SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KHÁNH HÒA	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN (Vòng 1)** **Ngày thi: 21/9/2022** *Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 (5,00 điểm):

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^{2023}}{2023}, \quad n = 1,2,3,... \end{cases}$

a) Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

b) Đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^{2022}}{x_{i+1}}, \quad n = 1,2,3....$ Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} [y_n]$

trong đó kí hiệu $[x]$ để chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá số thực x.

Câu 2 (5,00 điểm):

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tăng ngặt thỏa mãn $f(2n) = f(n) + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và nếu $f(n)$ là số chính phương thì n là số chính phương.

Câu 3 (5,00 điểm):

Cho số nguyên dương n với $n \geq 2023$ và tập hợp $X = \{1;2;3;...;n\}$. Với mỗi $k = 1,2,...,n$, đặt $F_k = \{A \mid A \subset X, \ |A| = k\}$ (kí hiệu $|A|$ để chỉ số phần tử của tập hợp hữu hạn A).

a) Có bao nhiêu tập hợp $A \in F_k$ mà A luôn chứa số 1.

b) Có bao nhiêu tập hợp $B \in F_{10}$ mà các phần tử của B không vượt quá 2022.

c) Mỗi tập hợp $A \in F_k$ đều có phần tử lớn nhất, kí hiệu $m(A)$. Gọi $T(n,k) = \dfrac{\sum\limits_{A\in F_k} m(A)}{|F_k|}$ là trung bình cộng của tất cả các phần tử $m(A)$, với mọi $A \in F_k$. Tính $T(n,k)$ theo n và k.

Câu 4 (5,00 điểm):

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (I). Gọi M là điểm thuộc cạnh AB ($M \neq A, M \neq B$). Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BMC cắt AC tại N ($N \neq C$). Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt BC tại L. Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BML và tam giác CNL cắt nhau tại điểm thứ hai là X ($X \neq L$).

a) Chứng minh A, L, X thẳng hàng và OX là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

b) Chứng minh OX song song với AI.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI THPT**
KHÁNH HÒA	**CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN (Vòng 2)**
	Ngày thi: 22/9/2022
	Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 5 (6,00 điểm):

a) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $x.P(x-1)=(x-4).P(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Cho đa thức $P(x)$ bậc $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ với hệ số thực, hệ số cao nhất là 1 và có n nghiệm thực x_i thỏa $|x_i|<2022, \forall i=\overline{1;n}$. Chứng minh $P(2022)<\dfrac{4044}{n}P'(2022)$.

Câu 6 (7,00 điểm):

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm $(x;y)$ sao cho x^2+3y và y^2+3x đều là các số chính phương.

2. Số nguyên dương n được gọi là "*hợp lý*" nếu mọi số chính phương khi chia cho n đều được số dư là số chính phương.

a) Chứng minh $n=16$ là số *"hợp lý"*.

b) Chứng minh rằng mọi số *"hợp lý"* đều không vượt quá 500.

Câu 7 (7,00 điểm):

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Hai điểm E, F lần lượt thuộc cạnh CA, AB $\left(E,F\notin\{A,B,C\}\right)$ sao cho EF song song với BC. Gọi D là điểm đối xứng với A qua EF.

a) Đường thẳng đi qua A song song với BC cắt đường tròn (O) tại H $(H\neq A)$. Chứng minh ba đường thẳng DH, BE, CF đồng quy.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CF. Đường tròn đi qua E, F tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm L $(L\neq A)$. Chứng minh ba điểm L, D, I thẳng hàng.