

Câu 1. (4 điểm)

a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

b) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

b) Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$.

Câu 3: (4 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì :

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

b) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3.

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 4. (6 điểm)

Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông AMCD, BMEF.

a) Chứng minh rằng: $AE \perp BC$.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB.

Câu 5. (2 điểm)

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$$

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm - SBD:.....

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4 điểm)	a 2đ	$x(x+2)(x^2+2x+2)+1 = (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$ $= (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x)+1$ $= (x^2+2x+1)^2$ $= (x+1)^4$	0.5 0.5 0.5 0.5
	b 2đ	<p>Ta có : $\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$</p> $\Rightarrow B = \dots = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$	1 1
Câu 2 (4 điểm)	a 2đ	<p>Ta có $a+b+c=0$ thì</p> $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$ <p>(vì $a+b+c=0$ nên $a+b=-c$)</p> <p>Theo giả thiết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$.</p> $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$ $= xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$	0.5 0.5 0.5 0.5
	b 2đ	$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - xy + \frac{y^2}{4}) + (z^2 - 2z + 1) + (\frac{3}{4}y^2 - 3y + 3) = 0$ $\Leftrightarrow (x - \frac{y}{2})^2 + (z - 1)^2 + \frac{3}{4}(y - 2)^2 = 0$ <p>Có các giá trị x,y,z là: (1;2;1)</p>	1 0,5 0.5
Câu 3 (4 điểm)	a 2đ	<p>a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì</p> $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ <p>là số chính phương.</p> <p>Ta có $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$</p> $= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$ <p>Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) thì</p> $A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$ <p>Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}, 5xy \in \mathbb{Z}, 5y^2 \in \mathbb{Z}$</p> $\Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z}$	0.5 0.5 0.5 0.5

		Vậy A là số chính phương.	
	b 2đ	<p>Để thấy $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3</p> <p>Xét hiệu $A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})$ $= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016})$ chia hết cho 3</p> <p>Mà $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3.</p> <p>Do vậy A chia hết cho 3.</p>	0.5 0.5 0.5 0.5
			0,5
Câu 4 (6 điểm)	a 2đ	$\Delta AME = \Delta CMB$ (c-g-c) $\Rightarrow \angle EAM = \angle BCM$ Mà $\angle BCM + \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EAM + \angle MBC = 90^\circ$ $\Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$ Vậy $AE \perp BC$	1 0,5 0,5
	b 2đ	Gọi O là giao điểm của AC và BD. ΔAHC vuông tại H có HO là đường trung tuyến $\Rightarrow HO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DM$ $\Rightarrow \Delta DHM$ vuông tại H $\Rightarrow \angle DHM = 90^\circ$ Chứng minh tương tự ta có: $\angle MHF = 90^\circ$ Suy ra: $\angle DHM + \angle MHF = 180^\circ$ Vậy ba điểm D, H, F thẳng hàng.	0,5 0,5 0,5 0,5
	c 1,5đ	Gọi I là giao điểm của AC và DF. Ta có: $\angle DMF = 90^\circ \Rightarrow MF \perp DM$ mà $IO \perp DM \Rightarrow IO \parallel MF$ Vì O là trung điểm của DM nên I là trung điểm của DF Kẻ $IK \perp AB$ ($K \in AB$) $\Rightarrow IK$ là đường trung bình của hình thang ABFD $\Rightarrow IK = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2}$ (không đổi) Do A, B cố định nên K cố định, mà IK không đổi nên I cố định. Vậy đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB	0,5 0,5 0,5

Câu 5 (2 điểm)	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$	0,5
	$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$	0,5
	Tương tự: $\frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}$	0,5
	$\frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$ $= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$ $= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$	0,5

Lưu ý .Học sinh có cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa.