

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
DỰ THI QUỐC GIA NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: TOÁN
Thời gian: 180 phút, không kể thời gian phát đề
Ngày thi thứ nhất

Câu 1: (5 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \sqrt{x_n^2 + 4x_n} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

a). Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

b). Tính $\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$.

Câu 2: (5 điểm). Xét hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ đơn ánh và thỏa mãn

$$f(x + 2y + f(x + y)) = f(2x) + f(3y) \text{ với mọi } x, y > 0.$$

a) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn đề bài.

b) Giả sử $f(4\sin^4 x)f(4\cos^4 x) \geq f^2(1)$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2023)$.

Câu 3: (5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O) . Một đường tròn (O') thay đổi, luôn đi qua B, C và cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D, E . Gọi D', E' lần lượt là các điểm đối xứng với D, E qua trung điểm các cạnh AB, AC .

a) Chứng minh rằng trung điểm $D'E'$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

b) Trên cung nhỏ và cung lớn BC của (O) , lần lượt lấy các điểm R, S sao cho $(DER), (DES)$ tiếp xúc trong với (O) . Phân giác trong của các góc BRC, BSC cắt nhau ở K . Chứng minh rằng đường tròn (DEK) luôn tiếp xúc với đường thẳng BC .

Câu 4: (5 điểm). Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho S là tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $x, y \in \mathbb{N}$;

ii) $0 \leq x \leq y \leq 2023$.

a) Tính số phần tử của S .

b) Hỏi có bao nhiêu tập $A (A \subset S)$ gồm 2023 phần tử của S sao cho A không chứa hai điểm nào có cùng hoành độ hoặc cùng tung độ?

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi 1: Chữ ký của cán bộ coi thi 2:

Bài 5. (6,0 điểm) Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6. (7,0 điểm) Cho số nguyên $n \geq 1$. Tìm số lượng lớn nhất các cặp gồm 2 phần tử phân biệt của tập $\{1; 2; \dots; n\}$ sao cho tổng của các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá n .

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) . Các tiếp tuyến với đường tròn của tam giác ABC tại điểm B và C gặp nhau tại P . Đường tròn tâm P và bán kính $PB = PC$ cắt phân giác trong của góc \widehat{BAC} của tam giác ABC tại điểm S (S thuộc miền trong tam giác ABC), và OS cắt BC tại D . Chân đường vuông góc của S trên AC và AB lần lượt là E và F . Gọi G là giao điểm của EF, BC .

a) Chứng minh rằng: $\frac{GB}{GC} = \left(\frac{SB}{SC}\right)^2$.

b) Chứng minh rằng: AD, BE và CF đồng qui.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng MTCT và tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký giám thị 1:..... Chữ ký giám thị 2:.....