

PHẦN I. Thí sinh ghi kết quả vào bài làm.

Bài 1: Giải phương trình: $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

Bài 2. Bảng giá cước Taxi Mai Linh như sau:

Giá mở cửa (0,6 km)	Giá cước các km tiếp theo	Giá cước từ km thứ 31
5000 đồng	15000 đồng	12000 đồng

Tính số tiền phải trả nếu đi quãng đường dài 60 km.

Bài 3. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$

Bài 4. Khi chia đa thức $f(x)$ cho các đa thức $x - 2$ và $x - 3$ thì được dư lần lượt là 5 và 7. Nếu chia đa thức $f(x)$ cho $x^2 - 5x + 6$ thì được thương là $x^2 - 1$. Tìm đa thức $f(x)$?

Bài 5. Cho dãy số viết theo quy luật như sau: 5; 7; 11; 19; Viết biểu thức biểu diễn số hạng thứ n của dãy số trên?

Bài 6. Cho các số dương a, b thỏa mãn $a^3 + b^3 = 6ab - 8$. Tính giá trị của biểu thức: $C = a^5 - b^4 + 3$

Bài 7. Xã A tổ chức giải giao hữu bóng đá theo hình thức thi đấu vòng tròn một lượt. Mỗi trận đấu, đội thắng được tính 3 điểm, đội hòa được tính 1 điểm và đội thua không có điểm nào. Kết thúc giải, Ban tổ chức nhận thấy số trận thắng gấp ba số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 330 điểm. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội tham gia?

Bài 8. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 - xy - 2021x + 2022y - 2023 = 0$

Bài 9. Mảnh vườn có dạng hình thang biết độ dài hai đáy lần lượt là 5m, 15m và độ dài hai đường chéo lần lượt là 16m và 12m. Tính diện tích mảnh vườn trên?

Bài 10. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Đường thẳng bất kỳ đi qua trọng tâm G cắt các cạnh AB và AC thứ tự tại E và F. Tính giá trị của biểu thức $\frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF}$

PHẦN II. Thí sinh trình bày lời giải vào bài làm.

Bài 11.

a) Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2$

b) Cho x, y thỏa mãn: $y^2 - 2x(y - 3) = 9$ và $y > 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{2x^2 + x - y - 1}{x^2}$

Bài 12. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, đường phân giác AD. Gọi I trung điểm của AD Đường trung trực của AD cắt BC ở K.

a) Chứng minh: $KA^2 = KB \cdot KC$

b) Chứng minh: $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$

c) Vẽ hình bình hành ABKM. Chứng minh rằng: $S_{AIBK} = S_{IMK}$

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{5b^3 - a^3}{3b^2 + ab} + \frac{5c^3 - b^3}{3c^2 + bc} + \frac{5a^3 - c^3}{3a^2 + ca} \leq 1$$

----- **Hết** -----

Họ và tên:; SBD:

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG TOÁN 8

PHẦN 1. Mỗi câu đúng cho 1 điểm

Bài	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5
Đáp án	x=2; x=-2	806000 đồng	$\frac{x+y}{xy}$	$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 7x - 5$	$3 + 2^n$

Bài	Bài 6	Bài 7	Bài 8	Bài 9	Bài 10
Đáp án	19	16	(2023; 2023); (2021; 2023)	96m ²	3

Sơ lược giải

Bài 1. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - 3^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 2: Số tiền phải trả:

$$5000 + 15000 \cdot (30 - 0,6) + 12000 \cdot 30 = 5000 + 441000 + 360000 = 806000 \text{ (đồng)}$$

Bài 3: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2 y}{xy(x+y)} + \frac{(y^2 - x^2)(x+y)}{xy(x+y)} - \frac{xy^2}{xy(x+y)} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$

$$= \frac{2}{x} - \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2}{x} + \frac{x-y}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

Bài 4: f(x) chia cho $x^2 - 5x + 6$ dư nếu có là đa thức bậc nhất.

Đặt: $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1) + ax + b$

Khi đó: $f(2) = 5 \Leftrightarrow 2a + b = 5$; $f(3) = 7 \Leftrightarrow 3a + b = 7$

Ta tìm được: $a = 2$, $b = 1$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1) + 2x + 1 = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 7x - 5$

Bài 5. :

$5 = 3 + 2^1$; $7 = 3 + 2^2$; $11 = 3 + 2^3$; $19 = 3 + 2^4$; ... biểu thức biểu diễn số hạng thứ n của dãy số trên là $3 + 2^n$

Bài 6.

$$a^3 + b^3 = 6ab - 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 2^3 = 3.a.b.2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+2) \left[(a-b)^2 + (b-2)^2 + (2-a)^2 \right] = 0 \Leftrightarrow a = b = 2$$

(do a, b là các số dương $\Rightarrow a + b + 2 > 0$)

Với $a = b = 2$ thì: $C = 2^5 - 2^4 + 3 = 19$

Bài 7: Gọi số trận hòa là x, số trận thắng thua là 3x. Mỗi trận hòa mỗi đội được 1 điểm, nên mỗi trận hòa có 2 điểm; mỗi trận thắng thua được 3 điểm nên ta có: $3.3x + 2.x = 330$.

