PHÒNG GD & ĐT QUẬN CẦU GIẤY
**TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY**

**ĐỀ KIỂM TRA CLB VĂN HÓA LỚP 9**
**VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 VÒNG I**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Môn kiểm tra: Toán**
**Ngày thi: 07/09/2023**
**Thời gian làm bài: 120 phút**
*(Không tính thời gian phát đề)*

**Bài 1. (5,0 *điểm*)**

1. Cho $P=\frac{2}{x}-\left(\frac{x^2}{x^2+xy}+\frac{y^2-x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy+y^2}\right).\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ với $x\neq 0, y\neq 0, x\neq -y$.

a) Rút gọn biểu thức $P$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P$ biết $x,y$ thỏa mãn đẳng thức: $x^2+y^2+10=2\left(x-3y\right)$.

2. Tìm tất cả các số nguyên tố $p,q,r$ thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+1)=r^2+1$.

**Bài 2. (4,0 *điểm*)**

1. Giải phương trình $x\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{3-x}{x+1}\right)=2$.

2. Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $xy^2+2xy+x=9y$.

**Bài 3. (4,0 *điểm*)**

1. Cho $x$ và $y$ là các số nguyên dương thỏa mãn $x^3+y$ và $x+y^3$ cùng chia hết cho $x^2+y^2$. Chứng minh rằng $2x+2y$ là số chính phương.

2. Cho các số dương $a,b,c$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}.$$

**Bài 4. (6,0 *điểm*)** Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ $(AB<AC)$. Vẽ đường cao $AH$ $(H\in BC)$. Trên tia đối của tia $BC$ lấy điểm $K$ sao cho $KH=HA$. Qua $K$ kẻ đường thẳng song song với $AH$, cắt đường thẳng $AC$ tại $P$.

1. Chứng minh rằng tam giác $AKC$ đồng dạng với tam giác $BPC$.

2. Gọi $Q$ là trung điểm của $BP$. Chứng minh $\widehat{BQH}=\widehat{BCP}$.

3. Tia $AQ$ cắt $BC$ tại $I$. Chứng minh $\frac{AH}{HB}-\frac{BC}{IB}=1$.

**Bài 5. (1,0 *điểm*)**

1. Xét tập $T=\left\{1,2,3,\ldots,13\right\}$. Lập tất cả các tập con hai phần tử trong $T$ sao cho hiệu của hai phần tử đó là $5$ hoặc $8$.

2. Cho $M$ là tập con của $S=\left\{1,2,3,\ldots,869\right\}$ có tính chất hiệu hai số bất kỳ của $M$ không là $5$ hoặc $8$. Hỏi $M$ có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?

**-----------HẾT-----------**

*Họ và tên thí sinh:* ………………………………………………… *Số báo danh:* ……………………

PHÒNG GD & ĐT QUẬN CẦU GIẤY
**TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

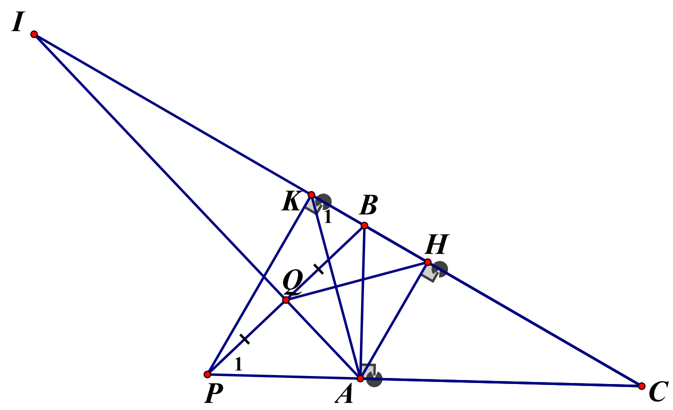
**ĐÁP ÁN**
**ĐỀ KIỂM TRA CLB VĂN HÓA LỚP 9**
**VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 VÒNG I**

