cases}$$

Bài tập :

Bài 2.6 Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$ và hai điểm A(2;-1;1), B(1;-1;0). Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ để diện tích của tam giác AMB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2.7 Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ và hai điểm A(2;1;-1), B(-1;2;0).Trong các đường thẳng đi qua B và cắt đường thẳng Δ, viết phương trình đường thẳng sao cho khoảng cách từ A tới nó là lớn nhất? Bé nhất?

Bài 2.8 Cho các đường thẳng

$\Delta_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, $\quad \Delta_2 \colon \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$.

Trong các đường thẳng đi qua A(2;-1;0) và cắt đường thẳng, viết phương trình đường thẳng sao cho khoảng cách giữa và lớn nhất.

Bài 2.9 Trong các mặt phẳng đi qua A(2;-1;0)và song song với đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, viết phương trình mặt phẳng tạo với mặt phẳng (xOy) một góc nhỏ nhất.

Nội dung chủ yếu trong chương này là dùng các bất đẳng thức đại số và khảo sát hàm số là những công cụ rất tốt để giải bài toán cực trị. Nó đưa những bài toán cực tri khó về dạng quen thuộc, bài toán phức tạp về bài toán đơn giản. Phương pháp dùng các bất đẳng thức đại số để đánh giá biểu thức cần khảo sát chính là dạng 3 trong phần mở đầu. Bên cạnh đó dạng 2 cũng nằm trong chương này đó là khảo sát hàm số để giải bài toán cực trị.

Chương 3

Giải toán cực trị hình học bằng các phương pháp khác

Để giải bài toán cực trị khó hơn ta có thể dùng tới hai phương pháp khác đó là: Phương pháp đường mức và phương pháp kết hợp các phương pháp.

3.1 Phương pháp đường mức

[5, 6, 7]

3.1.1 Khái niệm đường mức

Định nghĩa
Cho hàm điểm $f(M)$trên mặt phẳng và số thực h, các đường mức của hàm f là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $f(M) = \lambda$. Nếu ký hiệu các đường mức của f ứng với λ là ℓ_λ thì ta có $\ell_\lambda = \{M|f(M) =\lambda\}$.

3.1.2 Nguyên lý tiếp xúc đường mức

Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm f có biểu diễn là đường cong L chỉ đạt được tại điểm mà ở đó L tiếp xúc với đường mức của f.

Ta diễn tả nguyên lý đó như sau: Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của f đạt tại điểm P thuộc L và $f\,(P) = \lambda$ thì đường cong L không thể có điểm chung với tập hợp $\{M|f(M) \leq \lambda\}$, nghĩa là L không thể xuyên qua đường mức, hay L chỉ tiếp xúc với đường mức ℓ_λ tại điểm P.

3.1.3 Một số dạng đường mức cơ bản

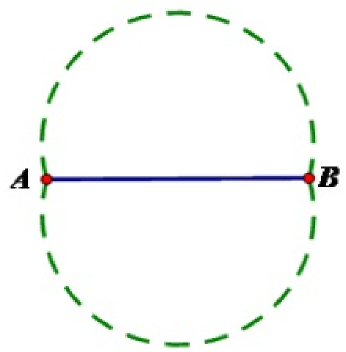
Bài toán 3.1

Cho A và B là những điểm cố định trong mặt phẳng và hàm điểm $f(M)$ AMB. Giả sử cho φ là góc $0 < \varphi < \pi$. Tìm các đường mức ℓ_φ của f.

Giải.

Cố định một góc φ, theo quỹ tích cung chức góc ta có đường mức ℓ_φ của f là 2 cung đối xứng nhau qua AB. Như vậy các đường mức ℓ_φ của f là các cung chứa góc đối xứng nhau qua AB, dựng trên AB.

Bài toán 3.2



Hình 3.1:

Cho O là điểm cố định, hàm f xác định bởi $f(M) = |OM|$ và r là một số thực dương. Tìm đường mức ℓ_r.

Giải.

Theo định nghĩa đường mức $\ell_r = \{M|f(M) = r\} = \{M||OM| = r\}$, như ta đã biết tập hợp này là đường tròn tâm O bán kính r trong mặt phẳng hoặc mặt cầu tâm O bán kính r trong không gian (mặt mức). Như vậy các đường mức ℓ_r của f ứng với r hoặc là các đường tròn đồng tâm O, hoặc là các mặt cầu đồng tâm O.

Bài toán 3.3

Cho A và B là các điểm cố định trong mặt phẳng và $f(M) = MA^2 + MB^2$, r là số thực cho trước.

Tìm các đường mức ℓ_r của f.

Giải.

