

**Câu 1:** (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức  $M = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$ , với  $a \neq 0$ ;  $a \neq 1$ .

a) Rút gọn  $M$ .

b) Tìm giá trị của  $a$  để  $M$  đạt giá trị lớn nhất.

2) Cho các số thực  $a, b$  thỏa mãn:  $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = 3a^3 - 2b^4 + 2022$ .

**Câu 2:** (4,0 điểm)

1) Giải phương trình:  $x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

2) Tìm đa thức  $f(x)$  biết  $f(x)$  chia cho  $(x-3)$  dư 2;  $f(x)$  chia cho  $(x+4)$  dư 9 và  $f(x)$  chia cho  $(x^2 + x - 12)$  được thương là  $(x^2 + 3)$  và còn dư.

**Câu 3:** (4,0 điểm)

1) Tìm các cặp số tự nhiên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $x^2 + 3^y = 3026$

2) Cho  $a$  và  $b$  là các số tự nhiên thỏa mãn  $2a^2 + a = 3b^2 + b$ . Chứng minh rằng:  $a - b$  và  $2a + 2b + 1$  là các số chính phương.

**Câu 4:** (6,0 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  nhọn có các đường cao  $AD, BE, CF$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

1)  $\Delta ABC$  đồng dạng với  $\Delta AEF$ .

2)  $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$ .

3)  $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \geq 4$ .

**Câu 5:** (1,0 điểm)

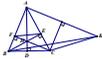
Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $y^2 + yz + z^2 = 1011 - \frac{3x^2}{2}$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $Q = x + y + z$ .

.....**HẾT**.....

**Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.**

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu 1		5.0
1.1a (2,0 điểm)	$M = \left[ \frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)}$	0.5
	$M = \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$	0.5
	$M = \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$	0.5
	$M = \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4}$	0.5
KL		
1.1b (1.5 điểm)	Ta có $M = \frac{4a}{a^2+4} = \frac{(a^2+4) - (a^2-4a+4)}{a^2+4} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$	0.5
	Vì $\frac{(a-2)^2}{a^2+4} \geq 0$ với mọi $a$ nên $1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \leq 1$ với mọi $a$ . Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(a-2)^2}{a^2+4} = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (tm)	0.5
	Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a = 2$ .	0.5
1.2 (1.5 điểm)	Ta có $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a + 2b + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \\ (b+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$	0.5
	Thay $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ vào $M = 3a^3 - 2b^4 - 1$ ta được $M = 3.1^3 - 2(-1)^4 + 2022 = 2023$	0.5

	Vậy giá trị của biểu thức $M = 2023$ .	
<b>Câu 2</b>		<b>4.0</b>
<b>2.1</b> <b>(2.0 điểm)</b>	+) $x = 0$ không là nghiệm của phương trình +) Chia cả hai vế của phương trình cho $x^3$ ta được: $x^3 - 3x^2 + 6x - 7 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0$	0.5
	Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t$	0.5
	Thay vào phương trình ta được: $t^3 - 3t - 3(t^2 - 2) + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$	0.5
	$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$	
	$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm  KL	0.5
<b>2.2</b> <b>(2.0 điểm)</b>	Do $f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$ được thương là $x^2 + 3$ còn dư nên ta có: $f(x) = (x+4)(x-3)(x^2 + 3) + a.x + b$	0.5
	Cho $x = -4 \Rightarrow f(x) = -4a + b = 9$  Cho $x = 3 \Rightarrow f(x) = 3a + b = 2$	0.5
	Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} -4a + b = 9 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$	0.5
	Đa thức cần tìm: $f(x) = (x+4)(x-3)(x^2 + 3) - x + 5$	0.5