**Môn thi: Toán**
**Ngày thi: 07/09/2023**
**Thời gian làm bài: 120 phút**
*(Không tính thời gian phát đề)*

| **BÀI** | **Ý** | **HƯỚNG DẪN CHẤM** | **ĐIỂM** |
|---|---|---|---|
| **1** | | **1. Cho** $P=\frac{2}{x}-\left(\frac{x^2}{x^2+xy}+\frac{y^2-x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy+y^2}\right).\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ **với** $x\neq 0, y\neq 0, x\neq -y$<br>**a) Rút gọn biểu thức** $P$ **.**<br>**b) Tính giá trị của biểu thức** $P$ **biết** $x,y$ **thỏa mãn đẳng thức:**<br>$x^2+y^2+10=2\left(x-3y\right)$ | **1,5**<br><br>**1.0** |
| | **1** | a) $P=\frac{2}{x}-\left(\frac{x^2}{x^2+xy}+\frac{y^2-x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy+y^2}\right).\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$<br>$P=\frac{2}{x}-\frac{x^2y+\left(y^2-x^2\right)\left(x+y\right)-xy^2}{xy\left(x+y\right)}.\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$<br>$P=\frac{2}{x}-\frac{x^2y+xy^2+y^3-x^3-x^2y-xy^2}{xy\left(x+y\right)}.\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ | 1,0 |
| | | $P=\frac{2}{x}-\frac{\left(y-x\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}{xy\left(x+y\right)}.\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$<br>$P=\frac{2}{x}-\frac{y-x}{xy}$ $\quad P=\frac{2y-y+x}{xy}$ $\quad P=\frac{x+y}{xy}$ với $x\neq 0, y\neq 0, x\neq -y$ | 0,5 |

| BÀI | Ý | HƯỚNG DẪN CHẤM | ĐIỂM |
|---|---|---|---|
| | | b)Tính giá trị của biểu thức $P$ biết $x, y$ thỏa mãn đẳng thức:<br>$x^2+y^2+10=2\left(x-3y\right)$<br>Ta có $x^2+y^2+10=2\left(x-3y\right)$<br>$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9=0$<br>$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=0$<br>Vì $\left(x-1\right)^2 \geq 0 \quad \forall x \; ; \left(y+3\right)^2 \geq 0 \quad \forall y$<br>$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$(TMĐK)<br>Tại $x=1, y=-3$ thì $P=\dfrac{1+\left(-3\right)}{1.\left(-3\right)}=\dfrac{2}{3}$<br>Vậy $P=\dfrac{2}{3}$ khi $x^2+y^2+10=2\left(x-3y\right)$ | 0,5<br><br>0,5 |
| | 2 | Tìm tất cả các số nguyên tố $p, q, r$ thỏa mãn $(p^2+1)(q^2+1)=r^2+1$. | **2,5** |
| | | Do vai trò *p* và *q* như nhau nên ta có thể giả sử $p \leq q$.<br>Nếu *p* và *q* cùng lẻ thì vế trái chia hết cho 4. Suy ra $r^2$ chia cho 4 dư 3: vô lý.<br>Do đó có ít nhất một số chẵn trong *p* và *q*. Suy ra $p=2$. | 1,0 |
| | | Khi đó có $5(q^2+1)=r^2+1 \Leftrightarrow 5q^2+4=r^2$<br>$q=2 \Rightarrow r^2=24$ : loại | 0,5 |
| | | $q=3 \Rightarrow r^2=49 \Rightarrow r=7$ : thỏa mãn | 0,5 |
| | | $q>3 \Rightarrow r^2=5q^2+4$ chia hết cho 3 $\Rightarrow r=3 \Rightarrow 9=5q^2+4>49$ : vô lý<br>Vậy $\left[\begin{array}{l} p=2; q=3; r=7 \\ p=3; q=2; r=7 \end{array}\right.$ | 0,5 |
| **2** | **1** | ĐKXĐ: $x \neq -1$<br>$x\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)\left(x+\dfrac{3-x}{x+1}\right)=2$ | **2,0** |

