SỞ GD&ĐT NGHỆ AN
CỤM TRƯỜNG THPT THANH CHƯƠNG

ĐỀ THI KSCL ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 11- LẦN 2
NĂM HỌC 2019-2020
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (6,0 điểm).

a. Giải phương trình $\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=4$

b. Giải phương trình $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x\ (x\in\mathbb{R})$.

Câu 2. (4,0 điểm).

a. Cho đa giác đều có 60 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 cạnh là đường chéo của đa giác đó?

b. Cho khai triển $(x+1)^n+(x^2+1)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4n}x^{4n}$, với n là số tự nhiên, $n\ge 1$. Tìm n biết a_1,a_2,a_3 lập thành một cấp số cộng.

Câu 3. (2,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1=2\\ u_1+u_2+...+u_n=n^2.u_n\end{cases}, n\in\mathbb{N}, n\ge 2$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n và tính tổng $S=u_1+u_2+...+u_{2020}$.

Câu 4. (2,0 điểm). Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(2;5)$ và H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BC. Gọi I, $J(2;-1)$ và $K(6;1)$ lần lượt là tâm đường nội tiếp của tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh I là trực tâm của tam giác AJK và tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Câu 5. (4,0 điểm). Cho tứ diện đều $ABCD$ có trọng tâm G, cạnh $AB=a$; O là tâm của tam giác BCD và M là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (BCD). Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các mặt phẳng $(ACD),(ABD),(ABC)$.

a. Mặt phẳng (P) bất kỳ đi qua trọng tâm G, cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$.

b. Chứng minh đường thẳng GM luôn đi qua trọng tâm E của tam giác HKL.

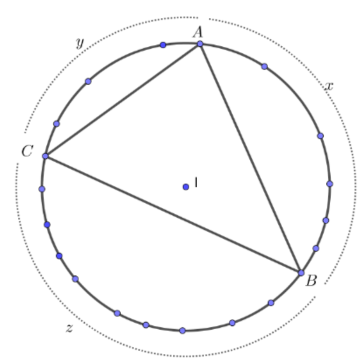
Câu 6. (2,0 điểm). Cho $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

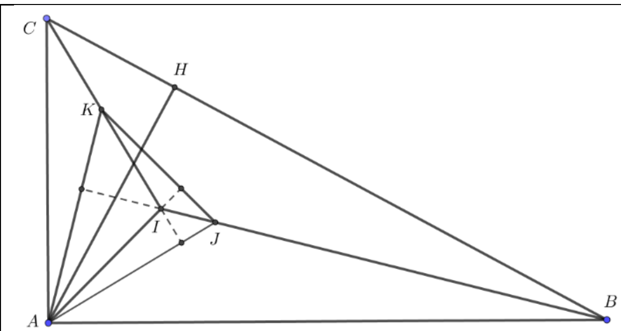
$$P=x^2y+y^2z+z^2x$$

---------- Hết --------

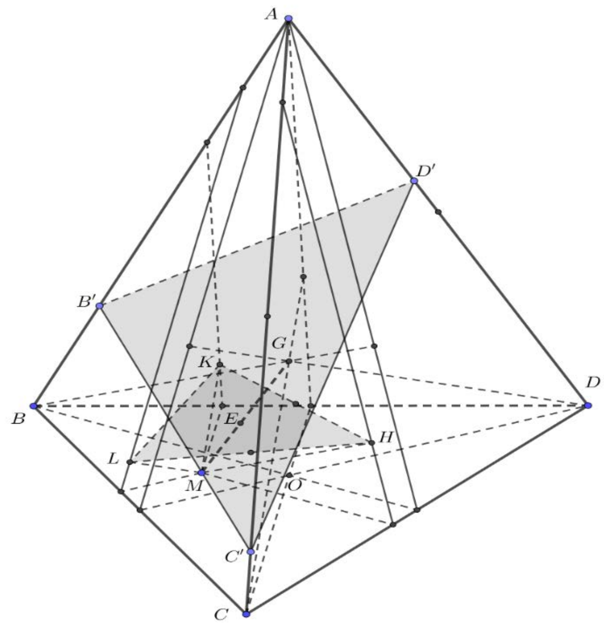
Lưu ý. *Thí sinh không được phép sử dụng* ***máy tính bỏ túi****. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