Ta tìm được $x = 30$. Vậy số trận hòa là 30, số trận thắng thua là 90, tổng cộng có 120 trận.

Có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt nên có $\frac{(n-1)n}{2}$ trận đấu

Do đó ta có: $\frac{(n-1)n}{2} = 120 \Rightarrow n = 16$

Bài 8.

$$x^2 - xy - 2021x + 2022y - 2023 = 0 \Leftrightarrow x^2 - xy + x - 2022x + 2022y - 2022 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x - y + 1) - 2022(x - y + 1) = 1 \Leftrightarrow (x - 2022)(x - y + 1) = 1$$

Ta tìm được các cặp số nguyên $(x; y)$ là: $(2023; 2023); (2021; 2023)$

Bài 9.

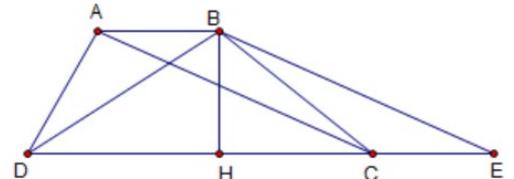
Lấy điểm E trên tia DC sao cho $BE \parallel AC$.

Khi đó ABEC là hình bình hành nên $BE = AC = 16m$,
từ đó $DE = 20m$

Vì $BD^2 + BE^2 = DE^2$ nên tam giác DBE vuông

$$\Delta HDB \sim \Delta BDE \Rightarrow \frac{BH}{BE} = \frac{BD}{DE} \Rightarrow BH = \frac{BE \cdot BD}{DE} = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9,6$$

$$\text{Diện tích hình thang ABCD: } \frac{(5+15) \cdot 9,6}{2} = 96 \text{ (m}^2\text{)}$$



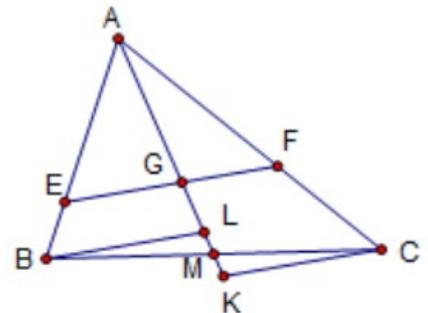
Bài 10.

Kẻ $BL \parallel EF, CK \parallel EF$. Ta có:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AI}{AG}; \frac{AC}{AF} = \frac{AK}{AG} \Rightarrow \frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF} = \frac{AI}{AG} + \frac{AK}{AG} = \frac{AI + AK}{AG}$$

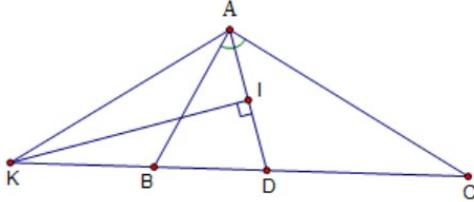
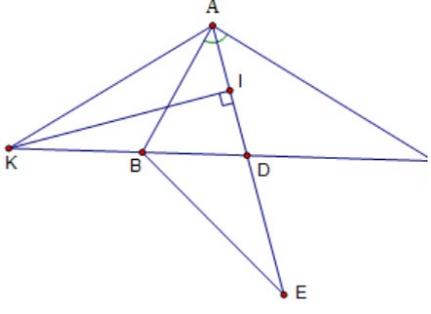
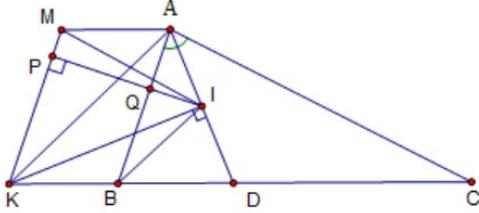
Mà $AI + AK = AM - MI + AM + MK = 2AM$ (do $MI = MK$)

$$\text{Do đó: } \frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF} = \frac{AI + AK}{AG} = \frac{2AM}{AG} = \frac{2AM}{\frac{2}{3}AM} = 3$$