| BÀI | Ý | HƯỚNG DẪN CHẤM | ĐIỂM |
|---|---|---|---|
| | | $C1$<br>$\Leftrightarrow \dfrac{3x-x^2}{x+1}.\dfrac{x^2+x-3-x}{x+1}=2$<br>$\Leftrightarrow \dfrac{\left(3x-x^2\right)\left(x^2+3\right)}{\left(x+1\right)^2}=2$<br>$\Rightarrow 3x^3+9x-x^4-3x^2=2x^2+4x+2$ | 0,5 |
| | | $\Leftrightarrow x^4-3x^3+5x^2-5x+2=0$<br>$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2.\left(x^2-x+2\right)=0$ | 1,0 |
| | | $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^2-x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1(tm)\\VN\end{array}\right.$<br>Vậy $S=\left\{1\right\}$ | 0,5 |
| | | C2 Đặt A = $x\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)$;B =$\left(x+\dfrac{3-x}{x+1}\right)$ . Ta có A+B = 3 ; A.B = 2 và tìm được A = 1; B= 2 hoặc ngược lại và tìm được x = 1 | |
| | | **Tìm các cặp số nguyên dương** $(x;y)$ **thỏa mãn :** $xy^2+2xy+x=9y$ | **2,0** |
| | | $xy^2+2xy+x=32y \Leftrightarrow x(y+1)^2=9y$<br>Do y nguyên dương $\Rightarrow y+1\neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{9y}{(y+1)^2}$ | 0,5 |
| | 2 | Vì $(y,y+1)=1 \Rightarrow (y+1)^2 \in U(9)$ | 0,5 |
| | | Do $(y+1)^2>1$ và là số chính phương nên $(y+1)^2=9$ | 0,5 |
| | | $(y+1)^2=9 \Rightarrow y=2;x=2$<br>Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là: $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ | 0,5 |
| 3 | 1 | **Cho** $x$ **và** $y$ **là các số nguyên dương thỏa mãn** $x^3+y$ **và** $x+y^3$ **cùng chia hết cho** $x^2+y^2$. **Chứng minh rằng** $2x+2y$ **là số chính phương.** | **2,0** |
| | | Đặt $a=(x;y)\Rightarrow$ chứng minh được $a=1$.<br>$\begin{cases}x+y^3 \vdots x^2+y^2\\x^3+y \vdots x^2+y^2\end{cases} \Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-1)\vdots x^2+y^2$ | 0,5 |
| | | Đặt $d=(x-y,x^2+y^2)\Rightarrow \begin{cases}x\equiv y(\operatorname{mod} d)\\x^2+y^2 \vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x^2 \vdots d\\2y^2 \vdots d\end{cases}$ | 0,5 |

| BÀI | Ý | HƯỚNG DẪN CHẤM | ĐIỂM |
|---|---|---|---|
| | | Do $(x;y)=1 \Rightarrow d \in \{1;2\}$.<br>+) Nếu $x=y \Rightarrow x+y^3=x+x^3$ chia hết cho $x^2+y^2=2x^2$. Từ đây tìm được $x=y=1$. | |
| | | Nếu $d=1 \Rightarrow (x-y,x^2+y^2)=1$ khi đó<br>$\Rightarrow x^2+xy+y^2-1 \vdots x^2+y^2 \Rightarrow xy-1 \vdots x^2+y^2$<br>Từ đây chỉ ra $xy-1=0 \Rightarrow x=y=1 \Rightarrow (x-y,x^2+y^2)=(0;2)=2$ loại | 0,5 |
| | | Nếu $d=2 \Rightarrow (\frac{x-y}{2},\frac{x^2+y^2}{2})=1 \Rightarrow x^2+xy+y^2-1 \vdots \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow xy-1 \vdots \frac{x^2+y^2}{2}$<br>Từ đây chỉ ra $xy-1=0 \Rightarrow x=y=1$: thỏa mãn<br>Vậy $x=y=1 \Rightarrow 2x+2y=4$ là số chính phương | 0,5 |
| | 2 | **Cho các số dương** $a,b,c$ **thỏa mãn** $a^2+b^2+c^2=3$. **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:**<br>$$P=\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}.$$ | 2,0 |
| | | $\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1} \ge 1-\frac{a^2}{2a}=\frac{2-a}{2}$ | 0,5 |
| | | $\Rightarrow \frac{1}{2-a} \ge \frac{a^2+1}{2}$ | 0,5 |
| | | Tương tự suy ra $P \ge \frac{a^2+b^2+c^2+3}{2}=3$ | 0,5 |
| | | Suy ra $P_{\min}=3$<br>Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. | 0,5 |
| 4 | 1 |  | |
| | | a) $PK // AH \Rightarrow \Delta CKP \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CK}{CP}=\frac{CA}{CB}$ | 2,0 |
| | | Suy ra $\Delta AKC \sim \Delta BPC\,(c.g.c)(1)$ | 1,0 |

