UBND HUYỆN LANG CHÁNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN NĂM HỌC: 2022 - 2023

Môn:Toán

Thời gian: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

(Đề thi có 01 trang; gồm 05 câu)

Bài 1.*(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức:

$A=\left(\frac{2x^3+x^2-x}{x^3-1}-\frac{x^2+x}{x^2-1}\right):\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}+\frac{x}{2x-1}$. với $x\neq\pm1, x\neq\frac{1}{2}$

2. Cho ba số x,y,z khác 0 và thoả mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị biểu thức $P=\left(x^{2023}+y^{2023}\right)\left(y^{2023}+z^{2023}\right)\left(z^{2023}+x^{2023}\right)$

Bài 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2+\frac{9x^2}{(x-3)^2}=40$

2. Tìm x và y thỏa mãn đồng thời cả hai hệ thức sau:

$x^3+y^3=9$ (1) và $x^2+2y^2=x+4y$ (2)

Bài 3. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^2+y^2=3-xy$.

2. Cho x,y là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $3\left(x^2-1\right)=2\left(y^2-1\right)$

Chứng minh rằng x^2-y^2 chia hết cho 40

Bài 4. *(6,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia *Bx* vuông góc với AB tại B. Trên tia Bx lấy điểm C (C khác B). Kẻ BH vuông góc với AC (điểm H thuộc AC). Gọi M là trung điểm của AB.

1. Chứng minh rằng: $HA.HC=HB^2$

2. Kẻ HD vuông góc với BC (D thuộc BC). Gọi I là giao điểm của AD và BH. Chứng minh rằng ba điểm C, I,M thẳng hàng.

3. Giả sử AB cố định, điểm C thay đổi trên tia Bx. Biết $\frac{MI}{IC}.\frac{CH}{HA}.\frac{AB}{BM}=1$

Tìm vị trí của điểm C trên tia Bx sao cho diện tích tam giác ABI lớn nhất.

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Cho các số a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3$

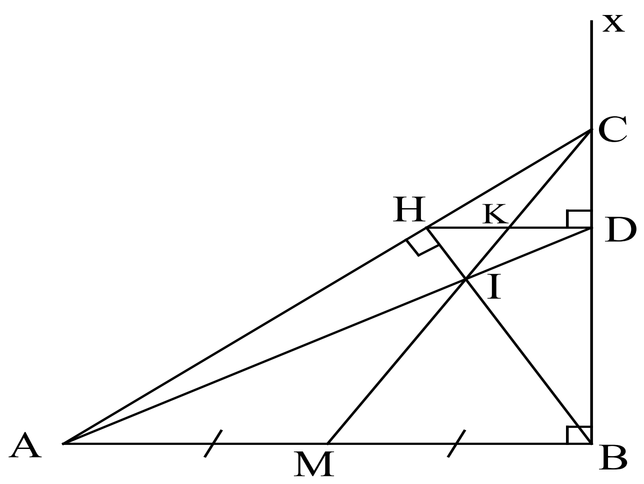
HẾT!

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: .... SBD...........

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
1 2đ	1. - Với $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$, biểu thức A xác định nên ta có : $A = \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}\right) : \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \left(\frac{x\left(2x^2 + x - 1\right)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}\right) . \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x\left(x^2 - 1\right)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x(x+1)}{(x^2+x+1)} - \frac{x}{(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ Vậy : $A = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ (với $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$)	 0,5 0,5 0,5 0,5
2đ	2. Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow \left(yz + xz + xy\right)\left(x + y + z\right) = xyz$ $\Leftrightarrow xyz + x^2z + x^2y + y^2z + xyz + y^2x + z^2y + z^2x + xyz = xyz$ $\Leftrightarrow x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + 2xyz = 0$ $\Leftrightarrow \left(x + y\right)\left(x + z\right)\left(y + z\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2023} = -y^{2023} \\ y^{2023} = -z^{2023} \\ z^{2023} = -x^{2023} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2023} + y^{2023} = 0 \\ y^{2023} + z^{2023} = 0 \\ z^{2023} + x^{2023} = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow P = \left(x^{2023} + y^{2023}\right)\left(y^{2023} + z^{2023}\right)\left(z^{2023} + x^{2023}\right) = 0$.	0,5 0,5 0,5 0,5
2	1. ĐKXĐ: x ≠ 3. $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 - \frac{6x^2}{x-3} - 40 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6.\frac{x^2}{x-3} - 40 = 0$ Đặt $t = \frac{x^2}{x-3}$ ta có phương trình $t^2 - 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow (t - 10)(t + 4) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -4 \end{array}\right.$ $t = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 = 0$ vô nghiệm;	0,25 0,5 0,25 0,25 0,5

