UBND HUYỆN QUẢNG XƯƠNG
TRƯỜNG THCS NGUYỄN BÁ NGỌC

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
CẤP HUYỆN MÔN TOÁN 8
NĂM HỌC 2022 - 2023
MÔN THI: TOÁN
Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (*4,0 điểm*) Cho biểu thức $P=\frac{x^2+x}{x^2-2x+1}:\left(\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2-x^2}{x^2-x}\right)$

1) Rút gọn biểu thức P

2) Tìm x để $P=\frac{-1}{2}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi x > 1

Bài 2: *(4,0 điểm)*

1. Tìm đa thức f(x) biết rằng: f(x) chia cho $x+2$ dư 10, f(x) chia cho $x-2$dư 22, f(x) chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư

2) Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{xz}{y^2+2xz}+\frac{xy}{z^2+2xy}$

Bài 3: *(4,0 điểm)*

1) (2 điểm) Tìm x; y nguyên biết:

$2x^2 + 2xy - 3x - y = 5$

2) (2 điểm) Cho 2 số tự nhiên a, b thỏa mãn: $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng 2a + 2b + 1 là số chính phương.

Bài 4: *(6 điểm)* Cho hình vuông ABCD. Qua A vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau lần lượt cắt BC tại P và R, cắt CD tại Q và S.

a) Chứng minh ΔAQR và ΔAPS là các tam giác cân.

b) QR cắt PS tại H; M, N là trung điểm của QR và PS. Chứng minh tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

c) Chứng minh P là trực tâm ΔSQR.

d) Chứng minh bốn điểm M, B, N, D thẳng hàng.

Bài 5: *(2,0 điểm)* Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện:

a + b + c =1

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

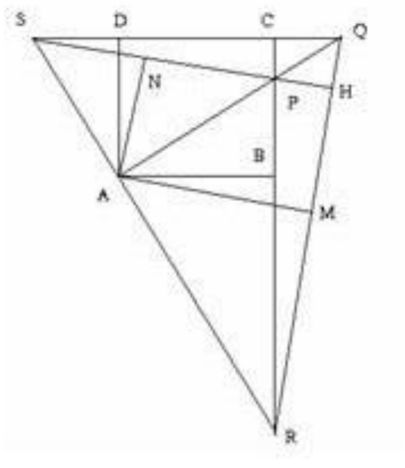
$M = 14(a^2+b^2+c^2) + \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$

HƯỚNG DẪN CHẤM

MÔN: TOÁN

BÀI	NỘI DUNG	ĐIỂM
Bài 1 (4điểm)	**Cho biểu thức** $P=\frac{x^2+x}{x^2-2x+1}:\left(\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2-x^2}{x^2-x}\right)$ **1) Rút gọn biểu thức P** **2) Tìm x để** $P=\frac{-1}{2}$ **3) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi x > 1**	
	1) ĐKXĐ : $\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 1\\ x\neq -1\end{cases}$	0,25
	$P=\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}:\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)}+\frac{x}{x(x-1)}+\frac{2-x^2}{x(x-1)}\right)$	0,25
	$P=\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}:\frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)}$	0,25
	$P=\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}:\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{x(x-1)}{x+1}=\frac{x^2}{x-1}$	0,5
	Vậy P = $\frac{x^2}{x-1}$ (với $x\neq 0$; $x\neq 1$; $x\neq -1$)	0,25
	2) Để $P=\frac{-1}{2}$ thì $P=\frac{x^2}{x-1}=\frac{-1}{2}$ với $x\in$ ĐKXĐ	0,25
	$\Rightarrow 2x^2=-x+1$ $\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$ $\Leftrightarrow 2x^2+2x-x-1=0$	0,25
	$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (TM ĐKXĐ)	0,25
	Hoặc x = - 1 (không TM ĐKXĐ Vậy $x=\frac{1}{2}$	0,25
	3) $P=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$	0,25
	$P=x+1+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+2$	0,25
	Vì x > 1 nên $x-1>0$ và $\frac{1}{x-1}>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 2 số	

	dương x – 1 và $\frac{1}{x-1}$ ta có: $x-1+\frac{1}{x-1}\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}=2$ Dấu “ = “ xẩy ra khi $x-1=\frac{1}{x-1}$ ⇨ $(x-1)^2=1$ ⇨ $x-1=1$ (vì $x-1>0$) ⇨ $x=2$ (TM) Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi x = 2	0,25 0,25 0,25
Bài 2 **(4 điểm)**	Giả sử f(x) chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư là $ax+b$. Khi đó: $f(x)=(x^2-4).(-5x)+ax+b$ Theo đề bài, ta có: $\begin{cases}f(2)=22\\f(-2)=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=22\\-2a+b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=16\end{cases}$ Do đó: $f(x)=(x^2-4).(-5x)+3x+16$ Vậy đa thức f(x) cần tìm có dạng: $f(x)=-5x^3+23x+16$.	0,5 0,5 0,5 0,5
	2) Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{xz}{y^2+2xz}+\frac{xy}{z^2+2xy}$ Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\Rightarrow\frac{xy+yz+xz}{xyz}=0\Rightarrow xy+yz+xz=0$ $\Rightarrow yz=-xy-xz$ $x^2+2yz=x^2+yz-xy-xz=x(x-y)-z(x-y)=(x-y)(x-z)$ Tương tự: $y^2+2xz=(y-x)(y-z)$; $z^2+2xy=(z-x)(z-y)$ Do đó: $A=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{xz}{(y-x)(y-z)}+\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$ $=\frac{yz(z-y)+xz(x-z)-xy(x-y)}{(x-y)(x-z)(z-y)}$ Biến đổi tử : $yz(z-y)+xz(x-z)-xy(x-y)=(z-y)(x-y)(x-z)$ Từ đó suy ra A = 1	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
	1) (2 điểm) Tìm x; y nguyên biết: $2x^2+2xy-3x-y=5$ $\Leftrightarrow 2x^2-x+2xy-y-2x+1=6$ $\Leftrightarrow (2x-1)(x+y-1)=6$ Vì x, y nguyên nên 2x – 1 là ước lẻ của 6. Xảy ra các TH sau :	0,25 0,25 0,25