Theo định nghĩa đường mức $\ell_h = \{M|f(M) = h\} = \left\{M|MA^2{+}MB^2{=}\ h\right\}$. Từ đó,

+ Nếu $r \leq 0$, tập các đường mức là tập rỗng.

+ Nếu h $>\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$, các đường mức là các đường tròn với tâm là trung điểm của AB, bán kính là $R_h = \sqrt{h^2 - \dfrac{AB^2}{2}}$.

Bài toán 3.4

Cho A và B là các điểm cố định trong mặt phẳng và $f\,(M) = MA^2 - MB^2$, r là số thực cho trước. Khi đó họ đường mức ℓ_r của f là những đường thẳng vuông góc với AB.

Bài toán 3.5

Cho A, B thuộc E^2, với $\lambda \in R$, ta ký hiệu
$\ell_\lambda = \left\{M \in E^2|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda\right\}$. Tìm đường mức ℓ_λ.

Giải.

Ký hiệu I là trung điểm AB, ta có với mọi M thuộc: E^2
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}{+}\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}{+}\overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$

Do đó, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda \Leftrightarrow IM^2 = \lambda + \dfrac{1}{4}AB^2$.

- Nếu $\lambda < -\dfrac{1}{4}\mathrm{A}B^2$ thì $\ell_\lambda = \emptyset$ (rỗng).

- Nếu $\lambda = -\dfrac{1}{4}AB^2$ thì $\ell_r = \{I\}$

- Nếu $\lambda > -\dfrac{1}{4}AB^2$ thì ℓ_r là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\lambda + \dfrac{1}{4}AB^2}$. Đặc biệt, ℓ_0 là đường tròn đường kính AB.

Bài toán 3.6

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là những số thực cho trước, $A_1, \mathrm{A}_2, ..., A_n$ là n điểm cố định trên mặt phẳng. với mọi M thuộc E^2 xét hàm điểm $f\,(M) = \alpha_1|MA_1|^2 + \alpha_2|MA_2|^2 + ... + \alpha_n|MA_n|^2$ (hàm vô hướng Leibniz), và với $\lambda \in R$, ký hiệu $\ell_\lambda = \left\{M \in E^2|f(M) = \lambda\right\}$. Ta đi tìm ℓ_λ

Giải.

Gọi O là điểm cố định trên mặt phẳng. Với mọi điểm M ta có:

$f(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM})^2$

$0,7cm = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}}^2 - 2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}}\right).\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \mathrm{OM}^2$

Trường hợp 1: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Lấy điểm G là tâm tỷ cự của hệ điểm $\mathrm{A_1},...,\mathrm{A_n}$ (đó là điểm thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{GA}_i} = \overrightarrow{0}$).

Thay O bởi G ta sẽ có với mọi điểm M: $\mathrm{f(M) = f(G)} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \mathrm{GM}^2$.

Như thế với mọi: $\lambda \in R$ $\mathrm{M} \in \ell_\lambda \Leftrightarrow \mathrm{GM}^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^{-1} (\lambda - \mathrm{f(G)})$

Từ đó,

- Nếu $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^{-1} (\lambda - \mathrm{f(G)}) < 0$ thì $\ell_\lambda = \emptyset$
- Nếu $\mathrm{f(G)} = \lambda$ thì $\ell_\lambda = \{\mathrm{G}\}$
- Nếu $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^{-1} (\lambda - \mathrm{f(G)}) > 0$ thì ℓ_λ là đường tròn tâm O, bán kính R

$\mathrm{R} = \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^{-1} (\lambda - \mathrm{f(G)})}$

Trường hợp 2: $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Khi đó với mọi điểm M ta có:

$\mathrm{f(M) = f(O)} - 2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OA_i}}\right).\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

Ta chú ý rằng với mọi O và O' thuộc mặt phẳng

$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{O'A_i}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}}$

nên suy ra véctơ $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}}$ không phụ thuộc việc chọn O. Như vậy,

- Nếu tồn tại O trong mặt phẳng mà $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}} = \overrightarrow{0}$ và $\mathrm{f(O)} \neq \lambda$ thì $\ell_\lambda = \emptyset$.
- Nếu tồn tại O trong mặt phẳng mà $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}} = \overrightarrow{0}$ và $\mathrm{f(O)} = \lambda$ thì $\ell_\lambda = \mathrm{E}^2$.
- Nếu tồn tại O trong mặt phẳng mà $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}} \neq \overrightarrow{0}$ thì ℓ_λ là đường thẳng trực giao với véc tơ $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA_i}}$.