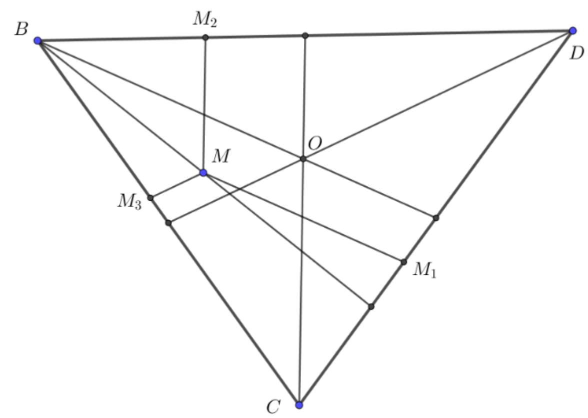
ĐÁP ÁN ĐỀ THI KSCL HSG TOÁN LỚP 11 LẦN 2- CỤM THANH CHƯƠNG- NĂM 2020

Câu	Nội dung	Điểm
1.a (3 đ)	Điều kiện: $\cos x \neq 0, \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$.	0.5
	PT $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 4\sin x.\cos x$	1
	$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{3})$	1
	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.	0.5
1.b (3 đ)	ĐK: $x - \frac{1}{x} \geq 0; 1 - \frac{1}{x} \geq 0; x \neq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0; x \geq 1$	0.5
	C1 (Bình phương): $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$. Nếu $-1 \leq x < 0$ thì PT vô nghiệm. Nếu $x \geq 1$ thì $x - \frac{1}{x} = x^2 - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x}$	1
	$\Leftrightarrow (x^2 - x) - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}(Loai), x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$(T/ m)	1.5
	C2 : (Đặt 2 ẩn phụ chuyển về HPT) ĐK PT có nghiệm $x \geq 1$. Đặt $a = \sqrt{x - \frac{1}{x}}, b = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ $\Rightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a^2 - b^2 = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a - b = \frac{x - 1}{x} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}(x + 1 - \frac{1}{x})$ $(x - \frac{1}{x}) - 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$(Loai)$; x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(Tm)$ **C3 : (Đánh giá theo BĐT Cauchy)** ĐK có nghiệm $x \geq 1$. BĐT $\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}, \forall a, b \geq 0$. $\sqrt{1(x - \frac{1}{x})} \leq \frac{1 + x - \frac{1}{x}}{2}; \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}.(x - 1)} \leq \frac{\frac{1}{x} + x - 1}{2} \Rightarrow VT \leq \frac{1 + x - \frac{1}{x}}{2} + \frac{\frac{1}{x} + x - 1}{2} = x = VP$ Phương trình tương đương với dấu bằng xảy ra $1 = x - \frac{1}{x}; \frac{1}{x} = x - 1, x \geq 1 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	
2.a (2 đ)	**C1 :** Chọn 1 đỉnh A có 60 cách, giả sử chọn thêm 2 đỉnh B, C thỏa mãn, hay AB, BC, CA là đường chéo của đa giác do đó giữa cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ luôn có ít nhất 1 đỉnh của đa giác.  	0.5
	Giả sử x, y, z là số đỉnh của đa giác nằm trên cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{BC}$, trong đó $x, y, z \in \mathbb{Z}; x, y, z \geq 1$	0.5
	Bài toán trở thành tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = 57$ $57 = \underbrace{1 + .. + 1}_{x} \underset{\uparrow}{+} \underbrace{1 + .. + 1}_{y} \underset{\uparrow}{+} \underbrace{1 + .. + 1}_{z}$ (có 56 dấu +)	0.5
	Do vai trò của 3 đỉnh như nhau nên có $\frac{60.C_{56}^2}{3} = 20C_{56}^2$ tam giác thỏa mãn.	0.5