Bài 3: **(4điểm)**	TH1 : $\begin{cases}2x-1=1\\x+y-1=6\end{cases}$ Giải ra được (x=1 ;y=6) TH2 : $\begin{cases}2x-1=-1\\x+y-1=-6\end{cases}$ Giải ra được (x=0 ;y=-5) TH3 : $\begin{cases}2x-1=3\\x+y-1=2\end{cases}$ Giải ra được (x=2 ;y=1) TH4 : $\begin{cases}2x-1=-3\\x+y-1=-2\end{cases}$ Giải ra được (x= -1 ;y=0) Vậy các cặp nghiệm nguyên (x;y) cần tìm (1;6) ; (0;-5); (2;1); (-1;0)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	2) Cho 2 số tự nhiên a, b thỏa mãn: $2a^2+a=3b^2+b$. Chứng minh rằng 2a + 2b + 1 là số chính phương. Ta có $2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow a-b+2a^2-2b^2=b^2$ $\Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1)=b^2$ (*) Gọi d là ước chung của (a – b, 2a + 2b+1) (d thuộc N^*) Ta có $\begin{cases}a-b \vdots d\\2a+2b+1 \vdots d\end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a+2b+1) \vdots d^2 \Rightarrow b^2 \vdots d^2 \Rightarrow b \vdots d$ Mà (a-b) $\vdots$ d nên a $\vdots$ d suy ra 2a+2b $\vdots$ d Lại có 2a+2b+1 $\vdots$ d nên 1 $\vdots$ d suy ra d=1. Do đó (a – b, 2a + 2b+1) =1 Từ (*) suy ra 2a + 2b + 1 là số chính phương	0,25 0,25 0,5 0,25 0,25 0,25 0,25
		
Bài 4 **(6đ)**	Vẽ đúng hình, cân đối đẹp. a) a) $\Delta ADQ = \Delta ABR$ vì chúng là hai tam giác vuông (2 góc có cạnh t.ư	0,25 0,25

	vuông góc) và DA = BD (cạnh hình vuông). Suy ra AQ=AR, nên ΔAQR là tam giác vuông cân. Chứng minh tương tự ta có: $\Delta ABP = \Delta ADS$ do đó AP =AS và ΔAPS là tam giác cân tại A. b) AM và AN là đường trung tuyến của tam giác vuông cân AQR và APS nên $AN \perp SP$ và $AM \perp RQ$.	0,5 0,5
	Mặt khác : $\widehat{PAN} = \widehat{PAM} = 45^0$ nên góc MAN vuông. Vậy tứ giác AHMN có ba góc vuông, nên nó là hình chữ nhật. c) Theo giả thiết: $QA \perp RS$, $RC \perp SQ$ nên QA và RC là hai đờng cao của ΔSQR. Vậy P là trực tâm của ΔSQR. d) Trong tam giác vuông cân AQR thì MA là trung điểm nên $AM = \frac{1}{2}QR$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	$\Rightarrow$ MA = MC, nghĩa là M cách đều A và C. Chứng minh tương tự cho tam giác vuông cân ASP và tam giác vuông SCP, ta có NA = NC, nghĩa là N cách đều A và C. Hay MN là trung trực của AC e) Vì ABCD là hình vuông nên B và D cũng cách đều A và C. Nói cách khác, bốn điểm M, N, B, D cùng cách đều A và C nên chúng phải nằm trên đường trung trực của AC, nghĩa là chúng thẳng hàng.	0,25 0,5
Bài 5: 2 điểm	Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ca \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ Vì a+b+c=1 nên $(a+b+c)^2 = 1 \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{1}{2}\left[1-(a^2+b^2+c^2)\right]$ Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2$ $=(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$ $=a^3+ ab^2 + b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a$ Vì a,b,c dương nên áp dụng bất đẳng thức Cosi cho các cặp số không âm ta có: $a^3+ ab^2 \geq 2a^2b$ $b^3+bc^2 \geq 2b^2c$ $c^3+ca^2 \geq 2c^2a$ Suy ra $a^2 + b^2 + c^2$ $=a^3+ ab^2 + b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a \geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)$ $\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ Do đó : $M \geq 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

	$= 14(a^2+b^2+c^2) + \dfrac{3\left[1-(a^2+b^2+c^2)\right]}{2(a^2+b^2+c^2)}$ $=14(a^2+b^2+c^2) + \dfrac{3}{2(a^2+b^2+c^2)} - \dfrac{3}{2}$ $=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + \left[\dfrac{27}{2}(a^2+b^2+c^2) + \dfrac{3}{2(a^2+b^2+c^2)}\right] - \dfrac{3}{2}$ $\geq \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} + 2\sqrt{\dfrac{27}{2}(a^2+b^2+c^2).\dfrac{3}{2(a^2+b^2+c^2)}} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{3}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{23}{3}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$	0,25 0,25 0,25

<u>Lưu ý khi chấm bài:</u>

- Nếu học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa
- Bài hình không vẽ hình hoặc vẽ sai hình thì không chấm điểm.