Bài toán3. 7

Cho A, B phân biệt, $\lambda \in R$, ký hiệu $\ell_\lambda = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{E}^2 - \{\mathrm{B}\} | \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \lambda\right\}$. Ta đi tìm ℓ_λ.

Giải.

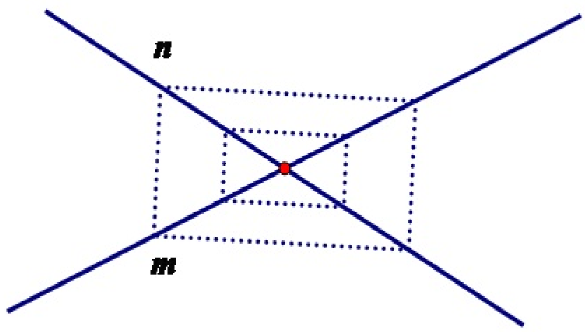
Trước hết, $\ell_1 = \left\{ \mathrm{M} \in \mathrm{E}^2 - \{\mathrm{B}\} | \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = 1 \right\}$ là đường trung trực của AB. Ta giả thiết $\lambda \neq 1$. Gọi O là trung điểm của AB,
$a = \frac{1}{2}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}||, \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{||\overrightarrow{\mathrm{AB}}||}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{e_2} = Q^{O}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{e_1}).$
Như vậy $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ là hệ tọa độ Đề các vuông góc $A(-a, 0), B(a, 0)$. Với mọi $\lambda \neq 1$, M thuộc $\mathrm{E}^2 - \{\mathrm{B}\}$ ta có:
$M \in \ell_\lambda \Leftrightarrow (x+a)^2 + y^2 = \lambda^2[(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2 + \mathrm{y}^2]$
$\Leftrightarrow \mathrm{x}^2 + y^2 + 2a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}x + a^2 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x + a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2.$
Như vậy, với mọi $\lambda \in R - \{1\}$, ℓ_λ là đường tròn tâm $\mathrm{I}_\lambda\left(-a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}; 0\right)$, và bán kính $\mathrm{R} = \left|\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right|$. Bài này có thể đưa về trường hợp đặc biệt của fvới biến đổi $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \lambda \Leftrightarrow \mathrm{MA}^2 - \lambda^2\mathrm{MB}^2 = 0$

Bài toán 3.8

Cho hai đường thẳng m, n cắt nhau và
$f(M) = d(M, m) + d(M, n)$. Tìm đường mức của hàm $f(M)$.

Giải.

Cho r là số thực dương, ta đi tìm $\ell_r = \left\{ \mathrm{M} \in \mathrm{E}^2 | \mathrm{f(M)} = r \right\}$. Từ bài toán quỹ tích các điểm M sao cho tổng khoảng cách từ đó đến 2 cạnh của một góc bằng r không đổi, ta suy ra các đường mức ℓ_r của f là những hình chữ nhật có đường chéo trên các đường thẳng m, n. Hình vẽ biểu diễn:



Hình 3.2:

3.1.4 Nội dung của phương pháp

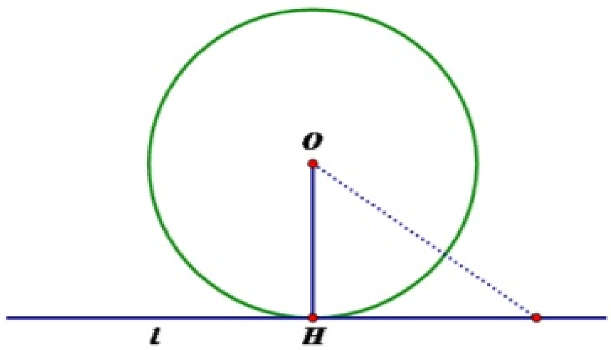
- Tìm được hàm điểm $f(M)$.
- Tìm dạng đường mức của hàm f (thường là các quỹ tích đã biết).
- Xác định điểm tiếp xúc của các đường mức với các đường đã có.

3.1.5 Ví dụ áp dụng.

Ví dụ 3.1. *Trên đường thẳng d hãy tìm một điểm M mà khoảng cách từ đó đến điểm O cho trước là nhỏ nhất.*

Giải.

Đây là bài toán đơn giản, ta muốn giải bằng nguyên tắc đường mức để minh họa: Gọi $f(M) = OM$, cho r là một số thực thì đường mức của f là đường tròn tâm O, bán kính r. Điểm mà tại đó $f(M)$ đạt cực trị là tiếp điểm của d với đường mức. Trên hình vẽ là điểm H.