	$t=-4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x-3}=-4 \Leftrightarrow x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+6)=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \end{array}\right.$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-6;2\}$	0,25
	2. Nhân hai vế phương trình (2) với 3, ta được $3x^2+6y^2=3x+12y$ (3). Trừ hai phương trình (1) và (3) vế theo vế, ta được: $(x-1)^3=(2-y)^3 \Leftrightarrow y=3-x$. Thế $y=3-x$ vào (3), ta được $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$. Với $x=1$ thì $y=2$. Với $x=2$ thì $y=1$. Vậy (x; y) = (2; 1), (1; 2).	0,5 0,5 0,5 0,5
3	1. Ta có: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow 3-xy \ge 2xy \Leftrightarrow xy \le 1$ Mà $x, y \in Z+ \Rightarrow 0 < xy \le 1 \Rightarrow xy=1 \Rightarrow x=y=1$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là (x, y) = (1;1)	0,75 0,75 0,5
	2. Ta có $3\left(x^2-1\right)=2\left(y^2-1\right) \Leftrightarrow 3x^2-2y^2=1(*)$ Th1: Trước hết ta chứng minh $x^2-y^2 \vdots 8$ Ta có : $\begin{cases} x^2 \equiv 0;1;4 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 0;1;4 \pmod 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0;3;4 \pmod 8 \\ 2y^2 \equiv 0;2 \pmod 8 \end{cases} \Rightarrow 3x^2-2y^2 \equiv 0;6;3;1;4;2 \pmod 8$ Do đó từ (*) ta có : $3x^2-2y^2 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 8$ $\Leftrightarrow x^2-y^2 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow \left(x^2-y^2\right) \vdots 8 (1)$ Th2: Chứng minh $x^2-y^2 \vdots 5$ Ta có $\begin{cases} x^2 \equiv 0;1;4 \pmod 5 \\ y^2 \equiv 0;1;4 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0;3;2 \pmod 5 \\ 2y^2 \equiv 0;2;3 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow 3x^2-2y^2 \equiv 0;3;2;1;4 \pmod 5$ Do đó từ $(*)$ ta có : $3x^2-2y^2 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x^2-y^2 \equiv 1 \pmod 5$ $\Leftrightarrow x^2-y^2 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow x^2-y^2 \vdots 5 (2)$ Từ (1) và (2) kết hợp với $(5;8)=1 \Rightarrow x^2-y^2 \vdots 40 \Rightarrow dfcm$	0,5 0,5 0,5 0,5
4		0,5 (bao gồm vẽ hình và ghi GT, KL)
	1. 1.Xét ΔAHB và ΔBHC có: +) $\widehat{AHB}=\widehat{BHC}$(do $BH \perp AC$) +) $\widehat{HAB}=\widehat{HBC}$ (cùng phụ với $\widehat{HBA}$)	1,5