PHẦN II. Tự luận

Bài	Nội dung	Điểm
11a) 3 điểm	<p>Do $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, nên ta chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được: $\left(x - 3 + \frac{3}{x}\right)\left(x - 2 + \frac{3}{x}\right) = 2$</p> <p>Đặt $a = x + \frac{3}{x}$ ta có: $(a - 3)(a - 2) = 2 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a - 4) = 0$</p> <p>+) Với $a = 1$: $x + \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0$ vô nghiệm</p> <p>+) Với $a = 4$: $x + \frac{3}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1; x = 3$</p> <p>Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 1$ và $x = 3$</p>	1,5 1,5
11b) 2 điểm	<p>$y^2 - 2x(y - 3) = 9 \Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 - x^2 + 6x - 9 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (y - x)^2 - (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)(y - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 3$</p> <p>Vì $y > 3 \Leftrightarrow y - 3 > 0$</p> <p>Thay vào biểu thức ta được:</p>	0,5

	$B = \frac{2x^2 + x - 2x + 3 - 1}{x^2} = 2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{16} \right) + \frac{15}{8}$ $= 2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{8} \geq \frac{15}{8}$ $B = \frac{15}{8} \text{ khi } x = 4 \Rightarrow y = 5 \text{ (thỏa mãn)}$ <p>Vậy B nhận giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{15}{8}$ khi $x=4$</p>	1,5	
12a) 2 điểm	<p>a) Ta có:</p> $\widehat{KAB} + \widehat{BAD} = \widehat{KAD} = \widehat{KDA}$ <p>(Vì tam giác KAD cân tại A)</p> $\widehat{KDA} = \widehat{DAC} + \widehat{C}$ <p>(t/c góc ngoài của tam giác)</p> $\Rightarrow \widehat{KAB} + \widehat{BAD} = \widehat{DAC} + \widehat{C}$ <p>Mà $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (AD là phân giác) $\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta KAB \sim \Delta KCA$</p> $\Rightarrow \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KA} \Rightarrow KA^2 = KB \cdot KC$		2
12b) 1 điểm	<p>b) Kẻ tia Bx cắt AD tại E sao cho:</p> $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ <p>Hai ΔABE và ΔADC có:</p> $\widehat{ABE} = \widehat{ADC} \text{ và } \widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ $\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$ $\Rightarrow AB \cdot AC = AE \cdot AD(1)$ <p>Hai ΔACD và ΔBED có:</p> $\widehat{BED} = \widehat{ACD} \text{ (vì } \Delta ABE \sim \Delta ADC); \widehat{BDE} = \widehat{ADC} \text{ (đối đỉnh)}$ $\Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta BED \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{DC}{DE} \Rightarrow DB \cdot DC = AD \cdot DE(2)$ <p>Trừ vế theo vế của (1) cho (2) ta có:</p> $AB \cdot AC - BD \cdot DC = AD \cdot (AE - DE) = AD^2$ <p>Hay $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$</p>		1
12c) 1 điểm	<p>c) Kẻ $IP \perp MK \Rightarrow IP \perp AB$.</p> <p>Gọi Q là giao của IP và AB</p> $S_{AIBK} = S_{ABK} + S_{ABI}$ $= \frac{1}{2} S_{ABKM} + S_{ABI}$ $= \frac{1}{2} PQ \cdot KM + \frac{1}{2} IQ \cdot AB$ $= \frac{1}{2} KM \cdot (PQ + IQ) = \frac{1}{2} KM \cdot IP = S_{IMK}$		1
13 1 điểm	<p>Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương và có tổng bằng 1.</p>	1	

Chúng minh rằng: $\frac{5b^3 - a^3}{3b^2 + ab} + \frac{5c^3 - b^3}{3c^2 + bc} + \frac{5a^3 - c^3}{3a^2 + ca} \leq 1$

Ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$\Rightarrow a^3 + 6b^3 \geq 5b^3 + ab(a + b) \Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq 6b^3 - ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq 6b^3 - ab^2 - a^2b \Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq (2b - a)(3b^2 + ab)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5b^3 - a^3}{3b^2 + ab} \leq 2b - a(1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{5c^3 - b^3}{3c^2 + bc} \leq 2c - b(2); \frac{5a^3 - c^3}{3a^2 + ca} \leq 2a - c(3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được

$$\frac{5b^3 - a^3}{3b^2 + ab} + \frac{5c^3 - b^3}{3c^2 + bc} + \frac{5a^3 - c^3}{3a^2 + ca} \leq 2b - a + 2c - b + 2a - c = (a + b + c) = 1$$

Lưu ý: Mọi cách giải đúng đều cho điểm tối đa.