Hình 3.3:

Ví dụ 3.2. *Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hãy tìm điểm M sao cho tổng* $f(M) = |\mathrm{MA}|^2 + |\mathrm{MB}|^2 + |\mathrm{MC}|^2$ *đạt giá trị.*
a) Nhỏ nhất. b) Lớn nhất.

Giải.

Áp dụng kết quả về các đường mức
$\ell_\lambda = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{E}^2 | \mathrm{f(M)} = \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 = \lambda\right\}$ của f ta có:
$\mathrm{f(M)} = \mathrm{f(G)} + 3\mathrm{GM}^2 = 3\mathrm{GM}^2 + \mathrm{GA}^2 + \mathrm{GB}^2 + \mathrm{GC}^2$ (G là trọng tâm của tam giác).
Như thế với mọi $\lambda \in R$: $\mathrm{M} \in \ell_\lambda \Leftrightarrow \mathrm{GM}^2 = \frac{1}{3}[\lambda - (\mathrm{GA}^2 + \mathrm{GB}^2 + \mathrm{GC}^2)]$.

Từ đó,
- Nếu $\lambda < (\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)$ thì $\ell_\lambda = \emptyset$
- Nếu $\lambda = (\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)$ thì $\ell_\lambda = \{\mathrm{G}\}$
- Nếu $\lambda > (\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)$ thì ℓ_λ là đường tròn đồng tâm G, bán kính R_λ ,$\mathrm{R}_\lambda = \sqrt{\lambda - (\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}$.

Ta suy ra điểm tiếp xúc trong hay ngoài của các đường tròn tâm G, bán kính R_λ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sẽ tương ứng là điểm để $f(M)$ đạt giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất.

Không phải bài nào cũng áp dụng được phương pháp đường mức. Với các quỹ tích đã xác định được thì các bài toán tìm cực trị bằng đường mức cho ta cách giải hay. Để chứng tỏ điều đó, có thể giải thêm các bài toán sau và so sánh với cách giải thông thường

Bài tập

Bài 3.1

Cho đường tròn γ và hai điểm A, B trên nó. Hãy tìm điểm M trên γ sao cho tam giác AMB có:

a) Diện tích lớn nhất

b) Tổng bình phương của các cạnh lớn nhất

c) Chu vi lớn nhất.

Bài 3.2

Trong hình thang $ABCD(AB//CD)$ tìm điểm M sao cho tổng khoảng cách từ đó đến các cạnh hình thang là

a) Nhỏ nhất.

b) Lớn nhất.

Xét bài toán trong trường hợp góc C vuông hoặc tam giác ABC đều.

Bài 3.3

Trong góc Opq cho một tập hợp Ω . Tìm điểm X thuộc tập hợp Ω sao cho tổng khoảng cách từ đó đến cạnh của góc Opq là nhỏ nhất.

Xét các trường hợp đặc biệt: Ω là một điểm; Ω là một đoạn thẳng; Ω là một đa giác; Ω là một hình tròn.

Bài 3.4

Trong mặt phẳng cho đường thẳng d và 2 điểm A, B ở cùng một phía của

d. Hãy tìm trên d một điểm M sao cho từ M nhìn được đoạn thẳng AB dưới một góc lớn nhất.

Bài 3.5

Hãy tìm tam giác ABC có góc A lớn nhất theo đường cao cho trước hạ từ A và trung tuyến cho trước xuất phát từ B.

Bài 3.6

Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hãy tìm điểm M sao cho tổng $h(M) = |\mathrm{MA}|^2 + 2|\mathrm{MB}|^2 - 3|\mathrm{MC}|^2$ đạt giá trị

a) Nhỏ nhất.

b) Lớn nhất.

3.2 Kết hợp các phương pháp.

[11]

3.2.1 Kết hợp phương pháp hình học thuần túy và phương pháp tọa độ.

Bài toán xuất phát:

Chúng ta xét bài toán tổng quát: Cho hai điểm A, B và đường thẳng d. Tìm điểm M trên d sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Có thể xảy ra các trường hợp sau

Trường hợp 1: Đường thẳng AB và đường thẳng d đồng phẳng.

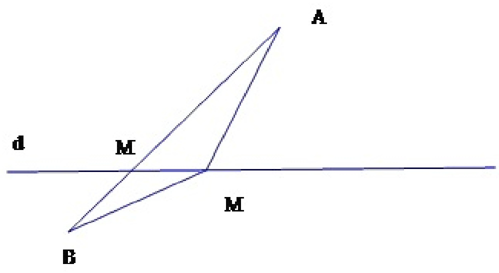
Có hai khả năng

a) A, B nằm khác phía đối với d (Hình 3.4). Với 3 điểm M, A, B ta luôn có: $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} \geq \mathrm{AB}$ nên khi AB cố định, $\mathrm{MA} + \mathrm{MB}$ nhỏ nhất nếu và chỉ nếu M, A, B thẳng hàng. Suy ra $\mathrm{M} = \mathrm{AB} \cap \mathrm{d}$.

