

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Môn: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 29/8/2023

Câu 1 (4 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định bởi
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy số (a_n) là dãy số tăng.

b) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{4^k}{a_k a_{k+1}}$. Chứng minh rằng dãy số (b_n) có

giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (4 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$x^2 f(x) + y f(y^2) = f(x+y) f(x^2 - xy + y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3 (4 điểm). Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Điểm P bất kỳ nằm trong tam giác ABC sao cho $AP \perp BC$. Hạ $PE \perp AB, PF \perp AC (E \in AB, F \in AC)$. Gọi L là giao điểm của BF và CE , Q là giao điểm của AL và BC và X là giao điểm của EF và BC .

a) Chứng minh rằng đường tròn (QEF) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh rằng $KL \perp AX$.

Câu 4 (4 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $3^m - 8^n = 2mn + 1$.

Câu 5 (4 điểm). Cho tập hợp $X = \{1, 2, \dots, 49\}$. Tô màu ít nhất 24 phần tử của X với điều kiện sau: nếu $a, b \in X$ (không nhất thiết phân biệt) được tô màu thì $a + b$ cũng được tô màu, miễn là $a + b \in X$. Gọi S là tổng tất cả các phần tử không được tô màu của tập X .

a) Chứng minh rằng $S \leq 625$.

b) Chỉ ra tất cả các cách tô màu sao cho $S = 625$.

-----HẾT-----

Họ tên thí sinh:

Số báo danh: Phòng thi: