

Bài 1. (5 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 4, u_2 = 4058 \text{ và } u_{n+2} = 4u_{n+1} + 4042u_n \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Tìm tất cả các số thực dương a sao cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{u_n}{a^n}$ với $n = 1, 2, 3, \dots$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Chứng minh rằng $(u_{2020} - 385) : 2021$.

Bài 2. (5 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^2 - x^3$ xác định trên \mathbb{R} .

a) Tìm điều kiện của x, y sao cho $f(x) + f(y) = f(x + y)$.

b) Xét các số thực không âm a, b, c, d thay đổi thỏa mãn $a + b + c + d = \frac{3}{4}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M = f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$.

Bài 3. (5 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2020x^2 + 2019x - 2018$ có đồ thị (C) .

a) Giả sử đường thẳng (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là a, b, c .
Tính $a + b + c$.

b) Xét 4041 điểm thuộc (C) có hoành độ lần lượt là $-2020, -2019, \dots, 0, \dots, 2019, 2020$.
Hỏi có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong 4041 điểm trên?

Bài 4. (5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O) và có D, E, F lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên cạnh đối diện. Gọi X, Y lần lượt là tâm của các đường tròn (DEF) và (BOC) . Gọi U, V là các giao điểm của hai đường tròn (DEF) và (BOC) .

a) Chứng minh rằng các điểm A, X, Y thẳng hàng khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

b) Giả sử $\widehat{BAC} < 60^\circ$, phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC cắt XY tại Z . Chứng minh rằng các đường tròn $(AEF), (ABC), (ZUV)$ có đúng hai điểm chung.

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 1 trang)

Ngày thi thứ hai: 21/10/2020

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 5. (5 điểm)

Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2020) \neq 0$ và

$$f(x + f(y)) = f(x) + \frac{x}{2}f(2y) + f(f(y)) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

- Chứng minh rằng tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho $f(2x) = c \cdot f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Tìm tất cả giá trị có thể có của c .

Bài 6. (5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O) , có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Tia AI cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại X, Y . Đường tròn tâm M đường kính XY cắt BC tại các điểm S, T .

- Chứng minh rằng tiếp tuyến tại X, Y của đường tròn (DXY) cắt nhau trên đường cao qua đỉnh A của tam giác ABC và $AX \cdot AY = AS \cdot AT$.
- Chứng minh rằng đường tròn (MST) tiếp xúc với 2 đường tròn (O) và (I) .

Bài 7. (5 điểm)

Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\varphi(n)$ (hàm Euler) là lũy thừa của 2.

- Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố lẻ (nếu có) của n đều có dạng $2^{2^k} + 1$ với $k \in \mathbb{N}$.
- Tìm n biết rằng n là số hoàn hảo.
(số hoàn hảo là số bằng với tổng các ước nguyên dương nhỏ hơn nó)

Bài 8. (5 điểm)

Bàn cờ vua "kỳ quặc" cũng là một hình vuông 8×8 nhưng vị trí các ô đen trắng không giống bàn cờ vua thông thường mà được sắp xếp thỏa mãn điều kiện: số ô đen trong mỗi cột bằng nhau và số ô đen trong mỗi hàng đôi một khác nhau.

- Hỏi số ô đen và số ô trắng trong bàn cờ vua "kỳ quặc" có bằng nhau hay không?
- Hỏi trong bàn cờ vua "kỳ quặc" có thể có tối đa bao nhiêu cặp ô có chung cạnh và khác màu?

HẾT