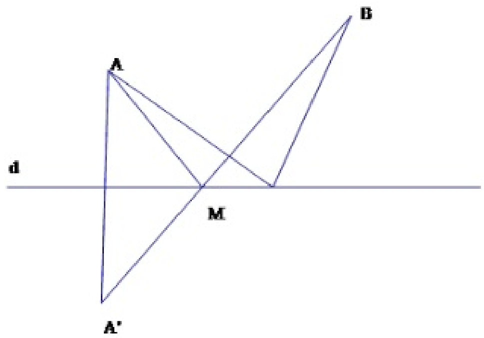
b) A, B nằm về cùng phía đối với d. (Hình 3.5).

Ta dựng A' là điểm đối xứng với A qua d. Vì $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \mathrm{MA'} + \mathrm{MB} \geq \mathrm{A'B}$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M, A', B thẳng hàng. Suy ra $\mathrm{M} = \mathrm{A'B} \cap \mathrm{d}$.

Như vậy trường hợp 1, bài toán đã cho là bài toán phẳng và ta đã giải trọn vẹn bằng phương pháp Hình học thuần túy (dưới dạng bài toán dựng



Hình 3.4:

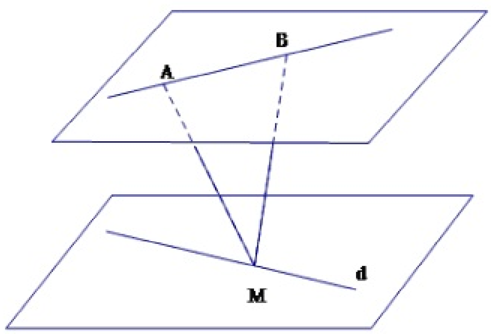


Hình 3.5:

hình, sử dụng phương pháp "3 điểm" và phép đối xứng trục).

Trường hợp sau đây sẽ là bài toán trong không gian 3 chiều.

Trường hợp 2: Đường thẳng AB và d không đồng phẳng.



Hình 3.6:

Ta dùng phương pháp tọa độ chuyển về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của một hàm số. Trong không gian xét hệ tọa độ $Oxyz$, có thể chọn O là điểm A còn điểm đơn vị là B. Như vậy $A(0;0;0), B(1;0;0)$. Giả sử đường thẳng d có phương trình

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Điểm M thuộc đường thẳng d ta coi M có tọa độ phụ thuộc t: $\mathrm{M}(x_0 + ta; y_0 + tb; z_0 + tc)$.

Như thế, $\mathrm{MA} = \mathrm{MO} = \sqrt{(x_0 + ta)^2 + (y_0 + tb)^2 + (z_0 + tc)^2}$

$= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)t^2 + 2\left[x_0a + y_0b + z_0c\right]t + x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2}$

$= \sqrt{(\alpha t + \beta)^2 + \gamma^2}$

$\mathrm{MB} = \sqrt{(x_0 - 1 + ta)^2 + (y_0 + tb)^2 + (z_0 + tc)^2}$

$= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)t^2 + 2\left[(x_0 - 1)a + y_0b + z_0c\right]t + (x_0 - 1)^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2}$

$= \sqrt{(\alpha t + \lambda)^2 + \delta^2}.$

Do đó, $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \sqrt{(\alpha t + \beta)^2 + \gamma^2} + \sqrt{(\alpha t + \lambda)^2 + \delta^2}$

(Chú ý rằng một tam thức bậc hai không âm $at^2 + bt + c$ luôn viết được dưới dạng $(\alpha t + \beta)^2 + \gamma^2$).

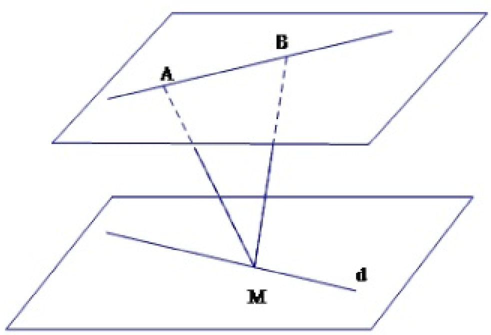
Đặt $\overrightarrow{u} = (\alpha t + \beta; \gamma)$; $\overrightarrow{v} = (-\alpha t - \beta; \delta)$. Khi đó ta có

$f(t) = |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| = \sqrt{(\beta - \lambda)^2 + (\gamma + \delta)^2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\alpha t + \beta}{-\alpha t - \lambda} = \dfrac{\gamma}{\delta} > 0$ tương đương với $t = -\dfrac{\lambda\gamma + \beta\delta}{\alpha(\delta + \gamma)}, \gamma\delta > 0$, từ đó ta tìm được tọa độ của M.