| BÀI | Ý | HƯỚNG DẪN CHẤM | ĐIỂM |
|---|---|---|---|
| | 2 | $\Delta AKH$ vuông cân tại H $\Rightarrow \widehat{K_1} = 45^0$. Từ (1)$\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{P_1} = 45^0 \Rightarrow$ $\Delta BAP$ vuông cân tại A $\Rightarrow BP = AB\sqrt{2}$<br>Chứng minh $\Delta BHA \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$ | 0,5 |
| | | $\Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{\sqrt{2}AB} = \dfrac{AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{\sqrt{2}AB} = \dfrac{\sqrt{2}AB}{2BC}$<br>$\Rightarrow \dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BP}{2BC} \Rightarrow \dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BQ}{BC} \ \left(BP = 2BQ\right)$ | 1,0 |
| | | $\Delta BHQ$ và $\Delta BPC$ có: $\dfrac{BH}{BP} = \dfrac{BQ}{BC}; \widehat{PBC}$ chung $\Rightarrow \Delta BHQ \sim \Delta BPC\left(c.g.c\right)$<br>Suy ra $\widehat{BQH} = \widehat{BCP}$ | 0,5 |
| | 3 | $\Delta BAP$ vuông cân tại A, AQ là trung tuyến nên cũng là phân giác $\Rightarrow AI$ là phân giác ngoài của $\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AC}{AB}$ (2)<br>$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{HB}$ (3) | 0,5 |
| | | Từ (2) và (3) ta có:<br>$\dfrac{IC}{IB} = \dfrac{AH}{HB} \Rightarrow \dfrac{IB+BC}{IB} = \dfrac{AH}{HB} \Rightarrow 1 + \dfrac{BC}{IB} = \dfrac{AH}{HB}$<br>$\Rightarrow \dfrac{AH}{HB} - \dfrac{BC}{IB} = 1\left(dfcm\right)$ | 0,5 |
| 5 | | **1. Xét tập $T = \left\{1, 2, 3, \ldots 13\right\}$. Lập tất cả các tập con hai phần tử trong $T$ sao cho hiệu của hai phần tử đó là $5$ hoặc $8$.**<br>**2. Cho $M$ là tập con của $S = \left\{1, 2, 3, \ldots, 869\right\}$ có tính chất hiệu hai số bất kỳ của $M$ không là $5$ hoặc $8$. Hỏi $M$ có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?** | **1,0** |
| | 1 | Xét $T$ = {1, 2, 3, …, 13} có 13 tập con {1,6} {2,7} {3,8} {4,9} {5,10} {6,11} {7,12} {8,13} {1,9} {2,10} {3,11} {4,12} {5,13} mà hiệu các phần tử của mỗi tập này chỉ là 5 hoặc 8. | 0,25 |
| | 2 | Đồng thời mỗi phần tử của $T$ luôn nằm trong đúng 2 tập con như trên. Nếu $N$ là một tập con của $T$ có ít nhất 7 phần tử thì mỗi phần tử của $N$ sẽ nằm trong đúng 2 tập con trong 13 tập kể trên. Do đó 7 phần tử sẽ nằm trong 14 tập con. Vậy phải có 2 phần tử trong 7 phần tử phải cùng nằm trong 1 tập con trong 13 tập kể trên, khi đó hiệu của 2 phần tử đó là 5 hoặc 8. | 0,25 |
| | | Do đó, nếu $T'$ là 1 tập con của $T$ có tính chất như $M$ thì $T'$ chỉ có nhiều nhất 6 phần tử, dễ thấy $T'$ = {1,2,4,5,8,11} có tính chất là 2 phần tử bất kỳ có hiệu không là 5 hoặc 8 và có 6 phần tử. | 0,25 |
| | | Chú ý 869 chia 13 được thương 66 và dư 11 nên $M$ sẽ có nhiều nhất 6*66 + 6 = 402 phần tử. | 0,25 |