

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày khảo sát: 25/02/2023

(Đề gồm: 01 trang).

**Bài 1:** (4 điểm)

1) Tính giá trị biểu thức

$$A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[ 5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$$

2) Tính tích  $P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \dots \left(1 + \frac{7}{2900}\right)$

3) Tính giá trị biểu thức  $Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$  với a, b, c thỏa mãn:  $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$

**Bài 2:** (4 điểm)

1) Tìm x, biết:  $\frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} = \frac{16}{125}$

2) Tìm x, biết:  $\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3} = 1$

3) Tìm x, y biết:  $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$

**Bài 3:** (4 điểm)

1) Số A được chia thành ba phần tỉ lệ theo  $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ . Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

2) Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn:  $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$

3) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn  $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ .

Chứng minh rằng:  $abcd + 2023$  viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương

**Bài 4:** (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao của CD và BE, K là giao của AB và DC.

a) Chứng minh rằng:  $\triangle ADC = \triangle ABE$  và  $\widehat{DIB} = 60^\circ$ .

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh:  $\triangle AMN$  đều.

c) Chứng minh rằng: IA là phân giác của góc DIE.

**Bài 5:** (2 điểm) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

-----  
-----**Hết**-----

Họ tên học sinh:.....; Số báo danh:.....

Bài	Đáp án	Điểm
<b>Bài 1</b> 4 điểm	1) Tính $A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[ 5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$	
	$A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[ 5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (3^{12} - 3^{12} - 99^{90}) \right] \right\}$	0,5
	$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[ 5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} - 99^{99} \right] \right\}$	0,25
	$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - 5 \cdot 2^3 + (-7)^2 - \frac{1}{3} + 99^{99} \right\}$	0,25
	$= 99^{99} - \frac{4}{3} + 40 - 49 + \frac{1}{3} - 99^{99} = -10$	0,25
	Vậy $A = -10$	0,25
	2) $P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \dots \left(1 + \frac{7}{2900}\right) = \frac{16}{9} \cdot \frac{27}{20} \cdot \frac{40}{33} \dots \frac{2907}{2900}$	0,25
$= \frac{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 10 \dots 51 \cdot 57}{1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 11 \dots 50 \cdot 58}$	0,5	
$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 51}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 50} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \dots 57}{9 \cdot 10 \cdot 11 \dots 58}$	0,25	
$= \frac{51 \cdot 8}{58} = \frac{204}{29}$		
Vậy $P = \frac{204}{29}$	0,5	
3) Tính giá trị $Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ với a, b, c thỏa mãn: $(3a - 2b)^2 +  4b - 3c  \leq 0$		
Vì $(3a - 2b)^2 \geq 0;  4b - 3c  \geq 0$ nên để $(3a - 2b)^2 +  4b - 3c  \leq 0$ thì: $\begin{cases} (3a - 2b)^2 = 0 \\  4b - 3c  = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 4b = 3c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$	0,5	
Đặt $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = 2k; b = 3k; c = 4k$ Thay vào Q ta có: $Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{(2k)^3 + (3k)^3 + (4k)^3}{2k \cdot 3k \cdot 4k} = \frac{k^3(2^3 + 3^3 + 4^3)}{24k^3} = \frac{33}{8}$	0,5	
<b>Bài 2</b> 4 điểm	1) Tìm x, biết: $\frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} = \frac{16}{125}$	
	$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = \frac{16}{125}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot 5 = \frac{16}{125}$	0,25

	$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} (1+15) = \frac{16}{125}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \frac{1}{125}$	0,5
	$x-1=3$ $x=4$ <p>Vậy <math>x=4</math></p>	0,25
	<b>2) Tìm x, biết:</b> $\left(3-\left x-\frac{1}{2}\right \right) \cdot \left(\frac{8}{15}-\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3} = 1$	
	$\left(3-\left x-\frac{1}{2}\right \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	0,5
	$3-\left x-\frac{1}{2}\right =1 \Rightarrow \left x-\frac{1}{2}\right =2$	0,5
	$1) x-\frac{1}{2}=2 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ $2) x-\frac{1}{2}=-2 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ <p>Vậy <math>x \in \left\{\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right\}</math></p>	0,5
	<b>3) Tìm x, y biết:</b> $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$	
	Nếu $3x+7y-5=0$ thì $\begin{cases} 3x-1=0 \\ 7y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{7} \end{cases}$	0,5
	Nếu $3x+7y-5 \neq 0$ thì áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:	
	$\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{9} = \frac{3x+7y-5}{3x}$ $\Rightarrow x=3$	0,5
	$\Rightarrow \frac{3 \cdot 3 - 1}{4} = \frac{7y - 4}{5} \Rightarrow y=2$ <p>Vậy <math>(x, y) \in \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{7}\right), (3; 2)\right\}</math></p>	0,5
<b>Bài 3</b> 4 điểm	<b>1) Số A được chia thành ba phần, tỉ lệ theo <math>\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}</math>. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.</b>	
	Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c	
	Theo bài ra ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$	0,25
	Ta có: $a:b:c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = 24:45:10 \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10}$	0,25
	Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:	
	$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24309}{2701} = 9$	0,5

	$\Rightarrow a^2 = 576 \cdot 9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$ $b = \pm 135; c = \pm 30$	0,25
	<b>Vậy</b> $(a, b, c) \in \{(72; 135; 30), (-72; -135; -30)\}$	0,25
	<b>2) Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn:</b> $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$	
	Ta có: $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$ $x^2 - 5x + 9 = xy - 4y$ $\Rightarrow x^2 - 5x + 9 = y(x-4)$	0,25
	$\Rightarrow x^2 - 5x + 9 : x - 4$ $\Rightarrow x(x-4) - (x-4) + 5 : x - 4 \Rightarrow 5 : x - 4$ $\Rightarrow x - 4 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$	0,25
	Với $x = -1$ thì $y = -3$ Với $x = 3$ thì $y = -3$ Với $x = 5$ thì $y = 9$ Với $x = 9$ thì $y = 9$	0,25
	<b>Vậy</b> $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$ <i>Học sinh có thể viết đẳng thức đã cho về dạng: <math>(x-4)(x-y-1) = -5</math></i> <i>Từ đó tìm ra các cặp số (x, y)</i>	0,25
	<b>3) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn <math>a^2 = b^2 + c^2 + d^2</math>. Chứng minh rằng: <math>abcd + 2023</math> viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương</b>	
	Ta có: $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m+1) + 1$ . Do đó ta có số chính phương lẻ chia 8 luôn dư 1	0,25
	Nếu a, b, c, d đều lẻ thì $a^2, b^2, c^2, d^2$ chia 8 đều dư 1 dẫn đến không xảy ra $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3)	0,25
	Vậy trong các số a, b, c, d phải có ít nhất một số chẵn nên $abcd + 2023$ lẻ	0,25
	Đặt $abcd + 2023 = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ $= (k+1-k)(k+1+k) = (k+1)^2 - k^2$ (dpcm)	0,25
Bài 4 6 điểm		