Tiếp theo ta giải Bài toán xuất phát minh họa cho cách xử lý trên.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0), B(3; -1; 4)$ và đường thẳng d có phương trình: $d : \dfrac{x + 1}{1} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{z + 2}{2}$. Tìm điểm M trên d sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.



Hình 3.7:

Vì M thuộc d nên $\mathrm{M}(-1 + t; 1 - t; -2 + 2t)$. Suy ra

$MA = \sqrt{(t-2)^2 + (-t)^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 8}$
$MB = \sqrt{6t^2 - 36t + 56}$

Bài toán trở thành tìm GTNN của hàm số

$$f(t) = \sqrt{6t^2 - 12t + 8} + \sqrt{6t^2 - 36t + 56}$$

Ta viết $f(t) = \sqrt{\left(\sqrt{6}t - \sqrt{6}\right)^2 + 2} + \sqrt{\left(\sqrt{6}t - 3\sqrt{6}\right)^2 + 2}$

Đặt $\overrightarrow{u} = (\sqrt{6}t - \sqrt{6}; \sqrt{2})$, $\overrightarrow{v} = (-\sqrt{6}t + 3\sqrt{6}; \sqrt{2})$.

Khi đó ta có $f(t) = |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|$

Suy ra $f(t) \geq \sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 4\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng hướng hay $\dfrac{\sqrt{6}t - \sqrt{6}}{-\sqrt{6}t + 3\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 0$

Tương đương với $t = 2$, thay vào tọa độ của M ở trên thì $M(1; -1; 2)$.

Chú ý Trong cách giải trên ta sử dụng bất đẳng thức hình học, cách giải này thực hiện được do hệ số của hai biểu thức dưới căn bằng nhau.

Nhận xét

Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và mặt phẳng (α):

Bài toán 3.9 Tìm $M \in (\alpha)$ sao cho $\mathrm{MA} + \mathrm{MB}$ nhỏ nhất

a/) Nếu A và B khác phía so với (α) thì $M = AB \cap (\alpha)$.

b) Nếu A và B cùng phía so với (α) thì $M = AB' \cap (\alpha)$. (B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (α))

Bài toán 3.10 Tìm $N \in (\alpha)$ sao cho $|\mathrm{NA} - \mathrm{NB}|$ lớn nhất

a) Nếu A và B khác phía so với (α) thì $N = AB' \cap (\alpha)$. (B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (α))

b) Nếu A và B cùng phía so với (α) thì $N = AB \cap (\alpha)$.

Bài tập

Bài 3.7 Cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ và hai điểm $A(0; 1; 2), B(-1; 2; 3)$.

Tìm M thuộc d sao cho

a) $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2$ nhỏ nhất

b) $\mathrm{MA} + \mathrm{MB}$ nhỏ nhất

c) $|2\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}|$ nhỏ nhất

d) $|2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}|$ nhỏ nhất.

Bài 3.8 Tìm $M, N \in (\alpha)$ sao cho MA + MB nhỏ nhất với

a) $A(1;1;2), B(2;1;-3), (\alpha): 2x + y - 3z - 5 = 0$

b) $A(-7;4;4), B(-6;2;3), (\alpha): 3x - y - 2z + 19 = 0$

c) $A(1;0;2), B(2;-1;3), (\alpha): x - 2y + z - 4 = 0$

d) $A(1;1;0), B(0;-1;1), (\alpha): x - 2y + z - 4 = 0$.

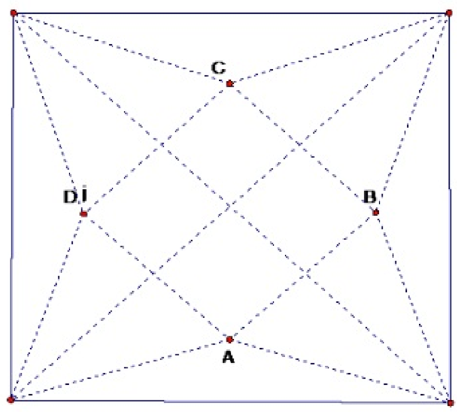
3.2.2 Giải bài toán cực trị kết hợp phương pháp hình học thuần túy và phương pháp đại số.