	C2 : Số tam giác tạo thành là C_n^3. Số tam giác có 1 cạnh của đa giác là nC_{n-4}^1 . Số tam giác có 2 cạnh là cạnh của đa giác bằng n. Số tam giác thỏa mãn là $C_n^3 - nC_{n-4}^1 - n = \frac{n}{3}C_{n-4}^2$	
2.b (2 đ)	$a_1 = C_n^1; a_2 = C_n^2 + C_{2n}^1; a_3 = C_n^3$	0.5
	a_1, a_2, a_3 là một cấp số cộng nên $a_1 + a_3 = 2a_2$	0.5
	$C_n^1 + C_n^3 = 2(C_n^2 + C_{2n}^1) \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2n\right)$	0.5
	$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = -1(Loai); n = 10(Tm)$	0.5
3 (2 đ)	$(n-1)^2 u_{n-1} + u_n = n^2.u_n$	0.5
	$\Leftrightarrow (n-1)^2 u_{n-1} = (n^2-1).u_n$ $\Leftrightarrow u_n = \frac{n-1}{n+1}u_{n-1}$	0.5
	$u_n = \frac{n-1}{n+1}.\frac{n-2}{n}...\frac{1}{3}u_1 = \frac{4}{n(n+1)}$	0.5
	Tổng $S = u_1 + u_2 + ... + u_{2020} = 2020^2.u_{2020} = \frac{4.2020^2}{2020.2021} = \frac{8080}{2021}$	0.5
4 (2 đ)	Chứng minh tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC là trực tâm của tam giác AJK. $\widehat{ABC} = \widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{ABJ} = \widehat{JBH} = \widehat{HAK} = \widehat{KAC}$ $90^0 = \widehat{BAC} = \widehat{BAK} + \widehat{KAC} = \widehat{BAK} + \widehat{ABJ}$ $\Rightarrow AK \perp BJ$. Tương trự chứng minh $CK \perp AJ$ Do đó I là trực tâm của tam giác AJK.  	0.5
	Gọi $I(a;b)$ ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AI}\overrightarrow{JK} = 0 \\ \overrightarrow{KI}\overrightarrow{AJ} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4(a-2) + 2(b-5) = 0 \\ 0(a-6) - 6(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow I(4;1)$	0.5
	Phương trình $BI : x - y - 3 = 0$ Phương trình $CI : y - 1 = 0$	0.25
	Một vecto chỉ phương của đường thẳng AI là $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = (1;-2)$. Gọi một vecto chỉ phương của đường thẳng chứa cạnh AB hoặc cạnh AC là $\vec{u}'(t,k)$ $\widehat{IAB} = \widehat{IAC} = 45^0 \Rightarrow \cos 45^0 = \|\cos(\vec{u}, \vec{u}')\| \Leftrightarrow \sqrt{2}\,\|t - 2k\| = \sqrt{5(t^2+k^2)} \Leftrightarrow 3t - k = 0, t + 3k = 0$. Với $3t - k = 0$ chọn $t = 1, k = 3 \Rightarrow \vec{u}'(1;3)$. Với $t + 3k = 0$ chọn $t = 3, k = -1 \Rightarrow \vec{u}' = (3;-1)$	0.5
	Phương trình AB: $3x - y - 1 = 0$. Phương trình AC: $x + 3y - 17 = 0$; $\{B\} = BI \cap AB \Rightarrow B(-1;-4)$; $\{C\} = CI \cap AC \Rightarrow C(14;1)$	0.25
5.a (2 đ)	Tính chất trọng tâm G của tứ diện ABCD $\overrightarrow{AO} = 4\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{AO} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{GA}$	0.5
	O là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AO}$	0.5

<table>
<tr><td></td><td>$\Leftrightarrow \frac{AB}{AB'}.\overrightarrow{AB'} + \frac{AC}{AC'}.\overrightarrow{AC'} + \frac{AD}{AD'}\overrightarrow{AD'} = 4\overrightarrow{AG}$.
Do đúng với mọi điểm A và 4 điểm B', C, D', G cùng thuộc mặt phẳng (P) nên
$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4.$</td><td>0.5

0.5</td></tr>
<tr><td>5.b
(2 đ)</td><td>Độ dài đường cao trong tam giác BCD là
$h_{TG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Độ dài đường cao của tứ diện ABCD là
$h_{TD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
$\frac{MH}{h_{TD}} = \frac{MM_1}{h_{TG}}$. Tương tự
$\frac{MK}{h_{TD}} = \frac{MM_2}{h_{TG}}$; $\frac{ML}{h_{TD}} = \frac{MM_3}{h_{TG}}$
Mặt khác
$S_{\Delta BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MCD} + S_{\Delta MBD}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a(MM_1 + MM_2 + MM_3) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$\Leftrightarrow MM_1 + MM_2 + MM_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Ta có $MM_1 + MM_2 + MM_3 = h_{TG}$
$\Leftrightarrow \frac{MM_1}{h_{TG}} + \frac{MM_2}{h_{TG}} + \frac{MM_3}{h_{TG}} = 1$
$\Rightarrow \frac{MM_1}{h_{TG}}.\overrightarrow{GB} + \frac{MM_2}{h_{TG}}.\overrightarrow{GC} + \frac{MM_3}{h_{TG}}.\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GM}$
Do E là trọng tâm của tam giác HKL nên ta có $3\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}$
$= -\frac{4}{3}\left(\frac{MM_1}{h_{TG}}.\overrightarrow{GB} + \frac{MM_2}{h_{TG}}.\overrightarrow{GC} + \frac{MM_3}{h_{TG}}.\overrightarrow{GD}\right) = -\frac{4}{3}\overrightarrow{GM}$



</td><td>0.5

0.5

0.5
0.5</td></tr>
<tr><td>6
(2 đ)</td><td>Giả sử y nằm giữa x và $z \Rightarrow z(x-y)(y-z) \geq 0$
$\Rightarrow xyz + z(x-y)(y-z) \geq 0$; $P = x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2y + y^2z + z^2x + xyz + z(x-y)(y-z)$
$= x^2y + yz^2 + 2xyz = y(x+z)^2$
$= \frac{1}{2}(2y)(x+z)(x+z) \leq \frac{1}{2.27}\left(2y + x + z + x + z\right)^3 = \frac{\left(2(x+y+z)\right)^3}{54} = \frac{4}{27}$
$\max P = \frac{4}{27}$ đạt được khi $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = 0$</td><td>0.5
0.5
0.5
0.5</td></tr>
</table>

Ghi chú: *Học sinh giải cách khác, nếu đúng thì cho điểm tối đa.*