

**Bài 1 (4,0 điểm).** Cho dãy  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = 3\sqrt{3}$  và  $x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \geq 1$ .

$$\text{Đặt } u_n = \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

- Chứng minh rằng: dãy  $(x_n)$  là dãy tăng, dãy  $(u_n)$  là dãy giảm.
- Tìm  $\lim u_n$ .

**Bài 2 (4,0 điểm).** Tìm tất cả các hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục tại 0 biết  $f(0) = 2023$  và thỏa mãn điều kiện  $f(2x) = f(x) \cos x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ .

**Bài 3 (4,0 điểm).** Cho  $P(x)$  là đa thức bậc 2023 với các hệ số thực không âm. Giả sử  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng các số  $\sqrt[2023]{P(a)}, \sqrt[2023]{P(b)}, \sqrt[2023]{P(c)}$  cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn.

**Bài 4 (4,0 điểm).** Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $BC$  cố định trên  $(O)$ . Một điểm  $A$  thay đổi trên  $(O)$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn và  $AB > BC$ . Các đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Gọi  $Q$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Đường thẳng  $QM$  cắt  $BC$  tại  $P$  và cắt  $(O)$  tại  $R$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BRP$  cắt  $BQ$  tại  $S$ .

- Chứng minh  $CH$  là trục đẳng phương của các đường tròn đường kính  $BM$  và  $AN$ .
- Chứng minh các điểm  $S, F, R$  thẳng hàng và đường thẳng  $MF$  đi qua một điểm cố định khi  $A$  thay đổi.

**Bài 5 (4,0 điểm).** Có  $n (n \geq 2)$  đội bóng tham gia một giải đấu bóng đá theo thể thức đá vòng tròn một lượt. Mỗi trận có kết quả là hòa hoặc phân thắng thua. Nếu kết quả hòa thì mỗi đội đều được 1 điểm. Nếu kết quả phân thắng thua thì đội thắng được 3 điểm, đội thua được 0 điểm. Gọi  $h$  là hiệu số điểm của đội đứng đầu bảng và đội đứng cuối bảng. Nếu chỉ xét các tình huống sau khi giải đấu kết thúc không có hai đội nào bằng điểm nhau thì giá trị nhỏ nhất có thể của  $h$  là bao nhiêu trong các trường hợp:

- Số đội tham dự là  $n = 3$ .
- Số đội tham dự là  $n = 42$ .

----- Hết -----

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....