	$\Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta BHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HA}{HB}=\frac{HB}{HC}\Rightarrow HA.HC=HB^2$	
	2. Giả sử đường thẳng CI cắt HD và AB lần lượt tại các điểm K và M' *Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: CAM', $CM'B$ với HD // AB, ta có: $\frac{HK}{AM'}=\frac{CK}{CM'}, \frac{KD}{BM'}=\frac{CK}{CM'}\Rightarrow \frac{HK}{AM'}=\frac{KD}{BM'}$ (1) *Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: IAM’, IM’B với HD // AB, ta có: $\frac{HK}{M'B}=\frac{KI}{IM'}, \frac{KD}{AM'}=\frac{KI}{IM'}\Rightarrow \frac{HK}{M'B}=\frac{KD}{AM'}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{HK}{AM'}:\frac{HK}{M'B}=\frac{KD}{M'B}:\frac{KD}{AM'}\Rightarrow \frac{M'B}{AM'}=\frac{AM'}{M'B}\Rightarrow AM'^2=M'B^2\Rightarrow AM'=BM'$ $\Rightarrow M'$ là trung điểm của AB. Mà M cũng là trung điểm của AB (gt) $\Rightarrow$ M' trùng với M. Vậy 3 điểm C, I, M thẳng hàng	0,5 0,5 0,5 0,5
	3. Ta có: $\frac{MI}{IC}.\frac{CH}{HA}.\frac{AB}{BM}=1\Rightarrow \frac{MI}{IC}=\frac{HA.BM}{CH.AB}=\frac{HA.AB}{2CH.AB}=\frac{HA}{2CH}$ $=\frac{HA.CH}{2CH^2}=\frac{HB^2}{2CH^2}$ (1) (Vì : $BM=\frac{AB}{2}$; Theo câu a: $HA.CH=HB^2$) Mà $\Delta AHB \sim \Delta BHC$ nên $\frac{HB}{HC}=\frac{AB}{BC}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MI}{IC}=\frac{AB^2}{2BC^2}=\frac{a^2}{2x^2}\Rightarrow \frac{MI}{MC}=\frac{a^2}{a^2+2x^2}$ Suy ra $\frac{S_{IAB}}{S_{CAB}}=\frac{IM}{MC}=\frac{a^2}{a^2+2x^2}$. Mà $S_{CAB}=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{ax}{2}$ $\Rightarrow S_{IAB}=\frac{1}{2}.\frac{a^3x}{a^2+2x^2}=\frac{a^3}{2.\left(\frac{a^2}{x}+2x\right)}\le \frac{a^3}{4\sqrt{\frac{a^2}{x}.2x}}=\frac{a^3}{4\sqrt{2}a}=\frac{a^2}{4\sqrt{2}}$ Dấu „=” xảy ra khi: $\frac{a^2}{x}=2x\Leftrightarrow x^2=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ Vậy Khi C trên tia Bx sao cho $BC=\frac{a}{\sqrt{2}}$ thì giá trị lớn nhất của $S_{IAB}=\frac{a^2}{4\sqrt{2}}$	0,5 0,5 0,5 0,5
5	Với các số a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Ta có : $*)\left(a-1\right)^3=a^3-3a^2+3a-1=a\left(a^2-3a+\frac{9}{4}\right)+\frac{3a}{4}-1=a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3a}{4}-1\ge \frac{3a}{4}-1(1)$ $*)\left(b-1\right)^3=b^3-3b^2+3b-1=b\left(b^2-3b+\frac{9}{4}\right)+\frac{3b}{4}-1=b\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3b}{4}-1\ge \frac{3b}{4}-1(2)$ $*)\left(c-1\right)^3=c^3-3c^2+3c-1=c\left(c^2-3c+\frac{9}{4}\right)+\frac{3c}{4}-1=c\left(c-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3c}{4}-1\ge \frac{3c}{4}-1(3)$	0,5 0,25

	Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được : $(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3 \ge \frac{3}{4}(a+b+c)-3=\frac{3}{4}.3-4=-\frac{3}{4} \Rightarrow P \ge \frac{-3}{4}$	0,5
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2=0 \\ b\left(b-\frac{3}{2}\right)^2=0 \\ c\left(c-\frac{3}{2}\right)^2=0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a;b;c)=\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c)=\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c)=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right) \end{array}\right.$	0,5
	Vậy $Min\,P=-\frac{3}{4}$ khi $(a;b;c)=\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và các hoán vị của nó	0,25

Lưu ý: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa.