

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 4 câu)

Môn thi: **TOÁN**

Ngày thi: **22/9/2020**

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1 (5,0 điểm). Cho phương trình $x^n = x+1$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, phương trình có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n .

a. Tính giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = n(x_n - 1)$.

b. Tìm số thực k sao cho dãy số $v_n = n^k(x_{n+1} - x_n)$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Câu 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(y - f(x)) = f(f(x)) - 2yf(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$ và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn vuông góc với đoạn thẳng OA và cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Gọi K là giao điểm của đường thẳng BN và CM ; P là giao điểm của đường thẳng AK và BC ; I là trung điểm của BC .

a. Chứng minh tứ giác $MNIP$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b. Gọi H là trực tâm tam giác AMN . Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.

Câu 4 (5,0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên tố m, n sao cho $\frac{7^m + 7^n}{mn}$ là một số nguyên.

————— **HẾT** —————

Câu 5 (7 điểm). Với $a, b \in \mathbb{Z}$, xét hai dãy đa thức $P_0(x) = x + a$, $P_{n+1}(x) = P_n^2(x) + (-1)^n n$ và $Q_0(x) = x + b$, $Q_{n+1}(x) = -Q_n^2(x) + (-1)^n n$ với mọi $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

a. Cho $a \neq b$, $a - b \neq \pm 1$. Hỏi đa thức $f(x) = P'_{2020}(x) \cdot Q'_{2020}(x)$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

b. Tìm điều kiện của a, b để tồn tại n sao cho $P_n(x) + Q_n(x)$ chia hết cho $x + 2$.

Câu 6 (7 điểm). Cho tam giác ABC không cân, đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường thẳng AI cắt đường tròn (I) lần lượt tại M, H và cắt EF tại N (M nằm giữa A và I). Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMD cắt DN tại P . Trên đường thẳng PM lấy Q sao cho DQ vuông góc với EF .

a. Chứng minh rằng PH song song với AD .

b. Chứng minh đường thẳng DA đi qua trung điểm của đoạn thẳng MQ .

Câu 7 (6 điểm). Cho bảng vuông $n \times n$ ô vuông ($n \geq 2$) với các ô vuông được tô bằng 2 màu đen hoặc trắng (mỗi ô chỉ tô bởi một màu). Biết rằng mỗi bước, ta chỉ thay đổi màu của toàn bộ các ô trong một hàng hoặc một cột (ô trắng thành đen và ô đen thành trắng).

a. Giả sử trong bảng có đúng 1 ô được tô đen. Hỏi sau một số bước đổi màu các hàng hoặc cột nào đó thì bảng toàn ô trắng được hay không?

b. Có tất cả bao nhiêu cấu hình ban đầu sao cho sau hữu hạn bước đổi màu hàng hoặc cột thì bảng gồm toàn ô trắng?

Ví dụ: Cấu hình H1 là 1 cấu hình thỏa mãn với $n = 3$.