Bài toán

Cho một tấm bìa hình vuông cạnh a. Cắt theo các cạnh của hình vuông 4 tam giác cân bằng nhau; gấp lên ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Tìm kích thước hình chóp để nó có thể tích lớn nhất.

Giải.

Giả sử hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ dựng được, có cạnh đáy là x. Trải các mặt bên trên mặt phẳng của đáy, ta có hình khai triển của hình chóp như hình vẽ (các đỉnh của hình vuông trùng với đỉnh của hình chóp).



Hình 3.8:

Bây giờ ta xét với giá trị nào của $x\left(0 < x \leq \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, sẽ thoả mãn yêu cầu của đề bài?

Gọi V là thể tích của hình chóp $S.ABCD$, có đường cao là SH ta có: $V = x^2.\dfrac{SH}{3}$

Gọi M là trung điểm của AB, trong tam giác vuông SMH có:
$SH^2 = SM^2 - HM^2$

Dễ thấy $SM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{x}{2}$ và $HM = \dfrac{x}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}x^2.\sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{\text{ax}\sqrt{2}}{2}}$.

Đặt $t = x/\left(a\sqrt{2}/2\right)$ ta được $V = \dfrac{1}{3}x^2.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}.t^2.\sqrt{1-t}\ (0 < t \leq 1)$.
V đạt giá trị lớn nhất khi $t^2.\sqrt{1-t}$ đạt giá trị lớn nhất. Chuyển t^2 vào trong căn thức và áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 4 số $\dfrac{t}{4}$ và số $1-t$, ta tìm được $t = \dfrac{4}{5}$.

Suy ra $x = \dfrac{2}{5}a\sqrt{2}$, thoả mãn các điều kiện đã đặt V đạt giá trị lớn nhất.

Vậy hình chóp có cạnh đáy là $x = \dfrac{2}{5}a\sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu của bài.

3.2.3 Giải bài toán cực trị kết hợp giữa phép đối xứng trục và phương pháp tọa độ.

Bài toán

Trong mặt phẳng Oxy cho $d: x + 2y - 4 = 0$, các điểm $A(1;4), B(6;4)$.
a) Chứng minh rằng : A và B nằm về 1 phía của d. Tìm A' đối xứng với A qua d.
b) Tìm $M \in d$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.
c) Tìm $M \in d$ sao cho $|MA - MB|$ nhỏ nhất.

Giải.

a) $t_A.t_B = (1+8-4)(6+8-4) = 5.10 = 50 > 0 \Rightarrow$ A và B nằm về một phía của d.
Áp dụng cách tìm điểm đối xứng A'
+ $\text{AA}' \perp d$
+ Trung điểm I của AA' thuộc d
Giải hệ phương trình được $A'(-1;0)$.
b) Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = \sqrt{65}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ là $\sqrt{65}$ đạt tại $M = A'B \cap d$.
Viết phương trình $A'B$, Giải hệ suy ra $M\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.
c) Ta có $|MA - MB| \geq AB = 5$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $|MA - MB|$ là 5 đạt tại $N = AB \cap d$, $N(-4;4)$.

Chú ý: Trong khi giải bài toán tìm cực trị hình học, việc áp dụng phần mền hình học động để đoán nhận có ý nghĩa trực quan về hiệu quả. Chẳng hạn ta xét phần mền GSP trong bài toán cực trị.

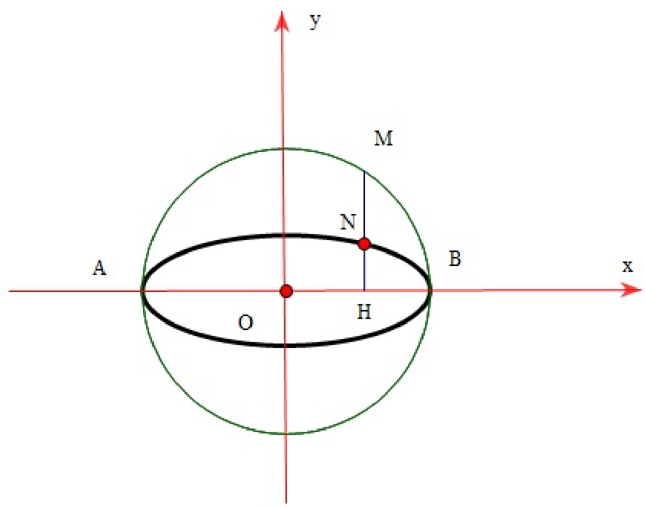
* Dự đoán nhờ mô hình động (GSP)

Bài toán

Cho điểm M di động trên đường tròn tâm O, đường kính AB. Hạ $MH \perp AB$, trên MH' lấy điểm N sao cho $HN = \frac{1}{3}HM$. Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn để ON lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải.