<b>Câu 3</b>		<b>4.0</b>
<b>3.1</b> (2 điểm)	Xét $y = 0 \Rightarrow x^2 = 3026 - 1 = 3025 \Rightarrow x = 55$	0.5
	Xét $y > 0 \Rightarrow 3^y : 3$ còn $x^2 : 3$ dư 0 hoặc 1	0.5
	$\Rightarrow x^2 + 3^y : 3$ dư 0 hoặc dư 1, Mà 3026 chia 3 dư 2, vô lý	0.5
	KL: Vậy $(x; y) = (55; 0)$ .	0.5
<b>3.2</b> (2 điểm)	$2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (2a^2 - 2b^2) + (a - b) = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2$ (1) Gọi $(a - b; 2a + 2b + 1) = d$ .	0.5
	Khi đó: $b^2 = (a - b)(2a + 2b + 1) : d^2 \Rightarrow b : d$	0.5
	Mà $a - b : d \Rightarrow a : d \Rightarrow 2a + 2b : d \Rightarrow (2a + 2b + 1) - (2a + 2b) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$ Nhu vậy: $(a - b; 2a + 2b + 1) = 1$ .	0.5
	Từ đó, theo (1) suy ra: $a - b$ và $2a + 2b + 1$ là các số chính phương.	0.5
<b>Câu 4</b>		
<b>4.1</b> (2 điểm)	Chứng minh đúng: $\triangle AEB \square \triangle AFC$ .	0.5
	Suy ra: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$	0.5
	Chứng minh đúng: $\triangle ABC \square \triangle AEF$	1.0
<b>4.2</b> (2.0 điểm)	Chỉ ra được: $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$	0.5
	Tương tự: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$ .	0.5

	Suy ra: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB}}{S_{ABC}}$	0.5
	$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$	0.5
<b>4.3</b> <b>(1.0</b> <b>điểm)</b>	<p>Dựng đường thẳng <math>d</math> đi qua <math>C</math> song song với <math>AB</math>. Gọi <math>K</math> là điểm đối xứng với <math>A</math> qua <math>d</math>.</p> <p>Chứng minh được góc <math>BAK</math> vuông, <math>CK=AC</math>, <math>AK = 2CF</math>.</p> <p>Xét ba điểm <math>B, C, K</math> ta có <math>BK \leq BC + CK</math>.</p>	0.5
	<p>Tam giác <math>BAK</math> vuông tại <math>A</math> nên:</p> $AB^2 + AK^2 = BK^2 \Rightarrow AB^2 + AK^2 \leq (BC + CK)^2$ $\Rightarrow AB^2 + 4CF^2 \leq (BC + CK)^2 \Rightarrow 4CF^2 \leq (BC + CA)^2 - AB^2.$	0.5
	<p>Hoàn toàn tương tự ta có</p> $4AD^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2,$ $4BE^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2.$	0.5
	<p>Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có</p> $4(AD^2 + BE^2 + CF^2) \leq (AB + AC + BC)^2 \Leftrightarrow \frac{(AB + AC + BC)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \geq 4.$	0.5
<b>Câu 5</b>		
<b>(1</b> <b>điểm)</b>	<p>Ta có <math>y^2 + yz + z^2 = 1011 - \frac{3x^2}{2}</math></p> $\Leftrightarrow 2y^2 + 2yz + 2z^2 = 2022 - 3x^2$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 2022 - x^2 + 2xy - y^2 - z^2 + 2xz - x^2$ $\Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 2022 - (x - y)^2 - (x - z)^2 \leq 2022$ $\Leftrightarrow -\sqrt{2022} \leq x + y + z \leq \sqrt{2022}$	0.5

	$\Rightarrow x + y + z \text{ nhỏ nhất bằng } -\sqrt{2022} \text{ khi } x = y = z = \frac{-\sqrt{2022}}{3}$ $x + y + z \text{ lớn nhất bằng } \sqrt{2022} \text{ khi } x = y = z = \frac{\sqrt{2022}}{3}$	0.5

**Lưu ý khi chấm bài:**

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.

- Với bài toán hình học nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.