Từ đó suy ra vị trí cần tìm của M bằng cách xác định tọa độ điểm M. (Trung



Hình 3.9:

điểm cung AB)

Sau khi dùng phần mềm GSP sẽ dự đoán được vị trí của điểm M để ON lớn nhất là khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv B$

Vị trí của điểm M để ON nhỏ nhất là M là trung điểm của cung AB.

Ta dùng phương pháp tọa độ để tìm quỹ tích của điểm N như sau : Giả sử $O\,(0; 0)\,, A\,(-R; 0)\,, B\,(0; R)\,, R = \dfrac{AB}{2}$. Gọi $M\,(x_M, y_M)$,vì M thuộc đường tròn tâm O, bán kính R, $x^2 + y^2 = R^2$.

Gọi tọa độ N là $(x_N; y_N)$. Do $HN = \frac{1}{3}HM$ nên ta có

$x_M = x_N; y_M = \frac{1}{3}y_N$.

Thay tọa độ của M vào phương trình đường tròn ta được
$x_N^2 + 9y_N^2 = R^2 \Leftrightarrow \dfrac{x_N^2}{R^2} + \dfrac{y_N^2}{\left(\dfrac{R}{3}\right)^2} = 1.$

Quỹ tích của điểm N là 1 elip với phương trình $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{R}{3}\right)^2} = 1$

Trong chương trình THCS và THPT để giải bài toán quỹ tích (tìm cực trị) chúng ta thường phải đi mò mẫm để tìm được quỹ tích từ đó chúng ta mới tìm được cách giải. Với phần mền GSP việc tìm quỹ tích của bài toán đã trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Nó giúp cho chúng ta có thể tìm quỹ tích một cách chính xác đồng thời hộ trợ rất tốt trong qua trình giảng dạy của giáo viên. Trên đây là một ví dụ.

Kết luận

Bài toán cực trị hình học là một bài toán khó (đương nhiên là hay), việc đưa ra cách giải bài toán này là việc làm cần thiết và phải được cập nhật bổ xung thường xuyên. Luận văn này đã làm được các kết quả sau:
1. Trình bày được ba phương pháp cơ bản để người làm toán lựa chọn khi đứng trước một bài toán cực trị hình học: Phương pháp hình học thuần túy, phương pháp đại số, phương pháp biến hình.
2. Hệ thống và sưu tầm lại được các bài tập áp dụng và trình bày chi tiết các phương pháp trên để giải bài toán cực trị hình học đến kết quả cuối cùng.
3. Sự kết hợp các phương pháp giải và đặc biệt phương pháp đường mức là những suy nghĩ mạnh dạn của tác giả để giải các bài tập cực trị ở mức khó hơn.
Hướng nghiên cứu tiếp theo của luận văn là có thể mở rộng thêm vào các vấn đề : Bất đẳng thức hình học, áp dụng phương pháp vectơ để giải bài toán hình học và một bài toán rộng hơn đó là bài toán tối ưu trong toán học.

Tài liệu tham khảo

[1] Văn Như Cương *Hình học Afin và Hình học Ơclit*, NXB Đại học sư phạm Hà Nội, 2001.

[2] Vũ Đình Hòa *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Trung học phổ thông-Bất đẳng thức hình học*, NXB Giáo dục, 2005.

[3] Nguyễn Văn Hiến *Bất đẳng thức trong tam giác*, NXB Hải Phòng, 2000.

[4] Lê Đình Phi *Hình học sơ cấp*, NXB Khoa học-Kỹ thuật, 1995.

[5] Jean-Marie Monier *Giáo trình Toán-Tập 3, Giải tích*, NXB Giáo dục, 2001.

[6] Jean-Marie Monier *Giáo trình Toán-Tập 4, Giải tích*, NXB Giáo dục, 2001.

[7] Jean-Marie Monier *Giáo trình Toán-Tập 7, Hình học*, NXB Giáo dục, 2001.

[8] V.V Praxolov *Các bài toán hình học phẳng-Tập 1*, Dịch từ tiếng Nga, Hoàng Đức Chính, NXB Hải Phòng, 2009.

[9] V.V Praxolov *Các bài toán hình học phẳng-Tập 2*, Dịch từ tiếng Nga, Hoàng Đức Chính, NXB Hải Phòng, 2009.

[10] Toán 7, 8, 9 *Sách giáo khoa*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2012.

[11] Trang wed *www.tailieu.vn* .

[12] Đặng Huy Ruận *Bài toán cực trị hình học*, Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN.